Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

KEYLA LINS BRUCK THEDIN

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR: EXPLORANDO DIMENSÕES E GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS POR MEIO DE NARRATIVAS

Orientador:

Humberto José Bortolossi

NITERÓI

MARÇO/2020

Keyla Lins Bruck Thedin

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Dimensões e Geometrias Não Euclidianas por Meio de Narrativas

Niterói – RJ

Março / 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

T374u Thedin, Keyla Lins Bruck
O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar : Explorando Dimensões e Geometrias Não Euclidianas por Meio de Narrativas / Keyla Lins Bruck Thedin ; Humberto José Bortolossi, orientador. Niterói, 2020.
65 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.12302854748

1. Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística. 2. Uso de Vídeos em Sala de Aula. 3. Narrativa. 4. Dimensões. 5. Produção intelectual. I. Bortolossi, Humberto José, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

Keyla Lins Bruck Thedin

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Dimensões e Geometrias Não Euclidianas por Meio de Narrativas

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Março / 2020

KEYLA LINS BRUCK THEDIN

O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR: EXPLORANDO DIMENSÕES E GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS POR MEIO DE NARRATIVAS

Dissertação apresentada por **KEYLA LINS BRUCK THEDIN** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Tecnologias no Ensino da Matemática.

Aprovada em: 02/03/2020

Banca Examinadora

Humberto José Bortolossi – Orientador
Doutor – Universidade Federal Fluminense

Dirce Uesu Pesco – Membra
Doutora – Universidade Federal Fluminense

Flávia Maria Pinto Ferreira Landim – Membra
Doutora – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Luzia da Costa Tonon Martarelli – Membra
Doutora – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

NITERÓI

2020

Dedico este trabalho a minha família que sempre me deu apoio e aos docentes que ainda lutam por uma educação melhor.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por me sustentar ao longo dessa trajetória, me guiando e me dando forças para continuar.

Ao meu orientador, Humberto José Bortolossi, que desde a graduação foi uma grande influência na minha carreira e que durante esse trabalho fez mais do que eu poderia esperar de um orientador.

Aos meus colegas de projeto pelos momentos de troca e experiências compartilhadas. Levarei comigo um pouquinho de cada um.

À Universidade Aberta do Brasil, à Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior, à Sociedade Brasileira de Matemática, ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada e à Universidade Federal Fluminense por possibilitarem e oferecerem o PROFMAT, programa do qual me orgulho de ter participado.

Ao meu esposo e familiares pela paciência ao longo desses anos e incentivo em todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

I call our world Flatland, not because we call it so, but to make its nature clearer to you,
my happy readers, who are privileged to live in Space.
(Edwin Abbott Abbott em Flatland: A Romance of Many Dimensions)

Resumo

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo dois roteiros detalhados para uso em sala de aula de vídeos relacionados com as temáticas de dimensão e geometrias não euclidianas: “Planolândia: O Filme” e “Planolândia^2: Esferolândia”. Cada roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.

Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, geometria, dimensões.

Abstract

In the last decade, there has been a remarkable increase in the production of audiovisual materials (documentaries, animations, films and short films) related to Mathematics and Statistics. With the aim of potentializing the didactic scope beyond the simple exhibition, a group of professors, undergraduate, and graduate students has cataloged the available videos and elaborated support material in the format of guidelines by the Film Society of Mathematics and Statistics Project of the Fluminense Federal University. This dissertation contributes to this project by offering two detailed guidelines for classroom use of videos related to the themes of dimensions and non-euclidean geometries in Mathematics: "Flatland: The Movie" and "Flatland^2: Sphereland". Each guideline includes, among various information, indications of learning objectives that, in our opinion, can be achieved through the video and, also, suggestions of questions that can be worked out immediately after each video is exhibited. More than a definitive text, it is expected that the guideline serves as a starting point for the teacher to make adaptations and modifications according to the needs and characteristics of his/her class. Our work also presents some theoretical highlights that seek to provide different perspectives on the role of narrative (storytelling) in human society. The goal is to try to frame the reasons why a video (a powerful form of narrative that unites image and sound) constitutes a didactic instrument for the teaching and learning of Mathematics and Statistics.

Keywords: teaching and learning of Mathematics and Statistics, use of videos in the classroom, narrative, storytelling, dimensions, non-euclidean geometries.

Sumário

1 Introdução

1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série "Isto é Matemática" apresentada por Rogério Martins; o canal "Numberphile" no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries "Dimensions" e "CHAOS" idealizadas e produzidas por Étienne Ghyz e colaboradores; alguns vídeos de "Os Simpsons"; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

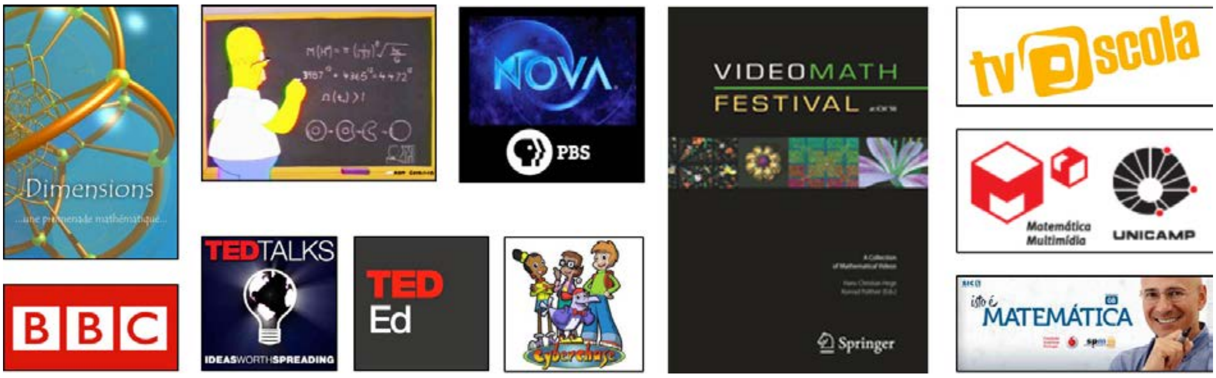


Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado alguns vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica**: faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas**: seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse**: uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Orientações metodológicas gerais**: uma lista de recomendações metodológicas para a condução da atividade em sala de aula.
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado**: um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização**: um texto e uma ou duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais**: uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas**: uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor**: orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações**: bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco**: colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação**: exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;

[a] Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

- **vídeo deslumbramento**: o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo-se outras dinâmicas por vezes mais pertinentes;
- **vídeo perfeição**: existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo**: não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utlização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/ vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes

(2013), Napolitano (2003, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015), Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<http://bit.ly/2OuJOUU>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<http://bit.ly/2yPI8Aa>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<https://bit.ly/2HurRY8>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* <https://bit.ly/1kcpcAR> mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto “O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação” da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<http://bit.ly/2OnYXqT>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<http://bit.ly/2F3hPMu>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<http://bit.ly/2OorDA8>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Fi1ms*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<https://goo.gl/j5wtX4>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assistem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabrán & Kozek (2015).

1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3 e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrandos que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrandos diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Dado que se pretende divulgar cada roteiro produzido em um *blog* para um melhor alcance na comunidade de professores, a formatação de um capítulo com roteiro é diferente, justamente para facilitar esse processo: as figuras não são numeradas, há uma bibliografia específica para o roteiro, trechos de observações para o professor podem eventualmente serem reaproveitadas em outros roteiros com alguma temática comum.

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

2 *Narrativas: Um Panorama*

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e *video games* são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

2.1 Narrativas e A História da Humanidade: Harari

Harari em seu livro “Sapiens: Uma Breve História da Humanidade” coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos “culturas”. A partir da Revolução Cognitiva[a], as narrativas históricas

[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

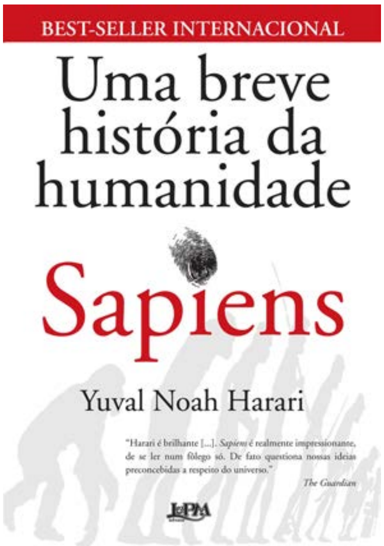


Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo "neuroeconomia".

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: "Por que os homens também a produziam?"e "Qual era exatamente a sua importância?". Sua busca por respostas resultaram no livro "A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós". Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED "Confiança, Moralidade – e Oxitocina" (<https://goo.gl/PmzKve>).

[b]Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.

Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a oxitocina (2011).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a oxitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da oxitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídio sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho "*Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*" ("Por que Histórias Inspiradoras Nos Fazem Reagir: A Neurociência da Narrativa", tradução nossa) de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de oxitocina e como a liberação de oxitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de oxitocina foi feita por uma aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de oxitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de oxitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuía, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: "Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom documentário faz.” (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada “A Narrativa em Matemática”, proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo. No que se segue, nessa seção, apresentaremos algumas ideias apresentadas pelo autor nessa palestra.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre “conhecimento” e “narrativa” é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus* (em Latim).

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: “se isso, então aquilo”. Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de “recheio da história”) e o explícito (que é a “moral da história”). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fosse uma cena isolada e informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso “linkar” as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o "bem" e o "mal"), quaternárias (que são as que têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um "paralelismo" entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o "bem" contra o "mal"); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é "verdadeira" ou ela é "falsa".
- A palavra "contar" tem, por um lado, na Matemática, a noção de "enumerar" e, por outro, em Português, ela traz a ideia de "narrar" (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com "Era uma vez ..." e terminam com "E foram felizes para sempre!"; em Matemática, as demonstrações começam com "Seja ..." e terminam com "Como queríamos demonstrar!".
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismos; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias (para mais detalhes, ver a referência Russell (2009)).

2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro "*Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*", editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press, em 2012, tem sua origem em uma conferência em Mykonos, na Grécia, em 2005, com a formação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor "o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais". A segunda conferência, que ocorreu em Delphi, também na Grécia, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras "Não perturbe meus círculos!" atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

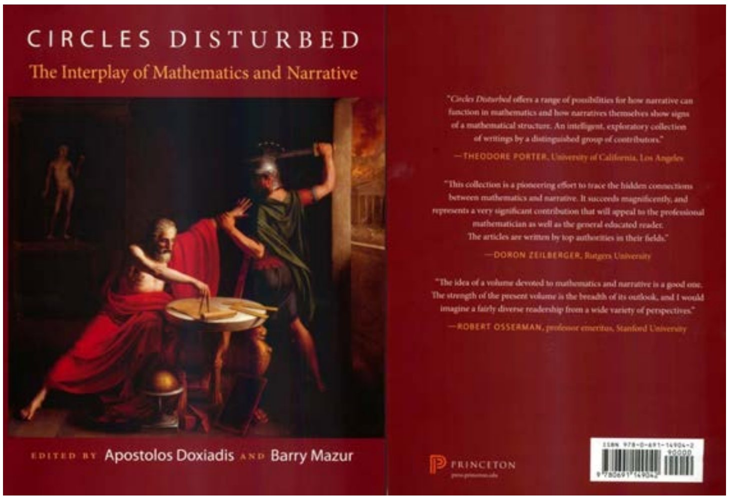


Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, ‘‘*A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric*" ("Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica"), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. As flechas cinzas indicam influências de domínios específicos nos dois domínios em que a prova matemática teve início (*Prática Jurídica e Política* e *Geometria Prática*).

Os termos "narrativa" e "história" são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as histórias são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), "narrativas são discursos que descrevem uma série de ações", um ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

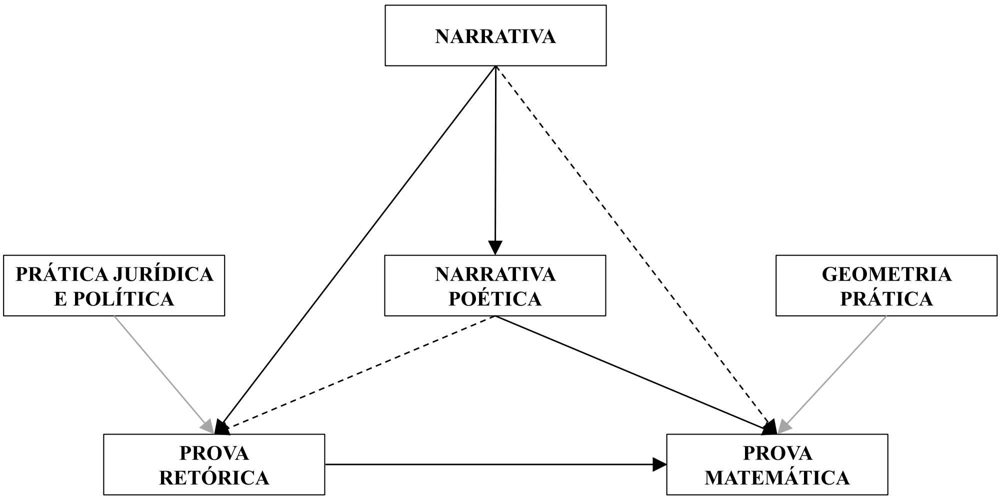


Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática.

