



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Breno Arcanjo Fernandes da Cruz**

# **Aplicações dos números complexos à Geometria Analítica Plana**

Ouro Preto - MG, Brasil

Dezembro de 2019

**Breno Arcanjo Fernandes da Cruz**

**Aplicações dos números complexos à Geometria Analítica  
Plana**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza

Co-Orientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira

Ouro Preto - MG, Brasil

Dezembro de 2019

## SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C957a Cruz, Breno Arcanjo Fernandes da .  
Aplicações dos números complexos à geometria analítica plana. [manuscrito] /  
Breno Arcanjo Fernandes da Cruz. - 2019.  
68 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Gil Fidelix de Souza.

Coorientador: Prof. Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira.

Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto.

Departamento de Matemática. Programa de Matemática.

Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Números complexos. 2. Geometria plana. 3. Teoremas. I. Ferreira, Geraldo  
César Gonçalves . II. Souza, Gil Fidelix de. III. Universidade Federal de Ouro Preto.  
IV. Título.

CDU 514.112

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6 1589



UFOP  
Universidade Federal  
de Ouro Preto



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Ouro Preto  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)  
Departamento de Matemática - PROFMAT



## APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS À GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Autor: Breno Arcanjo Fernandes da Cruz

Dissertação defendida e aprovada em **18 de dezembro de 2019**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Professor Dr. Gil Fidelix de Souza – Orientador  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor Dr. Geraldo César Gonçalves Ferreira – Coorientador  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professora Dra. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Professor Dr. Rodrigo Geraldo do Couto  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor Dr. Wanderson Costa e Silva  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

---

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me concedeu saúde e força para vencer as dificuldades.

A minha querida e amada esposa Nathália, pela paciência e apoio durante esses anos de estudo.

Ao meu filho Caio, que me trouxe motivação para concluir a pesquisa.

Ao meu orientador Dr. Gil Fidelix de Souza, pelo empenho e apoio dedicados à construção desse trabalho.

A minha família, meus amigos e todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

# Resumo

A proposta deste trabalho é fazer uso da boa estrutura do conjunto dos números complexos, essencialmente de sua geometria, para promover o estudo de objetos e a obtenção de resultados da Geometria Analítica Plana. A boa estrutura do conjunto dos números complexos permite o estudo de resultados clássicos, por exemplo os Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues. O primeiro Teorema estabelece condições necessárias e suficientes para que três cevianas sejam concorrentes, o segundo resultado estabelece condições para a colinearidade de um conjunto de pontos ou para a concorrência de um conjunto de segmentos e o terceiro resultado refere-se a triângulos projetivos e pode ser visto como uma consequência dos dois primeiros resultados.

**Palavras chave:** Números complexos; Geometria plana; Ceva; Menelaus; Desargues

# Resumo

The purpose of this work is to make use of the good structure of the complex numbers, essentially of its geometry, to promote the study of objects and the results of Plane Analytical Geometry. The good structure of the complex numbers allows the study of classical results, for example Ceva, Menelaus and Desargues Theorems. The first Theorem establishes necessary and sufficient conditions for three cevians to be competitors, the second result establishes conditions for colinearity for a set of points, or for the competition of a set of segments and the third result refers to projective triangles and can be seen as a consequence of the first two results.

**Kew-words:** Complex Numbers; Plane Geometry; Ceva; Menelaus; Desargues;

---

# Sumário

<b>Agradecimento</b>	4
<b>Resumo</b>	6
<b>Abstract</b>	7
<b>Lista de ilustrações</b>	9
<b>Introdução</b>	11
<b>1 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b>	<b>13</b>
1.1 Surgimento dos números complexos	13
1.2 Os números complexos na matemática dos séculos XVII a XIX	14
1.3 As equações cúbicas	15
<b>2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE OPERAÇÕES ANALÍTICAS APLICADA A NÚMEROS COMPLEXOS</b>	<b>19</b>
2.1 Regras operatórias	19
2.2 Definições operatórias	20
2.3 Propriedades adicionais	21
2.4 O complexo $z$ como segmento orientado	22
2.5 Geometria dos números complexos	23
2.6 Conjugado de um número complexo	27
2.7 Valor absoluto do complexo $z$	29
2.8 Forma Polar	30
2.9 Raiz Enésima	34
2.10 Condições para colinearidade	36
2.11 Equação da reta dados dois complexos	37



2.12	Ponto de intersecção de duas retas . . . . .	41
3	OS TEOREMAS DE CEVA, MENELAUS E DESARGUES . . . . .	46
3.1	Teorema de Menelaus . . . . .	46
3.2	Teorema de Ceva . . . . .	50
3.3	Teorema de Desargues . . . . .	54
4	OS NÚMEROS COMPLEXOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA . . . . .	60
4.1	Aplicação dos números complexos . . . . .	60
	Conclusão . . . . .	66
	Referências . . . . .	68

## Lista de ilustrações

Figura 1	– Acervo do autor . . . . .	23
Figura 2	– Acervo do autor . . . . .	24
Figura 3	– Acervo do autor . . . . .	24
Figura 4	– Acervo do autor . . . . .	25
Figura 5	– Acervo do autor . . . . .	26
Figura 6	– Acervo do autor . . . . .	26
Figura 7	– Acervo do autor . . . . .	27
Figura 8	– Acervo do autor . . . . .	28
Figura 9	– Acervo do autor . . . . .	30
Figura 10	– Acervo do autor . . . . .	32
Figura 11	– Acervo do autor . . . . .	33
Figura 12	– Acervo do autor . . . . .	36

Figura 13 – Acervo do autor . . . . .	38
Figura 14 – Acervo do autor . . . . .	39
Figura 15 – Acervo do autor . . . . .	40
Figura 16 – Acervo do autor . . . . .	42
Figura 17 – Acervo do autor . . . . .	44
Figura 18 – Acervo do autor . . . . .	47
Figura 19 – Acervo do autor . . . . .	47
Figura 20 – Acervo do autor . . . . .	51
Figura 21 – Acervo do autor . . . . .	51
Figura 22 – Acervo do autor . . . . .	55
Figura 23 – Acervo do autor . . . . .	56
Figura 24 – Acervo do autor . . . . .	57
Figura 25 – Acervo do autor . . . . .	58
Figura 26 – Acervo do autor . . . . .	59
Figura 27 – Número complexo no círculo unitário . . . . .	62
Figura 28 – Corrente alternada no plano complexo . . . . .	63
Figura 29 – Fractais de Julia e Mandelbrot . . . . .	64

---

# Introdução

O conjunto dos números complexos surgiu no século XVI como ferramenta para a resolução de determinados tipos de equações, e com o passar dos anos se modernizou com a contribuição de importantes matemáticos. Essas contribuições colaboraram para que a boa estrutura dos números complexos fosse utilizada nas mais diversas áreas da ciência e da matemática, por exemplo, na demonstração de teoremas clássicos da Geometria Plana.

Constantemente os números complexos são abordados de forma simplesmente algébrica, o que contribui para a falta de contextualização com outros temas da matemática. A proposta do presente trabalho é mostrar a utilidade da estrutura do conjunto dos números complexos para manuseio e a obtenção de resultados da Geometria Plana do ensino básico.

O sentido geométrico dos números complexos como um vetor ou um ponto do plano cartesiano fornece valores revelantes para resultados de problemas geométricos como a multiplicação de números complexos que, de maneira geral, é uma composição de rotações. É exatamente por este motivo que, neste trabalho, os números complexos foram escolhidos para resolver problemas e provar teoremas da Geometria Plana: a multiplicação de números complexos possibilita tratar rotações de forma mais conveniente, quando comparado ao tratamento via matriz de rotação.

O trabalho em questão apresenta uma aplicação da boa estrutura do conjunto dos números complexos com a demonstração dos Teoremas de Menelaus, Ceva e Desargues, com o propósito de demonstrar estes teoremas de uma maneira diferente e mais enxuta, facilitando a resolução de problemas. Além disso, as dificuldades tendem a diminuir quando se tem outras ferramentas para atacar um mesmo problema.

Além da matemática, os números complexos são aplicados em vários ramos da ciência,

---

como no estudo de ondas e oscilações, na Física Quântica, nas Engenharias Mecânica, Civil, Elétrica e Aeroespacial. É justamente a vasta aplicabilidade deste conjunto que justifica a importância de se conhecê-lo.

---

# A História dos números complexos

O referencial teórico deste capítulo são os trabalhos [1];[2];[4];[5];[6] e [8]

## 1.1 Surgimento dos números complexos

O surgimento dos números complexos se deu naturalmente, assim como aconteceu com os demais conjuntos numéricos. O conjunto dos números racionais surgiu ainda na antiguidade com a necessidade de efetuar divisões de um número natural ímpar por uma quantidade par, quando, por exemplo, um caçador precisava repartir uma caça. Sendo assim, ele dividia a mesma em duas ou mais partes usando seus conhecimentos instintivos sobre partes de um todo.

Os números complexos, por sua vez, surgiram no início do século XVI, com o matemático Scipione Del Ferro (1465 - 1526) que supostamente descobriu a solução de equações do 3º grau do tipo  $x^3 + px = q$ . Del Ferro, porém, morreu antes de publicar seus resultados tendo exposto os cálculos para alguns de seus alunos, entre eles Antônio Maria Fior.

Ainda na primeira metade do século XVI Fior desafia Tartaglia (1499 - 1557), matemático italiano, a solucionar a equação de 3º grau  $x^3 + px = q$ , que supostamente Del Ferro lhe confidenciou. Já em 1535, Tartaglia resolve o problema das cúbicas  $x^3 + px = q$ , e ainda, encontra uma solução geral para qualquer equação da forma  $x^3 + px^2 = q$ .

Girolamo Cardano foi um físico, astrólogo, médico e matemático italiano, que viveu entre os anos de 1501 e 1576. Ele teve conhecimento do desafio proposto por Fior, que Tartaglia resolveu. Cardano insistiu para que Tartaglia o revelasse a solução das cúbicas do tipo  $x^3 + px^2 = q$ , prometendo-o que publicaria em seu livro a demonstração, dando a ele o mérito da descoberta.

---

Contudo, Tartaglia relutou, pois pretendia publicar a demonstração em seu próprio livro. Ainda assim, Cardano convenceu Tartaglia a revelar a solução das cúbicas e em 1545 a publicou no livro "Ars Magna", sem os méritos prometidos.

Apesar de ter publicado a solução das cúbicas estudadas por Del Ferro e Tartaglia, Cardano não compreendia as operações que envolviam raízes quadradas de números negativos e, portanto, não prosseguiu com os estudos. Foi o matemático e engenheiro hidráulico italiano Rafael Bombelli (1526 - 1572) que aceitou a existência de números imaginários retomando os estudos sobre as equações do 3º grau, apresentando em seu livro "L'Algebra"(1572) as regras operatórias com raízes de números negativos. Foram esses estudos que abriram precedência para que outros matemáticos continuassem desenvolvendo a estrutura desse novo conjunto numérico.

## 1.2 Os números complexos na matemática dos séculos XVII a XIX

Nesse período os matemáticos Harriot, Girard e Descartes contribuíram de maneira significativa para a construção da estrutura dos números complexos. Thomas Harriot (1560-1621) introduziu a linguagem simbólica dando destaque aos números negativos, apesar de não admiti-los como raízes de equações. Foi ele, também, que ajudou a estabelecer o número de soluções positivas para equações de terceiro e quarto graus, por meio de suas equações canônicas. Albert Girard (1595-1632), além de dar relevância aos números negativos e admiti-los como raízes de equações, foi o primeiro a associar o número do maior grau de uma equação ao seu número de soluções, em seu livro "Invention nouvelle en l'algèbre", publicado em 1629. Já René Descartes (1596-1650) revolucionou o estudo dos números complexos, interpretando geometricamente termos aritméticos, como explicita em seu livro "Géometrie (1637)":

*"Ou finalmente, encontrar uma, duas, ou várias médias proporcionais entre a unidade e uma outra linha (o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, raiz cúbica, etc. da linha dada). E eu não devo hesitar em introduzir estes termos aritméticos na geometria, por razões de maior clareza."*[4]

Até então o estudo da aritmética e geometria eram independentes, o que começa a mudar

---

quando Descartes representa geometricamente os números negativos, permitindo maior clareza no que tange a compreensão das raízes quadradas de números negativos, denominadas por ele como números "imaginários": "*Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) são reais. Às vezes elas são imaginárias*"[4]. Para Descartes a denominação "imaginário" não significava que os números não eram reais, mas que eles precisavam ser imaginados.

Gaspar Wessel (1745 -1818) foi quem representou geometricamente os números complexos na forma  $x + yi$ , fazendo uma correspondência entre estes e os pontos do plano. Tal correspondência, porém, só foi publicada em 1806 por Jean Argand (1768-1822).

A inserção de técnicas mais avançadas para operações entre os números complexos, relacionando-os à trigonometria, foi desenvolvido por Abraham de Moivre (1667-1754).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentou em sua tese de doutorado (1798) a demonstração de que qualquer equação algébrica de grau  $n$ , com  $n \geq 0$  e coeficientes complexos, possui, no mínimo, uma raiz complexa. Com tal demonstração Gauss solucionou os problemas de equações algébricas, dando origem ao conhecido "Teorema Fundamental da Álgebra".

As ideias trabalhadas por Argand foram retomadas por Gauss em 1831, quando ele trabalhou com os números da forma  $x + yi$  como coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Em 1832, Gauss deu origem a expressão números complexos. O plano cartesiano em que são apresentados os números complexos foi nomeado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss.

Por fim, o matemático William Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou, em 1833, a operação de multiplicação dos números complexos na forma que é conhecida nos dias atuais.

### 1.3 As equações cúbicas

Neste capítulo serão apresentados os métodos de resolução das equações cúbicas publicados por Cardano e Bombelli ao longo do século XVI. A ideia é mostrar, utilizando a simbologia atual, que foi o problema de solucionar equações cúbicas que tornou inevitável reconhecer os números negativos e suas raízes como números válidos na matemática.

Em seu livro, "Ars Magna"(1545), Cardano publica a solução para qualquer equação cúbica da forma  $x^3 + px^2 = q$ . Além disso, exhibe um método para transformar uma equação cúbica do tipo  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  em outra sem o termo de grau dois. Fazendo a simples substituição  $x = y - \frac{a}{3}$ , obtém-se coeficientes arbitrários onde o termo  $x^2$  fica inexistente. Com essa nova variável, a equação assume a forma  $y^3 + py = q$ , que é tratada como a forma reduzida

---

da equação cúbica.

O método proposto por Cardano para realizar tal redução é:

Seja  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , fazendo  $x = y - \frac{a}{3}$  obtemos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Sendo assim, se  $p = b - \frac{a^2}{3}$  e  $q = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$  teremos:

$$y^3 + py = q.$$

Cardano apresentou 13 tipos distintos de equações cúbicas, que dependiam da posição dos termos quadrático, linear e independente. Hoje, porém, as equações do 3º grau são consideradas como sendo basicamente todas de um mesmo tipo que podem ser solucionadas por um mesmo método.

