DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Thaynara Menezes Gandra Conceição

Lápis, papel, GeoGebra e a Fórmula de Bháskara: uma experiência com alunos do nono ano

Ouro Preto - MG, Brasil

Novembro 2019

Thaynara Menezes Gandra Conceição

Lápis, papel, GeoGebra e a Fórmula de Bháskara: uma experiência com alunos do nono ano

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática.

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática (DEMAT)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins
Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira

Ouro Preto - MG, Brasil
Novembro 2019

C744l Conceição, Thaynara Menezes Gandra .
Lápis, papel, GeoGebra e a Fórmula de Bháskara [manuscrito]: uma experiência com alunos do nono ano / Thaynara Menezes Gandra Conceição. - 2019.
67f.: il.: color.

Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.
Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. GeoGebra (Software) . 2. Equações. 3. Funções (Matemática). 4. Tecnologia. I. Martins, Eder Marinho. II. Ferreira, Wenderson Marques. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 517.5:004.4

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Aos 29 dias do mês de novembro do ano de 2019, às 16:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB) da Universidade Federal de Ouro Preto, foi instalada a sessão pública para a defesa de dissertação do(a) mestrando(a) **Thaynara Menezes Gandra Conceição**, intitulada "**Lápis, papel, Geogebra e a Fórmula de Bháskara: uma experiência com alunos do nono ano**", sendo a Banca Examinadora composta pelos professores: **Eder Marinho Martins** (Orientador - UFOP), **Wenderson Marques Ferreira** (Coorientador - UFOP), **Viviane Pardini Valério** (Membro Externo - UFSJ), **Gil Fidelix De Souza** (Membro Interno - UFOP) e **Edmilson Minoru Torisu** (Membro Interno - UFOP). A sessão pública foi aberta pelo professor **Eder Marinho Martins**, presidente da banca e orientador, que após as devidas apresentações e orientações a todos passou a palavra ao mestrando para apresentação oral. Após a apresentação oral, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos componentes da Banca. Terminada a arguição, a comissão reuniu-se em sessão secreta para julgamento e expedição do resultado final e decidiu, por unanimidade, pela aprovação da dissertação. O resultado foi comunicado publicamente ao discente pelo presidente. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão da qual se lavrou a presente ata que vai assinada pela Banca Examinadora. Ouro Preto, 29 de novembro de 2019.

Professor(a) Dr. Eder Marinho Martins
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor(a) Dr. Gil Fidelix De Souza
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor(a) Dr. Wenderson Marques Ferreira
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor(a) Dr. Edmilson Minoru Torisu
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Viviane Pardini Valério
Professor(a) Dr. Viviane Pardini Valério
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Thaynara Menezes Gandra Conceição
Mestrando(a) Thaynara Menezes Gandra Conceição

“Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção.“
(Paulo Freire)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela proteção, por me amparar nos momentos de angústia e por possibilitar a realização desse sonho.

Ao meu marido, José Paulo, pelo amor, companheirismo, incentivo e força nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Agostinho e Imaculada, pelo amor incondicional e pelas orações.

Aos meus irmãos, Thamires e Thaynan, pelo apoio e incentivo.

À minha família pelo carinho e momentos de alegria.

Ao meu orientador, Dr. Eder Marinho Martins, pela paciência, dedicação e ensinamentos.

Aos meus amigos do mestrado, em especial Thatiane, Breno e Giovanni, pela cooperação, troca de conhecimentos e bons momentos.

E a todos os meus amigos que torceram por mim, fica aqui meus sinceros agradecimentos.

Resumo

As tecnologias digitais estão presentes no cotidiano dos alunos e isso muda a forma como eles se relacionam e aprendem. Por isso, faz-se necessária uma mudança nas práticas pedagógicas, sobretudo nas aulas de matemática. Esse estudo teve por objetivo apresentar propostas de atividades investigativas, envolvendo o conteúdo de funções quadráticas e demonstrar a fórmula de Bháskara, utilizando o software GeoGebra como recurso didático. Uma das atividades sugeridas foi aplicada em uma escola estadual da cidade de Ouro Preto - MG e em uma escola privada da cidade de Belo Horizonte - MG. Os dados foram coletados por meio de observações realizadas durante a aplicação e respostas dadas a um questionário. Os resultados mostram que os discentes compreenderam melhor a fórmula de Bháskara e o gráfico de uma função quadrática, e que a atividade investigativa pode ajudar a motivar o aluno e a aprimorar sua capacidade de argumentação.

Palavras-chave: Software GeoGebra; Fórmula de Bháskara; Funções quadráticas; Tecnologias.

Abstract

Digital technologies are present in students' daily lives and this changes the way they engage in society and learn. Therefore, a change in pedagogical practices is necessary, especially in mathematics classes. This study aimed to propose investigative activities, involving the concept of quadratic functions, and to demonstrate Bháskara's formula using GeoGebra software as a didactic resource. One of the suggested activities was applied in a public school in the city of Ouro Preto - MG and in a private school in the city of Belo Horizonte - MG. Data were collected through the observations made during the activity and the answers to a questionnaire. The results indicates that students better understand Bháskara's formula and the graphic representation of a quadratic function, and that investigative activities can motivate them, improving their argument skills.

Keywords: GeoGebra Software; Bháskara Formula; Quadratic Functions; Technologies.

Sumário

Introdução

O surgimento de novas tecnologias digitais vem afetando a educação. Professores e pesquisadores têm buscado novas práticas pedagógicas com o intuito de tornar o ambiente escolar mais atraente e de proporcionar um aprendizado mais significativo aos alunos. O uso de softwares, como o GeoGebra, pode potencializar o processo de ensino-aprendizagem, pois, permitem a experimentação e a descoberta, despertando o interesse e a curiosidade dos alunos.

No presente estudo, nosso objetivo é apresentar propostas de atividades investigativas para o ensino de funções quadráticas, demonstrar a Fórmula de Bháskara com o auxílio do GeoGebra e apresentar os resultados obtidos ao aplicar a atividade da demonstração da fórmula de Bháskara via GeoGebra para turmas do nono ano. Nesse tipo de atividade o aluno é protagonista do processo, e isso contribui para o desenvolvimento de habilidades argumentativas, autonomia e apropriação de novos conhecimentos acerca do conteúdo estudado.

O uso do Software GeoGebra como ferramenta para o ensino de funções quadráticas é objeto de estudo de vários autores. Em um levantamento, via portal da CAPES, das dissertações produzidas por mestrandos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que abordaram o uso do Software GeoGebra no ensino de funções quadráticas, identificamos vários trabalhos. Em (DE ALMEIDA JÚNIOR et al., 2013), (LEMOS JÚNIOR et al., 2013), (RIBEIRO et al., 2013), (DE SOUSA et al., 2014), (FEITOSA, 2014), (FILIZZOLA et al., 2014), (DA SILVA et al., 2015), (MENEZES et al., 2015), (NEGRÃO et al., 2015), (NOGUEIRA et al., 2015), (ALQUIMIN et al., 2016), (DE SOUSA et al., 2016), (XAVIER et al., 2016) e (REIS et al., 2017) é possível encontrar propostas de atividades com o uso do GeoGebra. Dessas dissertações, 9 apresentam propostas que foram aplicadas, sendo que 7 foram aplicadas no 1° ano, 2 no 2° ano e 2 no 3° ano do ensino médio.

Em (DE ALMEIDA JÚNIOR et al., 2013), (DE SOUSA et al., 2014), (FEITOSA, 2014), (NOGUEIRA et al., 2015) e (DE SOUSA et al., 2016), foram aplicados questionários aos alunos após a realização das atividades e os resultados foram satisfatórios. Em (LEMOS JÚNIOR et al., 2013), (RIBEIRO et al., 2013), (DE SOUSA et al., 2014), (DA SILVA et al., 2015) (NEGRÃO et al., 2015), (NOGUEIRA et al., 2015), (XAVIER et al., 2016) encontramos menção a forma canônica da função quadrática, dada por $l(x) = a(x-k)^2 + h$. Explicaremos o porquê de essa forma ser chamada de canônica na atividade 4 do capítulo 3.

Em (MENEZES et al., 2015) e (XAVIER et al., 2016) encontramos atividades que estudam a trajetória do vértice quando varia-se os coeficientes a, b e c. Em (RIBEIRO et al., 2013), (DA SILVA et al., 2015), (NEGRÃO et al., 2015), (NOGUEIRA et al., 2015) são propostas atividades que analisam os deslocamentos verticais e horizontais da função na sua forma canônica. E em (LEMOS JÚNIOR et al., 2013) e (DE SOUSA et al., 2014) é feita a demonstração da Fórmula de Bháskara a partir da forma canônica, porém a demonstração parte de uma análise dos pontos de máximo ou mínimo da função e para isso foi preciso completar quadrados.

Nosso trabalho se difere dos demais ao propor uma demonstração da Fórmula de Bháskara, usando o GeoGebra como ferramenta fundamental, a partir de uma descoberta guiada que foi aplicada em duas escolas, uma pública e uma privada, para turmas do nono ano. Além disso, apresentaremos os resultados fundamentados nas falas dos alunos e respostas dadas a um questionário acerca da atividade, com aceitação positiva.

O texto está organizado em 4 capítulos, descritos a seguir.

No primeiro capítulo, intitulado Reflexões sobre o uso de tecnologias nas aulas de matemática, abordaremos a importância de conciliar as várias mídias – lápis, papel, computador e smartphone – para ajudar a melhorar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos. Apresentaremos as quatro fases do uso de tecnologias na educação de acordo com Borba, Da Silva e Gadanidis (2014) e mostraremos algumas ferramentas do Software GeoGebra que serão utilizadas nas atividades sugeridas no Capítulo 3.

No segundo capítulo, denominado Demonstrações das propriedades das funções quadráticas, apresentaremos alguns resultados importantes para o estudo de funções quadráticas. O intuito é demonstrar propriedades deixando o texto mais rigoroso, mas de forma que boa parte das demonstrações apresentadas possam ser compreendidas por alunos da educação básica. Acreditamos que conciliar atividades práticas com uma matemática mais rigorosa torna o aprendizado mais efetivo.

No terceiro capítulo, intitulado Sugestões de atividades usando o software GeoGebra, exibiremos quatro propostas de atividades investigativas que buscam trabalhar o conteúdo de funções quadráticas utilizando o GeoGebra. Apresentaremos os objetivos, conteúdos abordados, pré-requisitos, tempo estimado, descrição, sugestões de perguntas e comentários em cada uma das atividades.

No último capítulo, denominado A demonstração da Fórmula de Bháskara utilizando o software GeoGebra, apresentaremos a descrição da atividade aplicada para alunos do nono ano de duas escolas, uma localizada na cidade de Ouro Preto e outra na cidade de Belo Horizonte, Minas Gerais. O objetivo da atividade é demonstrar a Fórmula de Bháskara seguindo um roteiro de perguntas que permitirão aos discentes a apropriação de novos conhecimentos acerca da demonstração da fórmula a partir da experimentação e visualização.

Por fim, apresentaremos as considerações finais deste estudo.

Capítulo 1

Reflexões sobre o uso de tecnologias nas aulas de matemática

Neste capítulo abordaremos o uso de tecnologia digitais nas aulas de matemática, auxiliando na compreensão do conteúdo e estimulando o aprendizado, visto que a tecnologia está intimamente ligada ao cotidiano da maioria dos alunos. Nos fundamentaremos na perspectiva de que o uso de tecnologias em Educação Matemática no Brasil pode ser compreendido em quatro fases de acordo com Borba, Da Silva e Gadanidis (2014). Softwares educativos, como o GeoGebra, caracterizam a quarta fase e podem ser utilizados durante as aulas de matemática como mediadores da aprendizagem, pois permitem a experimentação e descoberta através da manipulação e visualização, contribuindo para a construção do conhecimento.

1.1 O uso de tecnologias digitais

Atualmente a palavra tecnologia tem sido associada a computadores, internet e smartphones, mas de acordo com o dicionário Aulete[1], tecnologia é o "conjunto das técnicas, processos e métodos específicos de uma ciência", ou seja, lápis e papel são considerados uma forma de tecnologia, pois, são técnicas que modificam o conhecimento.

Antes do surgimento da escrita, a oralidade foi uma importante tecnologia usada para a aquisição de conhecimento. Com a escrita o conhecimento não precisava ficar restrito apenas à memória e ele podia ser compartilhado através de registros, que seriam acessados quando necessário. Já as tecnologias digitais trouxeram um grande avanço no que se refere à aprendizagem, pois aliam oralidade, escrita, experimentação e visualização. Dessa forma, o ideal é conciliar essas tecnologias para contribuir com um melhor desenvolvimento cognitivo do aluno.

[1] Dicionário digital disponível no site http://aulete.com.br/tecnologia - acessado em 8 set 2019.

Com o avanço das tecnologias digitais, a sociedade contemporânea vem se modificando, e com isso surge a necessidade de inovações na prática didático-pedagógica. O aprendizado baseado na abordagem instrucionista não contribui com o desenvolvimento de habilidades fundamentais para os dias atuais, como a criatividade, autonomia, imaginação e a capacidade de aprender a aprender. Ou seja, não adianta introduzir novos recursos tecnológicos em sala de aula se não houver uma mudança na prática pedagógica que permita explorar potencialidades que vão além da transmissão de informação. De acordo com Elorza: "O uso das tecnologias ainda apresenta características do ensino tradicional em que o professor transmite informações e os alunos recebem e produzem e que, portanto, não explora toda potencialidade" (ELORZA, 2012 apud CARNEIRO; PASSOS, 2014, p. 103) . E ainda de acordo com Maltempi (2008):

> [...]inserir calculadoras gráficas em um curso de engenharia ou calculadoras comuns no ensino fundamental com pouca ou nenhuma alteração da forma como os conteúdos matemáticos são abordados, além das atividades, exercícios e avaliações, certamente trará consequências negativas para a aprendizagem (MALTEMPI, 2008, p. 61).

O uso de novas tecnologias nas aulas de matemática representa uma oportunidade de mudar a prática docente, colaborando com um aprendizado mais efetivo e não apenas com a reprodução de algo estudado. Mas, isso só é possível se o professor utilizar as ferramentas tecnológicas em atividades investigativas, contribuindo, assim, para o desenvolvimento de uma análise crítica do aluno e na construção de conhecimento. Isso corrobora as ideias de Maltempi (2008), que entende que o professor deve repensar a prática pedagógica a cada nova tecnologia incorporada no ambiente escolar: "[...] toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino aprendizagem"(MALTEMPI, 2008, p. 61).

Nas atividades investigativas o objetivo é que o aluno faça conjecturas e descobertas a partir da observação e manipulação de objetos. Dessa forma o estudante não será passivo em relação ao processo de ensino-aprendizagem e o professor participará ativamente do processo, como orientador e guia nas descobertas dos alunos. Da Ponte (2003) compartilha essa ideia afirmando que "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objetos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades"(DA PONTE, 2003, p. 96). Ele ainda defende a ideia de que em uma investigação "os alunos são colocados no papel dos matemáticos"(DA PONTE, 2003, p. 113).

