



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT**



**A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO
NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: PROPOSTAS DE
ATIVIDADES PARA OS CICLOS III E IV¹**

POR

CRISTIANO OLIVEIRA DOS SANTOS

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como
requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática.

**FEVEREIRO/ 2020
JOÃO PESSOA – PB**

¹ O Presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

**A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO
NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: PROPOSTAS DE
ATIVIDADES PARA OS CICLOS III E IV²**

POR

CRISTIANO OLIVEIRA DOS SANTOS

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**FEVEREIRO/ 2020
JOÃO PESSOA – PB**

² O Presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237h Santos, Cristiano Oliveira Dos.

A História da Matemática como recurso didático na Educação de Jovens e Adultos: propostas de atividades para os Ciclos III e IV / Cristiano Oliveira Dos Santos. - João Pessoa, 2020.
78f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. História da Matemática. 2. Educação de Jovens e Adultos. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC

**A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO
NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: PROPOSTAS DE
ATIVIDADES PARA OS CICLOS III E IV**

POR

CRISTIANO OLIVEIRA DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: História da Matemática, Educação Matemática.

Aprovada em 14 de fevereiro de 2020 por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos – UFPB (Orientador)

Elisandra F. Gloss de Moraes

Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes – UFPB (Membro interno)

Eudes Mendes Barboza

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza – UFRPE (Membro externo)

FEVEREIRO/ 2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por todas as vitórias que me concedeu ao longo deste curso.

A minha família pelo apoio e compreensão que me fortaleceram nos momentos difíceis.

Aos professores do PROFMAT por compartilharem comigo conhecimentos valiosos.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo e por todas as horas de estudo compartilhadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, pelas sugestões que me ajudaram a concretizar este trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro que recebi durante o curso de mestrado.

DEDICATÓRIA

A todos os professores da Educação de Jovens e Adultos que acreditam no potencial de seus alunos.

RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo sobre a utilização da História da Matemática nas aulas de Matemática na Educação de Jovens e Adultos e tem por objetivo principal ressaltar a importância dos problemas históricos para a aprendizagem significativa desta disciplina. Para tanto, utilizou-se como metodologia a pesquisa bibliográfica. Tal pesquisa verificou que a Educação de Adultos no Brasil passou por transformações ao longo de sua história que justificam a necessidade de uma metodologia diferenciada, com ênfase na contextualização dos conteúdos. No entanto, para alcançar esse objetivo, os educadores, além de conhecer a História da Matemática, necessitam de uma formação específica para fazer um uso eficaz deste recurso didático. Nesse sentido, esta obra apresenta um resumo dos principais matemáticos, civilizações e estudiosos, que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, desde os babilônios até Fibonacci. Por fim, fornece uma lista de treze atividades que podem ser aplicadas na Educação de Jovens e Adultos com a finalidade de contribuir para o enriquecimento das aulas de Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT

This dissertation presents a study about the use of History in Mathematics classes in Youth and Adult Education. Its main objective is to emphasize the importance of historical problems for the meaningful learning of this subject. Therefore, the bibliographic research was used as methodology. This research found that Adult Education in Brazil has undergone transformations throughout its history that justifies the need for a different methodology, with emphasis on the contextualization of content. However, to achieve this goal, educators, in addition to knowing the history of mathematics, need specific training to make effective use of this didactic resource. In this sense, this work presents a summary of the main mathematicians, civilizations and scholars who contributed to the development of mathematics, from the Babylonians to Fibonacci. Finally, it provides a list of thirteen activities that can be applied in Youth and Adult Education in order to contribute to the enrichment of mathematics classes.

Keywords: History of Mathematics. Youth and Adults Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1 A EJA COMO MODALIDADE DE ENSINO	17
2.1.1 Breve história da Educação de Adultos no Brasil.	18
2.1.2 Dificuldades no Ensino de Matemática na EJA	20
2.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	21
2.2.1 Motivação para estudar a História da Matemática.....	21
2.2.2 A História na Educação Matemática	22
3 IMPORTANTES PERSONAGENS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	25
3.1 A MATEMÁTICA DESENVOLVIDA PELOS BABILÔNIOS.....	25
3.1.1 O método de Completar Quadrados dos Babilônios.....	26
3.2 A MATEMÁTICA NO ANTIGO EGITO.....	28
3.2.1 A Multiplicação Egípcia.....	29
3.3 A MATEMÁTICA NA GRÉCIA ANTIGA	30
3.3.1 Tales de Mileto	31
3.3.2 Pitágoras de Samos.....	32
3.3.3 Arquimedes de Siracusa.....	33
3.3.4 Eratóstenes de Cirene	35
3.3.5 Diofanto	36
3.4 A MATEMÁTICA CHINESA, HINDU E ÁRABE	38
3.4.1. A Matemática da China Antiga	38
3.4.2 A Matemática Hindu.....	39
3.4.3 A Matemática Árabe	42
3.5 A MATEMÁTICA DA EUROPA NA IDADE MÉDIA.....	44
3.5.1 Alcuíno de York	44

3.5.2 Leonardo de Pisa.....	45
4 ATIVIDADES DIDÁTICAS SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	47
4.1 RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU PELO MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS.....	47
4.2 CALCULANDO A ALTURA DA PIRÂMIDE.....	49
4.3 HOMOTETIA E O TEOREMA DE TALES	51
4.4 OS NÚMEROS FIGURADOS	54
4.5 DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS.....	56
4.6 UM VALOR APROXIMADO PARA O NÚMERO $PI (\pi)$	58
4.7 DESCOBRINDO NÚMEROS PRIMOS.....	61
4.8 RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 1º GRAU.....	62
4.9 COMPLETANDO QUADRADOS MÁGICOS	64
4.10 MULTIPLICAÇÃO À MODA HINDU.....	65
4.11 TIRANDO A PROVA DOS NOVE	66
4.12 FAZENDO A TRAVESSIA	67
4.13 SOMANDO POTÊNCIAS.....	69
CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
REFERÊNCIAS.....	72
APÊNDICES	75
APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TALES	75
APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Tablete Plimpton 322	25
Figura 2 - Ilustração da Etapa 1	26
Figura 3 - Ilustração da Etapa 2	27
Figura 4 - Ilustração da Etapa 3	27
Figura 5 - Ilustração da Etapa 4	27
Figura 6 - Ilustração da Etapa 5	28
Figura 7 - Ilustração da Etapa 6	28
Figura 8 - A Grande Pirâmide	29
Figura 9 - Números Triangulares.....	32
Figura 10 - Ilustração do primeiro passo	41
Figura 11 - Ilustração do segundo passo	41
Figura 12 - Ilustração do terceiro passo	41
Figura 13 - Ilustração do Problema dos coelhos	46
Figura 14 - Problema adaptado.....	48
Figura 15 - Completando o quadrado.....	48
Figura 16 - Ilustração do problema da Pirâmide.....	50
Figura 17 - Representação dos triângulos semelhantes	50
Figura 18 - Triângulos sobrepostos.....	51
Figura 19 - Triângulo ABC.....	52
Figura 20 - Triângulo e Centro de homotetia.....	52
Figura 21 - Triângulo ABC e semirretas	53
Figura 22 - Triângulo ABC e os pontos A', B' e C'.....	53
Figura 23 - Os Triângulos semelhantes ABC e A'B'C'	54
Figura 24 - Números Triangulares.....	55
Figura 25 - Números Quadrangulares.....	55
Figura 26 - Números Pentagonais.....	56
Figura 27 – Quadrados lado a lado	57
Figura 28 - Solução do problema	58
Figura 29 - Objetos para aferição.....	59
Figura 30 - Procedimento do 1º Passo.....	60
Figura 31 - Quadrado subdividido	64
Figura 32 - Solução do problema	65

Figura 33 - Solução do problema	66
Figura 34 - Ilustração do problema	68
Figura 35 – Ilustração do 1º Caso	75
Figura 36 - Ilustração do 1º Caso.....	78
Figura 37 - Ilustração do 1º Passo	78
Figura 38 - Ilustração do 2º Passo	79
Figura 39 - Ilustração do 3º Passo	79
Figura 40 - Ilustração do 4º Passo.....	79

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Ciclos da EJA.....	17
Tabela 2 - Aferições dos perímetros das circunferências e dos diâmetros	60
Tabela 3 - Valores de Pi.....	60
Tabela 4 - Lista de números naturais	61
Tabela 5 - Números primos encontrados	62

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO

Neste capítulo, fazemos uma breve apresentação do tema do trabalho, seus objetivos, a metodologia utilizada na sua construção e a organização dos demais capítulos.

O ensino da Matemática tem exigido cada vez mais a utilização de metodologias capazes de instigar os educandos do Ensino Básico. Para promover a aprendizagem significativa, o educador, além de ter o domínio da turma e conhecer o conteúdo a ser ministrado, precisa utilizar recursos didáticos que despertem a atenção dos alunos e esclareçam eventuais dúvidas sobre a importância dos temas estudados.

Na Educação de Jovens e Adultos (EJA) as dificuldades de aprendizagem são ainda maiores. Os educadores encontram turmas com acentuados déficits de aprendizagem que provocam a evasão de muitos alunos ao longo do ano letivo. Para diminuir as deficiências do ensino de Matemática na EJA, o uso da História da Matemática, com enfoque na resolução de problemas históricos, de acordo com D'Ambrósio (2007), é um recurso capaz de motivar os alunos e contextualizar determinados conteúdos.

Nessa perspectiva, o presente trabalho tem por objetivo geral ressaltar a importância dos problemas históricos para aprendizagem significativa da Matemática na EJA.

Perseguiremos este objetivo geral através dos seguintes objetivos específicos:

- Apresentar as especificidades da EJA como modalidade de ensino;
- Evidenciar a importância da História da Matemática para o Ensino de Matemática;
- Conhecer a história dos principais personagens da História da Matemática e
- Apresentar atividades relacionadas à História da Matemática.

Acreditamos que a apresentação dos conteúdos a partir de uma situação-problema relacionada a uma antiga civilização pode proporcionar-lhe a sensação de descoberta e o despertar da abstração inerentes ao estudo da Matemática.

Desta forma, compreendemos que a História da Matemática pode ser um importante recurso didático para o educador de EJA que procura novas metodologias para enriquecer suas aulas.

Para a realização deste trabalho, utilizamos a pesquisa bibliográfica como ferramenta. Acreditamos que o estudo da obra de grandes teóricos fornece uma base sólida para os argumentos expostos nas soluções dos problemas que pretendemos resolver.

O uso da pesquisa bibliográfica permite “ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (GIL, 2008, p. 50). E, por se tratar de um estudo histórico, esta metodologia tornou-se indispensável para o nosso trabalho.

Sendo assim, entre as principais obras que embasam este trabalho, destacam-se MIGUEL e MIORIM, 2004; D’AMBRÓSIO, 2008; EVES, 2011; BOYER, 1974; e ROQUE e CARVALHO, 2012.

Quanto à organização da obra, além deste capítulo, elaboramos outros três que tratam das especificidades da EJA, da História da Matemática e das atividades didáticas que podem ser aplicadas nessa modalidade de ensino.

O segundo capítulo foi dedicado a uma breve história da EJA no Brasil e os desafios que os educadores encontram para utilizar a História da Matemática em suas aulas. Estes desafios são superados quando conhecemos as especificidades da EJA e as motivações embasadas por obras de importantes estudiosos da área de Educação.

No terceiro capítulo apresentamos um resumo sobre as principais civilizações e os grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Acreditamos que o conhecimento dos fatos históricos contribui para o enriquecimento das aulas e dar segurança ao educador para fazer uso da História da Matemática como recurso didático-pedagógico durante suas aulas.

O quarto e último capítulo é dedicado a uma lista de atividades que podem ser utilizadas nas aulas de Matemática dos ciclos III (6º e 7º anos do Ensino Fundamental) e IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) da EJA. A metodologia utilizada na apresentação das atividades consiste em aulas expositivas sobre a história de cada problema proposto, leitura de textos sobre a vida de grandes matemáticos, debates e atividades lúdicas relacionadas ao tema, como a utilização de objetos previamente construídos pelo professor e pelos alunos.

As atividades propostas estão relacionadas com os personagens citados no terceiro capítulo. Além disso, são atividades que, em sua maioria, foram aplicadas pelo autor ao longo de 10 anos atuando como professor da EJA.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos a Educação de Jovens e Adultos (EJA) como modalidade de ensino, uma breve história, características e as principais dificuldades enfrentadas pelos professores de Matemática que atuam nesta modalidade.

