UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Deyvison Eduardo Valadares da Costa

Isometrias na Reta e no Plano

Ouro Preto

2020

DEYVISON EDUARDO VALADARES DA COSTA

Isometrias na Reta e no Plano

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Juliano Soares A. Dias
Coorientadora: Prof^{a}. M^{a}. Monique Rafaella A. Oliveira

Ouro Preto
2020

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C837i Costa, Deyvison Eduardo Valadares da.
Isometrias na reta e no plano . [manuscrito] / Deyvison Eduardo Valadares da Costa. - 2020.
76 f.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Soares Amaral Dias.
Coorientadora: Profa. Ma. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Matemática.
Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Geometria plana. 2. Isometria (Matemática) - Reflexão. 3. Isometria (Matemática) - Reflexão com Deslizamento. I. Dias, Juliano Soares Amaral. II. Oliveira, Monique Rafaella Anunciação de. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 514.112

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

Isometrias na Reta e no Plano

Autor(a): Deyvison Eduardo Valadares da Costa

Dissertação defendida e aprovada em **17 de janeiro de 2020** pela banca examinadora constituída pelos professores:

____
Professor(a) Dr. Juliano Soares Amaral Dias - Orientador
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira
Professor(a) Ma. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira - Coorientadora
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Vitor Luiz de Almeida
____
Professor(a) Dr. Vitor Luiz de Almeida
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

____
Professor(a) Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Dedico este trabalho a Deus, o Nosso Criador, por mais esta vitória;
ao amor do meu todo sempre, minha esposa Francine de O. S. V. Costa, pelo amor, pelo cuidado, pela compreensão, pelo apoio em todos os momentos, enfim, por tudo que fez por mim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me conceder o dom da vida e por colocar pessoas tão abençoadas para fazer parte da minha vida.

Agradeço ao amor do meu todo sempre, minha esposa Francine de O. S. V. Costa, pelo amor, cuidado, compreensão, companheirismo, motivação e apoio em todos os momentos, pois este curso exigiu muitas e muitas horas de dedicação fazendo com que não tivéssemos muito tempo juntos. Muito obrigado meu eterno Amor!!!

Às minhas amadas mães: Maria da Conceição V. Costa, Mirtes Conceição C. Carvalho, Maria Inez C. Monteiro e Nadir Valadares da Costa, por terem me criado tão bem.

Ao meu pai Manoel Lucas da Costa (in memoriam) e aos meus irmãos José Eustáquio Valadares Costa e Vilson Valadares da Costa que participaram da minha criação.

Aos meus amigos e colegas de classe, pelo companheirismo nesse tempo que passamos juntos.

Aos meus amigos, Imaculada e Jânio, pelo companheirismo, pelo apoio, pela motivação e pelas horas e horas de estudos juntos.

Aos professores que foram fundamentais na minha formação acadêmica, principalmente ao professor Dr. Edney de Oliveira que nos compartilhou muito mais do que conteúdo acadêmico. Este nos é um exemplo de humildade, respeito ao próximo e profissionalismo. Que você continue sendo essa pessoa maravilhosa!

Aos meus orientadores, profª. Mª. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira e prof. Dr. Juliano Soares Amaral Dias, pela paciência, pela atenção, pela disponibilidade e pelas contribuições que possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Aos professores Geraldo César Gonçalves Ferreira e Vitor Luiz de Almeida (membros da banca) pela presença e pelas sugestões finais que melhoraram ainda mais nosso trabalho.

Aos meus familiares (também familiares da minha esposa) que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste sonho.

Às demais pessoas que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

O objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo sobre as isometrias na reta e no plano. Os tipos de isometrias que estudamos na reta foram a translação e a reflexão. Já no plano, estudamos a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão com deslizamento. Apresentamos as definições, os principais teoremas e algumas aplicações referentes a cada isometria na reta e no plano. Além disso, apresentamos a classificação das isometrias, sendo próprias e impróprias. Apresentamos também dois teoremas importantes, sendo um aplicado na reta e o outro aplicado no plano. O primeiro teorema garante a existência de apenas dois tipos de isometrias na reta além da função identidade, e o segundo teorema garante a existência de apenas quatro tipos de isometrias no plano além da função identidade. Para finalizar, sugerimos uma sequência didática, com o uso do software matemático GeoGebra, para consolidação do conteúdo estudado em sala de aula sobre isometrias na reta e no plano.

Palavras-chave: Geometria euclidiana plana. Isometrias na reta. Isometrias no plano. Translação. Rotação. Reflexão. Reflexão com deslizamento.

Abstract

The objective of our work is to make a study on the isometries of the line and plane. The types of isometries we studied in the line were translation and reflection. In the plane, we study the translation, the rotation, the reflection and the sliding reflection. We present the definitions, the main theorems and some applications concerning each isometry of the line and the plane. In addition, we present the classification of isometries, being proper and improper. We also present two important theorems, one applied to the straight line and the other applied to the plane. The first theorem guarantees the existence of only two types of isometries of the line beyond the identity function, and the second theorem guarantees the existence of only four types of isometries of the plane beyond the identity function. Finally, we suggest a didactic sequence, using the GeoGebra mathematical software, to help update the content studied in the classroom about isometries of the line and plane.

Keywords: Plane euclidean geometry. Isometries of the line. Isometries of the plane. Translation. Rotation. Reflection. Sliding Reflection.

Conteúdo

Lista de Figuras

1 Introdução

A Matemática está presente nos mais variados ramos da sociedade como comércio, arquitetura, engenharias, arte, música etc. Portanto, o saber matemático é de fundamental importância para o desenvolvimento de uma sociedade.

Infelizmente, ao longo dos anos, a educação básica brasileira não teve a evolução esperada. Esse fato pode ser constatado nos dados do Pisa[1] em [2] e [10] que mostram que na última avaliação, em 2018, o Brasil caiu no Ranking e está entre os 10 piores desempenhos do mundo em Matemática. Esses dados mostram que os alunos estudam anos e anos na educação básica brasileira e não consolidam o conteúdo básico da Matemática.

Acreditamos que essa depreciação do ensino brasileiro, principalmente no ensino da Matemática, deve-se a vários fatores como falta de investimento, fatores políticos, falta de acompanhamento dos pais em relação à vida estudantil dos filhos, desvalorização do professor perante à sociedade, falta de aperfeiçoamento dos professores e pelo desinteresse dos discentes.

Buscamos contribuir, através deste trabalho, na melhora do entendimento, compreensão e consolidação do conteúdo matemático básico referente às transformações que um ponto, um segmento, uma semirreta, uma reta, enfim, que uma figura pode sofrer sem perder suas propriedades originais. Focaremos nas transformações isométricas, isto é, as transformações que preservam distâncias. Essas transformações muitas vezes nos auxiliam no encontro de caminhos distintos para resolver determinados problemas geométricos.

Inicialmente, fizemos um levantamento bibliográfico comparando as diferentes abordagens de definições e propriedades de isometrias na reta e no plano, tendo como principais referências [7] e [11].

Algumas dissertações apresentadas por alunos do PROFMAT de várias instituições têm como tema isometrias, contudo há diversas abordagens distintas do assunto conforme veremos a seguir. Alguns abordam as isometrias somente no plano, como nos trabalhos apresentados por [4] e [12]. Já os trabalhos apresentados por [3] e [6] também tratam apenas as isometrias no plano, porém, usando coordenadas cartesianas para abordar tal assunto. E o trabalho apresentado por [8] aborda as isometrias no plano e no espaço. Todos os trabalhos citados têm em comum algumas demonstrações usando álgebra linear.

[1] Realizado a cada três anos, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) tem o objetivo de gerar indicadores que possam contribuir para a discussão da qualidade educacional nos países participantes. Assim, políticas de desenvolvimento para o ensino básico podem ser subsidiadas.

Em nosso trabalho, apresentamos as definições e fizemos as demonstrações sem usar álgebra linear. Isso possibilita ao professor a abordagem desse conteúdo tanto em séries/anos do ensino fundamental, em que não se estudou conteúdos sobre vetores, quanto em séries/anos do ensino médio e ensino superior, ficando assim, a cargo do professor introduzir ou não esse conceito. Além disso, decidimos abordar as isometrias inicialmente na reta e posteriormente no plano. Iniciando o estudo das isometrias na reta, acreditamos que o aluno terá mais facilidade para compreender e assim, consolidar as definições e propriedades de isometrias que posteriormente serão ampliadas no plano.

Posteriormente, sugerimos atividades práticas, com a utilização do software matemático GeoGebra, que possibilita o desenvolvimento do raciocínio geométrico e, a partir daí, a consolidação de conteúdos trabalhados em sala sobre isometrias. Além disso, o uso da tecnologia visa despertar o interesse e motivar os discentes além de facilitar a investigação, comparação e visualização das propriedades matemáticas trabalhadas em sala de forma dinâmica, contribuindo assim para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático.

Iniciamos o capítulo 2 apresentando os conceitos básicos sobre Geometria euclidiana plana que são necessários no decorrer do nosso trabalho. Neste capítulo, também abordamos notações, definições, postulados e teoremas fundamentais para demonstrações nos capítulos 3 e 4.

No capítulo 3, abordamos as isometrias na reta. Apresentamos algumas propriedades das isometrias, sendo a translação e a reflexão, além da identidade, os dois tipos de isometrias existentes. Finalizamos o capítulo com exemplos de aplicações dessas isometrias. No capítulo 4, abordamos as isometrias no plano que são a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão com deslizamento. Apresentamos algumas propriedades das isometrias no plano e exemplos de aplicações das isometrias citadas acima, e as classificamos como própria ou imprópria.

Finalmente, no capítulo 5, sugerimos uma sequência didática com atividades práticas para serem realizadas em laboratório de informática, usando o software matemático GeoGebra para construções, comparações e manipulações de figuras, possibilitando assim, a consolidação de conceitos, definições e propriedades de isometrias na reta e no plano estudados em sala. Sugerimos este recurso tecnológico para despertar o interesse e motivar os alunos, por ser uma proposta de aula diferenciada. Além disso, esse software facilita a visualização das propriedades, pois trata-se de um software dinâmico e de fácil manuseio, além de ser gratuito. Em nosso trabalho, utilizamos tal software para construir todas as figuras apresentadas.

2 Noções Básicas em Geometria Plana

Apresentaremos, neste capítulo, algumas noções básicas em geometria plana que serão de fundamental importância para compreensão das demonstrações de isometrias contidas nos capítulos 3 e 4.

2.1 Notações

Nos próximos capítulos serão apresentados definições, teoremas, demonstrações de teoremas e alguns exemplos que usarão notações que pontuaremos a seguir.

Para pontos, retas e segmentos de retas usaremos letras latinas. Já para planos e medidas de ângulos, usaremos letras gregas. Os pontos e as retas serão indicados, respectivamente, por letras maiúsculas e minúsculas. Por exemplo: A e B são pontos enquanto r e s são retas.

Já os segmentos de reta e os triângulos, serão indicados, respectivamente, por duas e três letras maiúsculas. Temos que AB e ABC são, respectivamente, um segmento de reta com extremidades nos pontos A e B e um triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C.

Os planos e as medidas de ângulos serão indicados por letras gregas maiúsculas e minúsculas respectivamente. Por exemplo, Π e Φ são planos enquanto π e ϕ são medidas de ângulos.

Para indicar a distância entre dois pontos A e B quaisquer ou o comprimento do segmento de reta AB usaremos $\overline{AB}$. Note que, neste caso, temos que a distância de A a B é a mesma distância de B a A, logo o comprimento de um segmento AB é o mesmo do segmento BA, isto é, $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Para um ângulo entre dois segmentos quaisquer OA e OC, usaremos a notação $\angle AOC$ tal que O é o vértice do ângulo.

Três pontos colineares serão indicados por letra maiúscula, traço, letra maiúscula, traço, letra maiúscula. Por exemplo, $A - B - C$ representa três pontos colineares em que o ponto B está entre os pontos A e C.

Indicaremos uma circunferência por uma letra grega maiúscula seguida do seu centro e seu raio ou simplesmente por uma letra grega maiúscula. Por exemplo, $\Lambda(C,r)$ representa uma circunferência que tem centro C e raio r. Quando não precisarmos explicitar o centro e o raio, a circunferência poderá ser denotada simplesmente por Λ.

Para indicar a congruência[1] entre entes geométricos, usaremos o símbolo $\cong$. Daí, se os triângulos ABC e DEF são congruentes, ou se AB e CD são congruentes, então indicaremos respectivamente como $ABC \cong DEF$ e $AB \cong CD$.

Observação 2.1.1. *Em algumas demonstrações, para indicar uma reta r que passa por dois pontos distintos quaisquer A e B, usaremos a notação $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $r = \overleftrightarrow{AB}$.*

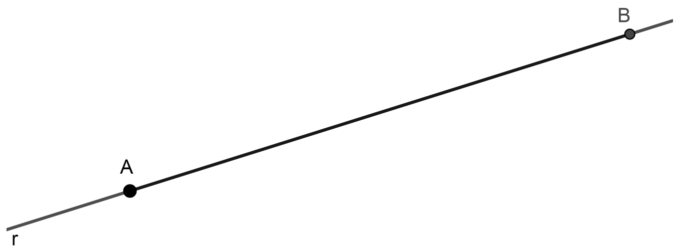

Figura 2.1: Reta r passando pelos pontos A e B.

Se as retas r e s passam, respectivamente, por A e B e por C e D, para indicar que são paralelas, usaremos $r \parallel s$ ou $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

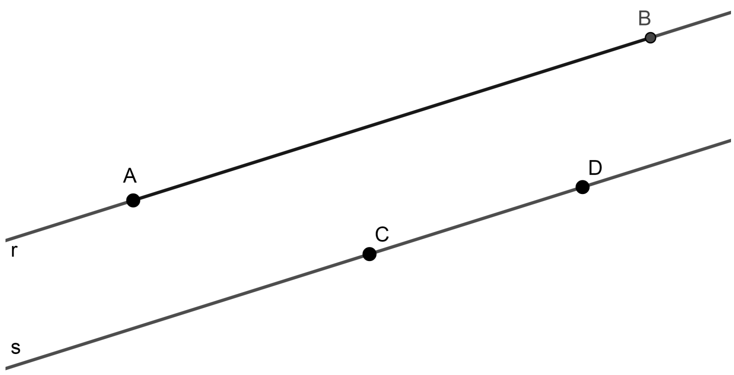

Figura 2.2: Retas r e s paralelas.

Observação 2.1.2. *Algumas vezes, para indicar a medida α de um ângulo $\angle AOC$, entre dois segmentos quaisquer OA e OC, usaremos a notação $A\widehat{O}C$, isto é, $\alpha = A\widehat{O}C$ conforme Figura 2.3.*

[1]Equivalente ao conceito de igualdade entre números.

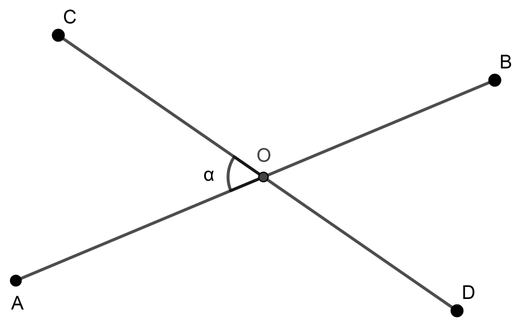

Figura 2.3: Medida do ângulo $\angle AOC$: $A\widehat{O}C = \alpha$.

Agora veremos algumas definições básicas que serão fundamentais em nosso trabalho.

2.2 Conceitos Básicos

Apresentaremos, a seguir, alguns conceitos, e iniciaremos com os dois lemas cujas demonstrações podem ser encontradas em [11].

Lema 2.2.1. *Dado $A \in r$, existem exatamente dois pontos $X_0, X_1 \in r$ tais que $\overline{X_0A} = \overline{X_1A}$.*

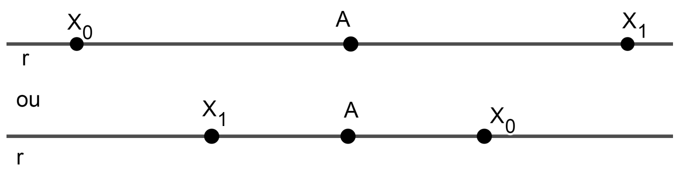

Figura 2.4: Segmentos de mesma medida: $\overline{X_0A} = \overline{X_1A}$.

Lema 2.2.2. *Dados dois pontos $A, B \in r$, tem-se sempre $\overline{AB} \geq 0$, com $\overline{AB} = 0$ se, e somente se, $A = B$. Daí, vale:*

1. $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \Leftrightarrow C \in AB$;
2. $\overline{AB} = |\overline{AC} - \overline{BC}| \Leftrightarrow C \notin AB$.

Figura 2.5: Ponto C entre os pontos A e B.

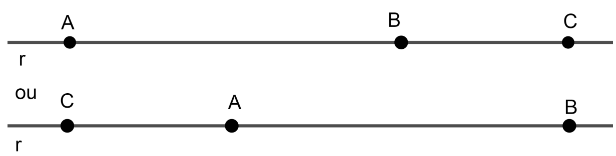

Figura 2.6: Pontos A e B do mesmo lado do ponto C.

Definição 2.2.1. *Dados dois pontos distintos A e B, dizemos que $M \in AB$ é o* ponto médio *do segmento AB se $\overline{AM} = \overline{MB}$.*

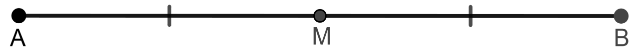

Figura 2.7: Ponto médio de um segmento AB.

Isto é, o ponto médio de um segmento de reta é o ponto do segmento que o divide em duas partes de mesma medida.

Definição 2.2.2. *Dados três pontos distintos colineares A, B e C, dizemos que A e C são* simétricos *em relação ao ponto B se B é o ponto médio do segmento AC.*

Teorema 2.2.1. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular a esta reta.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [1].

Definição 2.2.3. *Dados uma reta r e dois pontos $A, C \notin r$, dizemos que A e C são* simétricos *em relação à r se AC é perpendicular a r em que $\{B\} = AC \cap r$ é o ponto médio de AC.*

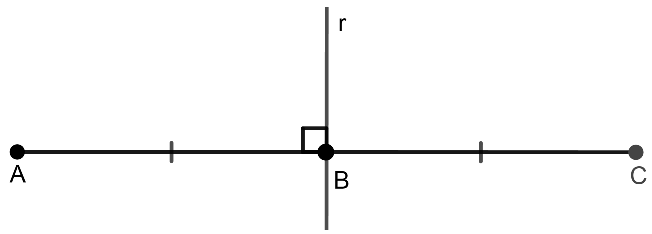

Figura 2.8: Pontos A e C simétricos em relação à r.

Definição 2.2.4. *Uma* base média de um triângulo *é um segmento de reta que une os pontos médios de dois de seus lados.*

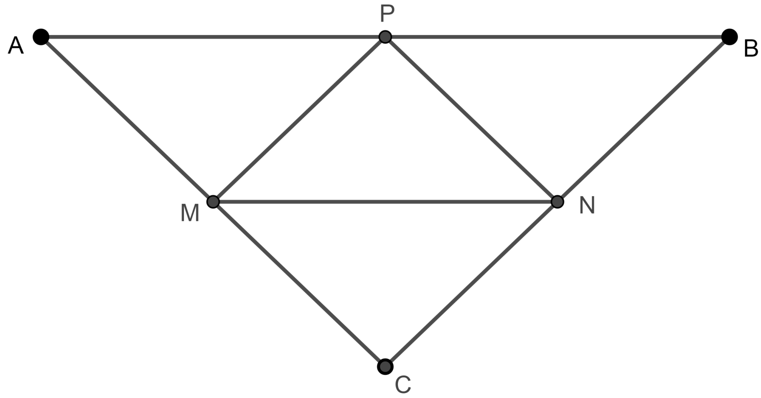

Figura 2.9: Bases médias de um triângulo ABC.

Um triângulo qualquer sempre tem três bases médias. O triângulo ABC da Figura 2.9 tem MN, PN e PM como bases médias. Dizemos que MN é a base média relativa ao lado AB. Analogamente, PN e PM são, respectivamente, as bases médias relativas aos lados AC e BC.

A proposição seguinte nos garante que a medida da base média de um triângulo é igual a metade da medida do seu lado relativo e que a base média é paralela ao lado relativo.

Proposição 2.2.1. *Se MN é a base média de um triângulo ABC relativa ao lado BC, então $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.*

A demonstração desta proposição pode ser consultada em [9].

Definição 2.2.5. *Uma* mediana de um triângulo *é um segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.*

Um triângulo qualquer sempre tem três medianas. As medianas do triângulo ABC, da Figura 2.10, são AP, BM e CN, em que P, M, N são os pontos médios dos lados BC, AC, AB, respectivamente.

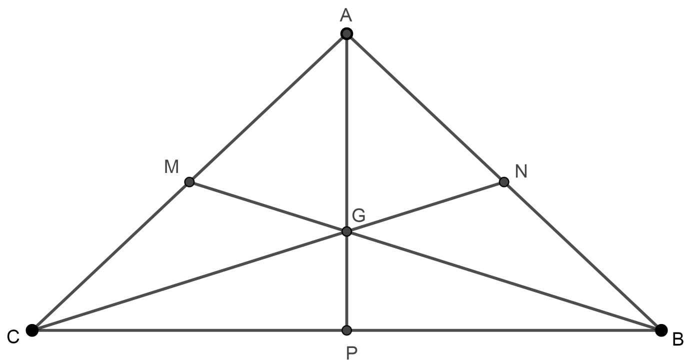

Figura 2.10: Medianas AP, BM e CN.

As medianas de um triângulo se encontram em um único ponto denominado *baricentro* do triângulo. O baricentro divide cada uma das medianas na razão $2:1$ a partir do vértice correspondente. A demonstração desses fatos pode ser vista em $[9]$. O baricentro do triângulo ABC da Figura 2.10 está representado pela letra G.

Definição 2.2.6. *Um triângulo é* isósceles *se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de* laterais*, e o terceiro lado é chamado de* base*.*

Definição 2.2.7. *A* bissetriz *de um ângulo é a semirreta que divide esse ângulo em dois ângulos iguais.*

Proposição 2.2.2. *Em triângulos isósceles a mediana relativamente à base é também bissetriz.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [1].

Definição 2.2.8. *A* mediatriz *de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB que passa por seu ponto médio.*

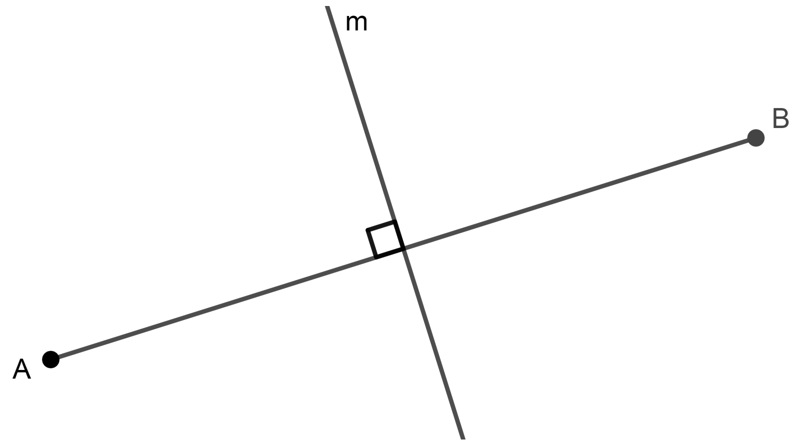

Figura 2.11: Mediatriz do segmento AB.