Em atividades investigativas, é necessário que o professor tenha claros os objetivos que pretende alcançar, mas a própria dinâmica da atividade faz com que os alunos possam observar e obter várias e distintas conclusões, sem termos garantia de que o objetivo final seja alcançado. Para isso pode-se desenvolver atividades denominadas como Descoberta Guiada (ERNEST, 1996). Nesse tipo de descoberta o professor guia o estudante, fazendo perguntas cuja a busca por respostas conduzem o aluno à produção do conhecimento. Após as descobertas é importante que o professor-mediador relacione teoria à prática, demonstrando se as conjecturas feitas pelos alunos são verdadeiras ou não. De fato, o aprendizado só se torna efetivo quando o aluno consegue relacionar intuição, experimentação e teoria.

A nova geração de estudantes se relaciona de forma diferente com as tecnologias digitais. Assim, ao oposto de outras gerações que utilizavam a internet como fonte de informações, a nova geração, também denominada "geração Z", apropria-se da internet para a criação de conteúdo. Portanto, é fundamental inovações nas práticas pedagógicas no ensino de matemática. O ideal é conciliar as várias tecnologias a favor do ensino, isto é, usar lápis, papel, computador ou smartphone em atividades que agucem os discentes na busca do conhecimento.

1.2 As quatro fases do uso de tecnologias na Educação Matemática

Na perspectiva de Borba, Da Silva e Gadanidis (2014), o uso de tecnologias digitais nas aulas de matemática pode ser compreendido em quatro fases. A primeira fase, iniciada no final da década de 1980, é caracterizada pelo uso do software LOGO (Figura 1). Esse software permite a construção de objetos geométricos através da digitação e execução de comandos, evidenciando relações entre linguagem de programação e pensamento matemático.

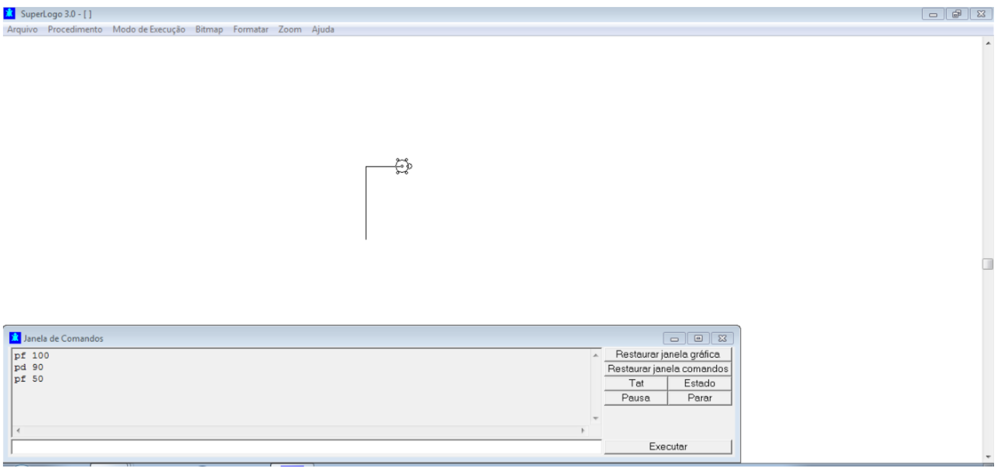


Figura 1 – Super Logo 3.0.

Fonte: https://informaticageo.files.wordpress.com/2011/05/screenshot.png - Acessado em 08 set 2019.

Os comandos são executados por uma tartaruga virtual que realiza movimentos de passos e giros, que possibilitam a criação de figuras geométricas. Os comandos são digitados juntamente com os valores em unidade de comprimento e medida do ângulo. Por exemplo, o comando pf 20 indica que a tartaruga caminhará para frente 20 unidades de comprimento. Também é possível salvar uma construção utilizando o comando APRENDA, localizado na aba de procedimentos. Dessa forma, é possível reproduzir uma construção digitando o comando definido.

A utilização do LOGO permite que o aluno relacione representações algébricas (comandos) com representações geométricas (o percurso da tartaruga) e faça investigações criando os comandos de acordo com o objetivo de cada atividade, contribuindo assim com o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno.

A segunda fase tem início em meados da década de 1990 e é marcada pela popularização do uso de computadores pessoais, surgimento de softwares de natureza dinâmica, visual e experimental e pelo aumento dos cursos de formação continuada para professores. Nessa fase se destacam os softwares de geometria dinâmica, como por exemplo Cabri Géomètre e o Geometricks, os softwares usados na representação de funções, como o Winplot (Figura 2), o Fun e o Graphmathica. Esses softwares possuem ferramentas manipuláveis fáceis de manusear e não exigem conhecimentos de linguagem de programação.

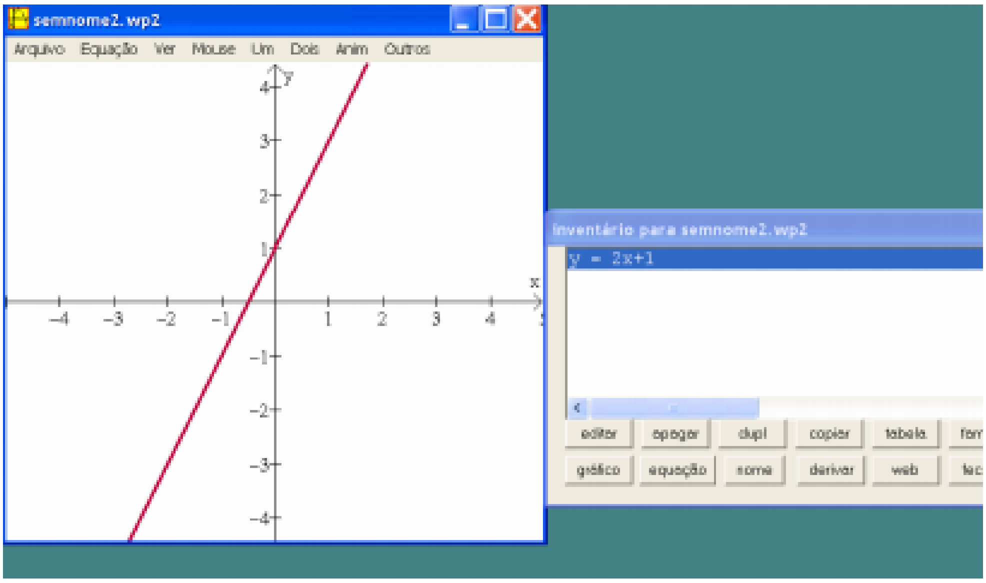


Figura 2 – Gráfico da função $y = 2x + 1$ no Winplot.

Fonte: https://ead.ifba.edu.br/file.php/278/tutoriais/intro_ao_winplot.pdf - Acessado em 11 set 2019.

Esses softwares permitem ao aluno investigar propriedades de figuras geométricas e de gráficos de funções por meio da experimentação e ajudam a diferenciar desenhos de construções geométricas. Em construções geométricas as propriedades das figuras são preservadas quando movimentamos um de seus elementos, já nos desenhos as caraterísticas das figuras são alteradas.

Por volta de 1999 inicia-se a terceira fase com o advento da internet. A internet começa a ser usada como fonte de informação e para a troca de experiências. Essa fase é marcada pelos cursos a distância. A investigação coletiva realizada em ambientes virtuais de aprendizagem, permitem a interação, troca de experiências e a produção de conhecimento matemático.

A quarta fase inicia-se em meados de 2004 com o advento da internet de alta velocidade, e vem transformando a comunicação online e a forma como nos relacionamos com as novas tecnologias digitais. O GeoGebra é um exemplo de software que marca essa fase e será abordado com mais detalhes na próxima seção.

Essa última fase é caracterizada pela presença de diversificados meios de comunicação, surgimento das redes sociais, propagação das plataformas para a visualização de vídeos e pela facilidade de acesso a internet.

As quatro fases foram estabelecidas de acordo com o surgimento de inovações tecnológicas que possibilitam cenários diferentes para a investigação matemática. É importante ressaltar que uma fase não substitui a outra, pelo contrário, elas se integram. Ou seja, os aspectos das fases anteriores são fundamentais para as fases seguintes. Com o surgimento de novas tecnologias digitais é importante a criação de novos métodos de aprendizagem para evitar a domesticação dessas novas tecnologias. De acordo com Borba, Da Silva e Gadanidis (2014) "domesticar uma tecnologia significa utiliza-lá de forma a manter intacta práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção de conhecimento"(BORBA; DA SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 25).

1.3 O uso do GeoGebra nas aulas de matemática

A palavra GeoGebra provém da aglutinação das palavras geometria e álgebra. Esse software combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente virtual, é gratuito e pode ser usado online, no computador ou no smartphone. Ele está disponível para download em <https://www.geogebra.org/download>.

O GeoGebra foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter[2]. Desde então, sua popularidade tem crescido e ele tem recebido vários prêmios de softwares educacionais na Europa e nos Estados Unidos. Sua interface (Figura 3) é composta por uma aba de menus, uma barra de ferramentas, a janela algébrica, a janela de visualização (que pode ser bidimensional ou

[2] É um matemático austríaco e professor da Universidade Johannes Keplerem. Ele desenvolveu o GeoGebra durante a elaboração de sua tese.

tridimensional), o campo de entrada e um menu de símbolos e comandos.

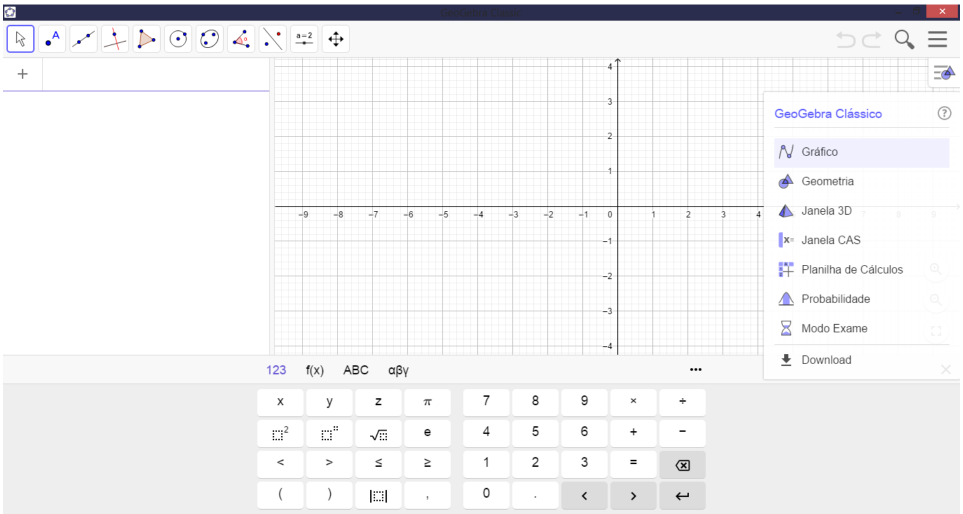


Figura 3 – GeoGebra Classic 6.0.

Na barra de ferramentas encontramos vários instrumentos que auxiliam na construção de objetos matemáticos e na elaboração de atividades investigativas. As ferramentas estão divididas em 11 abas, veremos a seguir algumas ferramentas importantes para a realização das atividades sugeridas no Capítulo 3.

Na segunda aba (Figura 4) temos as ferramentas ponto, que permite criar pontos no plano cartesiano, e interseção de dois objetos, que permite selecionar dois objetos e criar os pontos de interseção entre eles. Na terceira aba (Figura 4) temos a ferramenta segmento, que permite criar um segmento dado dois pontos.

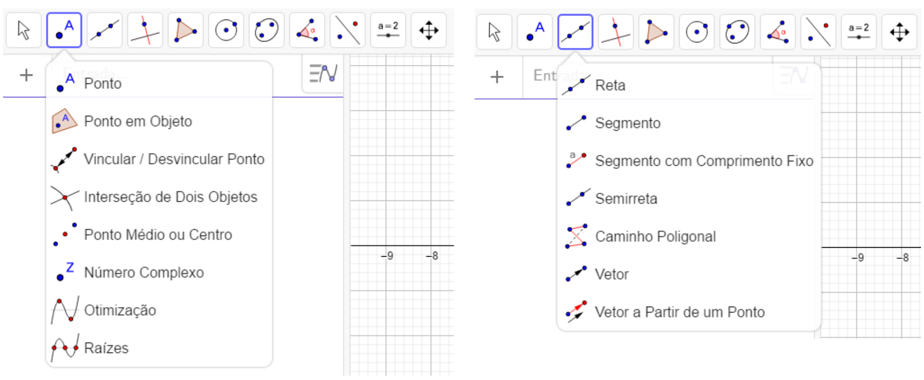


Figura 4 – Ferramentas do GeoGebra.

Na quarta aba (Figura 5) temos a ferramenta mediatriz, que permite traçar a reta mediatriz de um segmento apenas clicando sobre ele. Na décima aba (Figura 5) temos a ferramenta controle deslizante, que possibilita a variação (manualmente ou automaticamente) de alguns objetos e pode assumir a função de uma variável, permitindo assim a investigação através da manipulação dos objetos. Ao clicar nessa ferramenta aparece uma janela na qual podemos nomear, escolher o intervalo de variação e incremento. Essa ferramenta é muito utilizada no estudo de funções, pois permite a variação dos coeficiente e facilita a análise de vários gráficos.

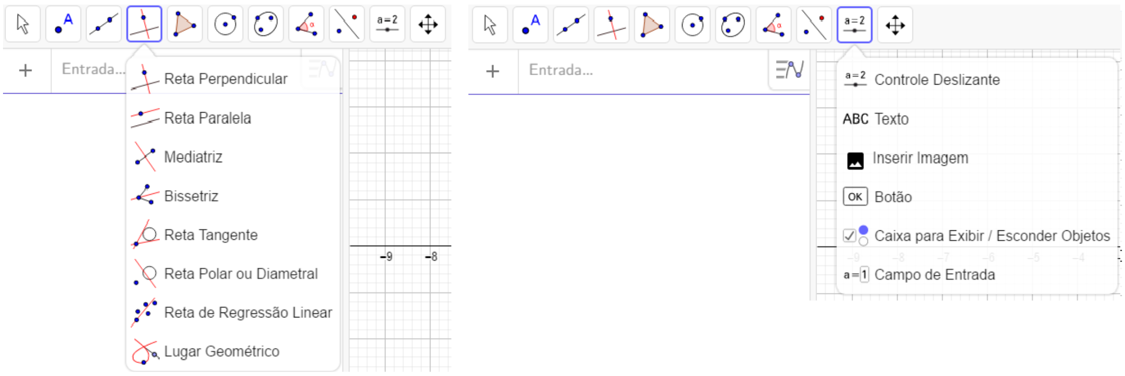


Figura 5 – Ferramentas do GeoGebra.

Utilizaremos também um recurso denominado exibir rastro. Para acessá-lo basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto e habilitar o rastro. Esse recurso permite que o objeto deixe um rastro quando o manipulamos.