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que "o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia". Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro "*Teaching Mathematics as Storytelling*" que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta *storytelling* em Matemática como um meio para se criar uma aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de *storytelling* no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor

no ensino da Matemática, uma disciplina que é frequentemente percebida como uma mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.

- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

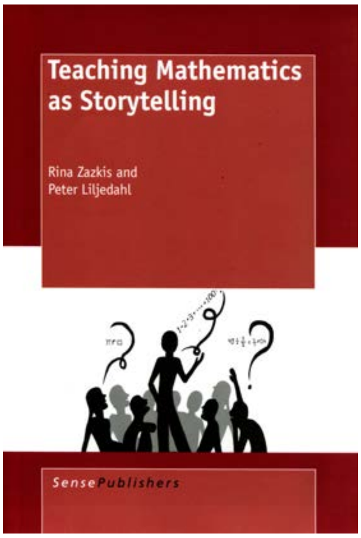


Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.

- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.
- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, "fidelizar o cliente". Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

> *Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [...] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [...] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.*
>
> (Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:

> *As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [...] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.*
>
> (Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

[c]Aqui, estamos usando "estória" seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de "história". De fato, atualmente, os dois termos têm sido usados como sinônimos.

3 Planolândia: O Filme

Faixa de classificação etária: Livre L.

Áudio: Inglês.

Legendas: Português

Título original: *Flatland: The Movie*.

Gênero: Animação.

Duração: 35 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: Flat World Productions (2007).

Tópicos matemáticos abordados:Geometria; Dimensões; Polígonos; Sólidos.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental II; Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Teologia; Sociologia.

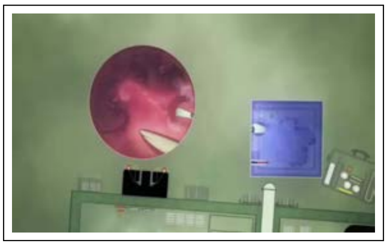
Marcadores: Flatland; Planolândia; Dimensões.

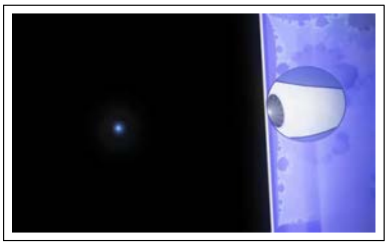
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias): H6, H7, H8 e H9.

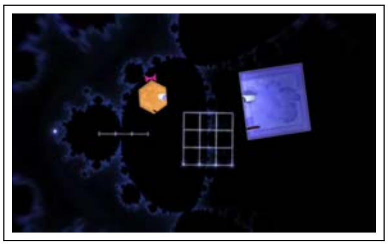
Link para o arquivo da legenda: <http://bit.ly/3cbhnIy>.

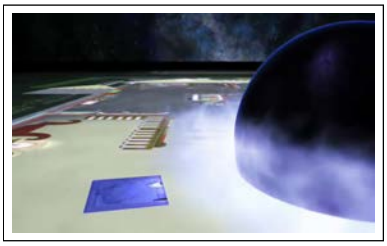
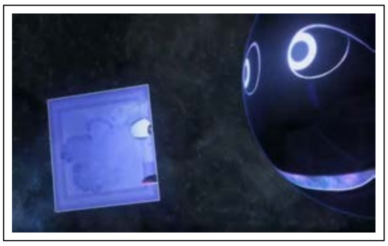
Página web oficial: <http://flatlandthemovie.com/>.

Imagens selecionadas








Sinopse

Esta animação é baseada no clássico livro “*Flatland: A Romance of Many Dimensions*” (“Planolândia: Um Romance de Muitas Dimensões”) escrito em 1884 pelo professor, escritor e teólogo britânico Edwin Abbott Abbott (1838-1926). O romance é uma sátira social que expõe um retrato da sociedade londrina e seus preconceitos da época por meio de associações com objetos matemáticos. O filme mostra Artur Quadrado e sua neta curiosa Hex que começa a se perguntar se haveria algo além de seu mundo plano, uma questão tida como heresia em Planolândia. Após a visita de um ser misterioso da Espaçolândia, Artur Quadrado e sua neta Hex tentam, arriscando suas próprias vidas, convencer os habitantes de Planolândia que a terceira dimensão é real.

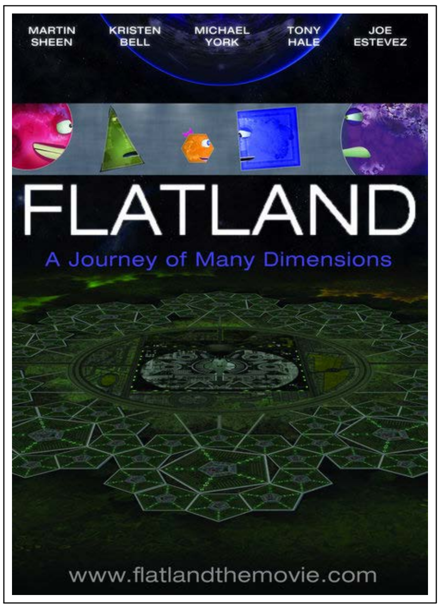
Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

O vídeo pode ser usado para motivar e introduzir o conceito de dimensão e de seções planas, principalmente com crianças mais jovens.

Sensibilização (para montar um cartaz)

Imagine viver em um mundo bidimensional onde os habitantes são polígonos que acreditam não haver nada além de seu mundo plano. Como mostrar que existe algo além: uma terceira dimensão? Como explicar essas noções para alguém que só conhece as direções de seu mundo plano?

Nesta animação, você conhecerá a jornada de Artur Quadrado e sua neta Hex para convencer os planolandeses que seu universo é muito maior do que imaginavam.



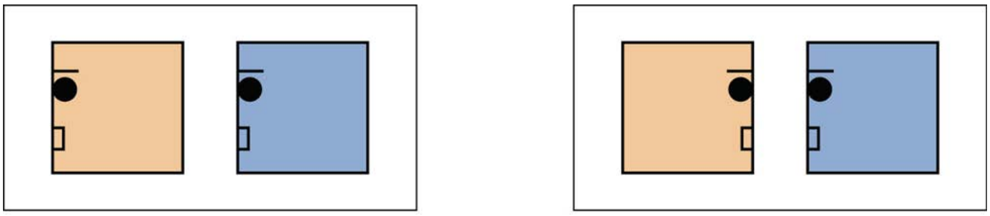
Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O quê?
3. O que marca a medida de inteligência ou hierarquia social em Planolândia?
4. Explique a lei de descendência.
5. No início da animação, Artur Quadrado e Hex ouvem o axioma do dia: "É a configuração que faz o homem!". Na sua opinião, o que isso significa? Como essa frase se relaciona com as leis de descendência?
6. Quando Artur Quadrado explica as leis de descendência, sua neta Hex pergunta sobre o que aconteceu com seus pais. Artur Quadrado então responde com uma frase que os Círculos costumam dizer: "Uma boca quieta é uma boca que sorri.". Na sua opinião, o que você acha que essa frase significa?
7. Para Hex, o que é um superquadrado? Seguindo a lógica de Hex, como você imagina o que seria um super-hexágono?
8. Em um certo momento do vídeo, Artur Quadrado diz para a sua neta que os Círculos são sábios e superiores, pois eles possuem um número infinito de lados. Na sua opinião, de acordo com a lei de descendência, é realmente possível existir um círculo em Planolândia? Por quê?

9. Admitindo que dois habitantes da Linhalândia não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, seria possível para o Rei de Linhalândia trocar de lugar suas rainhas da esquerda e da direita?
10. Como o Rei da Linhalândia sabe que a rainha da direita realmente está na direita?
11. Um habitante de Planolândia ao olhar para outro habitante, que forma geométrica ele vê?
12. Que artefato da terceira dimensão foi dado à Planolândia há muito tempo e agora reside na área 33H? Como este artefato aparece geometricamente em Planolândia?
13. A figura a seguir exibe duas situações que aparecem no filme. A partir da Situação 1, que movimento o quadrado laranja tem que fazer para conseguir ficar como na Situação 2, isto é, de frente para o quadrado azul com bocas e olhos alinhados? Tal movimento poderia, de fato, ser realizado por um planolandês?



Situação 1 Situação 2

14. Em uma certa parte do vídeo, Artur Quadrado tem ideias sobre dimensões que não são bem aceitas por Esférius. Que ideias são estas?
15. O que Artur Quadrado faz para "desaparecer" durante o seu julgamento? Por que isso funciona?
16. No final do filme, quando a família de Artur Quadrado convence os planolandeses de que existe uma terceira dimensão, eles questionam a possibilidade de existir uma quarta dimensão. Que objeto é visto embaixo da área 33H que apoia essa ideia?
17. O que você mais gostou no filme?
18. Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. No filme, o Círculo Pantociclo proclama que é ilegal falar sobre a "Área 33H" porque, nesta área, há evidências que apoiam a existência da terceira dimensão (06:45-07:50). "Área 33H" é uma referência codificada a um famoso local aqui no planeta Terra. A letra "H" indica que o número "33" está escrito no sistema de numeração hexadecimal, isto é, na base 16. Converta este número para a base 10 e descubra qual é o local a que se refere a "Área 33H".
2. Ao ouvir a explicação de seu avô sobre o que é dimensão (08:00-10:10), Hex menciona o "superquadrado", difícil de imaginar para ela. Faça um desenho do "superquadrado" seguindo

a construção sugerida por Hex. Faça também um desenho do “supertriângulo”.

3. Em seu sonho (11:56-13:00), Artur Quadrado conhece o Rei de Pontolândia. Por que o Rei não reconhece a palavra “duas”?
4. Ainda em seu sonho (13:00-15:00), Artur Quadrado conhece o Rei de Linhalândia.
   (a) Por que inicialmente o Rei não consegue ver Artur Quadrado?
   (b) Quais direções existem em Linhalândia? Por quê?
   (c) Quais outras duas direções Artur Quadrado tenta explicar para o Rei? Por que essas duas direções existem para Artur Quadrado?
   (d) Por que Artur Quadrado podia aparecer e desaparecer de Linhalândia?
5. Um pouco antes de acordar de seu sonho, Artur Quadrado exclama: “Onde no conjunto de Mandelbrot que eu estou?” (15:05-15:10). Faça uma pesquisa sobre esse conjunto. Ele aparece na animação? Por que você acha que ele foi mencionado?
6. Artur Quadrado recebe a visita de Esférius, um habitante da terceira dimensão (16:20-16:36). Como Esférius tenta explicar a terceira dimensão para Artur Quadrado? Qual é a direção nova para Artur Quadrado?
7. Quando Artur Quadrado olha para Esférius em Planolândia, que forma geométrica ele vê (16:39-17:00)? Por quê?

Observações para o professor

- *Flatland: A Romance of Many Dimensions* foi lançado em 1884 pelo inglês Edwin Abbott Abbott (1838-1926) que, além de escritor, era acadêmico, educador e teólogo.

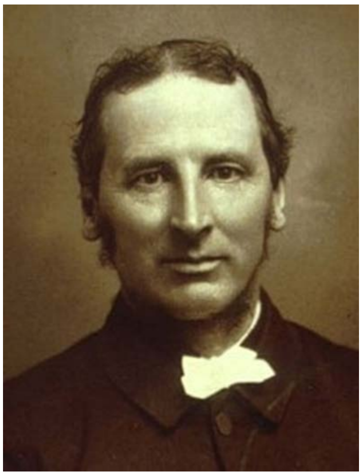


Figura: Edwin A. Abbott (1838-1926).
Fonte: Wikimedia Commons.

A obra foi escrita para ser uma metáfora da sociedade londrina do século XIX utilizando, para isto, objetos e conceitos geométricos como cenário. Sua tradução para o Português foi feita em 2002 pela Editora Conrad, cujo título permaneceu fiel ao original: “Planolândia: Um Romance de Muitas Dimensões”. O livro em Inglês está disponível em domínio público e pode ser acessado em: <http://goo.gl/1fAUwn>.

Figura: capa do livro *Flatland: A Romance of Many Dimensions* (edição de 1884).
Fonte: Wikimedia Commons.

Em 2008, foi publicada uma versão anotada com observações históricas e matemáticas escritas por Ian Stewart página por página (Abbott, 2008).

- Segundo a edição brasileira do livro, Abbott assumiu o cargo de diretor da *London School*, sendo um acadêmico respeitado na Inglaterra. Ao contrário do que pode parecer, ele era contra o sexismo de sua época e buscava oferecer oportunidade de ensino para as jovens inglesas em uma sociedade que dificultava o acesso delas ao ensino superior. Por isso, Abbott satirizou o tratamento dado às mulheres em seu livro, assim como as diferenças de padrões e irregularidades.
- No livro, Hex é neto (e não neta) do Quadrado. A lei de descendência era considerada apenas para as crianças de sexo masculino, conforme o trecho retirado da página 26 do livro:

  > Em nosso mundo há uma lei da natureza que determina que uma criança do sexo masculino terá um lado a mais do que seu pai, de modo que cada geração se eleva (por via de regra) um degrau na escala de desenvolvimento e nobreza. Assim, o filho de um quadrado é um pentágono; o filho de um pentágono, um hexágono, e assim por diante.