Proposição 2.2.3. *Os pontos pertencentes à mediatriz de um segmento AB equidistam de A e de B.*

A demonstração deste fato pode ser vista em [9].

Definição 2.2.9. *Um quadrilátero convexo é um* paralelogramo *se possuir lados opostos paralelos.*

Proposição 2.2.4. *Um quadrilátero convexo é um* paralelogramo *se, e somente se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [9].

Proposição 2.2.5. *Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.*

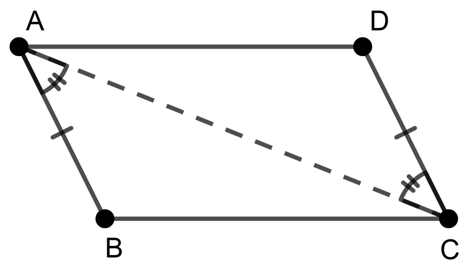

Figura 2.12: Quadrilátero $ABCD$.

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $AB \parallel CD$. Os triângulos ACD e CAB são congruentes pelo caso $L.A.L.$, pois $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\widehat{C}D = C\widehat{A}B$ (ângulos alternos internos) e AC é lado comum. Logo, $\overline{AD} = \overline{BC}$ então, pela proposição 2.2.4, $ABCD$ é um paralelogramo. $\square$

2.3 Congruência de triângulos

Ao longo do nosso trabalho, demonstraremos vários teoremas que envolvem diretamente congruências de triângulos. Portanto, veremos abaixo alguns casos que usaremos nas demonstrações desses teoremas. Mas, primeiro vamos à definição de congruência de triângulos.

Definição 2.3.1. *Dois triângulos são congruentes se há uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes também são congruentes.*

Agora veremos os seguintes casos de congruências de triângulos que usaremos:

i) Lado, ângulo, lado que denotaremos por $L.A.L.$;
ii) Ângulo, lado, ângulo que denotaremos por $A.L.A.$;
iii) Lado, lado, lado que denotaremos por $L.L.L.$;
iv) Lado, ângulo, ângulo oposto que denotaremos por $L.A.A_o.$;
v) Cateto-hipotenusa que denotaremos por $C.H.$.

A seguir apresentaremos o primeiro caso de congruência de triângulos como postulado e os demais casos como teoremas.

Postulado 2.3.1. *(Caso $L.A.L.$) Dados dois triângulos ABC e DEF, se há dois pares de lados correspondentes congruentes e se os ângulos formados por eles também são congruentes, então $ABC \cong DEF$.*

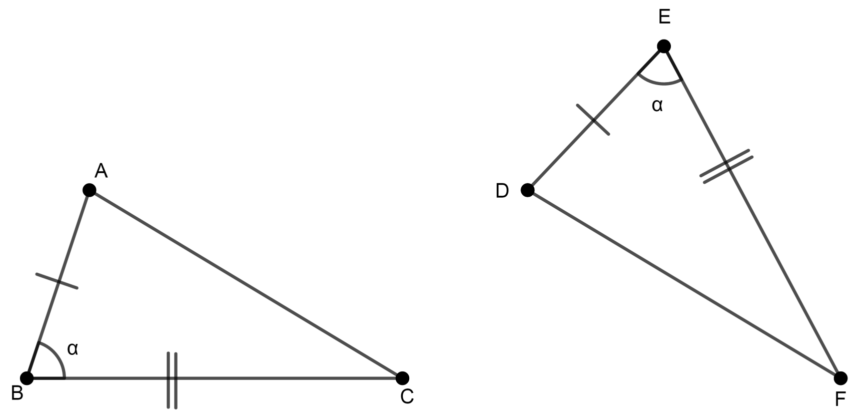

Figura 2.13: Triângulos congruentes pelo caso $L.A.L.$.

Na Figura 2.13, temos: $AB \cong DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $BC \cong EF$, portanto, pelo postulado 2.3.1, $ABC \cong DEF$.

Teorema 2.3.1. *(Caso $A.L.A.$) Dados dois triângulos ABC e DEF, se existem dois pares de ângulos correspondentes congruentes e se os lados entre eles também são congruentes, então $ABC \cong DEF$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [1]. Este teorema também é conhecido como 2^{o} caso de congruência de triângulos.

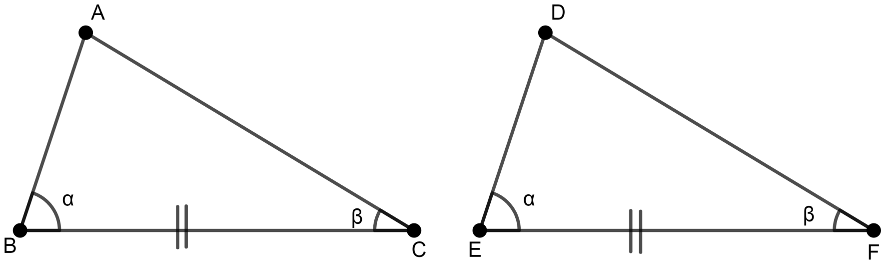

Figura 2.14: Triângulos congruentes pelo caso $A.L.A.$.

Na Figura 2.14, temos: $\angle ABC \cong \angle DEF$, $BC \cong EF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$, portanto, pelo teorema 2.3.1, $ABC \cong DEF$.

Teorema 2.3.2. *(Caso $L.L.L.$) Dados dois triângulos ABC e DEF, se os três pares de lados correspondentes são congruentes, então $ABC \cong DEF$.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [1]. Este teorema também é conhecido como 3^{o} caso de congruência de triângulos.

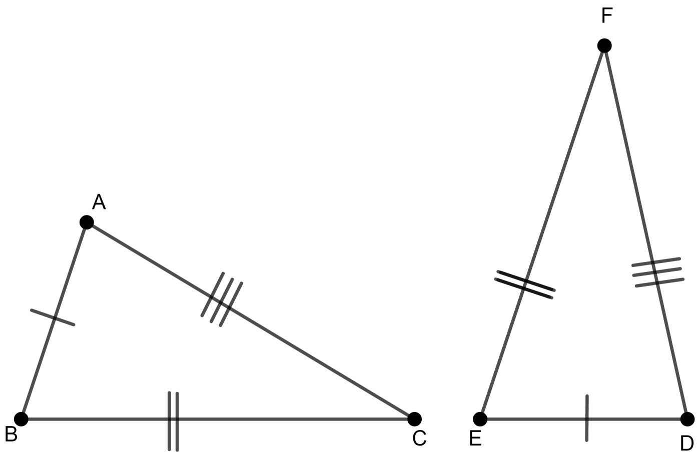

Figura 2.15: Triângulos congruentes pelo caso $L.L.L.$.

Na Figura 2.15, temos: $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$, portanto, pelo teorema 2.3.2, $ABC \cong DEF$.

Para demonstrarmos o quarto caso de congruência de triângulos, o caso $L.A.A_o.$, utilizaremos o teorema do ângulo externo que apresentaremos a seguir. Primeiro, definiremos ângulo externo de um triângulo.

Definição 2.3.2. *Um* ângulo externo *de um triângulo é o ângulo formado pelo prolongamento de um lado e um lado adjacente.*

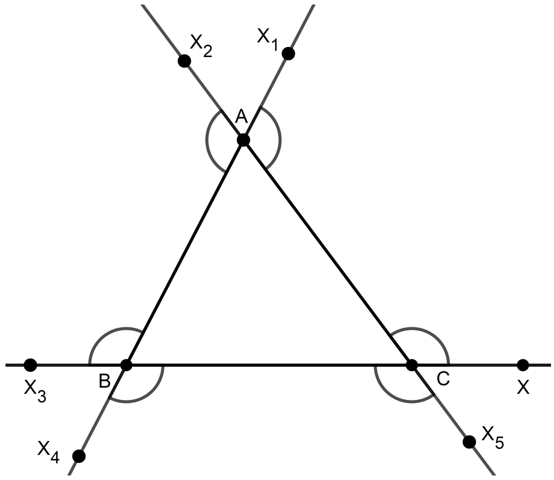

Figura 2.16: Ângulos externos de um triângulo.

Um triângulo possui seis ângulos externos. Na Figura 2.16, os ângulos externos são $\angle ACX$, $\angle CAX_1$, $\angle BAX_2$, $\angle ABX_3$, $\angle CBX_4$ e $\angle BCX_5$. Para cada ângulo externo há dois ângulos internos não adjacentes. Os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BAC$ são denominados *ângulos internos não adjacentes* ao ângulo externo $\angle ACX$.

Teorema 2.3.3. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e X um ponto tal que $B-C-X$ conforme Figura 2.17. Devemos mostrar que $A\widehat{C}X > B\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}X > A\widehat{B}C$.

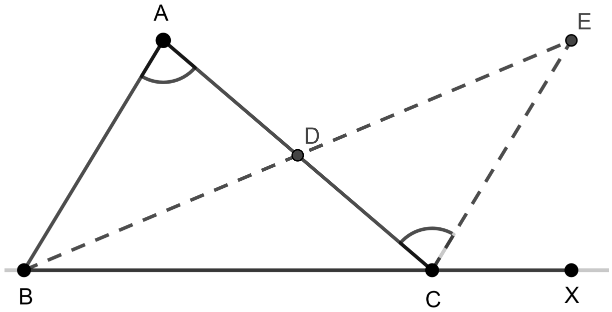

Figura 2.17: Ângulo externo.

Sejam D o ponto médio de AC e E pertencente à reta r que passa pelos pontos B e D de modo que $B-D-E$ com $\overline{BE} = 2\overline{BD}$, isto é, D é ponto médio de BE. Daí, os triângulos BDA e CDE são congruentes pelo caso $L.A.L.$, pois $AD \cong CD$ e $BD \cong ED$ por construção e os ângulos $\angle BDA$ e $\angle CDE$ são opostos pelo vértice, isto é, $\angle BDA \cong \angle CDE$. Portanto, $\angle BAC \cong \angle DCE$.

Como, por construção, o ponto E está no interior do ângulo $\angle ACX$, temos que $A\widehat{C}X = A\widehat{C}E + E\widehat{C}X$. Portanto, $A\widehat{C}X > B\widehat{A}C$.

Analogamente, mostramos que $A\widehat{C}X > A\widehat{B}C$. □

Vejamos agora o quarto caso de congruência de triângulos.

Teorema 2.3.4. *(Caso $L.A.A_o$.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se há um par de lados congruentes, um par de ângulos adjacentes a estes lados congruentes e um par de ângulos opostos a estes lados congruentes, então $ABC \cong DEF$.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF dois triângulos com $AB \cong DE$, $A\widehat{B}C = D\widehat{E}F$, $A\widehat{C}B = D\widehat{F}E$ e X um ponto da reta que passa por B e C tal que $\overline{BX} = \overline{EF}$. Disto, temos dois casos: $B-X-C$ e $B-C-X$.

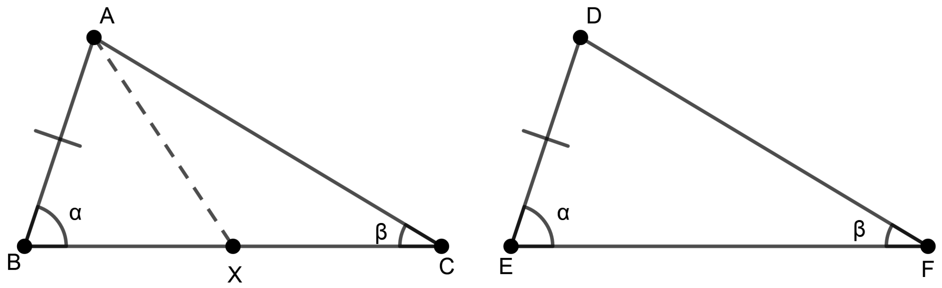

Figura 2.18: Triângulos congruentes.

Temos:

i) Se $B-X-C$, então pelo caso $L.A.L.$ obtemos $ABX \cong DEF$. Daí, segue que

$$\angle AXB \cong \angle DFE. \tag{2.1}$$

Mas $\angle AXB$ é um ângulo externo do triângulo AXC, do qual $\angle ACX$ é ângulo interno não adjacente. Logo, pelo teorema 2.3.3, $A\widehat{X}B > A\widehat{C}X$ e, portanto, pela hipótese, $A\widehat{X}B > D\widehat{F}E$ contradizendo (2.1).

ii) Se $B-C-X$, a demonstração é análoga e chegaríamos em $A\widehat{X}B < D\widehat{F}E$ contradizendo (2.1). Logo, o ponto X coincide com o ponto C, e portanto $ABC \cong DEF$.

□

A seguir, apresentaremos o caso especial de congruência de triângulos retângulos, denominado caso Cateto-Hipotenusa.

Teorema 2.3.5. *(Caso C.H.) Dados dois triângulos retângulos ABC e DEF, se há um par de catetos congruentes e as hipotenusas congruentes, então $ABC \cong DEF$.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF triângulos retângulos respectivamente em B e E conforme Figura 2.19. Suponha que $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$. Pelo teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos ABC e DEF, temos, respectivamente, as seguintes relações

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \tag{2.2}$$

e

$$(\overline{DF})^2 = (\overline{DE})^2 + (\overline{EF})^2 \Leftrightarrow (\overline{EF})^2 = (\overline{DF})^2 - (\overline{DE})^2. \tag{2.3}$$

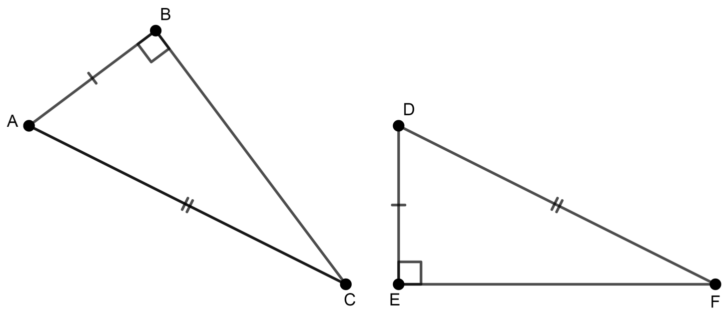

Figura 2.19: Caso Cateto-Hipotenusa.

Da relação (2.2), pela hipótese e, finalmente, pela relação (2.3), temos que $(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 - (\overline{AB})^2 = (\overline{DF})^2 - (\overline{DE})^2 = (\overline{EF})^2$. Assim, $\overline{BC} = \overline{EF}$. Portanto, pelo caso $L.L.L.$, temos que $ABC \cong DEF$. $\square$

2.4 Desigualdade triangular

Outro teorema de fundamental importância em nosso trabalho é o teorema da desigualdade triangular que demonstraremos a seguir. Mas, precisaremos ver primeiro o teorema $2.4.1$ que utilizaremos para demonstrar a desigualdade triangular.

Teorema 2.4.1. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes e o ângulo maior é oposto ao maior lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo com dois lados não congruentes.

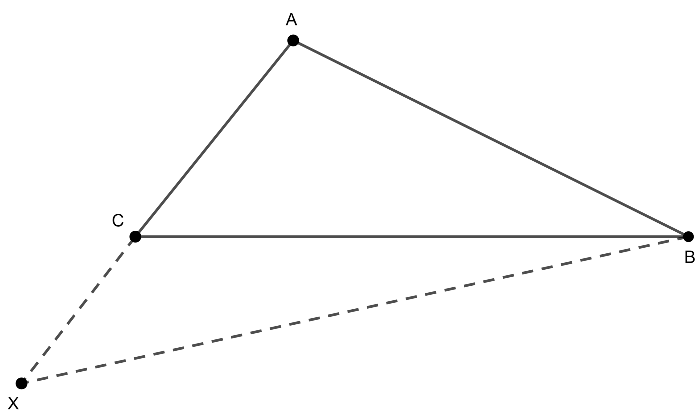

Figura 2.20: Triângulo ABC com dois lados não congruentes; $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Suponhamos que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Prolongue o segmento AC e marque o ponto X tal que $A-C-X$ e $\overline{AX} = \overline{AB}$. Como o triângulo ABX é isósceles, de base BX, então $\angle ABX \cong \angle AXB$.

Por construção, temos $A\widehat{B}X > A\widehat{B}C$. Aplicando o teorema 2.3.3 ao triângulo CBX , temos $A\widehat{C}B > A\widehat{X}B$. Logo, $A\widehat{B}C < A\widehat{B}X = A\widehat{X}B < A\widehat{C}B$. □

Teorema 2.4.2. (Desigualdade triangular) *O comprimento de um dos lados de um triângulo é sempre menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados desse triângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Vamos mostrar que $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

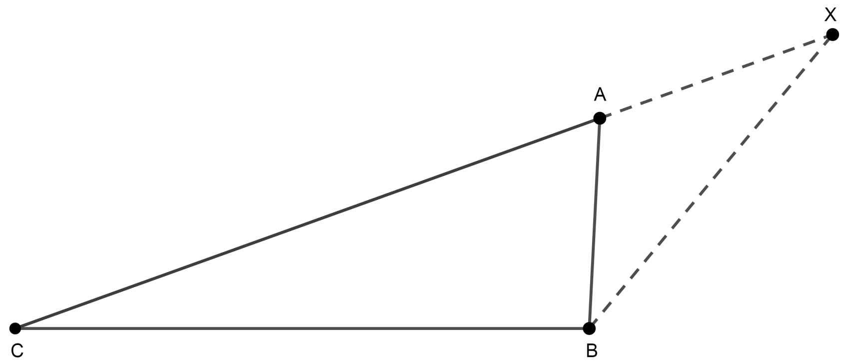

Figura 2.21: Triângulo ABC qualquer.

Prolongue CA e marque o ponto X de modo que $C-A-X$ e $\overline{AX} = \overline{AB}$ conforme Figura 2.21. Daí, temos que o triângulo ABX é isósceles com base BX. Como $C-A-X$, temos que $\overline{CX} = \overline{CA} + \overline{AX}$, ou seja, $\overline{CX} = \overline{CA} + \overline{AB}$. Também temos que $B\widehat{X}C = X\widehat{B}A < X\widehat{B}C$ e, pelo teorema 2.4.1 aplicado ao triângulo CXB, segue que $\overline{BC} < \overline{CX}$. Logo, $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. □

A desigualdade triangular é uma propriedade necessária para existência de um triângulo ABC qualquer e, por isso, é muito utilizada para demonstrações de alinhamento (colinearidade) de três pontos conforme veremos nos próximos capítulos.

3 Isometrias na Reta

Neste capítulo, estudaremos as isometrias na reta. No próximo capítulo, ampliaremos para as isometrias no plano. Na reta, estudaremos dois tipos de isometrias: a translação e a reflexão. Começaremos com a definição de isometria na reta e as demonstrações de suas principais propriedades.

3.1 Isometrias

Definição 3.1.1. *Sejam r e s retas e $F : r \to s$ uma função. F é uma* isometria *de r em s se $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$ para quaisquer A, $B \in r$, isto é, F preserva a distância entre pontos.*

Teorema 3.1.1. *Seja $F : r \to s$ uma isometria da reta r na reta s. Valem as seguintes afirmações:*

1. *F é bijetiva;*
2. *$F^{-1} : s \to r$ é uma isometria de s em r.*

Demonstração.

1. Dados A, $B \in r$ distintos, temos

$$A \neq B \Rightarrow \overline{AB} > 0 \Rightarrow \overline{F(A)F(B)} = \overline{AB} > 0 \Rightarrow F(A) \neq F(B).$$

   Logo, F é injetiva. Dado $C \in s$, temos que $\overline{CF(A)} = 0$ ou $\overline{CF(A)} > 0$. Daí,

   i) Se $\overline{CF(A)} = 0 \Rightarrow C = F(A)$.

   ii) Se $\overline{CF(A)} = d > 0$, pelo lema 2.2.1 existem únicos pontos $X_0, X_1 \in r$ e $D \in s$ tais que $\overline{X_0A} = \overline{AX_1} = d$ e $\overline{CF(A)} = \overline{F(A)D} = d$.

   Mas, por F ser uma isometria, também temos que

   - $\overline{F(X_0)F(A)} = \overline{X_0A} = d \Rightarrow F(X_0) = C$ ou $F(X_0) = D$;
   - $\overline{F(X_1)F(A)} = \overline{X_1A} = d \Rightarrow F(X_1) = C$ ou $F(X_1) = D$.

   Como F é injetiva, então $F(X_0) = C$ ou $F(X_1) = C$. Logo, F é sobrejetiva.

   Portanto, F é bijetiva.
2. Dados C, $D \in s$, temos $F^{-1}(C)$, $F^{-1}(D) \in r$ tais que

$$\overline{F^{-1}(C)F^{-1}(D)} = \overline{F(F^{-1}(C))F(F^{-1}(D))} = \overline{CD}.$$

Logo, $F^{-1} : s \to r$ é uma isometria.

$\square$

Proposição 3.1.1. *A composição de duas isometrias na reta r é uma isometria.*

Demonstração. Sejam F e G duas isometrias, e A e B dois pontos distintos da reta r. Temos, por definição de isometria, que $\overline{(G\circ F)(A)(G\circ F)(B)} = \overline{G(F(A))G(F(B))} = \overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$ e $\overline{(F\circ G)(A)(F\circ G)(B)} = \overline{F(G(A))F(G(B))} = \overline{G(A)G(B)} = \overline{AB}$. Portanto, a composição de duas isometrias na reta é sempre uma isometria. $\square$

Veremos agora que uma isometria leva um segmento de reta em um segmento de reta.

Teorema 3.1.2. *A imagem do segmento de reta $AB \subset r$ pela isometria $F : r \to s$ é o segmento de reta $F(A)F(B) \subset s$.*

Demonstração. Sejam os pontos A, B, $M \in r$ e suas respectivas imagens $F(A)$, $F(B)$ e $F(M) \in s$ pela isometria F. Daí,

$$M \in AB \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{F(A)F(B)} = \overline{F(A)F(M)} + \overline{F(M)F(B)} \Leftrightarrow F(M) \in F(A)F(B).$$

$\square$

Em outras palavras, se M estiver entre A e B então $F(M)$ está entre $F(A)$ e $F(B)$. Além disso, se $\overline{AM} = \overline{MB}$ então $\overline{F(A)F(M)} = \overline{F(M)F(B)}$ e os pontos M e $F(M)$ são os respectivos pontos médios dos segmentos AB e $F(A)F(B)$.