A escolha pelo GeoGebra justifica-se pelo fato de ser um software de interface amigável, com muitos recursos, que permite a investigação e pode ser acessado facilmente pelo computador ou através do smartphone. Esse software tem recursos como imagens, manipulação e visualização, que permite ao estudante acessar o objeto matemático de formas diferentes das quais eles são acessados com o uso de lápis e papel. Ao se apropriar dessas novas ferramentas matemáticas, o estudante produz conhecimento através da descoberta. Borba e Penteado (2007) adotam uma perspectiva teórica baseada "na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias" (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 48) e é de acordo com essa perspectiva que desenvolvemos esse trabalho, no qual propomos algumas atividades que modificam e reorganizam os processos de ensino-aprendizagem.

Capítulo 2

Demonstrações das propriedades das funções quadráticas

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e propriedades elementares relativas a funções quadráticas. Nos basearemos principalmente nas obras (LIMA, 2017), (NETO, 2014) e (STEWART, 2011).

Uma função quadrática é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Proposição 2.1. *Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos que suas raízes são dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado discriminante da função.*

Demonstração. De fato, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, determinamos as raízes da função tomando $f(x) = 0$. Dividindo a equação por a, obtemos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Completando o quadrado, temos

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Assim

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros da equação e sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos concluir que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Portanto temos que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, conhecida como Fórmula de Bháskara[1]. $\square$

Na proposição a seguir, mostraremos que a parábola é simétrica e determinaremos o eixo de simetria.

Proposição 2.2. *O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, em que $a \neq 0$, é simétrico em relação à reta $x = -\dfrac{b}{2a}$.*

Demonstração. Sejam $x > -\dfrac{b}{2a}$ e x_S o simétrico de x em relação à reta $x = -\dfrac{b}{2a}$ (Figura 6). Note que $x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b}{2a} - x_S$, e portanto,

$$x_s = -x + \left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{b}{2a} = -\frac{2b}{2a} - x = -\frac{b}{a} - x.$$

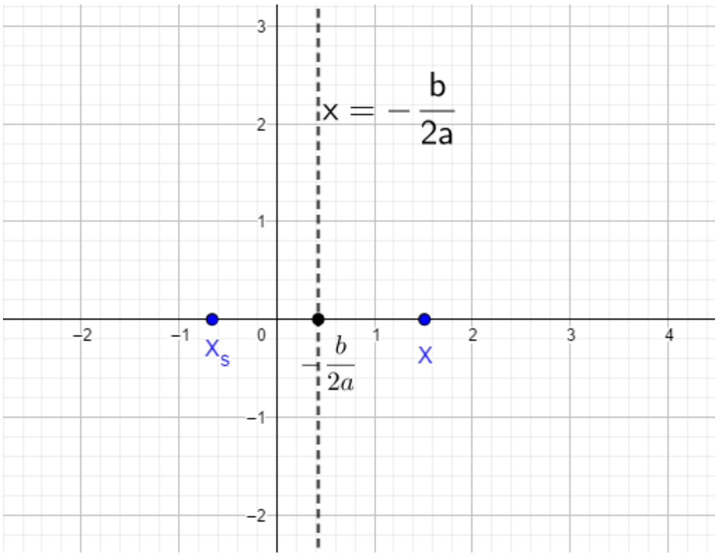


Figura 6 – O eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática e os pontos x e x_S, simétricos em relação a este eixo.

[1] Foi um matemático, astrólogo, astrônomo e professor indiano do século XII. Se tornou conhecido por ter criado a fórmula matemática aplicada em equações do 2° grau, embora haja controvérsias quanto a esse fato (ROQUE, T.; DE CARVALHO, J. B. P. ***Tópicos de história da matemática***. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).).

Devemos mostrar que $f(x_S) = f(x)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f(x_S) &= a{x_S}^2 + bx_S + c \\ &= a\left(-\frac{b}{a} - x\right)^2 + b\left(-\frac{b}{a} - x\right) + c \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f(x_S) &= a\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2bx}{a} + x^2\right) - \frac{b^2}{a} - bx + c \\ &= \frac{b^2}{a} + 2bx + ax^2 - \frac{b^2}{a} - bx + c \\ &= ax^2 + bx + c \\ &= f(x). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *Em relação à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, temos que:*

(a) Se $a > 0$, então $f(x)$ é crescente no intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ e decrescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

(b) Se $a < 0$, então $f(x)$ é crescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e decrescente no intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Demonstração. (a) Sejam x_1 e x_2 números reais quaisquer e $a > 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c \\ &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se $-\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2$ temos que $x_2 - x_1 > 0$. E como $x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, segue-se que, somando $\frac{b}{2a}$ em ambos os lados da desigualdade, temos

$$x_1 + \frac{b}{2a} \geq 0.$$

Portanto, multiplicando a última relação por 2 temos

$$2x_1 + \frac{b}{a} \geq 0.$$

Uma vez que $x_2 > x_1$ então

$$x_1 + x_2 + \frac{b}{a} > 2x_1 + \frac{b}{a} \geq 0.$$

Assim, de acordo com a equação (2.1), $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Portanto f é crescente no intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Por outro lado, se $x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$, então

$$x_2 \leq -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow 2x_2 + \frac{b}{a} \leq 0.$$

Como $x_1 < x_2$, temos que

$$x_1 + x_2 + \frac{b}{a} < 2x_2 + \frac{b}{a} \leq 0.$$

Logo, pela equação (2.1), $f(x_2) - f(x_1) < 0$, ou seja, f é decrescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

(b) Seja $a < 0$ e considere $-f(x) = -ax^2 - bx - c$. Como $-a > 0$, então pelo item (a), $-f$ é crescente no intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ e decrescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$. Assim f é crescente no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e decrescente no intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

$\square$

Definição 2.1. *Uma função $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ é côncava para cima se a reta secante que passa pelos pontos $(A, f(A))$ e $(B, f(B))$ sempre está acima ou coincide com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos no intervalo $[A, B]$.*

Proposição 2.4. *A equação da reta secante que passa pelos pontos $(A, f(A))$ e $(B, f(B))$ é dada por*

$$g(x) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}x + \frac{Bf(A) - Af(B)}{B - A}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Seja $g(x) = mx+k$ a reta secante que passa pelos pontos $(A, f(A))$ e $(B, f(B))$ (Figura 7), então $m = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$. Podemos obter o valor de k substituindo um dos pontos na função $g(x)$. Assim, tomando $x = A$, temos que $g(x) = f(A)$, e portanto $g(x) = mx + k \Rightarrow f(A) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}A + k$, sendo assim,

$$
\begin{aligned}
k &= f(A) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A}A \\
&= \frac{Bf(A) - Af(A) - Af(B) + Af(A)}{B-A} \\
&= \frac{Bf(A) - Af(B)}{B-A}.
\end{aligned}
$$

Logo $g(x) = \dfrac{f(B)-f(A)}{B-A}x + \dfrac{Bf(A)-Af(B)}{B-A}$. □

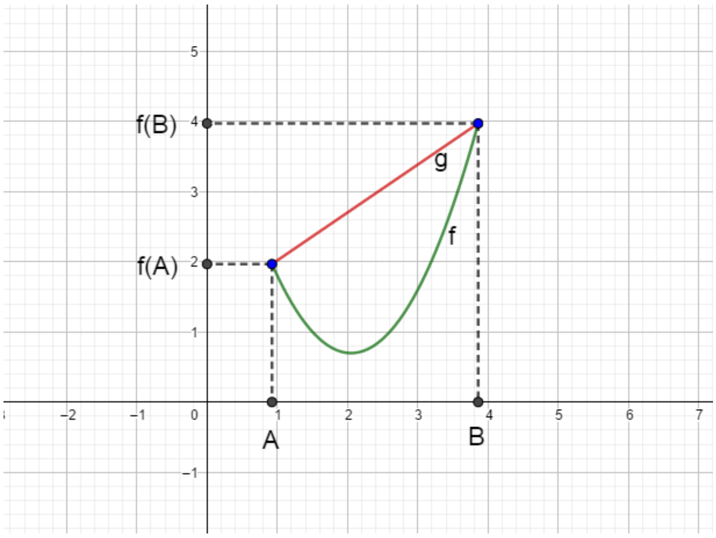


Figura 7 – O gráfico indica a concavidade de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a é positivo.

Observa-se que a função f é côncava para cima se $f(x) \leq g(x)$, em que $g(x)$ é dada pela equação (2.2).

Proposição 2.5. *Se $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é côncava para cima em qualquer intervalo.*

Demonstração. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é côncava para cima se $f(x) \leq g(x)$, ou seja, $g(x) - f(x) \geq 0$, em que $g(x)$ é a reta secante que contém os pontos $(A, f(A))$ e $(B, f(B))$. Tomando $x \in [A, B]$ temos:

$$
\begin{aligned}
g(x)-f(x) &= \frac{f(B)-f(A)}{B-A}x+\frac{Bf(A)-Af(B)}{B-A}-f(x)\\
&= \frac{f(B)(x-A)+f(A)(B-x)}{B-A}-f(x)\\
&= \frac{(aB^2+bB+c)(x-A)+(aA^2+bA+c)(B-x)}{B-A}-f(x)\\
&= \frac{aB^2x+bBx-aB^2A-cA+aA^2B+cB-aA^2x-bAx}{B-A}-f(x)\\
&= \frac{ax(B^2-A^2)-aAB(B-A)+bx(B-A)+c(B-A)}{B-A}-f(x).
\end{aligned}
$$

Simplificando a fração e sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
g(x)-f(x) &= axB+axA-aAB+bx+c-ax^2-bx-c\\
&= axB+axA-aAB-ax^2\\
&= a(xB+xA-AB-x^2)\\
&= a(B-x)(x-A).
\end{aligned}
$$

Como $a > 0$, e sabendo-se que $(B - x) \geq 0$ e que $(x - A) \geq 0$, pois $x \in [A, B]$. Concluímos que $g(x) - f(x) \geq 0$ e determinamos a concavidade da parábola.

□

Definição 2.2. *Uma função $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ é côncava para baixo se a reta secante que passa pelos pontos $(A, f(A))$ e $(B, f(B))$ sempre está abaixo ou coincide com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos no intervalo $[A, B]$.*

Proposição 2.6. *Se $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é côncava para baixo em qualquer intervalo.*

Demonstração. Suponha que $f(x) = ax^2+bx+c$ com $a < 0$. Temos que $-f(x) = -ax^2-bx-c$ com $-a > 0$, então $-f$ é côncava para cima, e portanto f é côncava para baixo. □

Definição 2.3. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x_0 \in X$ (Figura 8) se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x_0 \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

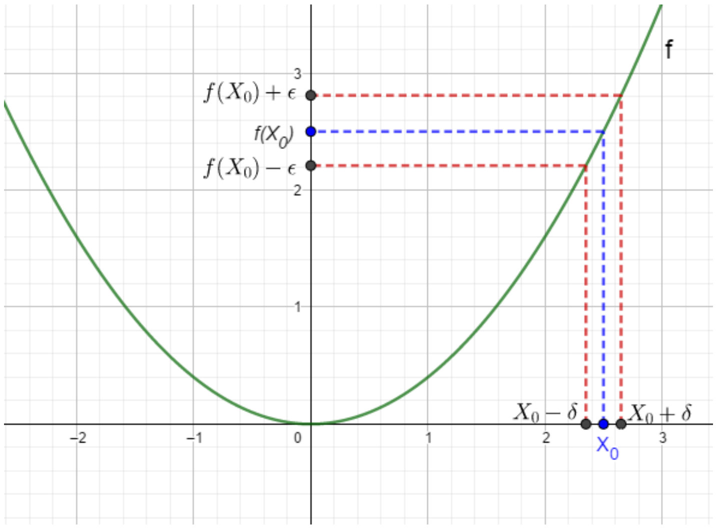


Figura 8 – A função $f(x) = ax^2$ é contínua no ponto x_0.

Proposição 2.7. *A função quadrática $f(x) = ax^2$, em que $a \neq 0$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{|a|(1+2|x_0|)}\right\}$. Assim $\delta \leq 1$ e $\delta \leq \dfrac{\epsilon}{|a|(1+2|x_0|)}$. Se $|x - x_0| < \delta$, pela desigualdade triangular, temos

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1.$$

Desta forma,

$$|x| - |x_0| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |x_0| \Rightarrow |x| + |x_0| < 1 + 2|x_0|. \tag{2.3}$$

Então

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax^2 - ax_0^2| = |a||x - x_0||x + x_0| \leq |a||x - x_0|(|x| + |x_0|).$$

Portanto, pela desigualdade (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< |a||x - x_0|(1 + 2|x_0|) \\ &< |a|\delta(1 + 2|x_0|) \\ &< |a|\frac{\epsilon}{|a|(1+2|x_0|)}(1 + 2|x_0|) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$.

□

Proposição 2.8. *A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = bx + c$, em que $b \neq 0$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{|b|}$. Se $|x - x_0| < \delta$, então

$$|g(x) - g(x_0)| = |(bx + c) - (bx_0 + c)| = |b||x - x_0| < |b|\delta < |b|\frac{\epsilon}{|b|} < \epsilon.$$

Logo $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. □

Proposição 2.9. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em todo $x \in \mathbb{R}$.*

(a) A função $f(x) + g(x)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$;

(b) A função $f(x).g(x)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$;

(c) A função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$, em que $g(x) \neq 0$.

Demonstração. (a) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Logo a função $f(x) + g(x)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$.

(b) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_1 \text{ então } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2[1 + |f(x_0)|]}.$$

Existe também $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - g(x_0)| < 1.$$

Portanto,se $|x - x_0| < \delta_2$ temos

$$|g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| < 1 + |g(x_0)|.$$

E por fim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_3 \text{ então } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2[1 + |g(x_0)|]}.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, temos que se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2[1 + |g(x_0)|]}$, $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2[1 + |f(x_0)|]}$ e $|g(x)| < 1 + |g(x_0)|$. Portanto

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\
&= |[f(x) - f(x_0)]g(x) + [g(x) - g(x_0)]f(x_0)| \\
&\leq |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |g(x) - g(x_0)||f(x_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{2[1 + |g(x_0)|]}[1 + |g(x_0)|] + \frac{\epsilon}{2[1 + |f(x_0)|]}|f(x_0)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo a função $f(x).g(x)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$.

(c) Primeiramente provaremos que a função $\dfrac{1}{g(x)}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_1 \text{ então } |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$$

e, portanto,

$$|g(x_0)| = |g(x_0) - g(x) + g(x)| \leq |g(x_0) - g(x)| + |g(x)| < \frac{|g(x_0)|}{2} + |g(x)|.$$

Isso mostra que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_1 \text{ então } |g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}.$$

Nesse caso temos que

$$\frac{1}{|g(x)g(x_0)|} = \frac{1}{|g(x)||g(x_0)|} < \frac{2}{|g(x_0)|}\frac{1}{g(x_0)} = \frac{2}{g(x_0)^2}.$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.Temos que se $|x - x_0| < \delta$ então $\dfrac{1}{|g(x)g(x_o)|} < \dfrac{2}{g(x_0)^2}$ e $|g(x) - g(x_0)| < \dfrac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$. Portanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| &= \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} \\
&= |g(x_0) - g(x)|\frac{1}{|g(x)g(x_o)|} \\
&< \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon\frac{2}{g(x_0)^2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, como por hipótese $f(x)$ é contínua e acabamos de mostrar que $\dfrac{1}{g(x)}$ é contínua, pela proposição 2.9 (b), temos que a função $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$.

