UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Jean Carlos Silva

Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio

Bauru
2019

Jean Carlos Silva

Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro

Bauru
2019

S586f

Silva, Jean Carlos

Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio / Jean Carlos Silva. -- Bauru, 2019

115 p. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientadora: Cristiane Alexandra Lázaro

1. Matemática (Ensino Médio) - Estudo e ensino. 2. funções.. 3. funções exponenciais.. 4. funções logarítmicas.. 5. Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio.. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE JEAN CARLOS SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, DO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS - CÂMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO.

Aos 19 dias do mês de dezembro do ano de 2019, às 09:00 horas, no(a) Unesp/Câmpus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Bauru, Prof. Dr. MARCELO REICHER SOARES do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Bauru, Prof. Dr. DANILO ELIAS DE OLIVEIRA do(a) Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Uberlândia, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de JEAN CARLOS SILVA, intitulada ***Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio***. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO

Prof. Dr. MARCELO REICHER SOARES

Prof. Dr. DANILO ELIAS DE OLIVEIRA

Jean Carlos Silva

Funções exponenciais e logarítmicas: uma proposta didática para o ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
Orientadora

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares
UNESP - Faculdade de Ciências - Bauru

Prof. Dr. Danilo Elias de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia - Monte Carmelo

Bauru
19 de dezembro de 2019

À minha esposa Érica, nossa família e meus irmãos

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sua imensa caridade, bondade, seu infinito amor, por ter me guiado durante toda essa jornada, com muito carinho e paciência.

À minha esposa Érica, por toda compreensão, companheirismo e principalmente por todo amor dedicado a mim. Por toda sua determinação para conseguirmos alcançar nossos objetivos durante essa jornada.

Aos meus sogros Aparecida e Osvaldo e meus cunhados Renato e Heliane por serem uma base sólida, confiável e indispensável, que durante esse curso nunca mediram esforços para acolher, ajudar, aconselhar nos momentos difíceis.

Aos meus irmãos Rafael e Fernando presentes em momentos de extrema importância no decorrer desse curso.

À todo corpo docente do PROFMAT da UNESP - Universidade Estadual Paulista - Campus de Bauru - SP, por toda motivação, troca de experiências e por suas excelentes aulas e profundo conhecimento matemático.

À minha orientadora Professora Doutora Cristiane Alexandra Lázaro, por toda sua dedicação, criatividade e profissionalismo, elementos fundamentais para a elaboração dessa dissertação.

Por fim o presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

"É no problema da educação que assenta o grande segredo do aperfeiçoamento da humanidade."

Immanuel Kant

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo realizar um estudo aprofundado das funções exponenciais e logarítmicas, conteúdo programático para o ensino médio e, em particular, a primeira série. Tal proposta deve-se ao fato de subsidiar o trabalho docente e também de grande parte da classe discente dos dias de hoje encontrar muitas dificuldades de aprendizagem na área de exatas em geral. Com a preocupação em relação a qualidade de ensino ofertada nos dias atuais e, de acordo com os currículos estaduais e base nacional comum curricular (BNCC), propomos a realizar um estudo bibliográfico sobre o tema e aplicar sequências didáticas abordando o assunto com alunos da primeira série do ensino médio. De maneira diversificada, fazendo uso das tecnologias e materiais concretos disponíveis na unidade de ensino a qual pertence a turma, realizamos um trabalho minucioso a fim de diagnosticar as principais defasagens de aprendizagem, as maiores dificuldades, e identificar em tais alunos qual seria a melhor forma de oferecer, de fato, um método eficiente em busca de uma aprendizagem significativa. As atividades propostas foram adaptadas levando em consideração as particularidades e ritmos de aprendizagem de cada aluno, nos preocupando também com a inclusão social, em como atender alunos com dificuldades extremas, o que é de grande desafio para os profissionais da educação nos dias de hoje. Com o presente trabalho oferecemos aos discentes a oportunidade de adquirir conhecimentos básicos para o seu desenvolvimento pessoal, intelectual, respeitando o seu ritmos de aprendizagem, em busca de construirmos cidadãos proativos e protagonistas.

Palavras-chave: funções, funções exponenciais, funções logarítmicas, aplicações de funções, proposta didática.

Abstract

This dissertation aims to conduct an in-depth study of exponential and logarithmic functions, syllabus for high school and in particular the first grade. This proposal is due to the fact that subsidizing the teaching work and also much of today's student class encounter many learning difficulties in the exact field in general. Concerning the quality of education offered today and according to the state curricula and common national curriculum (BNCC), we propose to conduct a bibliographic study on the subject and apply didactic sequences approaching the subject with first grade students. from highschool. In a diversified manner, making use of the technologies and concrete materials available in the teaching unit to which the class belongs, we have done a thorough work in order to diagnose the main learning gaps, the greatest difficulties and to identify in such students what would be the best way of learning. indeed offer an efficient method for meaningful learning. The proposed activities were adapted taking into account the particularities and learning rhythms of each student, we are also concerned with social inclusion. How it will serve students with extreme difficulties, which is a big challenge for education professionals today. With this study we offer students the opportunity to acquire basic knowledge for their personal and intellectual development, respecting their learning rhythms in search of building proactive citizens and protagonists.

Keywords: functions, exponential functions, logarithmic functions, function applications, didatic proposal.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

A sociedade do século XXI é cada vez mais caracterizada pelo uso intensivo de conhecimento, seja para trabalhar, conviver ou exercer a cidadania, seja para cuidar do ambiente em que se vive. Todavia, essa sociedade, produto da revolução tecnológica que se acelerou na segunda metade do século XX e dos processos políticos que redesenharam as relações mundiais, já está gerando um novo tipo de desigualdade ou exclusão. Na sociedade de hoje, é indesejável a exclusão pela falta de acesso tanto aos bens materiais quanto ao conhecimento e aos bens culturais.

No Brasil, essa tendência à exclusão caminha paralelamente à democratização de acesso a níveis educacionais além do ensino obrigatório. Com mais pessoas estudando, além de um diploma de nível superior, as características cognitivas e afetivas são cada vez mais valorizadas, como as capacitades de resolver problemas, trabalhar em grupo e agir de modo cooperativo, pertinentes em situações complexas.

Em todas as épocas, em todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares. Tal fato era traduzido, em tempos antigos, pela tríplice caracterização da função da escola como um lugar que se devia aprender a ler, escrever e contar, o que, significava, sinteticamente, uma dupla alfabetização, no universo das letras e dos números.

Naturalmente, há muito essa alfabetização que se esperava da escola ampliou seu raio de ação, incorporando o interesse pelas múltiplas formas de linguagem presentes na sociedade contemporânea e estendendo-se para o universo das ciências e das tecnologias, particularmente no que se refere às tecnologias informáticas.

No que se refere à Matemática, houve, discussões referentes à especificidade excessiva que tal componente curricular aparentava, gerando frequentemente nos alunos uma sensação de desamparo absolutamente indevida.

Vivemos uma época em que as atividades interdisciplinares e as abordagens transdisciplinares costituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos.

Ao respeitar a rica história da componente curricular e alçá-la à uma área de conhecimento, busca-se apenas criar condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir às outras áreas, na grande tarefa de identificar dentre as informações aquela que é conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manisfestação.

O tema da presente dissertação foi escolhido por ser uma ferramenta matemática que possui muitas aplicações, favorecendo a interdisplinaridade e por se tratar de conteúdos previstos para o ensino médio, em especial, na 1ª série, o qual é motivo de grande preocupação no que diz respeito a qualidade de ensino nessa fase da educação básica, ou seja, o que os alunos deviam aprender e o que realmente estão aprendendo.

Nesse sentido, desenvolvemos um trabalho que tem como objetivos principais, subsidiar o leitor a aprofundar seus conhecimentos sobre funções exponenciais e sua inversa, a função logarítmica e, simultaneamente, apresentar uma coleção de atividades aplicadas de fato com alunos da 1ª série do ensino médio, onde nos dispusemos a contextualizar os conceitos de funções exponenciais e funções logarítmicas, apresentando esses temas aos alunos em forma de sequências didáticas elaboradas a partir de competências e habilidades previstas em currículos estaduais e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Iniciamos mais esse capítulo descrevendo um pouco do conceito histórico de funções, funções exponenciais e logarítmicas. Não parece existir um consenso, entre os diversos autores, no que diz respeito a origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônicos já possuiam um "instinto de funcionalidade"(YOUSCHIKEVITH, 1976, apud MACHADO, 1998). Podemos encontrar este "instinto de funcionalidade", que precede uma ideia mais geral de função, cerca de 2000 A.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados, raízes quadradas, que podem ser tomadas como "funções tabuladas", destinadas a um fim prático.

Entre os gregos, as tabelas que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia mostravam evidências de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear (YOUSCHIKEVITH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Segundo Boyer (1974), na França, há indícios de ideias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme, um dos maiores escritores e professores de sua época, descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração uniforme no tempo. Porém, o trabalho de Oresme resumia-se a ilustrar aspectos qualitativos, sem se utilizar de medidas (YOUSCHIKEVITH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Para Youschkevitch (1976), há três fases principais do desenvolvimento da noção de função:

1) A Antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variáveis e de função;
2) A Idade Média, quando as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas;
3) O período Moderno, a partir do século XVII, principalmente, que comporta, a seguir, um melhor detalhamento.

Galileu Galilei (1564 - 1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas.

Descartes (1596 - 1650) utilizou equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra.

Entretanto no século XVII, Leibniz (1646 - 1716) introduziu o conceito de função, associando este conceito à curvas, onde curvas e imagem geométrica de funções se tornaram sinônimas.

No século XVIII, Bernoulli e Euler consideravam uma função como uma expressão qualquer associada a uma variável e à constantes. Foi Euler que introduziu a notação $f(x)$ mas também tinha uma segunda concepção de que uma função não precisava ser expressa por uma fórmula, mas podia ser representada geometricamente por uma curva. Este último conceito corresponde à concepção que grande parte dos nossos estudantes tem sobre este conceito.

Em consonância com o fim do século XVIII, os matemáticos começaram a examinar as bases do saber matemático a fim de estabelecer uma fundamentação lógico-rigorosa ao saber existente. Fatos que levaram Dirichlet, no século XIX, a relacionar a noção de variável à noção de função da seguinte forma:

"Uma variável é um símbolo que representa qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribuem valores arbitrários, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores da variável x, é chamada de variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (EVES, 1995, p.660-661)"

1.1 Funções

Há algumas maneiras de representar uma função.

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Veja abaixo as seguintes situações:

1. O preço P a ser pago por uma corrida de táxi depende de uma taxa fixa A, chamada de bandeirada, e uma taxa variável $k.x$ que irá variar de acordo com a distância x de quilômetros. Cada número positivo x de km está associado um único valor de P e dizemos que P é uma função de x. Ou seja, $P = A + kx$.

2. A área A de um quadrado depende da medida l do seu lado. A lei que relaciona A e l é dada pela equação $A = l^2$. A cada número l positivo está associado um único valor de A e dizemos que A é uma função de l.

3. Em uma aplicação financeira a regime composto o montante M gerado depende do período de aplicação t, fixada uma taxa de juros i. A fórmula que relaciona o valor M a ser resgatado após um período de tempo t é dada por: $M = C(1 + i)^t$, onde C é o valor do capital investido. A cada período de tempo t está associado um único valor de M e dizemos que M é uma função de t, fixada uma taxa i.

4. O volume V de um cubo depende da medida de sua aresta a. A lei que relaciona V e a é dada pela equação $V = a^3$. A cada número a positivo está associado um único valor V e dizemos que V é uma função de a.

Definição 1.1. Uma função f é uma lei que associa cada elemento x de um conjunto A exatamente a um elemento $y = f(x)$, em um conjunto B.

Nesse trabalho consideramos as funções para os quais A e B são conjuntos de números reais. O conjunto A é chamado de domínio da função e o conjunto B é chamado de contra-domínio de f. A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no domínio de uma função f é denominada de variável independente, e o que representa um número qualquer na imagem de f é chamado de variável dependente. No exemplo 4. acima a é a variável independente e V a variável dependente.

Dentre diversas maneiras de se ver uma função, em geral o primeiro contato se dá através de um diagrama de flechas, como na figura 1.1. Cada flecha conecta um elemento de A com um elemento de B. A flecha indica que y_1 está associado a x_1, y_2 a x_2 e etc.

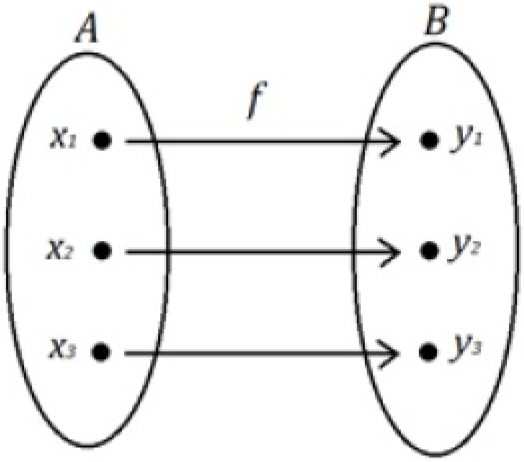


Figura 1.1: Diagramas de flechas para f

É possível representar uma função de quatro maneiras:

1. verbalmente (descrevendo-as em palavras);
2. numericamente (por meio de uma tabela de valores);
3. visualmente (através de diagramas e por meio de seu gráfico);
4. algebricamente (por meio de uma fórmula explícita).

Dentre as maneiras de representação de funções é muito comum no ensino médio os problemas a serem solucionados envolvendo funções, em geral são apresentados na forma verbal (linguagem comum) e/ou através de valores presentes em tabelas (numericamente), e o aluno precisa solucionar o problema construindo o gráfico da função presente no problema ou por meio de sua representação algébrica.

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu **gráfico**. Se f for uma função com domínio A e contradomínio B, então seu gráfico será o conjunto de pares ordenados:

$$\{(x, f(x))/x \in A, y = f(x) \in B\} \subset AXB$$

Em outras palavras, o gráfico de f consiste em todos os pontos (x, y) do plano coordenado $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f. O gráfico de uma função f nos dá uma imagem útil do comportamento dessa função. Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos ler o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x. O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y (ver figura 1.2).

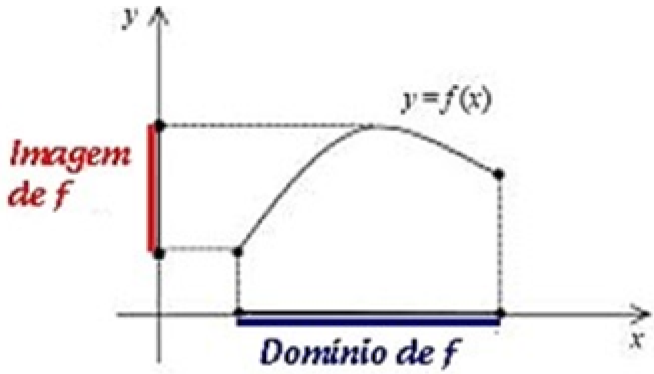


Figura 1.2: Exemplo de gráfico de f

Exemplo 1.1. O gráfico de uma função f está na figura 1.3.

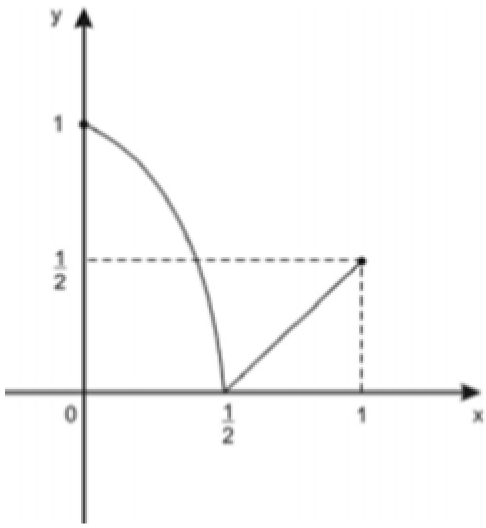


Figura 1.3: Gráfico de f

(a) Encontre os valores de $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ e $f(1)$.

(b) Quais são o domínio e a imagem de f?

Solução:

(a) Vemos na Figura 1.3 que o ponto $(0, 1)$ está no gráfico de f situado sobre o eixo das ordenadas, assim o valor de f em 0 é $f(0) = 1$.

Quando $x = \frac{1}{2}$, o ponto no gráfico que corresponde a esse valor está sobre o eixo das abscissas assim temos que $f(\frac{1}{2}) = 0$, e ainda, Quando $x = 1$, o valor correspondente de f é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, o ponto $(1, \frac{1}{2})$ pertence ao Gf, logo $f(1) = \frac{1}{2}$.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida para $x \in [0, 1]$, logo o domínio de f é $Dom(f) = [0, 1]$, ou seja, o intervalo fechado $[0, 1]$.

Observe que os valores assumidos por f variam de 0 até 1; assim, a imagem de f é $Im(f) = [0, 1]$, ou seja, o intervalo fechado $[0, 1]$.

A seguir mostraremos um exemplo de função apresentada numericamente (por meio de uma tabela de valores).

Exemplo 1.2. A tabela a seguir mostra o cálculo que foi realizado para cobrança do Imposto de Renda no Brasil (em 2013). Ela informa a porcentagem cobrada de cada faixa de rendimento (salários, aluguéis e outras remunerações). Veja que até determinado valor o contribuinte é isento, isto é, não precisa pagar o Imposto de Renda. Além disso, existe uma parcela fixa a ser descontada do imposto calculado.

Tabela 1.1: **Tabela progressiva para o cálculo mensal do Imposto de Renda de Pessoa Física para o exercício de 2014, ano-calendário de 2013.**

Base de Cálculo mensal em R$	Alíquota%	Parcela a deduzir do imposto em R$
Até R$1710,78	-	-
De R$1710,79 até R$2563,91	7,5	128,31
De R$2563,92 até R$3418,59	15,0	320,60
De R$3418,60 até R$4271,59	22,5	577,00
Acima de R$4271,59	27,5	790,58

Considerando R como a renda líquida de um contribuinte, o imposto a pagar é uma função f de R. O contribuinte deve multiplicar a sua renda líquida pelo valor da alíquota e subtrair do resultado a parcela à deduzir. Além disso, tal função deve ser *contínua*, para não prejudicar nem beneficiar contribuintes cuja renda líquida se situe em faixas distintas da tabela. Note que para passar da primeira faixa (isentos) para a segunda (alíquota de 7,5%), a parcela a deduzir (R$128,31) não permite saltos no gráfico.

1) Utilize os valores A (alíquota) e d (parcela a deduzir) da tabela e dê a expressão da função I *imposto a pagar* relativa a uma renda R, em cada faixa da tabela.

Solução:

1) Em relação a cada faixa da tabela 2.1 e, considerando o que diz o enunciado do problema, temos:

Para $R \leq$ R\$171,78: $I(R) = 0$;

Para R\$1710,79$\leq R \leq$ R\$2563,91: $I(R) = \frac{3}{40}R - 128,31$;

Para R\$2563,92$\leq R \leq$R\$3418,59: $I(R) = \frac{3}{20}R - 320,60$;

Para R\$3418,60$\leq R \leq$ R\$4271,59: $I(R) = \frac{9}{40}R - 577$;

Para $R \geq$ R\$4271,60: $I(R) = \frac{11}{40}R - 790,58$.

Generalizando, temos que o imposto I a ser pago pelo contribuinte de renda R pode ser dada por

$$I(R) = AR - d,$$

onde A é a alíquota e d a parcela a deduzir.

1.2 Funções Exponenciais

Nesta seção pretendemos realizar uma abordagem das funções exponenciais, com foco no ensino médio. Em geral, nos dias de hoje, praticamente todos os currículos, materiais, planejamento de aulas, avaliações, intervenções, adaptações curriculares, etc..., tem como objetivo o desenvolvimento de competências e habilidades previstas em cada ano/série do ensino fundamental e ensino médio.

Neste momento realizaremos o estudo de algumas das habilidades fundamentais para o aprendizado efetivo do aluno no que diz respeito ao tema em questão. É de extrema importância diagnosticar através de avaliações, intervenções, se os alunos possuem habilidades fundamentais previstas no ensino fundamental anos finais envolvendo potenciação. A seguir vamos examinar algumas dessas habilidades.

Segundo a Matriz de Referência para a Avaliação Processual da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo os objetivos são que no ensino fundamental anos finais, os alunos desenvolvam dentre outras as habilidades elencadas na tabela a seguir.

Tabela 1.2: **Habilidades da Matriz de Avaliação Processual SEESP**

Conteúdos: 8º e 9º anos	Habilidades SEESP
Potenciação: Propriedades para expoentes racionais.	1. Analisar e interpretar dados escritos na forma de potência de 10.
Notação Científica.	2. Relacionar a representação decimal com a notação científica de grandezas.
	3. Reconhecer a potenciação em situações contextualizadas.
	4. Conhecer e operar com as propriedades das operações com potências de expoentes inteiros.

Segundo a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) os objetivos são semelhantes a análise feita anteriormente, conforme elencamos na tabela a seguir.

Tabela 1.3: **Habilidades da BNCC**

Conteúdos: 8º e 9º anos	Habilidades BNCC
Potenciação: Propriedades para expoentes racionais e radiciação.	1.(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	2.(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
	3.(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Dentre essas habilidades, vamos direcionar um breve estudo a seguir com foco nas habilidades 3 e 4 da tabela 2.2 e as habilidades (EF08MA02) e (EF09MA03) da BNCC. Ambas as habilidades compreendem as propriedades da potenciação envolvendo números racionais, habilidades essas de extrema importância para este trabalho, pois delas decorrem as propriedades dos logarítmos na qual estudaremos na próxima seção.

1.2.1 Potenciação

Antes de definir potências é conveniente relembrar as notações utilizadas para representar os conjuntos numéricos. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ é o conjunto dos **inteiros positivos** ou números **naturais**; $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos números **inteiros** e $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ é o conjunto dos números **racionais**. Utilizamos ainda $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ para denotar os **inteiros não nulos** e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ para denotar os **racionais não nulos**.

Proposição 1.1. Se a é um número racional e n é um inteiro positivo, a potência de base a e expoente n é definida por

$$a^0 = 1, \text{ se } a \neq 0$$
$$a^1 = a \text{ e}$$

$$a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{nvezes}$$

Supondo a^n definido, definimos $a^{n+1} = a^n.a$.

Observações 1.1. Se $n \in \mathbb{N}$ então

$$0^n = 0;$$

$$1^n = 1;$$

Exemplo 1.3. Qual o algarismo das unidades de 7^{2019}?

Solução. Veja que

$$7^1 = 7,$$

$$7^2 = 7.7 = 49,$$

$$7^3 = 7.7.7 = 343,$$

$$7^4 = 7.7.7.7 = 2401,$$

$$7^5 = 7.7.7.7.7 = 16807,$$

$$7^6 = 7.7.7.7.7.7 = 117649,$$

$$7^7 = 7.7.7.7.7.7.7 = 823543,$$

$$7^8 = 7.7.7.7.7.7.7.7 = 5764801.$$

Observando o valor das potências de base 7 até o expoente 8, sem calcular o valor das potências sequintes, podemos ver que o algarismo das unidades de 7^9 é 7, o de 7^{10} é 9, o de 7^{11} é 3, o de 7^{12} é 1, e assim por diante. Vemos que os algarismos das unidades das potências listadas acima são $7, 9, 3, 1$, nessa ordem. Assim fica claro que existe um ciclo de 4 números que se repetem como algarismo das unidades das potências de 7. Para saber tal algarismo em determinada potência, basta calcular o resto da divisão do expoente da potência por 4. Como 2019 deixa resto 3 quando dividido por 4, concluímos que o algarismo das unidades de 7^{2019} é 3.

Exemplo 1.4. Mário dobrou uma folha de papel ao meio e obteve 2 retângulos. Em seguida, com a folha dobrada, ele dobrou ao meio novamente e obteve 4 retângulos. Se Mário dobrar a folha ao meio 6 vezes quantos retângulos ele vai obter?

Solução. O procedimento de dobrar a folha ao meio indica que a cada dobradura a quantidade de retângulos dobra em relação a quantidade imediatamente anterior. Então temos que:

Após a 1ª dobradura obtemos $2.1 = 2$ retângulos;

Após a 2ª dobradura obtemos $2.2 = 4$ retângulos;

E assim sucessivamente, logo a quantidade de retângulos obtidos após dobrarmos a folha 6 vezes, é

$$2.2.2.2.2.2 = 2^6 = 64$$

retângulos.

Supondo que fosse possível repetir o experimento n vezes, a quantidade de retângulos obtidos seria 2^n.

Observação 1.1. Se $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.....\frac{a}{b}}_{nvezes} = \frac{a.a.....a}{b.b.....b} = \frac{a^n}{b^n}$$

A seguir elencamos algumas propriedades usuais da potenciação.

Proposição 1.2. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então

i. $a^m.a^n = a^{m+n}$;

ii. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $m > n$, $a \neq 0$;

iii. $(a^m)^n = a^{m.n}$;

iv. $(a.b)^n = a^n.b^n$;

Demosntração:
i. Fixemos a e m arbitrariamente e demonstremos a relação por indução sobre n.
Temos claramente, pelas definições, que

$$a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}.$$

Por outro lado, supondo que $a^m.a^n = a^{m+n}$, temos que

$$a^m.a^{n+1} = a^m.(a^n.a) = (a^m.a^n).a = a^{m+n}.a = a^{m+n+1}$$

Deste modo, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos a nossa propriedade.

Observação 1.2. (Expoente negativo) Considerando a propriedade (ii) descrita acima, válida para $a \in \mathbb{Q}^*, m, n \in \mathbb{N}, com\ m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Queremos estender as potências aos expoentes inteiros que não são positivos, sem perder a propriedade acima. Então, devemos ter

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Desse modo, podemos definir

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Assim, as propriedades apresentadas na proposição 2.2 agora são válidas para expoentes inteiros quaisquer.

Observação 1.3. (Potência de expoente racional) Como poderíamos definir $a^{\frac{m}{n}}$, onde a é um número racional positivo e $\frac{m}{n}$ é uma fração com $m > 0$ e $n > 0$? Supondo que as propriedades das potências de expoentes inteiros continuam válidas, podemos escrever

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Sob as mesmas hipóteses, vejamos que

$$a^{-\frac{m}{n}}.a^{\frac{m}{n}} = 1$$

Logo,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

De fato, mais uma vez, todas as propriedades apresentadas nos exemplos anteriores continuam válidas.