Também ressaltamos a importância do estudo da História da Matemática como recurso didático, bem como argumentos favoráveis e contrários à utilização desse recurso em sala de aula.

2.1 A EJA COMO MODALIDADE DE ENSINO

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade de ensino da educação básica “destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida” (BRASIL, 1996).

Nesta modalidade de ensino, os anos de estudos são divididos em ciclos, geralmente, dependendo de cada sistema de ensino, cada ciclo corresponde à duas séries do ensino regular, o que remete à sua origem como supletivo.

SEGMENTOS	CICLOS	ANOS	NÍVEIS
1º Segmento	I	1º, 2º e 3º	Ensino Fundamental
	II	4º e 5º	
2º Segmento	III	6º e 7º	
	IV	8º e 9º	
3º Segmento	V	1º e 2º	Ensino Médio
	VI	3º	

Tabela 1 - Ciclos da EJA

O ensino é ofertado predominantemente no turno da noite para garantir àqueles estudantes que trabalham durante o dia “as condições de acesso e permanência na escola” (BRASIL, 1996).

Os alunos da EJA, geralmente, costumam ser mais disciplinados que os estudantes do ensino regular e demonstram mais interesse pelas aulas. No entanto, os docentes que atuam nessa modalidade de ensino necessitam de uma formação continuada específica para que saibam utilizar metodologias diferenciadas e não incorrer no erro de “infantilizar” o processo de ensino na EJA, pois, apesar dos conteúdos serem idênticos aos do ensino regular, as estratégias de apresentação não devem ser as mesmas.

A EJA apresenta uma série de dificuldades para os profissionais que atuam nesta modalidade de ensino, dentre elas destacamos: a evasão escolar, as turmas heterogêneas e o déficit de aprendizagem dos alunos. Estas dificuldades são compreendidas quando analisamos fatos importantes de sua história, por exemplo: as transformações que sofreu ao longo do tempo e os esforços para torná-la uma modalidade oficial de ensino.

2.1.1 Breve história da Educação de Adultos no Brasil.

A história da educação de adultos no Brasil inicia-se com a chegada dos jesuítas, os quais buscavam catequizar e alfabetizar na língua portuguesa alguns indígenas que viviam na colônia (STRELHOW, 2010, p. 51).

Sob a responsabilidade do Império, a educação de adultos não teve a atenção devida, pois era voltada para a classe dominante. O que fez com que as populações negra e indígena continuassem sem acesso à educação. (STRELHOW, 2010, p. 51).

Após a Proclamação da República, para conter os altos níveis do analfabetismo, que estavam por volta de 72% da população (MANFREDI, 1981, p. 26 apud STRELHOW, 2010, p. 52), o governo aderiu ao programa europeu de alfabetização denominado Escola Nova, o qual dava ênfase ao ensino seriado, agrupava os alunos de acordo com a idade e priorizava o ensino focado em atividades lúdicas.

Baseada nas concepções de Jonh Dewey³, a Escola Nova no Brasil teve como grande entusiasta o escritor e jurista Anísio Teixeira, que “entendia a escola como

³ (1859 - 1952) Filósofo e pedagogo norte-americano.

chamada a inserir na sociedade indivíduos aptos a agir segundo os princípios da própria liberdade e da responsabilidade diante do coletivo” (SANTOS, PRESTES e VALE, 2006, p. 135).

Nas décadas de 40 e 50, a educação de jovens e adultos começou a ganhar importância devido à pressão da Organização das Nações Unidas (ONU) para que países tidos como “atrasados” aumentassem os investimentos em educação. Diversas campanhas de alfabetização foram criadas. Dentre essas campanhas, destaca-se a Campanha de Educação de Adolescentes e Adultos (CEAA) de 1947. Grandes teóricos realizaram vários trabalhos na área de EJA. Dentre esses teóricos, destaca-se Paulo Freire e sua pedagogia com ênfase no desenvolvimento do pensamento crítico dos educandos.

A pedagogia freiriana surgiu como um contraponto às concepções do ensino tradicional. Como destaca Aranha (2009): “o método Paulo Freire pretende superar a dicotomia entre teoria e prática: no processo, quando o homem descobre que sua prática supõe um saber, conclui que conhecer é interferir na realidade, de certa forma”.

Com o início do Regime Militar, em 1964, a educação de adultos passou a ter um caráter tecnicista, voltada apenas para o mercado de trabalho. Nesse período foi criado o Movimento Brasileiro de Alfabetização (MOBRAL), caracterizado pelo baixo nível de aprendizagem e alfabetizadores sem experiência em pedagogia.

Com a promulgação da Constituição de 1988, o direito à educação é estendido a todos que não possuem escolaridade básica. A EJA passou a ser tratada com a mesma importância que o ensino regular. Em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394, reafirmou o direito dos jovens e adultos ao ensino básico e, em 2000, com a Resolução nº 1 do Conselho Nacional de Educação/Câmara Nacional de Educação (CNE/CNB), a EJA foi constituída como modalidade de ensino e foram estabelecidas suas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN).

As DCN da EJA contemplam a prestação de exames supletivos de conclusão do Ensino Fundamental, para pessoas com idade a partir de 15 anos, e do Ensino Médio, para pessoas com idade a partir dos 18 anos. Atualmente, este exame é conhecido como ENCCEJA (Exame Nacional para Certificação de Competências da Educação de Jovens e Adultos).

2.1.2 Dificuldades no Ensino de Matemática na EJA

O ensino de Matemática atualmente enfrenta barreiras difíceis de serem superadas. Dentre elas, podemos citar: a desmotivação dos alunos, a formação inadequada de professores e a falta de recursos didáticos. Essas dificuldades são potencializadas quando olhamos para a EJA.

Apesar dos professores se identificarem com a modalidade, é necessário que eles possuam uma formação que considere “as especificidades relativas à formação do educador da EJA” (VENTURA, 2012, p. 72). Com a formação específica, serão capazes de promover atividades que despertam o interesse dos educandos da EJA pela Matemática.

Uma característica dos alunos da EJA é a baixa autoestima em relação aos estudos, principalmente à disciplina de Matemática. Os anos longe da escola ou de repetência de séries provocam neles um sentimento negativo em relação ao aprendizado. Por isso, devemos considerar suas experiências de vida, suas profissões ou algo de seu cotidiano para balizar nosso trabalho enquanto educadores. Pois, “nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo” (FREIRE, 1996, p. 15).

A escassez de recursos didáticos contribui para o empobrecimento das aulas de Matemática. Os livros didáticos da EJA configuram-se como um resumo dos livros adotados no ensino regular, são carentes de conteúdos contextualizados. Além disso, poucas obras estão de acordo com as Diretrizes Curriculares que afirmam que “não se pode ‘infantilizar’ a EJA no que se refere a métodos, conteúdos e processos” (BRASIL, 2000).

Além da heterogeneidade, as turmas de EJA, possuem, de maneira geral, poucos alunos assíduos, o que inviabiliza a execução plena do plano de ensino e a realização de todas as avaliações. Por isso, os professores de Matemática precisam adotar metodologias que despertem o interesse dos alunos. Neste sentido, a História da Matemática pode ser uma aliada, uma vez que apresenta aos estudantes a importância do estudo da Matemática.

2.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesta seção, apresentamos justificativas para a utilização da História da Matemática como recurso didático no ensino de Matemática, as estratégias e os desafios que os educadores enfrentam para abordar este tema em sala de aula.

2.2.1 Motivação para estudar a História da Matemática

Estudar a História da Matemática torna a aprendizagem mais significativa⁴, uma vez que desperta o interesse dos educandos para os assuntos que estão sendo ministrados. É uma prática tão importante para os alunos quanto para os professores, pois, segundo D'Ambrósio (2007, p. 400):

O estudo de história ajuda os futuros professores a entenderem o seguinte: a evolução da matemática como processo sociocultural de construção humana; o processo construtivista como a ação humana que leva à aprendizagem; a semelhança entre o processo histórico e a aprendizagem das crianças; a álgebra como processo geométrico e a importância da geometria na fundamentação matemática; os problemas motivadores para a construção da matemática e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da matemática; a compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna; e a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas.

É através da história que os estudantes compreendem como surgiram os conteúdos que fazem parte do currículo escolar. Os PCN afirmam que “em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns ‘porquês’” (BRASIL, 1997).

A História da matemática se configura como um importante recurso pedagógico para se inserir a leitura nas aulas de Matemática, pois, permite que os educadores proponham debates, seminários ou peças teatrais sobre grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Todavia, Fossa (2008) ressalta

⁴ “Aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito” (MOREIRA, CABALLERO e RODRÍGUEZ, 1997, p. 1).

que é preciso usar corretamente a História da Matemática para motivar os alunos, que o seu uso inadequado consiste apenas numa espécie de recreação durante as aulas. Para não desperdiçar este recurso, precisamos utilizar metodologias eficientes que despertam o interesse dos alunos ao mesmo tempo que facilitam a aprendizagem. Por isso, faz-se necessário um estudo de como a História da Matemática é utilizada pelos professores em sala de aula.

2.2.2 A História na Educação Matemática

Segundo Miguel e Miorim (2004), desde a década de 80, pesquisadores têm realizado estudos sobre a utilização da história no ensino de Matemática. Entre muitos educadores, o tema ainda enfrenta resistência devido à ausência deste conteúdo em sua formação.

Estudos comprovam que professores que utilizam a história em suas aulas são capazes de propor atividades dinâmicas que se aproximam da realidade de seus alunos, uma vez que:

A história pode também propiciar ao professor uma reflexão sobre a beleza existente no ato da criação matemática levando-o a entender a dimensão estética da matemática em um outro sentido mais fundamental, fazendo com que a educação matemática venha a contribuir para a obtenção daquilo que a nosso ver, deveria constituir o propósito mais revolucionário da educação contemporânea: o cultivo da imaginação. A partir dessa reflexão, os professores de matemática poderiam buscar situações nas quais os alunos dos ensinos fundamental e médio fossem estimulados a criar matemática. (MIGUEL e BRITO, 2010, p. 10).

Muitos autores, como Antônio Miguel e Arlete de Jesus Brito, concordam com o fato de que a História da Matemática cumpre o papel de desmistificar o ensino de matemática. Cabe ao educador se desprender de metodologias tradicionais e buscar novas formas de contextualizar os conteúdos, pois “professores que têm uma perspectiva histórica da evolução da matemática como processo de construção humana, são capazes de utilizar a experiência e a realidade cultural dos seus alunos para escolher problemas motivadores e contextuais”. (D’Ambrósio, 2007, p. 401)

Desta forma, a História da Matemática possibilita que os conteúdos sejam apresentados de acordo com as necessidades dos povos, sua cultura e sua evolução.

Se consolida como “um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas” (D’ Ambrósio, 2008, p. 29).

As pesquisas no campo da Educação Matemática nas últimas décadas têm mostrado um esforço para adequar o processo de ensino e aprendizagem às necessidades dos alunos. Particularmente, na EJA, estes esforços caminham no sentido de “humanizar” o ensino da Matemática, ou seja, buscar estratégias para tornar a aprendizagem mais significativa para os educandos, como afirma Fonseca (2002, p. 54):

Torna-se cada vez mais evidente a necessidade de contextualizar o conhecimento matemático a ser transmitido ou construído, não apenas inserindo-o numa situação-problema, ou numa abordagem dita “concreta”, mas buscando suas origens, acompanhando sua evolução, explicitando sua finalidade ou o seu papel na interpretação e na transformação da realidade com a qual o aluno se depara e/ou de suas formas de vê-la e participar dela.

A experiência mostra que as atividades lúdicas contribuem para uma aprendizagem significativa. Dentre essas atividades, destacamos o ensino da história, pois, de acordo com os PCN, “a História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática” (BRASIL, 1997).

Cabe, portanto, ao educador fazer a ponte entre os conhecimentos históricos e os componentes do currículo atual. Como afirma Vianna (2001, p. 226):

As relações entre a História da Matemática e a Educação Matemática podem ser muitas. Acho importante sublinhar, entretanto, que sejam quais forem as relações que colocarmos em destaque, estão elas próprias imersas em uma historicidade, são as relações que somos capazes de ver, são as relações que desejamos instituir... e, desse modo, a história não apenas nos remete ao passado, mas nos coloca uma perspectiva de futuro!