□

Proposição 2.10. *A função quadrática $h(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Nas Proposições 2.7 e 2.8 mostramos que as funções $f(x) = ax^2$ e $g(x) = bx+c$ são contínuas em $x \in \mathbb{R}$. Pelo item (a) da proposição 2.9 temos que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas então $f(x) + g(x)$ também é contínua. Logo $h(x) = f(x) + g(x) = ax^2 + bx + c$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$. □

A proposição 2.10 pode ser demonstrada usando a definição 2.3. Segue-se a demonstração.

Demonstração. Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{|a|(1 + 2|x_0|) + |b|}\right\}$. Assim

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |ax^2 + bx + c - ax_0^2 - bx_0 - c| \\
&= |a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)| \\
&\leq |a||x - x_0||x + x_0| + |b||x - x_0| \\
&\leq (|a||x + x_0| + |b|)|x - x_0|
\end{aligned}
$$

Se $|x - x_0| < \delta$, e sabendo que $|x| + |x_0| < (1 + 2|x_0|)$, pela desigualdade (2.3), então:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &< (|a|(|x| + |x_0|) + |b|)\delta \\
&< (|a|(1 + 2|x_0|) + |b|)\frac{\epsilon}{|a|(1 + 2|x_0|) + |b|} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Logo $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. $\square$

CAPÍTULO 3

Sugestões de atividades usando o Software GeoGebra

Este capítulo tem por objetivo apresentar atividades que buscam proporcionar ao aluno um aprendizado significativo sobre gráficos e propriedades das funções quadráticas, através da investigação e construção de conceitos. Para isso, são propostas atividades investigativas com o uso do Software GeoGebra. Em cada atividade exibiremos os objetivos, conteúdos trabalhados, conteúdos que são pré-requisito e uma estimativa do números de aulas necessárias para a realização da atividade, isso com base em nossas experiências aplicando atividades similares a estas. Apresentaremos também a descrição da atividade, sugestões de perguntas que podem ser feitas aos alunos, e por fim, comentários sobre as possíveis descobertas dos discentes.

3.1 Atividade 1: Influência dos coeficientes no gráfico da função

Objetivo: Plotar gráficos de funções quadráticas, variando os coeficientes para analisar concavidade, abertura, deslocamento e interseção com os eixos coordenados.

Conteúdo: Representação gráfica de uma função quadrática.

Pré-requisito: Equações do 2º grau e o conceito de função.

Tempo estimado: Duas aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade: A atividade consiste em analisar o gráfico de funções quadráticas, variando os coeficientes a, b e c. Para isto o aluno deve criar controles deslisantes para os valores dos coeficientes a, b e c e digitar na caixa de entrada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Figura 9).

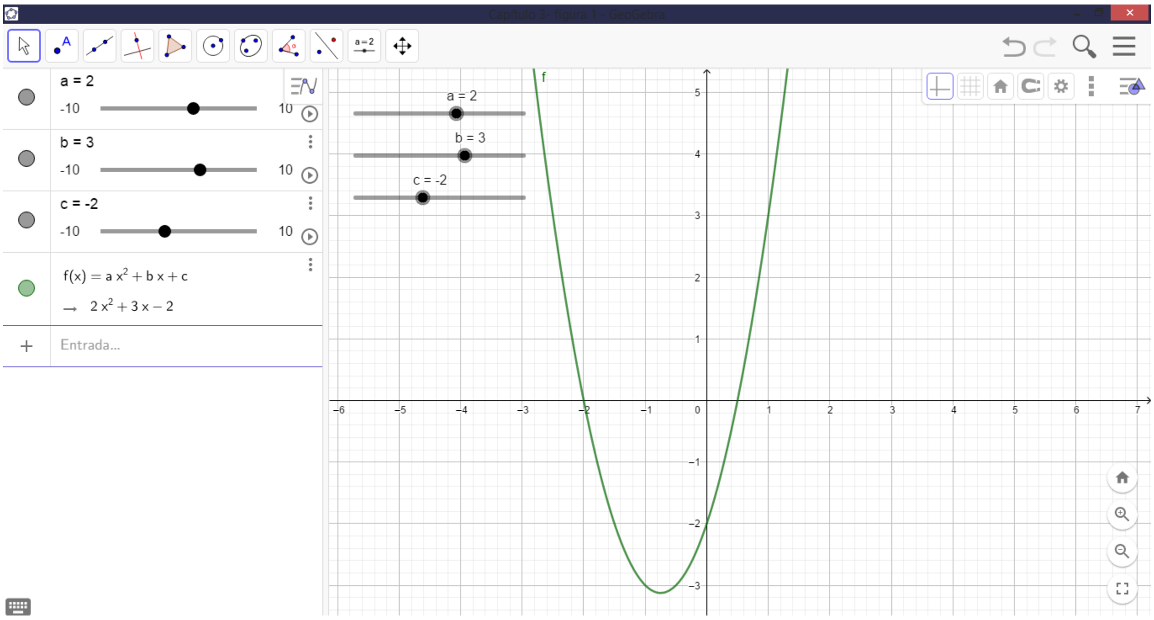


Figura 9 – Coeficientes a, b e c de uma função quadrática criados a partir de controles deslizantes definidos no GeoGebra.

Questionamentos:

1. O que acontece com a concavidade da parábola quando variamos o coeficiente a?
2. Se o coeficiente a é positivo, o que acontece quando aumentamos seu valor? E quando diminuímos?
3. Se o coeficiente a é negativo, o que acontece quando aumentamos seu valor? E quando diminuímos?
4. Ao variar o coeficiente b, o que podemos observar?
5. O que podemos observar ao variar o coeficiente c?
6. Que relação existe entre o valor do coeficiente c e a interseção do gráfico com o eixo y?
7. O que podemos concluir sobre a interseção do gráfico com eixo x?

Comentários:

Ao ser questionado espera-se que o aluno faça uma análise das características do gráfico a partir da manipulação e formule conjecturas. Deseja-se que o discente chegue às seguintes conclusões:

- Se o coeficiente a for positivo a parábola terá concavidade voltada para cima (Figura 10).
- Se o coeficiente a for negativo a parábola terá concavidade voltada para baixo.

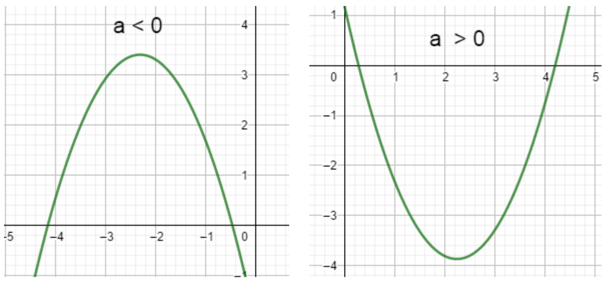


Figura 10 – À esquerda, o gráfico de uma parábola com concavidade voltada para baixo e à direita, o gráfico de uma parábola com concavidade voltada para cima.

- Se o coeficiente a for zero, tem-se uma função afim e o gráfico será uma reta.
- Se o coeficiente a é positivo e aumentamos seu valor, a parábola fica mais "fechada". Veja o exemplo na Figura 11.

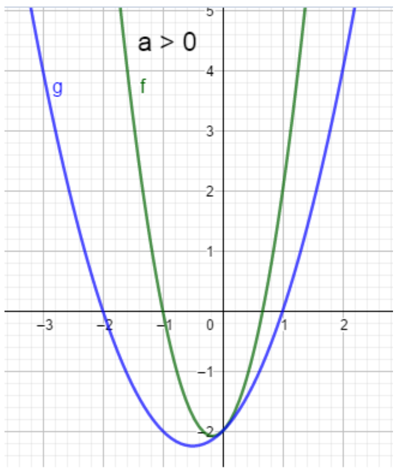


Figura 11 – Gráficos das funções $f(x) = 3x^2 + x - 2$ e $g(x) = x^2 + x - 2$.

- Se o coeficiente a é negativo e diminuímos seu valor, a parábola fica mais "fechada". Veja o exemplo na Figura 12
- Se o coeficiente a for positivo, ao variarmos o coeficiente b, a trajetória do vértice descreverá uma nova parábola com concavidade voltada para baixo.
- Se o coeficiente a for negativo, ao variarmos o coeficiente b, a trajetória do vértice descreverá uma nova parábola com concavidade voltada para cima.

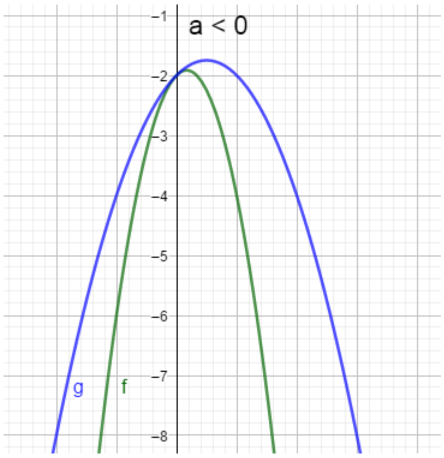


Figura 12 – Gráficos das funções $f(x) = -3x^2 + x - 2$ e $g(x) = -x^2 + x - 2$.

- Ao variar o coeficiente c, a parábola sofrerá um deslocamento vertical.

É possível combinar as atividades com uma matemática rigorosa, e provar todos os fatos observados, conforme a turma. Os três itens anteriores são demonstrados na atividade 3.

- O ponto $(0, c)$ é o ponto de interseção da parábola com o eixo y.
- A parábola pode ter nenhum, um ou dois pontos de interseção com o eixo x (Figura 13).

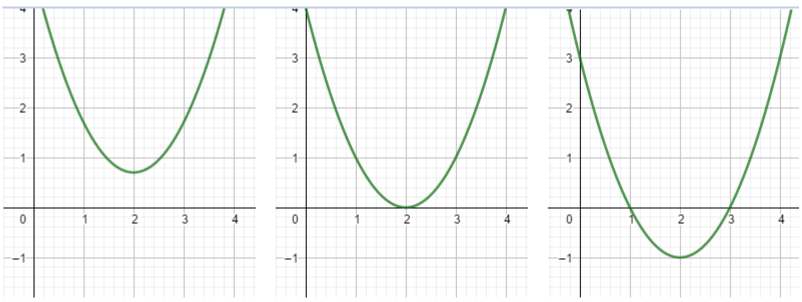


Figura 13 – Interseção com o eixo x.

3.2 Atividade 2: Pontos de máximo e mínimo e a simetria da parábola

Objetivo: Plotar gráficos de funções quadráticas para analisar ponto de mínimo, ponto de máximo, intervalo de crescimento, intervalo de decrescimento, eixo de simetria e coordenadas do vértice.

Conteúdo: Pontos de mínimo e máximo de uma função quadrática, e vértice da parábola.

Pré-requisito: Equações do 2º grau e o conceito de função.

Tempo estimado: Três aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade: O aluno deve criar controles deslisantes para os valores dos coeficientes a, b e c e digitar na caixa de entrada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ao variar esses coeficientes o aluno poderá observar ponto de mínimo, ponto de máximo, intervalo de crescimento, intervalo de decrescimento e a simetria da parábola.

Questionamentos:

1. Quando o gráfico da função tem um ponto de mínimo?
2. Quando o gráfico da função tem um ponto de máximo?
3. Em qual intervalo a parábola é crescente?
4. Em qual intervalo a parábola é decrescente?
5. Existe algum eixo de simetria na parábola? Se sim, como podemos encontrar esse eixo?
6. Como podemos determinar as coordenadas do vértice?

Comentários:

Sobre os pontos de mínimo e máximo, espera-se que o aluno chegue às seguintes conclusões:

- A função quadrática tem um ponto de mínimo (Figura 14), se o coeficiente a for positivo, ou seja, se a parábola tiver concavidade voltada para cima.
- A função quadrática tem um ponto de máximo (Figura 15), se o coeficiente a for negativo, ou seja, se a parábola tiver concavidade voltada para baixo.
- Se a parábola tem um ponto de mínimo, ela é decrescente de menos infinito até esse ponto e crescente desse ponto até o infinito.
- Se a parábola tem um ponto de máximo, ela é crescente de menos infinito até esse ponto e decrescente desse ponto até o infinito.

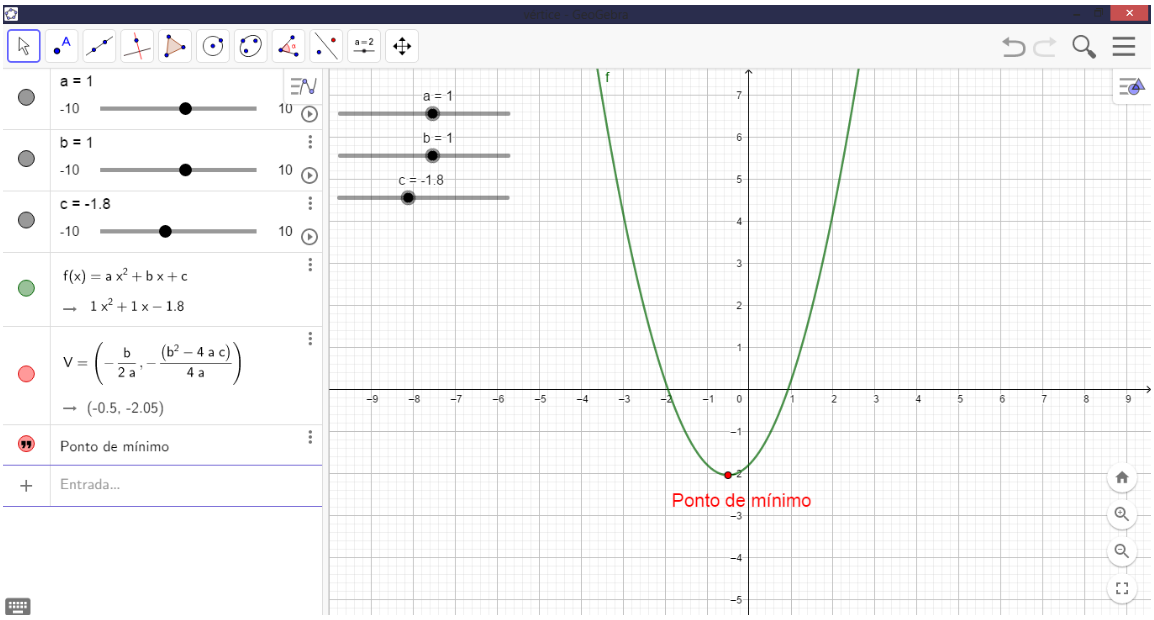


Figura 14 – Ponto de mínimo da parábola.