Utilizando a simbologia atual, a seguir será exibida a regra publicada por Cardano para a resolução de equações polinomiais do 3º grau da forma  $y^3 + py = q$ , com  $p > 0$  e  $q > 0$ .

Considerando  $y = u - v$ , e a identidade

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3, \text{ teremos I) } uv = \frac{p}{3} \text{ e II) } u^3 - v^3 = q$$

Elevando os membros da equação I ao cubo e posteriormente multiplicando por quatro, obtemos:

$$\text{III) } 4u^3v^3 = \frac{4p^3}{27}$$

Agora, elevando ao quadrado os membros da equação II, conseguimos:

$$\text{IV) } u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2$$

Adicionando as equações III e IV, teremos:



$$u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \Rightarrow (u^3 + v^3)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \Rightarrow u^3 + v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Logo, somando as equações

$$u^3 - v^3 = q \text{ e } u^3 + v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}, \text{ obtemos:}$$

$$2u^3 = q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Rightarrow u^3 = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Rightarrow u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Portanto,

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Para obter a expressão para  $v$ , basta subtrair as equações

$$u^3 - v^3 = q \text{ e } u^3 + v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}, \text{ obtendo:}$$

$$2v^3 = -q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Rightarrow v^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Rightarrow v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Desta forma, temos:

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como a solução desejada é  $y = u - v$ , concluímos que:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ que é a solução da equação cúbica.}$$

Algumas das equações cúbicas estudadas por Cardano resultavam em duas raízes quadradas de números negativos quando a expressão  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$  era negativa. Ao se deparar com tais equações, apesar de em alguns casos Cardano saber que existia uma raiz válida para a equação, muitas vezes era necessário manipular raízes quadradas de números negativos, que, até então, não eram consideradas números, como é o caso da equação  $x^3 = 15x + 4$ . Usando a fórmula das cúbicas nessa equação obtemos  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ , portanto, a equação não poderia ser resolvida. Contudo, ainda assim, através do método de tentativa e erro, foi possível descobrir que  $x = 4$  era uma raiz legítima da equação.

Assim como Cardano, pelo mesmo método de tentativa e erro, Bombelli sabia que existiam soluções verdadeiras para equações da forma  $x^3 = 15x + 4$ , onde  $x = 4$  era solução. A partir desse momento passou a admitir as raízes quadradas de números negativos como números válidos na matemática, e definiu regras operatórias para  $\sqrt{-1}$ , como mostra em seu livro *L'Algebra*(1572)

<b>Regras criadas por bombelli</b>	<b>Simbologia atual</b>
<i>Più via più di meno, fà più di meno</i>	$+(+i) = +i$
<i>Meno via più di meno, fà meno di meno</i>	$-(+i) = -i$
<i>Più via meno di meno, fà meno di meno</i>	$+(-i) = -i$
<i>Meno via meno di meno, fà più di meno</i>	$-(-i) = +i$
<i>Più di meno via più di meno, fà meno</i>	$(+i)(+i) = -1$
<i>Più di meno via meno di meno, fà più</i>	$(+i)(-i) = +1$
<i>Meno di meno via più di meno, fà più</i>	$(-i)(+i) = +1$
<i>Meno di meno via meno di meno, fà meno</i>	$(-i)(-i) = -1$

Desta maneira, Bombelli define  $\sqrt{-1} = i$ , dando continuidade a solução de equações do tipo  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ , até então tidas como irreduzíveis, apresentando a seguinte solução:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \Rightarrow 2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3 = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$$

Dessa equação, temos que  $a(a^2 - 3b^2) = 2$  e  $b(3a^2 - b^2) = 11$ . Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que  $a$  deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição garante que  $y$  tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções  $a = 2$  e  $b = 1$  atendem ambas ao mesmo tempo, obtemos as equações:  $2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$  e  $2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$ .

Conseguimos constatar que uma das soluções para a equação cúbica  $x^3 + 15x = 4$  é dada por:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4, \text{ como já havia sido constatado pelo método de tentativa e erro.}$$

---

# Interpretação Geométrica de operações analíticas aplicada a números complexos

As principais referências deste capítulo são [3] e [9]

Aqui, serão apresentados os números complexos na forma  $z = x + yi$  como pares ordenados de números reais, que serão interpretados geometricamente como vetoriais em  $\mathbb{R}^2$ . Será definido a adição e multiplicação de números complexos, e, também, a multiplicação de um número real por um complexo.

## 2.1 Regras operatórias

**Definição:** Um número complexo  $z$  pode ser definido como um par ordenado  $(x, y)$  de números reais  $x$  e  $y$ ,

$$z = (x, y) \tag{2.1}$$

sujeito às regras operatórias a serem mostradas a seguir. O par ordenado  $(x, 0)$  é representado pelo número real  $x$ :

$$(x, 0) = x \tag{2.2}$$

Esta regra possibilita caracterizar os números reais como um subconjunto do conjunto dos números complexos.

---

Em particular, trataremos de unidade imaginária o par  $(0, 1)$ , o qual será denotado por  $i$ :

$$(0, 1) = i$$

Outra regra exigida a tais pares é que dois números complexos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária de  $z_1$  e  $z_2$  forem iguais.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2$$

Especialmente, quando  $z = (x, y) = 0$ , tem-se necessariamente  $x = 0$  e  $y = 0$ .

## 2.2 Definições operatórias

Dois números complexos quaisquer  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  tem a soma e o produto, denotados por  $z_1 + z_2$  e  $z_1 z_2$ , respectivamente, definidos como números complexos dados pelas fórmulas:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2.3)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (2.4)$$

Desta forma, temos  $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ , de onde é possível concluir que cada número complexo que não é real, pode ser escrito como a soma de um número real e um número imaginário puro.

O par ordenado  $(0, y)$  é um número imaginário puro, e será definido por:

$$(0, y) = (y, 0)(0, 1) = yi \quad (2.5)$$

Deste modo, obtemos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi \quad (2.6)$$

onde  $z = x + yi$  é a forma algébrica do número complexo, e  $i$  a unidade imaginária. As partes real e imaginária do complexo  $z$  são, respectivamente,  $x$  e  $y$ , sendo denotado por:

$$\Re(z) = x, \quad \text{Im}(z) = y$$

---

É importante observar que o conjunto dos complexos  $\mathbb{C}$  não é um corpo ordenado, pois uma das propriedades dos denominados corpos ordenados é o fato do quadrado de todos os elementos do conjunto serem maiores ou iguais a zero, o que contradiz o exemplo abaixo:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Considerando a forma algébrica (2.6), operações (2.4) e (2.5) podem ser escritas, respectivamente, por:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

## 2.3 Propriedades adicionais

Agora, em posse das regras operatórias de soma e multiplicação dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , serão definidas muitas outras operações sobre o conjunto  $\mathbb{C}$ . Tal conjunto é um corpo, cuja a prova segue da definição de números complexos.

**Subtração:** É a operação inversa da adição, em outras palavras, é a diferença  $z_1 - z_2$  denotada por  $z_3$

$$z_3 = z_1 - z_2$$

portanto,  $z_3$  é o número complexo que deve ser somado a  $z_2$  para determinar  $z_1$

$$z_3 + (z_2) = z_1 - z_2 + (z_2) \Rightarrow z_1 = z_2 + z_3$$

Conforme a definição de adição (2.4), tem-se

$$(x_1, y_1) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

Igualando os membros correspondentes, e resolvendo a equação em função de  $x_3$  e  $y_3$ , obtemos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (2.7)$$

**Divisão:** É a operação inversa da multiplicação, e será representada por  $\frac{z_1}{z_2}$ , denotada por  $z_3$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{se} \quad z_1 = z_2 z_3 \quad (z_2 \neq 0)$$

Desta forma,  $z_3$  é o número complexo que multiplicado por  $z_2$  determina  $z_1$ , e pela definição (2.5), temos:

$$(x_1, x_2) = (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2)$$

Em seguida, igualando os membros correspondentes e resolvendo ambas equações resultantes em função de  $x_3$  e  $y_3$ , obtemos a lei da divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left( \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) i, \quad (z_2 \neq 0) \quad (2.8)$$

Para chegar nessa formatação para a fórmula da divisão  $\frac{z_1}{z_2}$ , manipulamos a razão multiplicando o numerador e o denominador do primeiro membro por  $x_2 - y_2i$ , que em breve definiremos como conjugado do complexo  $z_2$ .

**Exemplo 2.1.** Determine  $\frac{z_1}{z_2}$ , sendo  $z_1 = 8 + 6i$  e  $z_2 = 5 + 3i$ .

$$\text{Solução: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{(8 + 6i)}{(5 + 3i)} = \frac{(8 + 6i)(5 - 3i)}{(5 + 3i)(5 - 3i)} = \frac{58}{34} + \frac{6}{34}i$$

## 2.4 O complexo $z$ como segmento orientado

É comum vincular ao par ordenado  $(x, y)$ , que retrata o número complexo  $z$ , as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto no plano  $xOy$ . Para cada número complexo  $z$  existe um único ponto associado, e reciprocamente. O número  $z_1 = 3 + 2i$ , por exemplo, pode ser representado pelo par  $(3, 2)$  e interpretado geometricamente no plano  $xOy$  conforme figura 1.

O número complexo  $z$  também pode ser considerado um vetor (segmento orientado) da origem  $(0, 0)$  ao ponto  $(x, y)$ , ou como algum vetor obtido pela translação, no plano, desse vetor. Tanto a representação vetorial quanto a representação por pontos, dos números complexos, são muito convenientes.

Ao representar um número complexo  $z$  geometricamente, o plano  $xOy$  será denominado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss, numa referência aos matemáticos Argand, que escreveu sobre a representação geométrica dos números complexos e Gauss, pelo uso da geometria dos complexos em suas pesquisas. Este plano tem dois eixos orientados e ortogonais, em que o eixo horizontal é denominado eixo real, o vertical recebe o nome de eixo imaginário e a origem corresponde ao complexo  $z = 0$ .

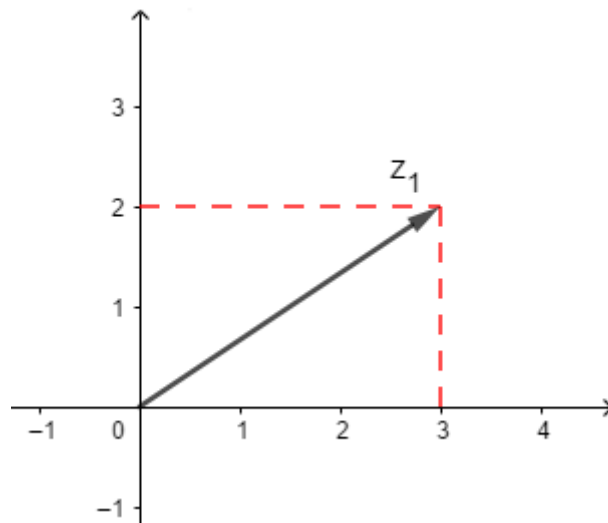


Figura 1 – Acervo do autor

## 2.5 Geometria dos números complexos

A associação natural  $x + yi = (x, y)$  entre  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  possibilita visualizar o conjunto  $\mathbb{C}$  como um plano, chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Uma vez escolhido o plano complexo para representar  $\mathbb{C}$ , podemos visualizar geometricamente as operações algébricas.

De acordo com a definição (2.4), a **adição** de dois números complexos  $z_1 + z_2$  equivale ao ponto  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . Este ponto, por sua vez, corresponde ao vetor cujas as componentes são as coordenadas do ponto. Dessa forma, o número  $z_1 + z_2$  é representado pela soma vetorial dos vetores  $z_1$  e  $z_2$ , como mostra a figura 2.

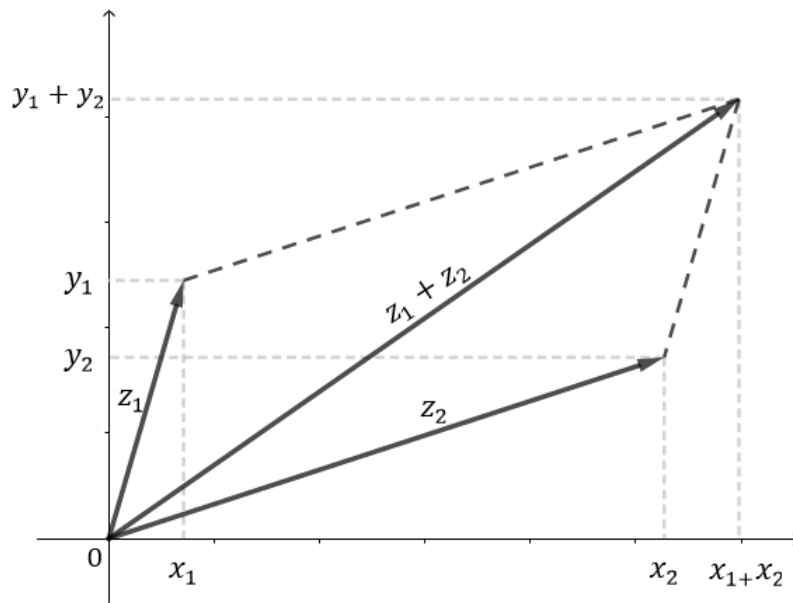


Figura 2 – Acervo do autor

A **subtração**  $z_1 - z_2$  corresponde ao ponto  $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ , e também pode ser representado por um vetor, partindo do ponto  $z_2$  ao ponto  $z_1$ , conforme figura 3.

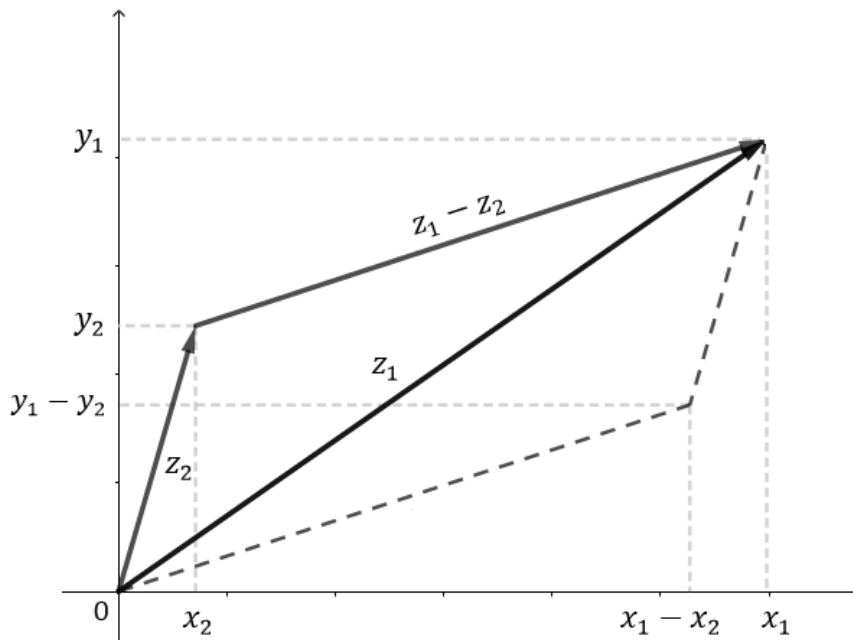


Figura 3 – Acervo do autor



Já a **multiplicação** e **divisão**, de acordo com as definições (2.5) e (2.8), respectivamente, parecem bem mais difíceis. No entanto, elas possuem uma representação geométrica simples, como será visto na seção (2.8). Deve-se observar, porém, que o produto  $z_1 z_2$  de dois números complexos é um número complexo, vetor que pertence ao plano dos vetores  $z_1$  e  $z_2$ . Este produto, portanto, não é o produto escalar nem o produto vetorial, empregados no cálculo vetorial. Assim sendo, os números complexos não podem ser associados com os vetores do cálculo vetorial de duas dimensões. Sua álgebra é distinta da álgebra do conjunto dos  $\mathbb{R}^2$ .