Definição 3.1.2. *Um ponto $X \in r$ é dito um* ponto fixo *da aplicação $F : r \to r$ se $F(X) = X$.*

Teorema 3.1.3. *Uma isometria $F : r \to r$ que possui dois pontos fixos é a* função identidade.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma isometria $F : r \to r$. Sejam $A, B \in r$ distintos tais que $F(A) = A$ e $F(B) = B$. Se existisse $X \in r$ de modo que $F(X) \neq X$, teríamos $\overline{AX} = \overline{F(A)F(X)} = \overline{AF(X)}$ e, portanto o ponto A seria o ponto médio do segmento $XF(X)$. De forma análoga, teríamos o ponto B com ponto médio do segmento $XF(X)$. Logo, $A = B$, o que gera contradição com nossa suposição inicial. Portanto, uma isometria $F : r \to r$ diferente da função identidade possui no máximo um ponto fixo. $\square$

Teorema 3.1.4. *Sejam $S, T : r \to s$ isometrias. Se existirem A, $B \in r$, com $A \neq B$, tais que $S(A) = T(A)$ e $S(B) = T(B)$, então teremos $S = T$.*

Demonstração. Temos que a isometria $R = T^{-1} \circ S : r \to r$ é tal que $R(A) = A$ e $R(B) = B$. Portanto, R é a identidade, isto é, $S = T$. $\square$

Apresentaremos, a seguir, a translação e a reflexão na reta.

3.1.1 Translação na reta

Definição 3.1.3. *Sejam A e B dois pontos pertencentes à reta r, em que $A \neq B$. A* translação *T_{AB} é a função que leva cada ponto $X \in r$ ao ponto $T_{AB}(X) \in r$ de modo que $\overline{XT_{AB}(X)} = \overline{AB}$ e, além disso, o sentido de percurso de X para $T_{AB}(X)$ é o mesmo de A para B.*

Dado o ponto médio M do segmento $AT_{AB}(X)$, pela definição, podemos afirmar que M também é o ponto médio do segmento BX, uma vez que os sentidos de percurso coincidem.

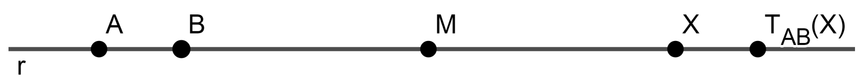

Figura 3.1: Translação do ponto X.

Podemos observar que dados X, $Y \in r$ pertencentes a r, então temos que $\overline{XT_{AB}(X)} = \overline{YT_{AB}(Y)} = \overline{AB}$.

A partir dessa observação na reta, provarraremos, a seguir, que toda translação é uma isometria.

Teorema 3.1.5. *Toda translação na reta é uma isometria.*

Demonstração. Dados X, $Y \in r$, devemos mostrar que existem $T_{AB}(X)$ e $T_{AB}(Y)$ tais que $\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{XY}$. Para isso, vamos considerar dois casos:

1) o ponto Y está entre X e $T_{AB}(X)$, daí

$$\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{YT_{AB}(Y)} - \overline{YT_{AB}(X)} = \overline{XT_{AB}(X)} - \overline{YT_{AB}(X)} = \overline{XY}.$$

Figura 3.2: Ponto Y entre os pontos X e $T_{AB}(X)$.

2) o ponto Y não está entre X e $T_{AB}(X)$, então temos três subcasos: $X - T_{AB}(X) - Y$, $Y - X - T_{AB}(X)$ ou $Y = T_{AB}(X)$.

a) Para $X - T_{AB}(X) - Y$, temos

$$\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{T_{AB}(X)Y} + \overline{YT_{AB}(Y)} = \overline{T_{AB}(X)Y} + \overline{XT_{AB}(X)} = \overline{XY}.$$

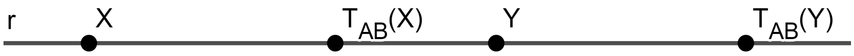

Figura 3.3: Ponto Y à direita dos pontos X e $T_{AB}(X)$.

b) Para $Y - X - T_{AB}(X)$, temos

$$\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{XT_{AB}(X)} - \overline{XT_{AB}(Y)} = \overline{YT_{AB}(Y)} - \overline{XT_{AB}(Y)} = \overline{YX} = \overline{XY}.$$

Figura 3.4: Ponto Y à esquerda dos pontos X e $T_{AB}(X)$.

c) Para $Y = T_{AB}(X)$, temos

$$\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{YT_{AB}(Y)} = \overline{XT_{AB}(X)} = \overline{XY}.$$

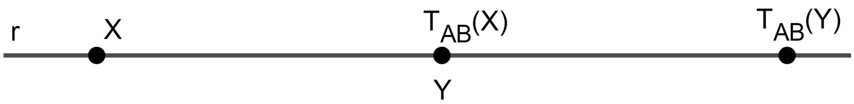

Figura 3.5: Ponto Y coincidindo com o ponto $T_{AB}(X)$.

Logo, em todos os casos , $\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{XY}$. Portanto, toda translação é uma isometria. □

3.1.2 Reflexão na reta

Definição 3.1.4. *Seja A um ponto pertencente à reta r. A* reflexão em torno de A *é a função $R_A : r \to r$ que associa cada ponto $X \in r$ ao seu simétrico $R_A(X)$ em relação ao ponto A.*

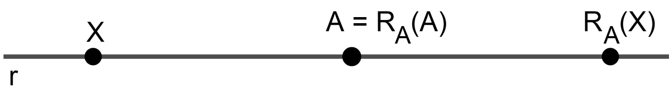

Figura 3.6: Reflexão na reta r.

Observe que dados dois pontos distintos A, $X \in r$, temos que $R_A(A) = A$ e, como $X \neq A \in r$, A é o ponto médio do segmento $XR_A(X)$.

Teorema 3.1.6. *Toda reflexão na reta é uma isometria.*

Demonstração. Dados três pontos distintos A, X, $Y \in r$, devemos mostrar que $\overline{R_A(X)R_A(Y)} = \overline{XY}$. Para isso, precisamos considerar dois casos:

1) os pontos X e Y estão do mesmo lado do ponto A, conforme Figura 3.7.

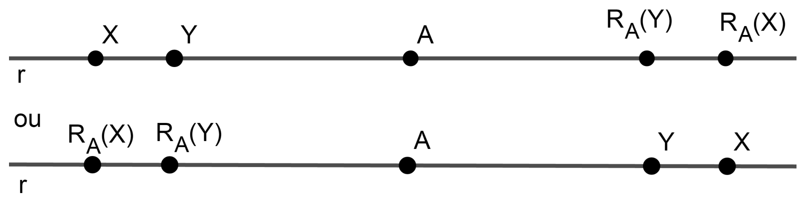

Figura 3.7: Pontos X e Y do mesmo lado do ponto A.

Daí, $\overline{R_A(X)R_A(Y)} = |\overline{R_A(X)A} - \overline{R_A(Y)A}| = |\overline{XA} - \overline{YA}| = \overline{XY}$.

2) os pontos X e Y não estão do mesmo lado do ponto A, isto é, estão em lados opostos de A, conforme Figura 3.8.

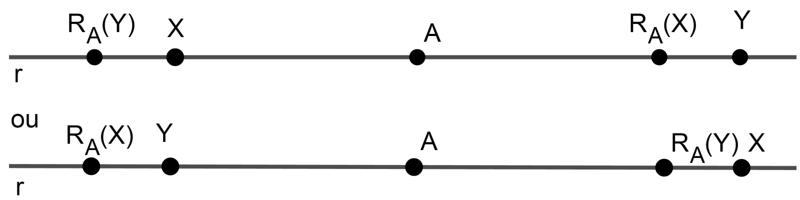

Figura 3.8: Pontos X e Y em lados opostos.

Daí, $\overline{R_A(X)R_A(Y)} = \overline{R_A(X)A} + \overline{AR_A(Y)} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}$.

Logo, em qualquer caso, temos que $\overline{R_A(X)R_A(Y)} = \overline{XY}$. Portanto, toda reflexão é uma isometria. □

Podemos observar que para qualquer $X \in r$ temos $R_A(R_A(X)) = X$, ou seja, a função composta $R_A \circ R_A : r \to r$ é a função identidade.

Veremos, a seguir, que existem somente dois tipos de isometrias na reta, além da função identidade.

Teorema 3.1.7. *Se $F : r \to r$ é uma isometria, então F é uma translação, uma reflexão ou a função identidade.*

Demonstração. Se F não é função identidade, então existe um ponto $A \in r$ tal que $F(A) \neq A$. Seja $B = F(F(A))$. Pela isometria F, temos que $\overline{F(A)B} = \overline{AF(A)} > 0$. Portanto, teremos dois casos: $B = A$ ou $B \neq A$.

i) Se $B = A$, tome o ponto M médio do segmento $AF(A)$. Daí,

$$\overline{F(M)F(A)} = \overline{MA} = \overline{MF(A)} = \overline{F(M)B} = \overline{F(M)A}.$$

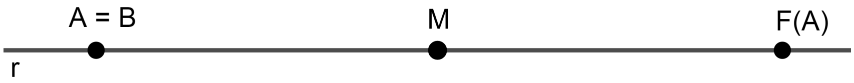

Figura 3.9: Ponto A coincidindo com o ponto B.

Portanto, $F(M)$ é o ponto médio de $AF(A)$, isto é, $F(M) = M$. Desse modo F coincide em A e M com a reflexão R_M em torno do ponto M. Logo, pelo teorema 3.1.4, temos que $F = R_M$, isto é, F é uma reflexão.

ii) Se $B \neq A$, então $F(A)$ é ponto médio do segmento AB. Portanto, F coincide com a translação

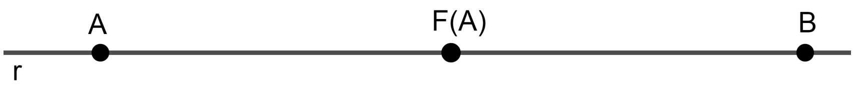

Figura 3.10: Pontos A e B distintos.

$T_{AF(A)}$ nos pontos distintos A e $F(A)$. Logo, pelo teorema 3.1.4, $F = T_{AF(A)}$, isto é, F é uma translação. □

3.2 Aplicações das isometrias na reta

3.2.1 Translação

Exemplo 3.2.1. *Dados dois pontos A, $B \in r$, com B à direita de A, encontre a localização do ponto $C \in r$, à direita de A, tal que $\overline{AC} = 3\overline{AB}$.*

Figura 3.11: Ponto B à direita do ponto A.

RESOLUÇÃO: Seja a translação T_{AB}. Por definição de translação, temos que

$$\overline{AB} = \overline{T_{AB}(A)T_{AB}(B)} = \overline{BT_{AB}(B)} = \overline{T_{AB}(B)T_{AB}(T_{AB}(B))}.$$

Daí, $3\overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} = \overline{AB} + \overline{BT_{AB}(B)} + \overline{T_{AB}(B)T_{AB}(T_{AB}(B))} = \overline{AT_{AB}(T_{AB}(B))}$*. Portanto,* $C = T_{AB}(T_{AB}(B))$.

3.2.2 Reflexão

Exemplo 3.2.2. *Dados três pontos distintos* A, B *e* $M \in r$ *em que* A, B *estão à esquerda de* M*, encontre a localização dos pontos* X, $Y \in r$ *à direita de* M *de modo que* $\overline{AX} = \overline{BY}$*.*

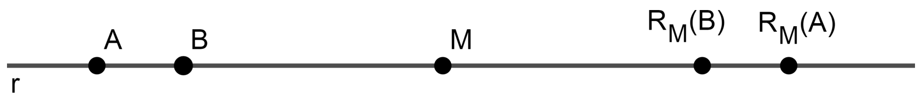

Figura 3.12: Pontos A e B à esquerda do ponto M.

RESOLUÇÃO: Seja R_M a reflexão em torno do ponto M. Pela definição de reflexão, temos que $\overline{AM} = \overline{R_M(A)M}$ e $\overline{BM} = \overline{R_M(B)M}$. Segue que

$$\overline{AR_M(B)} = \overline{AM} + \overline{MR_M(B)} = \overline{R_M(A)M} + \overline{MB} = \overline{BR_M(A)}.$$

Portanto, $R_M(B) = X$ e $R_M(A) = Y$.

3.3 Isometrias próprias e impróprias na reta

Veremos, nessa seção, que as isometrias na reta são classificadas em dois tipos: próprias e impróprias. Além disso, veremos que as composições dessas isometrias respeitam regras bem simples.

Definição 3.3.1. *Chamamos a isometria* $F : r \to r$ *de* própria *quando, dados dois pontos distintos* A, $B \in r$*, o sentido de percurso* $A \to B$ *coincide com o sentido de percurso de* $F(A) \to F(B)$*. Caso os sentidos sejam opostos então a isometria* F *é denominada* imprópria.

Agora vamos provar que as translações são isometrias próprias e as reflexões são isometrias impróprias.

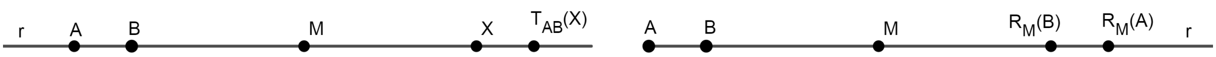

Figura 3.13: Translação T_{AB} e reflexão R_M na reta r.

Teorema 3.3.1. *Toda translação na reta é uma isometria própria.*

Demonstração. Sejam A e B dois pontos distintos da reta r e $F: r \to r$ uma translação. Daí, temos duas possibilidades para o sentido de percurso de A para $F(A)$, sendo o mesmo de A para B ou oposto.

1. Se o sentido de percurso de A para $F(A)$ é o mesmo de A para B, então, pela definição 3.1.1, temos que $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$, logo o sentido de percurso de B para $F(B)$ também é o mesmo de A para B. Portanto, o sentido de percurso de $F(A)$ para $F(B)$ coincide com o sentido de percurso de A para B.

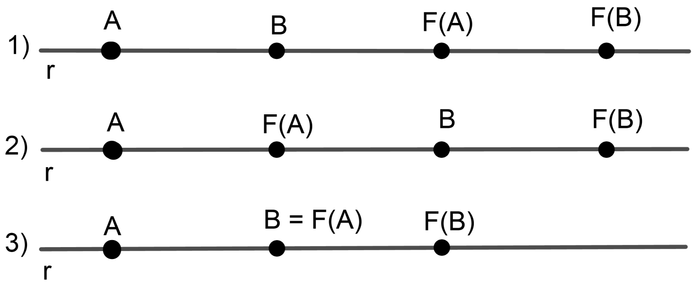

Figura 3.14: Algumas disposições de A, B, $F(A)$ e $F(B)$.

2. Se o sentido de percurso de A para $F(A)$ é o oposto de A para B, então, pela definição 3.1.1, temos que $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$, logo o sentido de percurso de B para $F(B)$ também é o oposto de A para B. Portanto, o sentido de percurso de $F(A)$ para $F(B)$ coincide com o sentido de percurso de A para B.

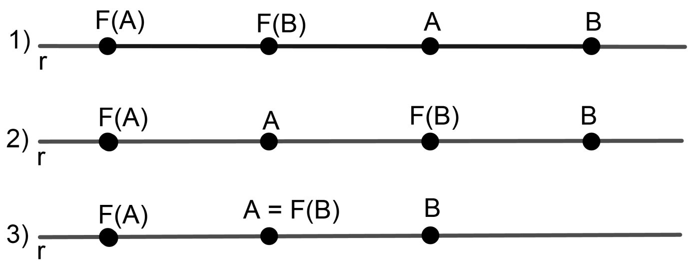

Figura 3.15: Algumas disposições de A, B, $F(A)$ e $F(B)$.

Portanto, toda translação na reta é uma isometria própria.

$\square$

Teorema 3.3.2. *Toda reflexão na reta é uma isometria imprópria.*

Demonstração. Sejam A, B e Y pontos da reta r, com $A \neq B$, e $F: r \to r$ uma reflexão em torno de Y. Daí, temos três possibilidades: A e B estão do mesmo lado de Y, A e B em lados opostos ou um dos pontos coincide com Y ($A = Y$ ou $B = Y$).

1. Se A e B estão do mesmo lado de Y conforme Figura 3.16, então, pela definição 3.1.4, temos que Y é o ponto médio dos segmentos $AF(A)$ e $BF(B)$. Logo, o sentido de percurso de $F(A)$ para $F(B)$ é oposto ao sentido de percurso de A para B.

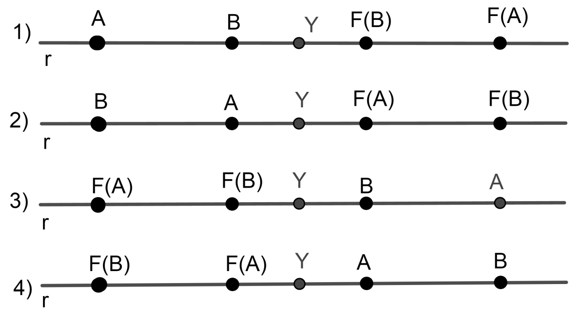

Figura 3.16: A e B do mesmo lado de Y.

2. Se A e B estão em lados opostos conforme Figura 3.17, então, pela definição 3.1.4, Y é ponto médio de $AF(A)$ e $BF(B)$, isto é, $F(A)$ e B estão do mesmo lado de Y. Ainda pela definição 3.1.4, temos que $F(A)$ e B são respectivamente os simétricos de A e $F(B)$, e pela definição 3.1.1, temos que $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$, logo o sentido de percurso de $F(A)$ para $F(B)$ é oposto ao sentido de percurso de A para B.

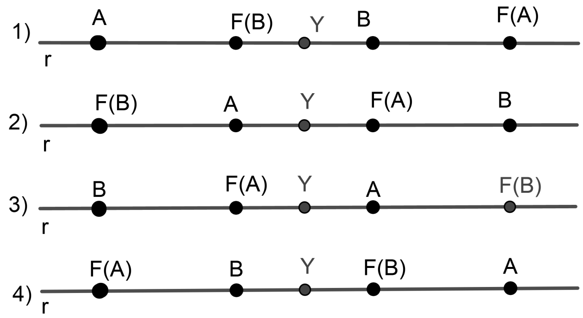

Figura 3.17: Possíveis posições de A, B, $F(A)$ e $F(B)$.

3. Se $A = Y$ (ou $B = Y$), então, pela definição 3.1.4, $F(A) = A = Y$ (ou $F(B) = B = Y$). Ainda, pela definição 3.1.4, temos que $Y = A = F(A)$ (ou $Y = B = F(B)$) é ponto médio de $BF(B)$ (ou $AF(A)$), logo, o sentido de percurso de $F(A)$ para $F(B)$ é oposto ao sentido de percurso de A para B.

Figura 3.18: Possíveis posições de $A = Y$ e $B = Y$.

Portanto, toda reflexão na reta é uma isometria imprópria.

□

Note que quando tivermos uma translação seguida de uma reflexão obteremos uma função composta que é uma isometria imprópria. Essa composição isométrica é facilmente ilustrada na figura abaixo.

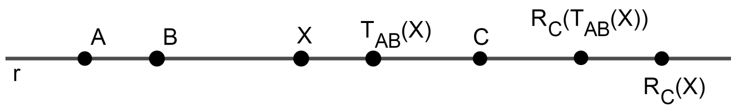

Figura 3.19: Translação T_{AB} seguida da relexão R_C na reta r.

Teorema 3.3.3. *As composições de isometrias na reta respeitam as seguintes regras:*

1. *(própria)∘(própria) = (própria);*
2. *(própria)∘(imprópria) = (imprópria);*
3. *(imprópria)∘(própria) = (imprópria);*
4. *(imprópria)∘(imprópria) = (própria).*

Demonstração.

1. Sejam A e B pontos distintos da reta r e $S, T : r \to r$ duas isometrias próprias. Da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $S(A)$ para $S(B)$ coincide com o de A para B. Aplicando T nos pontos $S(A)$ e $S(B)$, da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $T(S(A))$ para $T(S(B))$ coincide com o de $S(A)$ para $S(B)$, logo o sentido de percurso de $T(S(A))$ para $T(S(B))$ coincide com o de A para B. Portanto, tomando $F = T \circ S$, temos que o sentido de percurso de $F(A) = (T \circ S)(A) = T(S(A))$ para $F(B) = (T \circ S)(B) = T(S(B))$ coincide com o de A para B, ou seja, F é uma isometria própria.
2. Sejam A e B pontos distintos da reta r e $T, R : r \to r$ respectivamente uma isometria própria e uma isometria imprópria. Da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $R(A)$ para $R(B)$ é o oposto ao de A para B. Aplicando T nos pontos $R(A)$ e $R(B)$, da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $T(R(A))$ para $T(R(B))$ coincide com o de $R(A)$ para $R(B)$, logo o sentido de percurso de $T(R(A))$ para $T(R(B))$ é o oposto ao de A para B. Portanto, tomando $F = T \circ S$, temos que o sentido de percurso de $F(A) = (T \circ R)(A) = T(R(A))$ para $F(B) = (T \circ R)(B) = T(R(B))$ é o oposto ao de A para B, ou seja, F é uma isometria imprópria.
3. Sejam A e B pontos distintos da reta r e $R, T : r \to r$ respectivamente uma isometria imprópria e uma isometria própria. Da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $T(A)$ para $T(B)$ coincide com o de A para B. Aplicando R nos pontos $T(A)$ e $T(B)$, da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $R(T(A))$ para $R(T(B))$ é o oposto ao de $T(A)$ para $T(B)$, logo o sentido de percurso de $R(T(A))$ para $R(T(B))$ é o oposto ao de A para B. Portanto, tomando $F = R \circ T$, temos que o sentido de percurso de $F(A) = (R \circ T)(A) = R(T(A))$ para $F(B) = (R \circ T)(B) = R(T(B))$ é o oposto ao de A para B, ou seja, F é uma isometria imprópria.

4. Sejam A e B pontos distintos da reta r e $R, T : r \to r$ duas isometrias impróprias. Da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $T(A)$ para $T(B)$ é o oposto ao de A para B. Aplicando R nos pontos $T(A)$ e $T(B)$, da definição 3.3.1, temos que o sentido de percurso de $R(T(A))$ para $R(T(B))$ é o oposto ao de $T(A)$ para $T(B)$, logo o sentido de percurso de $R(T(A))$ para $R(T(B))$ coincide com o de A para B. Portanto, tomando $F = R \circ T$, temos que o sentido de percurso de $F(A) = (R \circ T)(A) = R(T(A))$ para $F(B) = (R \circ T)(B) = R(T(B))$ coincide com o de A para B, ou seja, F é uma isometria própria.

$\square$

4 Isometrias no Plano

Uma figura qualquer no plano pode sofrer transformações sem perder suas propriedades originais como dimensões e área. Semelhantemente ao que acontece na reta com os pontos, segmentos e semirretas, agora, no plano, ampliaremos essa ideia e consideraremos, além desses, um conjunto de pontos, isto é, uma figura.

Neste capítulo, estudaremos as isometrias no plano. Mostraremos que há quatro tipos de isometrias no plano, além da identidade, que são a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão com deslizamento.

4.1 Isometrias

Antes de definirmos as isometrias no plano, veremos a definição de transformação no plano que facilitará o entendimento das isometrias.