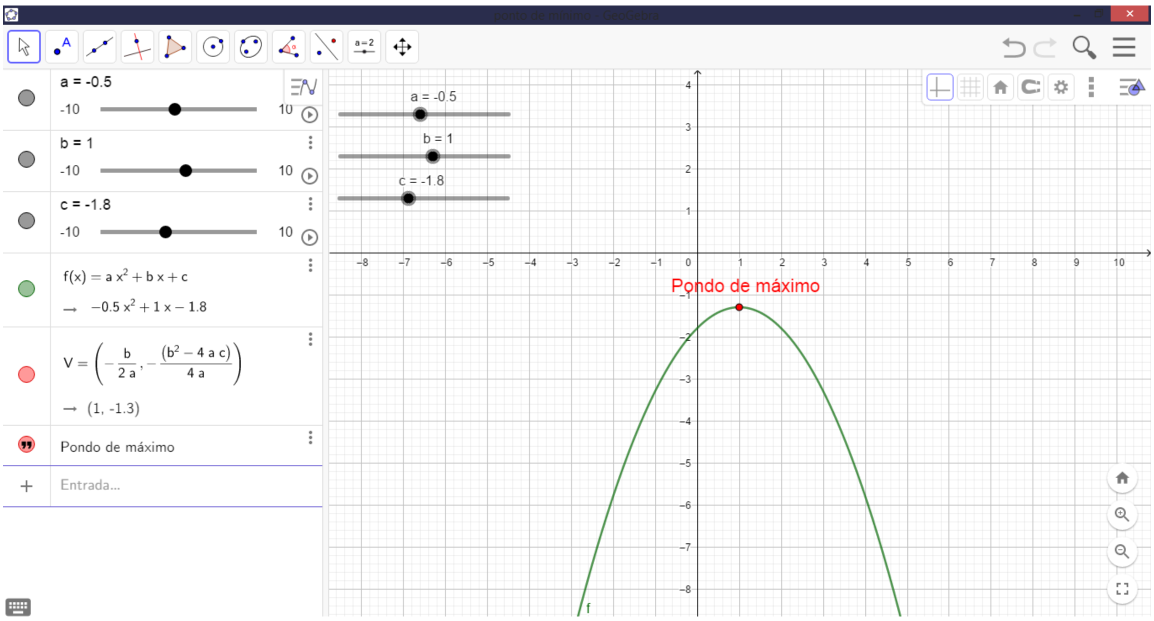


Figura 15 – Ponto de máximo da parábola.

Para determinar o eixo de simetria da parábola, devemos orientar o discente a tomar dois pontos x_1 e x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$, traçar o segmento de reta $\overline{x_1x_2}$ e a mediatriz desse segmento. A reta traçada é o eixo de simetria da parábola (Figura 16).Além disso, podemos solicitar que marque o ponto de interseção entre a parábola e o eixo de simetria, esse ponto é o vértice da parábola.

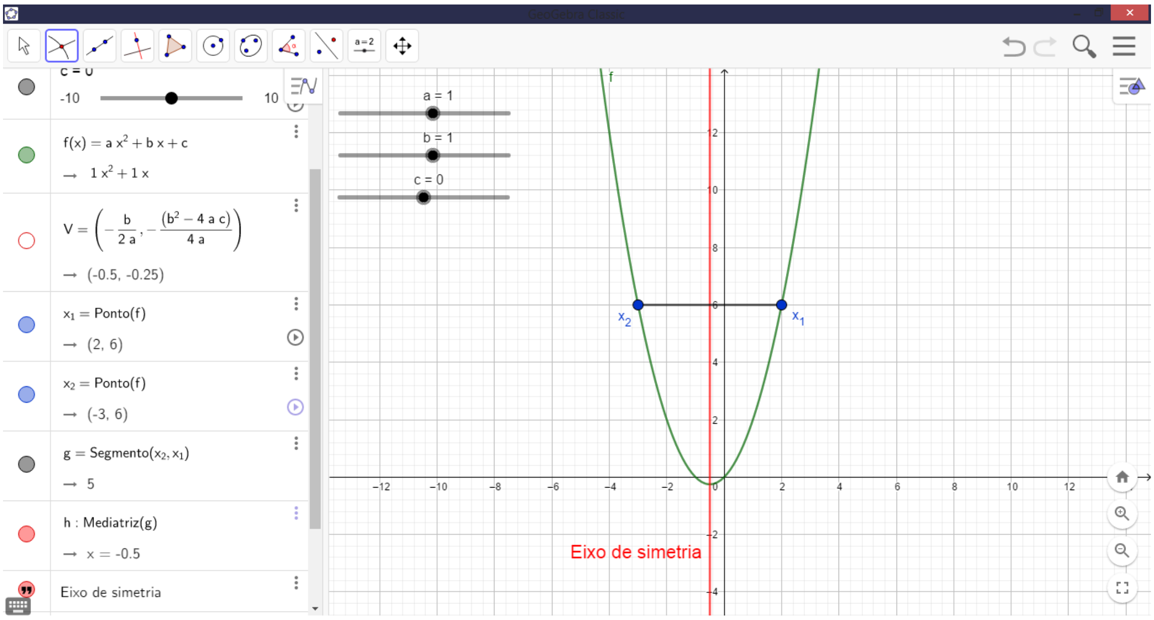


Figura 16 – Eixo de simetria da parábola.

A coordenada do vértice pode ser determinada da seguinte maneira:

Consideramos $x = 0$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0$, e assim obtemos $f(x) = c$.

Tomamos outro ponto do gráfico em que $f(x) = c$. Assim $ax^2+bx+c = c \Rightarrow ax^2+bx = 0 \Rightarrow x(ax+b) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{b}{a}$.

Devido ao eixo de simetria, o vértice se encontra no ponto médio entre os pontos obtidos, ou seja,

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Para calcular a coordenada y do vértice, basta substituir $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e obter

$$\begin{aligned} y_v &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= -\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Concluímos que a coordenada do vértice é dada por $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

O aluno pode digitar as coordenadas desse ponto na caixa de entrada do GeoGebra (Figura 17) e verificar, variando os valores dos coeficientes, que realmente são as coordenadas do vértice da parábola.

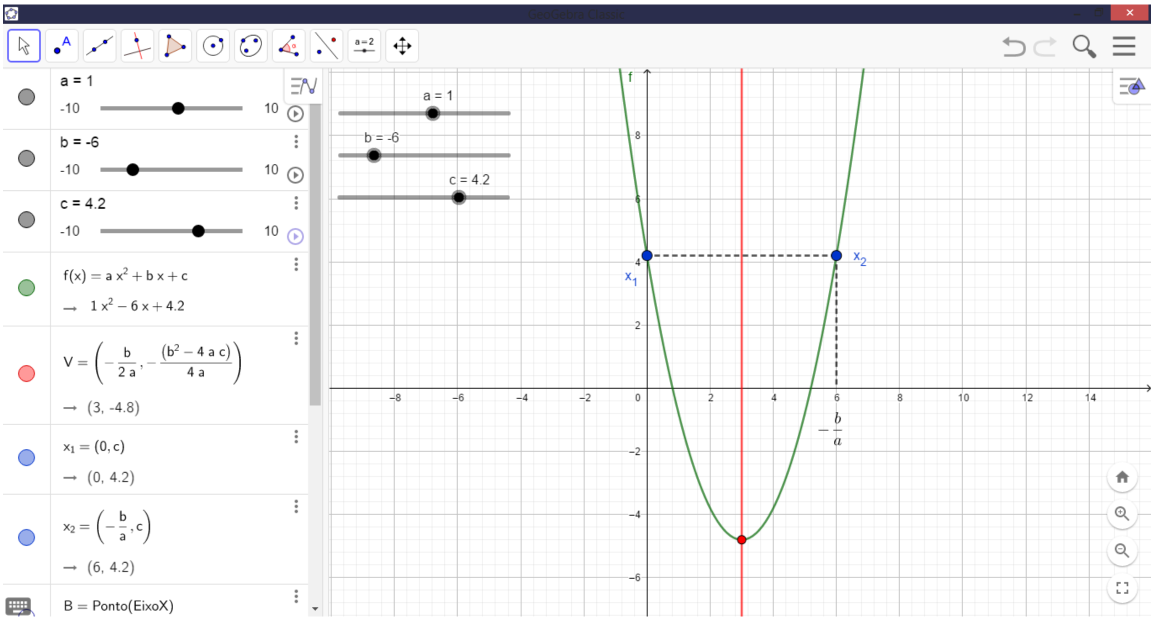


Figura 17 – Vértice da parábola.

3.3 Atividade 3: A trajetória do vértice

Objetivo: Analisar o rastro do vértice de uma parábola quando variamos os coeficientes a, b e c.

Conteúdo: Vértice da parábola.

Pré-requisito: Funções quadráticas, funções afins e as coordenadas do vértice da parábola.

Tempo estimado: Três aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade: O aluno deve criar controles deslisantes para os valores dos coeficientes a, b e c, digitar na caixa de entrada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, criar o ponto $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ e habilitar o rastro desse ponto. Ao variar cada um dos coeficientes, espera-se que o aluno faça conjecturas sobre o traçado do vértice.

Questionamentos:

1. Que traçado o vértice descreve ao variarmos o coeficiente a, mantendo os coeficientes b e c fixos?

2. Como podemos mostrar que o traçado é uma reta?

3. Que traçado o vértice descreve ao variarmos o coeficiente b, mantendo os coeficientes a e c fixos?

4. Como podemos mostrar que o traçado é uma parábola?

5. Que traçado o vértice descreve ao variarmos o coeficiente c, mantendo os coeficientes a e b fixos?

6. Como podemos mostrar que é uma reta paralela ao eixo y?

Comentários: Nos baseamos no artigo escrito por De Souza e Da Silva (2006) para o desenvolvimento dessa atividade. Quando variamos o coeficiente a, mantendo os coeficientes b e c constantes e diferentes de zero, além da variação provocada na abertura da parábola, observamos também que o vértice se move linearmente sobre uma reta (Figura 18).

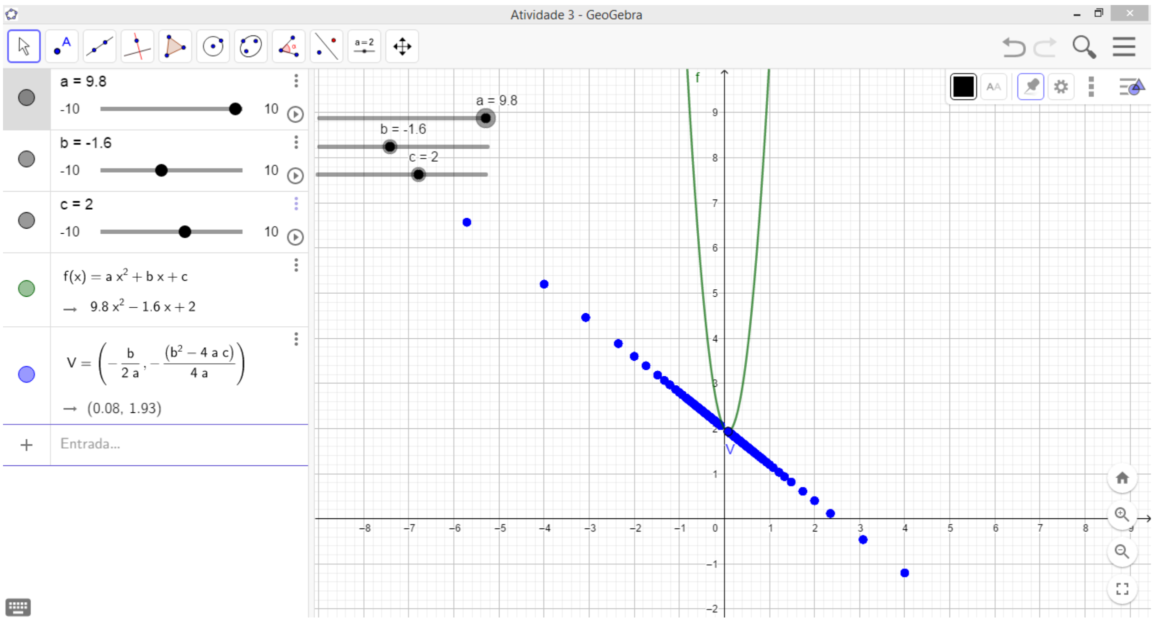


Figura 18 – O traçado do vértice quando variamos o coeficiente a.

Como a abscissa do vértice é dada por $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, então temos que $a = -\dfrac{b}{2x_v}$. Assim, a ordenada do vértice é dada por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2}{4a} + c. \qquad (3.1)$$

Substituindo o valor de a em (3.1), temos a seguinte equação que descreve o traçado do vértice:

$$y_v = -\frac{b^2}{4(-\frac{b}{2x_v})} + c = \frac{b}{2}x_v + c.$$

No caso em que $b = 0$, o vértice da parábola não se move, ou seja, nesse caso temos um único ponto de coordenada $(0, c)$ (Figura 19).

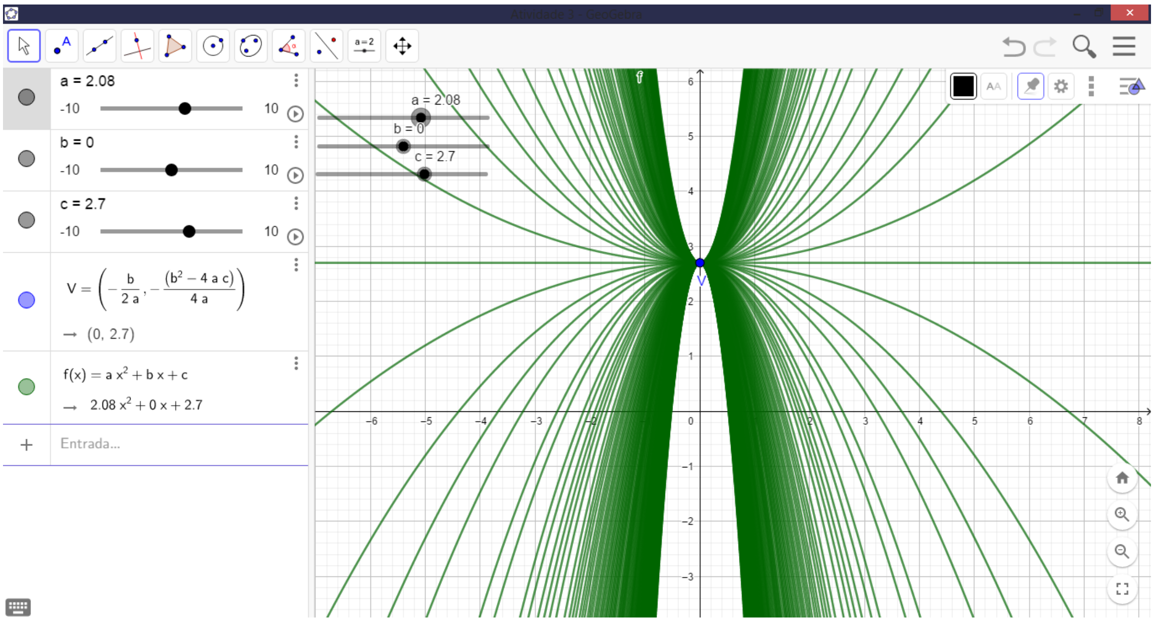


Figura 19 – A variação da concavidade da parábola quando $b = 0$.