Observação 1.4. Sejam $a, x, y \in \mathbb{Q}$. Então
i) $0 < a < 1, x > y \Rightarrow a^x < a^y$.
ii) $a > 1, x > y \Rightarrow a^x > a^y$.

1.2.2 Exemplos de atividades que envolvem as habilidades da Matriz de Avaliação Processual SEESP e da BNCC

Dentre os exemplos já apresentados até o momento, elencamos a seguir exemplos de atividades que trabalham as habilidades elencadas nas tabelas 1.2 e 1.3.

Habilidade: MP05 - Realizar operações com potências de expoentes inteiros.

(ENEM 2015 - ADAPTADO) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

(A)4129.10^{15}
(B)4129.10^{9}
(C)4219.10^{6}
(D)4129.10^{3}
Dica: $1\ tonelada = 1000kg = 10^3kg$

Resolução: No enunciado, temos a referência de que a exportação de soja no Brasil, no ano de 2012, foi de 4129 milhões de toneladas, descrevendo esse totalizador em termos de potências de dez, temos que:

4129 milhões$= 4129000000 = 4129.10^6$
1 tonelada$= 1000kg = 10^3kg$, então

$$4129000000 = 4129.10^6.10^3 = 4129.10^9kg.$$

O resultado acima, atende à alternativa (B), da questão.

Fazendo uma análise das alternativas presentes na questão e possíveis respostas dos alunos, podemos observar que:
Alternativa (A): Possivelmente o aluno não relaciona as potências envolvidas na questão escolhendo aleatoriamente a alternativa.
Alternativa (B): O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos

para resolver a questão. Cabe ao professor verificar, por meio dos registros do aluno, se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.
Alternativa (C): Possivelmente o aluno não compreendeu o objetivo da questão e apenas transformou a informação (milhões 10^6) dada no problema para a escrita em potência de dez.
Alternativa (D): Possivelmente o aluno não compreendeu o objetivo da qustão e apenas transformou a informação (Dica) dada no problema para a escrita em potência de dez.

Habilidade: MP04 - Usar notação científica em representações numéricas.

Ao consultar a capacidade de memória de um determinado arquivo, em um microcomputador, visualiza-se a seguinte janela da figura 1.4

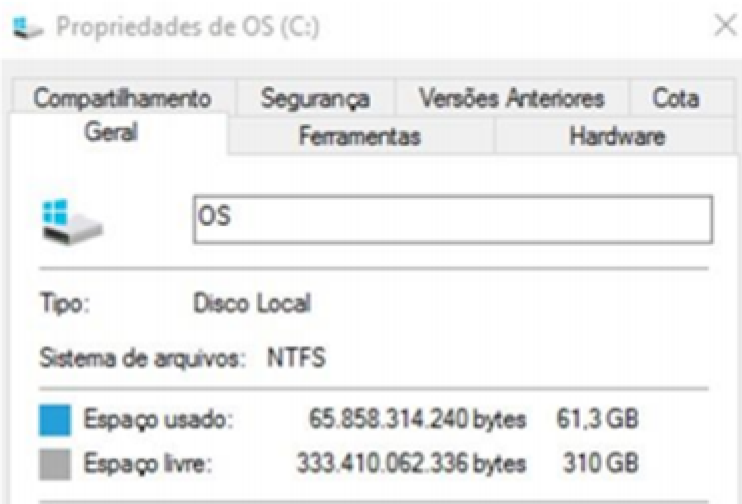


Figura 1.4: Imagem da tela do microcomputador.

Sabendo-se que no Sistema Internacional (S.I), 1 GB corresponde a 10^9 bytes e 1 MB corresponde a 10^6 bytes. A quantidade, em MB (no S.I), do espaço livre na memória do microcomputador na notação científica é
(A)$3,1.10^5$
(B)$3,1.10^2$
(C)$3,1.10^{-1}$
(D)$3,1.10^{-2}$
Resolução: De acordo, com a informação, o espaço livre do arquivo em questão é de 310

GB, se 1 GB corresponde no S.I, 10^9 bytes, então, temos que, transformando 310 GB em quantidades de MB;

$$\frac{31.10.10^9}{10^6} = \frac{31.10^{10}}{10^6} = \frac{3,1.10^{11}}{10^6} = 3,1.10^5 MB$$

Portanto, o resultado obtido atende à alternativa (A), da questão.

Fazendo uma análise das alternativas presentes na questão e possíveis respostas dos alunos, podemos observar que:

Alternativa (A):O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou sus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar, por meio dos registros do aluno, se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.
Alternativa (B): Possivelmente o aluno relaciona as transformações de unidades do byte e, neste caso, apenas converteu os 310 GB em potência de dez.
Alternativa (C): Possivelmente o aluno realizou as transformações dos múltiplos do byte, porém, ao indicar esta alternativa, realizou a transformação de Megabyte para Gigabyte da seguinte maneira:

$$\frac{31.10.10^6}{10^9} = \frac{31.10^7}{10^9} = 31.10^{-2} = 3,1.10^{-1}$$

Alternativa (D): Como no caso anterior, o aluno possivelmente realizou as transformações dos múltiplos do byte e, talvez realizou a transformação de Megabyte para Gigabyte, conforme escrito anteriormente, porém interpretou que o resultado obtido (31.10^{-2}), é igual a $3,1.10^{-2}$.

1.2.3 A Função Exponencial

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A *função exponencial de base a*, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

Propriedade 1.1. $a^x.a^y = a^{x+y}$;

Propriedade 1.2. $a^1 = a$;

Propriedade 1.3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$, e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

É interessante observar que se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1.1 acima, isto é, $f(x+y) = f(x).f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula.
Mais ainda: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade 1.1 e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante das propriedades 1.1 e 1.2, temos que o $Dom(f) = \mathbb{R}$, e a $Im(f) = \mathbb{R}^+$. Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem as propriedades 1.1 e 1.2 então, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1).f(1).....f(1) = a.a.....a = a^n.$$

Usando a propriedade 1.1, resulta daí, como mostramos anteriormente, que, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r + s) = f(r).f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 1.3 diz que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Disto resultará, como veremos agora, que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional.

Para fixar as ideias, suporemos $a > 1$. Então, a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes para assumir o valor de a^x, com a propriedade acima. Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências de a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Lema 1.1. *"Sejam a um número real positivo, com $a \neq 1$, e $[b, c]$ um intervalo de $\mathbb{R}^+$, então existe $r \in \mathbb{Q}/a^r \in [b, c]$".*

Propriedade 1.4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Mais precisamente, se $a > 1$ então, a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$, tem valor absoluto grande.

Propriedade 1.5. A função exponencial é contínua.

Isto significa que, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário fixo, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. Esta é novamente uma consequência das propriedades básicas 1), 2) e 3) da função exponencial.

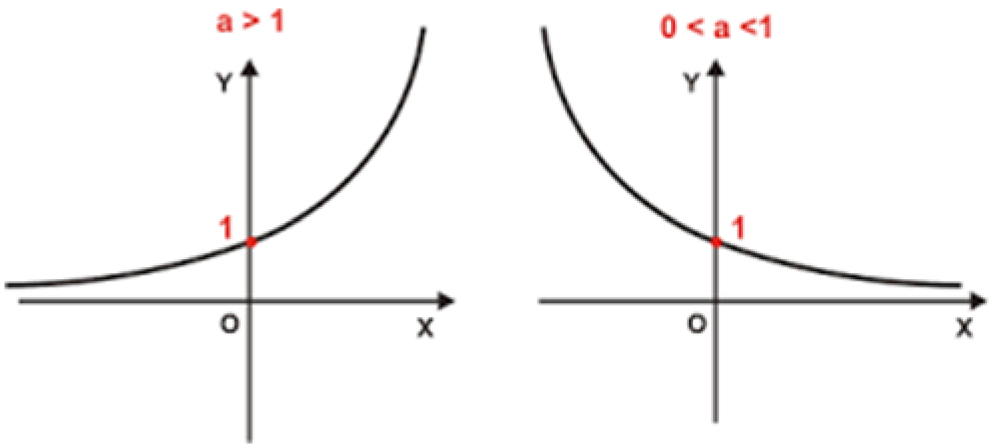


Figura 1.5: Gráfico da Função Exponencial

A figura 1.5 exibe os gráficos de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$. Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. A medida que x é positivo e cresce o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da reta tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical. Na figura 1.6 exemplificamos esse fato utilizando em particular a função $f(x) = 2^x$ e as retas tangentes aos pontos A e B pertencentes ao Gf. Note que quando aumentamos o valor de x a inclinação das tangentes se aproxima de $90°$.

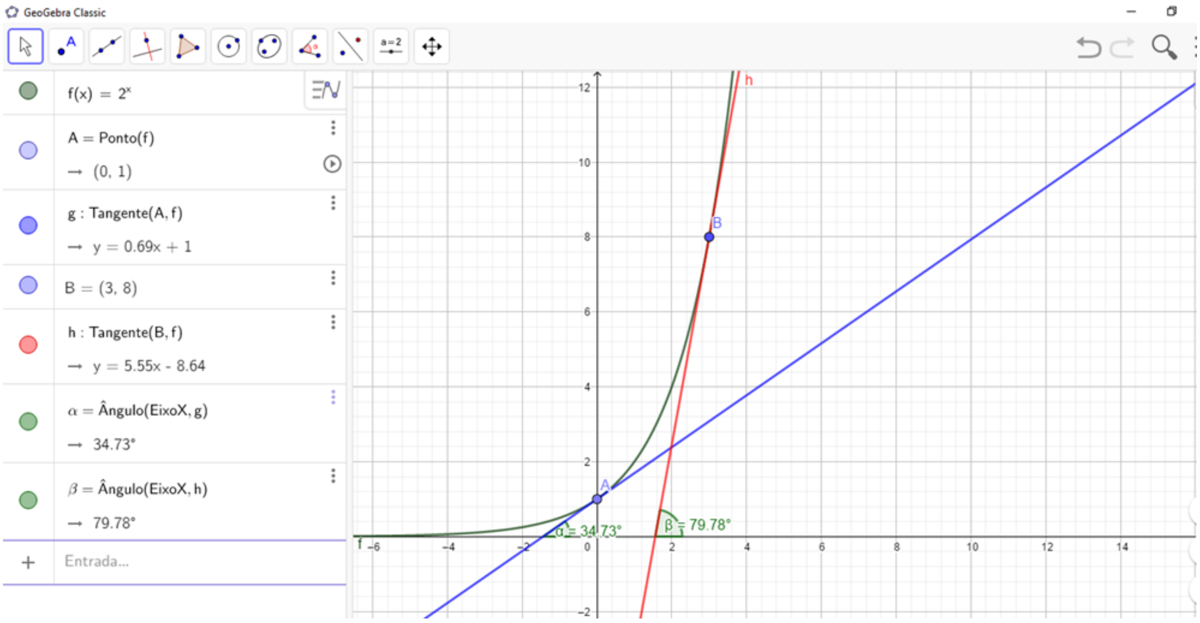


Figura 1.6: Gráfico de $f(x) = 2^x$ e das tangentes aos pontos A e B

1.2.4 Caracterização da Função Exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. No caso das funções afins estas estão implícitas na resolução de muitos problemas do ensino fundamental, anos finais e, no caso das quadráticas já se apresentam de forma implícita, em geral, no último ano do ensino fundamental, quando se estuda as equações polinomiais de 2° grau. Quando se trata das funções exponenciais a única referência no ensino fundamental, anos finais, fica por conta do conteúdo envolvendo potenciação e suas propriedades. Ambas as funções afins, quadráticas e exponencial se evidenciam com grande destaque nos três anos de duração do curso do ensino médio, em especial na 1ª série, sendo retomadas nas séries seguintes. As funções tem importância considerável em vestibulares e na universidade, bem como nas aplicações Matemática em atividades científicas ou profissionais.

Em geral as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos de Ensino Médio diante da resolução de um problema que envolve funções está na escolha do modelo matemático correto para a resolução de tal problema, na maioria das vezes essa dificuldade em saber qual é o instrumento correto para a resolução de um tal problema decorre da falta de conhecimento das propriedades características de cada modelo, em especial essa dificuldade se apresenta com grande frequência quando o modelo a ser utilizado é a função exponencial. Havendo o domínio de tais características a resolução do problema não oferece maiores dificuldades. A seguir evidenciamos na forma de teorema algumas características das funções exponenciais.

Teorema 1.1. (Caracterização da função exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:
(1) $f(x+y) = f(x).f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
(3) $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

Demonstração.

Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

A fim de mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2), mostraremos por indução em n. A igualdade é imediata para $n = 1$, pois $f(1.x) = f(x) = f(x)^1$. Supondo $f(nx) = f(x)^n$, vamos demonstrar que $f((n+1)x) = f(x)^{n+1}$. De fato,

$f((n+1)x) = f(nx+x)$ por (1) temos: $f(nx+x) = f(nx).f(x) = f(x)^n.f(x) = f(x)^{n+1}$.

Para mostrar que (2) $\Rightarrow$ (3) observamos inicialmente que a hipótese (2) acarreta que, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo, $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.
Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que (2) $\Rightarrow$ (3) suponhamos, para fixar ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, utilizando o Lema 1.1, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$.

Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (2) $\Rightarrow$ (3).

Agora, mostraremos que (3) $\Rightarrow$ (1). Suponha $x, y \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$. Assim temos que:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y).$$

Ainda podemos observar que as funções exponenciais atendem i) $f(0) = 1$ e ii) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Observações estas que decorrem imediatamente das propriedades da potenciação analisadas anteriormente, ou melhor dizendo, são as mesmas propriedades utilizando a linguagem de funções exponenciais.

De fato,

i) Temos que: $f(0) = f(0+0) = f(0).f(0) \Rightarrow f(0) = f(0).f(0) \Rightarrow 1 = f(0)$;

ii)E ainda: $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x).f(-x) \Rightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.
Se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Também vale a recíproca.

Teorema 1.2. (Primeira Caracterização das Funções de Tipo Exponencial) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Funções Exponenciais e Progressões.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, ..., f(x_n) = ba^{x_n}, ...,$$

constituem uma progressão geométrica de razão a^h pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}).a^h = f(x_n).a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1)} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$ logo $f(x_{n+1}) = b.A^n$.

Teorema 1.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n, ..., y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

As demonstrações dos teoremas 1.2 e 1.3 podem ser encontradas no livro Números e Funções Reais (1ª edição), páginas 159 a 162, da Sociedade Brasileita de Matemática (SBM) e as omitimos aqui.

1.3 Funções Logarítmicas

Um pouco da história.

Segundo Hygino H. Domingues ao final do século XVI, um dos grandes desafios da matemática era em encontrar maneiras de simplificar cálculos aritméticos, de eliminar erros. Na época eram utilizados alguns procedimentos para essa finalidade mas ainda longe do ideal. Por exemplo, o caso da prostaférese (adição e subtração em grego), consistindo na conversão de produtos em somas, utilizando razões trigonométricas como $2.sen(x).cos(y) = sen(x+y) + sen(x-y)$, por exemplo. Esse problema seria eliminado com o surgimento dos logaritmos no século XVII. Embora os logaritmos resultem da relação inversa da potenciação, na época em que surgiram ainda não se usavam expoentes em matemática. Sabemos que são dois os pais da idéia de logaritmos: John Napier (1550-1617) e Jobst Burgi (1552-1632), em trabalhos independentes, o primeiro a partir de noções geométricas, o segundo a partir de noções algébricas. E há também os precursores, dos quais talvez o mais importante seja Michael Stifel (1487-1567). Em 1544 Stifel publicaria sua Arithmetica integra, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha no século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem 17, inclusive a fórmula conhecida como relação de Stifel. E aparece também o embrião da idéia de logaritmo. Relacionando a progressão geométrica $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, ...$, com a progressão aritmética $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$, Stifel observou que o produto (quociente) de dois termos quaisquer da primeira está associado à soma (diferença) dos respectivos da segunda. Mas era preciso interpolar, uma na outra, algo muito difícil para a época. Assim como Stifel, o método que Napier baseou-se foi associar aos termos de uma progressão geométrica $x, x^2, x^3, x^4, x^5, ..., x^n, ...$ os termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...$, assim ao produto de dois termos da primeira progressão, $x^m.x^p$, está associada a soma $m + p$ dos termos correspondentes na segunda progressão. Para que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $x = 1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$, que é bem próximo de 1. Segundo Eves, para evitar decimais ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^L$, sendo L o logaritmo do número N, o logaritmo de Napier de 10^7 é zero e o de $N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})$ é 1. No entanto Burgi empregou uma razão um pouco maior que 1, sendo $1,0001 = 1 + 10^{-4}$. O primeiro termo de sua progressão geométrica era 10^8 e ele desenvolveu uma tabela com 23027 termos. Como ambos considerou uma progressão geométrica cuja razão era muito próxima de 1, a fim de que os termos da sequência fossem muito próximos e os cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações. Posteriormente foram elaboradas por Napier juntamente com Briggs tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse zero e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, surgindo assim os logaritmos dos dias de hoje. Hoje, porém, com o avanço da tecnologia e o surgimento de calculadoras cada vez mais rápidas e de fácil acesso, ninguém mais usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais. O ensino dos logaritmos como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas. Contudo a função logarítmica, nunca morrerá pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática.

1.3.1 Logaritmos

Na seção anterior foram exploradas as ideias de potências e de expoentes em situações concretas nas quais o crescimento ou decrescimento não é linear ou uniforme. Fizemos também a definição e caracterização da função exponencial, apesar de termos utilizado uma linguagem mais aprofundada de extrema importância para os professores e estudantes de matemática. Agora utilizando uma linguagem mais simplificada, acessível para alunos do ensino médio vimos que, quando uma grandeza y varia exponencialmente com outra grandeza x, ou seja, quando $y = a^x$, o crescimento ou decrescimento de y, quando x aumenta, ocorre de modo muito mais acentuado: para cada unidade a mais no expoente, o valor final de y é multiplicado por a. Em outras palavras, se os expoentes constituem uma progressão aritmética de razão 1, as potências constituem uma progressão geométrica de razão igual a a. Atribuindo arbitrariamente valores ao expoente x, podemos determinar os valores da potência $y = a^x$. Continuaremos a explorar tal vertente, com uma diferença simples e fundamental, agora, estaremos interessados em determinar o valor do expoente x para valores arbitrariamente atribuídos à potência $y = a^x$. Trata-se de um prolongamento natural do estudo das potências: os expoentes a serem determinados serão chamados de logaritmos. Aprender a operar com tais expoentes quando eles constituem a variável dependente é o tema dessa seção. Compreender e explorar as propriedades dos logaritmos, como veremos, não passa de seu reconhecimento como expoentes de potências, nos cálculos já conhecidos. Sem dúvida, a linguagem dos logaritmos amplifica muito a competência leitora: trata-se da leitura e da compreensão de uma extensa classe de fenômenos, associados ao crescimento ou ao decrescimento exponencial.

A ideia de logaritmo: mais viva e importante do que nunca.

Para iniciar nosso percurso na aprendizagem dos logaritmos, retornaremos, no entanto, à problemática inicial: a simplificação de cálculos.

Uma ideia brilhante do século XVII

Para compreender o significado dos logaritmos quando surgiram, imaginemos a seguinte situação: temos de calcular o valor de E indicado na expressão a seguir:

$$E = \sqrt[5]{\frac{381,5 \cdot (20,87)^3 \cdot (4182)^4}{(7,935)^2}}$$

Realizar as operações indicadas, sem dispor de uma calculadora, seria um trabalho braçal imenso. Uma simplificação muito interessante foi elaborada por alguns matemáticos no início do século 17, entre os quais estavam o inglês Henry Briggs (1561-1630) e o escocês

John Napier (1550-1617). Cada um propôs uma alternativa a seu modo, mas a ideia central subjacente era a seguinte:

1) É possível escrever qualquer número positivo N como uma potência de 10: $N = 10^n$;
2) Assim procedendo, o cálculo de uma multiplicação se transforma no cálculo de uma adição (dos expoentes); o cálculo de uma divisão se transforma no cálculo de uma subtração (dos expoentes); o cálculo de uma raiz se tranforma no cálculo de uma divisão (do expoente do radicando pelo índice da raiz); e assim por diante.

Assim, na expressão E apresentada anteriormente, escreveríamos: $381,5 = 10^a$; $20,87 = 10^b$; $4182 = 10^c$; $7,935 = 10^d$.

Conhecendo os valores de a, b, c e d, e usando apenas propriedades da potenciação, podemos afirmar que o valor da expressão E será:

$$E = 10^{\frac{(a+3b+4c-2d)}{5}}$$

A chave da questão é a representação de qualquer número positivo N como 10^n, o que é fácil quando se tem N igual a $10, 100, 1000, 10000$, etc., mas não parece tão simples para valores de N como $2, 17, 30, 200$ por exemplo.

Não é simples, mas é possível, e esse é o grande mérito dos matemáticos que investiram nesse terreno: a possibilidade de escrever N como 10^n é equivalente à afirmação de que é possível calcular o valor da potência 10^x para qualquer número real x, e não apenas para os valores inteiros de x. Pois bem, quando escrevemos $N = 10^n$ e nos preparamos para simplificar os cálculos envolvendo tal número, estamos entrando na seara dos logaritmos.

Se $N = 10^n$, então o expoente n é chamado "logaritmo de N": $n = logN$.

Para facilitar os cálculos, tal como era sugerido pelos criadores dos logaritmos, foram elaboradas longas tabelas contendo uma lista dos valores de N e do logaritmo correspondente representado por $logN$. Tais tabelas (*tábuas de logaritmos*) eram disponibilizadas para os calculadores.

N (N = 10^n)	n (n = log N)
10 000	4
6 000	3,77815
3 000	3,47712
2 000	3,30103
1 000	3
600	2,77815
300	2,47712
200	2,30103
100	2
60	1,77815
30	1,47712
20	1,30103
10	1
6	0,77815
3	0,47712
2	0,30103
1	0

Figura 1.7: Exemplo de tabela dos logaritmos.

Os valores apresentados na tabela 1.7 foram escolhidos como exemplos, mas são sugestivos de certas regularidades existentes em uma tabela de logaritmos.

Por exemplo, como a razão $\dfrac{600}{6}$ é igual a 100, a diferença entre seus logaritmos deve ser igual a 2, ou seja eles têm a mesma parte decimal, diferindo apenas a parte inteira. O mesmo acontece com os logaritmos de 6000, e de 60.

Também notamos que, como $6 = 2 \cdot 3$, então:

$$log6 = log2 + log3 \cong 0,30103 + 0,47712 \cong 0,77815.$$

Fatos assim constituem indícios de que não é necessário colocar na tabela os logaritmos de todos os números, o que seria impossível. Tabelando-se os logaritmos de alguns números, os demais podem ser calculados a partir deles de forma aproximada. Sabemos que as tábuas de logaritmos são um instrumento de importância histórica, mas sem interesse no presente, uma vez que dispomos de muitos outros instrumentos para calcular logaritmos.

Ao mesmo tempo, servem de pretexto para que sejam apresentadas as propriedades dos logaritmos, que não passam das propriedades das potências redigidas de outra forma. Nesse primeiro momento, tratamos apenas dos logaritmos de base 10, os logaritmos decimais. Mas tais noções serão generalizadas para qualquer base.

Na verdade, pode-se escrever cada número positivo N como uma potência de uma base a $(a > 0, a \neq 1)$, que não necessita ser igual a 10.

De modo geral, se $N = a^n$, então dizemos que "*n é o logaritmo de N na base a*", e escrevemos: $n = log_a N$.

1.3.2 Propriedades fundamentais em qualquer base

Vimos que os logaritmos nada mais são do que expoentes. Suas propriedades mais fundamentais decorrem das correspondentes propriedades das potências, como já citamos anteriormente. Quando se afirma, por exemplo, que para multiplicar potências de mesma base mantém-se a base e somam-se os expoentes, ou seja, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, simultaneamente está se afirmando que o expoente a que se deve elevar a base a para se obter o produto $(a^m \cdot a^n)$ é igual a $(m+n)$, o que significa dizer que o logaritmo de $(a^m \cdot a^n)$ é igual a $(m+n)$. Em outras palavras o logaritmo do produto é igual a soma dos logaritmos dos fatores.

Por ora, deduzamos algumas propriedades fundamentais dos logaritmos, as quais decorrem das regras usuais da potenciação. Suponha que a é um número real positivo e diferente de 1, e m e n são números reais positivos. Temos as seguintes propriedades:

Propriedade 1.6. $log_a 1 = 0$

De fato, se $log_a 1 = y$, então $a^y = 1$, ou seja, $a^y = a^0$. Como sabemos, isso implica $y = 0$.

Propriedade 1.7. $log_a a = 1$

De fato, se $log_a a = y$, então $a^y = a$, ou seja, $a^y = a^1$, o que implica $y = 1$.

Propriedade 1.8. $a^{log_a m} = m$

Neste caso, a própria definição de logaritmo já fornece a propriedade, pois $log_a m$ é o expoente que temos de dar à base a para obter m como resultado.

Propriedade 1.9. $log_a(mn) = log_a m + log_a n$

Escreva $log_a m = x$ e $log_a n = y$. Então $a^x = m$ e $a^y = n$, logo $mn = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Mas, se $a^{x+y} = mn$, então, por definição, temos $x + y = log_a(mn)$. Assim,

$$log_a(mn) = x + y = log_a m + log_a n.$$

Propriedade 1.10. $log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$

Essa propriedade decorre da propriedade 1.9, aplicada a $\dfrac{m}{n}$ no lugar de m:

$$log_a m = log_a\left(\left(\frac{m}{n}\right)n\right) = log_a\left(\frac{m}{n}\right) + log_a n.$$

Portanto, $log_a\left(\dfrac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n.$

Propriedade 1.11. $log_a(m^k) = k \cdot log_a m$

Se $x = log_a m$ e $y = log_a(m^k)$, então $m = a^x$ e $m^k = a^y$. Assim, $a^y = m^k = (a^x)^k = a^{kx}$ e, daí, $y = kx$. Mas isso é exatamente o que queríamos demonstrar.

Propriedade 1.12. $log_{a^k} m = \dfrac{1}{k} \cdot log_a m$ para todo número real não nulo k.