Quando propomos um problema resolvido no passado por uma civilização antiga, estamos fazendo uma relação entre a matemática daquela época e a que é ensinada atualmente nas escolas. De acordo com Miguel e Miorim (2004, p. 48):

Podemos considerar a utilização de problemas históricos como mais um elemento motivador para o ensino de Matemática. Realmente, a busca de esquemas motivadores para as aulas de Matemática, via utilização da história, tem se deslocado mais recentemente de um plano no qual eles são entendidos de forma meramente externa ao conteúdo do ensino, para outro em que essa motivação aparece vinculada e produzida no ato cognitivo da solução de um problema.

Por isso, acreditamos que a História da Matemática é um importante recurso pedagógico, capaz de envolver professores e alunos em situações-problema que possibilitam a recriação de saberes matemáticos através da leitura e do lúdico.

CAPÍTULO 3

IMPORTANTES PERSONAGENS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos as contribuições que algumas civilizações antigas deram à Matemática, bem como as contribuições de grandes matemáticos para o desenvolvimento dessa ciência.

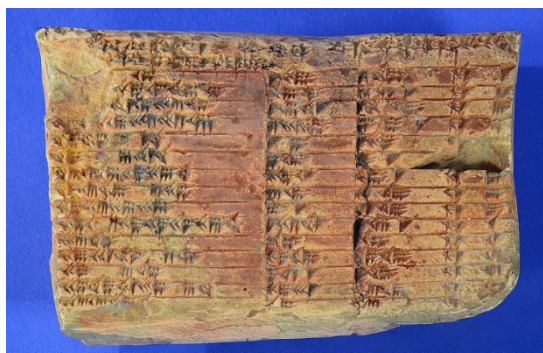
3.1 A MATEMÁTICA DESENVOLVIDA PELOS BABILÔNIOS

Localizada entre os rios Tigres e Eufrates, a antiga Babilônia figura na História da Matemática como uma das regiões onde houve grandes avanços nas áreas de Aritmética, Geometria e Álgebra.

Com uma escrita e um sistema de numeração próprios, os babilônios registravam suas descobertas em tabletes de argila que atestam o conhecimento que possuíam em diversas áreas. Segundo Eves (2011), 400 tabletes contendo problemas matemáticos foram identificados e incorporados aos acervos de diversos museus e universidades pelo mundo.

Dentre esses tabletes, destacamos o *Plimpton 322* (Figura 1), que atualmente encontra-se na *Columbia University*, Nova Iorque. Escrito entre 1900 e 1600 a.C., este tablete traz evidências de que os babilônios conheciam as propriedades do que viriam a se chamar, posteriormente, “ternos pitagóricos⁵” (EVES, 2011, p. 66).

Figura 1 – Tablete Plimpton 322



Fonte: <https://blogs.osc-ib.com/wp-content/uploads/2018/12/Plimpton-322.jpg> (2019)

⁵ Terno de números inteiros que podem representar as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Os tabletas dos babilônios revelaram conhecimentos avançados para época no que diz respeito à resolução de equações do 2º grau. No entanto, de acordo com Roque e Carvalho (2012), a história dos procedimentos utilizados por esses povos pode variar de acordo com a tradução realizada pelos historiadores. Neste trabalho, apresentaremos um método de resolução de equações quadráticas atribuído aos babilônios, conhecido como “Método de completar Quadrados”.

3.1.1 O método de Completar Quadrados dos Babilônios

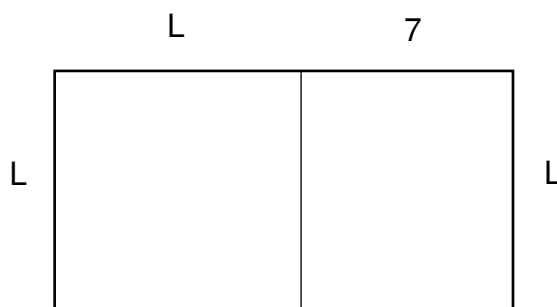
O tablete *YBC 6967*, escrito por volta de 1500 a.C, pertencente à coleção da *Yale University*, segundo Rosa e Orey (2013), traz o seguinte problema⁶: “O comprimento de um retângulo excede a sua largura em sete unidades. A área do retângulo é de 60 unidades quadradas. Determine o comprimento e a largura do retângulo”.

De acordo com Rosa (2008) apud Rosa e Orey (2013), a solução pelo método babilônico pode ser obtida seguindo as etapas:

1) Representação geométrica do problema:

Seja L a largura do retângulo.

Figura 2 - Ilustração da Etapa 1

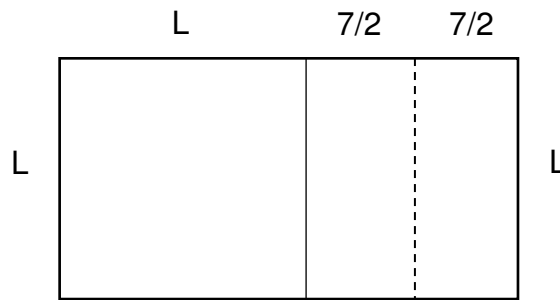


Fonte: O autor (2019)

2) Dividimos o retângulo de lados 7 e L ao meio:

⁶ Adaptado ao sistema decimal, uma vez que os babilônios utilizavam o sistema de base 60.

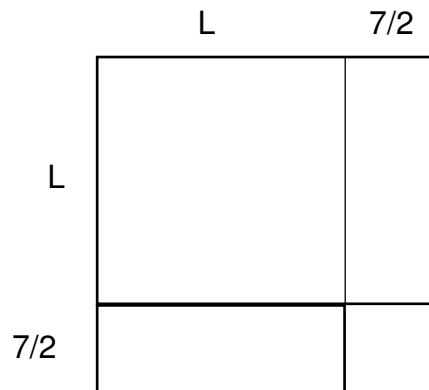
Figura 3 - Ilustração da Etapa 2



Fonte: O autor (2019)

3) Move-se uma metade do retângulo de lados 7 e L para baixo do quadrado:

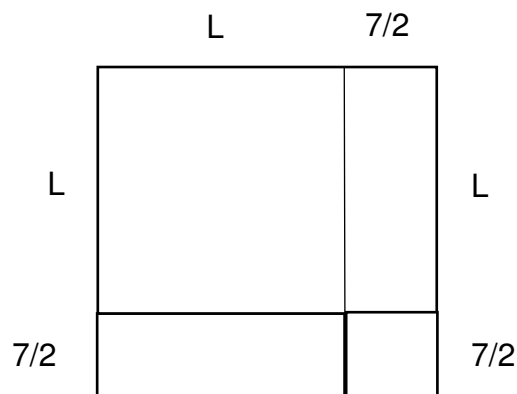
Figura 4 - Ilustração da Etapa 3



Fonte: O autor (2019)

4) Completamos o quadrado de lado $L + 7/2$, adicionando um quadrado de lado $7/2$:

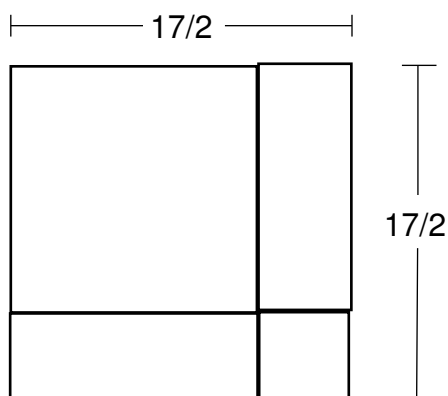
Figura 5 - Ilustração da Etapa 4



Fonte: O autor (2019)

5) Adicionamos 60 a $49/4$: $60+49/4 = 289/4$. Assim, obtemos $17/2$ como lado do quadrado maior:

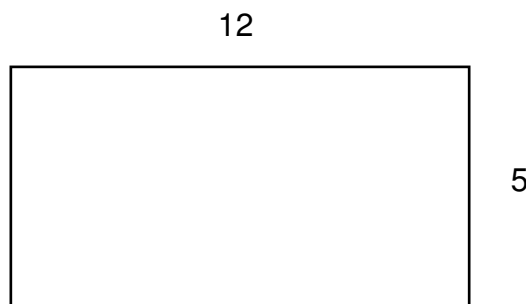
Figura 6 - Ilustração da Etapa 5



Fonte: O autor (2019)

6) Como $L + 7/2 = 17/2$, concluímos que $L = 17/2 - 7/2 = 5$ unidades e, conseqüentemente, o comprimento do retângulo é 12 unidades:

Figura 7 - Ilustração da Etapa 6



Fonte: O autor (2019)

3.2 A MATEMÁTICA NO ANTIGO EGITO

A matemática desenvolvida no antigo Egito pode ser um tema instigante para os estudantes, que, muitas vezes, não têm ideia de quando foram criados os conteúdos que estudam na escola. Muitos se surpreendem ao saber que a grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2600 a.C. De acordo com Eves (2011), a estrutura dessa pirâmide cobre uma área aproximada de 52611 m^2 , contém 2 milhões de blocos de pedras, com, em média, 2,5t cada uma e tem, aproximadamente, 146 m

de altura. Diante da grandeza desses números, podemos imaginar quanto conhecimento matemático os sábios egípcios detinham para erguer tal monumento.

Figura 8 – A Grande Pirâmide



Fonte: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2010/03/piramide-de-queops.jpg> (2019)

A antiga civilização egípcia se destacou em várias áreas da Matemática. Dentre os principais avanços, podemos citar: o sistema de numeração próprio, os métodos de cálculo de área, o sistema de unidades de medidas, as frações unitárias e o método de efetuar multiplicações e divisões.

Alguns dos problemas que atestam tais conhecimentos foram identificados no *Papiro de Rhind* (ou Ahmes). Datado de 1650 a.C., escrito pelo escriba Ahmes, foi adquirido em 1858 pelo egiptólogo escocês Alexander Henry Rhind (EVES, 2011, p. 70). Atualmente, este papiro faz parte do acervo do *British Museum*.

3.2.1 A Multiplicação Egípcia

Os egípcios utilizavam um método de multiplicação baseado na duplicação de um número. Após “tomar” uma vez o número, eles o multiplicavam sucessivamente por 2 até obter o dobro imediatamente menor que a quantidade que queriam.

Por exemplo, para multiplicar 11 por 13, os egípcios procediam da seguinte forma:

Segundo eles, equivale a “tomar” 13 vezes o número 11.

Passo 1: tomando 1 vez 11, temos 11

Passo 2: tomando 2 vezes 11, temos 22

Passo 3: tomando 4 vezes 11, temos 44

Passo 4: tomando 8 vezes 11, temos 88

Não duplicamos mais uma vez porque 16 é maior que 13.

Em seguida, selecionamos os passos de forma que a soma dos multiplicadores dê 13: $8 + 4 + 1$.

Somamos as duplicações correspondentes a esses passos: $88 + 44 + 11 = 143$.

Concluimos que $13 \times 11 = 143$.

Podemos justificar a eficácia deste método observando que o número 13 foi decomposto em potências de 2:

$$13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$$

E, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$11 \cdot (2^0 + 2^2 + 2^3) = 11 \cdot 2^0 + 11 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2^3 = 11 + 44 + 88 = 143$$

De acordo com Roque e Carvalho (2012), este método fazia distinção entre multiplicando e multiplicador, mas isto não significa que os egípcios não conheçam a propriedade comutativa⁷ da multiplicação.

3.3 A MATEMÁTICA NA GRÉCIA ANTIGA

A Grécia antiga é considerada por muitos autores como o berço da Matemática moderna. Percebemos uma transição da matemática centrada em algoritmos, praticada pelos babilônios e egípcios, para “a matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações” (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 50).

⁷ Dados os naturais a e b , temos que $a \cdot b = b \cdot a$.

Entre os séculos VII e V a.C., grupos de estudiosos que se dedicavam às diferentes áreas do conhecimento, entre elas a Filosofia, começaram a se interessar pelo estudo dos padrões numéricos e geométricos. O conhecimento matemático passava a ser visto e organizado de forma racional e menos intuitiva.

3.3.1 Tales de Mileto

Considerado por alguns autores como o pai da geometria demonstrativa, Tales foi um importante filósofo, matemático e astrônomo nascido na cidade de Mileto. Está associado, segundo Eves (2011), às primeiras descobertas matemáticas. Entre elas: “ângulos opostos são iguais” e “os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais” (EVES, 2011, p. 95).

Apesar de muitos autores atribuírem grandes feitos a Tales de Mileto, Roque e Carvalho (2012) alertam que dificilmente podemos comprovar a veracidade dessas afirmações, uma vez que a descrição dos eventos históricos foi feita séculos depois. Por exemplo: não há evidências que comprovam que Tales teria calculado a altura de uma pirâmide utilizando a sombra de uma estaca fincada no solo.