Em relação a multiplicação, é importante destacar que ao efetuar o produto de um número complexo  $z = x + yi = (x, y)$  pela unidade imaginária  $i$ , rotaciona-se em  $90^\circ$ , no sentido anti-horário, o vetor que representa o complexo  $z$ . Tal produto será o número complexo  $z \cdot i = -y + xi = (-y, x)$ . Os vetores associados a  $z$  e  $z \cdot i$  são perpendiculares, de fato, o produto interno  $\langle x, y \rangle \langle -y, x \rangle = -xy + yx = 0$ . A figura 4 ilustra a rotação de  $z$  quando multiplicado sucessivas vezes por  $i$ .

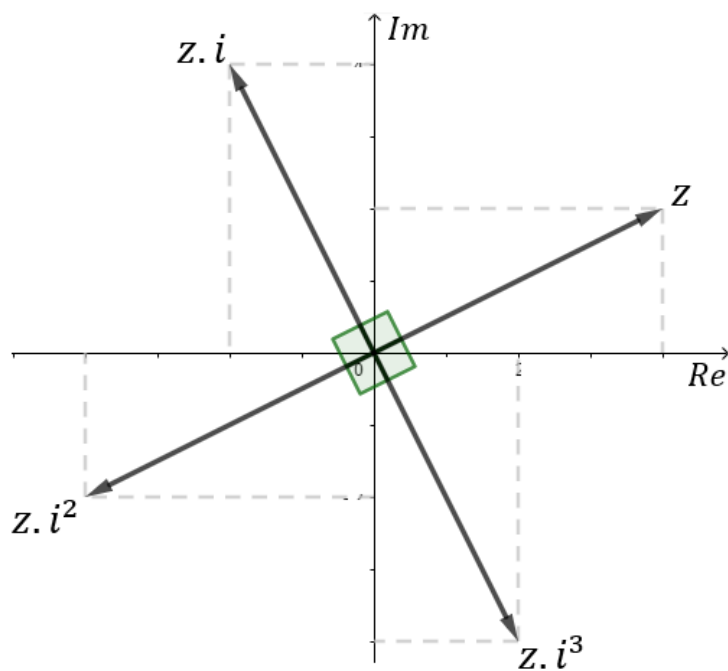


Figura 4 – Acervo do autor

De modo absolutamente análogo, pode se mostrar que o produto do complexo  $z = x + yi$  por  $-i$  representa uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário do vetor associado a  $z$ .

Outras definições serão apresentadas a seguir, e serão utilizadas no decorrer do texto, auxiliando na compreensão dos teoremas que serão demonstrados no capítulo 3, são elas:

---

O menor **ângulo** formado pelos vetores  $\overrightarrow{z_1z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1z_3}$ , como ilustra a figura abaixo

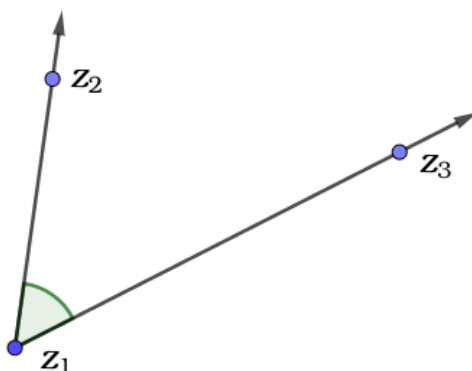


Figura 5 – Acervo do autor

será denotado por  $z_2\widehat{z_1z_3}$ .

Além disso, podemos afirmar que uma **reta suporte**  $r$  de um determinado segmento  $\overline{AB}$  é aquela que contém tal segmento, como ilustra a figura abaixo



Figura 6 – Acervo do autor

Denotaremos por  $\overleftrightarrow{AB}$ , a reta que contém o segmento  $\overline{AB}$ .

Definiremos como **Cevianas** os segmentos de reta que ligam o vértice do triângulo a reta suporte de seu lado oposto. O nome surgiu em homenagem ao engenheiro italiano Giovanni Ceva, que formulou o **Teorema de Ceva**, que será demonstrado no capítulo 3. Tal teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes em um único ponto.

Estar em perspectiva é uma expressão comumente usada para indicar que existe uma relação entre duas figuras de formas, possivelmente diferentes. Em particular, podemos estender a ideia de perspectiva para triângulos. Dizemos que dois triângulos estão em perspectivas em relação a um ponto  $O$  se as retas que unem os vértices correspondentes concorrem em  $O$ . Como ilustra a figura abaixo

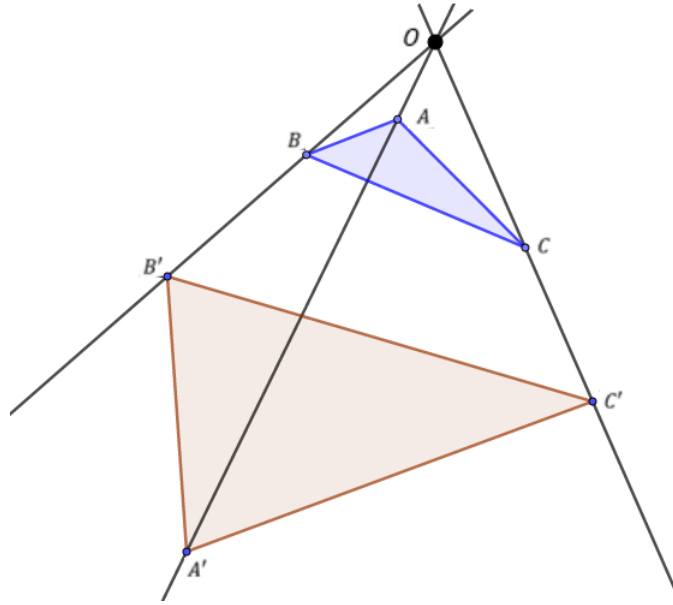


Figura 7 – Acervo do autor

Outra denotação importante que será utilizada na demonstração dos teoremas no capítulo 3, é a divisão de dois vetores dentro do conjunto dos números complexos, por exemplo:

## 2.6 Conjugado de um número complexo

Definimos o conjugado de um número complexo, ou unicamente o conjugado de  $z = x + yi = (x, y)$ , da seguinte forma

$$\bar{z} = x - yi = (x, -y) \quad (2.9)$$

Geometricamente, o conjugado  $\bar{z}$  é a reflexão do ponto  $z$  em relação ao eixo real  $x$ , ou seja, as partes reais são iguais e as partes imaginárias simétricas, conforme figura 5.

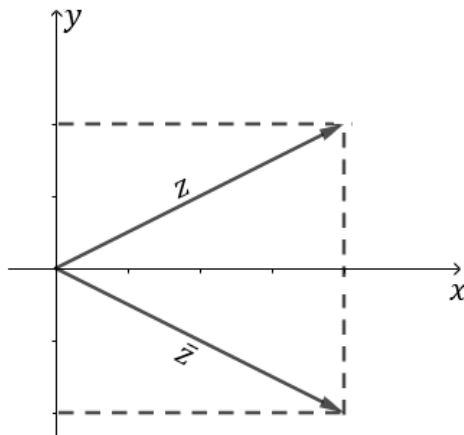


Figura 8 – Acervo do autor

Seja  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , assim sendo

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (2.10)$$

Desta maneira, provamos que o conjugado da soma é a soma dos conjugados. De modo análogo, pode-se demonstrar que a operação de tomar conjugados também é distributiva em relação à subtração, à multiplicação e à divisão, ou seja,

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \quad (2.11)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad (2.12)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (2.13)$$

Deve-se observar também que a soma de um número complexo e seu conjugado é um número real, de fato

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2\text{Re}(z) \quad (2.14)$$

Em contrapartida, a diferença de um número complexo e seu conjugado é um número imaginário puro, a saber

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2\text{Im}(z)i \quad (2.15)$$

---

## 2.7 Valor absoluto do complexo $z$

Dado um número complexo  $z = x + yi$ , seu valor absoluto (ou módulo), denotado por  $|z|$ , é dado por

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.16)$$

sendo  $x$  e  $y$  números reais. Conseqüentemente, pela definição (2.16),  $|z|$ ,  $x$  e  $y$  se relacionam pela equação

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

E pelas condições, é fácil concluir que

$$|z| \geq |x| \geq x, \quad |z| \geq |y| \geq y \quad (2.17)$$

Geometricamente, o valor absoluto de  $z$  nos dá a distância do ponto que o representa à origem do plano complexo. Em outras palavras, é o comprimento do vetor correspondente ao número complexo. Assim sendo,  $|z_1 - z_2|$  é a distância entre os pontos  $z_1$  e  $z_2$ , de fato, pela definição (2.16), temos

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.18)$$

É importante notar que o módulo de um número complexo é igual ao módulo de seu conjugado:

$$|z| = |\bar{z}| \quad (2.19)$$

O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado de seu módulo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (2.20)$$

Além dessas relações, com a definição de produto, quociente e valor absoluto é trivial mostrar que

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (2.21)$$

e

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (2.22)$$

Estes resultados podem ser facilmente demonstrados.

---

**Exemplo 2.2.** Determinar o lugar geométrico do complexo  $z = x + yi$ , tal que  $|z + 2 - i| = 4$ .

*Solução:*  $|z + 2 - i| \Rightarrow |(x + 2) + (y - 1)i| = 4 \Rightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = 4 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ . Portanto, o ponto  $z$  está sobre o círculo de raio 4 com centro de coordenadas  $(-2, 1)$ .

É importante observar que o corpo dos complexos não é ordenado, e, portanto, não faz sentido afirmar que  $z_1 > z_2$  ou  $z_1 < z_2$ , a menos que  $z_1$  e  $z_2$  sejam ambos números reais. No entanto, podemos definir  $|z_1| > |z_2|$  ou  $|z_1| < |z_2|$ , pois tratam-se de valores reais absolutos e expressam a distância de cada ponto a origem do plano complexo.

## 2.8 Forma Polar

A interpretação geométrica por coordenadas cartesianas não é a única forma de se representar os números complexos, tais números também podem ser representados pela forma polar (ou trigonométrica). As coordenadas polares tomam como parâmetro o módulo da distância do complexo  $z$  a origem, e o ângulo formado pelo eixo real positivo com o vetor correspondente a  $z$  no sentido anti-horário, que, denominamos, de **argumento** de  $z$  ou  $Arg(z)$ .

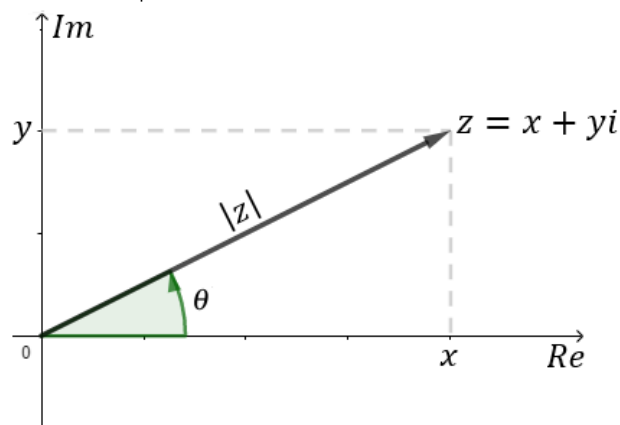


Figura 9 – Acervo do autor

Sejam  $r$  e  $\theta$  as coordenadas polares no plano complexo representando  $z$ , onde  $\theta = Arg(z)$  e  $r = |z| \geq 0$ . Então

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad (2.23)$$

Desta forma, o número complexo  $z$  escrito na forma polar é

$$z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad (2.24)$$

que também pode ser representado pela forma exponencial, sendo

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \quad (2.25)$$

O valor de  $\theta$  é determinado a partir da equação (2.23) ou da relação

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.26)$$

**Exemplo 2.3.** Determine a medida do argumento do complexo  $z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$ .

*Solução:*

$$z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{-2}{(1 + \sqrt{3}i)} \cdot \frac{(1 - \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Da relação (2.25), concluímos que

$$\arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Trabalhar com as coordenadas polares pode ser extremamente útil, pois facilita a compreensão das operações e sua interpretação no plano complexo. A multiplicação e divisão, por exemplo, podem ser interpretadas de maneira simples utilizando as coordenadas polares.

Seja  $z_1 z_2$  o **produto** de dois números complexos complexos, representados na forma polar por  $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$  e  $z_2 = z_1 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ , é possível mostrar que

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (2.27)$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 [\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)] \cdot r_2 [\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Geometricamente, a multiplicação  $z_1 \cdot z_2$  tem como argumento a soma dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e como comprimento o produto de suas normas  $r_1$  e  $r_2$ . Conforme figura 7

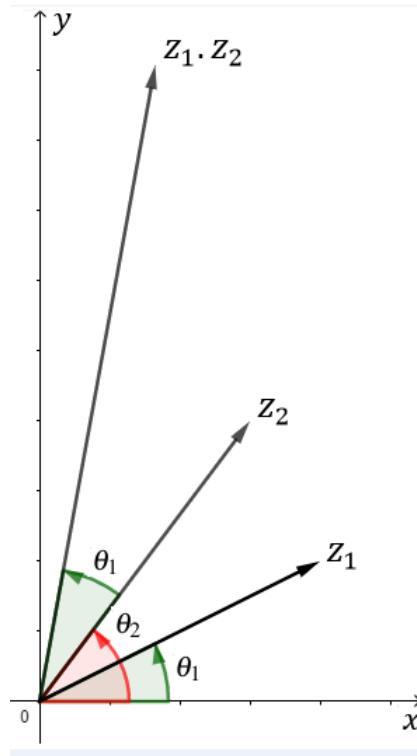


Figura 10 – Acervo do autor

Da fórmula (2.26), é imediato mostrar por indução que

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = r_1 \cdot r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 \dots + \theta_n) + isen(\theta_1 + \theta_2 \dots + \theta_n)] \quad (2.28)$$

Como resultado, se  $z = r[\cos(\theta) + isen(\theta)]$ , sendo  $n$  um número inteiro positivo, teremos

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + isen(n\theta)] \quad (2.29)$$

Em particular, quando  $r = |z| = 1$ , esta fórmula nos fornece o **Teorema de De Moivre** para expoentes inteiros positivos,

$$[\cos(\theta) + isen(\theta)]^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta) \quad (2.30)$$

Já o **quociente** de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , exibidos em coordenadas polares por  $z_1 = r_1 [\cos(\theta_1) + isen(\theta_1)]$  e  $z_2 = r_2 [\cos(\theta_2) + isen(\theta_2)]$ , é dado pela fórmula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)] \quad (r_2 \neq 0) \quad (2.31)$$



Como a divisão é a inversa da multiplicação, esta conclusão pode ser naturalmente verificada, de fato

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot z_2^{-1} = r_1 [\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)] \cdot r_2^{-1} [\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2^{-1} [\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)] \cdot [\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2^{-1} \{ [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)] + [i \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - i \operatorname{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1)] \} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Observa-se que a divisão dos complexos  $z_1$  e  $z_2$ , representados na forma polar, tem como argumento a diferença dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e como comprimento a razão de suas normas  $r_1$  e  $r_2$ . Como ilustra a figura 8.