Definição 4.1.1. *Uma* transformação F *no plano* Π *é uma função bijetiva* $F : \Pi \rightarrow \Pi$ *, isto é, uma função que:*

1) *associa pontos distintos* X_1 *e* X_2 *de* Π *a imagens distintas* $F(X_1)$ *e* $F(X_2)$ *de* Π *(injetiva);*
2) *para cada ponto* Y *de* Π*, existe um único ponto* X *em* Π *tal que* $Y = F(X)$ *(sobrejetiva).*

A transformação inversa F^{-1} no plano Π é a função tal que $F^{-1}(Y)$ é o único ponto X de Π para o qual $F(X) = Y$. Daí, se G é uma figura contida em Π, então a imagem de G pela transformação F é definida por $F(G) = \{F(X_1)/X_1 \in G\}$.

Apresentaremos, a seguir, a definição de isometria no plano e as demonstrações de suas principais propriedades.

Definição 4.1.2. *As* isometrias *são transformações no plano em que as distâncias são preservadas, isto é, se* $F : \Pi \rightarrow \Pi$ *é uma isometria, então para qualquer par de pontos* A *e* B *de* Π *teremos a relação* $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$.

As isometrias possuem várias propriedades importantes que nos ajudam a resolver diversos problemas matemáticos. A seguir, apresentaremos algumas dessas propriedades isométricas no plano.

Teorema 4.1.1. *Toda isometria $F : \Pi \to \Pi$ possui as seguintes propriedades:*

1) F leva pontos colineares em pontos colineares, dessa forma, a imagem de uma reta r é uma reta s. Além disso, se os pontos A, B e C pertencentes a Π são tais que B está entre A e C, então $F(B)$ estará necessariamente entre $F(A)$ e $F(C)$. Consequentemente a função F leva ângulos em ângulos.

2) F mantém medidas de ângulos, isto é, para todo ângulo $\angle AOB$, temos que $F(A)\widehat{F(O)}F(B) = A\widehat{O}B$.

3) F preserva o paralelismo, isto é, se r e s são retas paralelas, então $F(r)$ e $F(s)$ também são retas paralelas.

4) F leva circunferências em circunferências.

Demonstração. 1) Consideremos A, B e C pontos colineares, tais que $A - B - C$ e sejam $F(A), F(B)$ e $F(C)$ suas respectivas imagens pela isometria F.

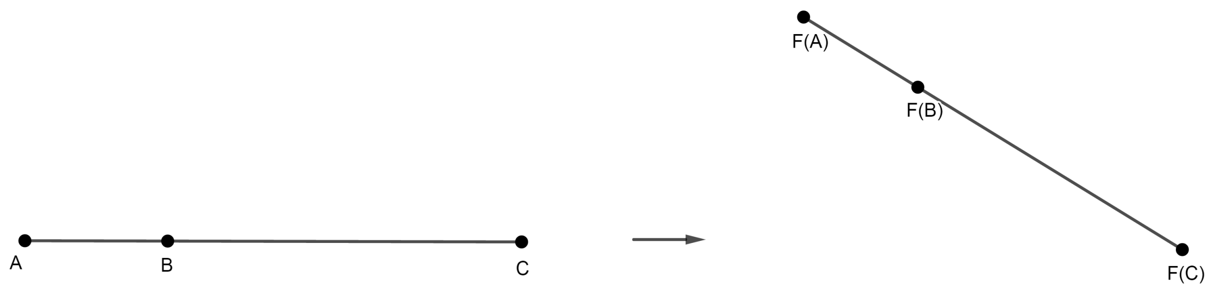

Figura 4.1: Três pontos colineares.

Suponhamos, por absurdo, que $F(A), F(B)$ e $F(C)$ não estão alinhados, então determinariam o triângulo $F(A)F(B)F(C)$. Pela desigualdade triangular, teríamos a desigualdade $\overline{F(A)F(C)} < \overline{F(A)F(B)} + \overline{F(B)F(C)}$ que, pela isometria, acarretaria em $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, contrariando a hipótese de $A - B - C$ que equivale a $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Portanto,

$$\overline{F(A)F(C)} = \overline{F(A)F(B)} + \overline{F(B)F(C)}. \tag{4.1}$$

Logo, os pontos $F(A)$, $F(B)$ e $F(C)$ são colineares.

Se $F(B)$ não estivesse entre $F(A)$ e $F(C)$ então teríamos dois casos: $F(B) - F(A) - F(C)$ ou $F(A) - F(C) - F(B)$.

a) Para $F(B) - F(A) - F(C)$ então $\overline{F(B)F(C)} = \overline{F(B)F(A)} + \overline{F(A)F(C)}$. Portanto, da relação (4.1), aplicada em $\overline{F(A)F(C)}$, temos que $\overline{F(B)F(C)} = \overline{F(B)F(A)} + \overline{F(A)F(B)} + \overline{F(B)F(C)} = 2\overline{F(A)F(B)} + \overline{F(B)F(C)}$.

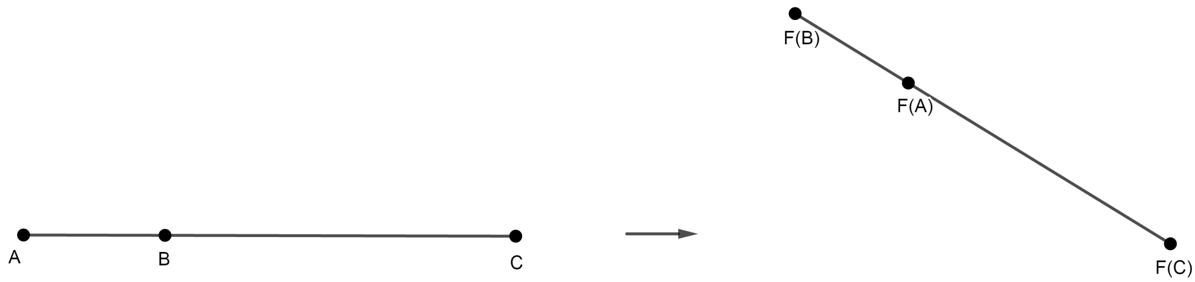

Figura 4.2: Ponto $F(A)$ entre os pontos $F(B)$ e $F(C)$.

Segue que $2\overline{F(A)F(B)} = 0$ e assim, $\overline{F(A)F(B)} = 0$. Absurdo, pois contraria a hipótese de $F(B) - F(A) - F(C)$.

b) Para $F(A) - F(C) - F(B)$, a demonstração é análoga.

Logo, $F(B)$ está entre os pontos $F(A)$ e $F(C)$, isto é, $F(A) - F(B) - F(C)$.

2) Sejam um ângulo $\angle XOY$ cuja medida é α e $\angle F(X)F(O)F(Y)$ sua respectiva imagem pela isometria F.

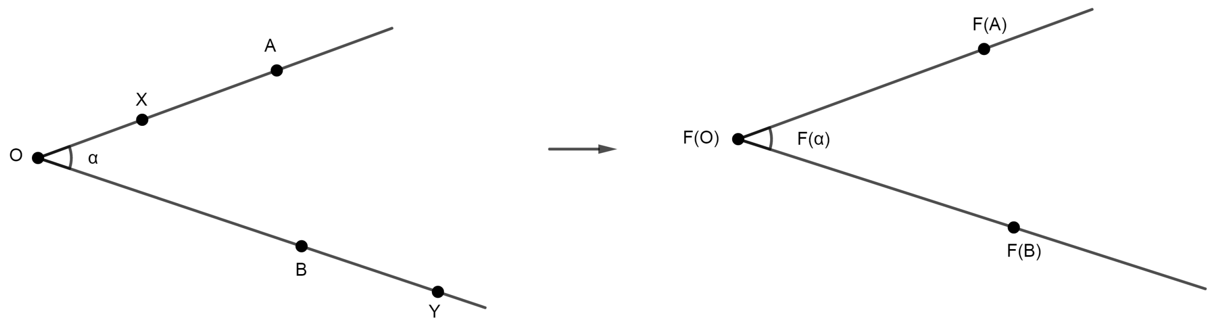

Figura 4.3: Ângulos $A\widehat{O}B$ e $F(A)\widehat{F(O)}F(B)$ são iguais.

Tomemos um ponto em cada lado do ângulo $\angle XOY$ de modo que as distâncias de O a cada um dos pontos sejam iguais, isto é, devemos escolher A e B de modo que $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $A\widehat{O}B = \alpha = X\widehat{O}Y$ conforme Figura 4.3. Sejam $F(A)$ e $F(B)$ as respectivas imagens dos pontos A e B. Daí, pela definição de isometria, temos

a) $\overline{F(O)F(A)} = \overline{F(O)F(B)}$;

b) $\overline{F(A)F(B)} = \overline{AB}$.

Portanto, os triângulos ABO e $F(A)F(B)F(O)$ são congruentes pelo caso $L.L.L.$. Logo, os ângulos $\angle XOY$ e $\angle F(A)F(O)F(B)$ são congruentes, isto é, $F(A)\widehat{F(O)}F(B) = \alpha = X\widehat{O}Y$.

3) Consideremos r e s retas paralelas e $F(r)$, $F(s)$ suas respectivas imagens pela isometria F.

Suponhamos, por absurdo, que as retas $F(r)$ e $F(s)$ sejam concorrentes no ponto O em que $O = F(A) = F(B)$, sendo $A \in r$ e $B \in s$ conforme Figura 4.4. Isso é

Figura 4.4: Isometria em retas paralelas.

absurdo, pois contraria a definição de isometria uma vez que $A \neq B$. Logo, as retas $F(r)$ e $F(s)$ também são paralelas.

4) Considere a circunferência $\Lambda(C,r)$ e o ponto $A \in \Lambda$. Temos que $\overline{AC} = r$. Daí, pela isometria F temos que $\overline{F(A)F(C)} = r \Leftrightarrow F(A) \in \Lambda_1(F(C),r)$.

□

Definição 4.1.3. *Duas figuras G e H no plano Π são* congruentes *se existe uma isometria $F : \Pi \to \Pi$ em que a imagem de G por essa isometria é $F(G) = H$.*

A partir das propriedades do teorema 4.1.1 e da definição 4.1.3, podemos inferir que a imagem de uma figura G por uma isometria F será uma figura $F(G)$ congruente a G.

Proposição 4.1.1. *A composição de duas isometrias no plano Π é uma isometria.*

A demonstração desta proprosição é análoga à demonstração da proprosição 3.1.1, porém considerando A e B dois pontos distintos do plano Π.

Agora abordaremos as seguintes isometrias no plano: a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão com deslizamento.

4.1.1 Translação no plano

Definição 4.1.4. *Sejam A e B dois pontos pertencentes ao plano Π, em que $A \neq B$. A* translação *é a função $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ no plano Π, que leva cada ponto $X \in \Pi$ ao ponto $T_{AB}(X) \in \Pi$ de modo que $ABT_{AB}(X)X$ é um paralelogramo.*

Essa definição se aplica quando consideramos os pontos A, B e X não colineares. O caso em que tais pontos são colineares foi apresentado na definição 3.1.3.

Definição 4.1.5. *A* translação de uma figura *G é a figura $T_{AB}(G) = \{T_{AB}(X) | X \in G\}$.*

Mostraremos que toda translação T_{AB} do plano Π é uma isometria.

Teorema 4.1.2. *Toda translação no plano Π é uma isometria.*

Demonstração. Sejam A, B, X e Y pontos arbitrários do plano Π. Sejam r e s retas do plano Π tais que $X, Y \in r$ e $A, B \in s$. Daí, temos duas possibilidades: r é coincidente ou paralela a s, ou r é concorrente com s.

1. Se r é coincidente ou paralela a s, então T_{AB}, restrita a r, é a translação $T_{XT_{AB}(X)} : r \to r$, logo $\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{XY}$.
2. Se r é concorrente com s, pela definição 4.1.4, temos que $XT_{AB}(X)$ e $YT_{AB}(Y)$ são congruentes e paralelos, logo, pela proposição 2.2.5, os pontos X, Y, $T_{AB}(Y)$ e $T_{AB}(X)$ formam um paralelogramo. Portanto, $\overline{T_{AB}(X)T_{AB}(Y)} = \overline{XY}$.

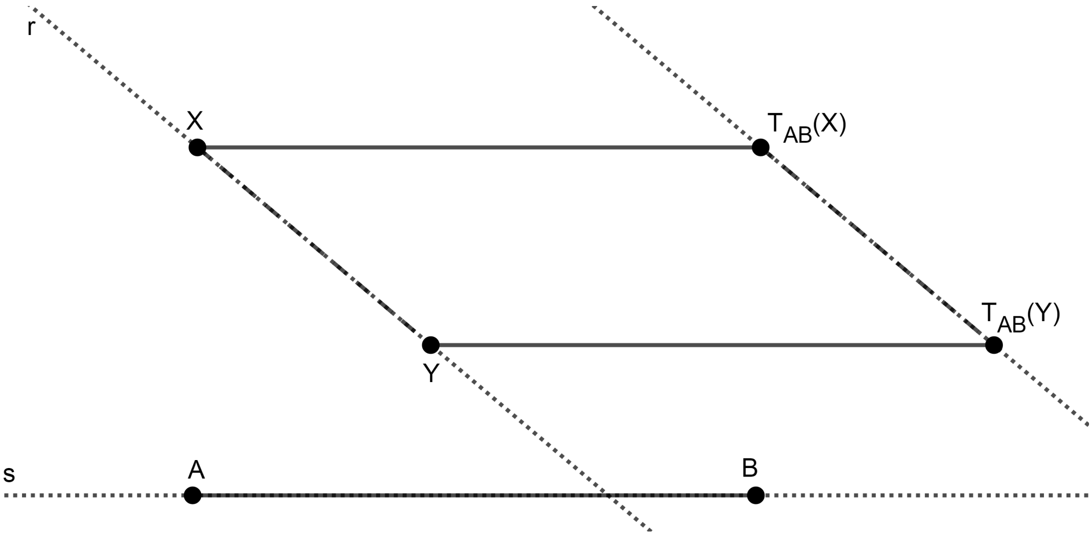

Figura 4.5: Retas r e s concorrentes.

□

Apresentaremos, a seguir, a rotação em torno de um ponto O qualquer do plano Π e provaremos que uma rotação também é uma isometria.

4.1.2 Rotação no plano

Antes de definirmos rotação precisaremos da noção de ângulo orientado, isto é, um ângulo em que seu lado inicial (origem do ângulo) e seu lado final (extremidade) estão bem determinados. Nesta seção, denotaremos por $\angle AOB$ o ângulo que tem OA como origem e OB como extremidade. Convencionaremos o ângulo $\angle AOB$ positivo se o sentido do ângulo da origem para a extremidade é anti-horário, caso contrário, será negativo. Segue que $B\widehat{O}A = -A\widehat{O}B$, conforme a Figura 4.6.

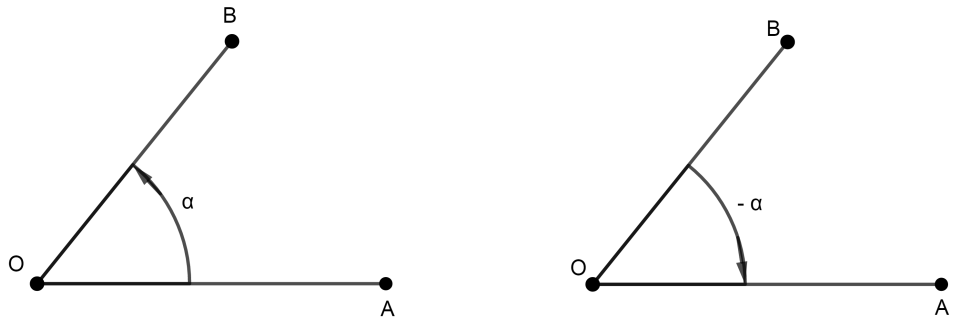

Figura 4.6: Ângulos orientados.

Definição 4.1.6. *Sejam O um ponto do plano Π e um ângulo cuja medida é α tal que $-180^o < \alpha \leq 180^o$. A* rotação *de centro O e ângulo igual a α é a função $\Delta_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ que deixa fixo o ponto O e leva qualquer ponto $X \neq O$ no ponto $\Delta_{O,\alpha}(X) \in \Pi$, tal que $\overline{OX} = \overline{O\Delta_{O,\alpha}(X)}$ e a medida do ângulo orientado $\angle XO\Delta_{O,\alpha}(X)$ é igual a α.*

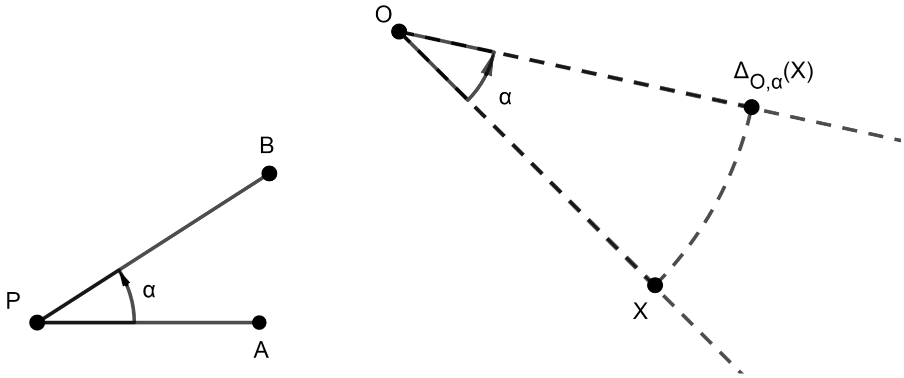

Figura 4.7: Ângulo $A\widehat{P}B = \alpha$ e rotação de ângulo igual a α e centro O.

Note que se $\alpha = 0^{\circ}$ então $X = \Delta_{O,\alpha}(X)$. Além disso, se $\alpha = 180^{\circ}$ então O é o ponto médio de $X\Delta_{O,\alpha}(X)$, pois, por hipótese, $\overline{OX} = \overline{O\Delta_{O,\alpha}(X)}$.

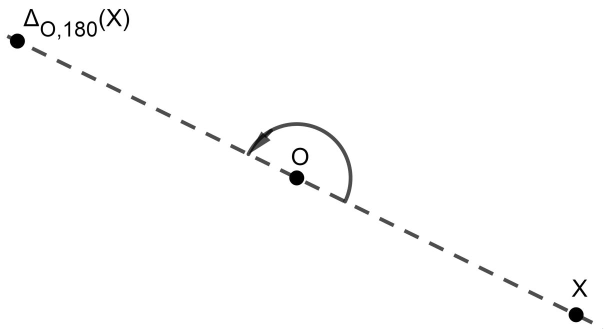

Figura 4.8: Rotação de ângulo igual a 180° e centro O.

Definição 4.1.7. *A* rotação de um ângulo igual a α de uma figura G *e centro em um ponto* O *é a figura* $\Delta_{O,\alpha}(G) = \{\Delta_{O,\alpha}(X) | X \in G\}$.

Demonstraremos agora que uma rotação qualquer $\Delta_{O,\alpha}$ é sempre uma isometria.

Teorema 4.1.3. *Toda rotação no plano* Π *é uma isometria.*

Demonstração. Sejam α a medida de um ângulo positivo e O, X, Y pontos distintos do plano Π. Daí, teremos dois casos: O, X e Y colineares ou O, X e Y não colineares.

1. Se O, X e Y são colineares, então teremos dois subcasos: $X - O - Y$ ou X e Y do mesmo lado de O.

   a) Se O está entre X e Y, então fazendo a rotação $\Delta_{O,\alpha}$ em X e Y, obtemos respectivamente os pontos $\Delta_{O,\alpha}(X)$ e $\Delta_{O,\alpha}(Y)$ conforme Figura 4.9.

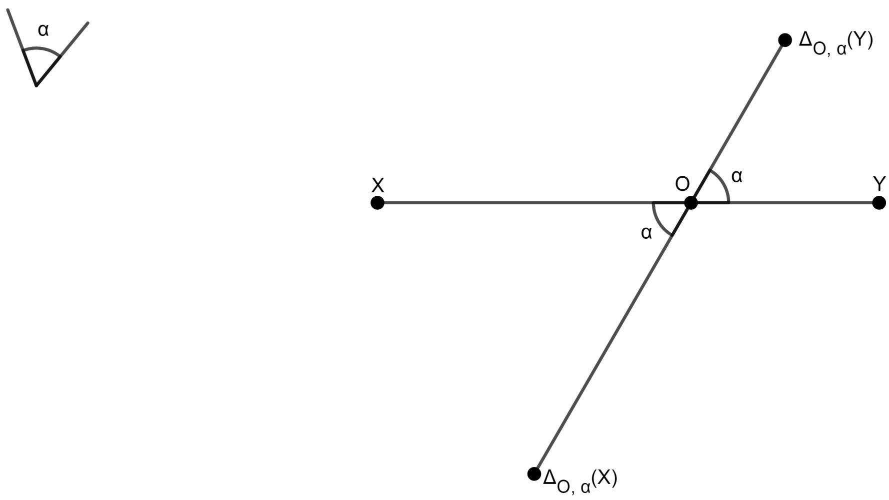

Figura 4.9: Ponto O entre os pontos X e Y.

Daí, por definição de rotação, temos que $X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X) = Y\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y)$, $\overline{XO} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)O}$ e $\overline{YO} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(Y)O}$. Além disso, temos, por hipótese, que $X - O - Y$, então $\angle XO\Delta_{O,\alpha}(X)$ e $\angle YO\Delta_{O,\alpha}(Y)$ são opostos pelo vértice O, logo $\Delta_{O,\alpha}(X)$, O e $\Delta_{O,\alpha}(Y)$ são colineares. Portanto,

$$\overline{XY} = \overline{XO} + \overline{OY} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)O} + \overline{O\Delta_{O,\alpha}(Y)} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)\Delta_{O,\alpha}(Y)}.$$

   b) Se X e Y estão do mesmo lado de O, então fazendo a rotação $\Delta_{O,\alpha}$ em X e Y, obtemos respectivamente os pontos $\Delta_{O,\alpha}(X)$ e $\Delta_{O,\alpha}(Y)$. Como, por definição de rotação, $X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X) = Y\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y)$, então os pontos O, $\Delta_{O,\alpha}(X)$ e $\Delta_{O,\alpha}(Y)$ são colineares. Além disso, por definição de rotação, temos que $\overline{XO} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)O}$ e $\overline{YO} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(Y)O}$. Portanto,

$$\overline{XY} = \left|\overline{YO} - \overline{XO}\right| = \left|\overline{\Delta_{O,\alpha}(Y)O} - \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)O}\right| = \overline{\Delta_{O,\alpha}(X)\Delta_{O,\alpha}(Y)}.$$

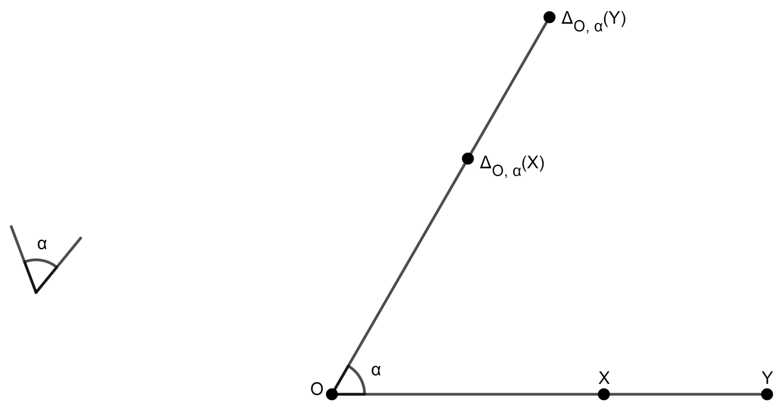

Figura 4.10: Pontos X e Y do mesmo lado do ponto O.