O famoso “Teorema de Tales”, sobre retas paralelas e transversais, na verdade, era conhecido na Grécia Antiga como “teorema dos segmentos proporcionais”. “A primeira publicação de que se tem notícia e que substitui o nome de ‘teorema dos segmentos proporcionais’ pelo ‘Teorema de Tales’ é o livro francês *Éléments de géométrie* de Rouche e Comberousse (reedição de 1883)” (BONGIOVANNI, 2007, p. 99).

O Teorema de Tales: “*Um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais determina, sobre as transversais, segmentos proporcionais*”, é base para vários conteúdos de geometria plana, como a teoria da semelhança e, também, a base para a introdução das razões trigonométricas.

Segundo Bongiovanni (2007), a primeira demonstração conhecida desse teorema aparece no Livro VI dos *Elementos* de Euclides. Uma demonstração desse teorema, adaptada de Rodrigues (1989) e apresentada no apêndice A, considera os casos de segmentos comensuráveis e incommensuráveis. Esta demonstração

raramente é encontrada nos livros de Matemática do Ensino Médio e, nos livros da EJA, dificilmente é mencionada.

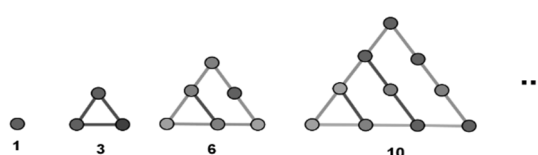
3.3.2 Pitágoras de Samos

Um dos matemáticos mais famosos da Grécia antiga, Pitágoras teria nascido por volta do século VI a.C., na ilha de Samos. Segundo Eves (2011), o que sabemos sobre a história de Pitágoras é devido ao *Sumário Eudemiano*⁸, escrito pelo filósofo grego Proclo Lício (séc. V d.C.).

De acordo com Eves (2011), Pitágoras fundou em Crotona, Itália, a conhecida escola pitagórica, a qual parecia uma irmandade unida por rituais secretos, onde seus integrantes se reuniam para estudar filosofia, matemática e ciências naturais. Irmandade que, mesmo após a morte de seu fundador, perdurou por dois séculos.

A matemática desenvolvida por Pitágoras era centrada nos números, porém não continha registros de demonstrações, era essencialmente indutiva. Um dos alicerces para sua teoria eram os *números figurados*, que representam a quantidade de pontos, não geométricos, que formam triângulos, quadrados, pentágonos, entre outras figuras.

Figura 9 - Números Triangulares



Fonte: O autor (2019)

Além dos números figurados, é atribuída a Pitágoras a criação dos números *amigáveis*, *perfeitos*, *abundantes* e *deficientes* (EVES, 2011, p. 99), cujas definições são:

- Dois números são amigáveis, se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios (divisores menores que o número) do outro. Por exemplo: 220 e 284,

⁸ “Consiste nas páginas de abertura do *Comentários sobre Euclides, Livro I*” (EVES, 2011, p. 97), baseado no trabalho sobre a Geometria grega, escrito pelo filósofo Eudemo de Rodas (séc. IV a.C.).

pois os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55 e 110, cuja soma é 284. E os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, cuja soma é 220.

- Um número é perfeito se é igual à soma dos seus divisores próprios. Por exemplo: 6, que tem 1, 2 e 3 como divisores próprios, cuja soma é 6.
- Um número é abundante se é maior que a soma de seus divisores próprios. Por exemplo: 15 que tem 1, 2, 3 e 5 como divisores próprios, cuja soma é 11.
- Um número é deficiente se é menor que a soma de seus divisores próprios. Por exemplo: 12 que tem 1, 2, 3, 4 e 6 como divisores próprios, cuja soma é 16.

O Teorema: *“O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”*, conhecido por *“Teorema de Pitágoras”*, para os pitagóricos, segundo Roque e Carvalho (2012), não estava relacionado às figuras geométricas e, também, não há evidências de que eles o tenham demonstrado. Acredita-se que Pitágoras tenha encontrado as *“triplas pitagóricas”* a partir do estudo dos números figurados (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 56).

Apesar de levantar dúvidas sobre seu autor, este teorema é, sem dúvida, o que possui o maior número de demonstrações conhecidas. Vários matemáticos famosos, e até ex-presidente⁹, propuseram demonstrações para o Teorema de Pitágoras. No Apêndice B, apresentamos uma demonstração desse teorema proposta pelo matemático persa Thabit Ibn Qurra.

3.3.3 Arquimedes de Siracusa

Considerado por alguns autores como o maior matemático da antiguidade, Arquimedes nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C. Além das diversas contribuições para a Matemática, Arquimedes também era físico, inventor e astrônomo.

Entre os célebres tratados escritos nos campos da Aritmética e Geometria, de acordo com Eves (2011), historiadores romanos relatam algumas histórias pitorescas sobre o gênio, por exemplo: sair nu pelas ruas gritando *“Eureka, eureka!”* (Eu Achei,

⁹ Ex-presidente americano James Garfield (1831-1881).

eu achei!), ao descobrir um método para determinar a quantidade de ouro e prata na coroa do rei Hierão¹⁰, onde, para tal feito, utilizou seu famoso “*princípio hidrostático*”. Há também histórias que teria construído catapultas e espelhos gigantes, entre outras armas, para destruir navios de reinos inimigos. Também atribuem a ele a frase: “Dê-me uma alavanca que eu moverei a Terra”, referindo-se a seus estudos sobre alavancas e sistemas de roldanas e polias.

Ao rejeitar o modelo Heliocêntrico do universo, proposto por Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), Arquimedes fez estimativas sobre os tamanhos da Terra, da Lua e do Sol, “se gabava de poder escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo” (BOYER, 1974, p. 91).

Apesar de ter nascido mais ou menos na década em que Euclides morreu, de acordo com Roque e Carvalho (2012), Arquimedes não pode ser considerado sucessor dele, uma vez que utilizava métodos mecânicos de construção em seus tratados. “Arquimedes exprimiria uma tradição alternativa aos *Elementos* de Euclides¹¹, ligada aos métodos desenvolvidos por Eudoxo¹².” (KNORR, 1978 apud ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 104).

A razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, o famoso número pi (representado pela letra grega π ¹³), tem intrigado vários estudiosos desde os primórdios da matemática. Muitos matemáticos procuraram entender a natureza desse número e buscaram aproximações para ele.

Arquimedes chegou à melhor aproximação para π desde os antigos babilônios. Para isso, utilizou as médias harmônica e geométrica dos perímetros de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência. Começando com um hexágono regular e, em seguida, dobrando o número de lados até chegar ao polígono de 96 lados, Arquimedes concluiu que π estaria entre $3 \frac{10}{71}$ e $3 \frac{10}{70}$ (BOYER, 1974, p. 93).

¹⁰ Rei Hierão II de Siracusa (308 - 215 a.C.)

¹¹ Euclides de Alexandria (c. 300 a.C), autor da obra *Os Elementos*, coletânea de 13 livros que reúne os maiores trabalhos matemáticos da Grécia Antiga.

¹² Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C), matemático, astrônomo e filósofo grego.

¹³ 16ª letra do alfabeto grego. Associada à razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência pelo matemático suíço Leonard Euler (1776 - 1873).

Esta aproximação para π , 3,1408..., foi superada apenas no século II d.C. por Ptolomeu¹⁴, que encontrou o valor exato até a sexta casa decimal (EVES, 2011, p. 142). Hoje em dia, sabemos que existem computadores capazes de calcular π com trilhões de casas decimais¹⁵.

3.3.4 Eratóstenes de Cirene

Matemático, astrônomo, filósofo, geógrafo, poeta, bibliotecário e atleta, Eratóstenes nasceu em Cirene, costa Sul do Mediterrâneo, atual Líbia, por volta de 276 a.C. De acordo com Eves (2011), por volta dos 40 anos, foi chamado por Ptolomeu III¹⁶ para ser tutor de seu filho e ocupar o cargo de bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria.

Eratóstenes ficou conhecido por medir a circunferência da Terra a partir da observação das sombras produzidas por raios solares nas cidades de Siene e Alexandria. Segundo Martins (2014), ele tinha conhecimento de que, no solstício de verão, o Sol, em Siene, aparecia refletido totalmente nos fundos dos poços. Então, em Alexandria, aproximadamente 800 km de distância, no exato momento em que o sol estava a pino em Siene, Eratóstenes mediu o ângulo de 7° , entre a ponta de uma vareta, cravada perpendicularmente no solo, e o limite da sombra produzida por ela. Assim, supondo que os raios solares que incidiam nas duas cidades eram paralelos, Eratóstenes calculou a circunferência da Terra como sendo de aproximadamente 50 vezes a distância entre Siene e Alexandria, ou seja, 40 000 km. Um erro, de acordo com a medida atual¹⁷, menor que 1%.

Em Aritmética, Eratóstenes inventou um método para encontrar números primos¹⁸ numa dada lista, que ficou conhecido por “crivo de Eratóstenes”. Este método consiste em retirar todos os múltiplos dos números primos de uma sequência dada.

¹⁴ Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.), matemático e astrônomo grego.

¹⁵ Fonte: < <https://super.abril.com.br/ciencia/mulher-conquista-recorde-mundial-do-calculo-mais-correto-do-valor-de-pi/> Acesso em 22/09/2019.

¹⁶ Soberano da dinastia Ptolomaica, governou o Egito entre 246 e 221 a.C.

¹⁷ 40 075 km. Fonte: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-os-gregos-calcularam-a-circunferencia-da-terra-ha-2200-anos/>. Acesso em 24/09/2019.

¹⁸ Diz-se que um inteiro maior que 1 é primo quando é divisível apenas por 1 e por ele mesmo.

Como exemplo, vamos encontrar todos os números primos compreendidos entre 1 e 50:

- Seleccionamos o 2, e, em seguida, riscamos todos os números que são múltiplos de 2, ou seja, de dois em dois.
- Seleccionamos o 3, e, em seguida, riscamos todos os números que são múltiplos de 3, ou seja, de três em três.
- Seleccionamos o 5, e, em seguida, riscamos todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, de cinco em cinco.
- Seleccionamos o 7, e, em seguida, riscamos todos os números que são múltiplos de 7, ou seja, de 7 em 7.

Após este processo, sobram os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47.

Segundo Martins (2014), para construir uma lista de números primos é suficiente seleccionarmos os números primos menores que a raiz quadrada do maior número da lista e, em seguida, retirar todos os outros múltiplos desses primos. Por exemplo, para construir uma lista de primos até 100, devemos seleccionar 2, 3, 5 e 7, retirando, em seguida, os seus múltiplos remanescentes, pois $7 < \sqrt{100} = 10$.

3.3.5 Diofanto

Reconhecido por alguns autores como o “pai da Álgebra”, pouco se sabe sobre a história de Diofanto. Segundo Eves (2011), apesar de haver evidências de que ele pode ter sido contemporâneo de Herão¹⁹, Diofanto teria nascido por volta do século III d.C. Sabe-se também que seus principais trabalhos na matemática foram desenvolvidos na cidade de Alexandria.

Na obra *Arithmetica*, composta por treze livros, boa parte dedicada à resolução de equações, Diofanto introduz uma forma de representar um valor desconhecido em um problema, designando-o como *arithme* (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 131). Razão pela qual o diferencia de outros gênios gregos sobre equações algébricas.

Outra inovação para a época na obra de Diofanto, foi a forma de resolver os problemas. Seu método raramente utilizava soluções geométricas. De acordo com

¹⁹ Matemático e inventor grego, viveu por volta do século I d.C.

Roque e Carvalho (2012), ele introduziu símbolos para representar os termos de uma equação:

ς representava a quantidade desconhecida;

Δ^Y , o quadrado da quantidade desconhecida;

K^Y , o cubo;

$\Delta^Y \Delta$, o quadrado – quadrado;

ΔK^Y , o quadrado – cubo;

$K^Y K$, o cubo – cubo.

Segundo Boyer (1974), ao utilizar algumas abreviações, a álgebra de Diofanto estaria em um estágio intermediário de desenvolvimento, diferente da álgebra “primitiva”, que utiliza apenas palavras, praticada pelos seus predecessores gregos. Porém, ainda inferior à Álgebra desenvolvida por matemáticos árabes e hindus nos séculos seguintes.