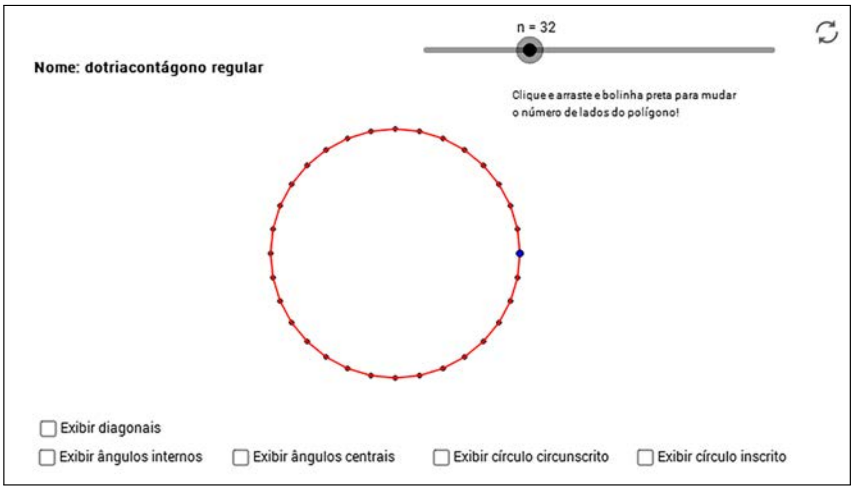
  Os personagens femininos são sempre segmentos de reta e são consideradas inferiores intelectualmente, enquanto que os personagens masculinos são polígonos que, a cada geração, aumentam o número de lados e, consequentemente, sua posição na sociedade. Nesta animação, isso foi retirado dando lugar de destaque às mulheres, inclusive escolhendo Hex como uma personagem feminina.
- O final da história no livro não é tão agradável quanto à do filme. No livro, o neto de Artur Quadrado sugere que há algo além da dimensão 2, mas não dá atenção ao avô quando ele

retorna de Espaçolândia. Artur Quadrado tenta então esconder dos planolandeses sua descoberta. Com o tempo, ele acaba sendo pego proclamando a terceira dimensão, o que resulta em sua prisão, para o resto da vida, junto com seu irmão.

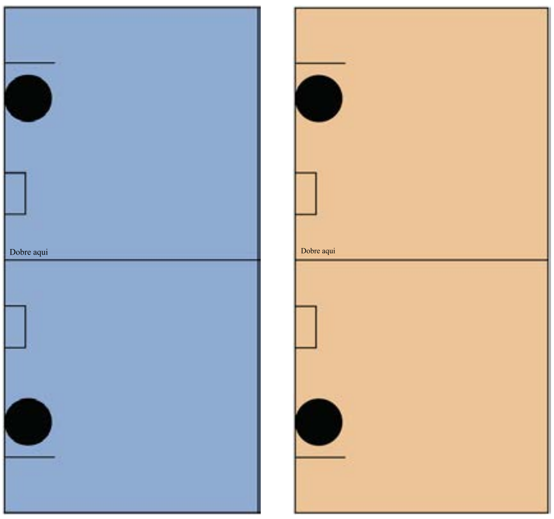
- O livro *Flatland* ganhou uma outra animação com aproximadamente 100 minutos: "*Flatland: The Film*" (2007). Há também uma continuação da presente animação, "*Flatland*^{2}*: Sphereland*", que trata de geometrias não-euclidianas.
- Segundo o IMDb, a fala de Hex: "Uma boca quieta é uma boca que sorri." ("*A still tongue makes a happy life.*") é uma referência a um cartaz visto no programa de TV "*The Prisoner*" (1967). O roteirista da animação, Dano Johnson, é um grande fã da série e sentiu que a opressão dos Círculos Sacerdotes tinha uma linguagem similar ao da misteriosa vila para subjugar seus cidadãos.
- O animador, Dano Johnson, fez uso de fractais ao conceber os cenários e os personagens coloridos e geométricos. Fractais podem ser descritos como objetos com dimensões não inteiras ou fracionárias, uma abordagem apropriada para uma animação que trata justamente sobre viagens entre universos de diferentes dimensões. Caso haja interesse da turma, o documentário "FRACTAIS: Uma Jornada pela Dimensão Oculta" da série NOVA pode ser exibido (sugestões de questões e atividades, na linha deste roteiro, elaboradas por Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, também estão disponíveis no *blog* deste projeto).
- *Flatland* faz parte da cultura *geek* e existem várias referências em livros, contos, filmes e na TV.
  (a) No episódio 15 da sétima temporada de Futurama intitulado "*2-D Blacktop*", Fry, Leela e o Professor Farnsworth, após um acidente, são transportados para um mundo plano, como Planolândia.
  (b) No início do décimo segundo episódio da terceira temporada de *The Big Bang Theory* intitulado "*The Psychic Vortex*" (O Vórtice Psíquico), o personagem Sheldon se transporta mentalmente para Planolândia em uma conversa com seu amigo Raj.
  (c) No décimo episódio do seriado Cosmos (O Limiar da Eternidade), Carl Sagan fala sobre dimensões, incluindo o mundo bidimensional de Planolância (<https://goo.gl/Ve30W9>). No vídeo, uma maçã faz o papel de Esférius.
- Quando Artur visita Linhalândia, o Rei chama suas Rainhas de "Rainha da Direita" e "Rainha da Esquerda". Mas, o que é esquerda e o que é direita? Richard Feynman propôs a seguinte questão: como explicar a um marciano, por telefone (sem videochamada), o que é esquerda? Parece simples, mas a pergunta esconde sutilezas. Gardner (2005), ao tratar da simetria nos espelhos, dedica um capítulo para explicar como isso funcionaria em Linhalândia e Planolândia. Ele descreve um habitante adulto de Linhalândia como um segmento com um

olho (um ponto) em uma de suas extremidades. Imagine apenas três habitantes adultos em Linhalândia. Se invertermos um deles, por exemplo, o do meio, essa mudança será percebida imediatamente pelos outros dois. Mas, se invertemos toda a Linhalândia, seus habitantes não perceberiam a mudança. Ou seja, nós veríamos o habitante da "direita" na posição "esquerda", mas para os três habitantes nada teria mudado. Para mais detalhes sobre o assunto, recomendamos o Capítulo 4 de Feynmann (2012) (incluindo uma discussão de direita, esquerda, Pasteur e açúcares) e o artigo "*A Galactic Challenge: How Would You Teach Left from Right to an Alien Civilization?*" de Davide Castelvecchi no *blog* da *Scientific American* (<https://goo.gl/Y0SPnj>).

- Sugerimos o uso do *applet* GeoGebra disponível em <https://goo.gl/9P3uW0> para ilustrar o fato de que um polígono regular pode parecer ser um círculo mas, de fato, não o é. No aplicativo, clique/toque e arraste o controle deslizante *n* para mudar o número de lados do polígono regular. A construção pode ser acessada inclusive em *tablets* e *smarthones*.



- Para a Questão Geral 13, talvez seja didático discuti-la com seus alunos com cópias impressas de quadrados, como na figura a seguir. Versões ampliadas encontram-se no final deste capítulo.



- Um vídeo que pode ser usado como complemento é a Lição TED “Explorando Outras Dimensões” (*Exploring Other Dimensions*) por Alex Rosenthal e George Zaidan (<https://goo.gl/sNS1AV>, com legendas em Português). Após apresentar o conceito de dimensão em termos de direções e os exemplos 2D de Planolândia e 3D do mundo de Esférius, esta animação explora uma dimensão a mais, apresentando o tesserato, o hipercubo em 4D.

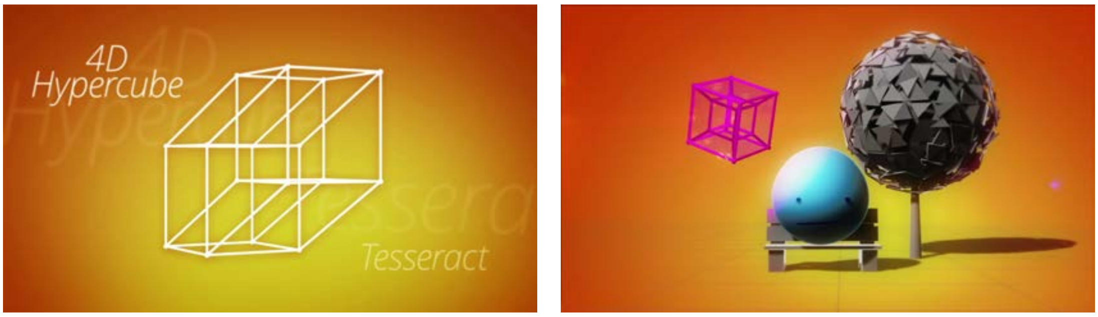


Figura: Explorando Outras Dimensões.
Fonte: TED-Ed.

- Quantas dimensões existem? A resposta usual costuma ser três: comprimento, largura e altura. Mas, desde que os gregos introduziram as três dimensões esse assunto tem sido analisado e criticado. A Física Newtoniana se baseia em um mundo tridimensional, mas há vários modelos físicos para o Universo com diferentes dimensões. Quando Einstein considerou o espaço e o tempo unidos na teoria da relatividade geral, o continnum espaço-tempo, ele estabeleceu que vivemos em um mundo quadrimensional, ou seja, além das três coordenadas que indicam a posição no espaço, há também a coordenada que indica o tempo. Na teoria das cordas, o espaço-tempo tem 9, 10 ou 26 dimensões dependendo do modelo adotado! Mas por que só enxergamos três dimensões? Para os físicos da área da teoria das cordas, as dimensões extras estão enroladas em escalas muito pequenas, de forma que não conseguimos notá-las. Em cosmologia, há o conceito de multiverso, um termo usado para descrever um hipotético grupo de todos os universos possíveis. Alguns modelos para o multiverso pressupõem um espaço de dimensão infinita. Para mais detalhes sobre o assunto, recomendamos o Capítulo 24 de Crilly (2011), o Capítulo 39 de Baker (2011) e Hawking (2016).
- O livro “*The Planiverse: Computer Contact with A Two-Dimensional World*” de Alexander K. Dewdney, inspirado por “*Flatland*”, é o resultado de um esforço intelectual em descrever um mundo bidimensional em forma de disco (Arde) com sua própria física, química, biologia, ciência planetária, astronomia, criaturas, culturas e tecnologias, todos projetados para funcionar em um mundo de duas dimensões. Como cientista da computação e matemático (e com a ajuda de colegas de outras disciplinas), Dewdney considera como átomos, forças eletromagnéticas, ondas de luz e som, turbulência e outras fenômenos físicos operariam em duas dimensões e as implicações que isso teria sobre a existência dos habitantes de Arde, os Nsa-

nas. Ele apresenta soluções e projetos de design para coisas como portas, fiação elétrica, dobradiças, engrenagens e outras tecnologias simples que funcionam de maneira diferente em duas dimensões e fornece descrições e ilustrações de estruturas de máquinas bidimensionais mais complexas como relógios, prensas, veículos terrestres e aéreos e motores a vapor. Ele também descreve e ilustra mecanismos biológicos bidimensionais, incluindo propulsão, digestão, células divisão e muito mais. De todas essas coisas surge a cultura dos Nsanas, com suas próprias tradições e costumes, por exemplo, quem passa sobre quem quando dois viajantes se encontram viajando em direções opostas ou a ordem em que os passageiros embarcam e desembarcam dos veículos (Wolf, 2012).

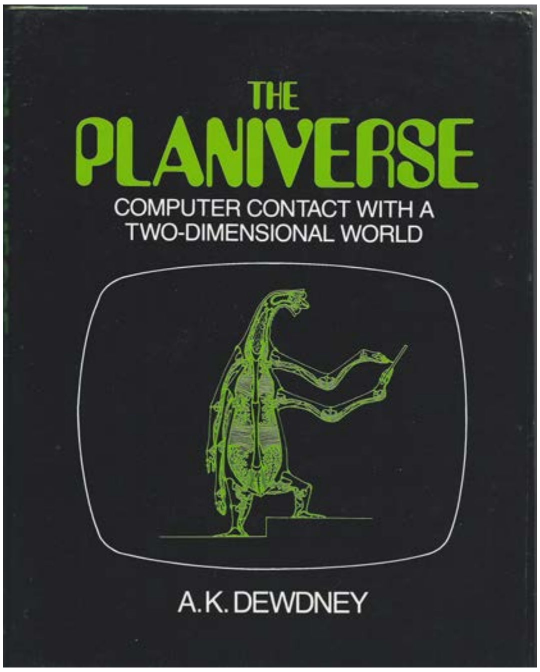


Figura: Um Nsana na capa do livro “*Planiverse*” de Dewdney (2000).

Referências relacionadas

- Abbott, Edwin A. *Planolândia: Um Romance de Muitas Dimensões*. Tradução de Leila de Souza Mendes. São Paulo: Conrad, 2002.
- Abbott, Edwin A. *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions*. New York: Basic Books, 2008.
- Baker, Joanne. *50 Ideias de Física Que Precisa Mesmo de Saber*. Publicações D. Quixote, 2011.
- Crilly, Tony. *50 Ideias de Matemática Que Precisa mesmo de Saber*. Alfragide: Editora D.Quixote, 2011.
- Dewdney, Alexander K. *The Planiverse: Computer Contact with A Two-Dimensional World*. Springer-Verlag, 2000.

- Feynman, Richard. *Sobre as Leis da Física*. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio, 2012.
- Gardner, Martin. *The New Ambidextrous Universe: Symmetry and Asymmetry from Mirror Reflections To Superstrings*. Third Revised Edition. New York: W. H. Freeman and Company, 2005.
- Wolf, Mark J. K. *Building Imaginary Worlds: The Theory and History of Subcreation*. Routledge, 2012.