Escreva $log_a m = x$ e $log_{a^k} m = y$. Pela definição de logaritmo, temos $a^x = m$ e $(a^k)^y = m$. Logo, $a^x = (a^k)^y$, ou seja, $a^x = a^{ky}$. Igualando os expoentes, obtemos $y = \dfrac{1}{k} \cdot x$, que é a igualdade que procurávamos.

Propriedade 1.13. Mudança de base: $log_a m = \dfrac{log_b m}{log_b a}$, se a, b, m números reais positivos, e $a, b \neq 1$.

Para demonstrarmos a validade da expressão acima, escrevemos $x = log_a m, y = log_b m$ e $z = log_b a$. Pela definição de logaritmo, temos $a^x = m, b^y = m$ e $b^z = a$. Por sua vez, as duas primeiras igualdades implicam $a^x = b^y$. Mas, como $a = b^z$, podemos escrever

$$(b^z)^x = a^x = b^y,$$

ou, o que é o mesmo, $b^{xz} = b^y$. Assim pela injetividade da exponencial, $zx = y$ e, daí $x = \dfrac{y}{z}$, que é a igualdade procurada.

1.3.3 Funções logarítmicas

Vimos na seção anterior que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$, é uma correspondência biúnivoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional

$$f(x + y) = f(x).f(y).$$

Segue-se que f possui uma inversa.

A inversa da função exponencial de base a é a função

$$log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{log_a x} = x \text{ e } log_a(a^x) = x.$$

Assim, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, ou seja,

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ que

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y$$

para x e y positivos quaisquer.

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução de logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo, assim como tratamos no início desta seção. Contudo, vimos que a função logaritmo continua extremamente importante para a Matemática e em suas aplicações. Essa importância é permanente, jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial, a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais.

Observamos que a função $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função exponencial assume somente valores positivos. As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos decimais), base 2 (logaritmos binários) e base e (logaritmos naturais). Como $log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$, e como $log_a 1 = 0$, segue-se que, para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se $0 < a < 1$ então $log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A figura mostra os gráficos das funções $f(x) = log_3 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{3}} x$.

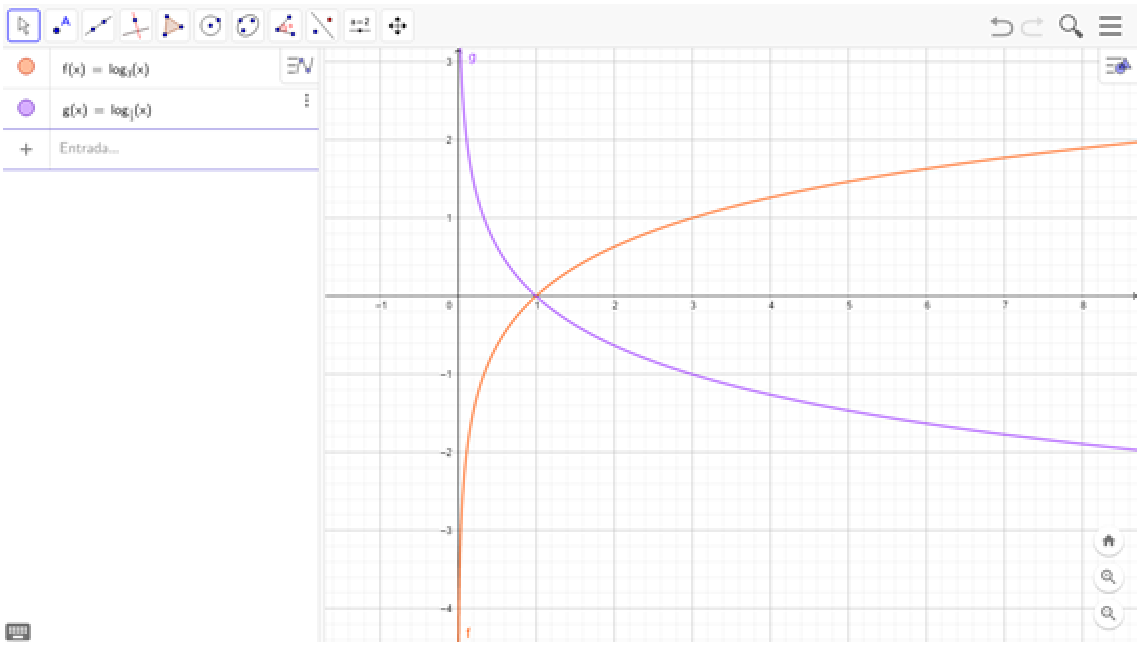


Figura 1.8: Graficos de $f(x) = log_3 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{3}} x$.

Se tivéssemos traçado os gráficos das funções $y = log_a(x)$ e $y = log_b(x)$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, as figuras obtidas teriam os mesmos aspectos daquelas da figura acima. Mais precisamente, existiriam constantes positivas c, d tais que

$$log_a x = c.log_3 x \text{ e } log_b x = d.log_{\frac{1}{3}} x, \text{ para todo } x > 0.$$

Com efeito, se $w = log_a(x)$ e $z = log_3(x)$ então, $a^w = x$ e $3^z = x$. Portanto, se escrevermos $c = log_a 3$ teremos $a^c = 3$. Logo,

$$x = a^w = 3^z = (a^c)^z = a^{cz}.$$

Portanto, $w = cz$, isto é, $log_a(x) = c.log_3(x)$ para todo $x > 0$, onde a constante c é igual a $log_a 3$. A igualdade

$$log_a(x) = log_a(b) \cdot log_b(x)$$

é válida em geral (mesmo raciocínio) e se chama a *fórmula de mudança de base* para logaritmos.

Quando a e b são ambos maiores ou ambos menores do que 1 então $log_a b > 0$. Se um dos números a, b é maior e o outro é menor do que 1 então $log_a b < 0$. A fórmula acima diz que duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante.

Como $log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetiva, segue-se que $y = log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente.

Ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente, $log_a x$ tende a $+\infty$ muito lentamente quando $x \to +\infty$. Esse crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = log_a x$, com $a > 1$ que, como sabemos, são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares.

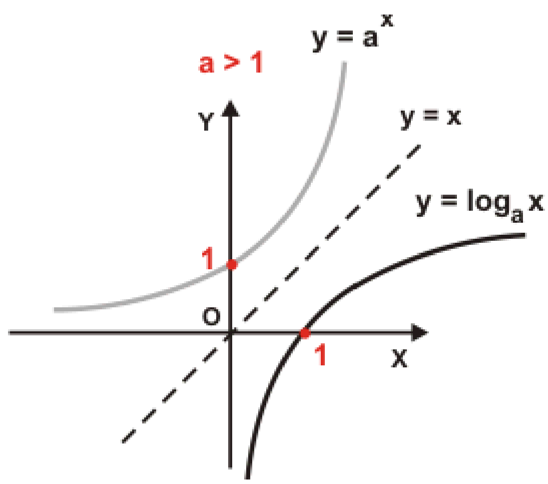


Figura 1.9: Gráficos de $y = a^x$ e $y = log_a x$

Caracterização das Funções Logarítmicas.

Mostraremos que entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas.

Teorema 1.4. (Caracterização das Funções Logarímicas)

Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = log_a(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Para fixar as ideias, admitamos f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$.

Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$.

Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot ... \cdot a) = f(a) + f(a) + ... + f(a) = 1 + 1 + ... + 1 = m,$$

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m} = f(a^m) + f(a^{-m)}) = m + f(a^{-m}),$$

Logo, $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $rn = m$. Portanto,

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r).$$

E, assim, $f(a^r) = \dfrac{m}{n} = r$. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = log_2 x$ para todo $x > 0$. Isso significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{(1/b)})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando log_a de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente: $g(x) = log_a x$.

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES EM DIVERSAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

2.1 Fenômenos naturais e crescimento exponencial - O nascimento do número e.

Quando se estuda o crescimento de uma população, seja de seres humanos, seja de animais, consideram-se as taxas porcentuais de crescimento ou decrescimento. Quando se diz, por exemplo, que certa população N cresce a uma taxa de 10% ao ano, isso significa que, considerando N uma função do tempo t em anos, a taxa de variação unitária, ou seja, o aumento de N por unidade a mais de t é igual a $0,1N$. Quer dizer então, que o aumento de N por ano é diretamente proporcional ao valor de N; ou seja, N deve ser uma função exponencial do tempo t em anos.

Para descobrir qual é a base dessa função exponencial, vamos examinar o significado do crescimento populacional em situações concretas. O que significaria, então, dizer que o valor de N aumenta 10% em um ano? Certamente não seria o caso de imaginar que a população ficaria constante ao longo do ano, aumentando em 10% tão logo se inicie o ano seguinte. Na verdade, uma pressuposição mais razoável, mais natural em todos os sentidos, é a de que o crescimento anunciado distribui-se uniformemente ao longo do ano. É justamente essa forma que vamos descrever matematicamente. A fim de simplificar cálculos vamos analisar a seguinte situação:

Certa população N é uma função do tempo: $N = f(t)$, t em anos. Os dados disponíveis informam que N cresce a uma taxa de 100% ao ano, ou seja, dobra a cada ano. Como poderíamos expressar o valor de N em função de t?

Uma primeira hipótese, bem pouco natural (na verdade absurda), é de que N ficaria constante ao longo de cada ano, dobrando de valor ao final, na passagem para o ano seguinte. Considerando N_0 a população inicial, teríamos:

$$N = N_0 + N_0 = (1 + 1).N_0 = 2N_0$$

Veremos a seguir que a aplicação contínua da taxa ao longo do tempo produz um fenômeno interessante. Uma hipótese mais razoável seria a de que o crescimento de 100% ao ano distribui-se ao longo do ano. Vamos aqui analisar alguns casos, e observar alguns desdobramentos inesperados:

1)Crescimento ocorra 50% no primeiro semestre;

Neste caso teríamos, ao final do primeiro semestre: $N = N_0 + 0,5N_0 = N_0 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$, ou seja, a população inicial seria multiplicada pelo fator $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$. É razoável esperar então que ao longo do segundo semestre a população cresça 50% o que acarretaria que a população inicial que agora seria $N_0 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$, seria multiplicada por $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$, tornando-se $N = N_0 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 2,25N_0$, ou seja, um crescimento de 125%.

2) Ocorra um crescimento de 25% no primeiro trimestre;

Analogamente ao caso anterior, teríamos ao final do ano: $N = N_0 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)^4 \cong 2,44N_0$, ou seja, um crescimento de aproximadamente 144%.

3) Considerando agora um crescimento de $\dfrac{100}{12}$% no primeiro mês;

Analogamente ao caso anterior, teríamos ao final do ano: $N = N_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \cong 2,61N_0$, ou seja, um crescimento de aproximadamente 161%.

4) Se imaginarmos o crescimento distribuído continuamente ao longo do ano, o que seria a hipótese mais coerente, ou seja, com o ano subdividido em n partes, o valor de N ao final do ano será

$$N = N_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Será então que quanto menor o intervalo de tempo que consideremos maior será N indefinidamente?

Nos cálculos anteriores, chama a atenção o número $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando aumentamos o valor de n. Recorrendo a uma calculadora, podemos verificar que, quanto mais aumenta o valor de n, mais os valores da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproximam de um determinado número:

i) Para $n = 100$, temos: $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \cong 2,704813829...$

ii) Para $n = 365$, temos: $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \cong 2,714567485...$

iii) Para $n = 1000$, temos: $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \cong 2,716923932...$

iv) Para $n = 1000000$, temos: $\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} \cong 2,718280469...$

v) Para $n = 100000000$, temos: $\left(1 + \frac{1}{100000000}\right)^{100000000} \cong 2,718281815...$

Ou seja, respondendo a questão anterior, vimos através dos cálculos que os valores da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ possui limite superior.

Dizendo de outra maneira: quanto maior é o valor de n, mais o valor da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima do número $2,7182818...$. Esse número diferente é representado pela letra e e escrevemos:

$$e \cong 2,7182818.$$

Deste modo concluímos que, se uma população N_0 cresce a uma taxa de 100% ao ano, distribuída continuamente ao longo do ano, seu valor ao final do ano será igual a $N = N_0 \cdot e^{ln2}$. Seguindo esse raciocínio, podemos mostrar que, ao final de t anos, teremos $N = N_0 \cdot e^{t \cdot ln2}$.

Se a taxa k não for 100%, ou seja, $k \neq 100\%$ e o crescimento forem distribuídos continuamente ao longo do ano, de modo que a cada período de $\frac{1}{n}$ do ano, sejam incorporados o aumento de $\frac{k}{n}$ teremos ao final de t anos uma população $N = N_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = N_0 \cdot e^{kt}$.

Em muitas outras situações práticas, em diferentes contextos, nos deparamos com o número e. Apesar de ser um número de aparência diferente, sua presença é muito frequente no estudo de fenômenos naturais que envolvem crescimento ou decrescimento exponencial, como desintegração radioativa e juros compostos. Tal como o número π, o número e é irracional e transcedente. Isso significa que irracionais como $\sqrt{3}$, não são razões entre inteiros, mas são raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros (por exemplo $x^2 - 3 = 0$). Um irracional é transcedente quando não existe uma equação algébrica com coeficientes inteiros que o tenha como raíz, esse é o caso de números como π e e. Tais fatos, no entanto, não nos interessarão no presente momento. Interessa-nos apenas conhecer uma função exponencial particular, que vai ampliar significativamente o repertório de recursos para o tratamento matemático de diversos fenômenos em diferentes contextos.

Em uma situação similar a anteriormente, vejamos como o número e pode ser aplicado ao cálculo de juros compostos.

Quando um capital C_0 é aplicado a uma taxa de $k\%$ ao ano (por exemplo), se os juros incorporados ao capital ao final de cada ano, o valor do capital, depois de um ano, será igual a $C = C_0 + kC_0 = C_0(1 + k)$, depois de dois anos, será $C = C_0(1 + k)^2$ e assim por diante. Generalizando, se os juros forem incorporados ao capital apenas ao final de cada período, considerando um período de t anos, o valor final será $C = C_0(1 + k)^t$. que é a fórmula usual mais utilizada para resolver problemas envolvendo juros compostos no dia-a-dia.

Entretanto, se os juros forem distribuídos continuamente ao longo do ano, de modo que a cada período de $\frac{1}{n}$ do ano, sejam incorporados os juros de $\frac{1}{n}$, no final do ano o novo capital será igual a $C = C_0.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_0.e^1$ e, ao final de t anos, será $C = C_0.e^t$. Para uma taxa k anual em t anos teremos: $C = C_0.e^{kt}$.

Quando se estuda o fenômeno da propagação de doenças, também se considera o fato de que a rapidez com que o número de doentes aumenta é diretamente proporcional ao número de doentes em cada instante. Na descrição matemática do fenômeno, nos deparamos novamente com o número e.

Assim, reafirmamos: sempre que tentamos descrever matematicamente o modo como variam funções presentes em fenômenos naturais de diferentes tipos, mas que têm em comum o fato de que envolvem grandezas que crescem ou decrescem com uma rapidez que é diretamente proporcional ao valor da grandeza em cada instante, naturalmente encontramos o número e. Como consequência, em situações concretas que descrevem fenômenos naturais que apresentem crescimento ou decrescimento exponencial, a função $f(x) = e^x$, cujo gráfico apresentamos a seguir, usufrui de todas as propriedades elencadas na seção anterior para uma base $a = e > 1$, tem uma presença marcante.

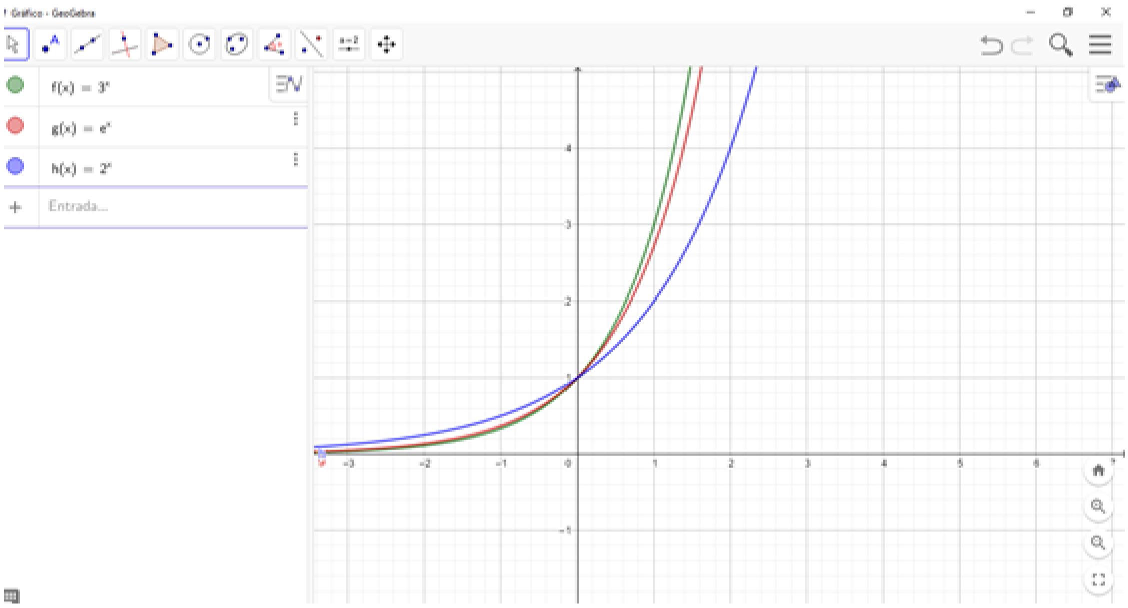


Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = e^x$.

Assim, como o número e serve de base para uma particular e importante função exponencial, ele também serve para a correspondente função logarítmica: se $y = e^x$, então $x = log_e y$. Em outras palavras, à função exponencial de base e corresponde a sua inversa, a função logarítmica de base e.

A função $g(x) = log_e x$, costuma ser representada por $g(x) = ln(x)$, uma abreviatura para *"logaritmo natural de x"*. Os gráficos de $f(x) = e^x$ e de sua inversa, $g(x) = ln(x)$, são representados a seguir. É interessante notar que, como f e g são funções inversas, a cada ponto $(a, b) \in Gf$ corresponde a um ponto $(b, a) \in Gg$, ou seja, os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, à reta $y = x$.

Figura 2.2: Gráficos de $f(x) = e^x$ e $g(x) = lnx$.

Com o objetivo de enriquecer a aplicação, vamos utilizar o conceito de limite para mostrar que vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Não vamos aqui nos estender e entrar em detalhes em excesso, faremos uma demonstração de maneira simples e abreviada, apenas nos utilizando de fatos já conhecidos do cálculo diferencial e integral. Para mostrarmos a igualdade acima, partimos das seguintes verdades:

Sabemos que se $f(x) = ln(x)$, então a derivada $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Assim, $f'(1) = 1$. Agora, usamos esse fato para expressar o número e como limite. Da definição de derivada como um limite, temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-ln1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,ln(1+x) = \lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Como $f'(1) = 1$, temos $\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

Assim, usando um Teorema do Cálculo que diz que "*Seja f contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras, $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$*" e, pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

Portanto, $e = lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

A fórmula acima está ilustrada pelo gráfico 2.3 da função $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ a seguir.

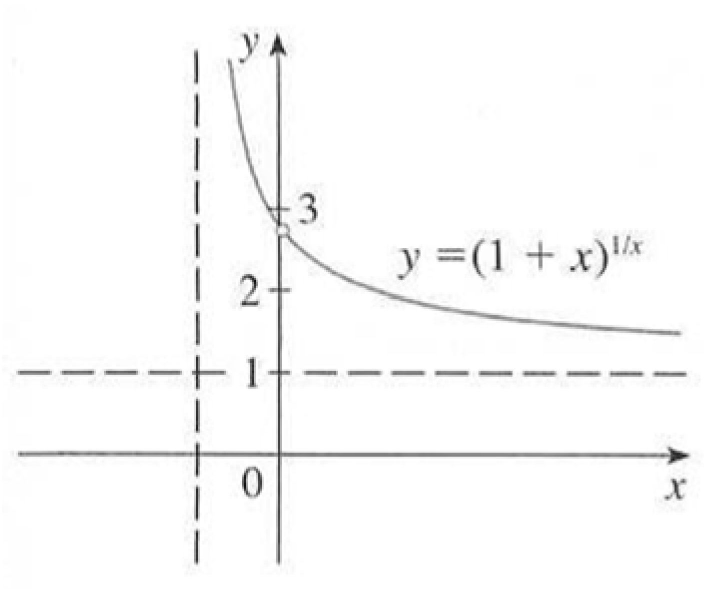


Figura 2.3: Gráfico de $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Se colocarmos $n = \dfrac{1}{x}$ na fórmula acima, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$, e voltamos para a expressão de e que é

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exemplo: Um investidor aplica uma quantia C_0 a uma taxa de juros de 12% ao ano. Calcule depois de quanto tempo o capital investido dobrará de valor, supondo que:

a)os juros sejam incorporados apenas ao final de cada ano;

b)os juros sejam incorporados ao capital ao final de cada mês;

c)os juros sejam incorporados continuamente ao capital.

Resolução: Ao resolver um problema desse tipo, podemos analisar na prática se existe uma diferença muito grande entre os resultados de cada item analisado. Sabemos que a sequência numérica cujo termos geral pode ser dado por $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente. No caso do item a) temos:

O capital esperado é: $C = 2C_0 \Rightarrow C_0(1+0,12)^t = 2C_0 \Rightarrow C_0(1,12)^t = 2C_0 \Rightarrow (1,12)^t = 2$

Note que, na equação $(1,12)^t = 2$, como 2 não é uma potência exata de 1,12, devemos utilizar logaritmos e suas propriedades em ambos os membros para determinarmos a variável tempo com maior facilidade. Nesse caso poderíamos utilizar os logaritmos decimais, bem como os logaritmos naturais. Por conveniência vamos utilizar aqui os logaritmos naturais. Assim, temos:

$$ln(1,12)^t = ln2 \Rightarrow t = \frac{ln2}{ln(1,12)}.$$

Obtendo os valores aproximados, temos:

$t \cong \frac{0,7}{0,1} \Rightarrow t \cong 7$ anos.

No caso do item b), considerando a taxa de 12% a.a, teremos então uma taxa de 1% a.m. Assim, temos:

$$C_0(1+0,01)^t = 2C_0 \Rightarrow (1,01)^t = 2,$$

Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior, temos:

$ln(1,01)^t = ln2 \Rightarrow t = \frac{ln2}{ln(1,01)}$, obtendo os valores aproximados, concluímos que:

$t \cong \frac{0,7}{0,00995} \Rightarrow t \cong 70$ meses, ou seja, aproximadamente 5 anos e 10 meses.

Analisando os resultados desses dois itens percebemos que é mais vantajoso investir determinado capital a uma taxa ao mês do que ao ano.

No caso do item c) aplicaremos os juros contínuos, ou seja, que o capital a ser resgatado é $C = C_0.e^{kt}$, dessa forma:

$$C_0.e^{0,12t} = 2C_0 \Rightarrow e^{0,12t} = 2 \Rightarrow ln(e^{0,12\ t}) = ln(2) \Rightarrow 0,12t.ln(e) = ln(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{ln(2)}{0,12\ ln(e)} \Rightarrow t = \frac{ln(2)}{0,12}$$

ou seja,

$t \cong \dfrac{0,7}{0,12} \Rightarrow t \cong 5,8$ anos, aproximadamente 5 anos, 9 meses e 18 dias.

Analisando os resultados dos itens b) e c), percebemos resultados bem próximos.

2.2 Desintegração Radioativa.

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente. Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α.

Consideremos um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processasse instantaneamente, no fim de cada segundo, sendo M_0 a massa no tempo $t = 0$, decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haveria uma perda de αM_0 unidades de massa, restando apenas a massa

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha).$$

Decorridos dois segundos, a massa restante seria

$$M_2 = M_1(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2.$$

Em geral, passados s segundos, restaria a massa

$$M_s = M_0(1-\alpha)^s.$$

Mas, as coisas não se passam assim. A desintegração processa-se continuamente. Procurando uma aproximação melhor para o fenômeno, fixemos um inteiro $n > 0$ e imaginemos que a desintegração se dá em cada intervalo de $1/n$ de segundo. Depois da primeira fração $1/n$ de segundo, a massa do corpo se reduziria a

$$M_0 - \frac{\alpha}{n}M_0 = M_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Decorrido um segundo, teriam ocorrido n desintegrações instantâneas e, efetuadas n reduções, restaria do corpo a massa $M_0(1-\alpha/n)^n$. Dividindo o intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partes iguais, chegaremos à conclusão de que, ao final de um segundo, a massa do corpo ficará reduzida a

$$\lim_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0.e^{-\alpha}.$$

Se quisermos calcular a massa ao fim de t segundos, deveremos dividir o intervalo $[0,t]$ em n partes iguais. Em cada intervalo parcial a perda de massa será $(M_0.\alpha t/n)$ e a massa final $M_0\left(1-\dfrac{\alpha t}{n}\right)^n$. Repetindo o argumento acima com $n \to \infty$ chegaremos à expressão

$$M(t) = M_0.e^{-\alpha t}$$

que fornece a massa do corpo depois de decorridos t segundos.

É claro que, em vez de segundos, poderíamos ter adotado outras unidades de tempo. Mudando a unidade de tempo, a constante α deve ser alterada proporcionalmente.
Na prática, a constante α fica determinada a partir de um número básico, chamado a meia-vida da substância. A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância.

2.3 O método do carbono-14.

Para estimar a idade de um fóssil, o químico norte-americano W. F. Libby criou o chamado Método do Carbono 14, pelo qual recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1960. O método consiste no seguinte: o elemento químico carbono 14 forma-se nas camadas superiores da atmosfera por efeito da radiação cósmica sobre o nitrogênio. Admite-se que sua presença na superfície da Terra ocorre em uma proporção constante em relação ao carbono 12, que é o carbono comum; os animais e as plantas absorvem o carbono 14 pela respiração e pela alimentação, e, enquanto estão vivos, mantêm uma proporção fixa desse elemento. Depois de mortos, a absorção da substância deixa de existir, e a quantidade que possuíam começa a se desintegrar, transformando-se no carbono comum; o carbono 14 desintegra-se em uma proporção constante em relação ao valor inicial: a cada 5730 anos, a massa inicial reduz-se à metade, ou seja, a meia-vida do carbono 14 é igual a 5730 anos. Em consequência, se determinarmos a proporção do carbono 14 em relação ao carbono normal em um fóssil (um peixe incrustado em uma pedra, um osso, uma planta ressecada, um pedaço de madeira etc.), podemos estimar há quanto tempo tal fóssil existe. Como vimos acima, segue-se daí que a constante de desintegração do carbono 14 é

$$\alpha = \frac{ln2}{5730} = \frac{0,6931}{5730} = 0,00012097.$$

Exemplo. Suponhamos, então, que um fóssil tenha sido encontrado e que desejamos estimar sua idade. Se o laboratório indicar que a porcentagem de carbono 14 restante no fóssil é de apenas 10% da massa inicial, qual é a idade estimada do fóssil?