Se o coeficiente c for nulo, a trajetória do vértice da parábola descreverá uma reta que passa pela origem do eixo coordenado.E no caso em que o coeficiente b também for nulo, teremos um único ponto de coordenada $(0, 0)$.

Quando variamos o coeficiente b, mantendo os coeficientes a e c constantes e diferentes de zero, observamos que o vértice da parábola se move descrevendo uma outra parábola (Figura 20).

Como a abscissa do vértice é dada por $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, então temos que $b = -2ax_v$.

Substituindo o valor de b na equação (3.1), temos que a equação da parábola, que descreve a trajetória do vértice, é dada por:

$$y_v = -\frac{(-2ax_v)^2}{4a} + c = -ax_v^2 + c.$$

Essa nova parábola terá o vértice sobre o eixo y, já que não temos o termo bx_v da equação.

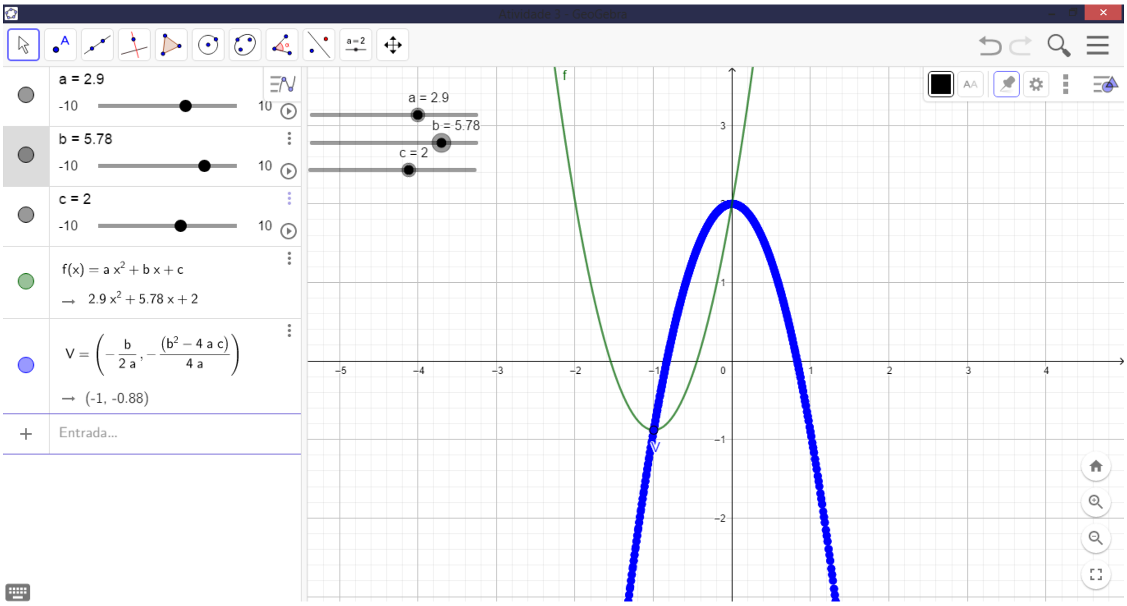


Figura 20 – O traçado do vértice quando variamos o coeficiente b.

No caso em que $a = 0$ não teremos uma função quadrática, e no caso em que o coeficiente c é nulo, a trajetória do vértice da parábola descreverá uma nova parábola com vértice na origem do eixo coordenado.

Quando variamos o coeficiente c, mantendo os coeficientes a e b constantes e diferentes de zero, verificamos que o vértice da parábola se move verticalmente (Figura 21).

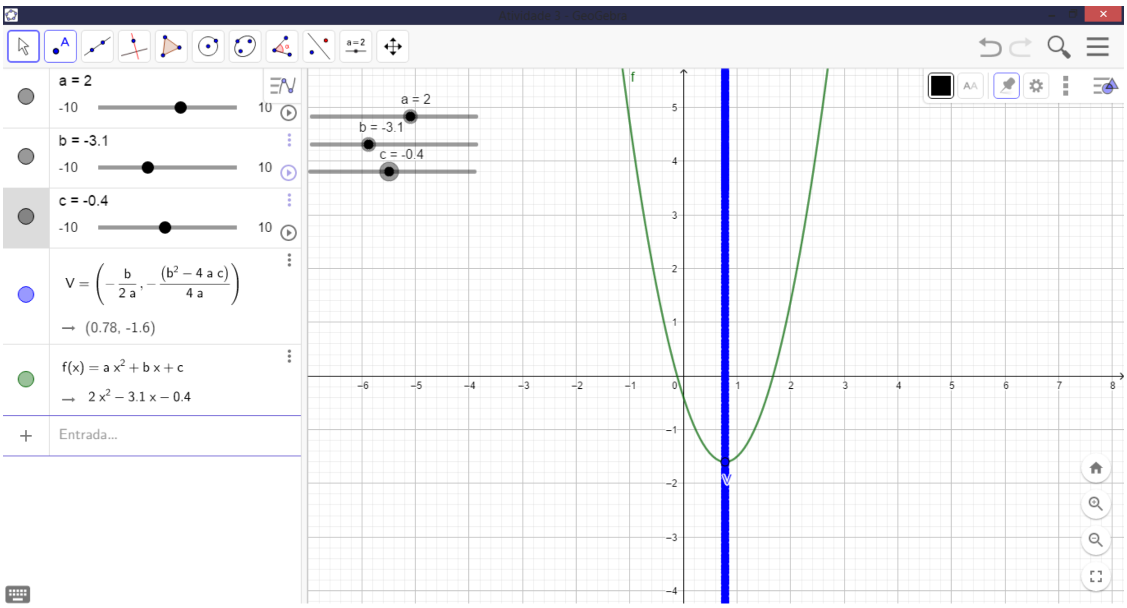


Figura 21 – O traçado do vértice quando variamos o coeficiente c.

A abscissa do vértice da parábola não depende do coeficiente c, ou seja, é constante quando os coeficientes a e b são fixos. Portanto, o coeficiente c irá alterar somente a ordenada do vértice. Nesse caso, a equação da reta que descreve o traçado do vértice é dada por $x = \dfrac{-b}{2a}$.

No caso em que $a = 0$ não teremos uma função quadrática, e no caso em que o coeficiente b é nulo, o rastro do vértice da parábola descreverá a reta de equação $x = 0$.

3.4 Atividade 4: A fórmula de Bháskara

Objetivos: Verificar que o gráfico de qualquer função quadrática da forma $j(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser obtido através de deslocamentos horizontais e verticais do gráfico de $f(x) = ax^2$ e utilizar esse fato para demonstrar a fórmula de Bháskara.

Conteúdo: A forma canônica da função quadrática e a fórmula de Bháskara. Chamaremos de forma canônica a função $l(x) = a(x - k)^2 + h$, pois ela é obtida a partir da função $f(x) = ax^2$.

Pré-requisito: Equações do 2º grau e conceito de função.

Tempo estimado: Três aulas de 50 minutos.

Descrição da atividade: Para a realização da atividade sugerimos o seguinte roteiro:

1. Criar controles deslizantes para os parâmetros *a*, *k*, e *h*, com intervalo entre -10 e 10 e incremento 0,01;
2. Na caixa de entrada criar a função $f(x) = ax^2$;
3. Variar o parâmetro *a* e observar o que acontece com a concavidade da parábola;
4. Na caixa de entrada criar a função $g(x) = a(x - k)^2$;
5. Variar o parâmetro *k* e observar o deslocamento horizontal da parábola (Figura 22);
6. Na caixa de entrada criar a função $l(x) = a(x - k)^2 + h$;
7. Variar o parâmetro *h* e observar o deslocamento vertical da parábola (Figura 23);
8. Criar os controles deslizantes b e c, o gráfico de $j(x) = ax^2 + bx + c$ e ajustar h e k, através dos deslocamentos, no sentido de coincidir os gráficos de j e l;

Questionamentos:

1. Que relação existe entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$?

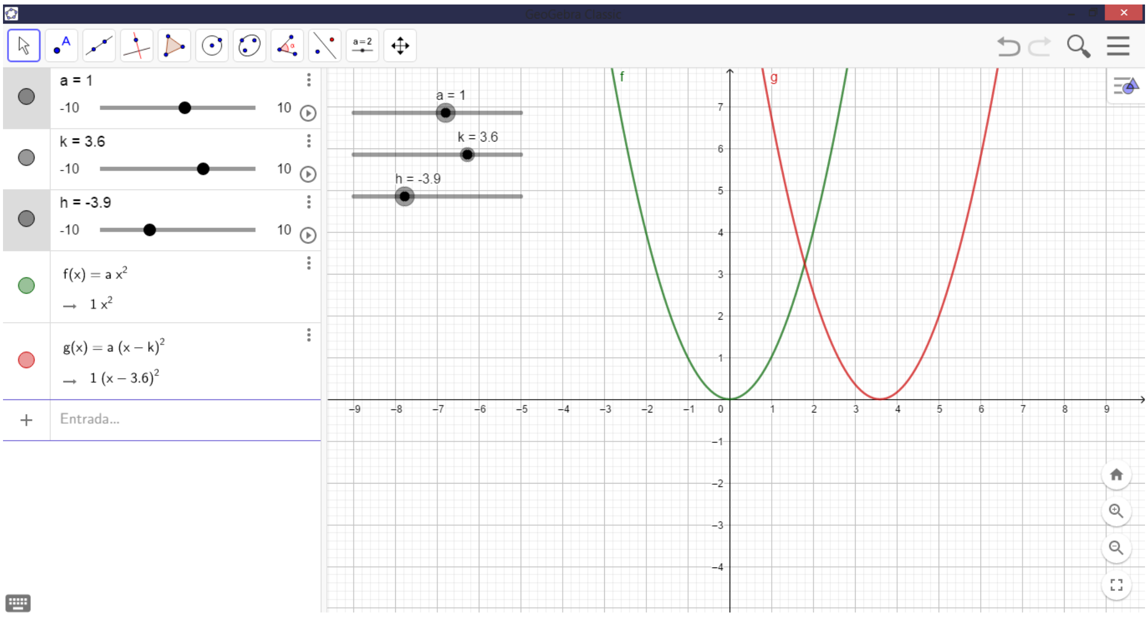


Figura 22 – Gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$.

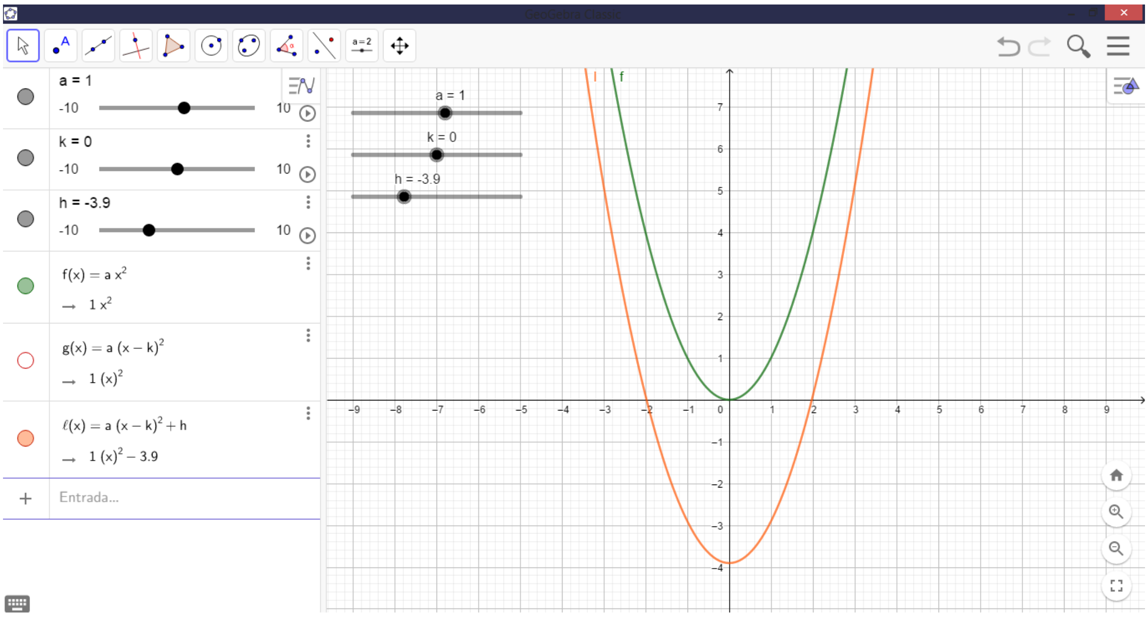


Figura 23 – Gráfico das funções $f(x)$ e $l(x)$.

2. Que relação existe entre os gráficos das funções $f(x)$ e $l(x)$?

3. Como podemos determinar as raízes da função $l(x)$?

4. Como podemos escrever $a(x-k)^2+h=0$ na forma $ax^2+bx+c=0$?

5. Qual é o valor do coeficiente b e do coeficiente c no item anterior?

6. Como podemos determinar os valores dos parâmetros k e h ?

7. Os valores de k e h se assemelham com algo que vocês já estudaram?

8. Como podemos obter a fórmula de Bháskara a partir de $l = a(x-k)^2 + h = 0$?

9. Como podemos obter a fórmula de Bháskara completando quadrados?

Comentários: Essa atividade foi aplicada em uma escola estadual de Ouro Preto - MG e em uma escola privada de Belo Horizonte-MG e será comentada com mais detalhes no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

A demonstração da Fórmula de Bháskara utilizando o software GeoGebra

Neste capítulo apresentamos um estudo qualitativo, realizado com estudantes do nono ano do ensino fundamental, utilizando o software GeoGebra. Foi desenvolvida uma descoberta guiada, que permitiu aos alunos a verificação de que o gráfico de qualquer função quadrática é obtido por deslocamentos horizontais e verticais do gráfico da função $f(x) = ax^2$, em que $a \neq 0$. A atividade proposta contribuiu para a compreensão da demonstração da fórmula de Bháskara. Os resultados foram coletados de acordo com as impressões dos alunos durante a aplicação da atividade e as respostas dadas a um questionário composto por seis questões (veja apêndice).

4.1 Sujeitos e contexto

Os sujeitos deste estudo foram oito alunos de uma escola estadual, localizada na cidade de Ouro Preto - MG e vinte e oito alunos de uma escola privada da região noroeste de Belo Horizonte-MG. Esses alunos estavam cursando o nono ano do ensino fundamental e já haviam estudado o conteúdo de funções quadráticas com seus respectivos professores de matemática.

A produção de resultados, de natureza qualitativa, foi fundamentada no comportamento e fala dos alunos durante a aplicação da atividade e na utilização de questionários.

A atividade permitiu que os alunos fizessem a demonstração da fórmula de Bháskara sem completar quadrados, o que é de difícil compreensão para grande parte dos estudantes, pois na maioria das vezes é ensinado apenas a desenvolver o produto notável, e concluíssem que o gráfico de uma função quadrática qualquer é um deslocamento horizontal ou vertical do gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2$, em que a é uma constante não nula.