Segundo Eves (2011), 130 problemas da obra *Arithmetica* foram preservados. A maioria desses problemas tratam de equações do 1º e 2º grau com uma, duas ou três incógnitas. Diofanto considerava apenas as soluções racionais desses problemas e se contentava, às vezes, com apenas uma solução delas. Atualmente, chamamos de *equações diofantinas* as equações do 1º grau com duas variáveis, para as quais admitimos apenas as soluções positivas.

Um conhecido problema sobre a história de Diofanto é apresentado na *Antologia Grega*²⁰:

“Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar, nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai”. Com quantos anos Diofanto morreu? (EVES, 2011, p. 226).

²⁰ Coleção de problemas escrita pelo gramático grego Metrodoro (c. século VI d.C.).

3.4 A MATEMÁTICA CHINESA, HINDU E ÁRABE

Nesta seção, apresentamos, resumidamente, as contribuições que matemáticos chineses, hindus e árabes deram à Matemática.

3.4.1. A Matemática da China Antiga

A história da Matemática chinesa é marcada por imprecisões de datas e interrupções de tradições devido às mudanças de dinastias e a forma frágil como os conhecimentos eram registrados em bambu. Segundo Boyer (1974), boa parte dos conhecimentos foram transmitidos via oral para as gerações futuras.

A primeira dinastia chinesa de que se tem registro é a dinastia *Shang* (c. 1500 a.C.). Nesta época, há registros de “inscrições em ossos e carapaças de tartarugas que revelam um sistema de numeração decimal bastante próximo do sistema multiplicativo chinês-japonês tradicional.” (EVES, 2011, p.242).

Datado do período Shang, o *Chou Pei Suang Shing* é o mais antigo trabalho matemático chinês que se tem registro. De acordo com Boyer (1974), ele foi escrito por vários estudiosos e recebeu contribuições ao longo do tempo. Essencialmente, é uma obra sobre cálculos astronômicos, uso de frações e propriedades do triângulo retângulo, onde percebemos que os chineses tinham conhecimento da relação que viria a ser denominada “Teorema de Pitágoras”.

Outra obra importante escrita durante a dinastia Shang foi o *I-King* (conhecido como Livro das Permutações). Neste livro, encontram-se oito figuras, denominadas *Pa-kua*, que, de acordo com Eves (2011), poderiam ser um prenúncio de um sistema de numeração binário. É neste livro, também, que encontramos a primeira referência a um *quadrado mágico*²¹, que, segundo a lenda, foi visto pelo Imperador Yu (c. 2200 a.C.) decorando a carapaça de uma tartaruga divina (EVES, 2011, p. 268).

Para atender às necessidades da matemática chinesa, que girava em torno de cálculos, o sistema de numeração posicional chinês, utilizava barras horizontais e verticais para representar os numerais, utilizava um espaço vazio para representar o

²¹ Arranjo de números em um quadrado de tal forma que a soma de linhas, colunas e diagonais tenham o mesmo valor.

zero e “constituiu-se no sistema de numeração mais avançado do mundo de então” (EVES, 2011, p. 242).

Um dos avanços da matemática chinesa foi a ideia de representar números negativos. Apesar de não os aceitar como raízes de equações, “estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras – uma vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos” (BOYER, 1974, p. 147).

O mais importante livro da Matemática chinesa, denominado *Chui-Shang Suan Shu*, conhecido como *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, foi escrito durante a dinastia *Han* (206 a.C. – 221 d.C.) e aprimorado por diversos estudiosos ao longo do tempo. Trata-se de uma coleção de 246 problemas específicos sobre “mensuração de terras, agriculturas, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos.” (BOYER, 1974, p. 143).

Como os gregos e babilônios, os chineses também se interessaram por obter aproximações cada vez melhores para o número π . Os principais trabalhos neste sentido datam do período denominado *pós-Han* (221 – 600 d.C.), segundo Eves (2011), o matemático *Liu Hui* (c. 220 – 295 d.C.) teria encontrado a aproximação $3,1410 < \pi < 3,1427$, e, dois séculos depois, *Tsu Chu'ung-Chih* (430 – 501) e seu filho, encontraram a aproximação $\pi = 355/113$, correto até a sexta casa decimal, a qual só seria superada apenas em 1585, na Europa.

3.4.2 A Matemática Hindu

A matemática hindu antiga caracteriza-se pela utilização de métodos intuitivos e empíricos e pelas regras de cálculo desenvolvidas para aritmética, geometria e trigonometria. Apesar das imprecisões de datas e dos poucos registros históricos, podemos afirmar que os indianos foram responsáveis por grandes avanços no campo da Matemática, tais como: o desenvolvimento do sistema de numeração decimal e a utilização do zero e dos números negativos nas operações.

A primeira obra importante da matemática hindu foi a *Sulvasutras* (Regras de Cordas). De acordo com Eves (2011), trata-se de escritos religiosos que contém

regras geométricas, com referências aos ternos pitagóricos, utilizadas na construção de altares. Segundo Boyer (1974), existem três versões dessa obra, sendo que a mais importante teria sido escrita em verso pelo sacerdote Apastamba (c. séc. VI a.C.).

Quase mil anos após o surgimento dos *Sulvasutras*, por volta do século V d.C., começaram a ser escritos os *Siddhantas* (Sistemas), que consistem em tratados sobre astronomia, os quais, de acordo com Boyer (1974), sofreram influência de matemáticos gregos, como Ptolomeu²². A escrita dos *Siddhantas* marca o início das contribuições dos hindus para o desenvolvimento da Trigonometria, entre elas “a introdução da função seno”. (BOYER, 1974, p.153).

Aryabhata (476 – 550) é considerado o primeiro grande matemático da Índia. Sua obra mais famosa, *Aryabhatiya* é uma compilação de resultados anteriores, composta por “123 estrofes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculo usadas na astronomia e na matemática” (BOYER, 1974, p. 153).

Brahmagupta (598 – 668), nascido em Bhinmal, de acordo com Boyer (1974), foi o matemático hindu responsável pela utilização do zero como número e dos números negativos em cálculos e na resolução de equações quadráticas e diofantinas.

No trabalho *Brahmasphuta Siddhanta*, ele descreve a famosa regra de sinais utilizada na multiplicação e divisão de números negativos. Também é responsável por deduzir uma fórmula para calcular a área de quadrados inscritos numa circunferência.

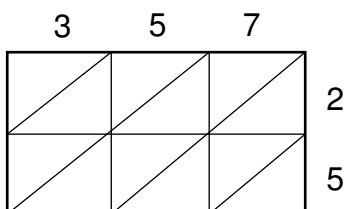
Acredita-se que o sistema de numeração hindu tenha suas bases nos sistemas babilônico e chinês. Porém, de acordo com Boyer (1974), os hindus foram responsáveis pela unificação dos princípios básicos desse sistema: base decimal, notação posicional e cifras para cada numeral. Tal feito contribuiu para a criação do sistema de numeração que utilizamos atualmente.

Com um sistema decimal eficiente para realização de cálculos, os hindus desenvolveram algoritmos para realizar cálculos semelhantes ao que utilizamos hoje em dia. Vejamos o exemplo da multiplicação, chamada de multiplicação em *gelosia*:
efetuar a multiplicação de 357 por 25.

²² Cláudio Ptolomeu (90 – 168 d.C.), astrônomo e matemático grego.

- Desenhamos um retângulo; o dividimos conforme a figura abaixo e colocamos o multiplicando acima e o multiplicador do lado direito.

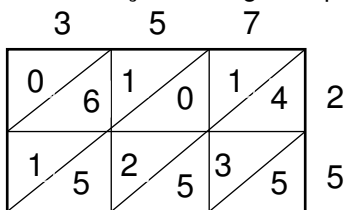
Figura 10 – Ilustração do primeiro passo



Fonte: O autor (2019)

- Multiplicamos cada dígito das colunas pelos dígitos das linhas.

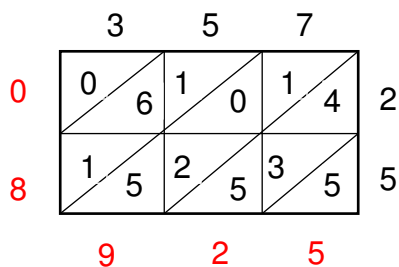
Figura 11 – Ilustração do segundo passo



Fonte: O autor (2019)

- Somando os números de cada diagonal, teremos o produto escrito da esquerda para a direita.

Figura 12 – Ilustração do terceiro passo



Fonte: O autor (2019)

Portanto, o produto é 8925.

Os hindus também foram responsáveis por grandes avanços no campo da Álgebra. Além de Brahmagupta, podemos destacar o matemático e astrônomo

Bhaskara II (1114 – 1185 d.C.), também conhecido como Bhaskara Acharya. Em *Vija-Ganita*, Bhaskara descreve vários problemas sobre equações lineares e quadráticas. Além de introduzir, segundo Boyer (1974), a ideia de que o quociente entre um número diferente de zero por zero é infinito.

Apesar de toda genialidade de Bhaskara, ele não foi responsável pela criação da regra que deu origem à conhecida fórmula resolutiva de equações quadráticas, como vemos em alguns livros de autores brasileiros. Segundo Pedroso (2010), o próprio Bhaskara afirmava que essa regra foi desenvolvida pelo matemático e filósofo hindu *Sridhara* (870 – 930 d.C.).

3.4.3 A Matemática Árabe

Diferentemente de outras civilizações citadas neste trabalho, a matemática árabe não teve grandes destaques antes da era comum. Os primeiros relatos de desenvolvimento da matemática árabe surgiram no século VIII depois da era comum. Estes destaques se deram a partir de traduções das obras de matemáticos gregos e hindus para o árabe, o que, segundo Eves (2011), teve um papel fundamental na preservação e divulgação dos saberes desses povos para as gerações futuras.

Ainda de acordo com Eves (2011), os numerais hindus foram introduzidos na matemática árabe por volta do ano 766 através da tradução da obra de Brahmagupta. Iniciava-se o desenvolvimento do sistema de numeração que utilizamos atualmente.

O auge das traduções de obras gregas para o árabe ocorreu durante o califado de Al-Mamum (786 – 833), quando foram concluídas as traduções dos *Elementos*, de Euclides, e do *Almagesto*, de Ptolomeu. Segundo Boyer (1974), Al-Mamum estabeleceu em Bagdá uma “*Casa da Sabedoria*”, que consistia em um centro educacional onde vários intelectuais se reuniam para estudar e traduzir textos de civilizações antigas de diversas áreas do conhecimento.

Entre os intelectuais que trabalhavam na *Casa da Sabedoria* estava o astrônomo e matemático persa Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (780 – 850). Considerado o mais famoso matemático da “Idade de ouro do Islã”, Al-Khwarizmi “escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus que exerceram enorme influência na Europa quando foram traduzidos para o latim no século XII”

(EVES, 2011, p. 261). Também é devido a Al-Khwarizmi a origem das palavras álgebra, a partir de sua obra *Hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, algoritmo e algarismo, derivadas de seu nome a partir de traduções para o latim.

Poucos matemáticos árabes se destacaram por trabalhos originais. Boa parte das obras árabes que chegaram até nós derivam dos trabalhos de matemáticos de outras civilizações. Porém, podemos destacar as contribuições dos matemáticos Thabit ibn Qurra (826 – 901), que descobriu uma fórmula para determinação de números amigáveis e Omar Khayyam (1050 – 1122), que criou um método geométrico para resolver equações cúbicas.

Mencionada nos trabalhos de Al-Khwarizmi e outros matemáticos árabes, a “Prova dos Nove” é um método utilizado para verificar se uma adição, subtração, multiplicação ou divisão está correta.

Baseada nos critérios de divisibilidade e na decomposição decimal de um número, a Prova dos Nove consiste em verificar se os termos de uma operação, deixam o mesmo resto quando divididos por nove.

Na adição, aplicamos a Prova dos Nove da seguinte forma:

- Somamos todos os algarismos das parcelas, sucessivamente, até obter como resultado um número entre 1 e 9. Por exemplo: se as parcelas são 35 e 49, somamos $3+5+4+9 = 21$ e depois, $2+1 = 3$.
- Analogamente, somamos os algarismos do total. Se o resultado for igual a 3, a prova nos diz que a operação está correta. Por exemplo: se o total é 84, temos que $8+4 = 12$ e depois, $1+2 = 3$.

Um fator que pode ter contribuído para o abandono desta regra nas escolas é o fato dela funcionar também para alguns resultados incorretos. Por exemplo: $64 + 55 = 92$. A soma sucessiva dos algarismos das parcelas é 2 e a do total também, porém sabemos que o resultado correto é 119.