Resolução. Sabemos que $M = M_0.e^{-\alpha t}$, donde $M = M_0.e^{-0,00012097t}$. Assim, temos:

$$M_0.e^{-0,00012097t} = 0,1M_0 \Rightarrow e^{-0,00012097t} = 0,1 \Rightarrow t = \frac{ln(0,1)}{-0,00012097} = \frac{-2,30258509}{-0,00012097} \cong 19034$$

anos.

2.4 Logaritmos e a intensidade sonora.

O ouvido humano é muito versátil e percebe sons de uma gama de intensidade muito ampla. A intensidade sonora é a medida da energia transportada pelas ondas sonoras por segundo e por unidade de área (perpendicular à direção da propagação). Entre o som de baixa intensidade, quase inaudível, e o ruído que produz dor nos ouvidos, a intensidade varia em uma escala que vai de 1 a 10^{12}. Para medir a intensidade sonora, utiliza-se apenas o expoente correspondente a cada intensidade. Ele corresponde ao número de **béis** (plural de bel, unidade escolhida em homenagem ao físico Alexandre Graham Bell). Assim, se ao som fracamente audível corresponde 0 **bel**, ao som que produz dor corresponderão 12 **béis**. Como o **bel** revelou-se uma unidade muito grande para distinguir os diversos níveis de som, em situações práticas costuma-se usar o **decibel**, que corresponde à décima parte do **bel**. A tabela 2.4 registra as intensidades sonoras correspondentes a algumas situações cotidianas.

Tipo de som	Intensidade (watts/m²)	Números proporcionais	Medida em bel	Medida em decibel
Som fracamente audível	10^{-12}	1	0	0
Ruído das folhas de uma árvore	10^{-11}	10	1	10
Sussurro humano	10^{-10}	10^{2}	2	20
Conversa comum	10^{-6}	10^{6}	6	60
Barulho dos carros no tráfego pesado	10^{-5}	10^{7}	7	70
Britadeira manual usada na rua	10^{-2}	10^{10}	10	100
Som que produz dor e dano	1	10^{12}	12	120

Figura 2.4: Tabela de intensidade sonoras.

A partir dos dados da tabela 2.4, considerando n o número de béis e I a intensidade sonora de um som qualquer, a expressão que relaciona n e I pode ser obtida expressando a razão entre a intensidade I e a intensidade do som fracamente audível por meio de uma potência de 10, ou seja,

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^{n}.$$

Daí, segue que

$$n = log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

(n em béis).

Poderíamos também expressar n em decibéis. Nesse caso, teríamos

$$n = 10.log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

(n em decibéis).

Exemplo: Quantos decibéis correspondem a uma britadeira defeituosa, que emite um som com intensidade 100% maior do que o normal (tabela)? (Considere $log\ 2 \cong 0,3$.)

Solução.

O som emitido por uma britadeira normal é de 100 decibéis, que corresponde a uma intensidade 10^{10} vezes maior do que a do som fracamente audível. Se a intensidade se tornar 100% maior, será igual a 2.10^{10} vezes maior que a do som fracamente audível. Assim, pela fórmula acima, temos que:

$$n = 10.log\left(\frac{2.10^{-2}}{10^{-12}}\right) = 10.(log\ 2 + 10.log\ 10) = 10.(0,3 + 10) = 10.10,3 = 103 \text{ decibéis.}$$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

3.1 Recordando potenciação e suas propriedades.

Área: Matemática.

Escola: Escola Estadual Osvaldo Martins - Osvaldo Cruz - SP.

Série: 1ª série Ensino Médio.

Tema: Potenciação.

Título da Atividade: Recordando potenciação e suas proriedades.

Número de Aulas Previstas: 5 aulas.

Habilidades a serem desenvolvidas:

1) Conhecer e operar com as propriedades das operações com potências de expoentes inteiros.
2) Reconhecer a potenciação em situações contextualizadas.
3) (EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
4) (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Objetos de Aprendizagem (conteúdo): Números reais, potenciação e radiciação.

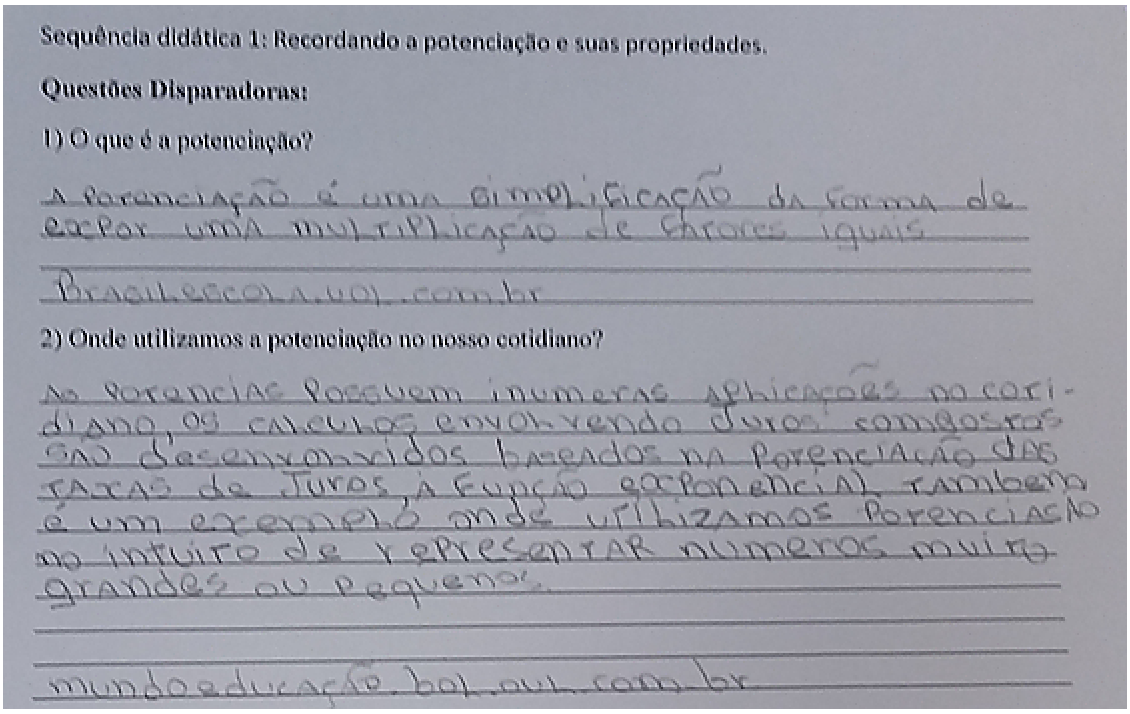
Materiais necessários para as aulas: Atividades impressas, lousa, sala de informática, vídeoaulas e calculadora científica.

Questões Disparadoras:

1) O que é a potenciação?
2) Onde utilizamos a potenciação no nosso cotidiano?

Para responder essas questões iniciais da sequência didática, foi realizada uma pesquisa pelos alunos utilizando a sala de informática. O objetivo dessas questões é fazer com que o aluno compreenda que a potenciação nada mais é que a multiplicação de fatores iguais e fazê-lo perceber o que significa **base** e **expoente**, pois ainda existem muitos alunos que efetuam o cálculo de uma potência de forma equivocada, multiplicando base e expoente. A segunda questão é mostrar para o aluno algumas aplicações das potências, ou melhor, fazer com que ele mesmo descubra, através da pesquisa, justificando assim o aprendizado do conteúdo. As figuras 3.1 e 3.2 a seguir mostram o desenvolvimento da pesquisa e as anotações realizadas por um dos alunos durante a realização da atividade.

Figura 3.1: Desenvolvimento da Pesquisa SAI: E.E. Osvaldo Martins.



Sequência didática 1: Recordando a potenciação e suas propriedades.

Questões Disparadoras:

1) O que é a potenciação?

A potenciação é uma simplificação da forma de expor uma multiplicação de fatores iguais

Brasilescola.uol.com.br

2) Onde utilizamos a potenciação no nosso cotidiano?

As potencias possuem inumeras aplicações no cotidiano, os calculos envolvendo juros compostos são desenvolvidos baseados na potenciação das taxas de juros, a função exponencial tambem é um exemplo onde utilizamos potenciação no intuito de representar numeros muito grandes ou pequenos.

mundoeducação.bol.oul.com.br

Figura 3.2: Anotações de um dos alunos.

Contextualização:

Para o início dessa seção, os alunos foram levados a sala de vídeo da escola E.E. Osvaldo Martins para assistir algumas videoaulas disponibilizados pelo Portal do Saber através do endereço: https://portaldosaber.obmep.org.br, 8º ano do Ensino Fundamental, módulo: Potenciação e dízimas periódicas, com o objetivo de solucionar os seguintes problemas.

1) Um condomínio é formado por 6 conjuntos residenciais. Cada conjunto residencial tem 6 edifícios. Cada edifício tem 6 andares. Cada andar tem 6 apartamentos. Quantos apartamentos há no condomínio?

2) Qual o algarismo das unidades de 2^{2019}?

3) Mostre como poderíamos calcular o volume dessa caixa d'água cúbica, sabendo que sua aresta mede 3 metros.

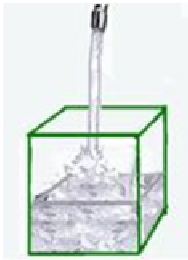


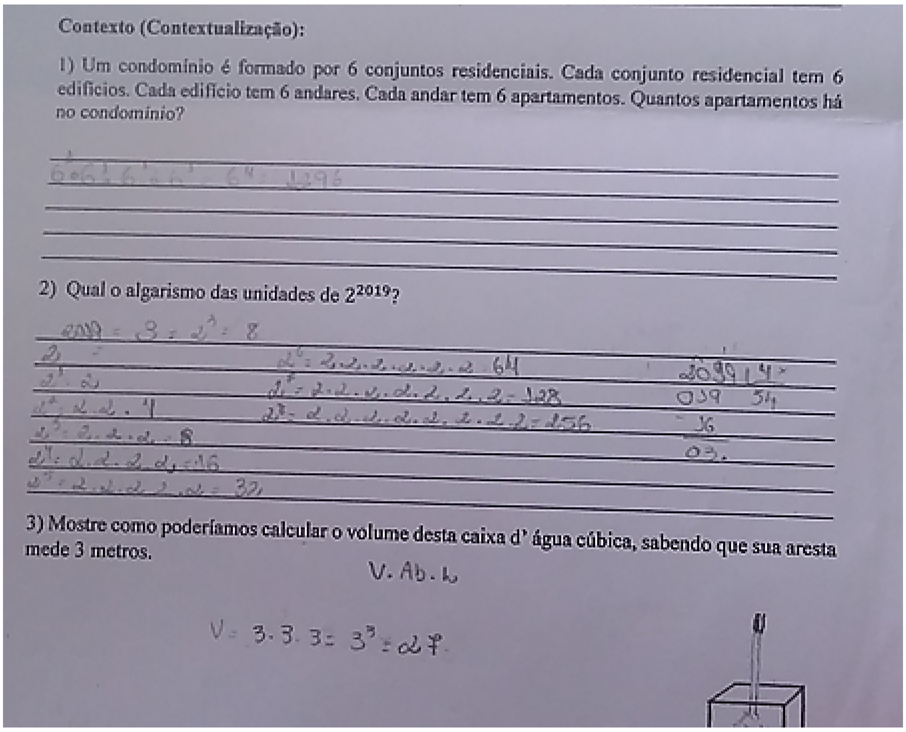
Figura 3.3: Caixa d'água cúbica.

As figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 a seguir ilustram o desenvolvimento da seção "contextualização"da sequência didática.

Figura 3.4: Vídeos aula Portal do Saber.

Figura 3.5: Solucionando os problemas da seção Contextualização.

Figura 3.6: Intervenção do Professor durante a realização das atividades.


Contexto (Contextualização):

1) Um condomínio é formado por 6 conjuntos residenciais. Cada conjunto residencial tem 6 edifícios. Cada edifício tem 6 andares. Cada andar tem 6 apartamentos. Quantos apartamentos há no condomínio?

2) Qual o algarismo das unidades de 2^{2019}?

3) Mostre como poderíamos calcular o volume desta caixa d' água cúbica, sabendo que sua aresta mede 3 metros.

V. Ab. h

V = 3 . 3 . 3 = 3^3 = 27.

Figura 3.7: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Antes do início da próxima seção dessa sequência didática, foi disponibilizado para os alunos as principais propriedades da potenciação e com base nos vídeoaulas assistidos, solicitamos para os alunos elencar exemplos numéricos elaborados por eles próprios em cada propriedade. As propriedades que os mesmos tinham dúvidas e não conseguiram elaborar exemplos, foi realizada a intervenção do professor a fim de sanar as mesmas.

“Mão na Massa” (Atividades):

Nesta seção abordaremos uma coleção de atividades que abordam as habilidades elencadas anteriormente. É de extrema importância que o professor se atente para os questionamentos e dúvidas dos alunos durante a realização das atividades e quais propriedades os alunos ainda não conseguiram entender e/ou utilizar de forma satisfatória. As atividades oferecidas estão elencadas a seguir.

Atividade 1: Calcule as potências.

a) 5^3;

b) -2^6;

c) $(1,3)^2$;

d) $(\sqrt{2})^0$;

e) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-4}$.

A seguir elencamos as respostas de um dos alunos.

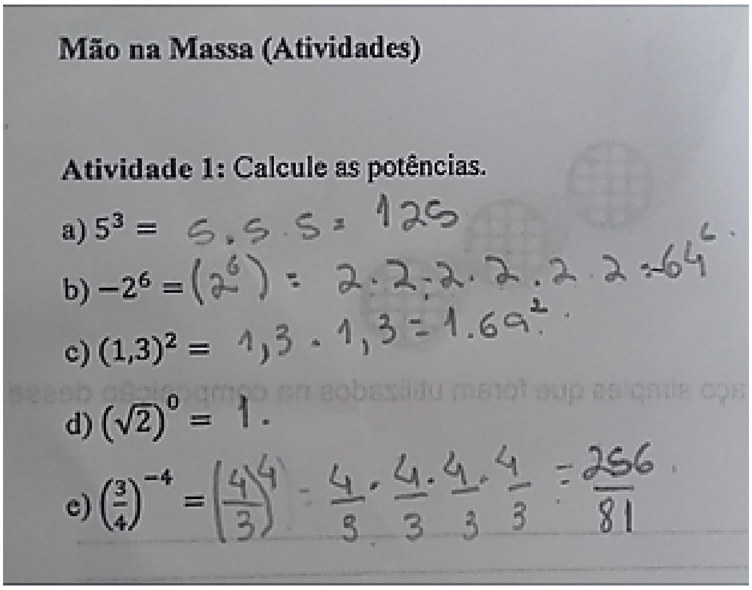


Figura 3.8: Exemplo de respostas de um dos alunos.

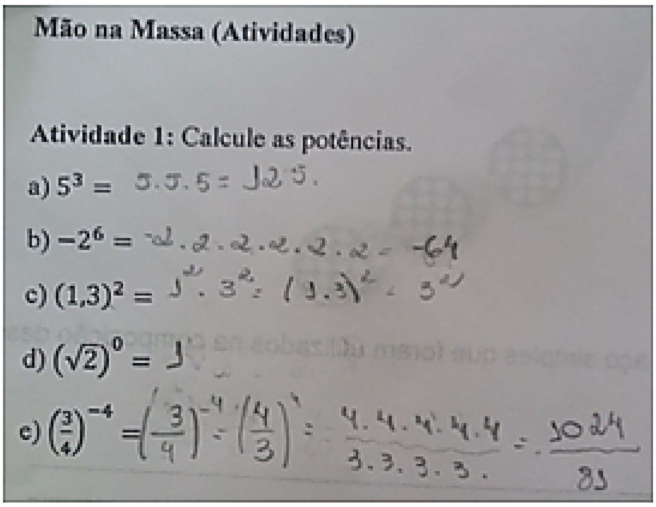


Figura 3.9: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Analisando as respostas dos alunos percebemos que na figura 3.8 o aluno calculou corretamente as potências mas, nos itens (b) e (c) o mesmo manteve os expoentes. Já as respostas contidas na figura 3.9 apresenta erros de cálculo nos itens (c) e (e), note que no item (c) ao invés de $(1,3)^2 = (1,3).(1,3) = 1,69$ o aluno pode não ter percebido que tratava-se de um número decimal e tentou calcular a potência como se fossem números naturais, e no item (e), apesar de ter aplicado a propriedade correta, cometeu erro ao calcular a potência. Nesse momento foi realizada a intervenção do professor individualmente a esses alunos, procurando esclarecer e corrigir os equívocos cometidos. Após a intervenção os alunos conseguiram realizar as atividades corretamente. É de extrema importância permitir aos alunos que resolvam as atividades, individualmente, pois assim, o professor tem a oportunidade de saber exatamente os diferentes ritmos de aprendizagem e de que maneira estão compreendendo as informações e explicações sobre o tema lecionado.

Atividade 2: AAP - 8º ano: 22ª edição. O resultado da multiplicação: $10^{-12}.10^{10}$ é:

(A) 10^{-22}
(B) 10^{-2}
(C) 10^{2}
(D) 10^{22}

Essa atividade tem como objetivo avaliar se o aluno aplica corretamente a propriedade $a^m.a^n = a^{m+n}$ e operações com números inteiros. A figura 3.9 ilustra um exemplo de resposta de um dos alunos.

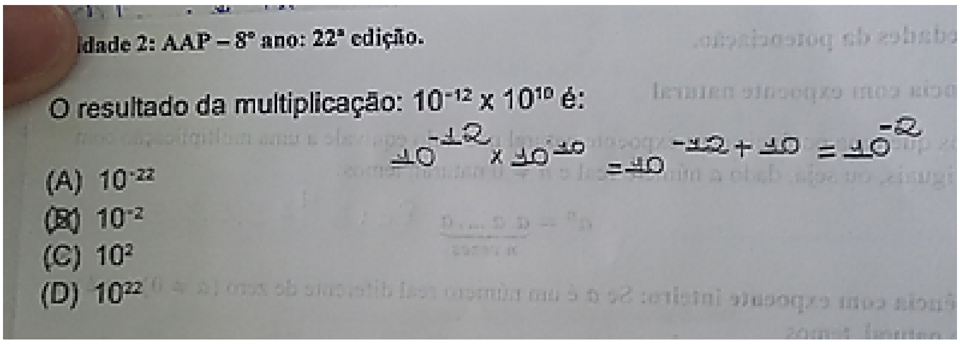


Figura 3.10: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Atividade 3: AAP - 1ª EM: 21ª edição. Aplicando as propriedades das potências a expressão: $15^4.35^3.21^3.\left(\dfrac{1}{105}\right)^5$, pode ser escrita como

(A) $3.5^2.7$

(B) $3^2.5^2.7$

(C) $3^4.5^3.7^3$

(D) $3^7.5^7.3^6$

(E) $3^{12}.5^{12}.7^{11}$

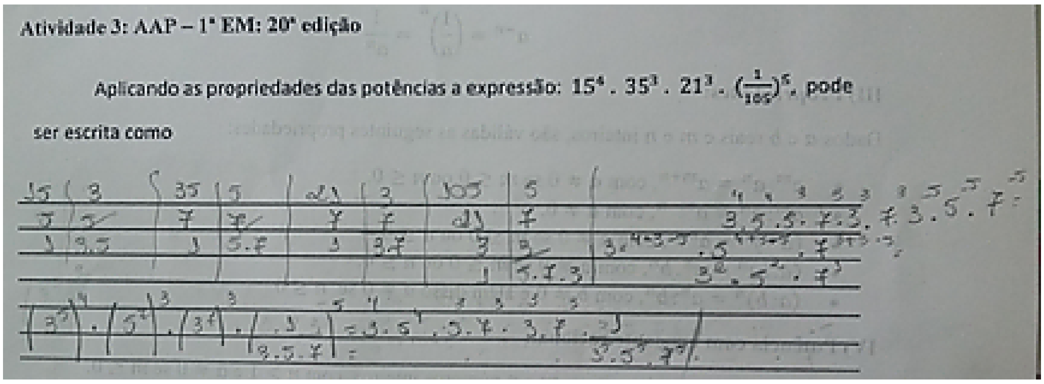
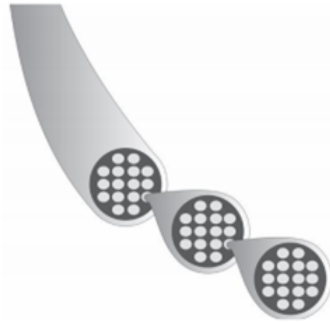


Figura 3.11: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Nessa atividade, em geral, os alunos encontraram dificuldades para fatorar as bases das potências que compõem a expressão em fatores primos, e aplicar corretamente a propriedade $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Atividade 4: (AAP - 1ª EM: 21ª edição) Os grandes cabos de aço utilizados em pontes e viadutos são construídos por meio de composições de outros cabos. Em determinada ponte foram utilizados cabos estruturais compostos por 16 cabos médios, sendo que cada um destes é composto por 16 cabos menores e, finalmente, cada cabo menor é composto por 16 cabos simples de aço, como pode ser visto no detalhe a seguir.



A quantidade de cabos de aço simples que foram utilizados na composição desse cabo estrutural é:

(A) 2^7

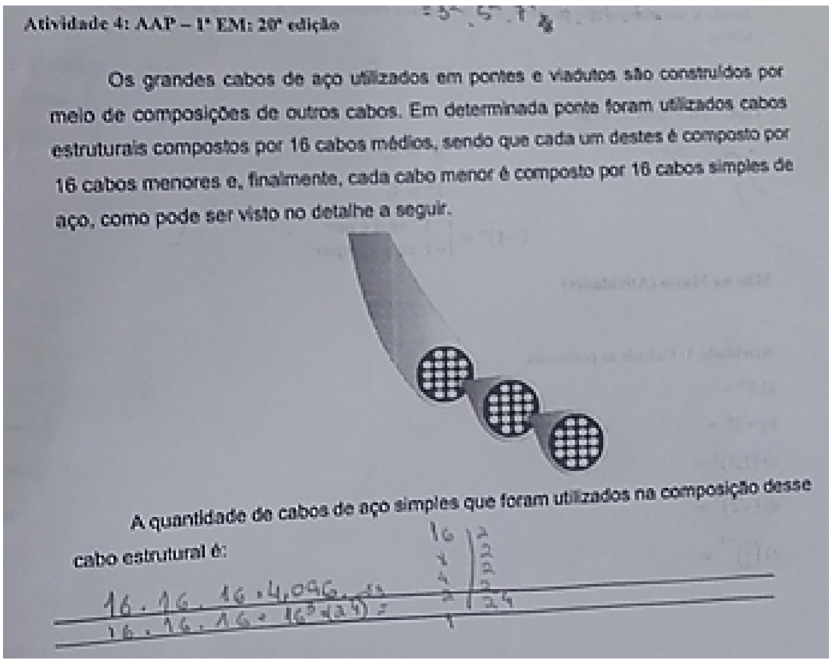
(B) 2^9

(C) 2^{12}

(D) 2^{16}

(E) 2^{24}

As figuras 3.12 e 3.13 mostra exemplos de respostas obtidas pelos alunos.

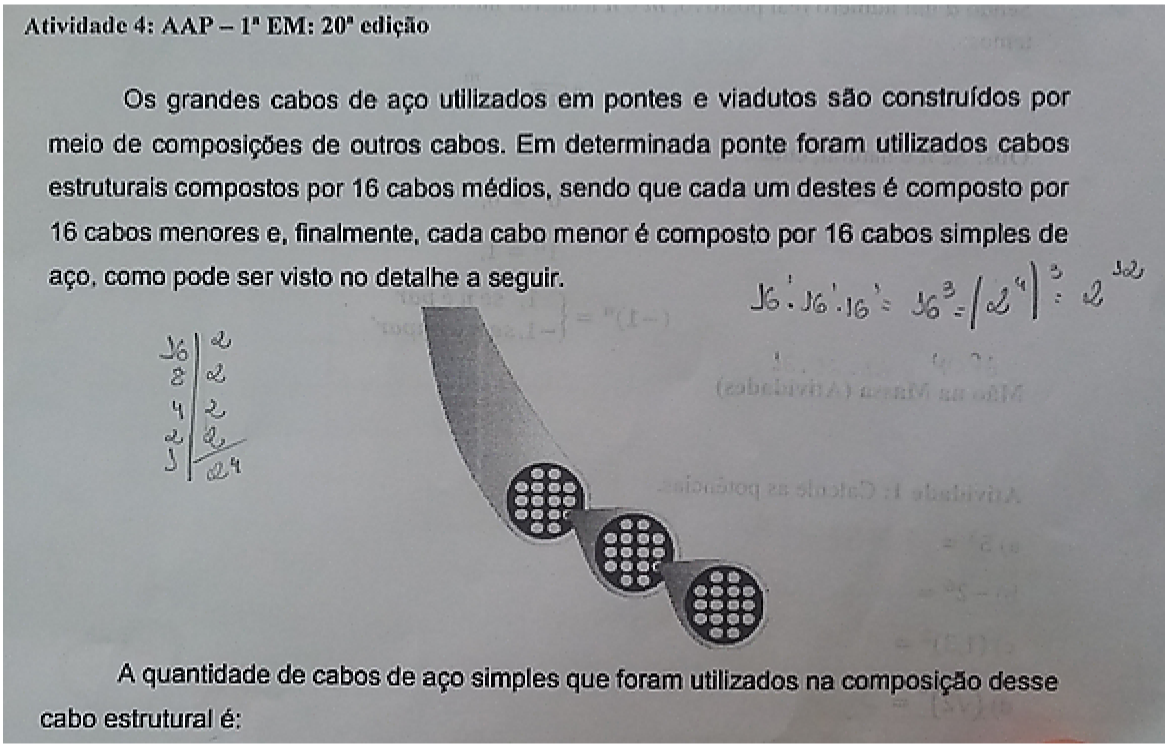


Atividade 4: AAP – 1ª EM: 20ª edição

Os grandes cabos de aço utilizados em pontes e viadutos são construídos por meio de composições de outros cabos. Em determinada ponte foram utilizados cabos estruturais compostos por 16 cabos médios, sendo que cada um destes é composto por 16 cabos menores e, finalmente, cada cabo menor é composto por 16 cabos simples de aço, como pode ser visto no detalhe a seguir.