Acreditamos que as visualizações e manipulações oferecidas pelo GeoGebra podem ajudar os alunos a compreenderem melhor o gráfico de uma função e também a relação entre os coeficientes da função e o gráfico. Nossa filosofia de trabalho baseia-se nas ideias de Borba e Penteado (2007): "As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física" (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 37).

4.2 Descrição da Atividade

A atividade foi realizada na escola privada durante as aulas de matemática. Os alunos foram orientados a baixar o aplicativo GeoGebra no celular (Figura 24), se sentaram em grupos de três alunos, seguiram o roteiro de construções apresentado na atividade 4, investigaram a partir dos questionamentos feitos no decorrer da atividade, acompanharam a demonstração da fórmula de Bháskara no quadro e responderam a um questionário que procurava saber suas impressões acerca do uso do GeoGebra no estudo de funções.

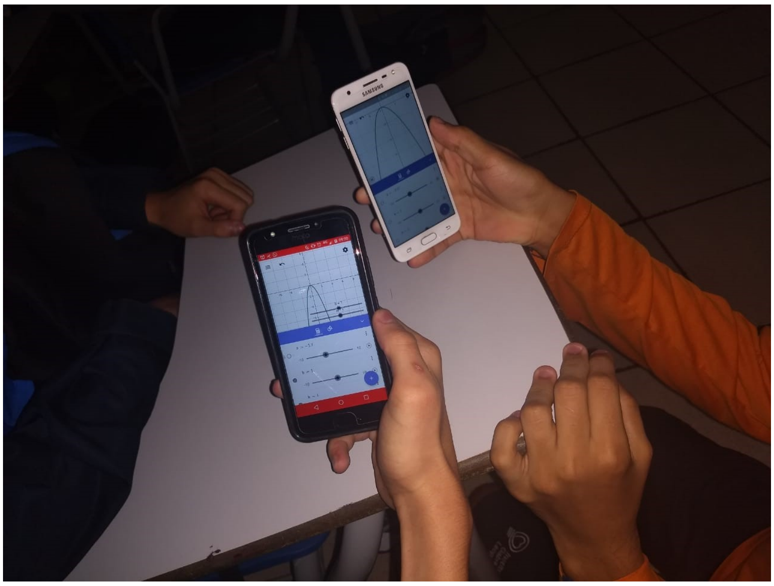


Figura 24 – Alunos utilizando o aplicativo na escola privada.

Já na escola estadual a atividade foi desenvolvida no contraturno. Utilizamos o laboratório de informática da escola e os alunos realizaram a atividade individualmente (Figura 25).

Figura 25 – Alunos no laboratório de informática da escola estadual.

4.3 Demonstração da fórmula de Bháskara apresentada aos alunos

No capítulo anterior descrevemos o roteiro de construção para a realização da atividade definindo as funções $f(x) = ax^2$, $g(x) = a(x-k)^2$, $l(x) = a(x-k)^2+h$ e $j(x) = ax^2+bx+c$.

Na condução da atividade, os estudantes puderam concluir que dado o gráfico da função j, era possível ajustar os parâmetros k e h de modo que o gráfico da função l coincidisse com o de j, isto é, o gráfico da função j é obtido através de deslocamentos horizontais e verticais a partir do gráfico da função f. Isso nos conduz a concluir que existe uma relação entre k e h e os coeficientes a, b e c. Este foi o norte para realizar a demonstração seguindo o roteiro de perguntas apresentadas no capítulo anterior.

Começamos a demonstração com a seguinte pergunta: Como podemos determinar as raízes da função $l(x) = a(x-k)^2 + h$?

Para determinar as raízes da função devemos tomar $l(x) = 0$. Daí

$$a(x-k)^2 + h = 0,$$

o que implica em $a(x-k)^2 = -h$, ou seja

$$(x-k)^2 = -\frac{h}{a} \Rightarrow (x-k) = \pm\sqrt{-\frac{h}{a}},$$

e, portanto,

$$x = k \pm \sqrt{-\frac{h}{a}}. \tag{4.1}$$

Perguntamos, em seguida, como podemos escrever $a(x-k)^2+h=0$ na forma $ax^2+bx+c=0$. Para isso, basta desenvolver a expressão $a(x-k)^2+h=0$ e obter $a(x^2-2kx+h^2)+h=0$, assim,

$$ax^2 - 2akx + ak^2 + h = 0. \tag{4.2}$$

Na sequência perguntamos: Qual é o valor dos coeficientes b e c em (4.2)?

Comparando a equação (4.2) com a equação $ax^2+bx+c=0$, podemos concluir que:

$$b = -2ak \quad e \quad c = ak^2 + h. \tag{4.3}$$

Seguimos a demonstração questionando como podemos determinar os valores dos parâmetros k e h em termos de a, b e c. Por (4.3), percebe-se que

$$k = -\frac{b}{2a} \tag{4.4}$$

e que

$$\begin{aligned} h = c - ak^2 &= c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

ou seja,

$$h = -\frac{\Delta}{4a}, \tag{4.5}$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Com isto os estudantes puderam perceber que k e h são, na verdade, as coordenadas de x vértice e y vértice, respectivamente. Os alunos da escola estadual não reconheceram o valor de h como a coordenada y vértice. Em questionamento feito a professora da turma, fomos informados que ao estudarem o conteúdo, os alunos aprenderam a substituir a coordenada x vértice na função para encontrar a coordenada y.

Para finalizar a demonstração perguntamos como podemos obter a fórmula de Bháskara a partir dos resultados anteriores. A fórmula de Bháskara é obtida substituindo as expressões

(4.4) e (4.5) em (4.1). Obtém-se assim:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\frac{\Delta}{4a}}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Alguns alunos apresentaram dificuldades com a parte algébrica da demonstração, mas conseguiram observar os deslocamentos dos gráficos das funções com facilidade através do uso do software GeoGebra. Cabe aqui observar que o professor é de fundamental importância como guia no processo de ensino-aprendizagem. De acordo com Carneiro e Passos (2014): "O professor precisa participar de forma ativa do processo de construção do conhecimento do aluno, sendo um mediador, motivador e orientador da aprendizagem" (CARNEIRO; PASSOS, 2014, p. 102).

A utilização do software colabora com a diminuição das dificuldades algébricas, possibilita a simulação de problemas e a visualização de situações, que não seriam possíveis em uma aula tradicional, mas a presença do professor nas interpretações e realização dos cálculos algébricos foi essencial. Assim, o aluno aprende explorando propriedades por meio da construção e manipulação, tendo o professor como facilitador no processo de ensino e aprendizagem e combinando várias mídias.

As atividades investigativas levam o aluno a explorar situações e fazer conjecturas. Cabe aos docentes conduzir os processos, ajudá-los a identificar se são coerentes as conclusões desenvolvidas por eles e incentivá-los a questionar e aprimorar a capacidade de argumentação. Nesse sentido Gewandsznajder e Alves-Mazzotti (1998) consideram que:

> A busca do conhecimento se inicia com a formulação de hipóteses que procuram resolver problemas e continua com tentativas de refutações dessas hipóteses, através de testes que envolvem observações ou experimentos. Se a hipótese não resistir aos testes, formulam-se novas hipóteses que, por sua vez, também serão testadas (GEWANDSZNAJDER; ALVES-MAZZOTTI, 1998, p. 15).

Durante a aplicação da atividade na escola privada, uma aluna chegou a concluir que o parâmetro h estava relacionado com o delta da equação. Ao ser questionada sobre o que a levou a essa conclusão, respondeu que era pelo fato de o valor de h interferir na interseção do gráfico com o eixo x. Ou seja, ela chegou a uma conclusão pela investigação, e com a ajuda do professor foi possível demonstrar que a ideia estava correta.

Vale observar que de acordo com Borba e Penteado (2007) vários outros conceitos podem ser estudados e discutidos a partir das descobertas dos alunos:

> Ao utilizar a tecnologia de uma forma que estimule a formulação de conjecturas e a coordenação de diversas representações de um conceito, é possível que novos aspectos de um tema tão 'estável' como funções quadráticas, apareçam em uma sala de aula [...] (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 38).

Os alunos, de ambas as escolas, relataram que a fórmula de Bháskara não foi demonstrada pelo professor quando estudaram funções quadráticas. Então foi feita, inicialmente, a demonstração tradicional, apresentada nos livros didáticos, utilizando completamento de quadrados. Os alunos apresentaram certa dificuldade para compreendê-la e foi necessário utilizar exemplos numéricos no momento de completar quadrados.

4.4 Análise do questionário

Após a realização da atividade, foi solicitado que os estudantes respondessem a um questionário, composto por seis questões (veja apêndice).

As análises das respostas nos levaram a refletir sobre a utilização de recursos tecnológicos nas aulas de matemática e sobre a contribuição desse tipo de recurso para o aprendizado dos alunos.

A primeira questão proposta pretendia verificar se os alunos já conheciam o Software GeoGebra.

1) Você conhecia ou já tinha usado o GeoGebra? Todos os trinta e seis alunos responderam que não conheciam o software.

A segunda questão visava analisar se foi utilizado algum recurso computacional durante o estudo de funções quadráticas na sala de aula.

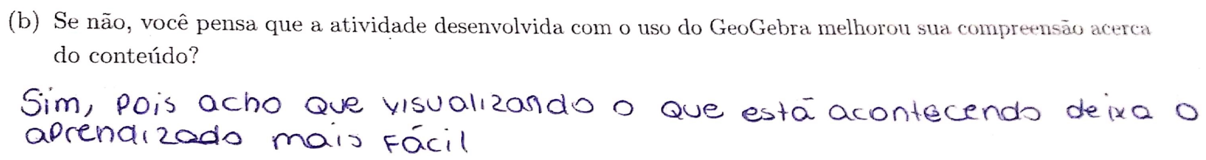
2) Quando você estudou funções quadráticas, seu(sua)professor(a) utilizou algum recurso computacional?
a) Se sim, qual recurso foi utilizado?
b) Se não, você pensa que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra melhorou sua compreensão acerca do conteúdo?

Todos os alunos responderam que o professor não utilizou recursos computacionais durante a explicação do conteúdo de funções quadráticas e sobre o segundo questionamento, trinta alunos responderam que visualizar as funções no GeoGebra os ajudaram a compreender o conteúdo, quatro alunos disseram que compreenderam mais ou menos, pois acharam complicado utilizar o GeoGebra e dois alunos responderam que não ajudou a melhorar sua compreensão.

As Figuras 26 e 27 ilustram o ponto de vista apresentado por dois alunos ao questionamento da segunda questão. As respostas dos alunos foram transcritas, pois, algumas imagens não estão legíveis.

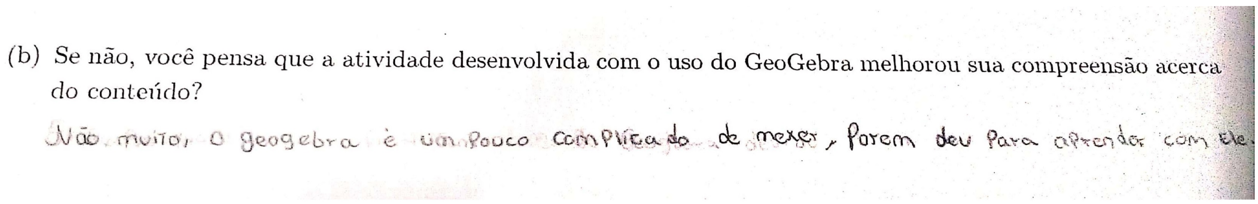
A_1 : Sim, pois acho que visualizando o que está acontecendo deixa o aprendizado mais fácil.

A_2 : Não muito, o geogebra é um pouco complicado de mexer, porem deu para aprender com ele.


(b) Se não, você pensa que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra melhorou sua compreensão acerca do conteúdo?

Sim, pois acho que visualizando o que está acontecendo deixa o aprendizado mais fácil

Figura 26 – Exemplo de resposta de aluno à pergunta 2.


(b) Se não, você pensa que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra melhorou sua compreensão acerca do conteúdo?

Não muito, o geogebra é um pouco complicado de mexer, porem deu para aprender com ele.

Figura 27 – Exemplo de resposta de aluno à pergunta 2.

A terceira questão foi a seguinte:

3) Você sabia que qualquer parábola $j(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser obtida através de deslocamentos horizontais e verticais de $f(x) = ax^2$?

Apenas quatro alunos disseram saber que o gráfico da função $j(x) = ax^2 + bx + c$ é uma variação do gráfico da função $f(x) = ax^2$.

A quarta questão pretendia identificar qual demonstração foi mais fácil compreender.

4) Qual demonstração da fórmula de Bháskara você achou mais fácil de entender? A forma canônica ou a completando quadrados.

Vinte e sete alunos acharam mais fácil compreender a demonstração da fórmula de Bháskara seguindo o roteiro da atividade proposta com o uso do GeoGebra. Vale ressaltar que os alunos não haviam estudado a demonstração da fórmula de Bháskara quando aprenderam equações do segundo grau na escola.

A quinta questão foi a seguinte:

$5)$ Você acha que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra ajudou a compreender melhor a fórmula de Bháskara?

Apenas um aluno respondeu que a atividade não ajudou a compreender melhor a fórmula de Bháskara. Lembramos que os alunos viram pela primeira vez a demonstração da fórmula através da atividade.

A última questão desejava avaliar a percepção dos alunos sobre a relação entre a atividade proposta, a compreensão do conteúdo e a utilização de recursos computacionais nas aulas de matemática.

$6)$ O que você achou da atividade desenvolvida? Você acha que o uso do GeoGebra no estudo de conteúdos matemáticos pode te deixar mais motivado? Você gostaria que seu professor utilizasse esse recurso, quando possível, para apresentar aplicações dos conteúdos estudados?

Trinta alunos responderam que gostaram da atividade desenvolvida e que o software os ajudaram a compreender melhor algumas características das funções quadráticas, os gráficos e a fórmula de Bháskara. Disseram também que seria interessante utilizar o GeoGebra, quando possível, nas aulas de matemática. As Figuras 28, 29 e 30 mostram as respostas apresentadas por três desses alunos. Transcrevemos as respostas para facilitar a compreensão.