2. Se O, X e Y não são colineares, então fazendo a rotação $\Delta_{O,\alpha}$ temos, por definição de rotação, que $\overline{OY} = \overline{O\Delta_{O,\alpha}(Y)}$ e $\overline{OX} = \overline{O\Delta_{O,\alpha}(X)}$ e $X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X) = Y\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y) = \alpha$ conforme Figura 4.11. Mas,

   $X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X) = X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y) + \Delta_{O,\alpha}(Y)\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X)$ e $Y\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y) = Y\widehat{O}X + X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y)$.

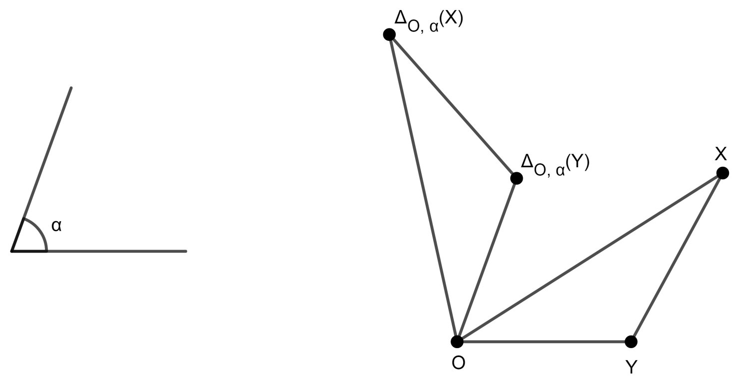

Figura 4.11: Rotação de um ângulo de medida igual a α e centro O.

Daí, $X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y) + \Delta_{O,\alpha}(Y)\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X) = Y\widehat{O}X + X\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(Y)$, então

$$Y\widehat{O}X = \Delta_{O,\alpha}(Y)\widehat{O}\Delta_{O,\alpha}(X).$$

Segue que os triângulos YOX e $\Delta_{O,\alpha}(Y)O\Delta_{O,\alpha}(X)$ são congruentes pelo caso $L.A.L.$ e portanto $\overline{YX} = \overline{\Delta_{O,\alpha}(Y)\Delta_{O,\alpha}(X)}$, ou seja, a rotação $\Delta_{O,\alpha}$ é uma isometria.

□

A seguir abordaremos a reflexão em torno de uma reta r qualquer do plano Π. O caso particular de reflexão de um ponto $X \in r$ foi estudado na subseção $3.1.2$.

4.1.3 Reflexão em torno de uma reta

Definição 4.1.8. *Seja uma reta $r \in \Pi$. A* reflexão em torno da reta *r é a função $R_r : \Pi \to \Pi$ que associa cada ponto $X \notin r$ do plano Π ao seu simétrico $R_r(X)$ em relação à reta r e cada $X \in r$ ao próprio X.*

Em outras palavras, quando $X \notin r$, $R_r(X)$ é o ponto tal que $XR_r(X)$ é o segmento perpendicular a r em que $\{A\} = XR_r(X) \cap r$ é o ponto médio de $XR_r(X)$ conforme ilustrado na Figura 4.12.

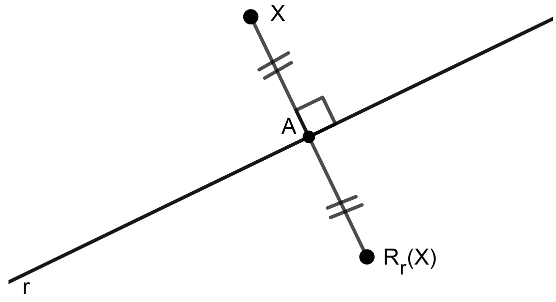

Figura 4.12: Reflexão do ponto X em torno da reta r.

A reflexão em torno da reta r também é conhecida como simetria de reflexão na reta r. Além disso, a reta r é conhecida como eixo da reflexão de R_r.

Agora vamos mostrar que toda reflexão em torno de uma reta dada do plano Π preserva distância, isto é, trata-se de uma isometria.

Teorema 4.1.4. *Toda reflexão em torno de uma reta r qualquer do plano Π é uma isometria.*

Demonstração. Sejam X, Y e r respectivamente dois pontos distintos e uma reta do plano Π. Consideraremos os seguintes casos: $X, Y \in r$, somente um dos pontos pertence à reta r, X e Y estão em um mesmo semiplano determinado por r, e X e Y estão em semiplanos distintos determinados por r.

1. Se $X, Y \in r$, então, por definição, temos que $R_r(X) = X$ e $R_r(Y) = Y$. Portanto, $\overline{R_r(X)R_r(Y)} = \overline{XY}$.

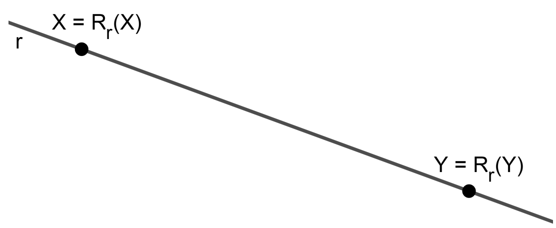

Figura 4.13: Pontos X e Y sobre a reta r.

2. Se somente um dos pontos pertence à reta r, por exemplo, sem perda de generalidade, $X \in r$, então teremos dois subcasos: $\{X\} = YR_r(Y) \cap r$ ou $\{X\} \neq YR_r(Y) \cap r$.
   a) Se $\{X\} = YR_r(Y) \cap r$, então, por definição, X é ponto médio de $YR_r(Y)$. Logo, $\overline{XY} = \overline{XR_r(Y)}$. Mas, por definição, $R_r(X) = X$ e portanto, $\overline{XY} = \overline{XR_r(Y)} = \overline{R_r(X)R_r(Y)}$.

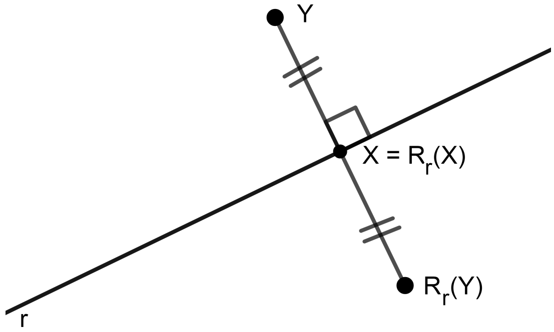

Figura 4.14: Reflexão R_r com X sendo o ponto médio de $YR_r(Y)$.

   b) Se $\{X\} \neq YR_r(Y) \cap r$, então, por definição, existe o ponto $A \in r$ tal que A é o ponto médio de $YR_r(Y)$ conforme Figura 4.15. Daí, temos que os triângulos XAY e $XAR_r(Y)$ são congruentes pelo caso $L.A.L.$, pois, por definição, $\overline{YA} = \overline{R_r(Y)A}$, $X\widehat{A}Y = X\widehat{A}R_r(Y) = 90^o$ e o segmento XA é lado comum. Logo, $\overline{XY} = \overline{XR_r(Y)}$. Mas, $R_r(X) = X$, por definição, e portanto, $\overline{XY} = \overline{XR_r(Y)} = \overline{R_r(X)R_r(Y)}$.

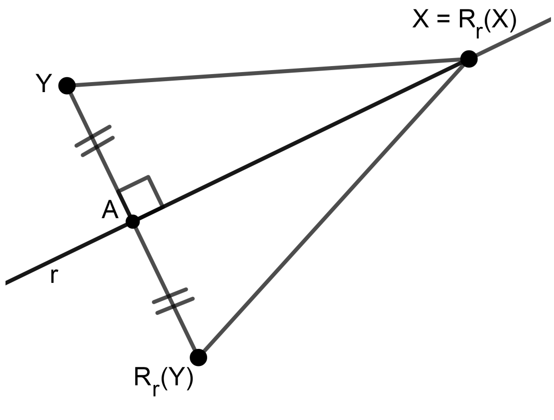

Figura 4.15: Reflexão R_r com $X \in r$.

3. Se X e Y estão em um mesmo semiplano determinado por r, então teremos os seguintes subcasos: XY paralelo a r, $\overleftrightarrow{XY}$ perpendicular a r, e $\overleftrightarrow{XY}$ concorrente com r e não perpendicular a r.
   a) Se XY é paralelo a r, então $XYR_r(Y)R_r(X)$ é um retângulo e portanto $\overline{R_r(X)R_r(Y)} = \overline{XY}$.

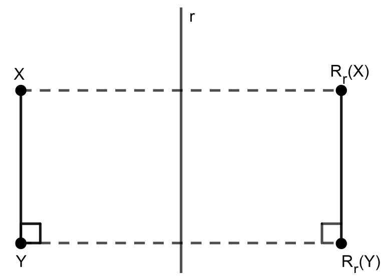

Figura 4.16: Segmento XY paralelo a reta r.

b) Se a reta $s = \overleftrightarrow{XY}$ é perpendicular a r, então as retas $\overleftrightarrow{XR_r(X)}$ e $\overleftrightarrow{YR_r(Y)}$ são perpendiculares a r e passam respectivamente por X e Y conforme Figura 4.17. Pelo teorema 2.2.1, temos $\overleftrightarrow{XR_r(X)} = \overleftrightarrow{XY} = \overleftrightarrow{YR_r(Y)}$. Logo, X, Y, $R_r(X)$ e $R_r(Y)$ são colineares. Seja $\{O\} = s \cap r$. Daí,

$$\overline{XY} = \left|\overline{XO} - \overline{YO}\right| = \left|\overline{R_r(X)O} - \overline{R_r(Y)O}\right| = \overline{R_r(X)R_r(Y)}.$$

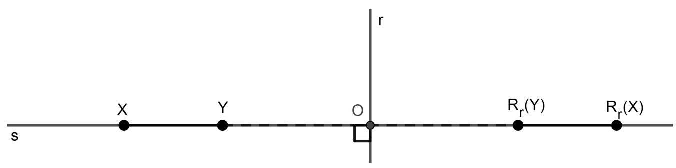

Figura 4.17: Retas r e s perpendiculares.

c) Se a reta $s = \overleftrightarrow{XY}$ é concorrente com r e não perpendicular a r, traçamos por X a reta paralela a r que intercepta a reta suporte de $YR_r(Y)$ em A. Daí, temos que $X\widehat{A}Y = 90^o$, pois é XA é paralela a r, e $YR_r(Y)$ é perpendicular a r por definição de reflexão. Pelo item $a)$, temos que $\overline{XA} = \overline{R_r(X)R_r(A)}$ e, pelo item $b)$, temos que $\overline{AY} = \overline{R_r(A)R_r(X)}$, $X\widehat{A}Y = 90^o$, pois $\overleftrightarrow{XA} \parallel r$.

Logo, os triângulos XAY e $R_r(X)R_r(A)R_r(Y)$ são congruentes pelo caso $L.A.L.$ e consequentemente suas hipotenusas são congruentes, isto é, $\overline{XY} = \overline{R_r(X)R_r(Y)}$.

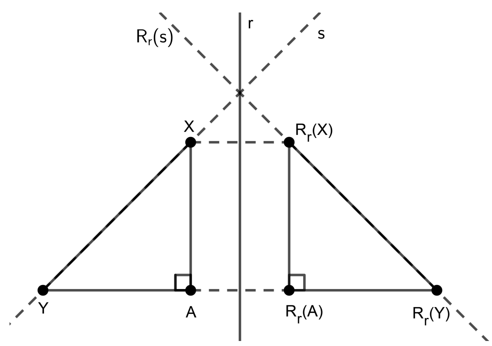

Figura 4.18: Pontos X e Y do mesmo lado da reta r.

4. Se X e Y estão em semiplanos distintos, então teremos os dois subcasos: XY perpendicular a r ou XY não é perpendicular a r.

   a) Se XY é perpendicular a r, então existe um ponto A tal que $\{A\} = XY \cap r$ conforme Figura 4.19. Pelo teorema 2.2.1, temos que X, $R_r(Y)$, A, Y e $R_r(X)$ são colineares. Logo,

$$\overline{XY} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{AR_r(X)} + \overline{AR_r(Y)} = \overline{R_r(X)R_r(Y)}.$$

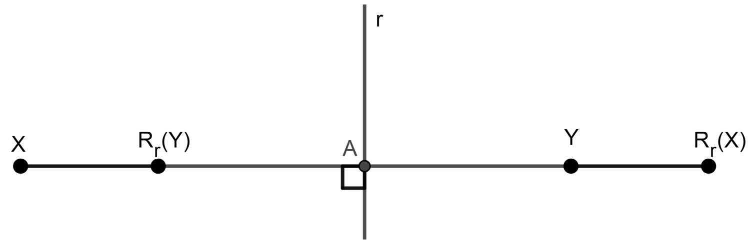

Figura 4.19: Segmento XY perpendicular a r.

   b) Se XY não é perpendicular a r, então traçamos o segmento XY, obtendo assim, o ponto A de interseção de XY e r. Sejam B e C os respectivos pontos de interseções de $XR_r(X)$ e r e $YR_r(Y)$ e r, isto é, $XR_r(X) \cap r = \{B\}$ e $YR_r(Y) \cap r = \{C\}$ conforme Figura 4.20.

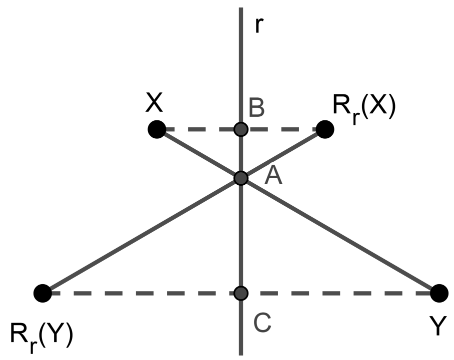

Figura 4.20: Pontos X e Y em lados opostos de r.

Daí, temos, por construção, que os triângulos BXA e $BR_r(X)A$ são retângulos em B, com cateto AB comum e, por definição de reflexão, os catetos XB e $R_r(X)B$ são congruentes. Logo, pelo caso $L.A.L.$, os triângulos BXA e $BR_r(X)A$ são congruentes e consequentemente $\overline{XA} = \overline{R_r(X)A}$. Analogamente, os triângulos ACY e $ACR_r(Y)$ são congruentes, logo $\overline{YA} = \overline{R_r(Y)A}$.

Desse modo, os triângulos $AXR_r(X)$ e $AYR_r(Y)$ são isósceles de bases $XR_r(X)$ e $YR_r(Y)$ respectivamente, portanto, pela proposição 2.2.2, temos que suas medianas relativas às bases também são bissetrizes, isto é, $B\widehat{A}X = B\widehat{A}R_r(X)$ e $C\widehat{A}Y = C\widehat{A}R_r(Y)$. Além disso, $B\widehat{A}X$ e $C\widehat{A}Y$ são opostos pelo vértice A e consequentemente temos que $B\widehat{A}R_r(X) = B\widehat{A}X = C\widehat{A}Y = C\widehat{A}R_r(Y)$. Assim, $R_r(X)$, A, $R_r(Y)$ são colineares e portanto temos $\overline{R_r(X)R_r(Y)} = \overline{R_r(X)A} + \overline{AR_r(Y)} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}$.

Logo, em todos os casos, temos que $\overline{R_r(X)R_r(Y)} = \overline{XY}$. Portanto, toda reflexão em torno de uma reta é uma isometria.

□

Definição 4.1.9. *A reflexão de uma figura G em torno de uma reta r é a figura $R_r(G) = \{R_r(X) | X \in G\}$.*

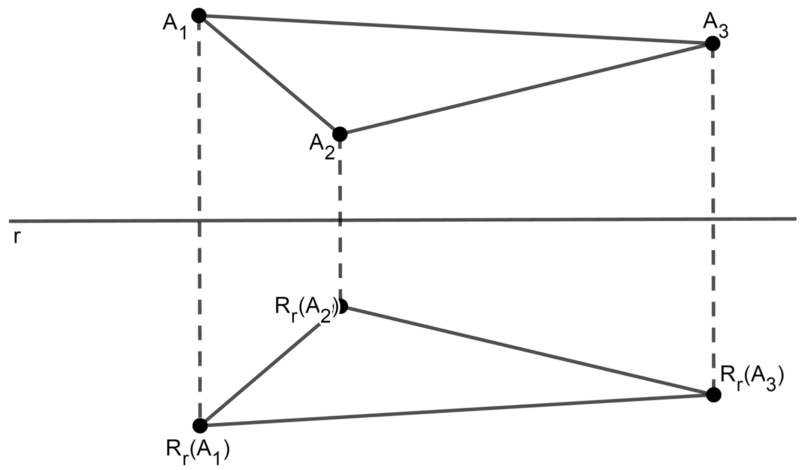

Figura 4.21: Reflexão do triângulo $A_1A_2A_3$ em torno da reta r.

Quando uma figura coincide com sua imagem pela reflexão em torno de uma reta r, dizemos que essas figuras são simétricas em relação a r. Além disso, a reta r é chamada eixo de simetria da figura. Veremos que algumas figuras possuem um ou mais eixos de simetria, principalmente os polígonos regulares.

Observação 4.1.1. *Há figuras que não possuem eixo de simetria como os paralelogramos excetuando os losangos e retângulos.*

Exemplo 4.1.1. *Vejamos alguns exemplos de figuras que possuem pelo menos um eixo de simetria.*

a) *Um triângulo isósceles ABC qualquer, de base BC, possui somente um eixo de simetria que é a mediatriz da sua base BC conforme Figura* 4.22.

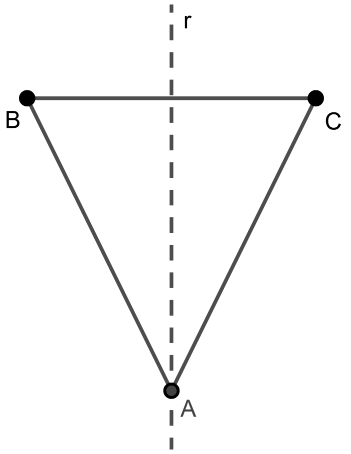

Figura 4.22: Eixo de simetria do triângulo isósceles.

b) Um losango $ABCD$ qualquer, possui dois eixos de simetria que são as retas r e s que respectivamente passam pelas diagonais AC e BD conforme Figura 4.23.

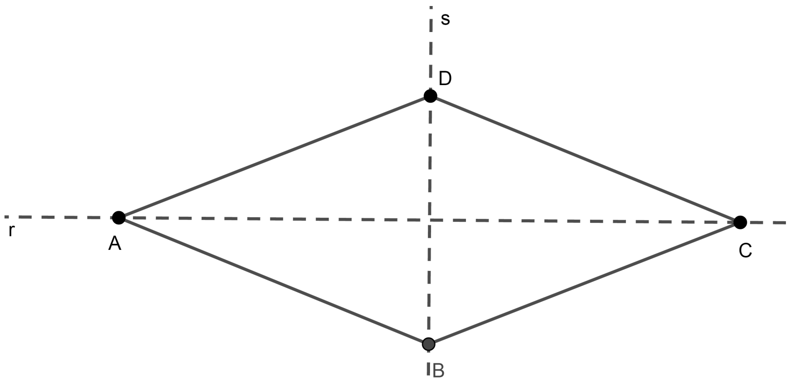

Figura 4.23: Eixos de simetria do losango $ABCD$.

c) Um triângulo equilátero ABC qualquer possui três eixos de simetria que são as retas suportes de suas medianas conforme Figura 4.24.

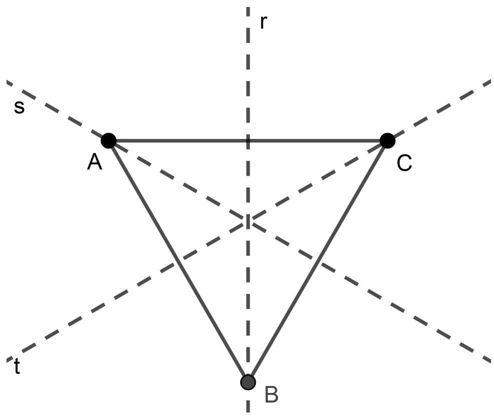

Figura 4.24: Eixos de simetria do triângulo equilátero ABC.

d) Um quadrado $ABCD$ qualquer possui quatro eixos de simetria que são as retas suportes de suas diagonais e as mediatrizes de seus lados conforme Figura 4.25.

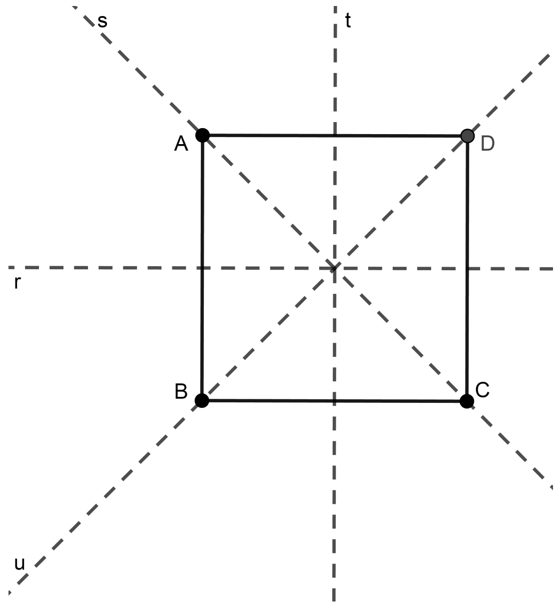

Figura 4.25: Eixos de simetria do quadrado $ABCD$.

e) A circunferência é simétrica em relação à reta suporte de qualquer um de seus diâmetros conforme Figura 4.26. Desse modo, possui infinitos eixos de simetria.

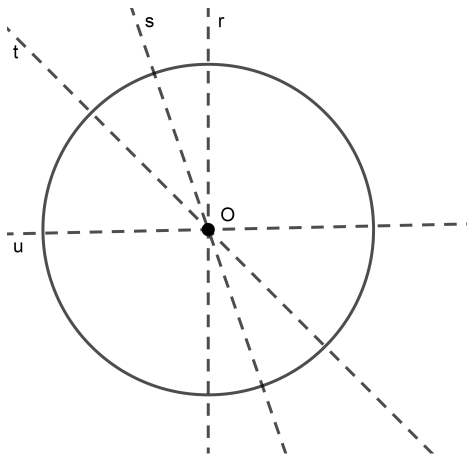

Figura 4.26: Alguns eixos de simetria da circunferência de centro O.