Concepção

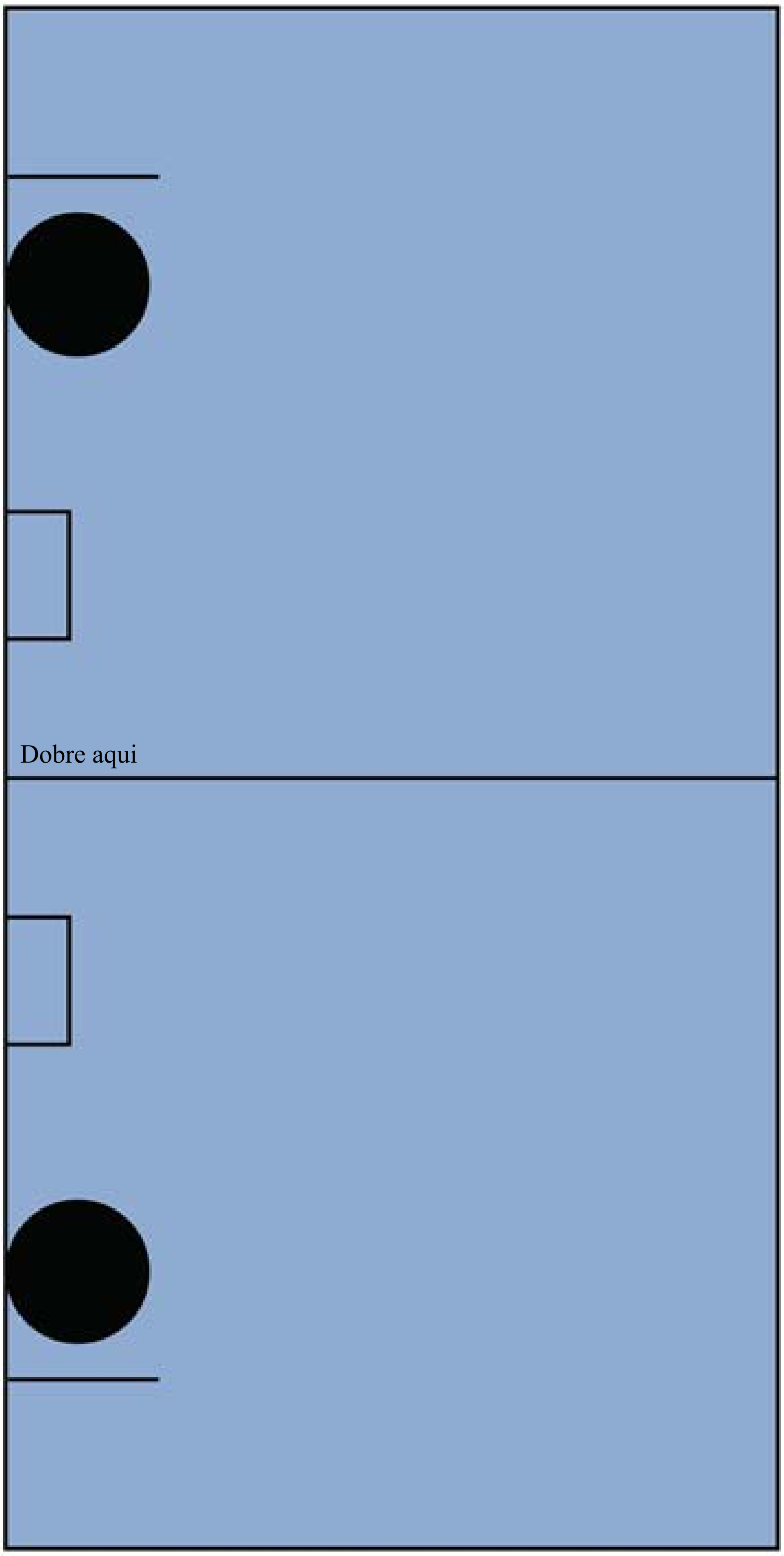
Keyla Lins Bruck Thedin e Hamanda de Aguiar Pereira

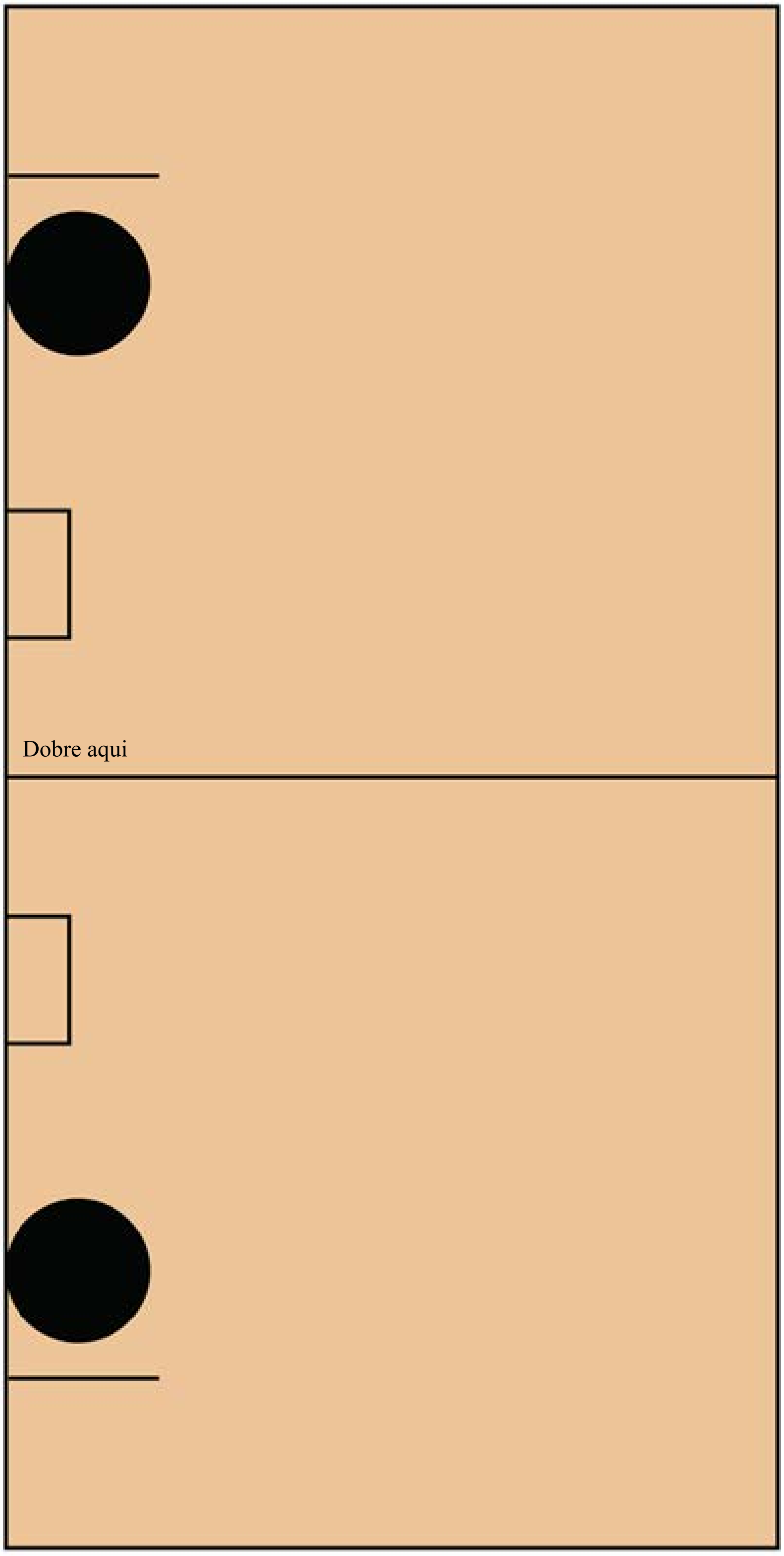
Revisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

Apêndice




Dobre aqui

4 *Planolândia^2: Esferolândia*

Faixa de classificação etária: Livre .

Áudio: Inglês.

Legendas: Português

Título original: *Flatland^2: Sphereland*.

Gênero: Animação.

Duração: 35 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: Sphere World Productions (2012).

Tópicos matemáticos abordados: Geometria Não Euclidiana; Dimensões; Polígonos; Sólidos.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental II; Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Sociologia; Artes.

Marcadores: Flatland; Planolândia; Esferolândia; Geometria Não Euclidiana; Dimensões.

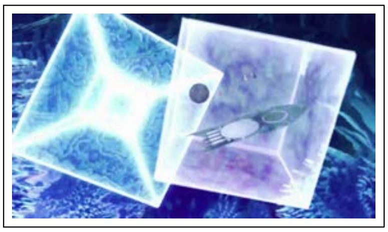
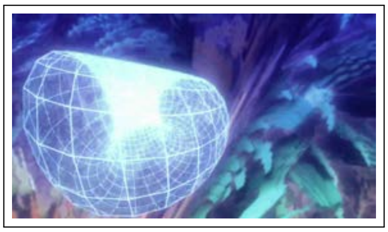
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias): H6, H7, H8 e H9.

Link para o arquivo da legenda: <http://bit.ly/2TiRiyz>.

Página web oficial: <http://www.spherelandthemovie.com/>.

Imagens selecionadas



Sinopse

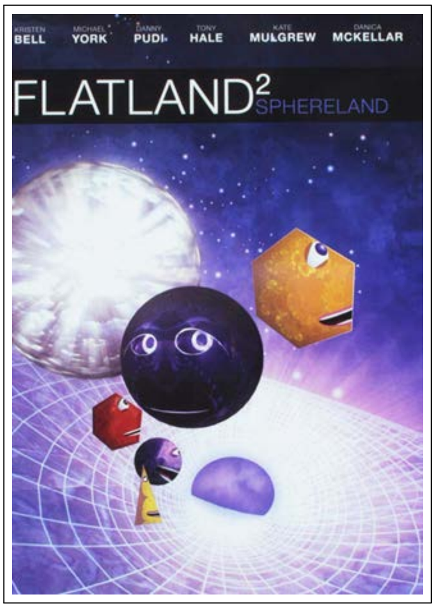
Os criadores de “Planolândia: O Filme” retornam à Planolândia para mais uma aventura baseada nos livros de Edwin A. Abbott e Dionys Burger. Desta vez, os cientistas de Planolândia estão se preparando para sua primeira missão “fora do espaço”. Mas, quando um deles, Puncto, descobre uma “anomalia” matemática, este procura Hex, que tem sido rejeitada por suas ideias sobre a terceira dimensão. Uma reunião inesperada com Esférius, um ser da terceira dimensão, lança os dois numa jornada dimensional para a descoberta da verdadeira forma do seu mundo.

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

O vídeo pode ser usado para motivar e introduzir os conceitos de dimensão e geometrias não euclidianas, incluindo crianças mais jovens.

Sensibilização (para montar um cartaz)

Após a descoberta da terceira dimensão, os planolandeses estão se preparando para uma grande missão de exploração. Mas algo estranho aparece: triângulos cuja soma dos ângulos internos é maior do que 180 graus. Será que eles conseguirão desvendar essa anomalia que pode colocar toda missão em risco? O que estará causando essas distorções matemáticas? Nessa animação, você seguirá a jornada de Hex e Puncto que, juntos à Esférius, deverão resolver os mistérios que envolvem seu Universo.



Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu de algo novo com o vídeo? O quê?
3. Qual é a anomalia detectada por Puncto?
4. Desenhe no plano uma reta e, nela, marque um segmento de reta. Como saber qual é o “lado direito” e o “lado esquerdo“ do segmento?
5. Ao visitar Linhalândia, Puncto tira o rei de sua linha e Hex o recoloca no lugar. Por que o rei confunde as rainhas da direita e da esquerda?
6. Por que os habitantes de Linhalândia não percebiam que seu país era, de fato, um círculo? Por que os habitantes de Planolândia não percebiam que seu país era, de fato, uma esfera?
7. Por que a direção da nave fica invertida após Esférius tirá-los do plano?
8. Por que Esférius ficou desorientado quando a Hiperesfera o leva para sua dimensão?
9. Na animação, que figura geométrica é usada para representar a quarta dimensão no portal?
10. Desenhe uma esfera e, nela, desenhe um triângulo cujos ângulos internos todos tenham medida igual a 90 graus.
11. O que você mais gostou no filme?
12. Se você fosse o diretor deste vídeo, você faria algo diferente? O quê?

Sugestões de questões específicas

1. Na animação, Hex e Puncto conversam sobre o fato das somas dos ângulos internos de qualquer triângulo em um plano ser sempre igual a 180° (07:45-07:55). Por que isso é verdade? Justifique sua resposta!
2. Quando os habitantes de Planolândia olham para Esférius em seu país, que forma geométrica eles vêem? E quando Esférius olha para a Hiperesfera (um ser da quarta dimensão) em seu mundo tridimensional, que forma geométrica ele vê (12:04-12:32)?
3. Esferolândia é bidimensional ou tridimensional? Justifique sua resposta!
4. Em um dado momento, a Hiperesfera inverte os lados direito e esquerdo de Esférius. Ele diz que quando se olha no espelho observa seus lados esquerdo e direito invertidos (14:30-14:48).
   (a) Por que ela faz isso?
   (b) Puncto responde que ele parece ser bem simétrico. O que ele quis dizer com isso?
5. Hex e Puncto encontram Linhalândia (15:30-15:45). Como Hex descreve Linhalândia para Puncto?
6. Depois de seguirem por Linhalândia, Hex e Puncto voltam ao ponto onde encontraram o rei de Linhadândia (18:12-20:12).
   (a) Por que Hex acha que isso não era possível?
   (b) O que eles descobrem sobre a forma de Linhalândia?
   (c) Por que os seres de Linhalândia não conseguem perceber a forma de seu universo?
   (d) Qual é a conclusão que Hex tem sobre os triângulos encontrados por Puncto?
7. A Hiperesfera diz a Esférius que há um portal no centro de Planolândia. Mas, se Planolândia fosse um plano infinito, ela não possuiria um centro. Hex usa essa informação para concluir a verdadeira forma de Planolândia (23:36-23:51). Que forma é essa? Por que essa forma explica a anomalia de Puncto?
8. A Hiperesfera diz que quer ver o que há no centro de Espaçolândia (32:45-33:03). Qual é a forma que Esférius achava que Espaçolândia tinha? Como deve ser Espaçolândia para que ela tenha um centro?