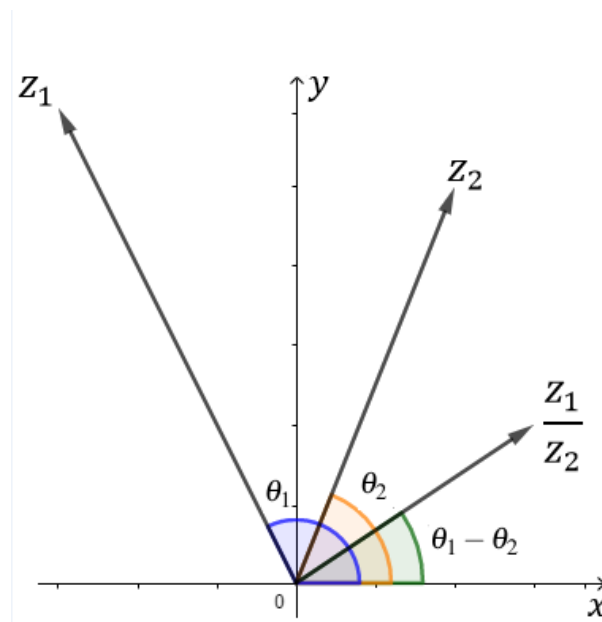


Figura 11 – Acervo do autor

Em particular, sendo  $z = r[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$ , tem-se

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] = \frac{1}{r} [\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)] \quad (2.32)$$

**Exemplo 2.4.** Dados os complexos  $z_1 = \sqrt{3} + 1$ ,  $z_2 = 1 + i$  e  $z_3 = i$ . Determine  $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1}$ .

*Solução:*

A forma polar de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são, respectivamente,

$$z_1 = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right],$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

e

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando as fórmulas (2.26) e (2.30), teremos

$$\begin{aligned} \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \end{aligned}$$

## 2.9 Raiz Enésima

Dado um número complexo  $z$ , a raiz enésima de  $z$  é o número complexo  $w$ , se e somente se:

$$w^n = z, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, se  $z = r [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$  é um complexo não nulo e  $n$  um inteiro positivo qualquer, então há exatamente  $n$  valores complexos diferentes para a raiz enésima de  $z$  e, tais valores são dados por

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\} \quad (2.33)$$

De fato, seja  $w = \rho [\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)]$ , então

$$w^n = z \Leftrightarrow \{\rho [\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)]\}^n = r [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$$

Aplicando a fórmula (2.29) de De Moivre, temos

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow \rho^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)] = r [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \\ &\Leftrightarrow \rho^n = r \text{ e } n\alpha = \theta + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

desse modo temos que  $\rho = \sqrt[n]{r}$  e  $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$

Da relação (2.32), é possível constatar que todas as raízes possuem o mesmo módulo e pertencem a circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$  e centro  $z = 0$ . Além disso, os argumentos principais dessas raízes representam uma progressão aritmética de razão  $\frac{2\pi}{n}$ , o que implica numa divisão dessa circunferência em  $n$  partes iguais. Portanto, se  $r \neq 0$  e  $n \geq 3$ , as imagens das raízes serão vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscritos na circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$  e centro em  $z = 0$ .

**Exemplo 2.5.** Determine todos os valores de  $w$ , sendo  $w^6 = -32 + 32\sqrt{3}i$ , e represente essas raízes no plano complexo.

*Solução:*

$-32 + 32\sqrt{3}i = 64 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$ , na forma trigonométrica. Pela relação (2.32), temos

$$w = \sqrt[6]{64 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]} = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6}\right) \right]$$

tem as seguintes raízes, para

$$k = 0: w_0 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{\pi}{9}\right) \right]$$

$$k = 1: w_1 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{9}\right) \right]$$

$$k = 2: w_2 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{9}\right) \right]$$

$$k = 3: w_3 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{10\pi}{9}\right) \right]$$

$$k = 4: w_4 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 8\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 8\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{13\pi}{9}\right) \right]$$

$$k = 5: w_5 = \sqrt[6]{64} \left[ \cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 10\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 10\pi}{6}\right) \right] = 2 \left[ \cos\left(\frac{16\pi}{9}\right) + isen\left(\frac{16\pi}{9}\right) \right]$$

As raízes do complexo  $w$  que satisfazem o problema estão representadas no círculo de raio 2 centrado na origem, conforme figura 9.

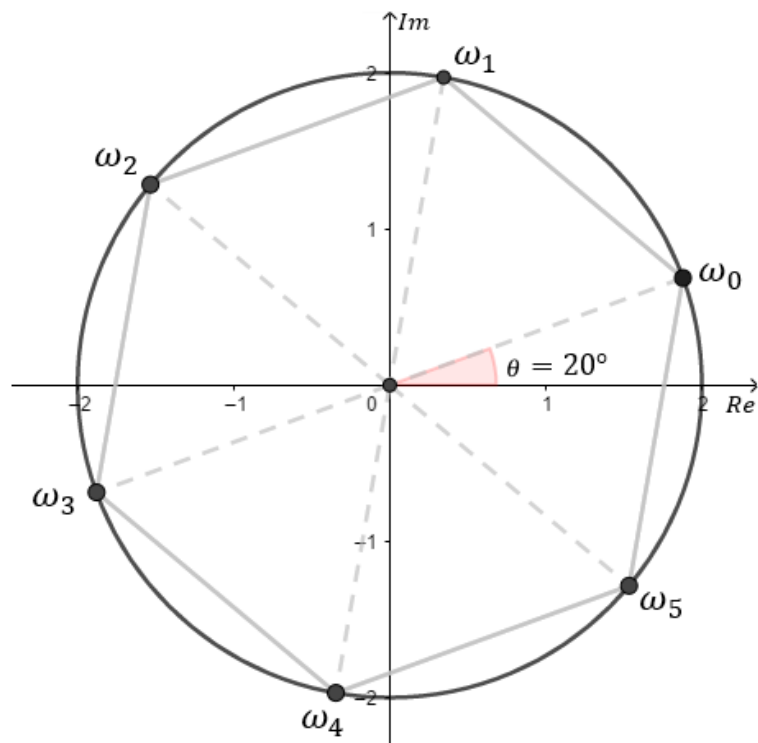


Figura 12 – Acervo do autor

## 2.10 Condições para colinearidade

Três complexos distintos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

( $\Rightarrow$ )

Se  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são colineares, então  $\widehat{z_2 z_1 z_3} \in \{0, \pi\}$ , onde  $\widehat{z_2 z_1 z_3}$  representa o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1 z_3}$ . Então

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \pi.$$

Portanto, a forma polar dada pela equação (2.24), temos que  $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$ .

---

( $\Leftarrow$ )

Se  $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$ , pela mesma equação (2.24) temos que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \left| \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \right| [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \{0, \pi\}, \text{ ou seja}$$

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \pi.$$

portanto  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são colineares.

Em consequência, dados três pontos distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , vale observar que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_3 - z_2}} \quad (2.34)$$

De fato,

se  $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right)} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_3 - z_2}} = \frac{\overline{z_3} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}}$$

Reciprocamente,

$$\text{se } \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\overline{z_3} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}} \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right)}. \text{ Sendo } \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = x + yi,$$

com  $x, y \in \mathbb{R}$ , segue que  $x + yi = x - yi \iff 2yi = 0 \iff y = 0$ .

Portanto,  $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = x \in \mathbb{R}$

## 2.11 Equação da reta dados dois complexos

É possível determinar uma reta que passa pelo ponto  $z_1$  na direção do vetor  $z_2$ , e tal reta é representada por:

$$z(t) = z_1 + z_2 t, \text{ com } t \in \mathbb{R}. \quad (2.35)$$

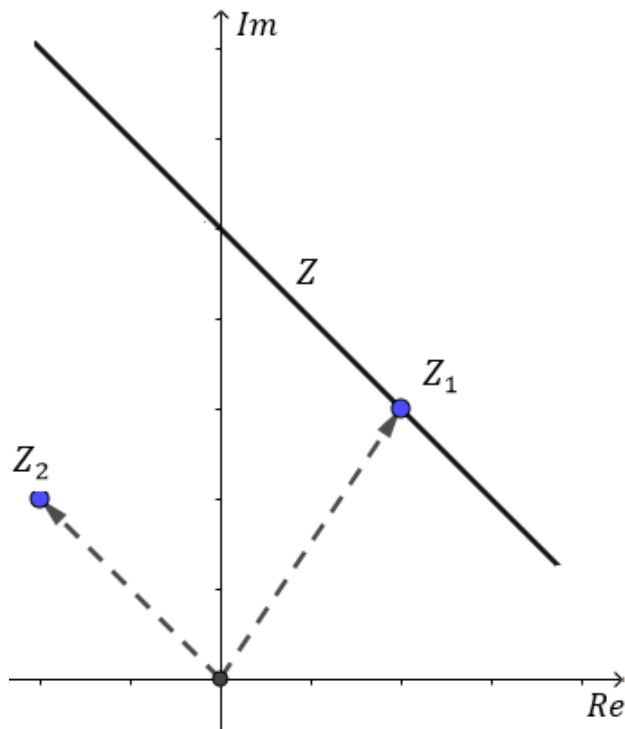


Figura 13 – Acervo do autor

Ou seja,  $z(t)$  é a equação paramétrica da reta paralela ao vetor  $z_2$  que contém o complexo  $z_1$ . No entanto, a equação da reta que passa simultaneamente pelos complexos  $z_1$  e  $z_2$  será mais útil para a demonstração dos teoremas do próximo capítulo.

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos que pertencem à reta  $r$ , e  $(z_2 - z_1)$  o vetor diferença. A equação da reta  $r$  pode ser representada por:

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longrightarrow r(t) = z_1 + (z_1 - z_2)t \end{cases} \quad \text{ou} \quad r : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longrightarrow r(t) = z_2 + (z_1 - z_2)t \end{cases} \quad (2.36)$$

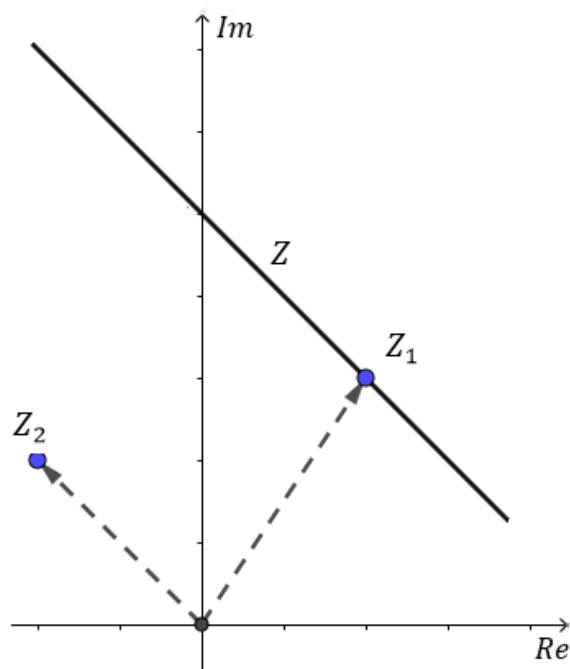


Figura 14 – Acervo do autor

**Exemplo 2.6.** Determinar a equação paramétrica da reta que contém os complexos  $z_1 = 3 + 2i$  e  $z_2 = -1 + 4i$ .

*Solução:*

Aplicando a relação (2.34), temos:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_1 + (z_2 - z_1)t \\ &= 3 + 2i + [(-1 + 4i) - (3 + 2i)]t \\ &= 3 + 2i + (-4 + 2i)t. \end{aligned}$$

**Proposição 2.1.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  pontos de uma reta  $r$ . Se  $z \in r$ , então existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$z(t) = \frac{1}{1+t}z_1 + \frac{t}{1+t}z_2 = \frac{z_1 + tz_2}{1+t}, \text{ com } t \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

como ilustra a figura abaixo

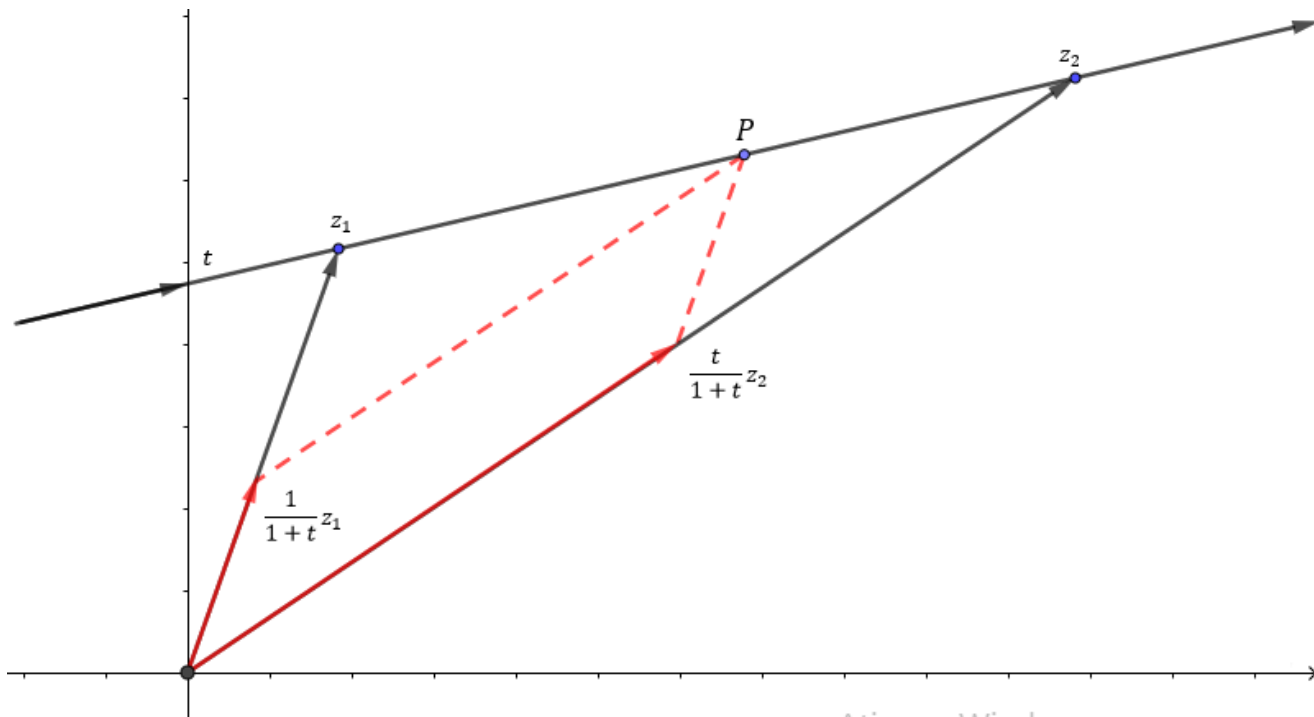


Figura 15 – Acervo do autor

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto na reta e  $z$  o complexo correspondente à  $P$ . Dado que  $z$ ,  $z_1$  e  $z_2$  são colineares, existirá um  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$z - z_1 = t(z_2 - z) \quad (2.38)$$