Observação 4.1.2. *Qualquer polígono regular de n lados possui n eixos de simetria.*

Abordaremos, a seguir, a reflexão com deslizamento que é a aplicação da reflexão R_r em torno de uma reta r seguida de uma translação T_{AB} no plano Π.

4.1.4 Reflexão com deslizamento no plano

Definição 4.1.10. *Sejam uma reta r e um segmento AB paralelo a reta r no plano Π. A* reflexão com deslizamento*, determinada por AB e pela reta r é a isometria $R = T_{AB} \circ R_r : \Pi \to \Pi$, obtida fazendo a reflexão R_r e, em seguida, a translação T_{AB}.*

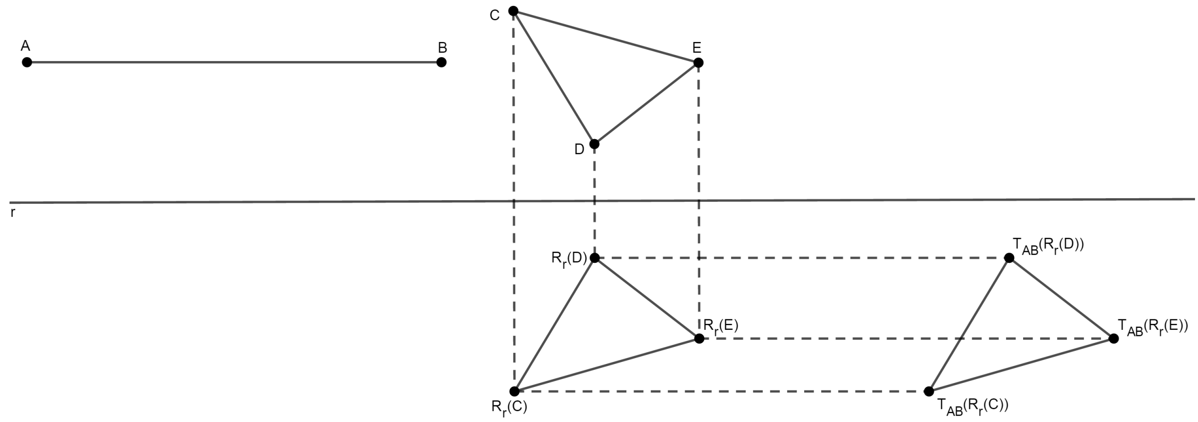

Figura 4.27: Reflexão com deslizamento do triângulo CDE.

Observação 4.1.3. *Note que, se considerarmos o mesmo segmento AB e a mesma reta r da definição 4.1.10, temos que as isometrias $R = T_{AB} \circ R_r : \Pi \to \Pi$ e $S = R_r \circ T_{AB} : \Pi \to \Pi$ são iguais.*

Veremos, a seguir, que há somente quatro tipos de isometrias no plano, além da função identidade. Para demonstrarmos esse fato, usaremos a igualdade de isometrias e a composição isometrias, portanto, abordaremos antes a condição para que duas isometrias F e S sejam iguais e a composição de isometrias no plano.

Teorema 4.1.5. *Uma isometria $F : \Pi \to \Pi$ que possui três pontos fixos é a* função identidade.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma isometria $F : \Pi \to \Pi$. Sejam A, B, $C \in \Pi$ distintos tais que $F(A) = A$, $F(B) = B$ e $F(C) = C$. Se existisse $X \in \Pi$, com $F(X) \neq X$, então, pela definição 4.1.2, teríamos $\overline{AX} = \overline{F(A)F(X)} = \overline{AF(X)}$, logo, A seria ponto médio de $XF(X)$. Analogamente, B e C também seriam ponto médio de $XF(X)$ implicando em $A = B = C$, o que é um absurdo, pois contraria a hipótese. Portanto, uma isometria $F : \Pi \to \Pi$ diferente da função identidade possui no máximo dois pontos fixos. □

Teorema 4.1.6. *Sejam $F : \Pi \to \Pi$ e $S : \Pi \to \Pi$ isometrias. Se existirem três pontos distintos A, B e $C \in \Pi$ não colineares tais que $F(A) = S(A)$, $F(B) = S(B)$ e $F(C) = S(C)$, então $F = S$, isto é, $F(X) = S(X)$ para todo $X \in \Pi$.*

Demonstração. Temos que a isometria $R = F^{-1} \circ S : \Pi \to \Pi$ é tal que $R(A) = A$, $R(B) = B$ e $R(C) = C$. Portanto, pelo teorema 4.1.5, R é a identidade, isto é, $S = T$. □

Teorema 4.1.7. *Se a função $F : \Pi \to \Pi$ do plano Π é uma isometria, então F é uma translação, uma rotação, uma reflexão, uma reflexão com deslizamento ou a função identidade.*

Demonstração. Se F é uma isometria diferente da função identidade, então existe um ponto X do plano Π tal que $F(X) \neq X$. Tomemos o ponto $F(F(X))$. Daí, por definição, temos que $\overline{XF(X)} = \overline{F(X)F(F(X))} > 0$, implicando assim, em três casos: $F(F(X)) = X$, ou X, $F(X)$ e $F(F(X))$ são pontos distintos colineares, ou X, $F(X)$ e $F(F(X))$ são pontos não colineares.

1. Se $F(F(X)) = X$, então a isometria F transforma o segmento de reta $XF(X)$ em si mesmo. Se M é o ponto médio de $XF(X)$, então $F(M) = M$ e, consequentemente, a mediatriz s de $XF(X)$ é transformada em si mesma pela isometria F. De fato, tomando $Z \in s$ temos que $\overline{ZX} = \overline{ZF(X)}$ então $\overline{F(Z)F(X)} = \overline{F(Z)X}$, logo $F(Z) \in s$. Tome $Y \neq M \in s$. Daí, temos duas possibilidades: $F(Y) = Y$ ou $F(Y) = Y'$, ponto simétrico de Y em relação à reta r que passa pelos pontos X e $F(X)$.

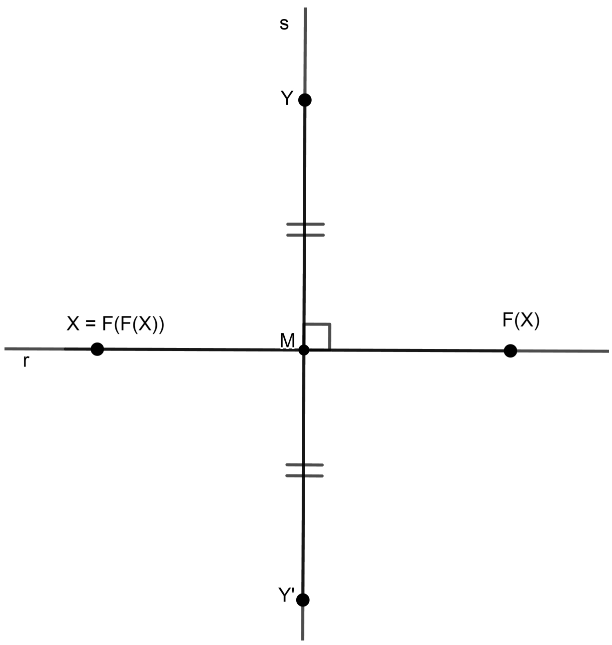

Figura 4.28: Ponto $F(F(X))$ coincidindo com o ponto X.

   a) Se $F(Y) = Y$, então F coincide com a reflexão $R_s : \Pi \to \Pi$ nos pontos X, $F(X)$ e Y. Portanto, $F = R_s$, isto é, F é uma reflexão em torno de uma reta.
   b) Se $F(Y) = Y'$, então F coincide com a rotação $\Delta_{M,180^o} : \Pi \to \Pi$ nos pontos X, Y e M. Portanto, $F = \Delta_{M,180^o}$, isto é, F é uma rotação.

   Logo, neste caso, temos que a isometria F é uma reflexão ou uma rotação.
2. Se X, $F(X)$ e $F(F(X))$ são pontos distintos colineares, então, por definição de isometria, temos que $\overline{XF(X)} = \overline{F(X)F(F(X))}$ e consequentemente $F(X)$ é o ponto médio de $XF(F(X))$. Temos que a reta r, que passa pelos três pontos dados, é

transformada em si mesma pela isometria F. Além disso, F coincide com a translação $T_{XF(X)} : r \to r$ e portanto, da definição 3.1.3, temos que a isometria F coincide com a translação $T_{XF(X)}$. Tome um ponto Y fora de r. Daí, o triângulo $XF(X)Y$ é transformado, pela isometria F, no triângulo que tem $F(X)$ e $F(F(X))$ como vértices e lados com mesmas medidas que os de $XF(X)Y$. Para o terceiro vértice, temos duas posições possíveis, Y' e Y'', sendo: Y e Y' em um mesmo semiplano determinado por r, com X, $F(X)$, $F(F(X)) \in r$ ou Y e Y'' em semiplanos opostos.

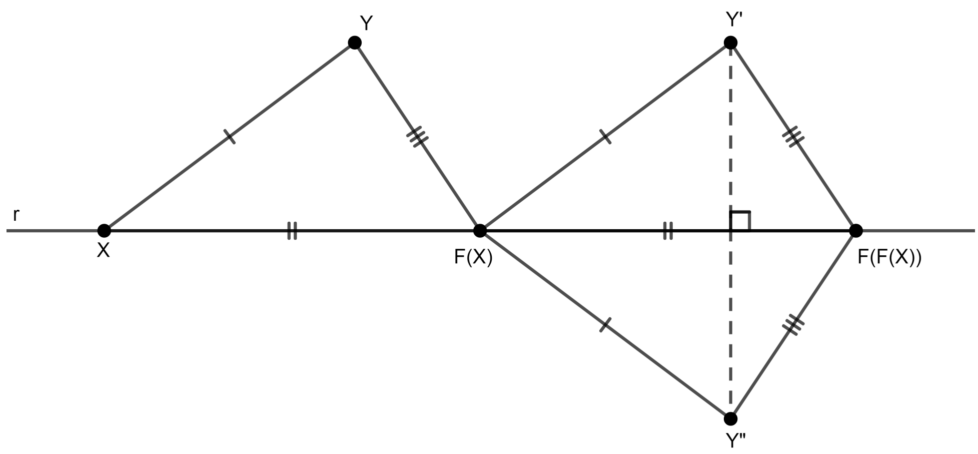

Figura 4.29: Pontos X, $F(X)$ e $F(F(X))$ colineares.

a) Se Y e Y' estão em um mesmo semiplano determinado por r, então XY e $F(X)Y'$ são lados opostos do paralelogramo $YXF(X)Y'$. Logo, a isometria F coincide com a translação $T_{XF(X)} : \Pi \to \Pi$ nos pontos não colineares X, $F(X)$ e Y. Portanto, da definição 4.1.6, temos que $F = T_{XF(X)}$, isto é, F é uma translação.

b) Se Y e Y'' estão em semiplanos opostos determinados por r, então Y'' é o simétrico de Y' em relação à reta r. Logo, F coincide com a reflexão com deslizamento $S = R_r \circ T_{XF(X)} : \Pi \to \Pi$, pois $S(X) = F(X)$, $S(F(X)) = F(F(X))$ e $S(Y) = Y'' = F(Y)$. Da definição 4.1.6, temos que $S = F$ e portanto F é uma reflexão com deslizamento.

Portanto, neste caso, temos que a isometria F é uma translação ou uma reflexão com deslizamento.

3. Se X, $F(X)$ e $F(F(X))$ são pontos não colineares, então, pela isometria F, a imagem do triângulo $XF(X)F(F(X))$ é um triângulo que tem $F(X)$ e $F(F(X))$ como vértices. Para o terceiro vértice, temos duas possibilidades, Y' e Y'', sendo: X e Y' em um mesmo semiplano determinado por $r = \overleftrightarrow{F(X)F(F(X))}$ de modo que $\overline{F(F(X))Y'} = \overline{F(X)F(F(X))}$ ou X e Y'' em semiplanos opostos tal que $\overline{F(F(X))Y''} = \overline{F(X)F(F(X))}$.

Temos que os triângulos $F(X)F(F(X))Y'$ e $F(X)F(F(X))Y''$ são congruentes ao primeiro triângulo $XF(X)F(F(X))$ pelo caso $L.L.L.$, pois a isometria F garante mesmas distâncias. Daí, os lados desse novo triângulo têm medidas iguais às dos lados do triângulo $XF(X)F(F(X))$.

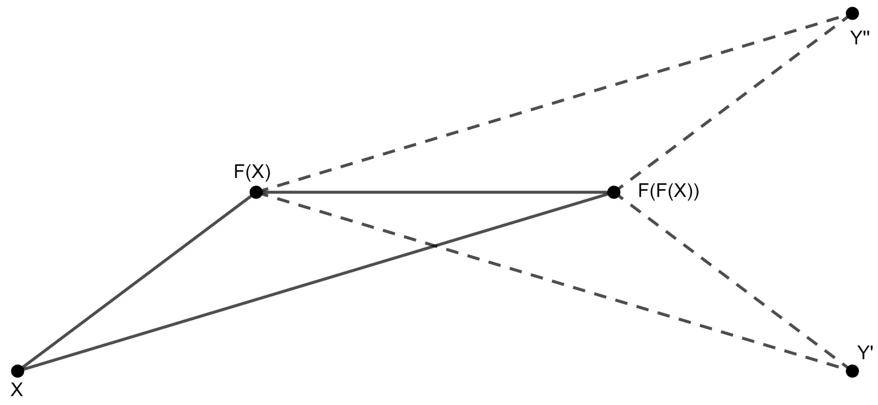

Figura 4.30: Pontos X, $F(X)$ e $F(F(X))$ não colineares.

a) Se X e Y' estão no mesmo semiplano determinado por r, então os pontos X, $F(X)$, $F(F(X))$ e $Y' = F(F(F(X)))$ formam uma poligonal em que os segmentos $XF(X)$, $F(X)F(F(X))$ e $F(F(X))Y'$ têm mesma medida e os ângulos $X\widehat{F(X)}F(F(X))$ e $F(X)\widehat{F(F(X))}Y'$ são iguais. Daí, os triângulos $XF(X)F(F(X))$ e $F(X)F(F(X))Y'$ são congruentes pelo caso $L.A.L.$, pois, pela isometria F, temos que $\overline{XF(X)} = \overline{F(X)F(F(X))}$, $X\widehat{F(X)}F(F(X)) = F(X)\widehat{F(F(X))}Y'$ e $\overline{F(X)F(F(X))} = \overline{F(F(X))Y'}$.

Sejam O e P os respectivos circuncentros dos triângulos $XF(X)F(F(X))$ e $F(X)F(F(X))Y'$, então $\overline{OX} = \overline{OF(X)} = \overline{OF(F(X))}$ e $\overline{PF(X)} = \overline{PF(F(X))} = \overline{PY'}$ e, pela congruência dos triângulos $XF(X)F(F(X))$ e $F(X)F(F(X))Y'$, temos que $\overline{OF(X)} = \overline{PF(F(X))}$ por serem circuncentros, então $\overline{OF(X)} = \overline{PF(X)}$. Analogamente, temos $\overline{OF(F(X))} = \overline{PF(F(X))}$. Como O e P pertencem à mediatriz do segmento $F(X)F(F(X))$, segue que $O = P$.

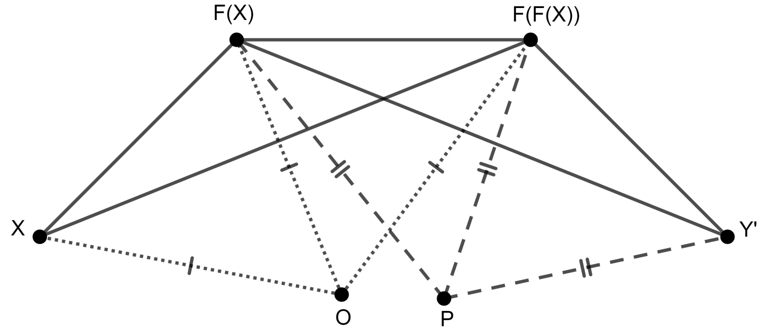

Figura 4.31: Circuncentros dos triângulos $XF(X)F(F(X))$ e $F(X)F(F(X))Y'$.

Portanto, a poligonal formada pelos pontos X, $F(X)$, $F(F(X))$ e $Y' = F(F(F(X)))$ pode ser inscrita em uma circunferência de raio $\overline{OX}$, em que o centro O é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos $XF(X)$, $F(X)F(F(X))$ e $F(F(X))Y'$.

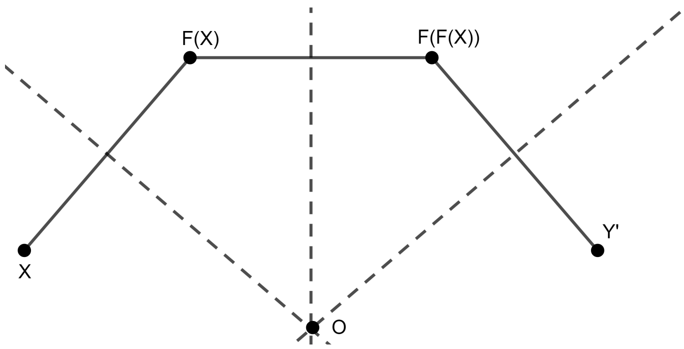

Figura 4.32: Pontos X e Y' no mesmo semiplano determinado por r.

Daí, temos que $\overline{OX} = \overline{OF(X)} = \overline{OF(F(X))}$ e, pela isometria F, temos $\overline{F(O)F(X)} = \overline{F(O)F(F(X))} = \overline{F(O)Y'}$, logo $F(O)$ pertence às mediatrizes dos segmentos $F(X)F(F(X))$ e $F(F(X))Y'$ e portanto $F(O) = O$. Tomemos a rotação $\Delta_{O,\alpha}$, em que $\alpha = X\widehat{O}F(X)$, então teremos $\Delta_{O,\alpha}(F(F(X))) = Y' = F(F(F(X)))$, $\Delta_{O,\alpha}(F(X)) = F(F(X))$ e $\Delta_{O,\alpha}(X) = F(X)$. Portanto, da definição 4.1.6, temos que $F = \Delta_{O,\alpha}$, isto é, F é uma rotação.

b) Se X e Y'' estão em semiplanos opostos determinados por r, então os pontos X, $F(X)$, Y'', e $F(F(X))$ formam um paralelogramo em que $XF(X)$ e $F(F(X))Y''$ são lados opostos e $F(X)F(F(X))$ é uma diagonal.

Sejam M, N e P os respectivos pontos médios de $XF(X)$, $F(X)F(F(X))$ e $F(F(X))Y''$. Como MN é base média do triângulo $XF(X)F(F(X))$ então $MN \parallel XF(F(X))$. Analogamente, $NP \parallel F(X)Y''$. Como $XF(F(X)) \parallel F(X)Y''$ segue que M, N e P são colineares. Tracemos a reta s passando por M, N e P.

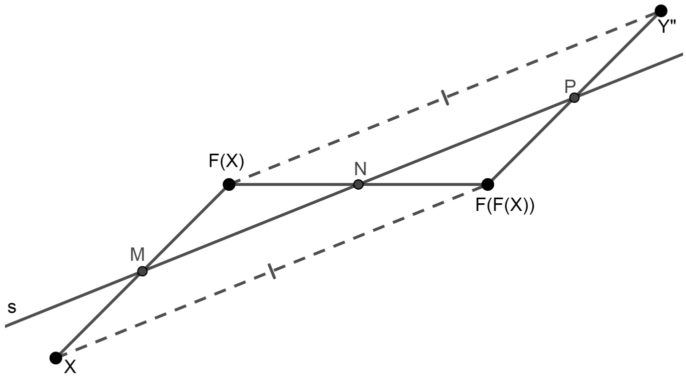

Figura 4.33: Pontos X e Y'' em semiplanos opostos determinados por r.

Logo, F coincide com a reflexão com deslizamento $S = R_s \circ T_{MN} : \Pi \to \Pi$ nos pontos não colineares X, $F(X)$ e $F(F(X))$. Portanto, da definição 4.1.6, a isometria F é igual S, isto é, F é uma reflexão com deslizamento.

Portanto, neste caso, temos que a isometria F é uma rotação ou uma reflexão com deslizamento.

□

Veremos, a seguir, algumas aplicações das isometrias no plano.

4.2 Aplicações das isometrias no plano

4.2.1 Translação

Exemplo 4.2.1. *Dados os pontos distintos A e B, determine a translação T_{AB} de um quadrilátero $XYZW$ dado conforme Figura 4.34.*

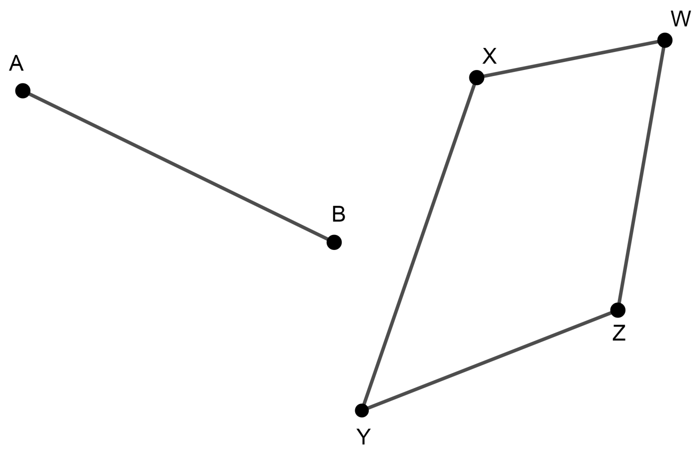

Figura 4.34: Pontos A, B e quadrilátero $XYZW$.

RESOLUÇÃO: Tracemos pelos pontos X, Y, Z e W, respectivamente, as retas x, y, z e w paralelas ao segmento AB. Transportemos o segmento AB sobre essas retas, no sentido de A para B, determinando os respectivos pontos $T_{AB}(X)$, $T_{AB}(Y)$, $T_{AB}(Z)$ e $T_{AB}(W)$ conforme Figura 4.35. Portanto, $T_{AB}(X)T_{AB}(Y)T_{AB}(Z)T_{AB}(W)$ é o quadrilátero procurado.