3.5 A MATEMÁTICA DA EUROPA NA IDADE MÉDIA

Nesta seção, apresentamos a história de Alcuíno de York e Leonardo de Pisa, matemáticos europeus que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática no período da Idade Média (476 – 1453 d.C.).

3.5.1 Alcuíno de York

Após a queda do Império Romano, 476 d.C., a Europa entrou em um período de poucas produções científicas e culturais. A eclosão de conflitos entre diversos reinos foi um dos fatores que contribuíram para escassez de trabalhos científicos. Porém, foi possível manter alguma atividade científica, visto que “os monges dos mosteiros católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino” (EVES, 2011, p. 289).

Nascido em 735 no condado York, capital do reino da Nortúmbria, o monge beneditino Alcuíno de York foi um dos responsáveis pela preservação da cultura do Ocidente no século XIII. Segundo Eves (2011), Alcuíno escreveu muitos trabalhos sobre matemática, inclusive uma coleção de problemas que influenciou muitos autores de textos escolares nos séculos seguintes.

De acordo com Lopes (2017), Alcuíno foi convidado pelo rei dos Francos, Carlos Magno (747 – 814), para liderar uma reforma no sistema educacional da época. Desenvolveu um programa de alfabetização baseado no *Trivium* (Gramática, Retórica e Dialética) e no *Quadrivium* (Aritmética, Geometria, Astronomia e Música), que consistem nas sete artes liberais difundidas pelos pitagóricos.

Sua obra mais conhecida, *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (Proposições para provocar os jovens), consiste em uma compilação formada por 53 problemas de matemática e lógica. É considerada o “mais antigo texto de matemática recreativa escrito em latim” (LOPES, 2017, p. 74).

Entre os problemas que se destacam em *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, o mais conhecido é a proposição do lobo, da cabra e do repolho: “Um lobo, uma cabra e um repolho devem ser transportados para a outra margem de um rio num barco que

só aguenta um deles além do barqueiro. Como se deve fazer para que o lobo não coma a cabra, nem a cabra coma o repolho?” (EVES, 2011, p. 314).

A solução deste problema pode ser obtida através de vários métodos, como tentativa e erro, mas é importante ressaltar que ele leva o estudante a pensar em todas as possibilidades de travessia e o induz a usar o raciocínio lógico para chegar à resposta. Tais características de resolução de problemas são estudadas em Análise Combinatória.

3.5.2 Leonardo de Pisa

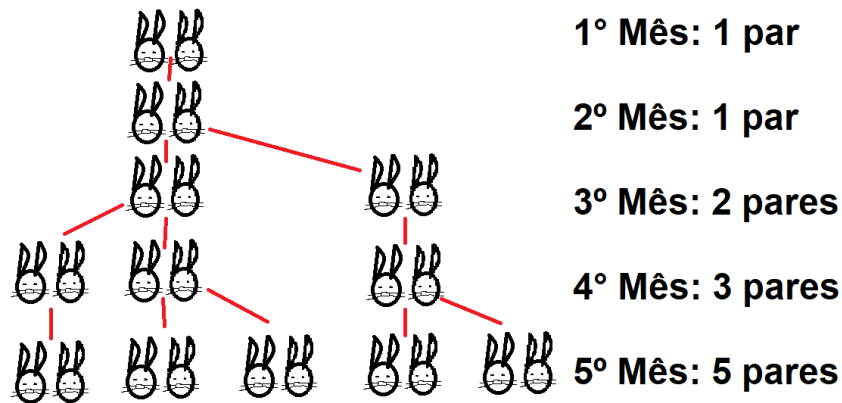
Leonardo de Pisa (1175 – 1240), mais conhecido como Fibonacci (que significa filho de Bonacci), foi um grande matemático italiano que apresentou ao continente europeu avanços obtidos por hindus e árabes nos campos da álgebra e aritmética.

Segundo Roque e Carvalho (2012), Fibonacci era filho de um comerciante e teria feito viagens como seu pai a países do norte da África, onde teria entrado em contato com a Matemática árabe. Ele teria percebido a vantagem do sistema de numeração arábico em relação ao sistema romano para a realização das operações básicas.

Escrita por volta de 1202, a obra mais famosa de Fibonacci é o *Liber Abaci* (Livro do Ábaco). De acordo com Eves (2011), nos 15 capítulos dessa obra, Fibonacci apresenta uma farta coleção de problemas, explica a leitura e a escrita dos numerais indo-arábicos, apresenta métodos de cálculos com frações unitárias, cálculos de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas. Porém, “o *Liber Abaci* é conhecido pela defesa da notação indo-árabica e do sistema posicional” (ROQUE e CARVALHO, 2011, p. 151).

Entre os problemas presentes no *Liber Abaci*, o mais interessante e reproduzido por diversos autores é o seguinte: “*Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?*” (EVES, 2011, p. 315). Uma possível solução é:

Figura 13 – Ilustração do Problema dos coelhos



Fonte: O autor (2019)

Percebemos que a partir do terceiro mês, a quantidade de pares é resultado da soma das duas antecessoras. Assim, deduzimos a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 e 144. Assim, concluímos que a resposta é 144 pares.

Este problema, quando estendemos a quantidade de meses até o infinito dá origem à famosa “Sequência de Fibonacci”: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., x, y, x + y, ..., onde x e y são inteiros positivos.

Uma propriedade importante desta sequência é que se calcularmos a razão entre termos consecutivos tão grandes quanto quisermos, o quociente se aproxima do número irracional conhecido como *número de ouro*²³, cujo valor é $\phi = 1,6180339\dots$:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{5}{3} = 1,66 \dots; \quad \frac{8}{5} = 1,6; \dots; \quad \frac{6765}{4181} = 1,6180339 \dots$$

²³ Também conhecido como *Secção Áurea*. Número obtido através da divisão de um segmento em *extrema e média razão*, isto é, onde a razão entre o comprimento total e a maior parte é igual à razão entre a maior e a menor parte.

CAPÍTULO 4

ATIVIDADES DIDÁTICAS SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos 13 atividades destinadas ao ensino de Matemática na EJA, com base nas recomendações das DCN desta modalidade. Os problemas contidos nas atividades são contextualizados e podem ser resolvidos utilizando-se diferentes estratégias.

O objetivo geral das atividades é despertar nos estudantes o interesse pelo estudo da Matemática através da resolução de problemas históricos.

Na resolução de alguns problemas, seguimos um roteiro baseado no trabalho de Araújo (2007), o qual cita os conhecimentos prévios dos alunos e as possíveis estratégias que eles podem utilizar.

4.1 RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU PELO MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS.

Esta atividade destina-se aos alunos do Ciclo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e tem por objetivo apresentar um novo método de resolução de equações baseado em construções geométricas.

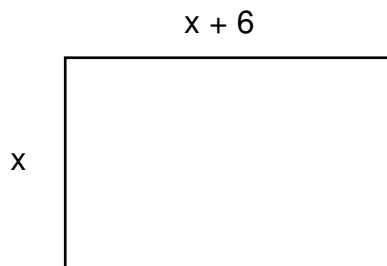
Esta atividade tem a duração de 3 aulas de 40 minutos cada.

Na primeira aula, o professor pode fazer uma exposição, utilizando o *datashow*, sobre a história dos babilônios e seu método de resolver equações quadráticas.

Na segunda aula, o professor deve entregar folhas de papel A4 com o seguinte problema:

Calcule as dimensões do retângulo abaixo, sabendo que sua área é 55 m².

Figura 14 – Problema adaptado



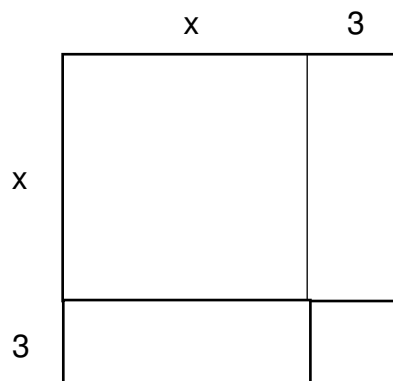
Fonte: O autor (2019)

Para resolver este problema pelo método de Completar Quadrados, os alunos devem conhecer o método para calcular a área de um retângulo, ter noções de multiplicação e fatoração de polinômios, conhecer o princípio aditivo das equações e saber calcular raiz quadrada.

Uma possível solução:

Pelo método dos babilônios (descrito na Seção 3.1.1), os alunos devem considerar a figura abaixo com área equivalente a área do retângulo dado.

Figura 15 – Completando o quadrado



Fonte: O autor (2019)

Em seguida, para completar o quadrado, devem adicionar 3^2 (que representa a área do quadrado de lado 3m) a ambos os lados da equação $x^2 + 6x = 55$, a qual representa a área do retângulo citado no problema:

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

O que resulta, utilizando fatoração, em:

$$(x + 3)^2 = 64$$

E, extraindo a raiz em ambos os lados, temos:

$$x + 3 = 8$$

O que nos diz que o valor de x é 5 e as dimensões do retângulo são 5m e 11m.

É importante frisar que, por se tratar de um problema que envolve área, deve-se considerar apenas a raiz positiva da equação.

Os alunos também podem utilizar uma segunda estratégia para encontrar a solução deste problema, utilizando o fato de que a área do retângulo é o produto de suas dimensões e o método de tentativa e erro (ou de tentativas aleatórias):

$$\text{Para } x = 6: \quad 6 \cdot (6 + 6) = 55$$

$$6 \cdot 12 = 55$$

$$72 = 55 \text{ (Falso)}$$

$$\text{Para } x = 5: \quad 5 \cdot (5 + 6) = 55$$

$$6 \cdot 11 = 55$$

$$55 = 55 \text{ (Verdadeiro)}$$

Para esta estratégia, é importante que o professor oriente seus alunos acerca das limitações do método de tentativas, principalmente se as tentativas se derem exclusivamente com números inteiros.

Na terceira aula, o professor pode promover um debate com seus alunos sobre o método mais eficiente para resolver equações do 2º grau e deve propor a resolução de outras equações semelhantes.

4.2 CALCULANDO A ALTURA DA PIRÂMIDE

Esta atividade é destinada a estudantes do Ciclo IV e seu objetivo principal é aplicar o Teorema de Tales em situações diversas.

A atividade tem a duração de 2 aulas de 40 minutos.

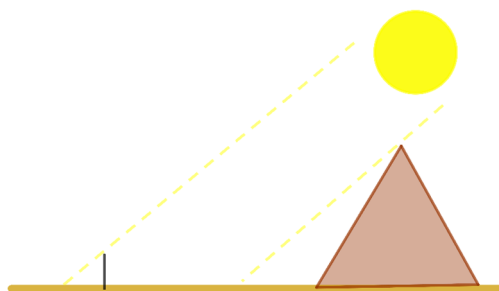
Na primeira aula, o professor entrega a seus estudantes um texto sobre a história de Tales de Mileto e o teorema que é atribuído a ele. Em seguida, pode

promover um debate sobre a importância do Teorema de Tales e como ele pode ser utilizado para medir alturas inacessíveis. Também pode propor aos estudantes que elaborem situações-problemas sobre esse tema.

Na segunda aula, o professor deve entregar aos estudantes folhas de papel A4 com o seguinte problema:

Uma pirâmide regular de base quadrada, 230m x 230m, projeta uma sombra de 65m. No mesmo instante, próximo a essa pirâmide, uma estaca fincada no chão tem 1,6m de altura e projeta uma sombra de 2m. Calcule a altura da pirâmide.

Figura 16 - Ilustração do problema da Pirâmide



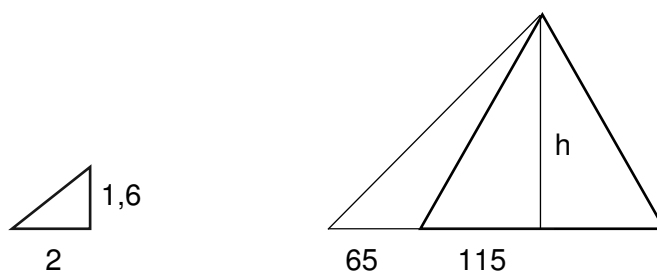
Fonte: O autor (2019)

Para resolver este problema, os alunos devem, além de conhecer o Teorema de Tales, conhecer a propriedade fundamental das proporções.