Ou seja,

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = -t \Rightarrow z - z_1 = -t(z - z_2) \Rightarrow z + zt = z_1 + tz_2 \Rightarrow z = \frac{z_1 + tz_2}{1 + t},$$

□

Observando a equação (2.37) para  $t = 0$ ,  $P$  coincide com  $z_1$ , e para  $t \rightarrow \infty$ ,  $P$  coincidirá com o complexo  $z_2$ . Valores positivos de  $t$  ocorrem entre  $z_1$  e  $z_2$ , e valores negativos acontecem em ambos os lados fora do segmento  $\overline{z_1 z_2}$ . O ponto no infinito da reta é caracterizado pelo valor do parâmetro  $t \rightarrow -1$ . Sendo o domínio os valores de  $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$ .

Veja que tendo dois vetores quaisquer  $\overrightarrow{z_A z_B}$  e  $\overrightarrow{z_C z_D}$ , pode-se definir a igualdade da razão abaixo



$$\frac{\overrightarrow{z_B z_A}}{\overrightarrow{z_C z_D}} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$$

dentro do conjunto dos números complexos.

Desta forma, dados  $z_1, z_2,$  e  $z_3$  colineares, com  $z_3$  entre  $z_1$  e  $z_2,$   $t$  é determinado pela equação

$$-t = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\overrightarrow{z_1 z_3}}{\overrightarrow{z_2 z_3}}, \quad \text{com } t > 0 \quad (2.39)$$

e, portanto, os vetores  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  e  $\overrightarrow{z_2 z_3}$  possuem a mesma direção, ou seja, pela equação (2.33) temos:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\overline{z_3} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}}$$

Além disso, é possível trazer o critério de colinearidade dos pontos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  de uma forma mais simétrica

$$(z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2) + (z_2 \overline{z_3} - \overline{z_2} z_3) + (\overline{z_1} z_3 - z_1 \overline{z_3}) = 0$$

ou, ainda, na forma de um determinante, onde o critério de colinearidade é similar ao conjunto dos números reais, e se torna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0$$

## 2.12 Ponto de intersecção de duas retas

Sejam  $r$  e  $s$  as retas que contém os complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3, z_4,$  respectivamente. Pela equação (2.36) cada reta é dada por:

$$r : z_r(u) = \frac{z_1 + uz_2}{1 + u} \quad e \quad s : z_s(v) = \frac{z_3 + vz_4}{1 + v}$$

Para determinar o ponto de intersecção, igualamos as expressões  $z_r$  e  $z_s$

$$\frac{z_1 + uz_2}{1 + u} = \frac{z_3 + vz_4}{1 + v}$$

ou seja,

$$(1 + v)(z_1 + uz_2) = (1 + u)(z_3 + vz_4) \quad (2.40)$$

Tomando o conjugado da equação (2.40), é fácil ver, que a equação a seguir é válida:

$$(1 + v)(\bar{z}_1 + u\bar{z}_2) = (1 + u)(\bar{z}_3 + v\bar{z}_4) \quad (2.41)$$

Desta última igualdade os parâmetros  $u$  e  $v$ , no ponto de intersecção, podem ser substituídos. Pela equação (2.39), temos:

$$-u = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{com } u > 0 \quad \text{e} \quad -v = \frac{z - z_3}{z - z_4}, \quad \text{com } v > 0$$

onde  $z$  representa o ponto de intersecção das retas  $z_r$  e  $z_s$ , ou seja, quando  $z = z_r = z_s$ .

Como ilustrado na figura abaixo:

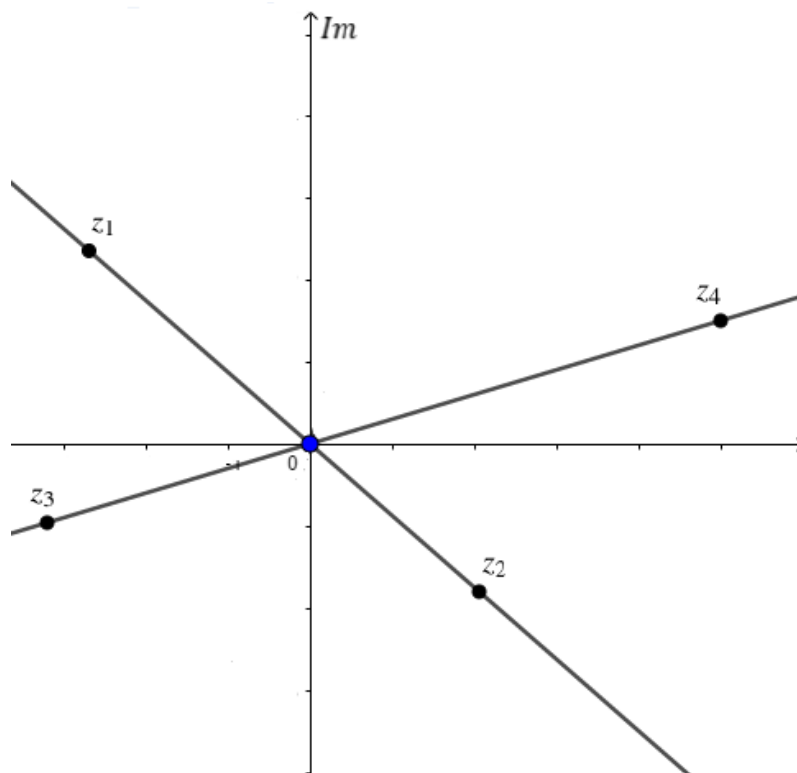


Figura 16 – Acervo do autor

Substituindo os parâmetros  $u$  e  $v$  na equação (2.40), teremos

$$\begin{aligned}
(1+v)(\bar{z}_1 + u\bar{z}_2) &= (1+u)(\bar{z}_3 + v\bar{z}_4) \\
\left[1 - \left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right)\right] \left[\bar{z}_1 - \left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\bar{z}_2\right] &= \left[1 - \left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)\right] \left[\bar{z}_3 - \left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right)\bar{z}_4\right] \\
\left(\frac{z_3-z_4}{z-z_4}\right) \left(\frac{\bar{z}_1 z - \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_2 z}{z-z_2}\right) &= \left(\frac{z_1-z_2}{z-z_2}\right) \left(\frac{\bar{z}_3 z - \bar{z}_3 z_4 + z_3 \bar{z}_4 - \bar{z}_4 z}{z-z_4}\right) \\
&\Downarrow \\
z[(z_1-z_2)(\bar{z}_4-\bar{z}_3) + (z_3-z_4)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)] &= (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)(z_3-z_4) + (z_3 \bar{z}_4 - \bar{z}_3 z_4)(z_1-z_2) \\
&\Downarrow \\
z[(z_1-z_2)(\bar{z}_3-\bar{z}_4) - (z_3-z_4)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)] &= (z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)(z_3-z_4) - (z_3 \bar{z}_4 - \bar{z}_3 z_4)(z_1-z_2) \\
&\Downarrow \\
z &= \frac{(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)(z_3-z_4) - (z_3 \bar{z}_4 - \bar{z}_3 z_4)(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)(\bar{z}_3-\bar{z}_4) - (\bar{z}_1-\bar{z}_2)(z_3-z_4)} \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Se os vetores  $z_1 - z_2$  e  $z_3 - z_4$  são paralelos, o denominador será zero, pois teríamos

$$z_1 - z_2 = t(z_3 - z_4)$$

e

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = t(\bar{z}_3 - \bar{z}_4)$$

Destas duas últimas equações concluímos que

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4) = 0$$

e pelo critério de paralelismo a interseção acontece em  $z \rightarrow \infty$ , como era esperado.

De forma análoga, se cortarmos a reta que contém os vetores  $z_1 - z_2$  por uma terceira que contém  $z_5 - z_6$  criamos um segundo ponto de interseção, cujo lugar geométrico é dado por

$$z' = \frac{(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)(z_5 - z_6) - (z_5 \bar{z}_6 - \bar{z}_5 z_6)(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_5 - \bar{z}_6) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_5 - z_6)} \tag{2.43}$$

Conseqüentemente, cortando a reta que contém  $z_3 - z_4$  pela reta que contém o vetor  $z_5 - z_6$  criamos um terceiro ponto de interseção, cujo o lugar geométrico é dado por

$$z'' = \frac{(z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_4)(\bar{z}_5 - \bar{z}_6) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_4)(z_5 - z_6)} \quad (2.44)$$

Se as três retas concorrem em um único ponto, as expressões (2.42), (2.43) e (2.44), para os pontos de interseção, devem ser iguais, ou seja,  $z = z' = z''$ .

A solução para a concorrência de três retas pode ser representada pela forma simétrica do determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_2 & z_3 - z_4 & z_5 - z_6 \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & \bar{z}_3 - \bar{z}_4 & \bar{z}_5 - \bar{z}_6 \\ z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 & z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4 & z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6 \end{vmatrix} = 0$$

Podemos verificar essa fórmula colocando a origem no ponto comum de interseção, como representado pela figura a seguir:

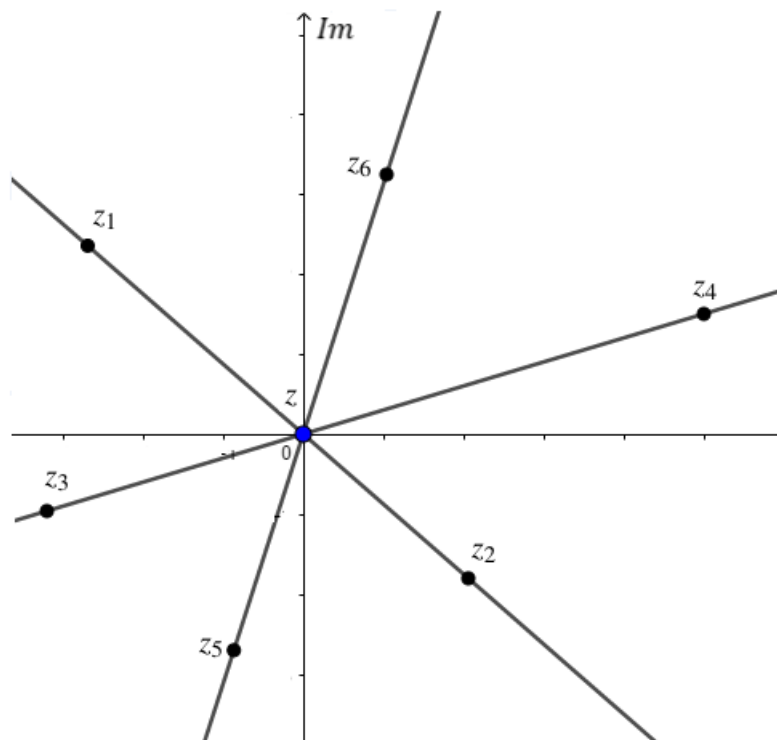


Figura 17 – Acervo do autor

---

Dessa maneira, as expressões (2.42), (2.43) e (2.44) se reduzirão a

$$z = (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_3 - z_4) - (z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_1 - z_2) = 0;$$

$$z' = (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_1 - z_2) = 0;$$

$$z'' = (z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_3 - z_4) = 0;$$

respectivamente.

---

# Os teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues

As principais referências desse capítulo são [7] e [9]

Como aplicação das teorias gerais apresentadas no capítulo 2, neste momento serão provados os teoremas de **Menelaus** e **Ceva**, e, por consequência, o teorema de **Desargues**. Tais teoremas são comumente demonstrados por meio da geometria clássica, entretanto, o conjunto dos números complexos proporciona uma demonstração alternativa.

## 3.1 Teorema de Menelaus

**Teorema 3.1.** *Seja  $ABC$  um triângulo e  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos sobre as retas suportes dos segmentos orientados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente, todos distintos dos vértices de  $ABC$ . Então:*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1$$

*se, e só se, os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  forem colineares.[7]*

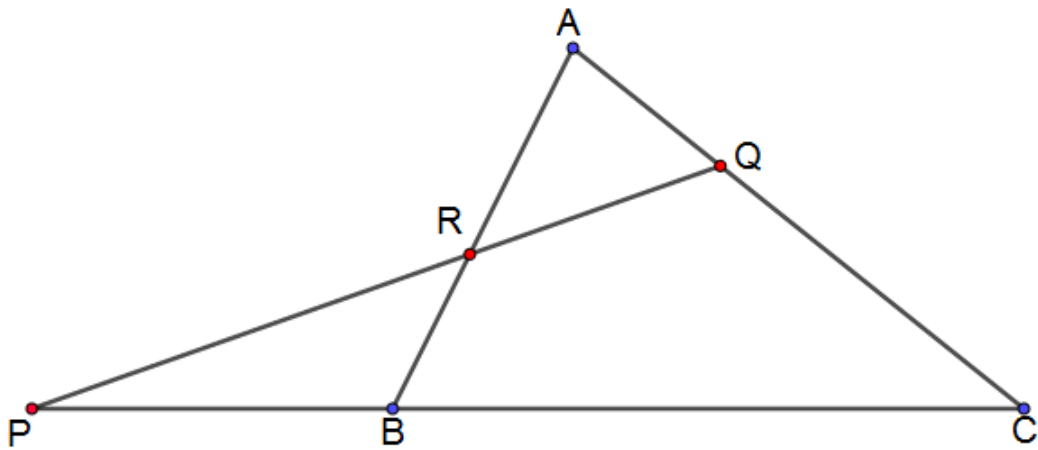


Figura 18 – Acervo do autor

*Demonstração.* Sejam os vértices A, B e C do triângulo iguais a  $z_A, z_B$  e  $z_C$ , respectivamente. E os pontos P, Q e R sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, nessa ordem, iguais a  $z_P, z_Q$  e  $z_R$ .