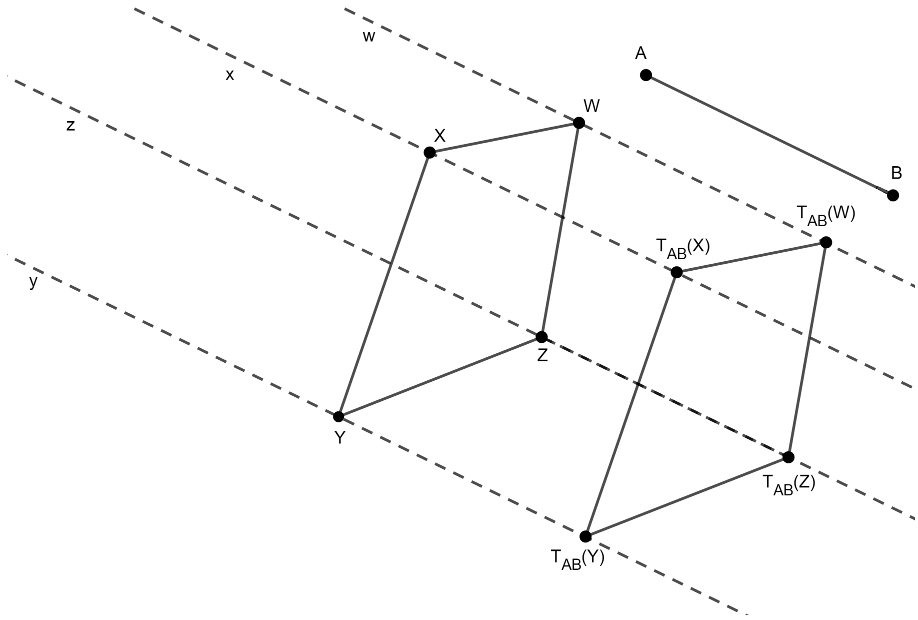

Figura 4.35: Translação T_{AB} do quadrilátero $XYZW$.

Exemplo 4.2.2. *Dados os pontos A e B e as circunferências Λ_1 e Λ_2 posicionados conforme Figura 4.36, encontre os pontos $D \in \Lambda_1$ e $C \in \Lambda_2$ tais que $ABCD$ é um paralelogramo.*

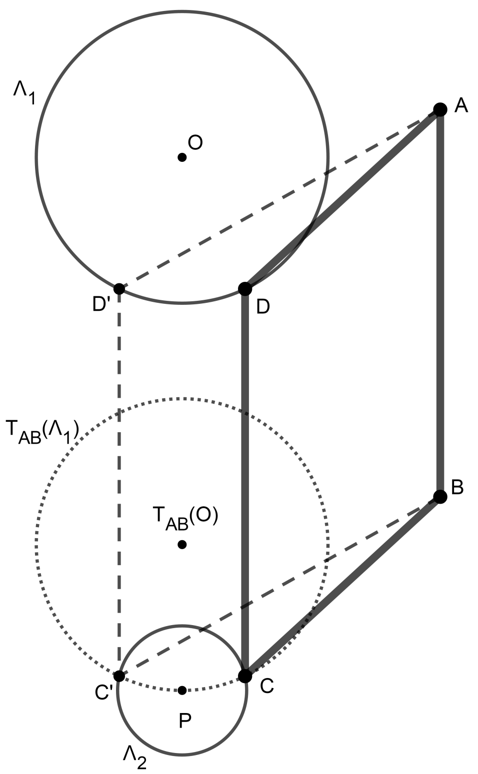

Figura 4.36: Problema sobre translação no plano.

RESOLUÇÃO: Considere a translação T_{AB}. Temos que $T_{AB}(\Lambda_1) \cap \Lambda_2 = \{C, C'\}$. Sejam D e D' tais que $T_{AB}(D) = C$ e $T_{AB}(D') = C'$. Assim, temos que $ABCD$ e $ABC'D'$ são paralelogramos.

4.2.2 Rotação

Exemplo 4.2.3. *Dados as retas r e s e um ponto A fora delas, encontre os pontos $B \in r$ e $C \in s$ tais que ABC seja um triângulo equilátero.*

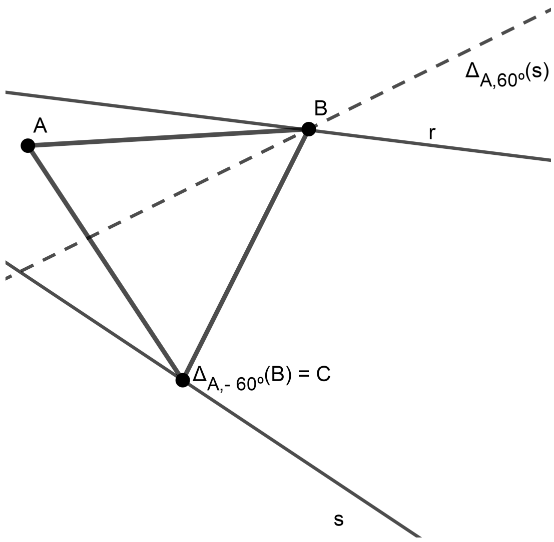

Figura 4.37: Rotações de centro no ponto A.

RESOLUÇÃO: Sejam as rotações $\Delta_{A,60^o}$ e $\Delta_{A,-60^o}$. Daí, temos que a reta $\Delta_{A,60^o}(s)$ contém o ponto B, pois todos os pontos de $\Delta_{A,60^o}(s)$ estão rotacionados de 60^o e centro no ponto A. Como $B \in r$ então $\{B\} = \Delta_{A,60^o}(s) \cap r$. Aplicando a rotação $\Delta_{A,-60^o}$ em B, obtemos o ponto $\Delta_{A,-60^o}(B) \in s$. Por definição de isometria, temos que $\overline{AB} = \overline{A\Delta_{A,-60^o}(B)}$, logo o triângulo $AB\Delta_{A,-60^o}(B)$ é isósceles de base $B\Delta_{A,-60^o}(B)$. Segue que $\widehat{B} = \widehat{\Delta_{A,-60^o}(B)}$. Como $\widehat{A} = 60^o$, então $\widehat{B} = \widehat{\Delta_{A,-60^o}(B)} = 60^o$, portanto, $AB\Delta_{A,-60^o}(B)$ é equilátero. Logo, $\Delta_{A,-60^o}(B) = C$.

Exemplo 4.2.4. *Dadas três retas r, s e t paralelas em que a distância entre r e s é igual à distância entre s e t, construa um triângulo equilátero com um vértice em cada uma das retas.*

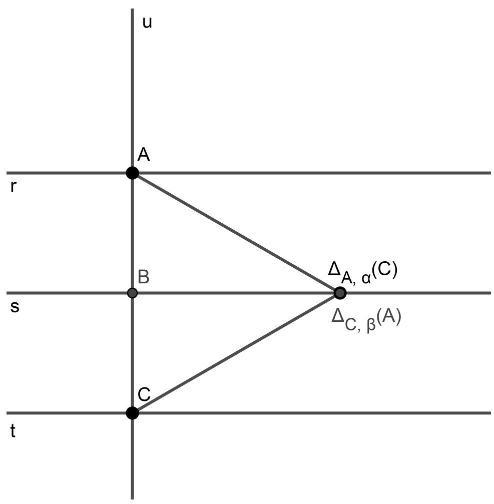

Figura 4.38: Problema de rotação no plano.

RESOLUÇÃO: Sejam r, s e t retas paralelas em que a distância entre r e s é igual à distância entre s e t conforme Figura 4.38. Traçando uma reta u perpendicular às retas dadas, obtemos os pontos A, B e C em que $\{A\} = u \cap r$, $\{B\} = u \cap s$ e $\{C\} = u \cap t$. Faça a rotação do ponto C, de centro A e ângulo igual a α de modo que $\Delta_{A,\alpha}(C) \in s$, e a rotação do ponto A, de centro C e ângulo igual a β de modo que $\Delta_{C,\beta}(A) \in s$ no mesmo semiplano determinado por u. Os triângulos $AB\Delta_{A,\alpha}(C)$ e $CB\Delta_{C,\beta}(A)$ são retângulos em B, por construção, e, consequentemente, congruentes, pelo caso $C.H.$, pois $\overline{AB} = \overline{CB}$, por hipótese, e $\overline{A\Delta_{A,\alpha}(C)} = \overline{C\Delta_{C,\beta}(A)} = \overline{AC}$, pela definição de rotação no plano, logo $\overline{B\Delta_{A,\alpha}(C)} = \overline{B\Delta_{C,\beta}(A)}$. Segue que $\Delta_{A,\alpha}(C) = \Delta_{C,\beta}(A)$. Tome $D = \Delta_{A,\alpha}(C) = \Delta_{C,\beta}(A)$, então $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD}$, logo o triângulo ACD é equilátero.

4.2.3 Reflexão

Exemplo 4.2.5. *Sejam ABC um triângulo qualquer e r uma reta. Determine a reflexão de ABC em torno da reta r sabendo que o triângulo ABC está inteiramente contido num dos semiplanos determinados por r conforme Figura* 4.39.

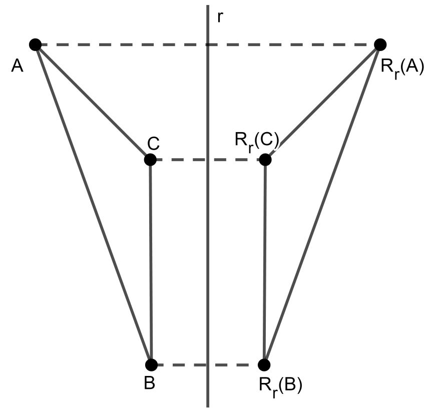

Figura 4.39: Reflexão do triângulo ABC em torno de r.

RESOLUÇÃO: Marque os pontos $R_r(A)$, $R_r(B)$ e $R_r(C)$ tal que sejam respectivamente os simétricos dos vértices A, B e C em relação a reta r. Portanto, pela definição de simetria em relação a uma reta, o triângulo $R_r(A)R_r(B)R_r(C)$ é a reflexão do triângulo ABC.

Exemplo 4.2.6. *Um homem mora na casa X. Esse homem planeja pescar no rio r e levar o pescado para sua namorada que mora na casa Y, do mesmo lado do rio r conforme ilustrado na Figura* 4.40*. Encontre graficamente o menor trajeto tal que o homem consiga executar seu plano.*

RESOLUÇÃO: Sejam X e Y pontos pertencentes ao mesmo semiplano determinado pela reta r. Marque os pontos $R_r(Y)$ e Q, em que $\{Q\} = YR_r(Y) \cap r$. O menor caminho é XPY sendo o ponto P de interseção de $XR_r(Y)$ e r. Isso se justifica, pois, por construção, os triângulos PQY e $PQR_r(Y)$ são retângulos em Q e consequentemente são congruentes pelo caso $L.A.L.$

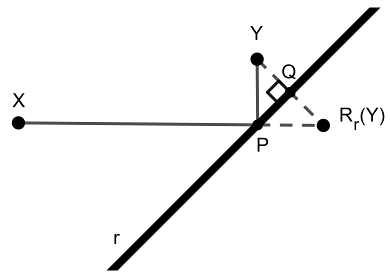

Figura 4.40: Problema sobre reflexão.

já que PQ é lado comum, $Y\widehat{Q}P = R_r(Y)\widehat{Q}P = 90^o$ e, pela definição de reflexão, $\overline{YQ} = \overline{R_r(Y)Q}$. Portanto, $\overline{PY} = \overline{PR_r(Y)}$. Segue-se que

$$\overline{XR_r(Y)} = \overline{XP} + \overline{PR_r(Y)} = \overline{XP} + \overline{PY}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, para qualquer ponto $P' \in r$, com $P' \neq P$, teremos, de modo análogo, que

$$\overline{XP'} + \overline{P'R_r(Y)} = \overline{XP'} + \overline{P'Y}. \tag{4.3}$$

Mas, pela desigualdade triangular, temos $\overline{XP'} + \overline{P'R_r(Y)} > \overline{XR_r(Y)}$ e, pelas relações (4.3) e (4.2), temos $\overline{XP'} + \overline{P'Y} > \overline{XP} + \overline{PY}$. Portanto, o menor trajeto é XPY.

4.2.4 Reflexão com deslizamento

Exemplo 4.2.7. *Um casal mora ao lado de um rio reto e possui um terreno em forma de quadrilátero localizado do outro lado desse rio, com a distância da casa até o rio igual à distância das extremidades do maior lado do terreno até o rio conforme Figura 4.41, sendo A a casa do casal, $XYWZ$ o terreno e r o rio. Para cuidar desse terreno, o casal tem que atravessar o rio de jangada. Quando chove, a travessia fica muito perigosa, então esse casal resolveu vender esse terreno e comprar outro com as mesmas dimensões de modo que tenha o maior lado voltado para o rio e que sua casa fique no meio desse lado. Encontre os pontos X', Y', W' e Z' que determinam o novo terreno que satisfaz a exigência do casal.*

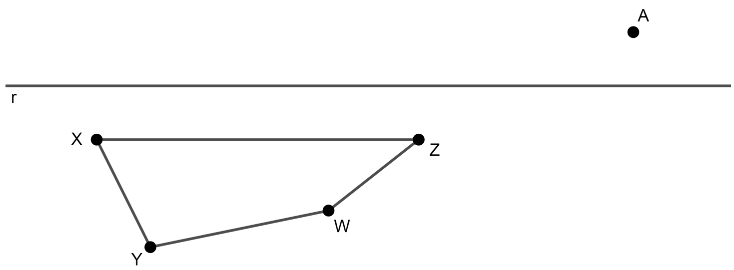

Figura 4.41: Problema do terreno do outro lado do rio.

RESOLUÇÃO: Seja $R_r(X)R_r(Y)R_r(W)R_r(Z)$ a reflexão do terreno $XYWZ$ em torno de r. Considere B o ponto médio do segmento $R_r(X)R_r(Z)$ e a translação T_{BA}. Logo, o terreno que satisfaz a exigência do casal é $T_{BA}(R_r(X))T_{BA}(R_r(Y))T_{BA}(R_r(W))T_{BA}(R_r(Z))$, isto é, $T_{BA}(R_r(X)) = X'$, $T_{BA}(R_r(Y)) = Y'$, $T_{BA}(R_r(W)) = W'$ e $T_{BA}(R_r(Z)) = Z'$.

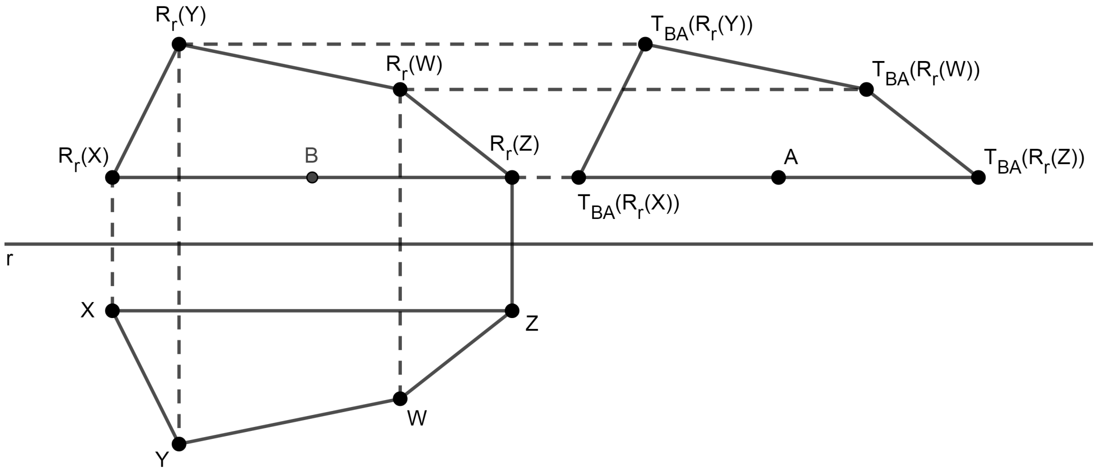

Figura 4.42: Reflexão com deslizamento.

Assim como na reta, as isometrias no plano são classificadas em próprias e impróprias. Veremos também que as composições dessas isometrias continuam respeitando as mesmas regras das composições na reta.

4.3 Isometrias próprias e impróprias no plano

Para facilitar o entendimento da diferença entre as isometrias próprias e impróprias no plano, começaremos com um exemplo bem simples.

Exemplo 4.3.1. *A translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ e a reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ transformam um mesmo quadrilátero $XYWZ$ do plano Π nos respectivos quadriláteros $T_{AB}(X)T_{AB}(Y)T_{AB}(W)T_{AB}(Z)$ e $R_r(X)R_r(Y)R_r(W)R_r(Z)$.*

Intuitivamente, é facil ver que é possível deslocar $XYWZ$ até sobrepor o quadrilátero $T_{AB}(X)T_{AB}(Y)T_{AB}(W)T_{AB}(Z)$, conforme Figura 4.43, mas não é possível deslocar $XYWZ$ até sobrepor o quadrilátero $R_r(X)R_r(Y)R_r(W)R_r(Z)$ sem sair do plano Π.

Antes de definirmos isometrias próprias e impróprias, definiremos movimento no plano Π.

Definição 4.3.1. *Um* movimento *no plano Π é uma coleção de isometrias $H_t : \Pi \to \Pi$, uma para cada número real $t \in [0,1]$, em que H_0 é a função identidade e, para cada ponto X de Π fixado, o ponto $H_t(X)$ varia continuamente em função de t, quando t varia de 0 a 1.*

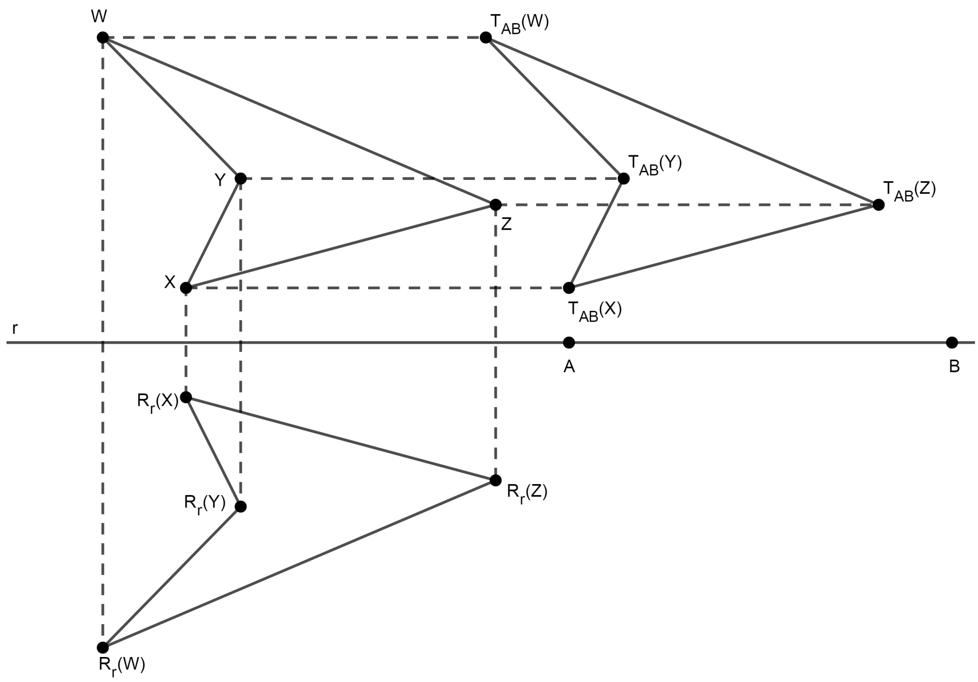

Figura 4.43: Translação T_{AB} e reflexão R_r.

Definição 4.3.2. *A isometria* $F : \Pi \to \Pi$ *é dita* própria *quando existe um movimento* $H_t : \Pi \to \Pi$*,* $t \in [0,1]$*, em que* $H_1 = F$*. Caso contrário, a isometria é dita* imprópria.

Em outras palavras, uma isometria F é própria quando é a etapa final de um movimento. Porém, se nenhum movimento H_t do plano Π termina com F, então F será imprópria.

A seguir provaremos que as translações e rotações são próprias enquanto que as reflexões e as reflexões com deslizamento são impróprias.

Teorema 4.3.1. *Toda translação é uma isometria própria.*

Demonstração. Seja a translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ e um movimento $H_t : \Pi \to \Pi$ definido por $H_0 =$ identidade e $H_t = T_{AB_t} : \Pi \to \Pi$, para $t \in (0,1]$. Quando t varia de 0 a 1, para todo ponto $X \in \Pi$ fixado, o ponto $H_t(X) = T_{AB_t}(X)$ percorre o segmento de reta XY, sendo $Y = T_{AB}(X)$, iniciando o movimento em X e finalizando em Y. Portanto, $H_1 = T_{AB}$, logo T_{AB} é própria. $\square$

Teorema 4.3.2. *Toda rotação é uma isometria própria.*

Demonstração. Sejam um ângulo $A\widehat{O}B = \alpha$ e a rotação $\Delta_{O,\alpha_t} : \Pi \to \Pi$. Para cada t, com $0 < t \leq 1$, seja B_t o ponto do segmento de reta AB tal que $t = \overline{AB_t}/\overline{AB}$ com $\alpha_t = A\widehat{O}B_t$. Consideremos a rotação $H_t = \Delta_{O,\alpha_t} : \Pi \to \Pi$, com $0 < t \leq 1$ e definamos $H_0 =$ identidade. Quando t varia de 0 a 1, para todo ponto $X \in \Pi$ fixado, o ponto $H_t(X) = \Delta_{O,\alpha_t}(X)$ percorre o arco de círculo com centro em O e raio $\overline{OX}$ iniciando o movimento em X e finalizando em

$Y = \Delta_{O,\alpha}(X) = H_1$. Portanto, H_t, $0 \leq t \leq 1$, é um movimento que termina na rotação $\Delta_{O,\alpha}$, logo $\Delta_{O,\alpha}$ é própria.

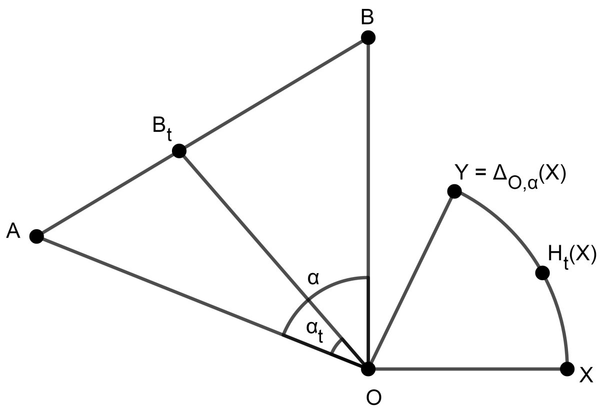

Figura 4.44: A rotação $\Delta_{O,\alpha}$ é própria.

□

Teorema 4.3.3. *Toda reflexão é uma isometria imprópria.*

Uma demonstração desse teorema é feita usando coordenadas cartesianas, o que foge do escopo do nosso trabalho. Portanto, não faremos tal demonstração sendo que esta pode ser vista em [7].

Vimos que uma reflexão com deslizamento é uma composição de duas isometrias sendo uma reflexão e uma translação. Portanto, para provarmos que uma reflexão com deslizamento é imprópria, precisaremos de dois teoremas auxiliares que demonstraremos a seguir.