A quantidade de cabos de aço simples que foram utilizados na composição desse cabo estrutural é:

Figura 3.12: Exemplo de resposta de um dos alunos.



Atividade 4: AAP – 1ª EM: 20ª edição

Os grandes cabos de aço utilizados em pontes e viadutos são construídos por meio de composições de outros cabos. Em determinada ponte foram utilizados cabos estruturais compostos por 16 cabos médios, sendo que cada um destes é composto por 16 cabos menores e, finalmente, cada cabo menor é composto por 16 cabos simples de aço, como pode ser visto no detalhe a seguir.

$16 \cdot 16 \cdot 16 = 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2^4 \end{array}$$

A quantidade de cabos de aço simples que foram utilizados na composição desse cabo estrutural é:

Figura 3.13: Exemplo de resposta de um dos alunos.

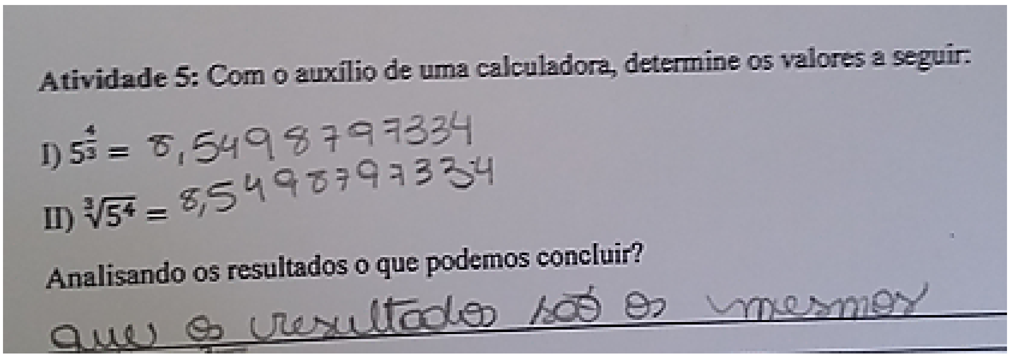
Atividade 5: Com o auxílio de uma calculadora, determine os valores das potências a seguir:

I) $5^{\frac{4}{3}} =$

II) $\sqrt[3]{5^4} =$

Analisando os resultados o que podemos concluir?

O objetivo dessa atividade é mostrar ao aluno que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$. Veja nas figuras 3.14 e 3.15 alguns exemplos de respostas.



Atividade 5: Com o auxílio de uma calculadora, determine os valores a seguir:

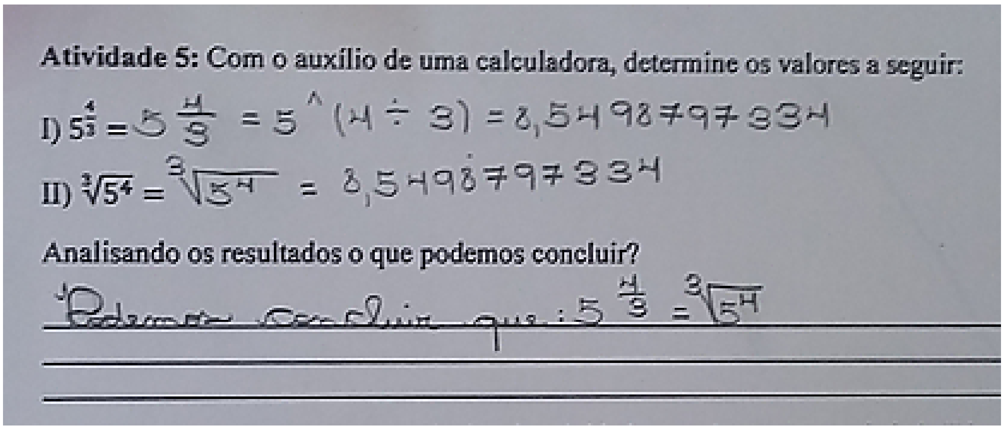
I) $5^{\frac{4}{3}} =$ 8,549879733 4

II) $\sqrt[3]{5^4} =$ 8,549879733 4

Analisando os resultados o que podemos concluir?

que os resultados são os mesmos

Figura 3.14: Exemplo de resposta de um dos alunos.



Atividade 5: Com o auxílio de uma calculadora, determine os valores a seguir:

I) $5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5$ ^ $(4 \div 3) = 8{,}549879733 4$

II) $\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^4} = 8{,}5498797334$

Analisando os resultados o que podemos concluir?

Podemos concluir que: $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$

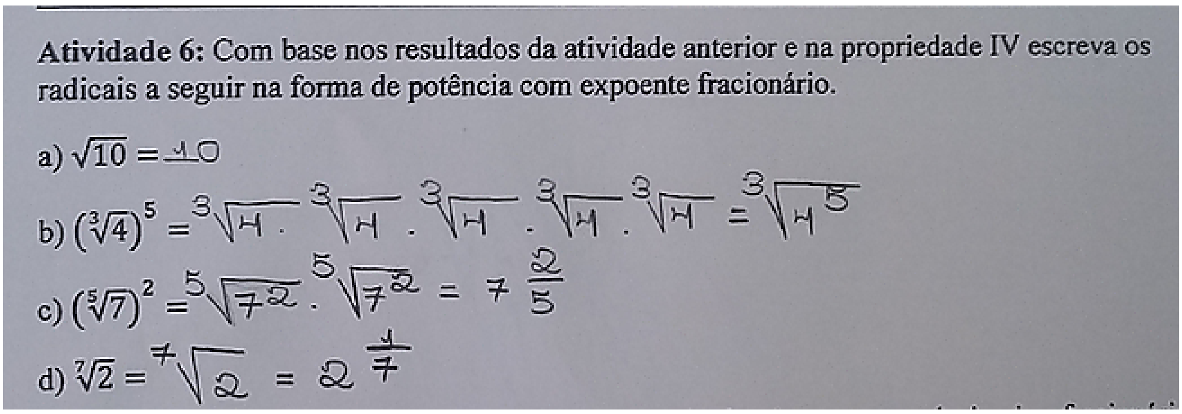
Figura 3.15: Exemplo de resposta de um dos alunos.

Após esse experimento utilizando a calculadora, os alunos passaram a resolver o exercício a seguir a fim de fixar a propriedade iniciada no exercício anterior.

Atividade 6: Com base nos resultados da atividade anterior e na propriedade $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$, escreva os radicais a seguir na forma de potências com expoente fracionário.

a) $\sqrt{10} =$
b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^5 =$
c) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^2 =$
d) $\sqrt[7]{2} =$

A figura 3.16 mostra as resoluções de um dos alunos.



Atividade 6: Com base nos resultados da atividade anterior e na propriedade IV escreva os radicais a seguir na forma de potência com expoente fracionário.

a) $\sqrt{10} = 10$

b) $(\sqrt[3]{4})^5 = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^5}$

c) $(\sqrt[5]{7})^2 = \sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

d) $\sqrt[7]{2} = \sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}}$

Figura 3.16: Exemplo de resposta de um dos alunos.

Nessa atividade novamente foi necessária a intervenção do professor. Ao questionar o aluno no que diz respeito a resolução do item (a), o mesmo argumentou: o radical "não"tem índice como nos demais itens e o radicando também "não". Ou seja, o fato do índice 2 estar subentendido no radical $\sqrt{a}$ e que vale a igualdade $a = a^1$, o aluno não conseguiu concluir que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, não "enxergou"qual seria a fração expoente do radicando, ao aplicar a propriedade em questão. Dúvidas semelhantes surgem o tempo todo em sala de aula, por isso, o atendimento individualizado é indispensável nos dias atuais.

Formas de avaliação.

Nessa sequência didática foi realizada uma avaliação contínua durante o desenvolvimento de cada seção, juntamente com os alunos, auxiliando-os, tirando dúvidas e realizando as intervenções necessárias a partir dos seus questionamentos.

3.2 Estudando a Função Exponencial.

Área: Matemática.

Escola: Escola Estadual Osvaldo Martins - Osvaldo Cruz - SP.

Série: 1ª série Ensino Médio.

Tema: Função Exponencial.

Título da Atividade: Estudando a função exponencial.

Número de Aulas Previstas: 5 aulas.

Habilidades a serem desenvolvidas: Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos. Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.

Objetos de Aprendizagem (conteúdo): Crescimento/decrescimento exponencial, funções exponenciais e logarítmicas.

Materiais necessários para as aulas: Atividades impressas, lousa, sala de informática, vídeoaulas, calculadora científica e material concreto: Prancha para Gráficos.

Equações Exponenciais.

Depois de revisar as propriedades das potências, podemos então explorar e resolver as equações exponenciais. Para tanto é necessário conhecer e aplicar bem as regras e as propriedades das potências.

Observe o exemplo: $3^{x+1} = 81$

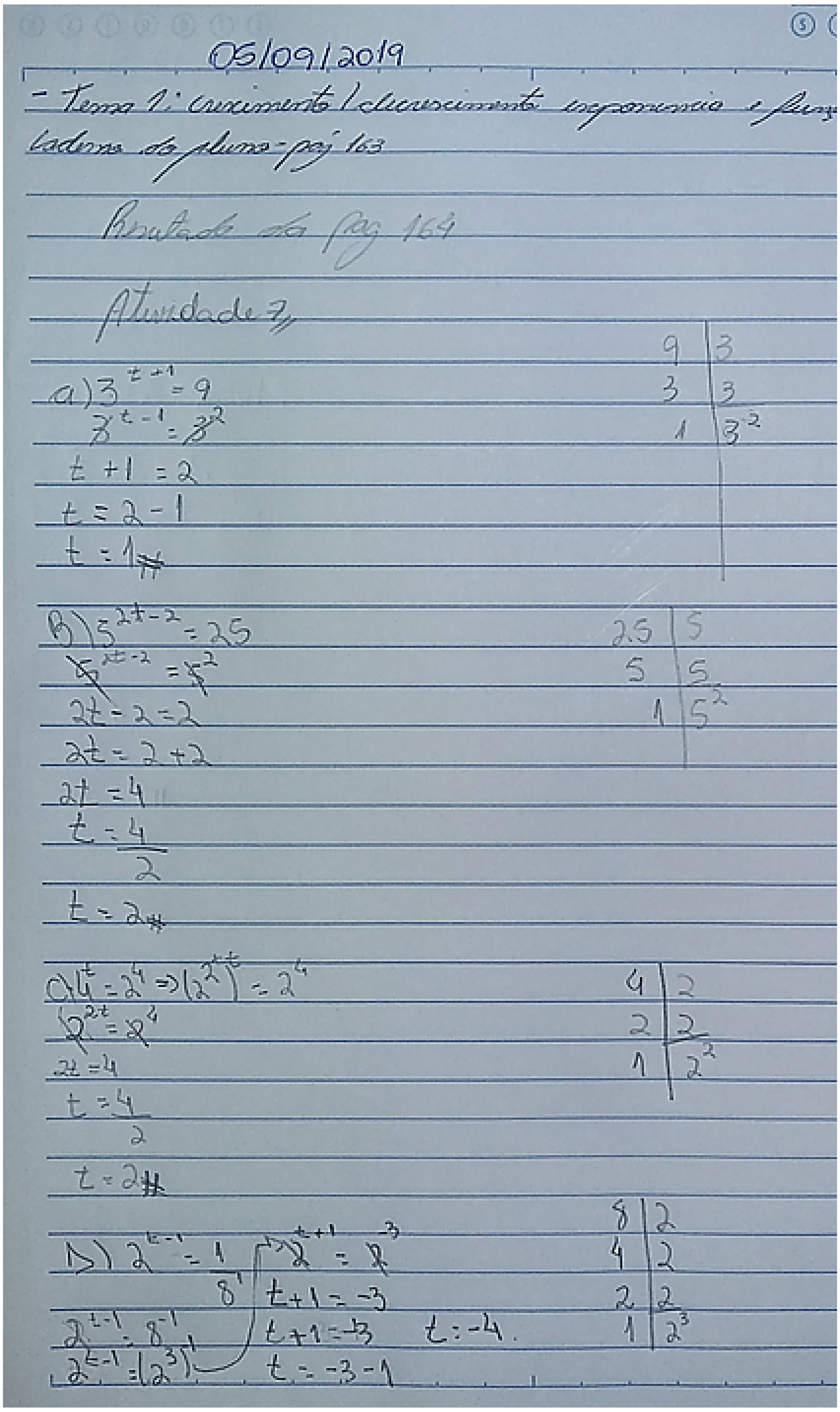
Utilizando as propriedades de potências de expoentes inteiros, já estudadas podemos escrever o número 81 em fatores primos ($81 = 3.3.3.3 = 3^4$), tornando possível trabalhar com os expoentes. Se $3^{x+1} = 3^4$, então $x + 1 = 4$ e, portanto, $x = 3$.

Atividade 1: Tomando como referência as propriedades observadas no exemplo anterior, calcule o valor de t nas equações abaixo:

a) $5^{2t-2} = 25$;

b) $2^{t+1} = \dfrac{1}{8}$.

A figura 3.17 mostra as resoluções de um dos alunos.



05/09/2019

- Tema 1: crescimento/decrescimento exponencia e funç

Caderno do aluno - pág 163

Resultado da pág 164

Atividade 7

a) $3^{t+1} = 9$

$\cancel{3}^{t+1} = \cancel{3}^{2}$

$t+1 = 2$

$t = 2-1$

$t = 1$

9	3
3	3
1	3^2

b) $5^{2t-2} = 25$

$\cancel{5}^{2t-2} = \cancel{5}^{2}$

$2t-2 = 2$

$2t = 2+2$

$2t = 4$

$t = \dfrac{4}{2}$

$t = 2$

25	5
5	5
1	5^2

c) $4^t = 2^4 \Rightarrow (2^2)^t = 2^4$

$\cancel{2}^{2t} = \cancel{2}^{4}$

$2t = 4$

$t = \dfrac{4}{2}$

$t = 2$

4	2
2	2
1	2^2

d) $2^{t-1} = \dfrac{1}{8}$

$2^{t-1} = 8^{-1}$

$2^{t-1} = (2^3)^{-1}$

$\cancel{2}^{t+1} = \cancel{2}^{-3}$

$t+1 = -3$

$t+1 = -3$

$t = -3-1$

$t = -4$.

8	2
4	2
2	2
1	2^3

Figura 3.17: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Contextualização (Desenvolvimento Embrionário Humano)

O desenvolvimento do embrião humano começa com a formação do zigoto, que após passar por muitas divisões celulares (mitoses), as clivagens, vai se fixar nas paredes do útero (nidação). Ali se formam novas estruturas (placenta, cordão umbilical, entre outros) e começa a gestação do feto até o seu nascimento durante o parto. O processo desde a fecundação até a nidação dura cerca de uma semana, sendo que a primeira divisão do zigoto ocorre nas primeiras 24 horas a seguir da fertilização. A figura 3.18 ilustra as **clivagens do zigoto**.

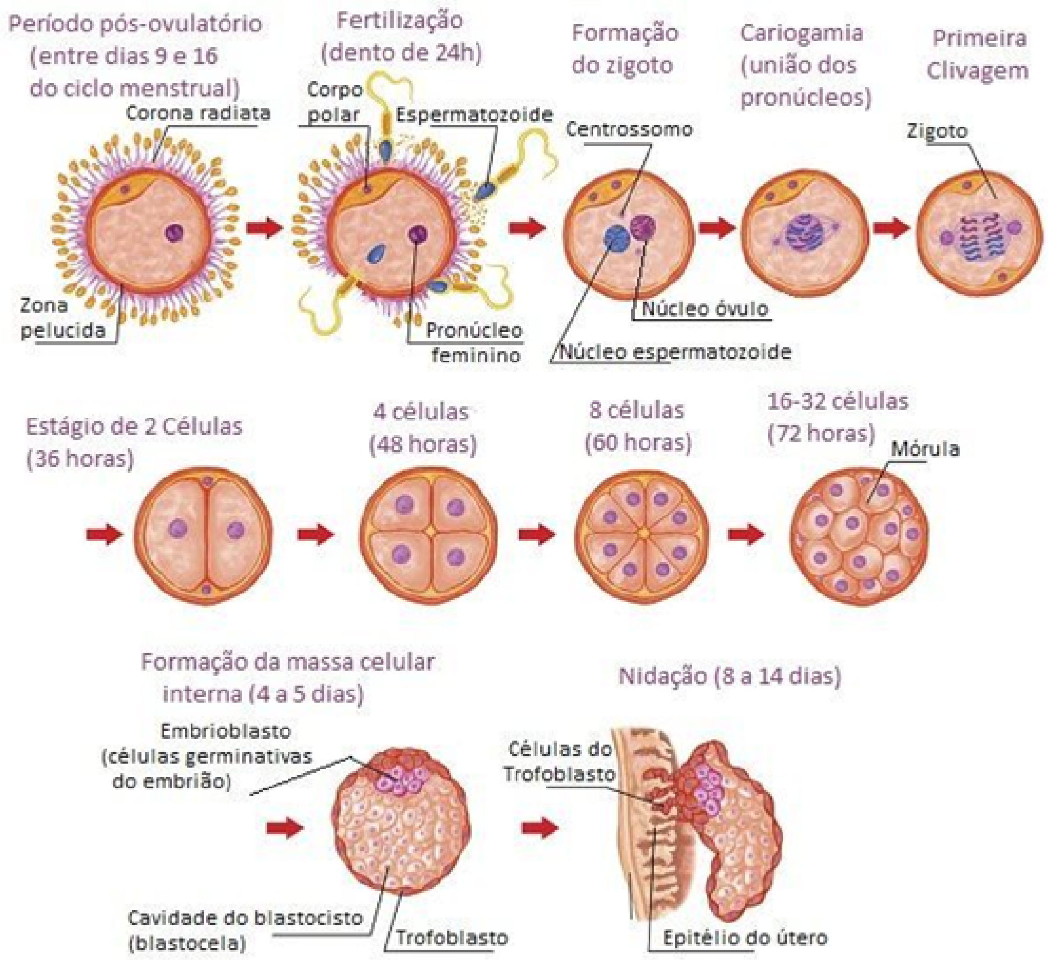


Figura 3.18: Esquema detalhado da formação do zigoto, das clivagens e da nidação.

O zigoto é a primeira célula do novo ser. Em seguida passa por muitas divisões celulares (mitoses), originando muitas células que permanecem unidas e formarão o embrião. A divisão do zigoto, também chamada clivagem ou segmentação, origina inicialmente duas células chamadas blastômeros. Em seguida, os blastômeros se dividem novamente, formando 4 células, depois 8 e assim segue até formar muitas células no estágio da mórula, assim chamada por se assemelhar a uma amora.

Analisando as informações da imagem 4.18 percebemos que a partir da primeira clivagem (zigoto) a quantidade de células dobra a cada 12 horas até o estágio da mórula. Os dados estão anotados na tabela a seguir.

Horas	Conjunto de Células	Potência Correspondente
0	1	2^0
12	2	2^1
24	4	2^2
36	8	2^3
48	16	2^4

Represente a situação descrita em um plano cartesiano e analise o crescimento do número de células a partir da célula zigoto até o estágio da mórula.

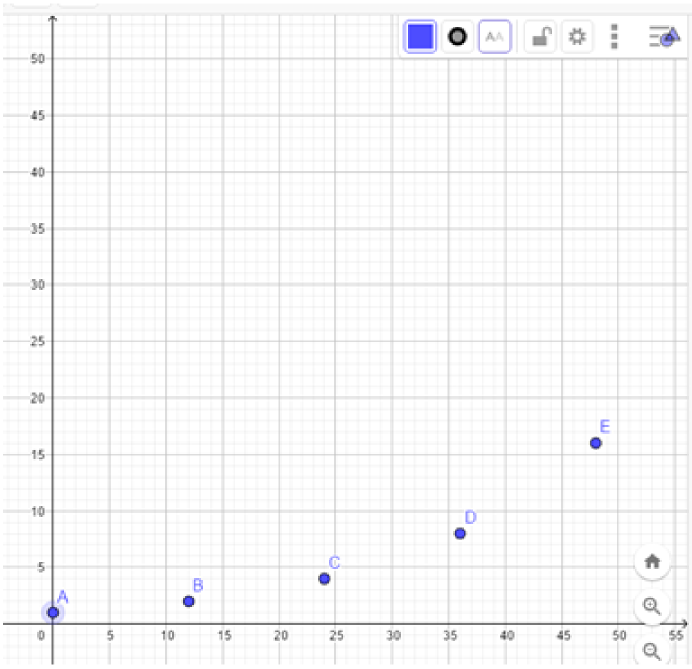
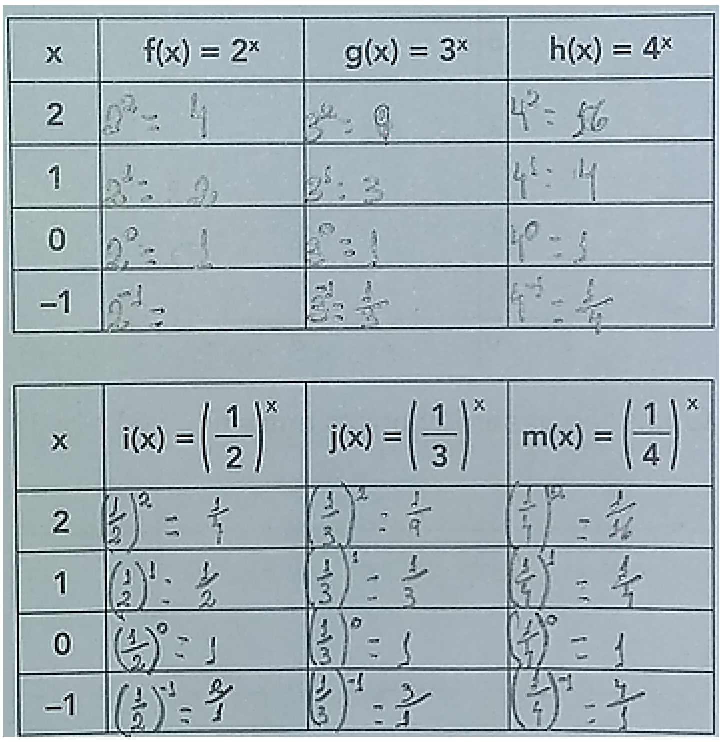


Figura 3.19: Crescimento do número de células em função do tempo em horas.

Atividade 2: Para estudo dos gráficos das funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$, sendo, $a > 0$ e $a \neq 1$ para todo número real, construímos a seguir uma tabela com diversos valores correspondentes de $f(x)$ para alguns valores de a.

a) Preencha as tabelas a seguir:



x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$	$h(x) = 4^x$
2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$
1	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$
0	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$
–1	$2^{-1} =$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$4^{-1} = \frac{1}{4}$

x	$i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$
–1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{1}$

Figura 3.20: Exemplo de respostas de um dos alunos.

b) Tendo como base os valores obtidos na figura 3.20, vamos esboçar os gráficos das funções exponenciais a seguir para identificar suas características fundamentais, observando o domínio, a imagem e o crescimento ou o decrescimento em cada caso. Para isso, construa os gráficos das funções utilizando o material concreto: Prancha para Gráficos e descreva as características fundamentais das funções indicadas em cada caso:

$f(x) = 2^x; \quad g(x) = 3^x; \quad h(x) = 4^x.$

$$i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

As figuras 3.21, 3.22 e 3.23 mostra as resoluções de um dos alunos.

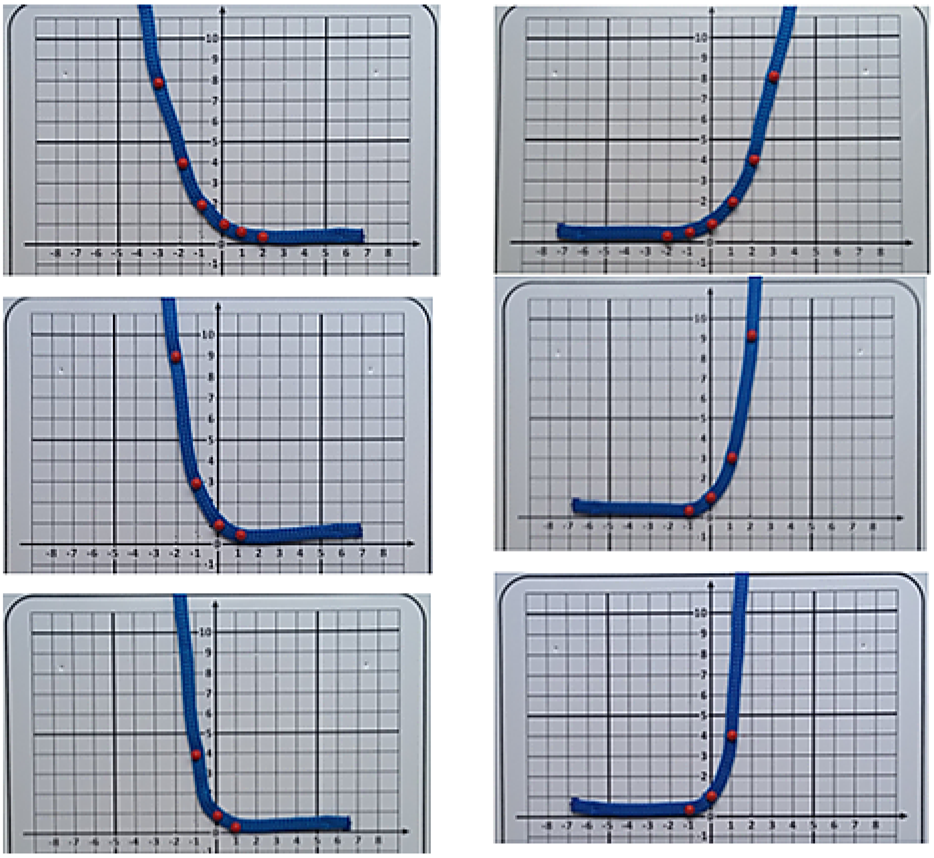
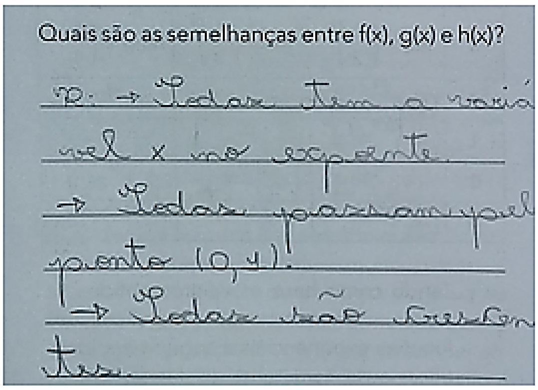


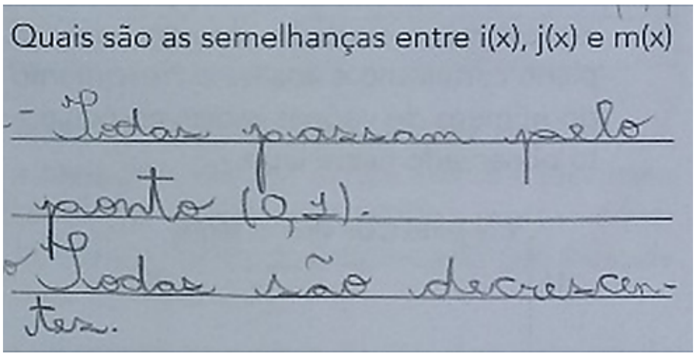
Figura 3.21: Exemplo de respostas de um dos alunos.