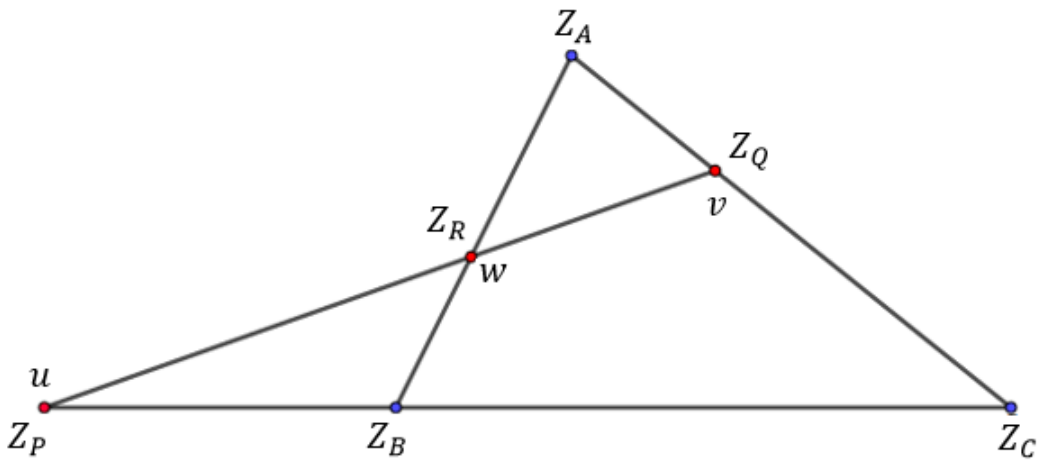


Figura 19 – Acervo do autor

Então, pela equação (2.36), temos:

$$z_P = \frac{z_B + uz_C}{1 + u} \Rightarrow u = \frac{z_P - z_B}{z_C - z_P}$$

$$z_Q = \frac{z_C + vz_A}{1 + v} \Rightarrow v = \frac{z_Q - z_C}{z_A - z_Q}$$

$$z_R = \frac{z_A + wz_B}{1 + w} \Rightarrow w = \frac{z_R - z_A}{z_B - z_R}$$

Desta forma, pela parametrização (2.37), o **teorema de Menelaus** pode ser escrito como:

$$\frac{\overrightarrow{z_B z_P}}{\overrightarrow{z_P z_C}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_C z_Q}}{\overrightarrow{z_Q z_A}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_A z_R}}{\overrightarrow{z_R z_B}} = \underbrace{\frac{(z_P - z_B)}{(z_C - z_P)}}_u \cdot \underbrace{\frac{(z_Q - z_C)}{(z_A - z_Q)}}_v \cdot \underbrace{\frac{(z_R - z_A)}{(z_B - z_R)}}_w = u \cdot v \cdot w = -1$$

se, e somente se, os pontos  $z_P, z_Q$  e  $z_R$  forem colineares.

( $\Rightarrow$ )

A primeira parte da demonstração consiste em provar que  $z_P, z_Q$  e  $z_R$  pertencem a mesma reta. Para isso, mostraremos que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \bar{z}_P & \bar{z}_Q & \bar{z}_R \end{vmatrix}$$

é igual a zero quando  $u \cdot v \cdot w = -1$

Temos, que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \bar{z}_P & \bar{z}_Q & \bar{z}_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{z_B + uz_C}{1 + u} & \frac{z_C + vz_A}{1 + v} & \frac{z_A + wz_B}{1 + w} \\ \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1 + u} & \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1 + v} & \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1 + w} \end{vmatrix} =$$

Multiplicando a primeira, segunda e terceira coluna por  $(1 + u), (1 + v)$  e  $(1 + w)$ , respectivamente, obtemos:

$$= \frac{1}{(1 + u)} \cdot \frac{1}{(1 + v)} \cdot \frac{1}{(1 + w)} \begin{vmatrix} 1 + u & 1 + v & 1 + w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix}.$$



Portanto, basta mostrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix}$$

é nulo, quando  $u.v.w = -1$

De fato,

fazendo  $C_1 = C_1 - u.C_2 + uv.C_3$ , onde  $C_1, C_2$  e  $C_3$  correspondem a primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente, obtemos

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1+u \\ z_B + uz_C \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C \end{bmatrix} - u \begin{bmatrix} 1+v \\ z_C + vz_A \\ \bar{z}_C + v\bar{z}_A \end{bmatrix} + uv \begin{bmatrix} 1+w \\ z_A + wz_B \\ \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{u} - \cancel{u} - \cancel{uv} + \cancel{uv} + uvw + 1 \\ \cancel{uz_C} - \cancel{uz_C} - \cancel{uvz_A} + \cancel{uvz_A} + uvwz_B + \cancel{z_B} \\ \cancel{u\bar{z}_C} - \cancel{u\bar{z}_C} - \cancel{uv\bar{z}_A} + \cancel{uv\bar{z}_A} + uvw\bar{z}_B + \cancel{\bar{z}_B} \end{bmatrix}$$

Desta forma, teremos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1+v & 1+w \\ 0 & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ 0 & \bar{z}_C + w\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = 0$$

Logo, os complexos  $z_P, z_Q$  e  $z_R$  são colineares, quando  $u.v.w = -1$

( $\Leftarrow$ )

Agora, queremos mostrar que se

$$\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = 0$$

teremos  $u.v.w = -1$

De fato,

fazendo  $C_1 = C_1 - u.C_2 + uv.C_3$ , onde  $C_1, C_2$  e  $C_3$  correspondem a primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente, obtemos

$$\begin{vmatrix} uvw + 1 & 1 + v & 1 + w \\ uvwz_B + z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ uvw\bar{z}_B + \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 + w \\ z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = 0$$

fazendo  $C_3 = -wC'_1 + C_3$  teremos

$$(uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 + w \\ z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 \\ z_B & z_C + vz_A & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0$$

Ainda,efetuando  $C_2 = -vC'_3 + C_2$ , obtemos

$$(uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 \\ z_B & z_C + vz_A & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_C & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0$$

Como  $z_A, z_B, z_C$  são vértices do triângulo, concluí-se que  $u.v.w + 1 = 0 \Rightarrow u.v.w = -1$

□

## 3.2 Teorema de Ceva

**Teorema 3.2.** *Dado um triângulo ABC e pontos P, Q e R situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB, temos que*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

se, e só se, as retas que contém os segmentos  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  forem concorrentes em um único ponto.[7]

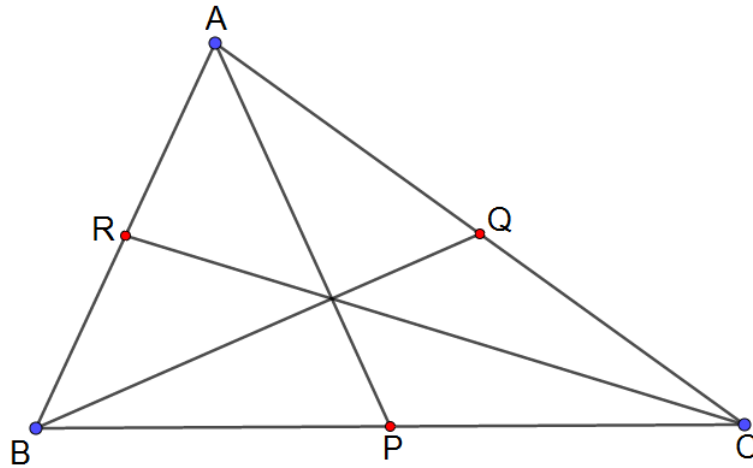


Figura 20 – Acervo do autor

*Demonstração.* Sejam os vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo iguais a  $z_A, z_B$  e  $z_C$ , respectivamente. E os pontos  $P, Q$  e  $R$  sobre as retas suportes dos lados  $BC, CA$  e  $AB$ , nessa ordem, iguais a  $z_P, z_Q$  e  $z_R$

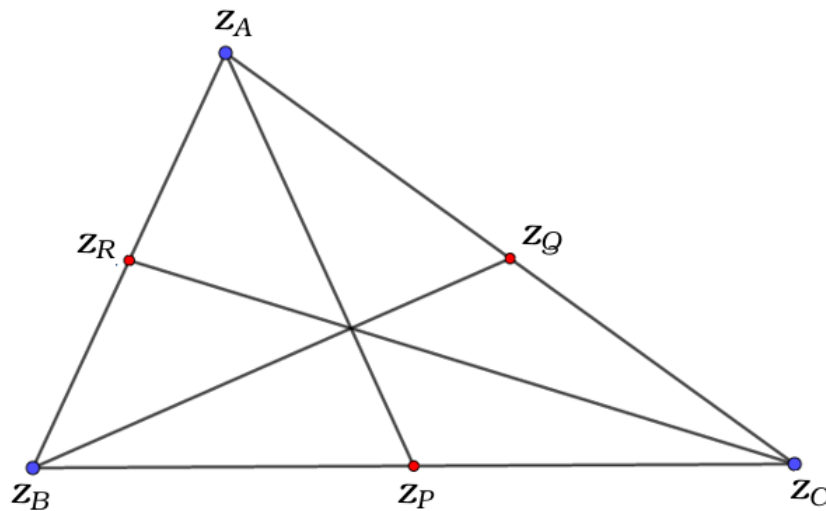


Figura 21 – Acervo do autor

Sendo assim, temos:

$$z_P = \frac{z_B + uz_C}{1 + u}; \quad z_Q = \frac{z_C + vz_A}{1 + v}; \quad z_R = \frac{z_A + wz_B}{1 + w};$$

Desta forma, pela parametrização (2.37), o **teorema de CEVA** pode ser escrito como:

$$\frac{\overrightarrow{z_B z_P}}{\overrightarrow{z_P z_C}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_C z_Q}}{\overrightarrow{z_Q z_A}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_A z_R}}{\overrightarrow{z_R z_B}} = \underbrace{\frac{(z_P - z_B)}{(z_C - z_P)}}_u \cdot \underbrace{\frac{(z_Q - z_C)}{(z_Q - z_A)}}_v \cdot \underbrace{\frac{(z_R - z_A)}{(z_B - z_R)}}_w = u \cdot v \cdot w = 1$$

se, e somente se, as retas suportes de  $(z_A - z_P)$ ,  $(z_B - z_Q)$  e  $(z_C - z_R)$  forem concorrentes em um único ponto.

( $\Rightarrow$ )

A primeira parte da demonstração irá mostrar que as retas suportes dos vetores  $(z_A - z_P)$ ,  $(z_B - z_Q)$  e  $(z_C - z_R)$  são concorrentes em um único ponto, quando  $u \cdot v \cdot w = 1$ . E pelas equações (2.42), (2.43) e (2.44), basta comprovar que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} z_A - z_P & z_B - z_Q & z_C - z_R \\ \bar{z}_A - \bar{z}_P & \bar{z}_B - \bar{z}_Q & \bar{z}_C - \bar{z}_R \\ z_A \bar{z}_P - \bar{z}_A z_P & z_B \bar{z}_Q - \bar{z}_B z_Q & z_C \bar{z}_R - \bar{z}_C z_R \end{vmatrix}$$

é nulo quando  $u \cdot v \cdot w = 1$ .

Temos, que  $D$  é igual a

$$\begin{vmatrix} z_A - \frac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B - \frac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C - \frac{z_A + wz_B}{1+w} \\ \bar{z}_A - \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1+u} & \bar{z}_B - \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1+v} & \bar{z}_C - \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1+w} \\ z_A \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1+u} - \bar{z}_A \frac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1+v} - \bar{z}_B \frac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1+w} - \bar{z}_C \frac{z_A + wz_B}{1+w} \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira, segunda e terceira coluna por,  $(1+u)$ ,  $(1+v)$  e  $(1+w)$ , respectivamente, iremos mostrar que:

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+v)z_B - (z_C + vz_A) \\ (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & (1+v)\bar{z}_B - (\bar{z}_C + v\bar{z}_A) \\ (1+u)\{z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)\} & (1+v)\{z_B(\bar{z}_C + u\bar{z}_A) - \bar{z}_B(z_C + uz_A)\} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1+w)z_C - (z_A + wz_B) \\ (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) \\ (1+u)\{z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)\} \end{array} \left| \right.$$

é zero, quando  $u.v.w = 1$

De fato, fazendo  $C_2 = C_2 + v.C_1 + uv.C_3$ , onde  $C_1, C_2$  e  $C_3$  correspondem a primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente, obtemos

$$\left| \begin{array}{ccc} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & 0 & (1+w)z_C - (z_A + wz_B) \\ (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & 0 & (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) \\ (1+u)\{z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)\} & 0 & (1+u)\{z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)\} \end{array} \right| = 0$$

para  $u.v.w = 1$

( $\Leftarrow$ )

Agora, queremos mostrar que se

$$\left| \begin{array}{cc} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+v)z_B - (z_C + vz_A) \\ (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & (1+v)\bar{z}_B - (\bar{z}_C + v\bar{z}_A) \\ (1+u)\{z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)\} & (1+v)\{z_B(\bar{z}_C + u\bar{z}_A) - \bar{z}_B(z_C + uz_A)\} \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} (1+w)z_C - (z_A + wz_B) \\ (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) \\ (1+u)\{z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)\} \end{array} \left| \right. = 0$$

teremos  $u.v.w = 1$

De fato,

tomando  $C_2 = C_2 + v.C_1 + uv.C_3$ , onde  $C_1, C_2$  e  $C_3$  correspondem a primeira, segunda e terceira coluna. Em seguida, colocando  $u.v.w = 1$  em evidência e efetuando operações na matriz, similares as efetuadas no teorema de Menelaus, obtemos:

$$(uvw - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_C & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0$$

Como  $z_A, z_B$  e  $z_C$  são vértices do triângulo, temos  $u.v.w - 1 = 0 \Rightarrow u.v.w = 1$

O que prova que as retas suportes dos vetores  $(z_A - z_p), (z_B - z_Q)$  e  $(z_C - z_R)$  são concorrentes em um único ponto se, e somente se,  $u.v.w = 1$ .