Teorema 4.3.4. *Se $F, T : \Pi \to \Pi$ são duas isometrias próprias, então a composta $F \circ T : \Pi \to \Pi$ e as inversas F^{-1}, T^{-1} são isometrias próprias.*

Demonstração. Como $F, T : \Pi \to \Pi$ são duas isometrias próprias, então por definição, existem dois movimentos $M_t, N_t : \Pi \to \Pi$, com $t \in [0, 1]$, que terminam respectivamente em F e T, portanto, $H_t = M_t \circ N_t$ é um movimento que termina em $F \circ T$ e as inversas $(M_t)^{-1}$, $(N_t)^{-1} : \Pi \to \Pi$ são movimentos que terminam respectivamente em F^{-1}, T^{-1}. □

Teorema 4.3.5. *Sejam $F, T : \Pi \to \Pi$ isometrias. Se uma é própria e a outra é imprópria, então a composta $F \circ T : \Pi \to \Pi$ é imprópria.*

Demonstração. Sejam F própria e T imprópria. Daí, se $F \circ T$ fosse própria, então, do teorema 4.3.4, teríamos que $T = F^{-1} \circ (F \circ T)$ também seria própria, o que é absurdo. Portanto, $F \circ T$ é imprópria. □

Teorema 4.3.6. *Toda reflexão com deslizamento é uma isometria imprópria.*

Demonstração. Sejam $T,R:\Pi\to\Pi$ respectivamente uma translação e uma reflexão, então, por definição, a composta $R\circ T:\Pi\to\Pi$, é uma reflexão com deslizamento. Pelos teoremas 4.3.1 e 4.3.3, temos que T é própria e R é imprópria, e, pelo teorema 4.3.5, temos que a composta $R\circ T:\Pi\to\Pi$ é imprópria. Portanto, toda reflexão com deslizamento é imprópria. □

Agora falta abordar a composição de duas isometrias impróprias. Mas, para isso, usaremos dois lemas que serão demonstrados a seguir.

Lema 4.3.1. *Dados os pontos distintos A, B, $C,D\in\Pi$ com $\overline{AB}=\overline{CD}$, existe uma isometria própria $P:\Pi\to\Pi$ tal que $P(A)=C$ e $P(B)=D$.*

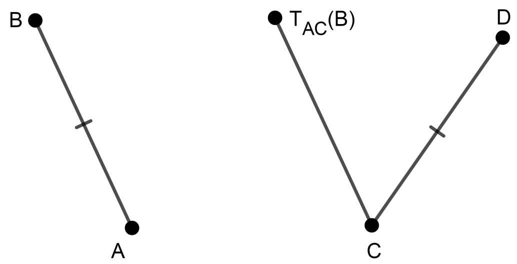

Figura 4.45: Isometrias próprias.

Demonstração. Seja a translação $T_{AC}:\Pi\to\Pi$. Essa translação transforma o segmento AB no segmento $CT_{AC}(B)$. Daí, temos duas situações $T_{AC}(B)=D$ ou $T_{AC}(B)\neq D$.

1. Se $T_{AC}(B)=D$ então $P=T_{AC}$.
2. Se $T_{AC}(B)\neq D$, então $T_{AC}(B)$, C e D formam o ângulo $T_{AC}(B)\widehat{C}D=\alpha$. A rotação $\Delta_{C,\alpha}$ leva $T_{AC}(B)$ em D e deixa C fixo. Pelos teoremas 4.3.1 e 4.3.2, temos que T_{AC} e $\Delta_{C,\alpha}$ são isometrias próprias e, pelo teorema 4.3.4, a composta $P=\Delta_{C,\alpha}\circ T_{AC}$ é uma isometria própria tal que $P(A)=C$ e $P(B)=D$.

□

Lema 4.3.2. *Seja $F:\Pi\to\Pi$ uma isometria imprópria. Para toda reflexão $R_r:\Pi\to\Pi$, as isometrias compostas $F\circ R_r$ e $R_r\circ F$ são próprias.*

Demonstração. Sejam ABC e r respectivamente um triângulo e uma reta, sendo que os vértices $A,B\in r$ conforme Figura 4.46. Os pontos A, C, B e $R_r(C)$ formam um quadrilátero. Daí, a isometria F transforma r em $F(r)$ e $ACBR_r(C)$ no quadrilátero $F(A)F(C)F(B)F(R_r(C))$. Segue que $F\circ R_r$ leva os pontos A e B respectivamente em $F(A)$ e $F(B)$, mas leva C em $F(R_r(C))$ e $R_r(C)$ em $F(C)$. O Lema 4.3.1, garante a existência de uma isometria própria $P:\Pi\to\Pi$ tal que $P(A)=F(A)$ e $P(B)=F(B)$. Por definição de isometria, temos que $F(A)$ e $F(B)$ são

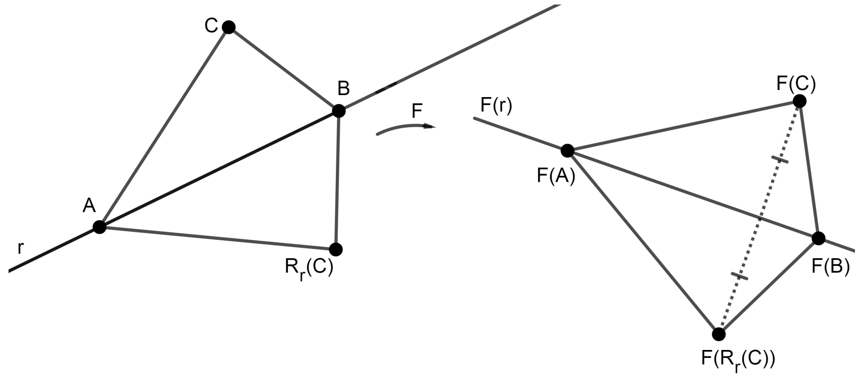

Figura 4.46: Composição de isometrias impróprias.

equidistantes de $F(R_r(C))$ e $F(C)$, logo $F(r)$ é a mediatriz do segmento $F(C)F(R_r(C))$. De modo análogo, r é a mediatriz de $CR_r(C)$. Segue do Lema 4.3.1 que P transforma o segmento $CR_r(C)$ no segmento $F(C)F(R_r(C))$. Em particular, $P(C) = F(C)$ ou $P(C) = F(R_r(C))$.

1. Se $P(C) = F(C)$, então $P = F$ e P seria imprópria, o que é absurdo, pois P é própria por hipótese.
2. Se $P(C) = F(R_r(C))$, então $P = F \circ R_r$, logo $F \circ R_r$ é própria.

Analogamente, temos que $R_r \circ F$ é própria.

□

Teorema 4.3.7. *A composição de duas isometrias impróprias é uma isometria própria.*

Demonstração. Sejam $F, T : \Pi \to \Pi$ isometrias impróprias e $R : \Pi \to \Pi$ uma reflexão arbitrária. Como $R \circ R =$ identidade, então $F \circ T = F \circ R \circ R \circ T = (F \circ R) \circ (R \circ T)$. Pelo Lema 4.3.2, as compostas $(F \circ R)$ e $(R \circ T)$ são próprias, logo $F \circ T$ é a composta de duas isometrias próprias. Portanto, pelo teorema 4.3.4, $F \circ T$ é uma isometria própria. □

5 Planos de aula

Sugerimos, neste capítulo, planejamentos de aulas que podem ser aplicados como aulas práticas de isometrias para consolidação de conceitos, definições e propriedades sobre isometrias estudados em sala de aula. Portanto, sugerimos que essa sequência didática seja aplicada após as aulas teóricas. Sugerimos ainda que os professores façam, antes da aplicação desta sequência, aulas práticas com a utilização de folha quadriculada para ajudar na visualização das propriedades estudadas.

Nos planos de aula, abordaremos uma sequência didática com a utilização do software matemático GeoGebra. Para usar o comando de translação do GeoGebra, será necessário construir um vetor. Para a atividade de translação, devemos introduzir a ideia geométrica de vetor na qual precisamos de um comprimento, uma direção e um sentido. Nessa atividade, explicaremos como se constrói um vetor no GeoGebra.

Acreditamos que o uso da tecnologia despertará o interesse e motivará o aluno, pois tratam-se de aulas práticas diferenciadas nas quais, através de investigações, construções, comparações e manipulações de figuras de forma dinâmica, eles têm a possibilidade de consolidar os conteúdos estudados. Os principais comandos do software, assim como um exemplo de aula, estão disponíveis em [5].

Por ser uma sequência didática, deve-se sempre salvar o arquivo ao final de cada atividade para que na próxima aula possa dar continuidade nas atividades propostas. Serão cinco aulas de 50 minutos cada, sendo quatro aulas práticas e uma aula avaliativa conforme planejamento a seguir.

5.1 1ª Aula

1. **Objetivo geral**

   Apresentação do software GeoGebra.

2. **Objetivos específicos**

   a) Identificar os principais comandos do software GeoGebra;

   b) Construir figuras usando os comandos do software GeoGebra.

3. **Conteúdo**

   Construções geométricas no software GeoGebra.

4. **Metodologia**

   Aula prática e explicativa.

5. **Desenvolvimento**

   Dividir os alunos em duplas e pedir para se encaminharem à sala de informática. Nesta primeira aula, deve-se ensinar aos alunos os comandos básicos do software GeoGebra como: ponto, segmento de reta e reta.

   Para praticar, deve-se pedir para cada dupla construir figuras diversas usando esses comandos. Por exemplo: triângulos, quadriláteros em geral e outras figuras.

6. **Recursos:**

   a) Laboratório de Informática;
   b) Software GeoGebra;
   c) Quadro;
   d) Pincéis;
   e) Apagador.

7. **Avaliação:**

   a) Perguntas orais;
   b) Participação.

5.2 2ª Aula

1. **Objetivo geral**

   Usar o software GeoGebra para fazer translações, rotações, reflexões e reflexões com deslizamento.

2. **Objetivos específicos**

   a) Identificar uma translação;
   b) Identificar uma rotação;
   c) Identificar uma reflexão;
   d) Identificar uma reflexão com deslizamento.

3. **Conteúdo**

Isometrias no plano.

4. **Metodologia**
Aula prática e explicativa.

5. **Desenvolvimento**
Dividir os alunos em duplas e pedir para se encaminharem à sala de informática. Nesta aula, deve-se pedir para cada dupla criar uma pasta na área de trabalho com o nome de Isometrias. Posteriormente, no GeoGebra, pedir para cada dupla desenhar um triângulo ABC qualquer usando os comandos ensinados na aula anterior.
Agora, deve-se pedir para salvar essa figura em quatro arquivos do GeoGebra (.ggb), na pasta Isometrias, com os seguintes nomes:
   a) Translação;
   b) Rotação;
   c) Reflexão;
   d) Reflexão com deslizamento.

A partir daí, deve-se trabalhar com cada arquivo separadamente conforme abaixo:
   a) Atividade 1: Translação.
   Pedir para cada dupla abrir o arquivo cujo nome é Translação e fazer a translação horizontal do triângulo ABC de modo que a nova figura percorra 10 quadrados à direita conforme escala do GeoGebra. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo na pasta Isometrias.
   b) Atividade 2: Rotação.
   Pedir para cada dupla abrir o arquivo cujo nome é Rotação e fazer a rotação positiva de 90° do triângulo ABC e centro no vértice A. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo na pasta Isometrias.
   c) Atividade 3: Reflexão.
   Pedir para cada dupla abrir o arquivo cujo nome é Reflexão e construir uma reta r ao lado do triângulo ABC. Posteriormente, pedir para fazer a reflexão do triângulo ABC em torno da reta r. Após o término, pedir para salvarem o arquivo na pasta Isometrias.
   d) Atividade 4: Reflexão com deslizamento.
   Pedir para cada dupla abrir o arquivo cujo nome é Reflexão com deslizamento e construir uma reta r ao lado do triângulo ABC. Posteriormente, pedir para fazerem a reflexão com deslizamento do triângulo ABC em torno da reta r e amplitude igual a 10 quadrados para baixo. Após o término, pedir para salvarem o arquivo na pasta Isometrias.

Se houver tempo, pedir aos alunos para abrirem um novo arquivo e fazerem diferentes tipos de figuras usando os comandos do GeoGebra, isso para se familiarizarem mais com o software.

6. **Recursos**
    a) Laboratório de Informática;
    b) Software GeoGebra;
    c) Quadro;
    d) Pincéis;
    e) Apagador.

7. **Avaliação**
    a) Perguntas orais;
    b) Participação.

5.3 3ª Aula

1. **Objetivo geral**
   Usar o software GeoGebra para comparar translações e rotações.

2. **Objetivos específicos**
    a) Identificar uma translação;
    b) Identificar uma rotação.

3. **Conteúdo**
   Isometrias no plano.

4. **Metodologia**
   Aula prática e explicativa.

5. **Desenvolvimento**
   Dividir os alunos em duplas e pedir para se encaminharem à sala de informática. Esta aula deve ser dividida em dois momentos conforme abaixo:
    a) Atividade 1: Translação.
       Pedir para cada dupla abrir o arquivo de nome Translação. Neste momento, deve-se introduzir a noção de vetor. Posteriormente, pedir para cada dupla criar um vetor $\overrightarrow{AB}$ com comprimento de 10 quadrados (unidade de medida do GeoGebra). Seguem os passos para construção deste vetor:

i. construir o segmento AB paralelo ao eixo das abscissas (direção: horizontal), com B à direita de A, em que $\overline{AB} = 10$ unidades de medida (comprimento).

ii. clicar no comando de vetor e clicar no ponto A e depois no B (sentido: de A para B).

Agora, deve-se pedir para cada dupla usar o comando de translação para transladar o triângulo ABC e assim comparar se sua resposta está correta. Caso não, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade.

Para praticar, pedir para fazerem translações do triângulo ABC com amplitudes e direções variadas. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

b) Atividade 2: Rotação.

Pedir para cada dupla abrir o arquivo de nome Rotação e usar o comando de rotação em torno de um ponto para rotacionar o triângulo ABC em torno do vértice A com ângulo de 90^{o} e assim comparar se sua resposta está correta. Caso não, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade.

Para praticar, pedir para fazerem rotações variadas do triângulo ABC. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

Para finalizar essa aula, fazer conforme abaixo:

a) Pedir para cada dupla abrir um novo arquivo no GeoGebra e construir uma figura qualquer. Posteriormente, pedir para fazerem uma translação qualquer dessa figura sem usar o comando de translação. Pedir para cada dupla verificar se sua resposta está correta, usando o comando de translação. Para isso, deve-se pedir para a dupla criar um vetor $\overrightarrow{AB}$ apropriado (dependendo da direção, do comprimento e do sentido usados pela dupla) e usar o comando de translação comparando assim as duas figuras transladadas. Caso a resposta não esteja correta, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

b) Pedir para cada dupla abrir um novo arquivo no GeoGebra e construir uma figura qualquer. Posteriormente, pedir para fazerem uma rotação qualquer dessa figura sem usar o comando de rotação. Pedir a dupla para verificar se sua resposta está correta, usando o comando de rotação em torno de um ponto e comparando as figuras rotacionadas. Caso a resposta não esteja correta, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

Se houver tempo para praticar mais, deve-se pedir que façam translações e rotações variadas dessa figura.

6. **Recursos**
   a) Laboratório de Informática;
   b) Software GeoGebra;
   c) Quadro;
   d) Pincéis;
   e) Apagador.

7. **Avaliação**
   a) Perguntas orais;
   b) Participação.

5.4 4ª Aula

1. **Objetivo geral**
   Usar o software GeoGebra para comparar reflexões e reflexões com deslizamento.

2. **Objetivos específicos**
   a) Identificar uma reflexão;
   b) Identificar uma reflexão com deslizamento.

3. **Conteúdo**
   Isometrias no plano.

4. **Metodologia**
   Aula prática e explicativa.

5. **Desenvolvimento**
   Dividir os alunos em duplas e pedir para se encaminharem à sala de informática. Esta aula deve ser dividida em dois momentos conforme abaixo:
   a) Atividade 1: Reflexão.
      Pedir para cada dupla abrir o arquivo de nome Reflexão e usar o comando de reflexão em relação a uma reta para refletir o triângulo ABC em torno da reta r e assim comparar se sua resposta está correta. Caso a

resposta não esteja correta, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

Para praticar, pedir para fazerem reflexões variadas do triângulo ABC. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

b) Atividade 2: Reflexão com deslizamento.

Pedir para cada dupla abrir o arquivo de nome Reflexão com deslizamento e usar o comando reflexão em relação a uma reta para refletir o triângulo ABC em torno de r obtendo assim, o triângulo $A'B'C'$. Posteriormente, pedir para criarem o vetor v igual a 10 quadrados para baixo, conforme escala do GeoGebra, e usar o comando de translação por um vetor para transladar o triângulo $A'B'C'$ e assim comparar se sua resposta está correta. Caso não, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade.

Para praticar, pedir para fazerem reflexões com deslizamento variadas do triângulo ABC. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

Para finalizar essa aula, fazer conforme abaixo:

a) Pedir para cada dupla abrir um novo arquivo no GeoGebra e construir uma figura qualquer. Posteriormente, pedir para fazerem uma reflexão qualquer dessa figura sem usar o comando de reflexão em relação a uma reta. Pedir para cada dupla verificar se sua resposta está correta, usando o comando de reflexão. Para isso, deve-se pedir para a dupla criar uma reta r ao lado da figura e usar o comando de reflexão em relação a uma reta. Daí, deve-se comparar as duas figuras refletidas. Caso a resposta não esteja correta, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

b) Pedir para cada dupla abrir um novo arquivo no GeoGebra e construir uma figura qualquer. Posteriormente, pedir para fazerem uma reflexão com deslizamento qualquer dessa figura sem usar os comandos de reflexão em relação a uma reta e de translação por um vetor. Pedir a dupla para verificar se sua resposta está correta, usando os comandos de reflexão em relação a uma reta e de translação por um vetor. Daí, deve-se comparar as figuras obtidas. Caso a resposta não esteja correta, a dupla deverá tirar suas dúvidas e refazer a atividade. Após o término da atividade, pedir para salvarem o arquivo.

Se houver tempo para praticar mais, deve-se pedir que façam reflexões e reflexões com deslizamento variadas dessa figura.

6. **Recursos**

a) Laboratório de Informática;
b) Software GeoGebra;
c) Quadro;
d) Pincéis;
e) Apagador.

7. **Avaliação**
   a) Perguntas orais;
   b) Participação.

5.5 5ª Aula

1. **Objetivo geral**
   Avaliar conhecimento sobre as isometrias no plano através do uso do software matemático GeoGebra.

2. **Objetivos específicos**
   a) Verificar a consolidação de conceitos, definições e propriedades sobre translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento no plano;
   b) Verificar a necessidade de novas abordagens sobre o conteúdo lecionado.

3. **Conteúdo**
   Isometrias no plano.

4. **Metodologia**
   Aula avaliativa.

5. **Desenvolvimento**
   Dividir os alunos em duplas e pedir para se encaminharem à sala de informática. Nesta aula, deve-se pedir para cada dupla criar uma pasta na área de trabalho com os nomes da dupla. Posteriormente, no GeoGebra, pedir para cada dupla desenhar, no 2º quadrante, um triângulo ABC qualquer usando os comandos do GeoGebra.
   Agora, cada dupla deverá fazer no mesmo arquivo uma translação, uma rotação, uma reflexão e uma reflexão com deslizamento do triângulo ABC conforme abaixo.
   a) Translação: fazer uma translação do triângulo ABC de modo que a nova figura fique totalmente no quarto quadrante. Escreva os passos de construção justificando quando necessário.

b) Rotação: fazer uma rotação positiva de 90° do triângulo ABC e centro no vértice A. Escreva os passos de construção justificando quando necessário.
c) Reflexão: fazer a reflexão do triângulo ABC em torno do eixo das ordenadas (eixo y). Escreva os passos de construção justificando quando necessário.
d) Reflexão com deslizamento: fazer a reflexão com deslizamento do triângulo ABC em torno do eixo das abscissas (eixo x) de modo que a nova figura fique totalmente no quarto quadrante. Escreva os passos de construção justificando quando necessário.
e) Salvar o arquivo na pasta com os nomes da dupla.

Observação 5.5.1. *Os passos de construção podem ser escritos em uma folha avulsa ou no próprio GeoGebra abrindo uma caixa de texto.*

6. **Recursos**
   a) Laboratório de Informática;
   b) Software GeoGebra;
   c) Folha A4 (quando necessário).

7. **Avaliação**
   a) Participação;
   b) Fazer corretamente a atividade proprosta.

6 Conclusão

O conceito de isometria, assim como o conhecimento de suas propriedades, são fundamentais para desenvolvimento do raciocínio geométrico que leva a criação de estratégias para a resolução de vários problemas matemáticos no cotidiano. Portanto, acreditamos que este trabalho possa auxiliar no aperfeiçoamento de professores dos ensinos fundamental, médio e superior.

Esperamos que este trabalho contribua tanto para a formação continuada dos professores quanto para o melhor aprendizado dos alunos sobre isometrias, pois auxilia aos professores tanto na preparacão de aulas diferenciadas, como no uso das demonstrações que, acreditamos, deverão ser mais trabalhadas em sala de aula quanto no uso do software matemático GeoGebra para facilitar a aprendizagem do aluno.

O uso do GeoGebra nas construções das figuras usadas neste trabalho possibilitou uma melhor compreensão das definições e propriedades apresentadas. Por isso, indicamos aos professores e alunos o uso desse recurso para trabalhar atividades práticas sobre diversos conteúdos.

Os planos de aulas apresentados têm o objetivo de consolidar os conceitos, as definições e as propriedades de isometrias na reta e no plano que foram trabalhados em sala de aula. Para isso, sugerimos uma sequência didática diferente da tradicional, pois esta utiliza uma ferramenta tecnológica dinâmica que possibilita ao aluno testar suas hipóteses e comparar o resultado de forma rápida e simples. Não conseguimos aplicar esta sequência didática, pois não tivemos tempo hábil, mas posteriormente pretendemos aplicar assim que possível.

A elaboração deste trabalho nos permitiu adquirir uma visão mais aprofundada sobre as definições e as propriedades das isometrias na reta e no plano, contribuindo assim, tanto para minha formação acadêmica quanto para minha vida profissional.

Bibliografia

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[2] BRASIL CAI EM RANKING MUNDIAL DE EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA E CIÊNCIAS; E FICA ESTAGNADO EM LEITURA. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-matematica-e-ciencias-e-fica-estagnado-em-leitura.ghtml. Acesso em: 10 dez. 2019.

[3] CARNEIRO, Francisco de Assis Saraiva. *Isometrias e homotetias no plano [recurso eletrônico]*. 2015. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

[4] CERQUEIRA, Luciano de Souza. *Isometrias no plano:* uma proposta de atividades para educação básica com uso do geogebra. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2016.

[5] GEOGEBRA - Isometrias no plano. 2014. 1 vídeo (13 min). Publicado pelo canal O Geogebra. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=xr7-OhfAakk&list=PLZJbXU8AYkTVUNxdrPPMNlwj-xKqLGMEd&index=7. Acesso em: 20 nov. 2019.

[6] JESUS, Ivanilton Sales de. *Isometrias no plano:* uma abordagem aplicável ao ensino básico. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

[7] LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[8] MIR, Michel. *Uma Abordagem de isometria em sala de aula*. 2014. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

[9] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[10] RESULTADOS - INEP. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/guest/acoes-internacionais/pisa/resultados. Acesso em: 10 dez. 2019.

[11] REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

[12] SILVA, Renato Oliveira. *Isometrias*. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

[13] WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. Colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.