Observações para o professor

- O filme foi baseado no livro "*Sphereland: A Fantasy About Curved Spaces and an Expanding Universe*" de Dionys Burger (1892-1987), publicado em 1965, uma sequência de "*Flatland: A Romance of Many Dimensions*" de Edwin A. Abbott (1838-1926) lançado em 1884. Segundo o próprio livro "*Sphereland*", Dionys Burger nasceu na Holanda e foi professor de Física no ensino secundário em seu país. Procuramos por mais informações sobre o autor, porém não encontramos. Seguindo a mesma linha de “*Flatland*”, Burger apresenta Hex sendo confrontada por um problema que só poderia ser resolvido considerando que a superfície onde vive é curva. O livro começa com um resumo de “*Flatland*” tanto para introduzir a história, como para incentivar a leitura do livro de Abbott.

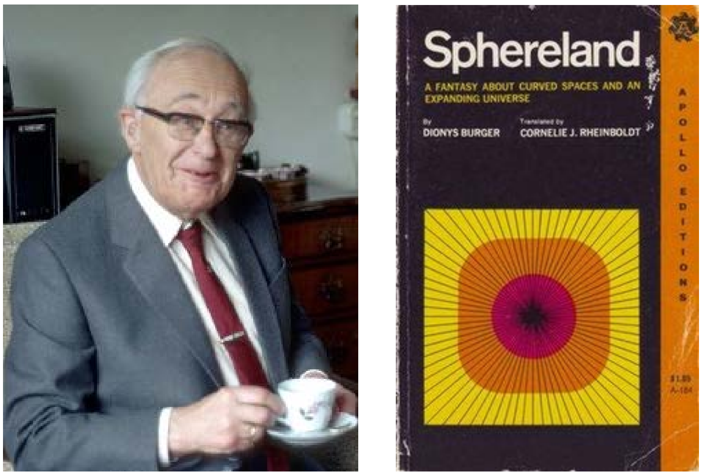


Figura: Dionys Burger (1892-1987) e seu livro “*Sphereland*”.
Fonte: <http://bit.ly/2MxC2LD> e Wikimedia Commons.

Os acontecimentos narrados em “*Sphereland*” se passam 70 anos depois de “*Flatland*”. O vídeo difere do livro em vários aspectos. Mencionamos dois: (1) Hex é um menino no livro; (2) antes de descobrir que seu mundo era esférico, os planolandeses conjecturaram que ele era no formato de um disco.

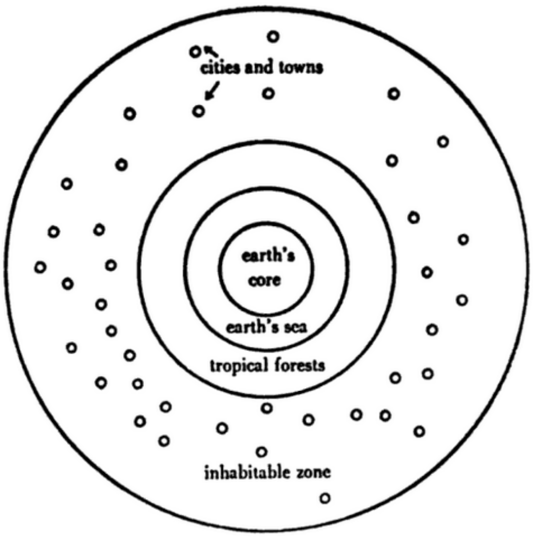


Figura: Planolândia como um disco.
Fonte: Burger (1965, p. 60).

- Na Grécia Antiga, acreditava-se que a Terra tinha um formato de disco plano, cercado de mar por todos os lados, o céu e as estrelas acima e o Sol nascendo no leste e se pondo no oeste. Segundo Brotton (2014), é creditada a Anaximandro de Mileto (a.C. 610-546 a.C.) a seguinte afirmação: “a Terra está em suspenso, não dominada por nada; que permanece no lugar em virtude da distância semelhante de todos os pontos [da circunferência celestial]” e que sua forma é “cilíndrica, com a profundidade de um terço de sua largura”.

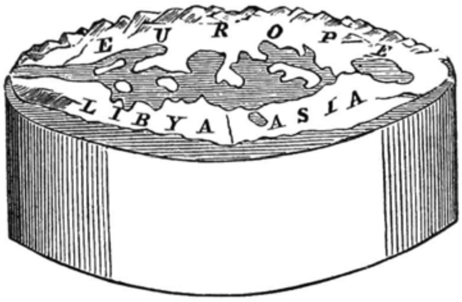


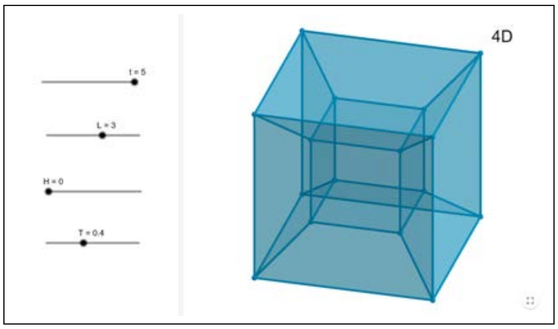
Figura: A Terra cilíndrica de Anaximandro.
Fonte: Wikimedia Commons.

A crença de Anaximandro em um universo geometricamente simétrico foi desenvolvida por Pitágoras (a.C. 570-495 a.C.) e seus discípulos e por Parmênides (a.C. 530-460 a.C.), a quem é atribuído a primeira sugestão de que se o universo era esférico, então a Terra também seria. Essa declaração está em *Fédon*, famoso diálogo de Platão sobre Sócrates. Nele, Sócrates diz: “Fiquei convencido de que, se a Terra é de forma esférica e está colocada no meio do céu, para não cair não precisará nem de ar nem de qualquer outra força da mesma natureza: porque para sustentar-se é suficiente a perfeita uniformidade do céu e o equilíbrio natural da Terra.” (Brotton, 2014).

- A Revista *Wired* tem uma coluna em formato de vídeo denominada “5 *LEVELS*” em que um cientista especialista explica um assunto de alto nível em cinco camadas diferentes de complexidade: primeiro para uma criança, depois para um adolescente e, depois, para uma graduação no mesmo assunto, um estudante de graduação e, finalmente, para um outro cientista especialista. No episódio do dia 16 de outubro de 2019, o físico teórico Sean Carroll tenta explicar o que é dimensão: <http://bit.ly/37fMCyD>.

Figura: Explicando o que é dimensão em 5 níveis de dificuldade diferentes.
Fonte: <http://bit.ly/37fMCyD>.

- Sugerimos o uso do *applet* GeoGebra disponível em <http://bit.ly/2MvMDH8> para ilustrar como se é possível construir um hipercubo em 4D a partir de um ponto (um “cubo” 0D) expandindo-se o objeto em cada dimensão em uma direção ortogonal. A construção pode ser acessada inclusive em *tablets* e *smarthones*.



- A frase que aparece no vídeo “A única constante é: mudança!” (00:53) é frequentemente atribuída a Heráclito de Eféso (c. 535 a.C.-475 a.C.), filósofo grego conhecido por sua doutrina de que mudança é algo central para o universo. Contudo, segundo o *site Wikiquotes* (<https://en.wikiquote.org/wiki/Heraclitus>), essa atribuição está sob disputa. As frases originais de Heráclito que expressam a mesma ideia são: “Tudo flui e nada permanece.”, “Todas as entidades se movem e nada permanece parado.”, “Você não pode entrar duas vezes no mesmo rio.”.
- A superfície que aparece quando a Hiperesfera revela a Hex e aos demais tripulantes que o portal pode levar à infinitas dimensões (29:48) é denominada *Cíclede de Dupin*. Existem várias maneiras de se definir essa superfície. De modo simples, ela pode ser caracterizada como uma superfície que é tangente a uma família de esferas com centros em uma elipse (veja a figura). Ela foi descrita pela primeira vez pelo matemático, engenheiro, economista e político Pierre Charles François Dupin (1784-1873) em sua tese de doutorado sob a orientação do inventor da Geometria Descritiva Gaspard Monge (1746-1818).

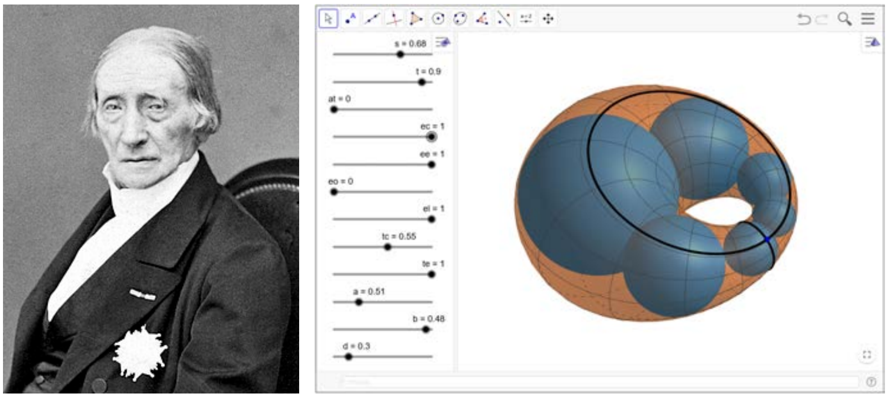


Figura: Dupin (1784-1873) e sua superfície.

Fonte: Wikimedia Commons e <http://bit.ly/2MzQq60> (versão interativa).

Atualmente, as cíclides de Dupin têm sido usadas em *Computer-Aided Design* para, por exemplo, conectar troncos de cilindro e cone suavemente.

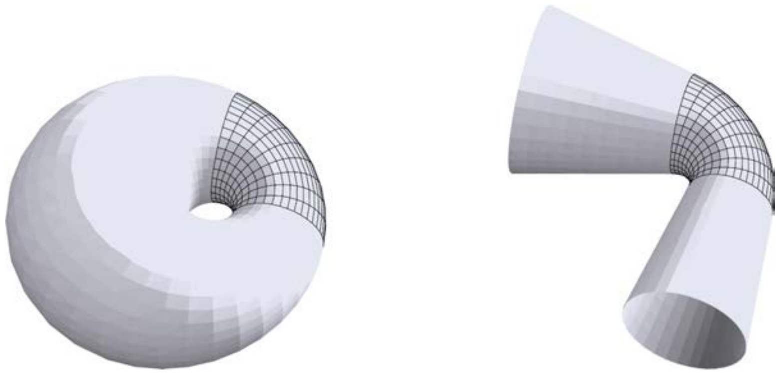
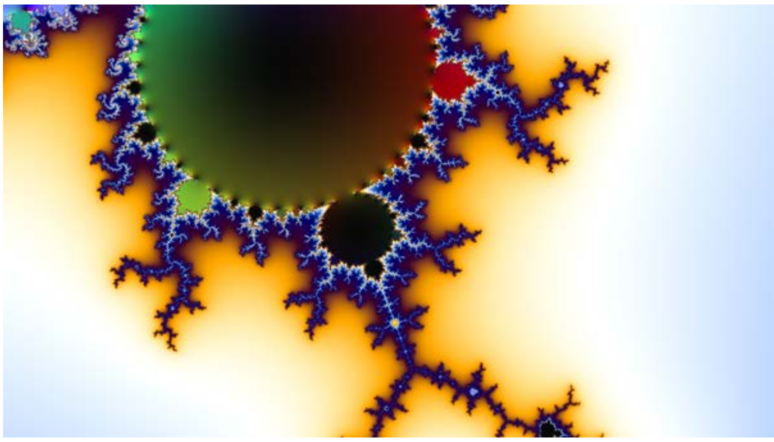


Figura: Usando uma cíclide de Dupin para conectar dois troncos de cone.

Fonte: Krasauskas e Zube (2008).

- Enquanto que a animação trata de várias dimensões, essas dimensões são sempre números inteiros: 0, 1, 2, 3, 4, ..., n. Existem figuras geométricas para os quais se é possível atribuir uma dimensão não inteira: os *fractais*. Esses objetos matemáticos aparecem no vídeo como elementos de decoração do interior dos personagens como Hex e Puncto (observe!) e como elementos da paisagem quando Esférius leva Hex e Puncto para fora de Planolândia.



Um fractal famoso que aparece de forma casual na animação é o Triângulo de Sierpiński (08:25), obtido a partir de um triângulo equilátero dividindo-o em 4 triângulos equiláteros menores e removendo-se o interior do triângulo equilátero central recursivamente.