□

### 3.3 Teorema de Desargues

**Teorema 3.3.** *Se  $ABC$  e  $A'B'C'$  são triângulos tais que  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes em  $O$ , então  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R\}$ ,  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{P\}$  e  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$  são colineares[7]*

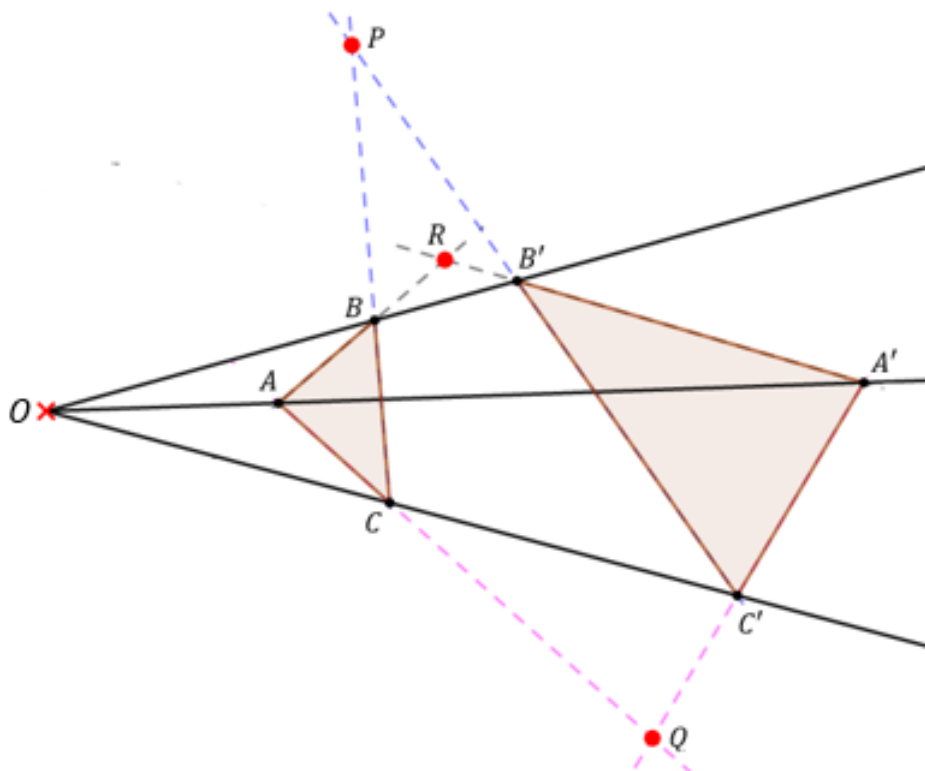


Figura 22 – Acervo do autor

*Demonstração.* O teorema de Desargues afirma que os lados correspondentes de dois triângulos em perspectiva se interceptam em três pontos colineares, e tal teorema é uma consequência do teoremas de **Menelaus**.

De fato,

Observando a figura anterior que ilustra o **Teorema de Desargues**, podemos aplicar o **Teorema de Menelaus** no  $\Delta A'B'O$ , onde  $A, B$  e  $R$  são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{A'B}$  e  $\overline{B'O}$ , respectivamente. Como destacado na (fig.23).

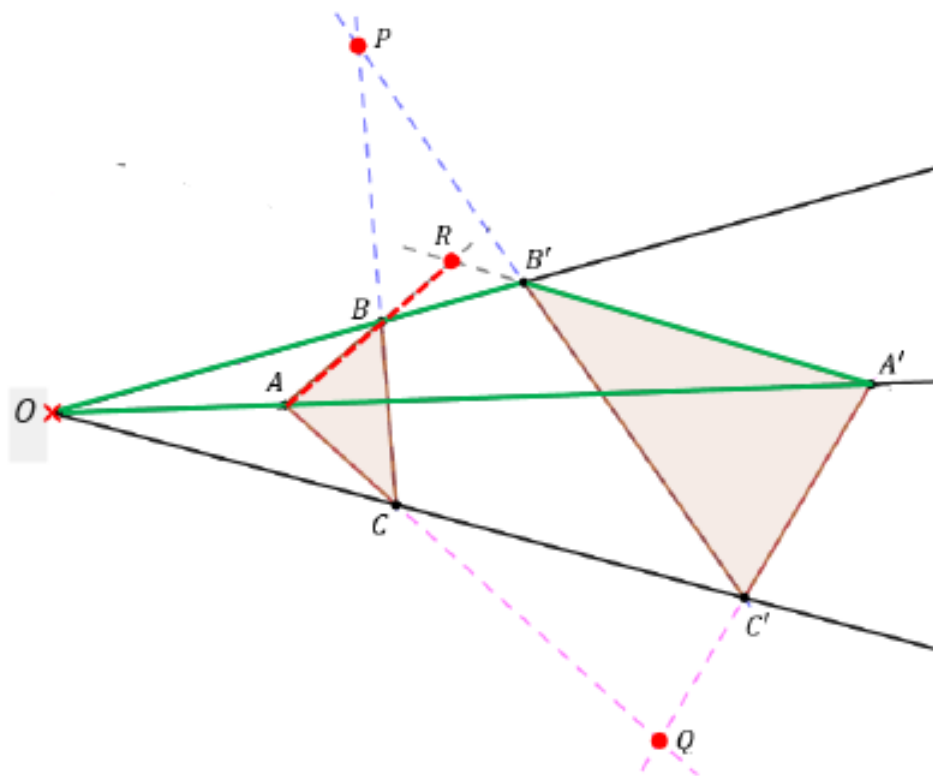


Figura 23 – Acervo do autor

desta forma, aplicando o **Teorema de Menelaus**, obtendo:

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_R}}{\overrightarrow{z_Rz_{A'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_A}}{\overrightarrow{z_Az_O}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_B}}{\overrightarrow{z_Bz_{B'}}} = -1 \quad (3.1)$$

de maneira análoga, aplicaremos o **Teorema de Menelaus** no  $\Delta C'A'O$ , onde  $Q$ ,  $A$  e  $C$  são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados  $\overline{A'C'}$ ,  $\overline{A'O}$  e  $\overline{OC'}$ , respectivamente. Como ilustrado na (fig.24)



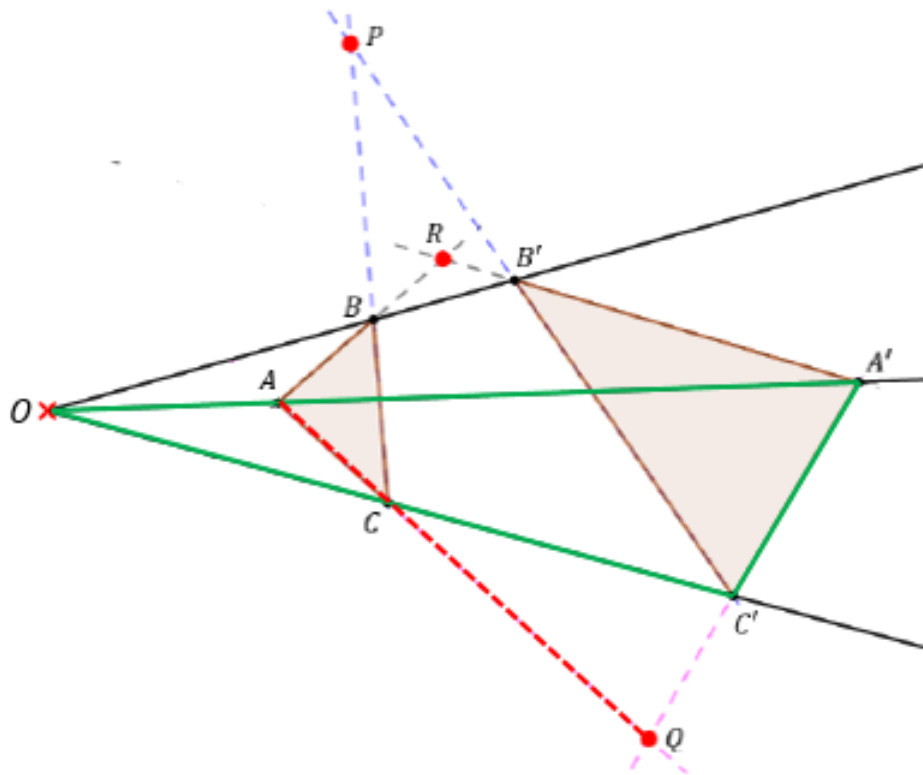


Figura 24 – Acervo do autor

temos:

$$\frac{\overrightarrow{z_{C'}z_Q}}{\overrightarrow{z_Qz_{A'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_A}}{\overrightarrow{z_Az_O}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_C}}{\overrightarrow{z_Cz_{C'}}} = -1 \quad (3.2)$$

e ainda, destacando o  $\Delta C'B'O$ , onde  $P, B$  e  $C$  são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados  $\overrightarrow{C'B'}$ ,  $\overrightarrow{B'O}$  e  $\overrightarrow{OC'}$ , respectivamente. Conforme a figura (fig.25) abaixo

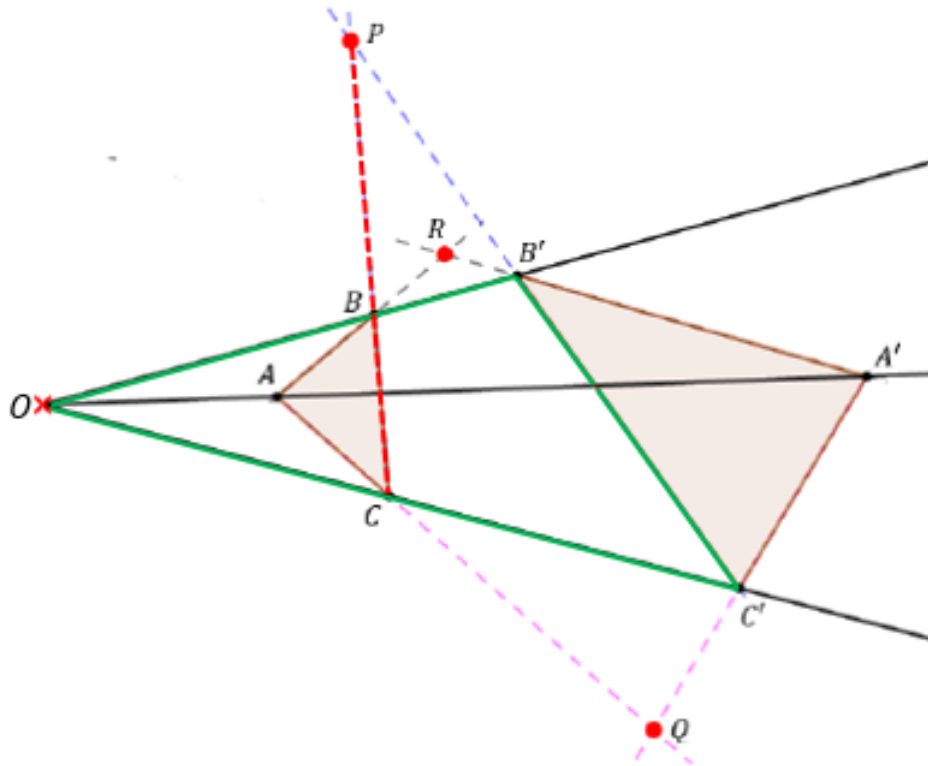


Figura 25 – Acervo do autor

podemos aplicar novamente o **Teorema de Menelaus**, conseguindo:

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_P}}{\overrightarrow{z_{Pz_{C'}}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{C'}z_C}}{\overrightarrow{z_{Cz_O}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_B}}{\overrightarrow{z_{Bz_{B'}}}} = -1 \quad (3.3)$$

Multiplicando a equação (3.1) pelo inverso das equações (3.2) e (3.3), obtemos:

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_R}}{\overrightarrow{z_{Rz_A}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_Q}}{\overrightarrow{z_{Qz_{C'}}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{C'}z_P}}{\overrightarrow{z_{Pz_{B'}}}} = -1 \quad (3.4)$$

Observe que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são vértices do  $\Delta A'B'C'$ , e que  $P$ ,  $R$  e  $Q$  são pontos que pertencem as retas que contém os segmentos orientados  $\overline{B'C'}$ ,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A'C'}$  (lados do mesmo triângulo), respectivamente. Ilustrado na (fig.26) a seguir

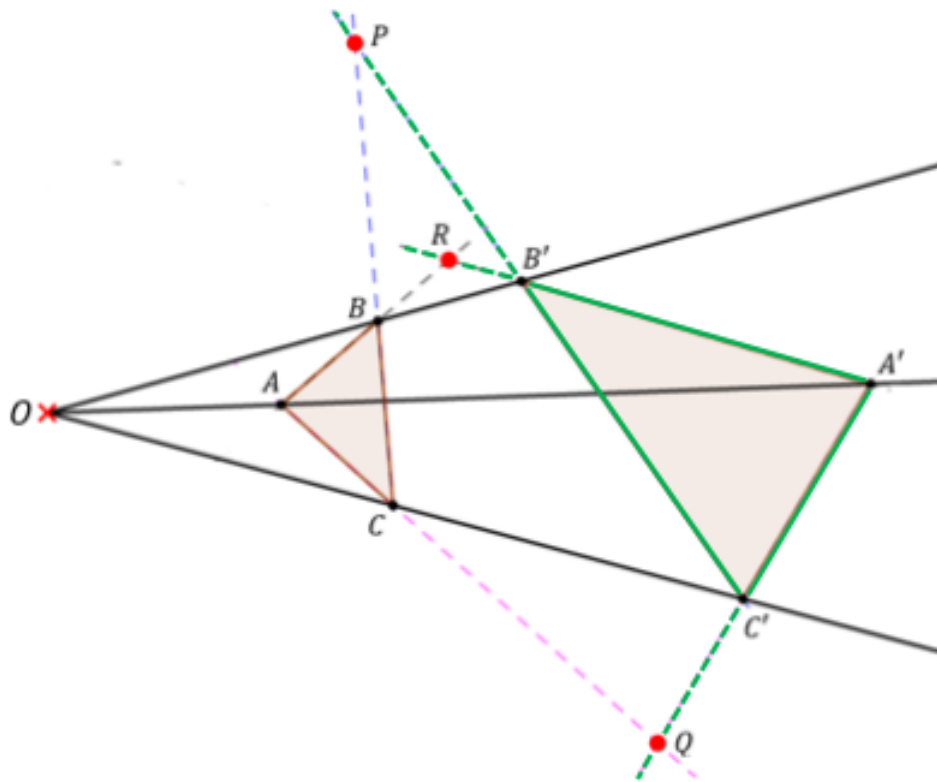


Figura 26 – Acervo do autor

Portanto, a equação (3.4) satisfaz **Teorema de Menelaus** o que permite concluir que os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares. □

---

# Os números complexos na Educação básica

Há alguns anos o estudo dos números complexos não aparece na ementa da maioria das escolas de educação básica brasileira, e a ausência cada vez mais frequente deste conteúdo, merece uma reflexão. O objetivo desse capítulo é refletir sobre o futuro do estudo dos números complexos na educação básica, especialmente no ensino médio, e mostrar a importância de reintroduzir tal conteúdo na grade curricular das escolas.