Quais são as semelhanças entre f(x), g(x) e h(x)?

R. → Todas tem a variá
vel x no expoente.
→ Todas passam pel
ponto (0,1).
→ Todas são crescen
tes.

Figura 3.22: Exemplo de respostas de um dos alunos.


Quais são as semelhanças entre i(x), j(x) e m(x)

- Todas passam pelo ponto (0, 1).
- Todas são decrescentes.

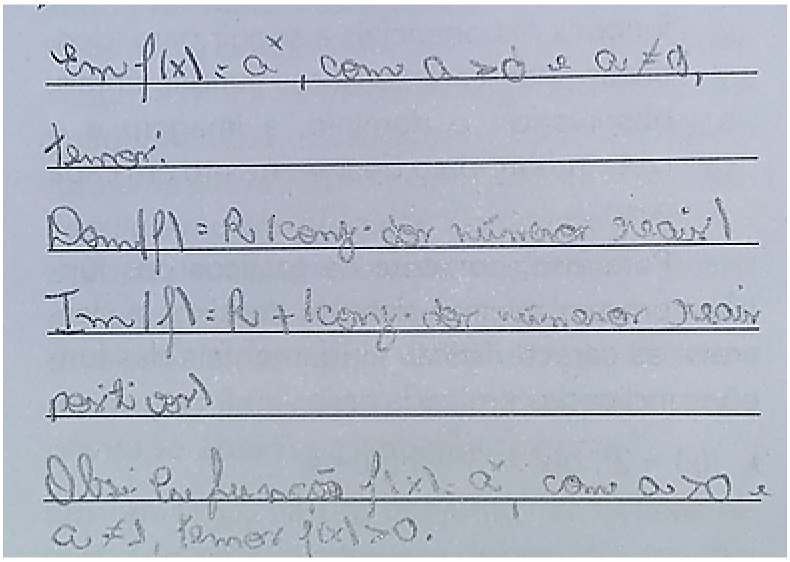
Figura 3.23: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Nesse momento da atividade os alunos foram questionados em relação aos valores das bases das funções no caso de $0 < a < 1$. Sobre o que acontece com a curva exponencial quando diminuimos a base cada vez mais, levando-os a concluir que quanto menor o valor de a mais "fechada" é a curva da função, ou seja, quanto menor for o valor de x maior é o valor de $f(x)$. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para o caso em que $a > 1$, concluindo assim que quanto maior o valor de a mais "fechada" é a curva da função, ou seja, quanto maior o valor de x maior será o valor de $f(x)$. Levando-os a compreender os casos de crescimento e decrescimento da função exponencial.

Atividade 3: Com base nos dados da tabela e dos gráficos construídos na atividade anterior, determine o domínio e a imagem da função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, sendo, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para a resolução desse exercício, propomos aos alunos realizar alguns testes de valores para x e analisar o que aconteceria com os valores de $f(x)$, como por exemplo, se haveria algum valor de x que $f(x)$ não pudesse assumir, bem como se existe algum valor de x para o qual $f(x) = 0$.

A figura 3.24, mostra a conclusão obtida por um aluno.



Em $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$Dom(f) = \mathbb{R}$ (conj. dos números reais)

$Im(f) = \mathbb{R}_+$ (conj. dos números reais positivos)

Obs: Na função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $f(x) > 0$.

Figura 3.24: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Atividade 4: Em um mesmo plano cartesiano construa os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ e responda as seguintes questões:

a) Quais são as semelhanças de $f(x)$ e $g(x)$?

b) Qual a principal diferença notada entre $f(x)$ e $g(x)$?

Os objetivos dessa atividade é o aluno concluir que dado um número real $a > 0$ e $a \neq 1$ as funções exponenciais $f(x) = a^x$ e $g(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ são simétricas em relação ao eixo y e que ambas passam pelo ponto $(0, 1)$ ou seja, se $x = 0$, então $f(x) = g(x) = 1$.

Nas figuras 3.25, 3.26, 3.27 e 3.28 estão as conclusões de um dos alunos.

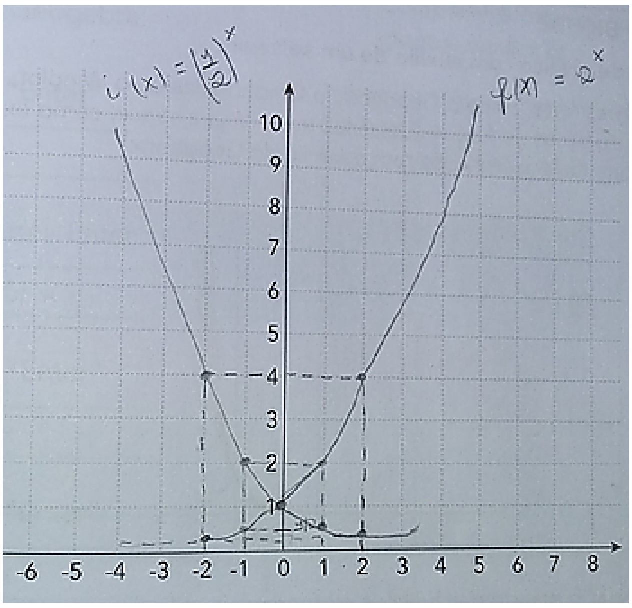


Figura 3.25: Exemplo de respostas de um dos alunos.

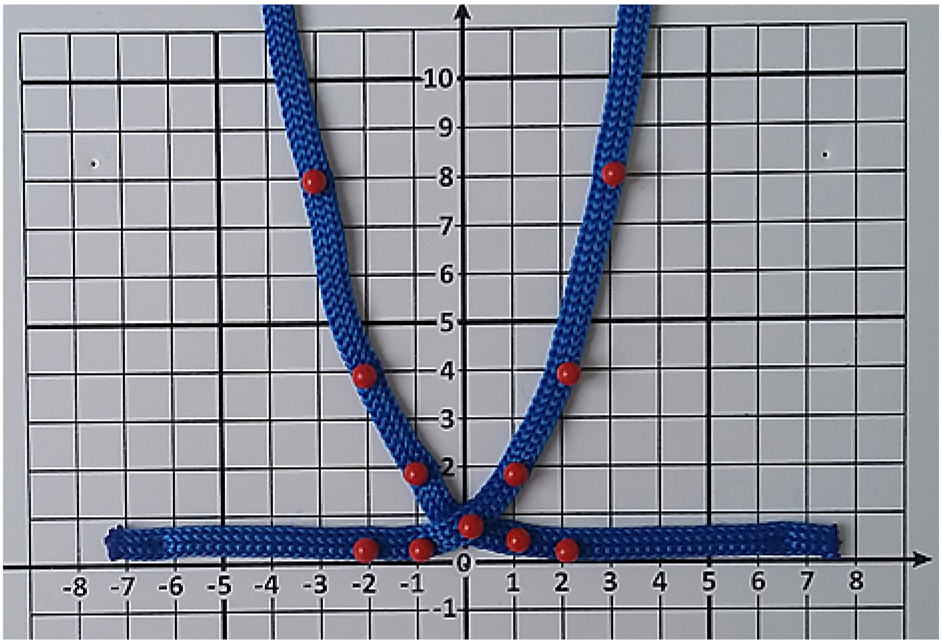


Figura 3.26: Gráficos de $f(x)$ e $i(x)$.

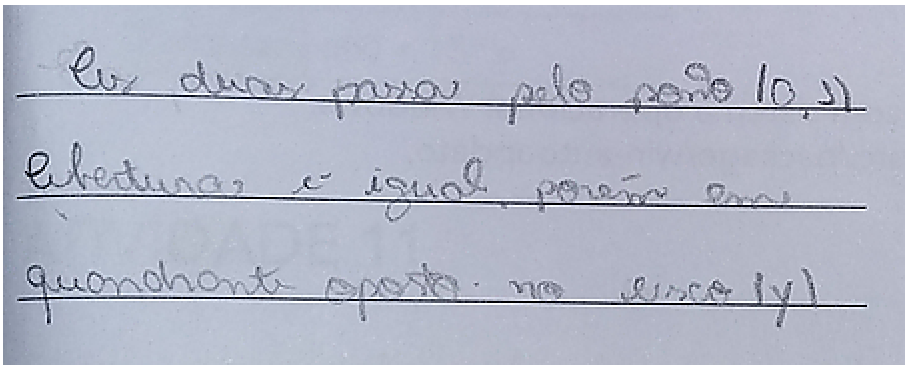

As duas passa pelo ponto (0,1)
abertura é igual, porém em
quadrante oposto. no eixo (y)

Figura 3.27: Exemplo de respostas de um dos alunos.

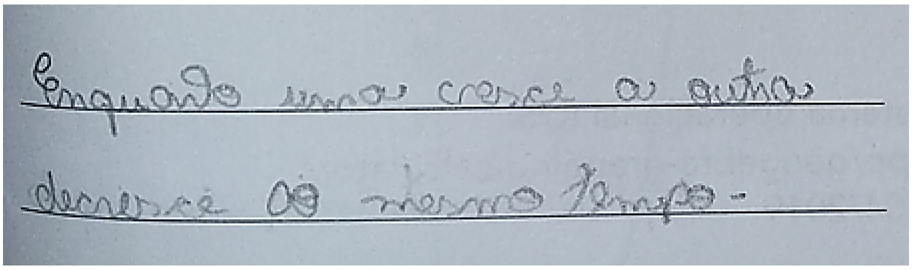

Enquanto uma cresce a outra
decresce ao mesmo tempo.

Figura 3.28: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Atividade 5 (Momento digital) Alguns softwares livres como o Geogebra podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos. Utilizando o programa citado construa os gráficos das seguintes funções exponenciais.

a) $f(x) = 5^x$; $g(x) = 5^{-x}$; $h(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$; $i(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$; $m(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x$.

b) Quais funções são crescentes? E quais são decrescentes?

Figura 3.29: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Atividade 6: Observe o gráfico de uma função exponencial.

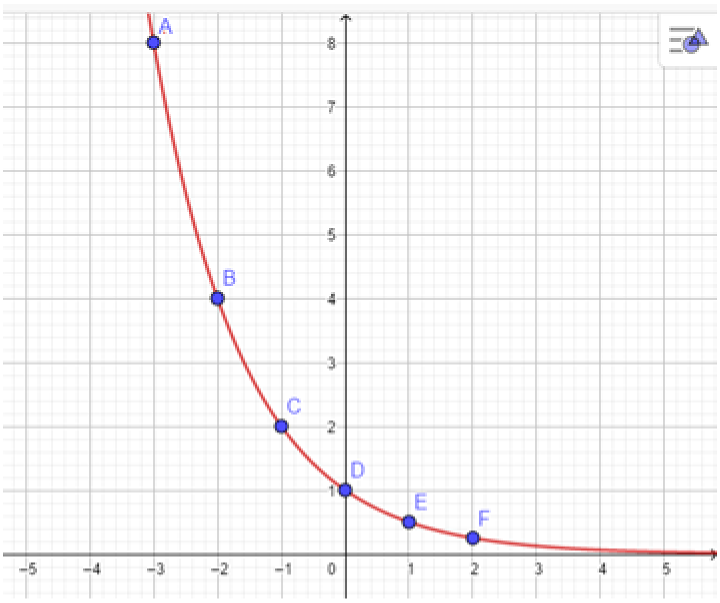


Figura 3.30: Gráfico de uma função exponencial.

A partir da observação das coordenadas dos pontos, escreva a função exponencial que corresponde a esse gráfico:

Para o desenvolvimento das próximas atividades levamos os alunos para assistir ao vídeo "Osso duro de roer", disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1146.

Atividade 7: Certa substância radioativa se decompõe de tal forma que sua massa m se altera a cada quatro horas, conforme a função:

$$m = m_0.2^{-0,25t}.$$

O valor inicial da massa m_0 é igual a $60g$, e o tempo t é dado em horas. Qual é o valor da massa m após 12 horas?

Atividade 8: (ENEM 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população: $P(t) = 40.23^t$ em que t é o tempo, em hora, e $P(t)$ é a população, em milhares de bactérias. Em relação à quantidade inicial de bactérias, qual será a população bacteriana após 3 min?

Formas de avaliação.

Nessa sequência didática foi realizada uma avaliação contínua durante o desenvolvimento de cada seção, juntamente com os alunos, auxiliando-os, tirando dúvidas e realizando as intervenções necessárias a partir dos seus questionamentos.

3.3 Pesquisando e aprendendo logaritmos.

Área: Matemática.

Escola: Escola Estadual Osvaldo Martins - Osvaldo Cruz - SP.

Série: 1ª Série do Ensino Médio.

Tema: Logaritmos.

Título da Atividade: Pesquisando e Aprendendo Logaritmos.

Número de Aulas Previstas: 6 aulas.

Habilidades a serem desenvolvidas: Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos.

Conhecer as principais propriedades dos logaritmos.

Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos.

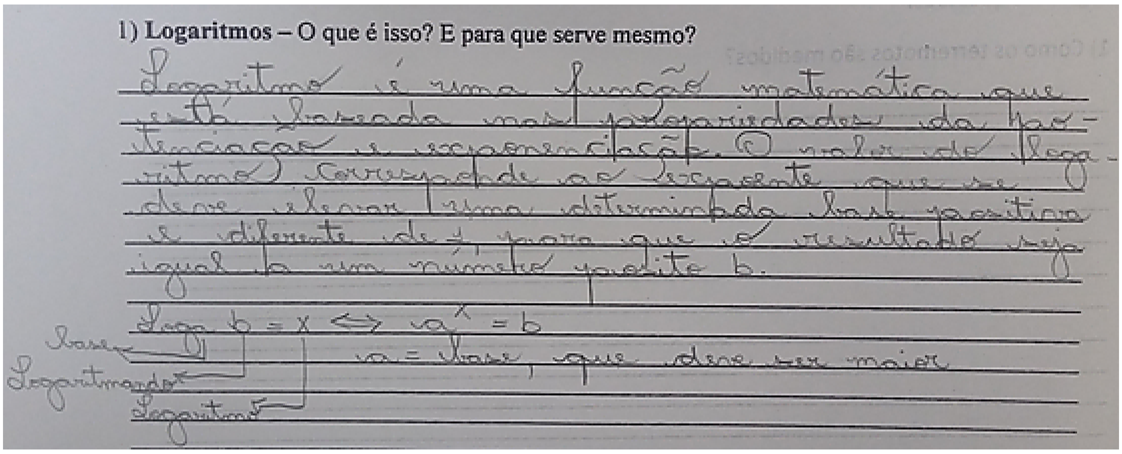
Objetos de Aprendizagem (conteúdo): Logaritmos, definição e propriedades.

Materiais necessários para as aulas: Atividades impressas, lousa, sala de informática, vídeos aula e calculadora científica.

Elaboramos a presente sequência didática com o objetivo de fazer com que o aluno compreenda o logaritmo como um expoente, ou seja, quando desejamos escrever um número real N como uma potência a^n, com $a \neq 1$ e $a > 0$, em símbolos: $N = a^n$ então, $n = log_a N$. Para o início das atividades propomos aos alunos realizarem uma pesquisa com o objetivo de responder às seguintes questões.

Questões Disparadoras (Pesquisa).

1) Logaritmos - O que é isso? E para que serve mesmo?



1) **Logaritmos – O que é isso? E para que serve mesmo?**

Logaritmo é uma função matemática que está baseada nas propriedades da potenciação e exponenciação. O valor do logaritmo corresponde ao expoente que se deve elevar uma determinada base positiva e diferente de 1, para que o resultado seja igual a um número positivo b.

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

base

Logaritmando

Logaritmo

a = base, que deve ser maior

Figura 3.31: Exemplo de resposta de um dos alunos.

Após a realização da pesquisa e socialização da mesma, disponibilizamos para os alunos o contexto a seguir.

Contextualização: Analise atentamente o trecho de notícia publicada pelo jornal “El País” em 26 de maio de 2019.

Terremoto sacode Peru e países vizinhos e é sentido em Manaus

O sismo ocorreu na Amazônia peruana. Há pelo menos seis feridos no país e outros 6 no Equador. Ainda poucas informações sobre danos.

Bogotá - 26 MAI 2019 - 13:24 BRT

Imagem publicada pelo Corpo de Bombeiros de dano provocado pelo terremoto na cidade de Yurimaguas. @BOMBEROSPE (EFE)

Figura 3.32: Notícia publicada pelo jornal El País.

Um forte terremoto de magnitude 8, segundo o Serviço Geológico dos Estados Unidos e 7,5, segundo o instituto geofísico peruano, sacodiu o Peru e os países vizinhos na madrugada *deste domingo. O tremor também foi sentido no Acre e no Amazonas, no Brasil. Até o momento, há ao menos 12 feridos e ainda poucas informações sobre o alcance dos danos. Um boletim preliminar do Serviço Geológico Colombiano indica que o abalo ocorreu às 2h40 (4h40 em Brasília) e teve como epicentro um ponto da localidade de Lagunas (12.000 habitantes), no centro do Peru. O movimento também foi sentido em Lima, situada cerca de 700 quilômetros ao sul do epicentro, com uma intensidade moderada, mas de longa duração: ao redor de um minuto.*

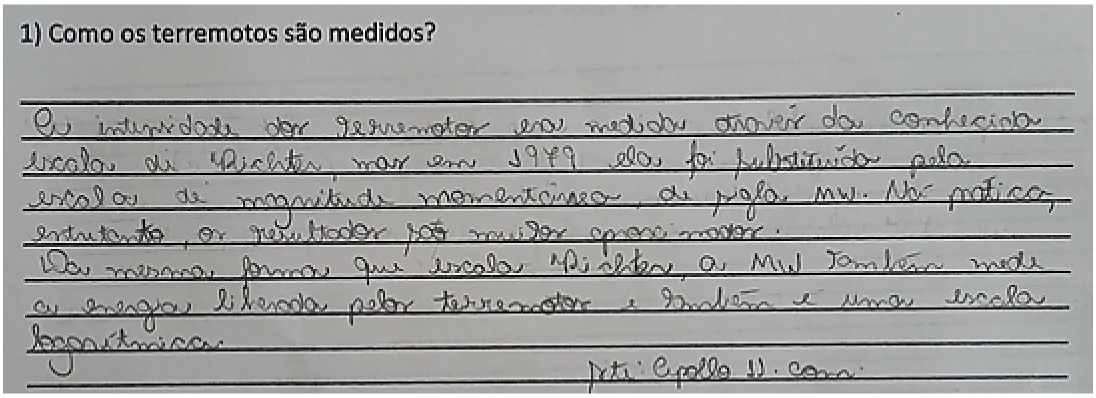
Após a leitura e análise da notícia, vamos realizar uma pesquisa com o objetivo de responder às seguintes questões:

1) Como os terremotos são medidos?
2) Na notícia, segundo o Serviço Geológico dos EUA o terremoto teve magnitude 8, quais foram os possíveis efeitos desse terremoto?
3) Um terremoto de magnitude 4 é quantas vezes mais forte que um de magnitude 3? E quantas vezes mais forte que um terremoto de magnitude 2?
4) Quantas vezes o terremoto da notícia é mais forte que um terremoto de magnitude 4?
5) Até hoje, o maior terremoto ocorrido na história foi registrado no Chile, em 1960, com magnitude 9,5 graus. Quantas vezes esse terremoto é mais forte que o registrado na notícia segundo o instituto geofísico peruano?

A figura 3.33 mostra o desenvolvimento da pesquisa.

Figura 3.33: Realização da pesquisa.

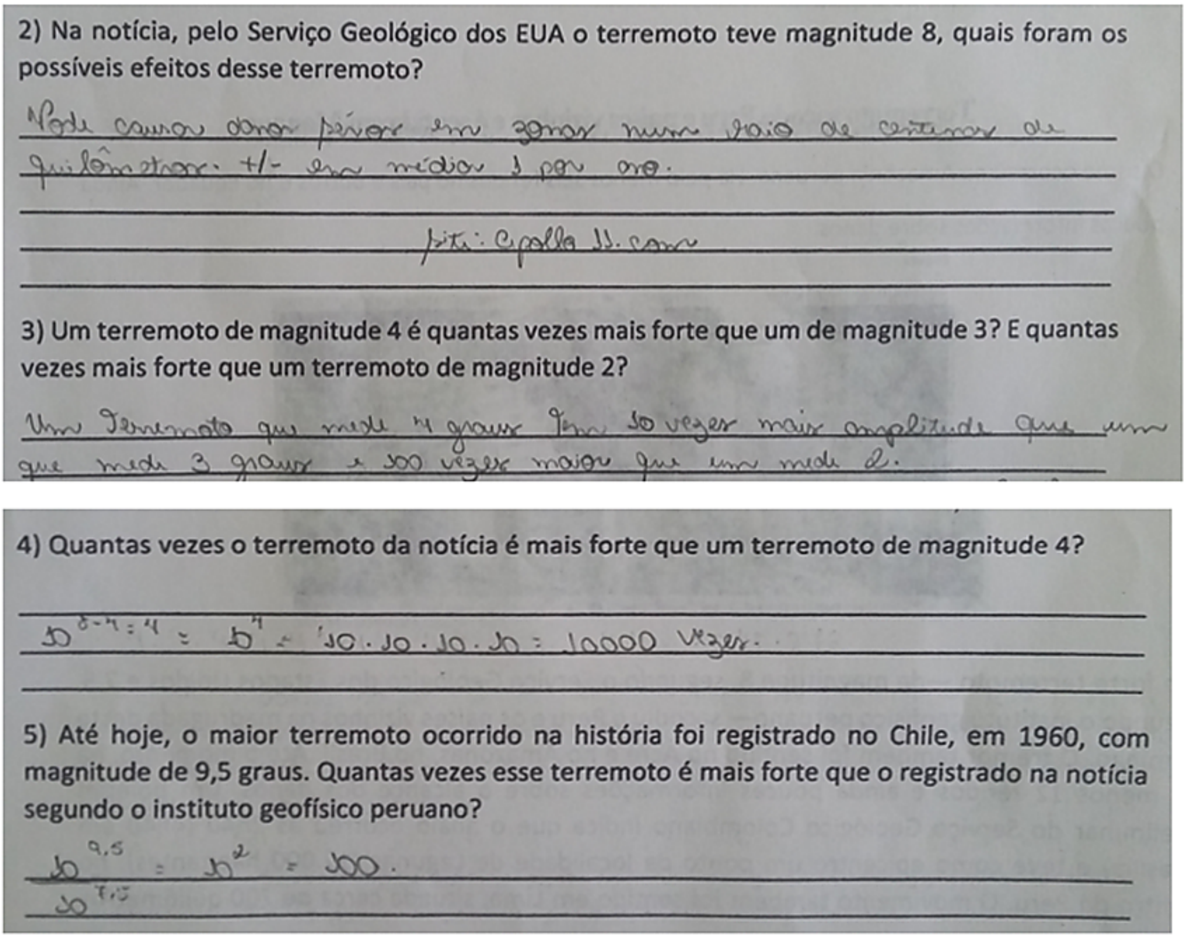
Realizada a pesquisa, fizemos a socialização das respostas obtidas pelos alunos. Em sguida propomos uma coleção de atividades que visam desenvolver as habilidades elencadas anteriormente.


1) Como os terremotos são medidos?

A intensidade dos terremotos era medida através da conhecida escala de Richter, mas em 1979 ela foi substituída pela escala de magnitude momentânea, ou sigla MW. Na prática, entretanto, os resultados são muitos aproximados.
Da mesma forma que escala Richter, a MW também mede a energia liberada pelos terremotos e também é uma escala logarítmica.

Site: Apollo 11.com

Figura 3.34: Produto final da pesquisa.


2) Na notícia, pelo Serviço Geológico dos EUA o terremoto teve magnitude 8, quais foram os possíveis efeitos desse terremoto?

Pode causar danos sérios em zonas num raio de centenas de quilômetros. +/- em média 1 por ano.

Site: Apollo 11.com

3) Um terremoto de magnitude 4 é quantas vezes mais forte que um de magnitude 3? E quantas vezes mais forte que um terremoto de magnitude 2?

Um Terremoto que mede 4 graus tem 10 vezes mais amplitude que um que mede 3 graus e 100 vezes maior que um mede 2.

4) Quantas vezes o terremoto da notícia é mais forte que um terremoto de magnitude 4?

$10^{8-4=4} = 10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ vezes.

5) Até hoje, o maior terremoto ocorrido na história foi registrado no Chile, em 1960, com magnitude de 9,5 graus. Quantas vezes esse terremoto é mais forte que o registrado na notícia segundo o instituto geofísico peruano?

$\frac{10^{9,5}}{10^{7,5}} = 10^2 = 100.$

Figura 3.35: Produto final da pesquisa.

Para familiarizarmos a notação de logaritmos, apresentamos o conteúdo da seguinte forma:

Logaritmos.