Para mais detalhes sobre fractais, recomendamos o vídeo “Fractais: Uma Jornada pela Dimensão Oculta” cujo roteiro de uso em sala de aula, em analogia a este roteiro, pode ser obtido em Dantas (2018).

- Um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma de raciocínio num sistema dedutivo-axiomático que consiste em fundar toda uma teoria em uma base de verdades não demonstradas – os axiomas ou os postulados da teoria – a partir das quais se podem derivar todas as verdades dessa teoria por meios exclusivamente lógicos (Silva, 2007). Os "Os Elementos" de Euclides (c. 300 a.C.) é um exemplo por excelência desse sistema dedutivo-axiomático. Um dos cinco axiomas principais dessa obra é o *Axioma das Paralelas* pode ser escrito da seguinte maneira: *por um ponto que não pertence a uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada*.

  Durante séculos, vários acadêmicos investigaram se o Axioma das Paralelas poderia ser obtido (demonstrado) a partir dos demais axiomas, sem sucesso. De fato, a partir dos trabalhos de vários matemáticos, dos quais se destacam Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), John Playfair (1748-1819), János Bolyai (1802-1860), Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai Lobachevsky (1792-1856) e Bernhard Riemann (1826-1866), verificou-se que as geometrias obtidas negando-se o Axioma das Paralelas são tão consistentes quando a própria geometria de Euclides.

Playfair
(1748-1819)

Gauss
(1777-1855)

Lobachevsky
1792-1856)

Riemann
(1826-1866)

Figura: Alguns personagens da história das geometrias não euclidianas.

Fonte: Wikimedia Commons.

Ao se negar o Axioma das Paralelas, obtemos dois casos: por um ponto que não pertence a uma reta, (1) ou não se pode traçar reta paralela alguma (geometria elíptica) (2) ou se pode traçar mais do que uma reta paralela à reta dada (geometria hiperbólica). Do mesmo modo que a geometria euclidiana, existem modelos que permitem visualizar essas geometrias. No caso da geometria elíptica, o "plano" é substituído por uma esfera e as "retas" por círculos máximos (círculos sobre a esfera com centro na esfera).

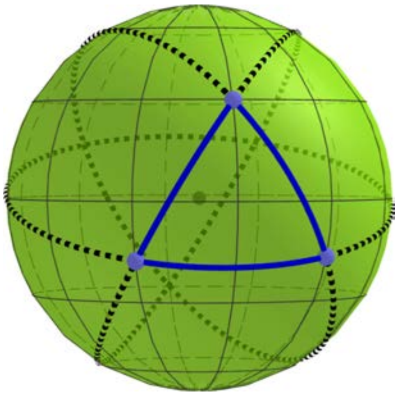


Figura: Um triângulo esférico.

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/acnyx8zg> (versão interativa).

No caso da geometria hiperbólica, um modelo usado é o da *pseudoesfera*, uma superfície de revolução obtida pela rotação da curva tractriz em torno de sua assíntota (a tractriz é a curva que uma partícula descreve num plano horizontal, ao ser arrastada por uma outra partícula que se move em linha reta, sendo a distância entre as duas sempre constante). Nesse modelo, "segmentos de retas" são curvas especiais, denominandas geodésicas, que minimizam distâncias sobre a superfície (nota: os círculos máximos também são curvas geodésicas da esfera).

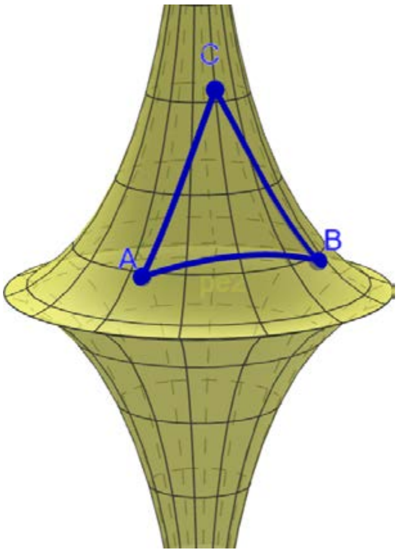


Figura: Um triângulo geodésico na pseudoesfera.

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/cvpkctg2> (versão interativa).

Outra maneira de se caracterizar essas três geometrias (euclidiana, hiperbólica e elíptica) é pela soma dos ângulos internos de seus triângulos (geodésicos): na geometria euclidiana, a soma é *sempre igual* a 180°, na geometria hiperbólica, *sempre menor* do que 180° e, na geometria elíptica, *sempre maior* do que 180°. Para o leitor interessado em se aprofundar nesse assunto (inclusive para saber o porquê dos nomes "hiperbólica" e "elíptica" para as geometrias não euclidianas), recomendamos os livros Greenberg (2007), Martin (1975), Sibley (2015) e Barbosa (2007).

- Existem vários softwares que permitem explorar interativamente geometrias não euclidianas usando modelos diversos: Sphaerica (<http://bit.ly/2tzSjc9>) para geometria elíptica, NonEuclid (<http://bit.ly/35w1Xu0>) e Interactive Non-Euclidean Geometry (<http://bit.ly/35pv4ij>) para geometria hiperbólica. Um software (agora) gratuito que merece destaque é o Cinderella 2 (<https://www.cinderella.de/>) que permite, ao mesmo tempo, visualizar construções geométricas em modelos das geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica. A figura a seguir, por exemplo, ilustra a propriedade de que as medianas de um triângulo *sempre* são concorrentes em um mesmo ponto, um resultado válido para os três tipos de geometria.

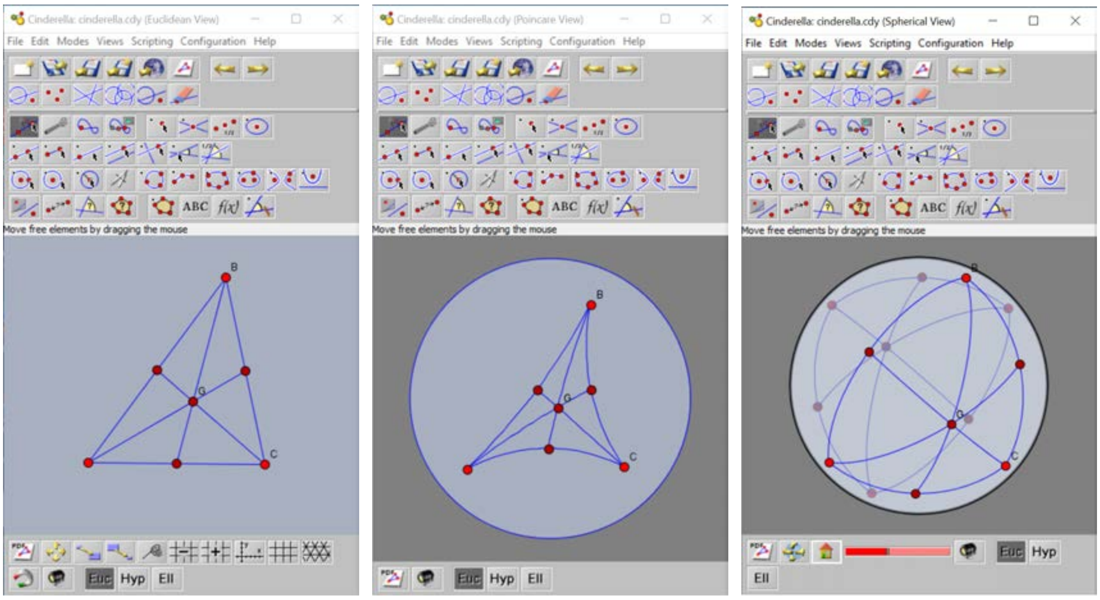


Figura: Um teorema válido nas geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica.
Fonte: <https://www.cinderella.de/>.

- István Lénárt, professor da Universidade Eötvös Loránd em Budapeste, desenvolveu, na década de 90, um material manipulativo para se trabalhar com geometria elíptica: a Esfera de Lénárt. O *kit* inclui uma esfera transparente de oito polegadas de plástico, um suporte em forma toro onde a esfera pode ser colocada (evitando que ela role sobre a mesa), transparências hemisféricas que se ajustam à esfera para que os alunos possam desenhar com marcadores coloridos e cortar formas com uma tesoura, uma régua esférica com duas arestas dimensionadas para desenhar e medir arcos, ângulos e grandes círculos na esfera, um transferidor esférico, um encarte “Introdução À Esfera Lénárt” de 16 páginas com algumas sugestões de atividades e uma projeção policônica de quatro cores da Terra que pode ser recortada e transformada em um globo. Lénárt também publicou um livro sobre sua esfera: “*Non-Euclidean Adventures On The Lénárt Sphere: Activities Comparing Planar and Spherical Geometry*” (Editora Lenart Educational Research and Technology, 2013). No *site* oficial

<http://lenartsphere.com/> é possível ver um vídeo desse material que é vendido nos EUA por US$ 79.95.

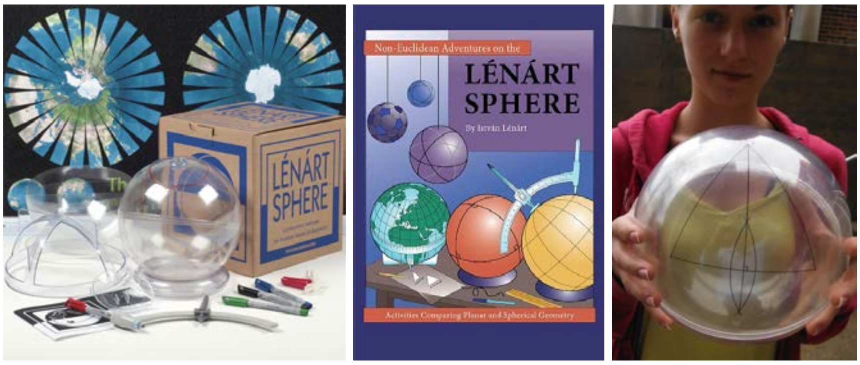


Figura: A Esfera de Lénárt.

Fonte: <http://lenartsphere.com/> e Wikimedia Commons.

- Modelos para a geometria hiperbólica podem ser construídos com crochê, fato descoberto pela matemática letã Daina Taimina (1954-) que, enquanto participava de uma oficina de geometria em 1997, viu modelos de planos hiperbólicos feitos de papel, projetados pelo geômetra William Thurston (1946-2012), mas que eram muito frágeis. Ela decidiu criar modelos mais duráveis e o fez fazendo crochê. Seu livro "*Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes*" que descreve o modelo ganhou os prêmios *Bookseller/Diagram Prize for Oddest Title of the Year* em 2009 e *Euler Book Prize* da *Mathematical Association of America* em 2012.

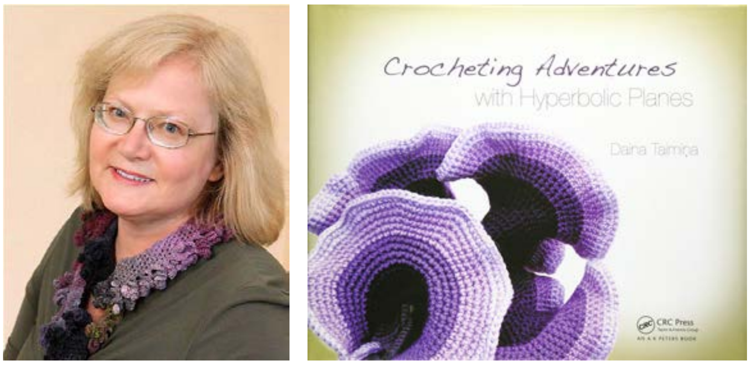


Figura: Daina Taimina (1954-) e seu livro sobre modelos hiperbólicos em crochê.

Fonte: Wikimedia Commons.

Além do livro de Taimina, recomendados a palestra TED "Margaret Wertheim e Sua Maravilhosa Matemática dos Corais (e Crochê)" disponível em <http://bit.ly/35yTYvW>.

- Um outro modelo para a geometria hiperbólica foi proposto pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) (Arcozzi, 2012): o "plano" é representado pelo interior de um disco e as "retas" são arcos de círculos no disco que são perpendiculares ao bordo do disco (os comprimentos de arcos, contudo, são calculados de uma maneira diferente). O modelo ficou posteriormente conhecido como Modelo do Disco de Poincaré em referência ao matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) que também trabalhou no modelo.

Beltrami
(1835-1900)

Poincaré
(1854-1912)

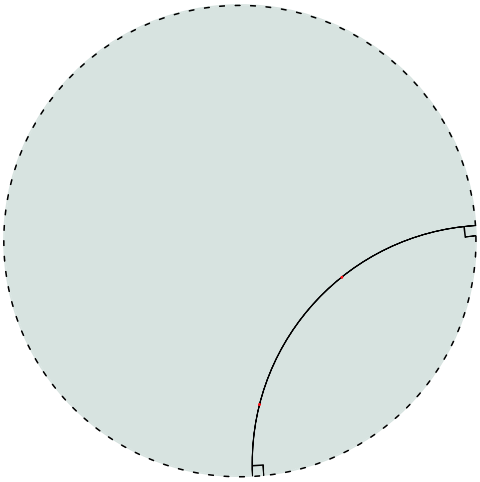
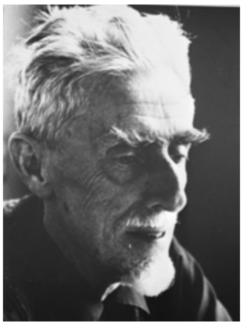


Figura: O Modelo do Disco de Poincaré para a geometria hiperbólica .
Fonte: Wikimedia Commons.