Uma possível solução:

Os alunos devem considerar que os raios de sol são paralelos, considerar que as sombras estão na mesma direção e observar as seguintes representações:

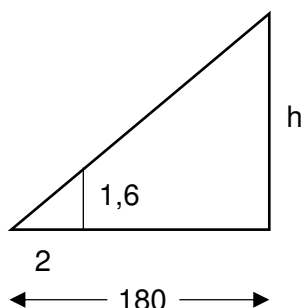
Figura 17 - Representação dos triângulos semelhantes



Fonte: O autor (2019)

A partir daí, podem verificar que, como os ângulos que os raios solares fazem com o solo são congruentes, podemos inscrever o triângulo retângulo menor no triângulo maior:

Figura 18 - Triângulos sobrepostos



Fonte: O autor (2019)

Assim, como a estaca e a altura da pirâmide formam segmentos paralelos, pelo “Teorema de Tales”, temos:

$$\frac{2}{1,6} = \frac{180}{h}$$

E, utilizando a propriedade fundamental das proporções:

$$2h = 288$$

$$h = \frac{288}{2} = 144$$

E, assim, concluímos que a altura da pirâmide é de 144m.

Esta atividade abre um leque de possibilidades para trabalharmos semelhança de figuras com os estudantes da EJA, como veremos a seguir.

4.3 HOMOTETIA²⁴ E O TEOREMA DE TALES

Esta atividade destina-se aos alunos do Ciclo IV da EJA, seu objetivo é perceber a relação entre triângulos semelhantes e o Teorema de Tales.

²⁴ “Chama-se homotetia de centro O e razão k (k real diferente de zero) a uma transformação do plano em si mesmo que associa a cada ponto P do plano um ponto P' do plano tal que $OP' = k.OP$ ” (BONGIOVANNI, 2007, p. 101).

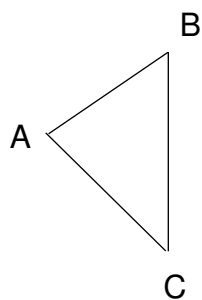
Esta atividade tem a duração de 2 aulas de 40 minutos e necessita dos seguintes recursos: papel A4, régua, lápis grafite e compasso.

Na primeira aula, o professor deve apresentar, utilizando a lousa, o método para se construir figuras semelhantes utilizando Homotetia e fazer uma explanação sobre a relação entre as figuras obtidas e o teorema de Tales.

Na segunda aula, deve propor aos alunos o seguinte problema:

Construa um triângulo semelhante ao triângulo ABC abaixo, cuja razão de semelhança seja 1:2.

Figura 19 – Triângulo ABC



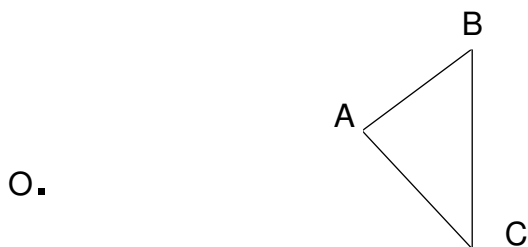
Fonte: O autor (2019)

Para encontrar a solução deste problema, os alunos devem ter conhecimentos básicos sobre construção com régua e compasso.

Os estudantes devem ser orientados a seguir os seguintes passos:

1º Passo: Marcar o ponto O (centro de homotetia), à esquerda do triângulo:

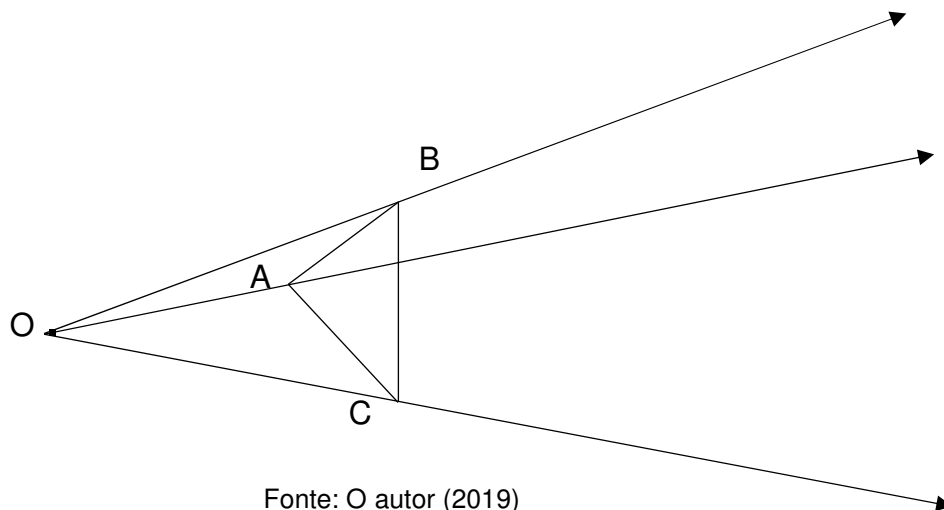
Figura 20 – Triângulo e Centro de homotetia



Fonte: O autor (2019)

2º Passo: Traçar as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} .

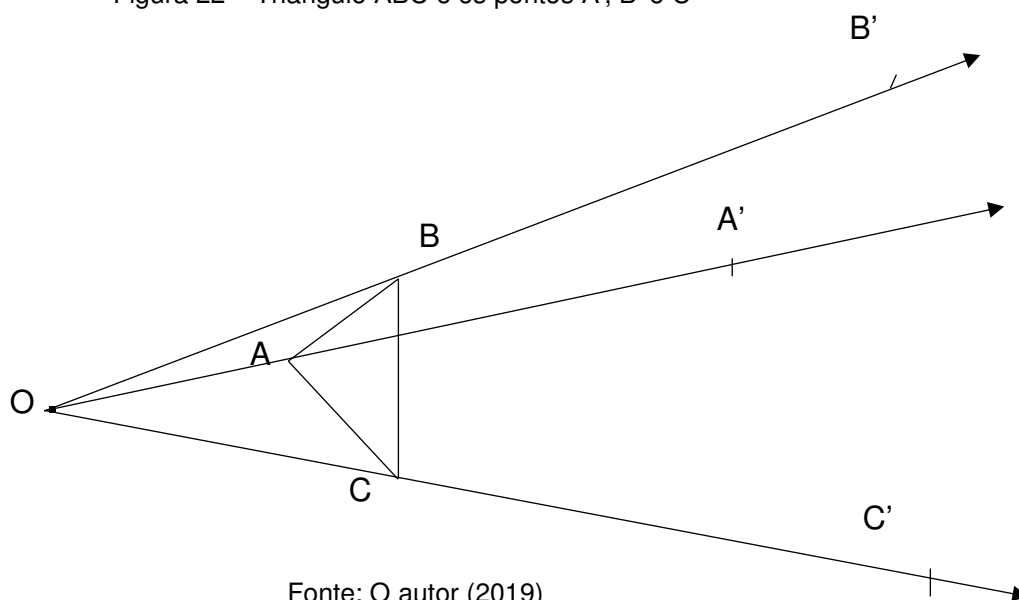
Figura 21 – Triângulo ABC e as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC}



Fonte: O autor (2019)

3º Passo: Marcar, com o auxílio do compasso, os pontos A' , B' e C' , tais que $m(\overline{AA'}) = 2 \cdot m(\overline{OA})$, $m(\overline{BB'}) = 2 \cdot m(\overline{OB})$ e $m(\overline{CC'}) = 2 \cdot m(\overline{OC})$.

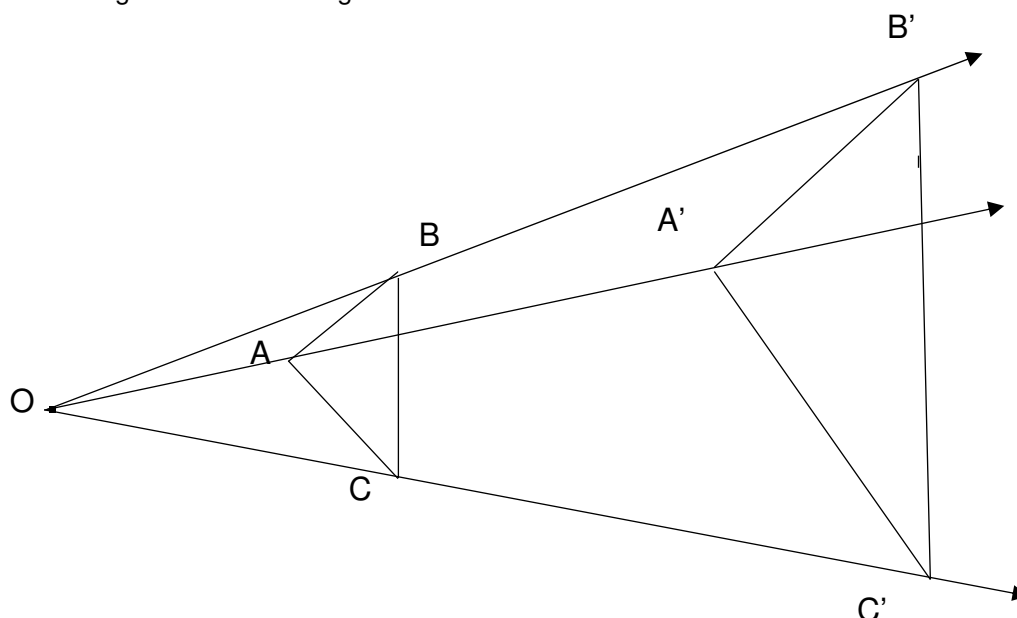
Figura 22 – Triângulo ABC e os pontos A' , B' e C'



Fonte: O autor (2019)

4º Passo: Traçar os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$ e $\overline{B'C'}$.

Figura 23 – Os Triângulos semelhantes ABC e A'B'C'



Fonte: O autor (2019)

Após a construção do triângulo $A'B'C'$, os alunos podem verificar que os lados correspondentes dos triângulos estão na razão de 1 : 2. E, assim, perceber que esses lados são paralelos e que a transformação que utilizaram tem relação com o Teorema de Tales quando olham para os lados correspondentes dos triângulos e as semirretas que passam por suas extremidades.

4.4 OS NÚMEROS FIGURADOS

Esta atividade é recomendada para os alunos do Ciclo III (6º e 7º anos do Ensino Fundamental) e tem por objetivo perceber padrões numéricos para se obter generalizações dos termos de uma sequência.

A duração desta atividade é de 3 aulas de 40 minutos.

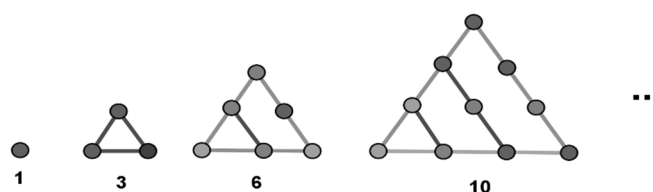
Na primeira aula, o professor deve fazer uma explanação sobre a história de Pitágoras e dos pitagóricos. Durante a aula, pode utilizar vídeos (disponíveis na internet) que falam sobre Pitágoras e debater com os alunos sobre a importância de utilizar fontes confiáveis quando se faz um estudo sobre a História da Matemática.

Na segunda aula, o professor pode fazer uma explanação sobre os números figurados e o método para encontrar o padrão que um número figurado sugere. E, em seguida, propor que os alunos resolvam o seguinte problema:

Para cada sequência de números figurados, encontre os dois próximos números pertencentes a ela.

1) Números Triangulares:

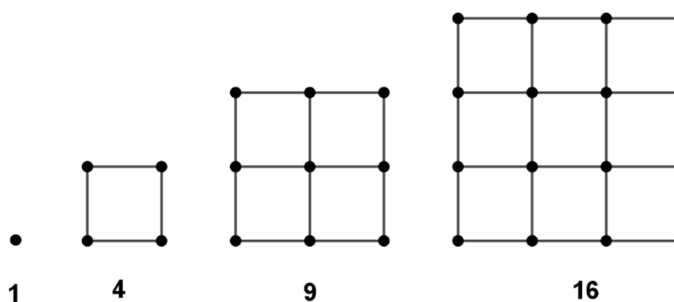
Figura 24 - Números Triangulares



Fonte: O autor (2019)

2) Números Quadrangulares:

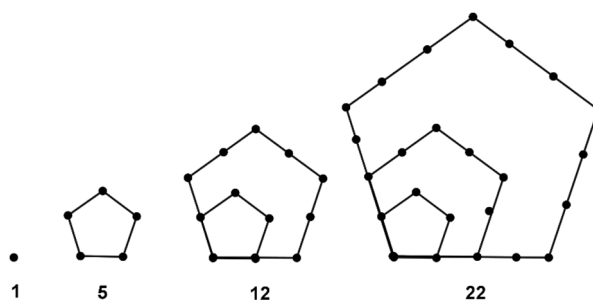
Figura 25 - Números Quadrangulares



Fonte: O autor (2019)

3) Números Pentagonais:

Figura 26 - Números Pentagonais



Fonte: O autor (2019)

Para resolver este problema, os alunos devem ser capazes de efetuar cálculos com as quatro operações básicas além de ter a capacidade de identificar um padrão numa sequência numérica.