Os logaritmos é uma forma diferente de escrever as potências facilitando as operações com estas. Quando estudamos anteriormente as equações exponenciais, podemos pensar: será que existe uma operação inversa a exponencial? A resposta está nos logaritmos, pois estes escrevem os expoentes de forma diferente.

Por exemplo:

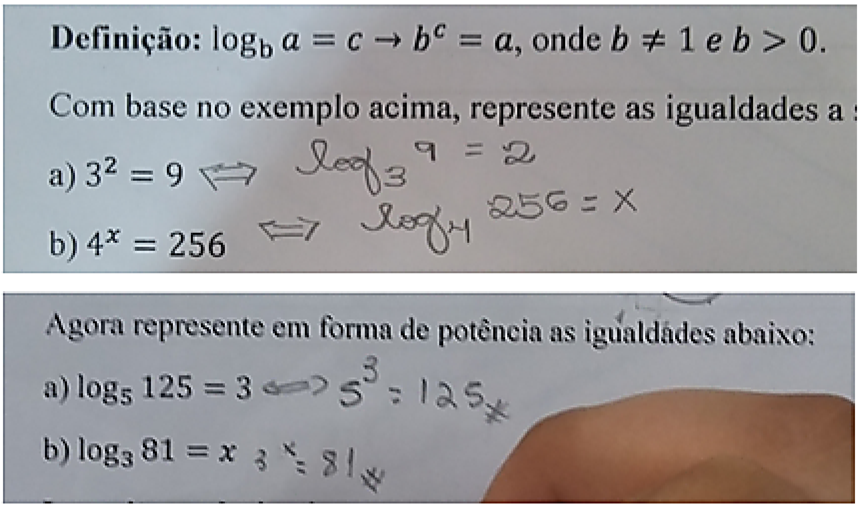
Sabemos que dois elevado ao cubo é igual a oito: $2^3 = 8$, mas se quiséssemos saber qual o expoente de dois cuja potência resulta em oito, precisaríamos do auxílio dos logaritmos, ou seja: $2^3 = 8 \Leftrightarrow log_2 8 = 3$. Note que a base de um é a mesma base do outro, o expoente de um é o logaritmo do outro e a potência de um é o logaritmando do outro.

Definição: Se $log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$, onde $b \neq 1$ e $b > 0$.

Com base no exemplo acima, represente as igualdades a seguir na forma de logaritmo:
a) $3^2 = 9$;
b) $4^x = 256$.

Agora represente em forma de potência as igualdades abaixo:
a) $log_5 125 = 3$;
b) $log_3 81 = x$

A figura 3.36 mostra a resolução dos alunos.


Definição: $\log_b a = c \to b^c = a$, onde $b \neq 1$ e $b > 0$.

Com base no exemplo acima, represente as igualdades a

a) $3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2$

b) $4^x = 256 \Leftrightarrow \log_4 256 = x$

Agora represente em forma de potência as igualdades abaixo:

a) $\log_5 125 = 3 \Rightarrow 5^3 = 125$

b) $\log_3 81 = x$ $3^x = 81$

Figura 3.36: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Logaritmos decimais.

Para iniciar nosso aprendizado sobre logaritmos decimais, vamos refletir à seguinte questão: É possível escrever qualquer número real positivo como uma potência de 10? Ou seja, dado um número real $N > 0$, é possível termos: $N = 10^n$?

Note que, com o auxílio dos logaritmos a resposta é sim, pois, se $N = 10^n$ então $n = log_{10}N = logN$. Vamos realiar alguns testes?

Atividade 1: Usando a calculadora do seu smartphone ou uma calculadora científica, complete a tabela a seguir, fazendo aproximações com até seis casas decimais:

$N(N = 10^n)$	$n(n = logN)$
1000	3
600	2,778151
300	2,477121
200	2,301029
100	1
60	1,778151
30	1,477121
20	1,301029
10	1
6	0,778151
3	0,477121
2	0,301029
1	0

A figura 3.37 mostra como foi realizada a construção da tabela de logaritmos.

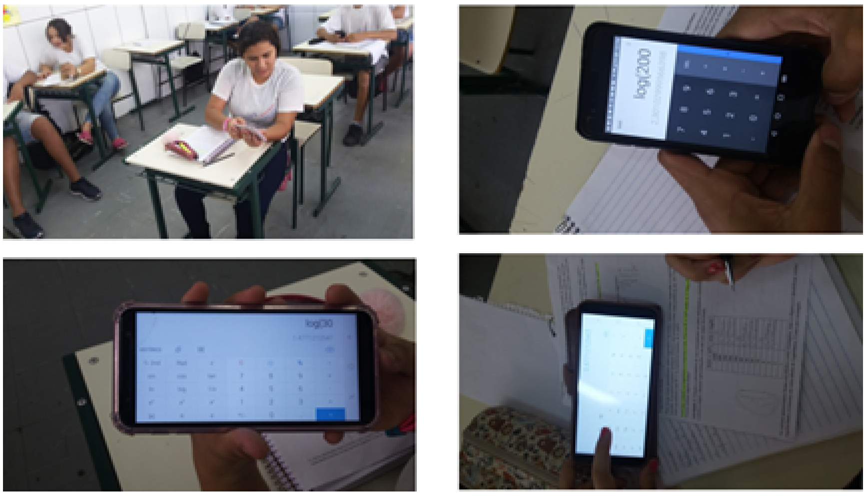
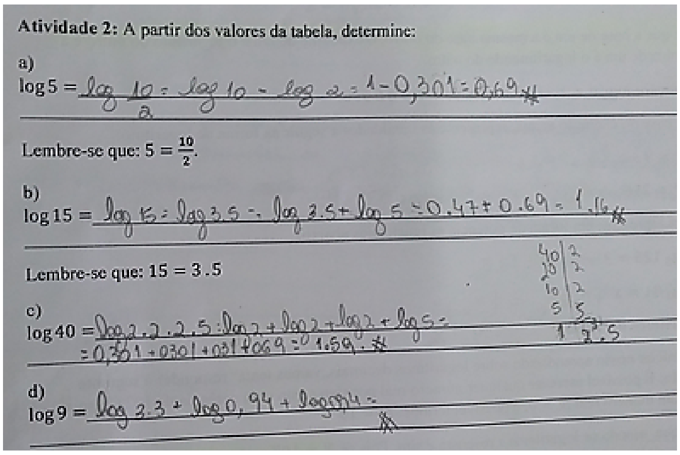


Figura 3.37: Construção da tabela de logaritmos.

Os valores apresentados foram escolhidos como exemplos, mas o objetivo é identificar certas regularidades existentes em uma tabela de logaritmos. Como, por exemplo: a razão (divisão) entre $\frac{200}{20} = 10$, a diferença entre seus logaritmos deve ser igual a 1, ou seja, eles têm a mesma parte decimal, diferindo apenas na parte inteira. Também notamos que, como $300 = 100.3$, então: $log\ 300 = log\ 100 + log\ 3$.

Atividade 2: A partir dos valores da tabela, determine:

a) $log\ 4$; b)$log\ 9$; c)$log\ 5$; d)$log\ 15$; e)$log\ 40$; f)$log\ 45$



Atividade 2: A partir dos valores da tabela, determine:

a)
log 5 = $\log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,69$

Lembre-se que: $5 = \frac{10}{2}$.

b)
log 15 = $\log 15 = \log 3.5 = \log 3.5 + \log 5 = 0.47 + 0.69 = 1,16$

Lembre-se que: 15 = 3 . 5

c)
log 40 = $\log 2.2.2.5 = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 5 =$
$= 0,301 + 0,301 + 0,301 + 0,69 = 1,59$

d)
log 9 = $\log 3.3 = \log 0,94 + \log 0,94 =$

Figura 3.38: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Atividade 3: Assim como escrevemos qualquer número real positivo $N = 10^n$, também podemos escrever esse mesmo número como uma potência de base a, com $a \neq 1$ e $a > 0$? Ou seja, dado um número real $N > 0$, podemos ter: $N = a^m \Leftrightarrow m = log_a N$?

Observe o exemplo:

i) Determine o resultado de: $log_2 32$.

Resolução: Como $32 = 2.2.2.2.2 = 2^5$, temos que $5 = log_2 32$.

Responda:

a) O resultado de $log_2\ 256$ é:

b) O valor de p para o qual se verifica a igualdade $log_p 16 = 4$ é:

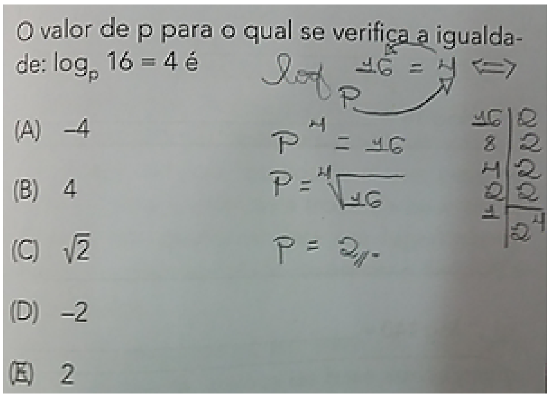


Figura 3.39: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Propriedades Fundamentais dos Logaritmos.

As atividades que serão desenvolvidas a seguir tem como objetivo o desenvolvimento das propriedades fundamentais. Nas atividades anteriores trabalhamos a ideia de algumas delas, como por exemplo no cálculo de $log9$ e $log5$. Dentre essas elencamos atividades que visam desenvolver com os alunos as propriedades da potência, raiz e mudança de base, como por exemplo determinar o valor de $log_2 3$. Dispondo de uma tabela de logaritmos decimais, é conveniente mudar a expressão para a base 10. Assim,

$$log_2\, 3 = \frac{log\ 2}{log\ 3} \cong \frac{0,30103}{0,47712} = 0,63093$$

Atividade 4: Utilizando as propriedades dos logaritmos determine o valor da expressão abaixo:

$$log_4 8 - log_2 \sqrt{8}$$

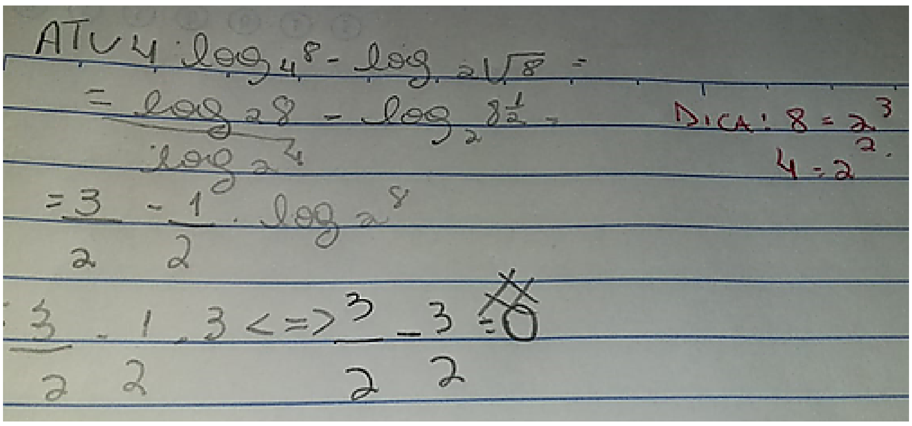


Figura 3.40: Exemplo de respostas de um dos alunos.

Para a resolução das próximas atividades, os alunos assistiram trechos de videoaulas que podem ser encontrados no endereço: portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=96.

Atividade 5: Determine o valor de x na equação:

$$log_5 x . log_{x^2-6}\, 5 = 1$$

Atividade 6: Se o crescimento de uma população é de 20 por cento ao ano, determine em quanto tempo essa população dobrará de tamanho. (Utilize $log\ 2 = 0,3$ e $log\ 3 = 0,48$).

Atividade 7: Vamos supor que a desvalorização de um determinado modelo de carro seja de 20 por cento ao ano, a partir de sua compra. Carlos comprou este modelo, pagando 40 mil reais. Depois de quanto tempo seu valor será 30 mil reais? (Utilize $log 2 = 0,3$ e $log 3 = 0,48$).

Formas de avaliação.

Nessa sequência didática foi realizada uma avaliação contínua durante o desenvolvimento de cada seção, juntamente com os alunos, auxiliando-os, tirando dúvidas e realizando as intervenções necessárias a partir dos seus questionamentos.

3.4 A função logarítmica como inversa da exponencial.

Área: Matemática.

Escola: Escola Estadual Osvaldo Martins - Osvaldo Cruz - SP.

Série: 1ª Série do Ensino Médio.

Título da Atividade: A função logarítmica como inversa da exponencial.

Número de Aulas Previstas: 5 aulas.

Habilidades a serem desenvolvidas: Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica como inversa da função exponencial.

Objetos de Aprendizagem (conteúdo): Logaritmos, definição e propriedades.

Materiais necessários para a aula: Atividades impressas, lousa, sala de informática, vídeos aula e jogos pedagógicos.

Questões Disparadoras: (Pesquisa)

1) O que são funções inversas? Pesquise quais são as definições de funções inversas.

2) As funções exponenciais e as funções logarítmicas são inversas uma da outra? Justifique usando as definições do item anterior.

A figura 3.41 mostra o desenvolvimento da pesquisa sobre funções inversas.

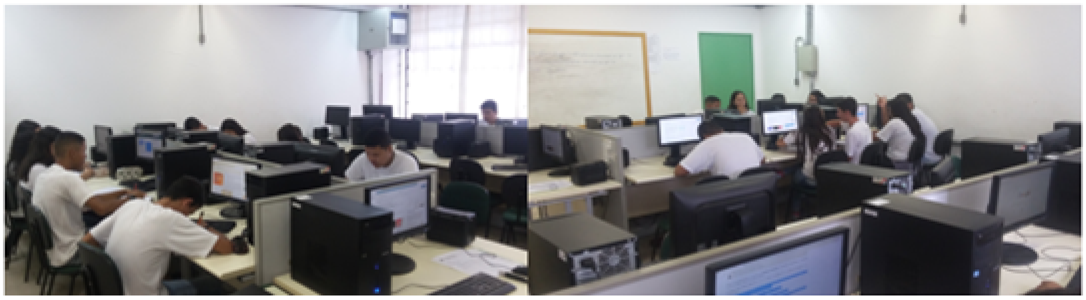


Figura 3.41: Pesquisa: Funções Inversas.

O objetivo dessa pesquisa é que os alunos concluam que se uma função f admite uma inversa f^{-1} então esta satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 3.1. $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Propriedade 3.2. $P(a,b) \in f \Leftrightarrow P'(b,a) \in f^{-1}$.

Propriedade 3.3. $f : A \to B \Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$.

No caso das funções exponenciais e logarítmicas é importante retomar os seguintes conceitos.

Definição: $log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, onde, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Da definição temos algumas consequências:

$c_1 : log_b 1 = 0;$
$c_2 : log_b b = 1;$
$c_3 : log_b a = log_b c \Leftrightarrow a = c;$
$c_4 : log_b b^m = m;$
$c_5 : b^{log_b a} = a.$

Considerando as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

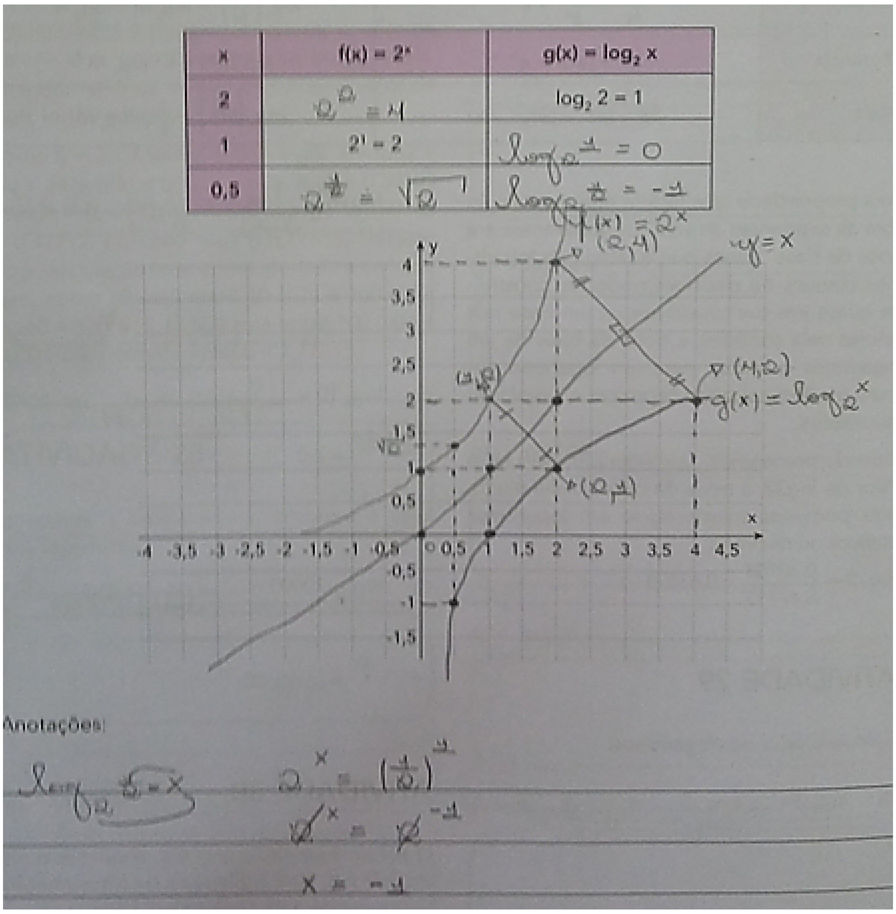
$f(g(x)) = b^{log_b x} = x$ e $g(f(x)) = log_b b^x = x$.

Sabemos que a função exponencial pode ser definida como:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = b^x$. Então para que a função logarítmica seja inversa da exponencial, definimos como uma função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = log_b x$, onde $b > 0$ e $b \neq 1$ em ambos os casos.

Para construirmos o gráfico de uma função logarítmica, podemos realizar a construção a partir do gráfico da função exponencial visto que uma é inversa da outra. As figuras 3.42, 3.43 e 3.44 ilustram a construção dos gráficos de algumas funções logarítmicas realizadas pelos alunos.

Atividade 1: Complete a tabela abaixo e construa o gráfico de ambas as funções.



x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \log_2 x$
2	$2^2 = 4$	$\log_2 2 = 1$
1	$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$
0,5	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$

Figura 3.42: Gráfico de $f(x) = log_2 x$.

Atividade 2: Complete a tabela abaixo (se necessário utilize uma calculadora).

x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_3 x$	$h(x) = \log_4 x$	$q(x) = \log_5 x$
1	$\log_2 1 = 0$, pois $2^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$	$\log_4 1 = 0$	$\log_5 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$	$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30103}{0{,}47712} \cong 0{,}63093$	0,5	0,43
3	$\log_2 3 = 1{,}58$	$\log_3 3 = 1$	$\log_4 3 = 0{,}79$	$\log_5 3 = 0{,}68$
4	$\log_2 4 = 2$	$\log_3 4 = 1{,}26$	$\log_4 4 = 1$	$\log_5 4 = 0{,}84$
5	$\log_2 5 = 2{,}32$	$\log_3 5 = 1{,}46$	$\log_4 5 = 1{,}16$	$\log_5 5 = 1$

Figura 3.43: Tabela construída por um dos alunos.

Atividade 3: Construa os gráficos das funções presentes na tabela da atividade anterior utilizando o Geogebra.

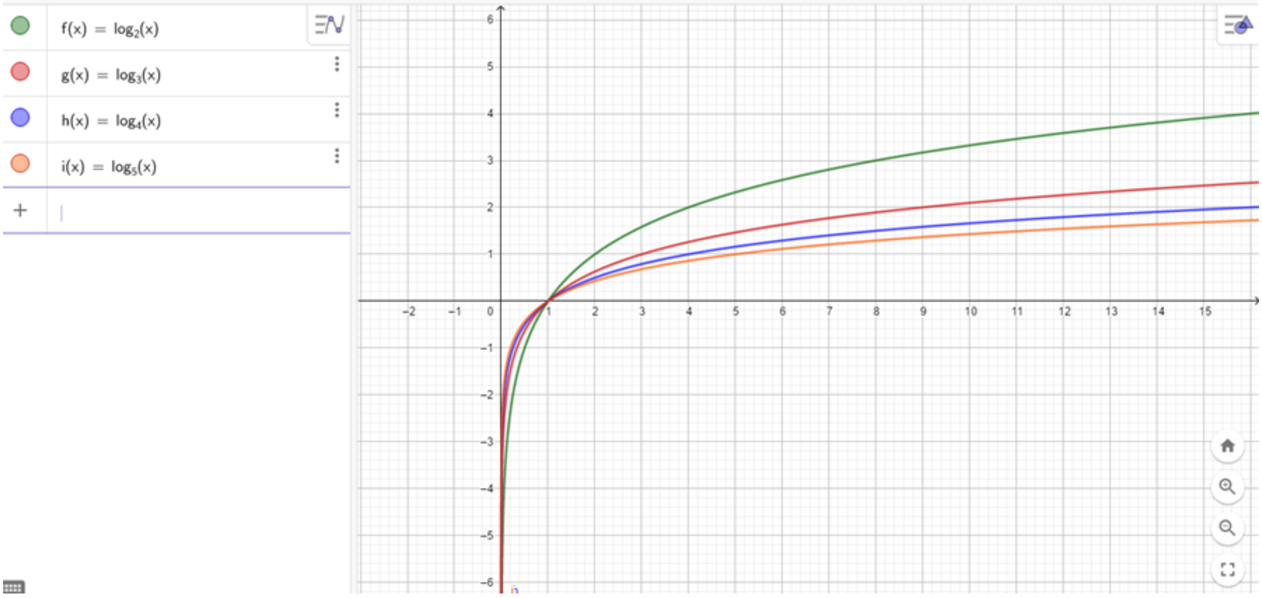


Figura 3.44: Gráficos construídos por um dos alunos.

Para a construção do gráfico de uma função logarítmica $f(x) = log_a x$ em que $0 < a < 1$, levamos os alunos para assistirem alguns videoaulas que podem ser encontrados no endereço: portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=96.

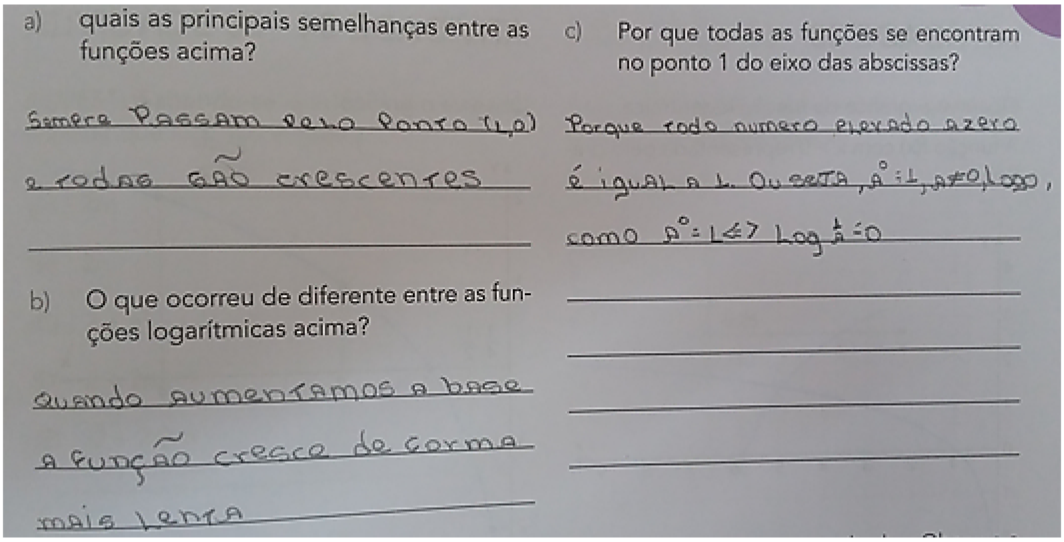
Após as resoluções das atividades os alunos foram levados a refletir sobre algumas questões que envolvem o comportamento do gráfico de uma função logarítmica, como:

1) Quais as principais semelhanças entre os gráficos das funções logarítmicas das atividades anteriores?

2) O que ocorreu de diferente nos gráficos das funções logarítmicas das atividades anteriores?

3) Por que todas as funções se encontram no ponto 1 do eixo das abscissas?

A figura 3.45 mostra a reflexão de um dos alunos.



a) quais as principais semelhanças entre as funções acima?

Sempre passam pelo ponto (1,0) e todos são crescentes

b) O que ocorreu de diferente entre as funções logarítmicas acima?

quando aumentamos a base a função cresce de forma mais lenta

c) Por que todas as funções se encontram no ponto 1 do eixo das abscissas?

Porque todo numero elevado a zero é igual a 1. Ou seja, $a^0 = 1, a \neq 0$, logo, como $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Figura 3.45: Resposta obtida por um dos alunos.

Contextualização: A torre de Hanói.

O objetivo deste jogo consiste em deslocar todos os discos da haste onde se encontram para uma haste diferente, respeitando as seguintes regras:

1. Deslocar um disco de cada vez, o qual deverá ser o topo de uma das três hastes;

2) Cada disco nunca poderá ser colocado sobre outro de menor diâmetro.

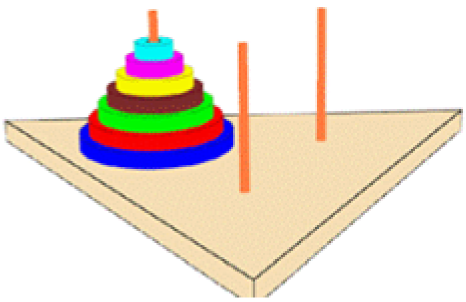


Figura 3.46: Imagem Ilustrativa.

Queremos aqui analisar a quantidade de movimentos m necessários para deslocar a torre com n discos para outra haste. As figuras 3.47 e 3.48 mostram o desenvolvimento do jogo utilizando uma torre de Hanói adaptada com quatro discos.

Figura 3.47: Desenvolvimento do jogo.

Figura 3.48: Desenvolvimento do jogo.

Após o desenvolvimento do jogo, foram propostos para os alunos as seguintes atividades.

Atividade 4: Preencha a tabela a seguir associando a quantidade mínima de movimentos m com a respectiva quantidade de discos n da torre de Hanói.