Para discorrer sobre o tema, é importante analisar os principais fatores que contribuíram para o desaparecimento desse conjunto numérico das salas de aula. O exame nacional do ensino médio (ENEM), que há alguns anos é a única forma de ingresso em diversas universidades públicas do país, não contempla em sua matriz os números complexos. Além disso, existe uma certa resistência por parte dos professores de matemática em abordarem o tema, ainda que conheçam a teoria. O principal argumento dá-se pela dificuldade em apresentar aplicações concretas dos números complexos, não levando em consideração a relevância destes no desenvolvimento da própria ciência em si.

## 4.1 Aplicação dos números complexos

Apesar da dificuldade em apresentar exemplos contextualizados envolvendo números complexos para alunos do ensino médio, as aplicações com tais números existem e são várias. Engenheiros mecânicos e civis utilizam os complexos frequentemente para examinar as vibrações em viadutos, passarelas entre outras estruturas (STROGATZ, 2010). Além disso, também existem

---

aplicações com tais números, por exemplo, na Engenharia Elétrica, na Dinâmica dos fluidos, na Física Quântica, em fractais e na Engenharia Aeroespacial.

A seguir serão apresentados algumas aplicações dos números complexos, mostrando a grande importância da existência e do estudo desse conjunto.

### **Oscilações e Ondas na Física**

Oscilações e ondas são fenômenos físicos "observados" com frequência em nosso dia-a-dia, como: movimentos de planetas e partículas, sistemas elétricos, forças fundamentais e diversas formas de comunicação que utilizamos envolvendo esses fenômenos.

Segundo Antônio Moreira[10], uma oscilação é uma perturbação em um sistema físico que é repetitiva no tempo, ao passo que uma onda é definida como uma perturbação em um sistema físico que é repetitiva no tempo e periódica no espaço. Oscilações abrangem, normalmente, um contínuo fluxo entre dois distintos tipos de energia. Além de gerar energia é capaz de transmitir informações. Ainda que oscilações e ondas tenham origem em diferentes meios físicos, elas possuem várias propriedades comuns, e tais semelhanças, são representados pelo mesmo conjunto de expressões matemáticas.

O conjunto dos números complexos é utilizado para estudar ondas e oscilações que podem ser representados pela forma exponencial  $z = re^{i\theta}$ . Considerando os complexos no plano, a função  $z(t) = e^{i\omega t}$  reproduzirá um ponto que contorna o círculo unitário a uma velocidade angular  $\omega$  constante no sentido horário.

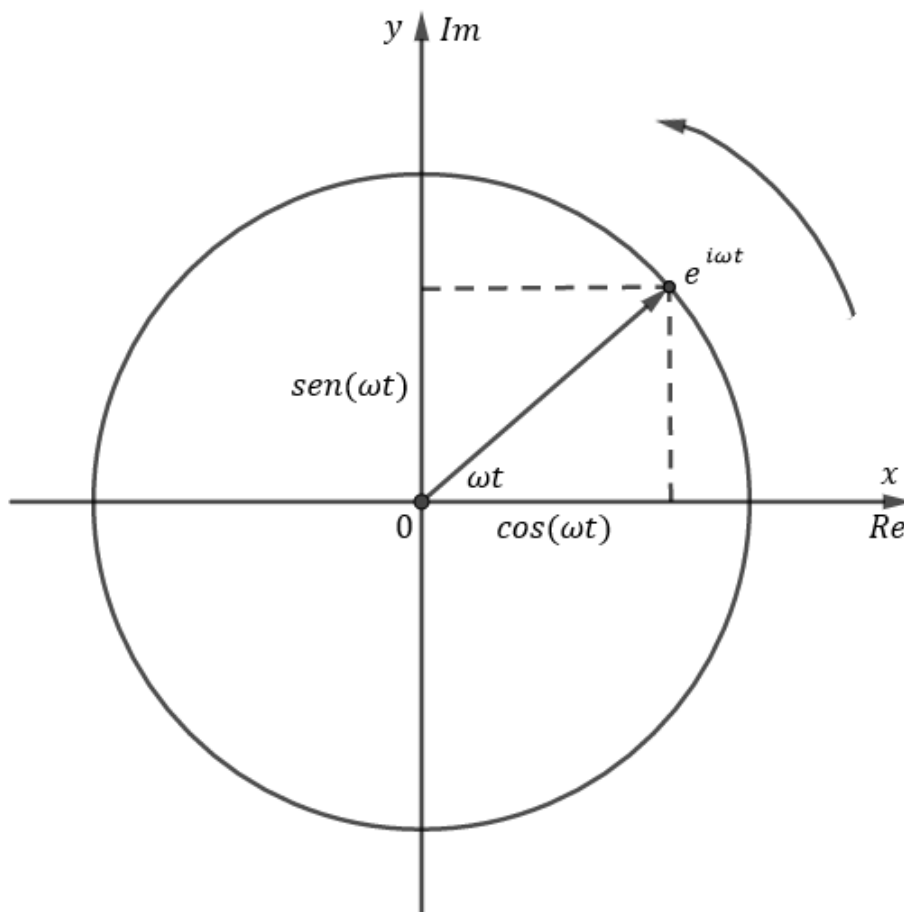


Figura 27 – Número complexo no círculo unitário

Nesta função a componente  $x$  muda ao longo do tempo como uma onda senoidal, o que o torna apropriado para a modelagem de sequências periódicas, como circuitos eletrônicos oscilantes e ondas eletromagnéticas e sonoras. Sempre que houver um fenômeno oscilatório ou ondulatório, os números complexos são a ferramenta ideal para descrevê-lo e analisá-lo mais facilmente (FOWLER, 2007).

### **Circuitos Elétricos**

O cientista Hermann Von Helmholtz (1821-1894) foi quem introduziu o conjunto dos números complexos à teoria de circuitos elétricos, e, desde então vários estudiosos evoluíram desenvolvendo aplicações mais sofisticadas. No estudo de circuitos de corrente alternada, os complexos recebem destaque por facilitarem os cálculos e são frequentemente utilizados nas

---

grandezas que possuem fase e amplitude. A corrente alternada é uma corrente elétrica na qual sua intensidade e direção variam ciclicamente no tempo e pode ser modelada por uma onda senoidal, do tipo  $I(t) = I_0 \text{sen}(w_0t + \theta_i)$ , como ilustrado na figura 29.

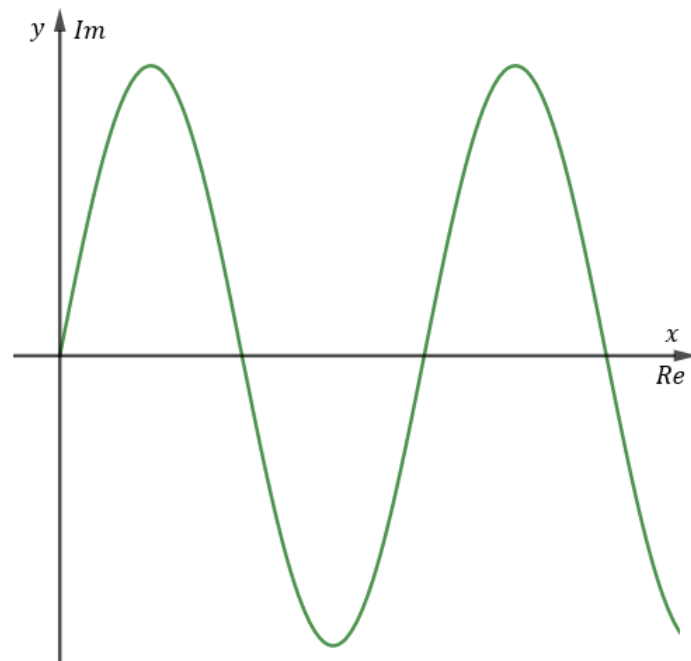


Figura 28 – Corrente alternada no plano complexo

Na relação  $V = Z.i$ , onde  $V, Z$  e  $i$  representam a tensão, a impedância e a corrente elétrica, respectivamente. Essas grandezas fazem parte do conjunto dos números complexos, e podem ser representadas vetorialmente girando no sentido anti-horário.

Para evitar dúvidas entre  $i$  símbolo da corrente elétrica, e  $i$ , unidade imaginária, os engenheiros concordaram em denotar por  $j$  a unidade imaginária da expressão do complexo  $x + yj$ .

### **Física Quântica**

Física Quântica ou Mecânica Quântica é a ramo da física moderna que estuda todos os fenômenos que ocorrem em escala microscópicas. Essa teoria foi desenvolvida a partir do século XX para tratar essencialmente dos fenômenos que acontecem microscopicamente e como eles se refletem na escala macroscópica.

---

Em mecânica Quântica, é denominado *bit* qualquer experimento em que há somente dois resultados admissíveis e pode ser fisicamente implementado por dispositivos que podem estar em dois estados diferentes. Grandezas como a polarização da luz e o spin do elétron não podem ser representadas por um modelo matemático tão trivial como o *bit*. Nesses casos é preciso usar os números complexos, que possibilita tratar as superposições de maneira adequada. Além disso, na Física Quântica, o estado de um sistema físico será interpretado por um vetor abstrato, relacionado a um espaço vetorial complexo.

### Fractais

A geometria Fractal é o campo da matemática que analisa as propriedades e comportamentos dos fractais, que são figuras geométricas não euclidianas. Tal geometria possibilita a incorporação de diversos assuntos da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia.

São exemplos de fractais os conjuntos de Julia e Mandelbrot (fig.30), ambos gerados por um processo iterativo que é modelado pela relação de recorrência  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  onde  $z$  e  $c$  são números complexos. Para formar o conjunto de Mandelbrot iteramos a função para cada ponto  $c$  do plano complexo tomando  $z_0 = 0$ . Quanto ao conjunto de Julia a constante  $c$  permanece fixa por todo o processo de iteração mudando o valor de  $z_0$ .

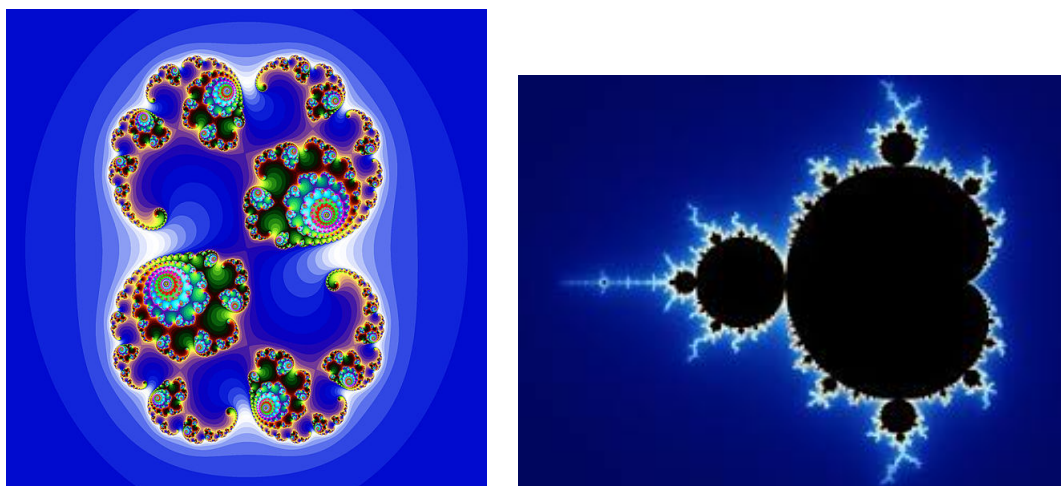


Figura 29 – Fractais de Julia e Mandelbrot

É fato que são inúmeras as aplicações dos números complexos nas mais diversas áreas,



---

o que por si só justifica a permanência de tal conteúdo nas ementas das escolas de educação básica do país. Entretanto, existe uma insistência em tornar a educação mais prática, com a redução do número de disciplinas e conteúdos abordados nas salas de aula, pensando tão somente nas demandas diretas do mercado de trabalho e resultados em vestibulares, como o ENEM.

Segundo Sean Harford, diretor nacional de escritório de padrões da educação (Ofsted), órgão que faz a inspeção das escolas da Inglaterra, medidas nessa direção podem piorar a aprendizagem. "Se um país estreita os campos de aprendizagem, os resultados nos exames podem até ser melhores, mas a educação, no sentido amplo, será prejudicada", diz Harford.

---

## Considerações Finais

O principal motivo que despertou em mim o interesse de trabalhar com o conjunto dos números complexos foi o desaparecimento desse importante conteúdo na ementa curricular das escolas de educação básica. Apesar de o presente trabalho não se basear em problemas concretos que abrangem os alunos do ensino médio, ele tem o intuito de mostrar a vasta aplicabilidade deste conjunto.

Tal conteúdo tem desaparecido das salas de aula, mesmo abrangendo temas como: trigonometria, álgebra, geometria analítica e plana, assuntos sabidamente essenciais no desenvolvimento da ciência, que são ensinadas nas escolas e cobrados nos vestibulares. Contudo, a extinção do estudo dos números complexos nas escolas parece irreversível.

A Base nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, é referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a educação infantil, Ensino Fundamental e Médio. É esse documento que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas para garantir o direito ao desenvolvimento pleno de todos os estudantes.

Em matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Desta forma, pelo menos, três desses cinco temas tem relação direta com o conjuntos dos números complexos e, ainda assim, tem sido abordados de forma puramente algébrica, o que acarreta na falta de contextualização do conjunto com outras áreas da ciência e da matemática, e no conseqüente desinteresse tanto por parte dos alunos quanto dos professores.

Além disso, a grande insistência em ensinar apenas o que é cobrado nos vestibulares e

---

em tornar a educação mais prática, também contribui para esse desinteresse. Portanto, ao contar um pouco da história dos números complexos e mostrar como estes podem ser aplicados em áreas que envolvem desde o âmbito do ensino médio até demonstrações de importantes teoremas da Geometria Plana, como os Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues, este trabalho ratifica a importância da permanência deste conteúdo nas sala de aula de educação básica.

---

## Referências

- [1] Rafael Bombelli, Umberto Forti, and Ettore Bortolotti. *L'algebra. Feltrinelli*, 1966.
- [2] Girolamo Cardano and Jean Stoner. *The book of my life*. New York Review Books, 2002.
- [3] Ruel V Churchill. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGraw-Hill do Brasil, 1980.
- [4] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Courier Corporation, 1925.
- [5] Gilberto Geraldo Garbi. *O Romance das Equações Algébricas*. Editora Livraria da física. São Paulo, 2010.
- [6] Ulício Pinto Júnior. *A história dos números complexos: "das quantidades sofisticadas de cardano às linhas orientadas de argand"*, 2009.
- [7] Antônio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana*. Caminha Muniz Neto. 1.ed-Rio de Janeiro: SBM,2,2012.
- [8] Tatiana Roque. *História da matemática*. Zahar, 2012.
- [9] Corlelis Zwikker. *The advanced geometry of plane curves and their applications*. Courier Corporation, 1950.
- [10] Agnaldo Antônio Moreira. *Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos: uma abordagem com aplicações*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.