Algumas obras Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artista gráfico holandês conhecido e admirado entre os matemáticos, fazem uso do Modelo do Disco de Poincaré.



Escher
(1898-1972)

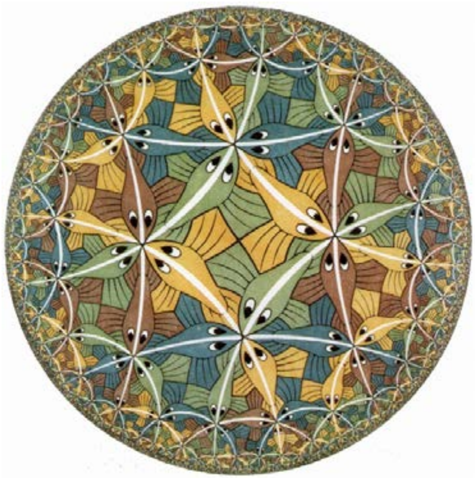


Figura: Escher e uma de suas obras que faz uso do Modelo do Disco de Poincaré.
Fonte: Wikimedia Commons.

Ainda no contexto do Modelo do Disco de Poincaré, destacamos o *HyperRogue* (<http://bit.ly/2s5rYT4>), um jogo do tipo *rogue* (masmorra). O mundo apresentado pelo jogo consiste em cerca de 50 terras, cada uma com um tema diferente, tesouro, inimigos, mecânica e um poder mágico; as terras são geralmente separadas por retas hiperbólicas (”Grandes Muralhas”) e mudam conforme a pessoa viaja, permitindo assim que monstros e poderes mágicos interajam entre as diferentes terras. O mundo é gerado proceduralmente em tempo real e algumas das terras precisam ser desbloqueadas cumprindo um pré-requisito no jogo em questão (por exemplo, coletando um determinado número de tesouros). O principal objetivo do jogo é coletar tesouros, evitando ser preso pelos inimigos. Além de simplesmente coletar os tesouros, existem várias missões importantes a serem realizadas (missão *Yendor*, missão *Prince* (ss), *Hyperstone Quest* e *Holy Graal*).

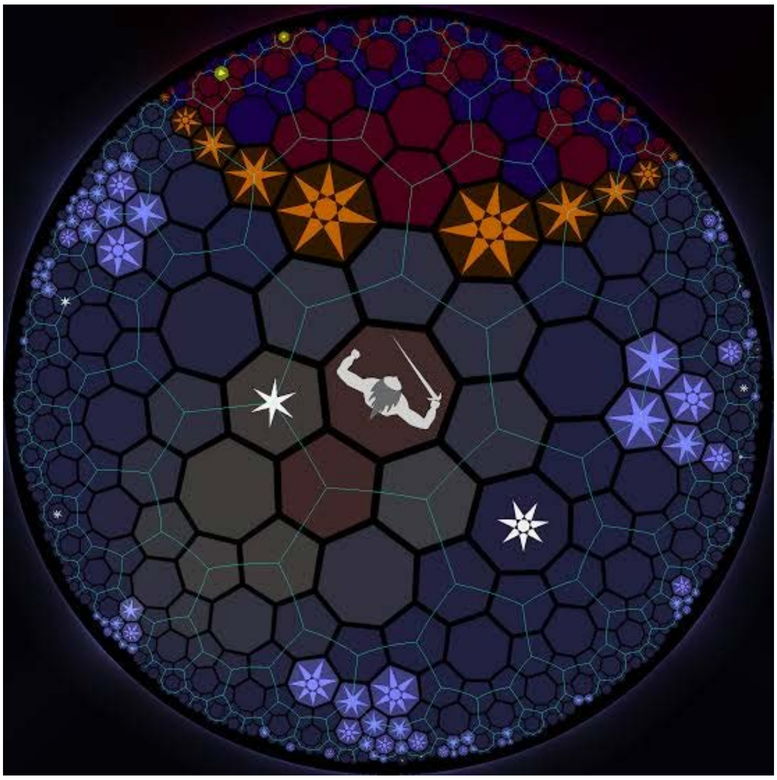


Figura: Jogo no Modelo do Disco de Poincaré para o plano hiperbólico.
Fonte: *HyperRogue* (<http://bit.ly/2s5rYT4>).

Versões gratuitas do jogo (com algumas limitações) podem ser baixadas no *site* do jogo (<http://bit.ly/36F62gE>), incluindo uma versão *on-line* (<http://bit.ly/2sYM2ae>) e uma versão para *smartphones Android* (<http://bit.ly/2T4i6Ef>).

- No trecho (15:53-16:30), o Rei de Linhalândia é retirado de sua Linhalândia por Puncto. Ao ser recolocado, o Rei "confunde" a Rainha da Esquerda com a Rainha da Direita. Mas, afinal, o que é esquerda e o que é direita? Richard Feynman (1918-1988) propôs a seguinte questão: como explicar a um marciano, por telefone (sem videochamada), o que é esquerda? Parece simples, mas a pergunta esconde sutilezas. Imagine apenas três habitantes adultos em Linhalândia. Se invertermos um deles, por exemplo, o do meio, essa mudança será percebida imediatamente pelos outros dois. Mas, se invertemos toda a Linhalândia, seus habitantes não perceberiam a mudança, ou seja, nós veríamos o habitante da "direita" na posição "esquerda", mas para os três habitantes nada teria mudado. Para mais detalhes sobre o assunto, recomendamos o Capítulo 4 de Feynman (2012) (incluindo uma discussão de direita, esquerda, Pasteur e açúcares) e o artigo "*A Galactic Challenge: How Would You Teach Left from Right to an Alien Civilization*" de Davide Castelvecchi no blog da Scientific American (<https://goo.gl/Y0SPnj>). Recomendamos também o texto de Gardner (2005) que, ao tratar da simetria nos espelhos, dedicou todo um capítulo para explicar como isso funcionaria em Linhalândia e Planolândia. Ele descreve um habitante adulto de Linhalândia como um segmento com um olho (um ponto) em uma de suas extremidades.

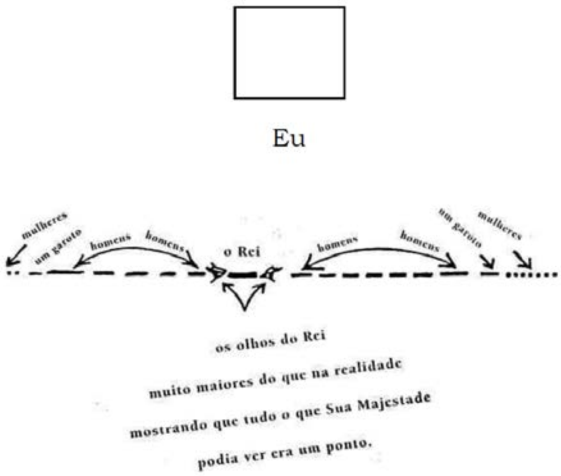


Figura: Linhalândia.
Fonte: Abbott (2002).

- No vídeo, aponta-se que os habitantes de Linhalândia não estavam conscientes que seu mundo era "curvado" em um círculo e, do mesmo modo, que os habitantes de Planolândia não sabiam que seu mundo era "curvado" em uma esfera. Segundo a Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879-1955), uma massa promove uma distorção do espaço tridimensional e essa distorção pode ser visualizada por um *diagrama compactado* (*embedding diagram*, em Inglês), uma superfície bidimensinal que se curva e se estica como uma membrana de borracha. Sem a massa, as linhas de coordenadas formariam uma grade homogeneamente quadriculada; com a massa, a geometria do espaço é distorcida, agrupada ao redor da massa e esticada para baixo (Scharf, 2016).

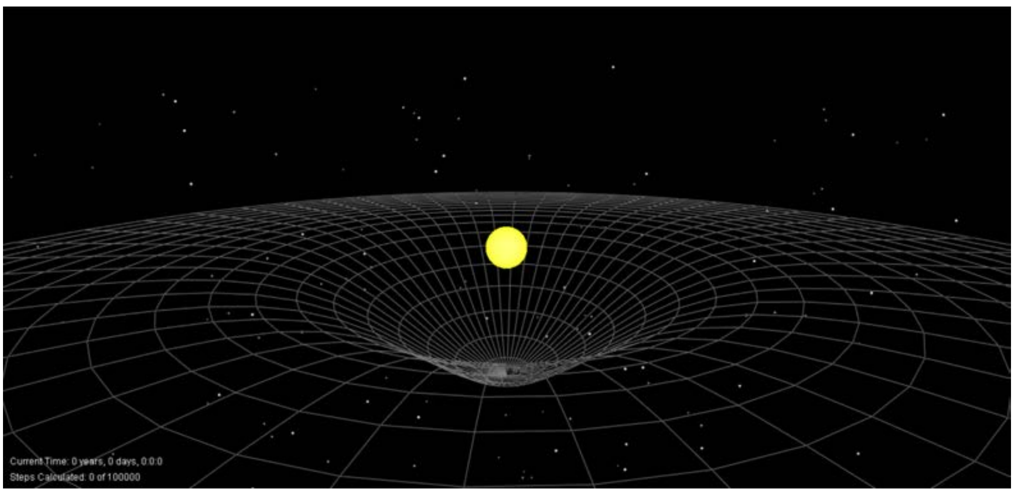


Figura: Diagrama compactado ilustrando como uma massa deforma o espaço.
Fonte: <http://www.gravitation3d.com>.

- No trecho (07:25-07:46), Puncto descreve para Hex o que é conhecido, em Agrimensura, como *método da triangulação*. A ideia é determinar a localização de um ponto medindo-se apenas ângulos a partir de pontos conhecidos em cada extremidade de um segmento de reta.

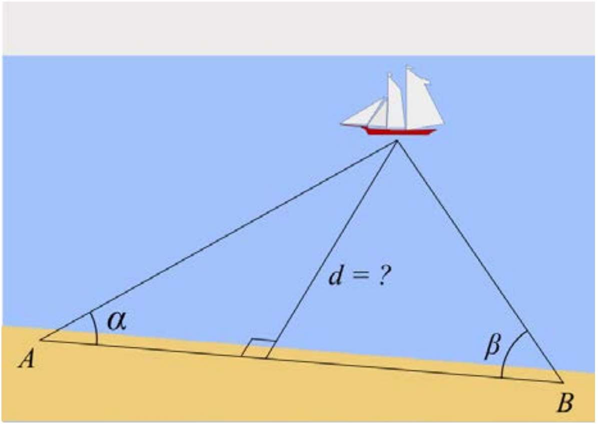


Figura: Método da triangulação.
Fonte: Wikimedia Commons.

Se ℓ é a distância entre A e B, então

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{d}{\operatorname{tg}\beta} = d\left[\frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}+\frac{\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}\right] = d\left[\frac{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}\right]\\ &= d\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}\right],\end{aligned}$$

de modo que

$$d = \ell\left[\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right].$$

Naturalmente, a dedução desta fórmula está pressupondo uma superfície plana. Atualmente, o método da triangulação é usado em muitas áreas, incluindo agrimensura, navegação, metrologia, astrometria, visão binocular, direcionamento de armas.

- Existem vários jogos que exploram a ideia da quarta dimensão. A Wikipedia mantém uma lista deles: <http://bit.ly/2QTAQnl>. Destacamos aqui o 4D Toy (<https://4dtoys.com/>): do mesmo modo que, no vídeo, os seres de Planolândia só podem ver objetos 3D por suas seções planas 2D, o jogo oferece um conjunto de cenas interativas nas quais o usuário pode manipular diversos tipos de objetos 4D e visualizar a interseção desses objetos com o nosso mundo tridimensional. Segundo Marc Ten Bosch, desenvolvedor do jogo, as regras de como os objetos saltam, deslizam, caem, giram e rolam podem ser generalizadas para qualquer número de dimensões. O 4D Toy permite que se experimente como isso seria. Uma das cenas interativas do software se chama *Flatland*.

Figura: 4DToys.

Fonte: <https://4dtoys.com/>.

- Na animação, os habitantes de Linhalândia não percebem que seu mundo é, na verdade, um círculo (19:16-19:37), pois se dermos *zooms* sucessivos em torno de um mesmo ponto, o círculo se parecerá com um segmento de reta. De fato, este fenômeno acontece para vários tipos de curvas. Você pode usar o *applet* interativo do GeoGebra disponível em <https://www.geogebra.org/m/ybacaksd> para ilustrar esse fato para seus alunos.