Quantidade de discos n	0	1	2	3	4	5	...	n
Quantidade de movimentos m	0	1	3	7	15	31		$2^n - 1$

Responda:

a) Quantos movimentos no mínimo, seriam necessários para resolver uma Torre de Hanói com 6 discos?

b)Uma Torre de Hanói pode ser resolvida realizando no mínimo 255 movimentos. Quantos discos possui essa torre?

Atividade 5: Utilizando o Geogebra, represente no plano cartesiano os pontos de coordenadas (n, m) e os pontos de coordenadas (m, n) da tabela da atividade anterior.

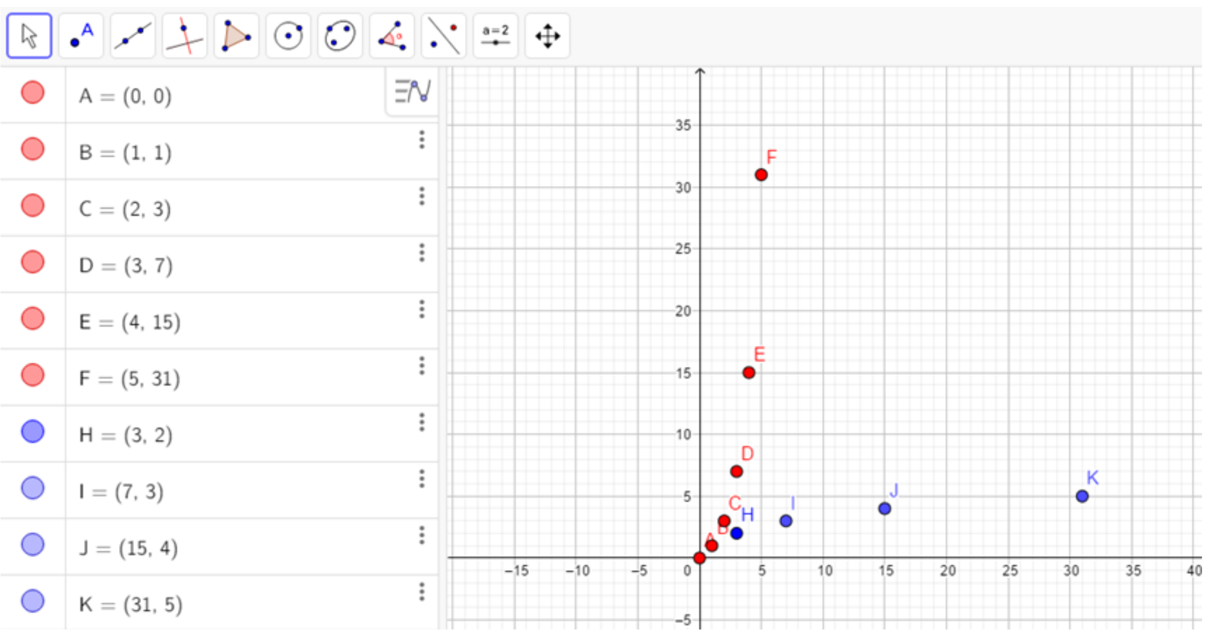


Figura 3.49: Exemplo de resposta.

Com o desenvolvimento dessa atividade esperamos que os alunos observem que os pontos de coordenadas (n, m) apresentam um crescimento exponencial e que, os pontos de coordenadas (m, n) apresentam um crescimento em escala logarítmica, ou seja, se dada a quantindade n de discos da torre, a respectiva quantidade mínima de movimentos m para resolver a torre pode ser obtida por $m = 2^n - 1$, e dada a quantidade mínima de movimentos, a respectiva quantidade de discos pode ser obtida por $n = log_2(m + 1)$ ou, simplesmente resolvendo uma equação exponencial, já que, nesse contexto devemos ter $m, n \in \mathbb{N}$. Podemos ainda ir além, obviamente os pontos de coordenadas (n, m) e de coordenadas (m, n) não representam uma função contínua porém, pertencem as funções $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = log_2(x + 1)$ respectivamente. Tal situação está representada na figura 3.50.

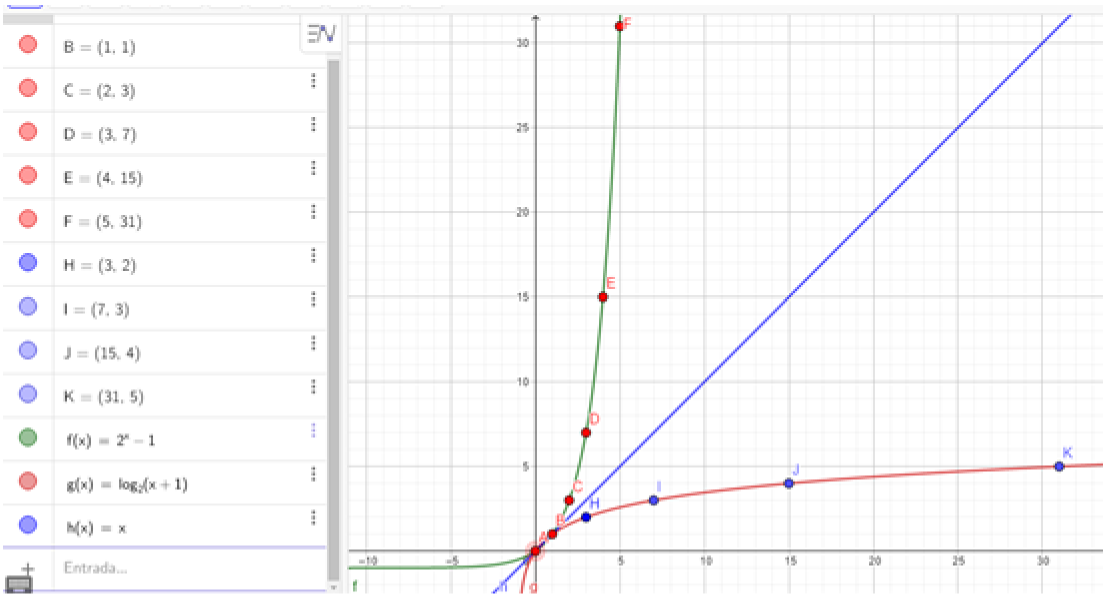


Figura 3.50: Exemplo de resposta.

Formas de avaliação.

Nessa sequência didática foi realizada uma avaliação contínua durante o desenvolvimento de cada seção, juntamente com os alunos, auxiliando-os, tirando dúvidas e realizando as intervenções necessárias a partir dos seus questionamentos.

3.5 Avaliação da Aprendizagem

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica. Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do aluno. Neste sentido, as questões que constam na avaliação, procuram verificar o nível de desenvolvimetno das habilidades descritas nas sequências didáticas trabalhadas até o momento. Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente. Com base nas particularidades dos alunos envolvidos propomos uma avaliação elaborada utilizando a plataforma forms na forma de um questionário, onde foram colhidos os resultados de maneira a ter uma visão geral da turma avaliada, refletindo sobre o que realmente os alunos aprenderam e o que ainda precisam aprender.

Nessa avaliação priorizamos as seguintes habilidades:

1) Conhecer o operar com as propriedades das operações com potências de expoentes inteiros.
2) Reconhecer a potenciação em situações contextualizadas.
3) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
4) Saber resolver equações simples, usando propriedades de potências e logaritmos.
5) Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.
6)Resolver situações problemas envolvendo função exponencial e logarítmica.
7) Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.
8) Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica como inversa da exponencial.

As figuras a seguir ilustram os resultados obtidos nessa avaliação.

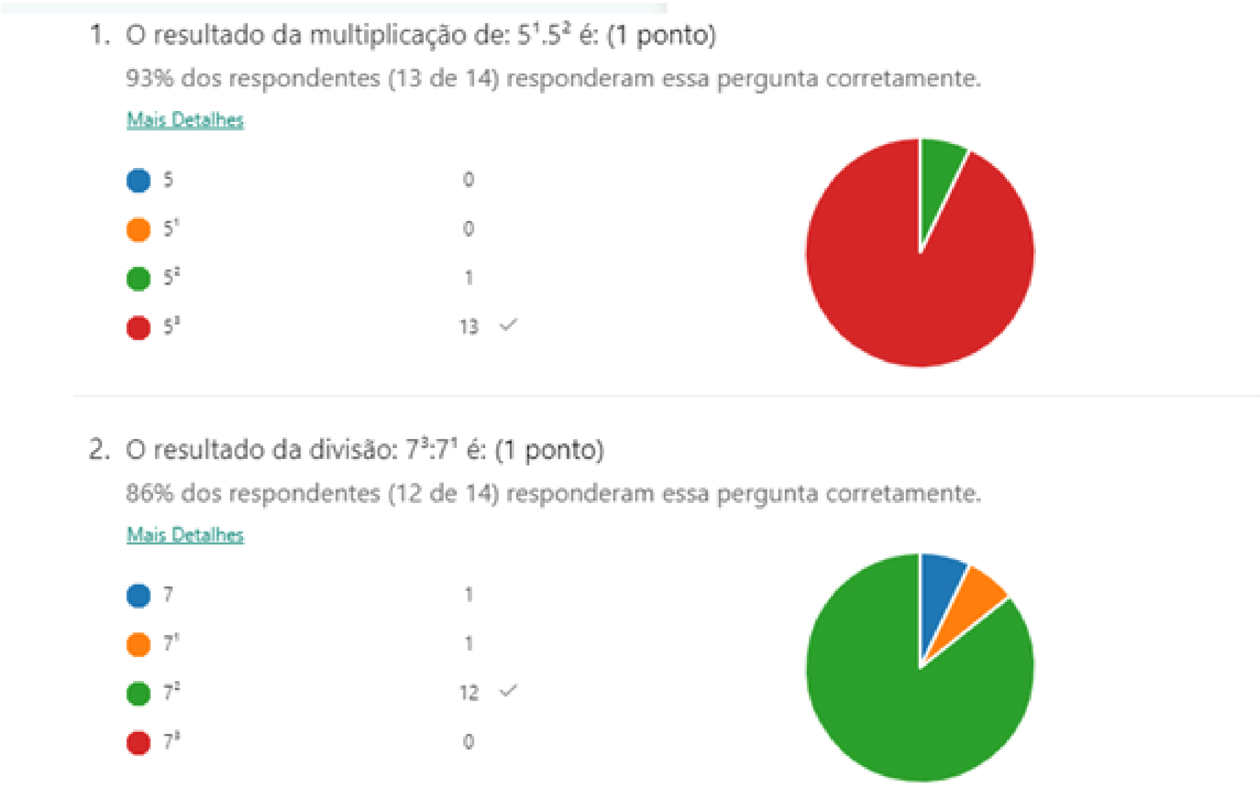


Figura 3.51: Habilidade 1.

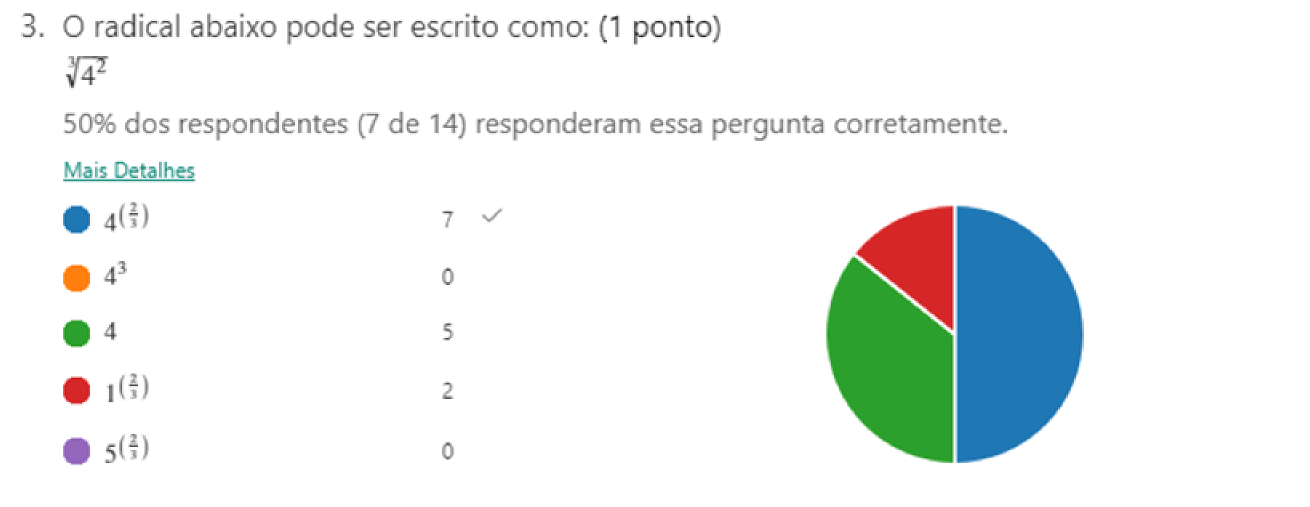


Figura 3.52: Habilidade 3.

4. O prédio onde Jacira mora tem 4 andares, em cada andar há 4 apartamentos, para cada apartamento há 4 vagas na garagem. O número de vagas desse prédio é: (1 ponto)

64% dos respondentes (9 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

12	1
16	2
32	1
48	1
64	9 ✓

Figura 3.53: Habilidade 2.

5. O valor de x na equação é: (1 ponto)

$3^{x-1} = 27$

36% dos respondentes (5 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

$x = 4$	5 ✓
$x = 5$	0
$x = 1$	0
$x = 10$	1
$x = 9$	8

Figura 3.54: Habilidade 4.

6. Observe o gráfico a seguir: (1 ponto)

93% dos respondentes (13 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

$f(x) = 3^x$	13 ✓
$g(x) = 3x$	1
$h(x) = 2^x$	0
$i(x) = 2x$	0
$j(x) = x^2$	0

Figura 3.55: Habilidade 5.

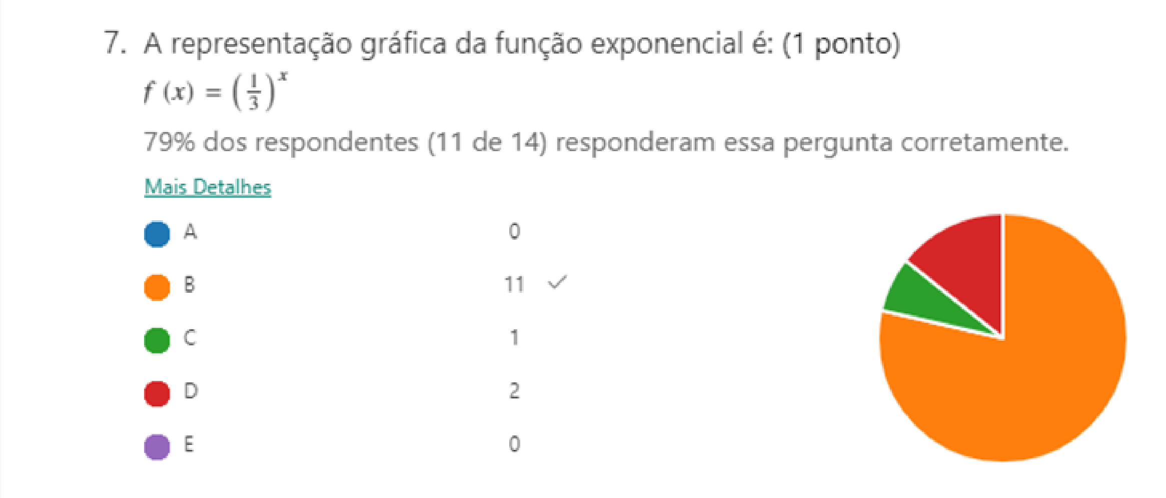


Figura 3.56: Habilidade 5.

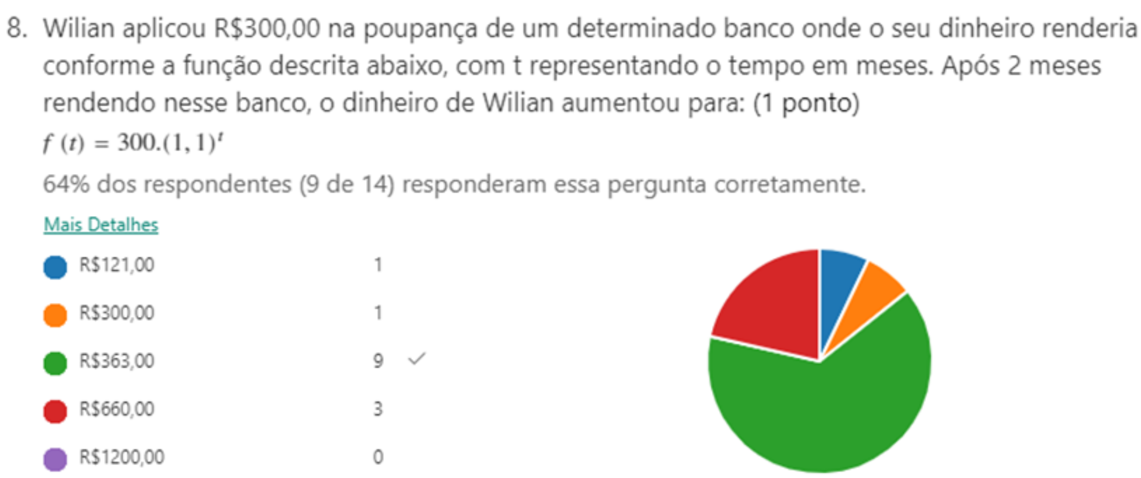


Figura 3.57: Habilidade 6.

9. A Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. A área ocupada por essa planta, em metros quadrados, obedece a função descrita abaixo, onde x representa o tempo, em dias, após a inserção da 1ª Vitória-régia num determinado lago. Após 8 dias da inserção de uma Vitória-régia num lago, a área ocupada por essas plantas será de: (1 ponto)

$f(x) = 3.2^x$

43% dos respondentes (6 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

$6\ m^2$	2	
$24\ m^2$	0	
$48\ m^2$	2	
$256\ m^2$	4	
$768\ m^2$	6	✓

Figura 3.58: Habilidade 6.

10. Considerando que log2=0,3 e log3=0,48, o valor de log12 é igual a: (1 ponto)

43% dos respondentes (6 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

$0,3$	1	
$0,48$	0	
$0,78$	6	
$1,08$	6	✓
$1,1$	1	
$1,3$	0	

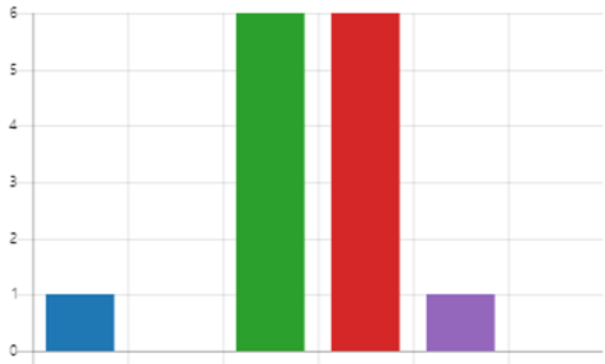


Figura 3.59: Habilidade 7.

11. Sejam x e y números reais tais que (1 ponto)

$x > 0$ *e* $0 < y \neq 1$. *Se* $\log_y x = 3$, *então o valor de* $\log_y x^4$ é :

36% dos respondentes (5 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

3	2	
4	2	
7	0	
10	5	
12	5	✓

Figura 3.60: Habilidade 7.

12. Sabendo que o valor aproximado de log2=0,3, então o valor aproximado de log5 é: (1 ponto)

43% dos respondentes (6 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

0,5	2	
0,6	6	
0,7	6	✓
0,8	0	
0,9	0	

Figura 3.61: Habilidade 7.

13. As funções exponenciais e logarítmica são consideradas funções inversas. Indique a alternativa que apresenta o gráfico da funções f e de sua inversa g indicadas a seguir. (1 ponto)

$f(x) = 2^x;\ g(x) = \log_2 x$

43% dos respondentes (6 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

A	6	✓
B	2	
C	5	
D	0	
E	1	

Figura 3.62: Habilidade 8.

14. Assinale o gráfico que representa a função (1 ponto)

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

50% dos respondentes (7 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

A	2	
B	2	
C	1	
D	7	✓
E	2	

Figura 3.63: Habilidade 8.

15. Vamos supor que a desvalorização de um determinado modelo de carro seja de 20% ao ano, a partir de sua compra. Carlos comprou este modelo, pagando 80 mil reais. Depois de quanto tempo seu valor será 60 mil reias? (1 ponto)

$Utilize: \ \log 2 = 0,3; \ \log 3 = 0,48$

43% dos respondentes (6 de 14) responderam essa pergunta corretamente.

Mais Detalhes

$0,5$ *ano*	1	
1 *ano*	2	
$1,2$ *anos*	6	✓
2 *anos*	2	
3 *anos*	3	

Figura 3.64: Habilidade 6.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação básica no Brasil apresenta desafios de várias ordens, as quais: estruturais, pedagógicos, financeiros, sociais, culturais, entre outros. Ainda vivemos com questões antigas que já deveriam ter sido enfrentadas e resolvidas, porém se arrastam sem solução. Analfabetismo, analfabetismo funcional, péssima qualidade de ensino básico público, evasão escolar, principalmente, no ensino médio.

Por se tratar de um dos tópicos matemáticos previsto para o ensino médio e com possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento, a função exponencial e sua inversa, a função logarítmica, ganha relevo em seus principais aspectos do processo de ensino-aprendizagem, quando trata-se de contextualização e da importância do uso dessa ferramenta no nosso cotidiano. No presente estudo nos preocupamos com a heterogeneidade de uma sala de aula nos dias atuais. Turmas heterogêneas são realmente um desafio, elas nos ensinam a lidar com diferentes tipos de aprendizagens. Uns aprendem rápido, aprendem com metodologias diferentes e contextualizadas, outros não. É importante analisar cada aluno para diagnosticar o seu ritmo de aprendizagem, quais são seus conhecimentos prévios em relação ao tema a se estudar para saber qual é a melhor maneira e de que forma essa aprendizagem deve acontecer. Um outro desafio para as instituições de educação básica na atualidade esta em como lidar de maneira precisa e eficiente com os alunos que possuem necessidades especiais, no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem, em como incluir de fato esses alunos em nossas aulas, oferecendo aos mesmos uma aprendizagem significativa.

Com o objetivo de minimizar ao máximo consequências geradas por tais problemas e, estruturados no que propõem os currículos estaduais e nacionais, elaboramos e aplicamos sequências didáticas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas com alunos da primeira série do ensino médio. Em cada sequência aplicada buscamos realizar o diagnóstico dos conhecimentos prévios com o objetivo de verificar aquilo que o estudante já sabe sobre o que se propõe ensinar, valorizar os conhecimentos já adquiridos em outras situações de aprendizagem - formais ou não - e de considerá-los nas próximas atividades e etapas das sequências didáticas.

No trabalho apresentado buscou-se uma aproximação do conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas com as diferentes formas e ritmos de aprendizagens, buscando utilizar não apenas aulas tradicionais mas, também fazendo uso de tecnologias visto serem recursos amplamente utilizados pelos discentes dos dias atuais, bem como o uso de materiais concretos. Vimos que, quando diferenciamos as aulas e nos preocupamos em dar significado ao que propomos a ensinar, os discentes tendem a participar de forma mais efetiva. O grande desafio do professor nos dias atuais está em justificar a importância e para que serve o que ele está ensinando.

As atividades que aplicamos propõe aos discentes, pesquisas, aplicações no cotidiano, notícias atuais que abordam o tema, com o objetivo de que o próprio aluno também busque significados sobre o tema que deve aprender.

Dessa maneira, analisando a reação dos alunos perante tais aulas e o envolvimento dos mesmos com o tema lecionado, percebemos que houve boa participação. Os resultados obtidos com a aplicação das atividades na forma de sequências didáticas, tendo como base a avaliação da aprendizagem foi bom, comparando-os com turmas distintas. Muitas dificuldades foram superadas no decorrer das atividades, porém percebemos que ainda há muito a ser feito, pois o aproveitamento em habilidades que exigem maior aprofundamento do tema ainda não apresentaram resultados satisfatórios, daremos continuidade a esse trabalho em forma de intervenções pedagógicas visando superá-los.

CAPÍTULO 5

REFERÊNCIAS

1. LIMA, E.L. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

2. HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

3. IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol. 1. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2008.

4. IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol. 2. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2007.

5. LIMA, E.L. **Logaritmos**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

6. STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. Americana. 3. reimpr. da 2. ed. brasileira de 2010.

7. NETO, A.P. **Potenciação**. Material teórico - Módulo de Potenciação e Dízimas Periódicas: Portal da Matemática - OBMEP, 2015.

8. NETO, A.P. **Função logarítmica e propriedades - partes 1, 2 e 3**. Material teórico - Módulo de função logarítmica: Portal da Matemática - OBMEP, 2019.

9. BRASIL, Secretaria da Educação: **SP Faz Escola - Caderno do Professor**. Matemática - 3. bimestre. São Paulo, 2019.

10. BRASIL, Ministério da Educação: **BNCC - Base Nacional Comum Curricular:** ensino médio - matemática. Brasília; MEC, 2017.

11. BRASIL, Secretaria da Educação: **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias: ensino médio. 1. ed. São Paulo, 2011.

12. SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria da Educação: **Matriz de avaliação processual; encarte do professor**. São Paulo: SE, 2016.

13. SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria da Educação: **Avaliação da aprendizagem em processo:** 1. série do ensino médio - matemática, 24. ed.; São Paulo, 2019.

14. ZUFFI, E.M. **Artigo: Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. São Paulo, 2016.

15. SÃO PAULO (ESTADO), Secretaria da Educação: **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo:** Caderno do Professor - Matemática: 1. série do ensino médio, vol. 2, nova ed. 2014 - 2017, São Paulo: SE, 2014.

16. TODA MATÉRIA; **Desenvolvimento Embrionário Humano**. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/desenvolvimento-embrionario-humano/> Acesso em: 30/09/2019.

17. EL PAÍS, **Terremoto sacode Peru e países vizinhos e é sentido em Manaus**. Bogotá - 26 de maio de 2019. Disponível em:<https://brasil.elpais.com/tag/terremotos> Acesso em: 15/10/2019.

18. JORNAL DA USP, **Os desafios da educação no Brasil**. Disponível em:

<https://jornal.usp.br/especiais/os-desafios-da-educacao-no-brasil/> Acesso em: 30/10/2019.

19. EVES, H. **Introdução à história da matemática / Howard Eves**; tradução Hygino H. Domingues, 5. ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.