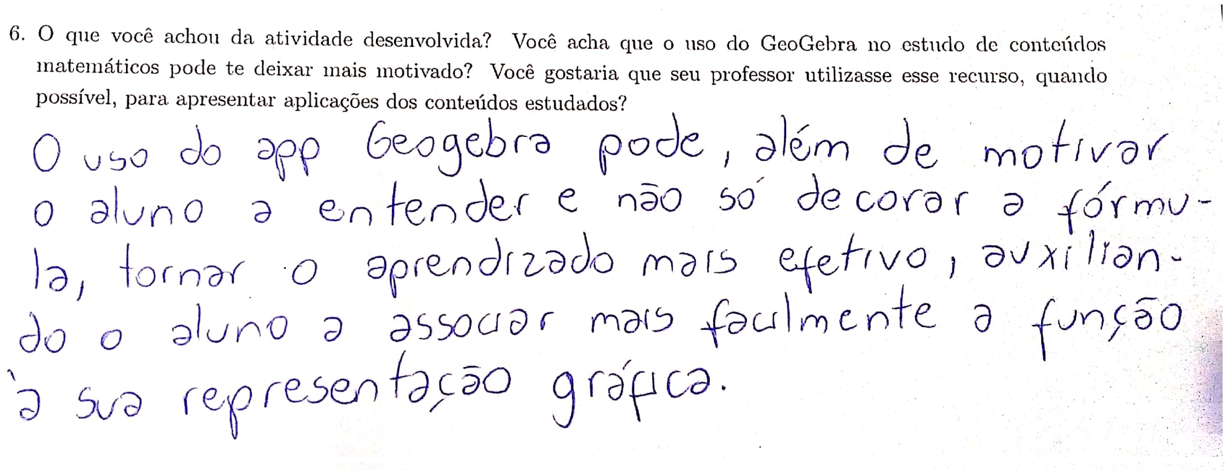
A_3 : O uso do app Geogebra pode, além de motivar o aluno a entender e não só decorar a fórmula, tornar o aprendizado mais efetivo, auxiliando o aluno a associar mais facilmente a função à sua representação gráfica.

A_4 : A atividade foi bastante interativa, mas o aplicativo é um pouco complicado de entender no início. Eu gostaria que nosso professor utilizasse esse método de ensino.

A_5 : Achei interessante ver as relações diretas entre os componentes das fórmulas e acredito que o aplicativo deixa sim o aluno mais motivado, mas não gostaria que fosse utilizado com tanta frequência, apenas para demonstrações pontuais.

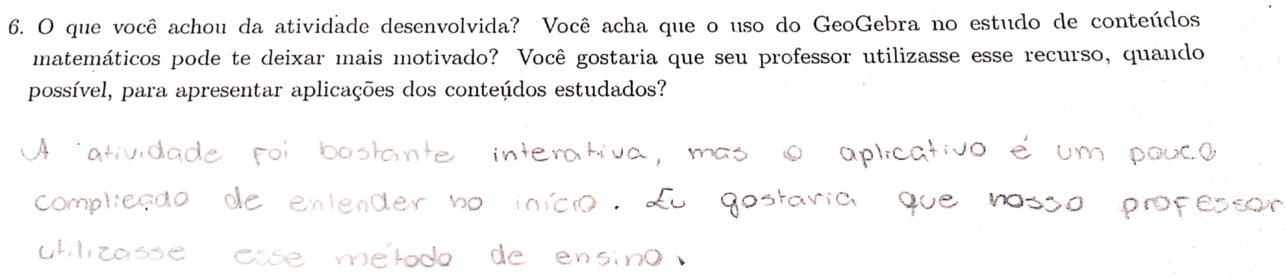
Ao analisar os questionários e comportamentos dos alunos durante a atividade, observamos que muitos deles tiveram, a princípio, um pouco de dificuldade em manusear e entender algumas ferramentas disponíveis no software, isso pode ter dificultado a exploração de algumas propriedades gráficas das funções quadráticas. Porém, com o direcionamento das questões, grande parte dos alunos conseguiram fazer afirmações relevantes para o trabalho desenvolvido. A maioria também indicou, através das respostas, que o uso do GeoGebra ajuda a motivar o aluno a investigar e aprender mais sobre o objeto estudado, colabora no desenvolvimento do senso crítico, além de deixar a aula mais interessante, divertida e dinâmica. Além disso, alguns alunos comentaram que o ideal é conciliar as aulas expositivas com o uso de tecnologias digitais, garantindo assim, um aprendizado mais significativo.

sugerem que a atividade aplicada motiva o aluno, colabora no desenvolvimento do senso crítico e permite a apropriação de novos conhecimentos a partir de assuntos já estudados.


6. O que você achou da atividade desenvolvida? Você acha que o uso do GeoGebra no estudo de conteúdos matemáticos pode te deixar mais motivado? Você gostaria que seu professor utilizasse esse recurso, quando possível, para apresentar aplicações dos conteúdos estudados?

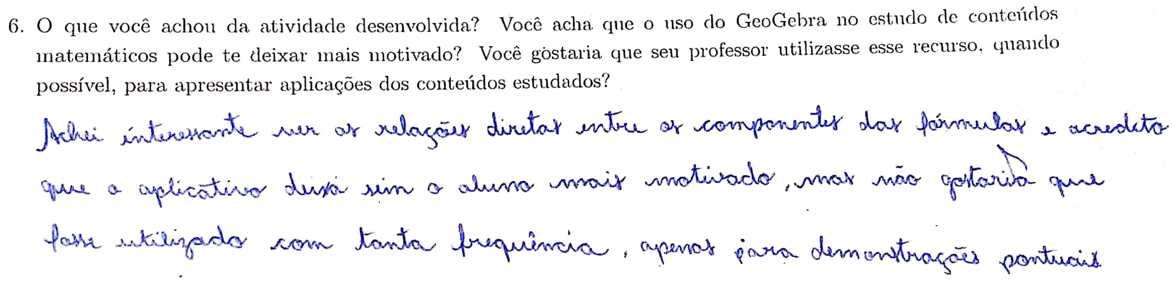
O uso do app Geogebra pode, além de motivar o aluno a entender e não só decorar a fórmula, tornar o aprendizado mais efetivo, auxiliando o aluno a associar mais facilmente a função à sua representação gráfica.

Figura 28 – Exemplo de resposta de aluno à pergunta 6.


6. O que você achou da atividade desenvolvida? Você acha que o uso do GeoGebra no estudo de conteúdos matemáticos pode te deixar mais motivado? Você gostaria que seu professor utilizasse esse recurso, quando possível, para apresentar aplicações dos conteúdos estudados?

A atividade foi bastante interativa, mas o aplicativo é um pouco complicado de entender no início. Eu gostaria que nosso professor utilizasse esse método de ensino.

Figura 29 – Exemplo de resposta de aluno à pergunta 6.


6. O que você achou da atividade desenvolvida? Você acha que o uso do GeoGebra no estudo de conteúdos matemáticos pode te deixar mais motivado? Você gostaria que seu professor utilizasse esse recurso, quando possível, para apresentar aplicações dos conteúdos estudados?

Achei interessante ver as relações diretas entre as componentes das fórmulas e acredito que o aplicativo deixa sim o aluno mais motivado, mas não gostaria que fosse utilizado com tanta frequência, apenas para demonstrações pontuais

Figura 30 – Exemplo de resposta de aluno à pergunta 6.

Concordamos com Borba e Penteado (2007, p. 88) quando afirmam que é infrutífero utilizar o computador apenas para exemplificar o conteúdo estudado. Entendemos que uma maneira mais efetiva de utilizar as mídias digitais no ensino de Matemática é desenvolvendo atividades que enfatizam a experimentação, visualização, simulação e comunicação eletrônicas e este foi o intuito da atividade proposta. A atividade foi planejada no sentido de utilizar as mídias – lápis, papel e computador (ou smartphone) – de forma conjunta, permitindo aos estudantes a busca e uma melhor compreensão, via experimentação, da fórmula de Bháskara, cuja demonstração não havia sido estudada pelos alunos.

Considerações Finais

Neste estudo, nosso objetivo foi propor atividades dinâmicas para o ensino de funções quadráticas, com o uso do software GeoGebra e demonstrar a fórmula de Bháskara a partir de uma descoberta guiada, na qual o aluno é o protagonista e o professor é o mediador do processo de ensino-aprendizagem.

Os resultados fundamentados pelas falas dos alunos e respostas dadas ao questionário, mostram que esse tipo de atividade motiva o aluno, ajuda a desenvolver um senso crítico e investigativo, e permite a apropriação de novos conhecimentos sobre conteúdos já estudados.

O estudo também mostrou a importância de renovações nas práticas pedagógicas de sala de aula, que, a nosso ver, precisam se adequar as rápidas mudanças tecnológicas das últimas décadas e ao novo perfil dos estudantes. Entendemos que o software GeoGebra pode ser uma importante ferramenta na busca pela inovação no ensino de matemática.

Durante a aplicação da atividade nas escolas usamos as mídias lápis, papel e computador ou smartphone, e isso permitiu uma articulação entre teoria e prática, proporcionando um aprendizado baseado na experimentação e visualização, contribuindo para a reorganização do pensamento dos discentes.

O intuito foi elaborar uma atividade que despertasse a curiosidade e incentivasse a participação ativa dos alunos. Através dos questionários respondidos por eles, observamos que a recepção foi positiva. Esse tipo de atividade faz do aluno um protagonista no processo de aprendizagem e, de acordo com os questionários, permite uma melhor compreensão de conceitos e fórmulas matemáticas.

APÊNDICE **A**

Apêndice

Questionário através do qual foram obtidas as percepções dos estudantes acerca das atividades realizadas com o uso do software GeoGebra.

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Professor Orientador: Dr. Éder Marinho Martins
Discente: Thaynara Menezes Gandra Conceição

QUESTIONÁRIO:

1. Você conhecia ou já tinha usado o GeoGebra?

   ☐ Conhecia, mas nunca tinha usado.
   ☐ Conhecia e já tinha usado.
   ☐ Não conhecia.

2. Quando você estudou funções quadráticas, seu(sua) professor(a) utilizou algum recurso computacional?

   (a) Se sim, qual recurso foi utilizado?

   (b) Se não, você pensa que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra melhorou sua compreensão acerca do conteúdo?

3. Você sabia que qualquer parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser obtida através de deslocamentos horizontais e verticais de $f(x) = ax^2$?

4. Qual demonstração da fórmula de Bháskara você achou mais fácil de entender?

   ☐ A forma canônica ou
   ☐ Completando quadrados.

5. Você acha que a atividade desenvolvida com o uso do GeoGebra ajudou a compreender melhor a fórmula de Bháskara?

6. O que você achou da atividade desenvolvida? Você acha que o uso do GeoGebra no estudo de conteúdos matemáticos pode te deixar mais motivado? Você gostaria que seu professor utilizasse esse recurso, quando possível, para apresentar aplicações dos conteúdos estudados?

Referências

ALQUIMIN, B. C. M. et al. **Uma proposta do ensino de Funções Quadráticas utilizando o GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia - Brasil, 2016. Citado na página 13.

BORBA, M. C.; DA SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. ***Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento***. 1^a. ed. Belo Horizonte - Brasil: Autêntica, 2014. (coleçao Tendência em educação matemática). Citado 4 vezes nas páginas 14, 17, 19 e 21.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. ***Informática e Educação Matemática***. 5^a. ed. Belo Horizonte - Brasil: Autêntica, 2007. (coleçao Tendência em educação matemática). Citado 5 vezes nas páginas 23, 52, 55, 56 e 60.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. **A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades**. *Revista Eletrônica de educação*, São Paulo - Brasil, v.8, n. n.2, p. p.101–119, 2014. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/729/328>> Acesso em: 22 set 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 55.

DA PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. *Investigar em educação*, p. p.93–169, 2003. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10451/4071>> Acesso em: 08 dez 2019. Citado na página 18.

DA SILVA, C. V. et al. **Modelagem, cálculo e GeoGebra: uma nova proposta de ensino para funções quadráticas**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Tocantins, Tocantins - Brasil, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

DE ALMEIDA JÚNIOR, R. C. V. et al. **Desenvolvimento de conceitos e resolução de atividades de função quadrática com o uso do software GeoGebra** . Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul - Brasil, 2013. Citado na página 13.

DE SOUSA, A. R. et al. **O uso do Software GeoGebra como Ferramenta de Apoio no Ensino das Funções Afim e Quadráticas**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia - Brasil, 2016. Citado na página 13.

DE SOUSA, R. M. et al. **O uso do GeoGebra no ensino de função quadrática**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Oeste do Pará, Pará - Brasil, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

DE SOUZA, A. R.; DA SILVA, G. A. **Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino da função quadrática utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'**. *Zetetike*, São Paulo - Brasil, v.14, n. n.1, p. p.107–122, jan/jun 2006. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646999>> Acesso em: 30 ago 2019. Citado na página 45.

ELORZA, N. S. L. **Formação de professores de matemática e as tecnologias de informação e comunicação– A produção das revistas Zetetiké e Bolema.** *Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino*, Campinas - Brasil, v. 16, p. 1151–1162, 2012. Disponível em: <<http://endipe.pro.br/ebooks-2012/1657p.pdf>> Acesso em: 16 dez 2019. Citado na página 18.

ERNEST, P. **Investigações, resolução de problemas e pedagogia**. *Investigar para aprender Matemática*, Lisboa: Projecto MPT e APM, p. p.25–48, 1996. Citado na página 19.

FEITOSA, A. A. o. **Interatividade no ensino-aprendizagem de função quadrática**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Vale do São Francisco, Bahia - Brasil, 2014. Citado na página 13.

FILIZZOLA, J. V. d. S. et al. **Uma Abordagem Didática para o Ensino de Máximo e Mínimo na Função Quadrática e o uso do Software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Amapá, Amapá - Brasil, 2014. Citado na página 13.

GEWANDSZNAJDER, F.; ALVES-MAZZOTTI, A. J. ***O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa***. 2^a. ed. São Paulo - Brasil: Pioneira, 1998. Citado na página 55.

LEMOS JÚNIOR, J. A. S. et al. **Estudo de Funções Afins e Quadráticas com o auxílio do computador.** Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba - Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

LIMA, E. L. ***Números e Funções Reais***. 1^a. ed. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2017. (Coleção PROFMAT). Citado na página 25.

MALTEMPI, M. V. **Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente**. *Acta Scientiae*, Rio Grande do Sul - Brasil, v.10, n. n.1, p. p.59–67, jan/jun 2008. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/78/70>> Acesso em: 19 ago 2019. Citado na página 18.

MENEZES, R. C. d. et al. **Funções quadráticas, contextualização, análise gráfica e aplicações**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal de Goiás, Goiás - Brasil, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

NEGRÃO, A. M. et al. **O GeoGebra como proposta de intervenção pedagógica no ensino da função quadrática**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal do Pará, Pará - Brasil, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

NETO, A. C. M. ***Fundamentos de cálculo***. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT). Citado na página 25.

NOGUEIRA, G. L. et al. **Uma proposta metodológica para estudo, modelagem e aplicações de funções afins (lineares), quadráticas e exponenciais com o uso do software GeoGebra no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - Brasil, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

REIS, F. S. et al. **Uma Proposta de estudo de funções quadráticas mediada pela tecnologia**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal da Bahia, Bahia - Brasil, 2017. Citado na página 13.

RIBEIRO, D. M. A. A. et al. **Uma abordagem didática para função quadrática**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro - Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

ROQUE, T.; DE CARVALHO, J. B. P. ***Tópicos de história da matemática***. Rio de Janeiro - Brasil: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT). Citado na página 26.

STEWART, J. ***Cálculo***. 6^a. ed. São Paulo - Brasil: Cengage Learning, 2011. v. 1. Citado na página 25.

XAVIER, J. F. et al. **Análise da Função Quadrática, com Ênfase em seus Coeficientes, Via GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Rede Nacional), Universidade Federal de Goiás, Goiás - Brasil, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.