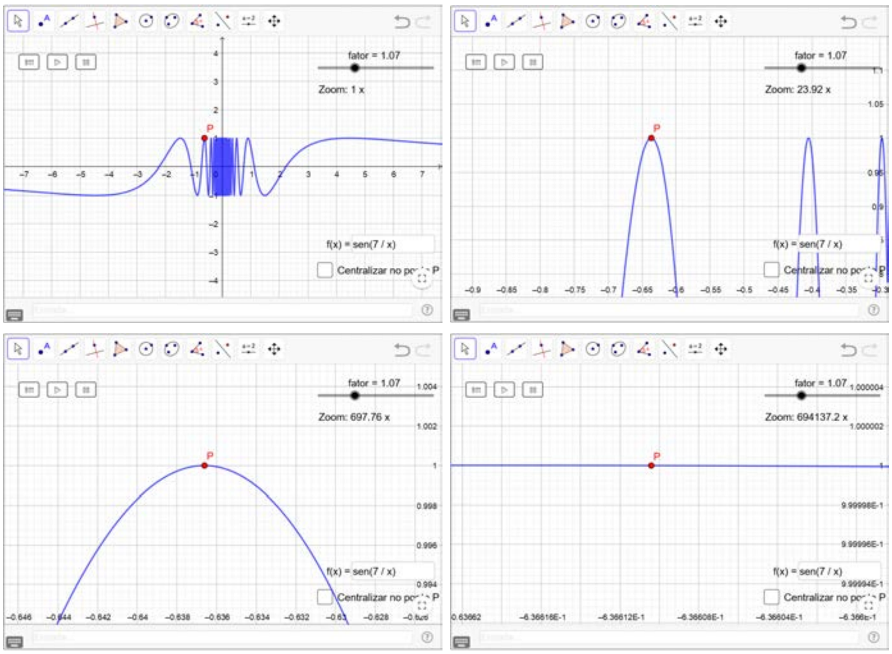


Figura: *Zooms* sucessivos em torno do ponto P.

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/ybacaksd>.

Referências relacionadas

- Abbott, Edwin A. *Planolândia: Um Romance de Muitas Dimensões*. Tradução de Leila de Souza Mendes. São Paulo: Conrad, 2002.
- Abbott, Edwin A. *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions*. New York:

Basic Books, 2008.

- Arcozzi, Nicola. *Beltrami's Models of Non-Euclidean Geometry*. Em: Coen, Salvatore. Mathematicians in Bologna 1861-1960. New York: Springer Basel, p. 1-30, 2012. Disponível em: <http://bit.ly/36CgOnP>. Acesso em 7 de janeiro de 2020.
- Baker, Joanne. *50 Ideias de Física Que Precisa Mesmo de Saber*. Publicações D. Quixote, 2011.
- Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria Hiperbólica*. Terceira impressão. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. Disponível em: <http://bit.ly/35lTKbp>. Acesso em: 4 de janeiro de 2020.
- Brotton, Jerry. Uma História do Mundo em Doze Mapas. Editora Zahar, 2014.
- Burger, Dionys. *Sphereland: A Fantasy about Curved Spaces & An Expanding Universe*. Barnes & Nobles, 1965.
- Crilly, Tony. *50 Ideias de Matemática Que Precisa mesmo de Saber*. Alfragide: Editora D.Quixote, 2011.
- Dantas, Luis Edmundo Carlos Pinto. *O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Fractais e Caos por Meio de Narrativas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2018.
- Feynman, Richard. *Sobre as Leis da Física*. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio, 2012.
- Gardner, Martin. *The New Ambidextrous Universe: Symmetry and Asymmetry from Mirror Reflections To Superstrings*. Third Revised Edition. New York: W. H. Freeman and Company, 2005.
- Greeberg, Marvin Jay. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. Fourth Edition. W. H. Freeman and Company, 2007.
- Krasauskas, Rimvydas; Zube, Severinas. *Canal Surfaces Defined by Quadratic Families of Spheres*. Em: Jüttler, Bert; Piene, Ragni. Geometric Modeling and Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 2008.
- Martin, George E.. *The Foundations of Geometry and The Non-Euclidean Geometry*. Springer-Verlag, 1975.
- Scharf, Caleb. *Segredos da Gravidade: Como Os Buracos Negros Influenciam Galáxias, Estrelas e A Vida no Universo*. Editora Zahar, 2016.
- Sibley, Thomas Q.. *Thinking Geometrically: A Survey of Geometries*. The Mathematical Association of America, 2015.
- Silva, Jairo José da. *Filosofias da Matemãtica*. Editora UNESP, 2007.

Concepção

Keyla Lins Bruck Thedin e Hamanda de Aguiar Pereira

Revisão

Humberto José Bortolossi

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

5 Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros produzidos, promovemos diversas ações de exibição de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70ª Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).

Figura 5.1: Exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do "Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa", realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa “Isto é Matemática”) e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão “Cineclube de Matemática e Estatística” do Projeto “Dá Licença” da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.

Figura 5.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

Dos dois roteiros apresentados neste trabalho, conseguimos aplicar o primeiro, Planolândia, no Festival de Matemática (RJ e RS) e no Colégio GayLussac.

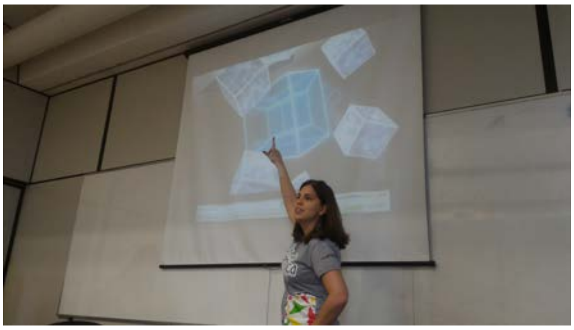



Figura 5.3: Exibição do vídeo “Planolândia” no Festival da Matemática no Rio Grande do Sul.

O roteiro também foi aplicado em turmas do 7° ano do Ensino Fundamental do Colégio Municipal Professora Maria Isabel Damasceno Simão em Macaé/RJ. Antes da exibição de Planolândia, foi projetado o vídeo “A Coelha e o Cervo” (cujo roteiro está no trabalho da colega Hamanda de Aguiar Pereira) e foi feita uma rápida discussão com alunos sobre o termo “dimensão” e de suas aplicações conhecidas por eles.

Figura 5.4: Exibição do vídeo “Planolândia” na Escola municipal professora Maria Isabel damasceno Simão.

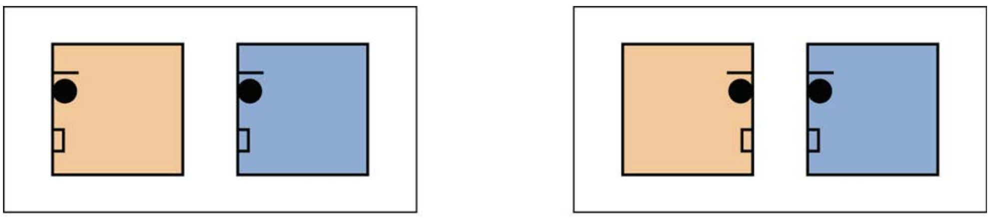
Os alunos foram divididos em grupos e as perguntas foram divididas entre eles, sendo que as duas primeiras e as duas últimas das questões gerais foram trabalhadas em todos os grupos.

Fez-se uma leitura das perguntas antes da exibição do vídeo, para que eles já ficassem atentos, uma vez que o vídeo é legendado e a faixa etária deles costuma apresentar dificuldades em leitura rápida. Nem todas as perguntas foram feitas, devido ao ano de escolaridade. Os alunos assistiram ao vídeo com muita atenção e curiosidade. Foi possível notar pequenas discussões durante as reviravoltas da história. Alguns comentários foram: “O que vêm antes do triângulo?”, relacionado à lei de descendência e “Como ele vai olhar para cima?”, quando Esférius aparece pela primeira vez e diz para Artur olhar para cima e não para o Norte.

- Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
  “Que o desconhecido não é tão perigoso quanto a gente pensa.”. “Pra não limitar seu conhecimento, pois podem existir muito mais coisas do que estamos acostumados.”. “Que outras dimensões existem.”.
- Você aprendeu de algo novo com o vídeo? O quê?
  “Que existem infinitas dimensões.”; “Que a potenciação na álgebra é a mesma coisa da geometria, como $3^2 = 3 \times 3 = 9$ ou um quadrado de 3×3.”.
- O que marca a medida de inteligência ou hierarquia social em Planolândia? “Quem tiver o maior número de lados, mais inteligente é.”.
- Explique a lei de descendência.
  “Cada geração que vai passando, vai aumentando o número de lados.”.
- No início da animação, Artur Quadrado e Hex ouvem o axioma do dia: “É a configuração que faz o homem!”. Na sua opinião, o que isso significa? Como essa frase se relaciona com as leis da descendência?
  Os alunos sentiram dificuldade em responder essa questão, talvez pelo uso da palavra “configuração” que não é um termo comum nas aulas de geometria. De fato, um grupo respondeu da seguinte forma: “A configuração seria os segmentos de reta que quando juntos formam o Homem, no caso, as figuras. Os segmentos de reta formam uma figura.”.
- Quando Artur Quadrado explica as leis de descendência, sua neta Hex pergunta sobre o que aconteceu com seus pais. Artur Quadrado então responde com uma frase que os Círculos costumam dizer: “Uma boca quieta é uma boca que sorri.”. Na sua opinião, o que você acha que essa frase significa?
  “Na minha opinião eu acho que eles não deveriam tocar naquele assunto, pois deve ter acontecido alguma coisa grave com os pais dela.”.
- Para Hex, o que é um superquadrado? Seguindo a lógica de Hex, como você imagina o que seria um super-hexágono?
  “Um quadrado que é um cubo, um hexágono gigante.”. Observação: nessa questão, os alunos chegaram à conclusão do cubo, mas não conseguiram concluir que no caso do hexágono seria

um prisma de base hexagonal. Isso pode ter ocorrido por não lembrarem o nome ou por não conhecerem ainda o termo, uma vez que nem sempre esse assunto é abordado nos anos anteriores.

- Em um certo momento do vídeo, Artur Quadrado diz para a sua neta que os Círculos são sábios e superiores, pois eles possuem um número infinito de lados. Na sua opinião, de acordo com a lei de descendência, é realmente possível existir um círculo em Planolândia? Por quê?
  "Não, porque diz que tem infinitos lados."; "Sim, porque tem várias formas geométricas.". Observação: enquanto alguns alunos analisaram as leis de descendência, outros não viram isso como empecilho para que existissem círculos em Planolândia.
- Admitindo que dois habitantes da Linhalândia não podem ocupar a mesma posição ao mesmo tempo, seria possível para o Rei de Linhalândia trocar de lugar suas rainhas da esquerda e da direita?
  "Não, porque estão na mesma linha.".
- Como o Rei da Linhalândia sabe que a rainha da direita realmente está na direita?
  "Porque é a única coisa que ele tem como saber, pois vive em uma linha."; "Porque ela diz que é (a rainha da direita).".
- Um habitante de Planolândia ao olhar para outro habitante, que forma geométrica ele vê?
  "Eles veem só uma linha."; "Reto."; "Eles se veem só por um lado.".
- Que artefato da terceira dimensão foi dado à Planolândia há muito tempo e agora reside na área 33H? Como este artefato aparece geometricamente em Planolândia?
  "O cubo.". Observação: os alunos tiveram dificuldade em responder a segunda parte da pergunta.
- A figura a seguir exibe duas situações que aparecem no filme. A partir da Situação 1, que movimento o quadrado laranja tem que fazer para conseguir ficar como na Situação 2, isto é, de frente para o quadrado azul com bocas e olhos alinhados? Tal movimento poderia, de fato, ser realizado por um planolandês?



Situação 1 Situação 2

  "Ele teria que sair por alguns segundos do plano.".
- Em uma certa parte do vídeo, Artur Quadrado tem ideias sobre dimensões que não são bem aceitas por Esférius. Que ideias são estas?

"Ele pensou que poderia existir quarta, quinta e sexta dimensão.".

- O que Artur Quadrado faz para "desaparecer" durante o seu julgamento? Por que isso funciona?

  "Ele passa da dimensão 2 pra dimensão 3. Porque ela existe (a terceira dimensão)."; "Esférius aparece e salva ele. Por que eles são amigos.". Observação: alguns alunos explicaram matematicamente, enquanto outros pensaram na questão da amizade entre eles.
- No final do filme, quando a família de Artur Quadrado convence os planolandeses de que existe uma terceira dimensão, eles questionam a possibilidade de existir uma quarta dimensão. Que objeto é visto embaixo da área 33H que apoia essa ideia?

  Essa questão foi apenas comentada com os alunos, pois eles não conheciam o Hipercubo.
- O que você mais gostou no filme? "Como foi classificada a sociedade de formas geométricas."; "De ter mostrado a quarta dimensão na nossa dimensão."; "Que toda luta não foi em vão."; "A parte que o Artur fica rebelde."; "Da curiosidade de Hex."; "Quando eles foram para a terceira dimensão.".
- Se você fosse o diretor desta animação, você faria algo diferente? O quê? Uma das principais sugestões dos alunos foi que o filme não fosse legendado e sim dublado. Algumas outras foram: "Melhoraria o gráfico."; "Continuaria a animação."; "Teria colocado um final mais explicativo e completo.".

Após a exibição do filme, foi realizada uma roda de conversa. Nela, foram apontadas algumas diferenças entre o vídeo e o livro. Alguns alunos sugeriram que a história continuasse mas, infelizmente, não houve tempo hábil para exibir "Planolândia2: Esferolândia", além do fato de que, na época, o nosso processo de tradução das legendas para o Português ainda não estava finalizado.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017

Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.

Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.

Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.

Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.

Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.

Haven, K. *Super Simple Storytelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.

Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.

McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.

Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.

Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.

Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2003.

Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Russell, Bertrand. The Functions of A Teacher. Em: Egner, Robert E.; Denonn, Lester E.. *The Basic Writings of Bertrand Russell*. Routledge Classics, 2009.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearences in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: Best*Seller*, 2015.

Zak, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina. TED Global 2011*. Disponível em: <https://goo.gl/tFhoqb>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zak, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <https://vimeo.com/61266150>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <https://goo.gl/DgBnnB>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BVyRng>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <https://goo.gl/LPFn7P>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.