Uma possível solução:

- Para os números triangulares, os alunos devem observar que de um número para outro está sendo adicionado 2, 3, 4, ... Assim, o quinto número deve ser $10 + 5 = 15$ e o sexto deve ser $15 + 6 = 21$.
- Para os números quadrangulares, os alunos devem observar que cada número é o quadrado de sua ordem, ou seja, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$. Assim, o quinto número será $5^2 = 25$ e o sexto será $6^2 = 36$.
- Para os números pentagonais, os alunos devem observar que de um número para outro adicionamos 4, $4 + 1 \times 3$, $4 + 2 \times 3$, $4 + 3 \times 3$ e assim por diante. Logo, o quinto será $22 + 4 + 4 \times 4 = 42$ e o sexto número será $42 + 4 + 5 \times 4 = 66$.

Na terceira aula, o professor pode promover um debate com os alunos sobre a possibilidade de se obter novos números figurados, criados por eles mesmos e, em seguida, explicar como fazer generalizações, utilizando expressões algébricas, para todos os números figurados estudados.

4.5 DEMONSTRANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Esta atividade destina-se aos estudantes do Ciclo IV e tem por objetivo oferecer uma prova do Teorema de Pitágoras de forma lúdica.

A duração desta atividade é de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve apresentar para os alunos o seguinte problema:

Quanto mede o maior lado de um triângulo retângulo cujos lados menores medem 3cm e 4cm?

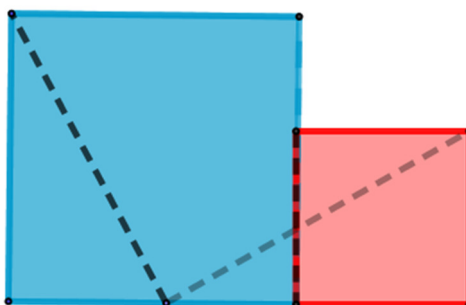
O professor deve explicar que esta questão pode ser utilizada para resolver diversos problemas que mencionam rampas, altura de árvores, comprimento de escadas, entre outros.

Após os alunos tentarem adivinhar, o professor deve explicar que existe um teorema para encontrar um lado do triângulo retângulo a partir das medidas dos outros dois. Tal teorema é conhecido como “Teorema de Pítágoras”, cujo enunciado é: “O quadrado da medida da hipotenusa (maior lado) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (os outros dois lados)”.

A demonstração desse teorema pode ser obtida a partir do seguinte desafio (onde as medidas dos catetos do triângulo retângulo correspondem às medidas dos lados dos quadrados justapostos):

Recorte os quadrados justapostos nas linhas pontilhadas e junte as partes recortadas para formar um quadrado maior.

Figura 27 – Quadrados lado a lado



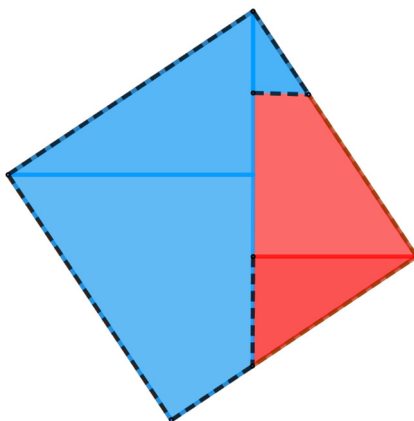
Fonte: O autor (2019)

Para concluir este desafio, não é exigido nenhum conhecimento prévio dos estudantes, uma vez que sua solução provém do método de tentativa e erro.

Com o material (quadrados²⁵ de tamanhos variados justapostos dois-a-dois) previamente preparado pelo educador e com o uso de uma tesoura, os estudantes devem tentar obter o quadrado pedido.

Após 15 minutos de tentativas, se nenhum estudante conseguir resolver o problema, o professor deve apresentar a solução e explicar como deveriam proceder para obtê-la:

Figura 28 – Solução do problema



Fonte: O autor (2019)

Na segunda aula, o professor pode resolver outros problemas com soluções inteiras e enunciar o Teorema de Pitágoras tal qual encontra-se nos livros, fazendo assim, a passagem dos casos particulares para a generalização através da linguagem algébrica.

4.6 UM VALOR APROXIMADO PARA O NÚMERO $PI (\pi)$

Esta atividade destina-se aos alunos do Ciclo IV e tem por objetivo determinar o comprimento de objetos, calcular razões entre medidas e conhecer o número π .

A duração desta atividade é de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve disponibilizar para os alunos um texto sobre a história do número π . Após a leitura e discussão do texto, o professor pode utilizar

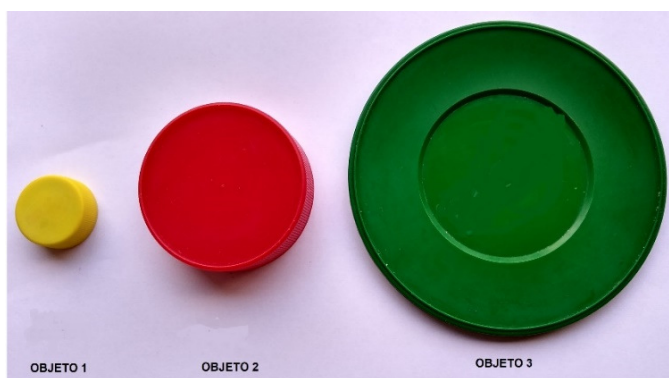
²⁵ É importante que sejam confeccionados quadrados de tamanhos variados para que os alunos percebam que a demonstração independe das medidas dos lados dos quadrados.

a lousa para dar exemplos de como obter o número π a partir de circunferências distintas e de suas medidas de comprimento e diâmetro.

Na segunda aula, deve-se distribuir para os alunos (organizados em grupos de 3) algumas tampas de tamanhos diversos, réguas e barbantes (ou fitas métricas) e calculadoras para que resolvam o seguinte problema:

Encontre um valor aproximado para π a partir das medidas do comprimento e do diâmetro das circunferências obtidas nos objetos abaixo:

Figura 29 – Objetos para aferição



Fonte: O autor (2019)

Para resolver este problema, os alunos devem saber que π é a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, além de utilizar uma calculadora para efetuar operações e calcular a média aritmética de uma sequência de dados.

Os alunos devem seguir estes passos:

1º Passo: Com o auxílio de um barbante e uma régua (ou fita métrica), medir o diâmetro e o comprimento da circunferência de cada objeto.

Figura 30 – Procedimento do 1º Passo



Fonte: O autor (2019)

2º Passo: Registrar numa tabela as medidas obtidas nos objetos.

OBJETOS	CIRCUNFERÊNCIA	DIÂMETRO	π
Objeto 1	9,5 cm	3,0 cm	
Objeto 2	21,0 cm	7,0 cm	
Objeto 3	41,3 cm	13,1 cm	

Tabela 2 - Aferições dos perímetros das circunferências e dos diâmetros

3º Passo: Calcular os quocientes entre as medidas das circunferências e dos diâmetros e registrar na tabela.

OBJETOS	CIRCUNFERÊNCIA	DIÂMETRO	π
Objeto 1	9,5 cm	3,0 cm	3,17 cm
Objeto 2	21,0 cm	6,7 cm	3,13 cm
Objeto 3	41,3 cm	13,1 cm	3,15 cm

Tabela 3 - Valores de Pi

4º Passo: Calcular a média aritmética dos valores encontrados para π .

$$\frac{3,17 + 3,13 + 3,15}{3} = 3,15$$

Com esta atividade os alunos podem encontrar, empiricamente, um valor para π com um erro menor que 1 centésimo. É importante ressaltar que a atividade depende da precisão utilizada nas aferições das medidas dos objetos. O educador

pode propor as aferições de mais objetos e, no final da atividade, calcular a média aritmética dos valores encontrados por toda a turma.

4.7 DESCOBRINDO NÚMEROS PRIMOS

Esta atividade destina-se aos alunos do ciclo III e tem por objetivo conhecer o método de Eratóstenes para encontrar números primos a partir de uma lista de números naturais.

Esta atividade tem a duração de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve apresentar um texto sobre os números primos e o crivo de Eratóstenes. Após a leitura, o professor pode promover um debate com os alunos sobre a importância dos números primos e explicar, na lousa, como podemos verificar se um número é primo ou composto.

Na segunda aula, o professor deve entregar para os alunos uma folha de papel A4 com a seguinte questão:

Encontre todos os números primos contidos na tabela abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Tabela 4 – Lista de números naturais

Para encontrar a solução deste problema, os alunos devem conhecer as definições de número primo e de múltiplo de um número natural, além de ter domínio da multiplicação e divisão de números naturais.

Uma possível solução:

Os alunos podem aplicar o método do crivo de Eratóstenes (descrito na Seção 3.3.4) para obter os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 e 67, conforme a tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Tabela 5 – Números primos encontrados

Por fim, o professor pode propor outras questões para os estudantes, por exemplo:

313 é primo?

Por quais números primos devemos dividir 313 para verificar se ele é primo?

Por que não precisamos dividir por um primo maior que 19?

4.8 RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Esta atividade é destinada aos alunos do ciclo III e tem por objetivo conhecer o método de resolução de equações do 1º grau através de um problema histórico.

A duração desta atividade é de 3 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve entregar um texto aos alunos com um resumo sobre a história de Diofanto e das equações. O texto deve explicar a forma como Diofanto resolvia equações. Em seguida, o professor pode utilizar a lousa para explicar como resolvemos equações do 1º grau com o método usual e promover um debate com os alunos sobre o método mais eficiente.

Na segunda aula, o professor deve pedir para os alunos resolverem o seguinte problema:

Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar, nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai. Com quantos anos Diofanto morreu?

Para chegar à solução, os alunos devem saber representar uma sentença através de uma expressão algébrica, saber efetuar operações com frações e com números inteiros e conhecer os procedimentos utilizados na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Uma possível solução:

Considerando x como a idade de Diofanto e interpretando os dados do problema de acordo com a linguagem algébrica, temos:

- Passou 1/6 de sua vida como criança: $\frac{1}{6}x$
- 1/12 como adolescente: $\frac{1}{12}x$
- Mais 1/7 na condição de solteiro: $\frac{1}{7}x$
- Cinco anos depois de se casar: 5
- Morreu 4 anos antes com metade da idade de seu pai: $\frac{1}{2}x + 4$.

Somando as expressões e igualando a x , temos a equação:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$$

Multiplicando ambos os membros pelo M.M.C. (6, 7, 12, 2), temos:

$$84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336$$

Simplificando:

$$84x - 75x = 756$$

$$9x = 756$$

$$x = \frac{756}{9}$$

$$x = 84$$

Uma segunda estratégia: perceber que a idade deve ser um número múltiplo de 7 e 12. O menor desses múltiplos é 84.

Na terceira aula, o professor pode propor outros problemas e pedir que os alunos elaborem um problema semelhante ao da idade de Diofanto.

4.9 COMPLETANDO QUADRADOS MÁGICOS

Esta atividade é destinada ao Ciclo III e tem por objetivo desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo através da adição de números naturais.

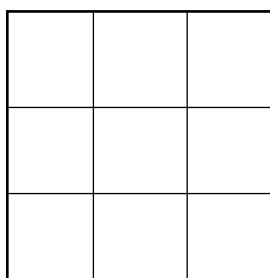
A duração desta atividade é de 1 aula de 40 minutos.

Por não exigir muitos conhecimentos prévios, basicamente a adição de números naturais, pode ser aplicada nos primeiros dias do ano letivo.

O professor deve fazer uma breve explanação sobre a origem do conhecimento matemático, citando a história da matemática chinesa e os quadrados mágicos. Quando surgirem e qual a propriedade que está relacionada a eles. Em seguida, deve entregar aos alunos uma folha de papel sulfite com o seguinte problema:

Distribua os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 no quadrado abaixo, de modo que a soma de cada linha, coluna e diagonal do quadrado seja igual a 15.

Figura 31 – Quadrado subdividido



Fonte: O autor (2019)

Após 15 minutos de tentativas, se nenhum aluno conseguir, o professor deve iniciar o processo de resolução:

- Coloque o número 5 no quadrado do centro.
- Distribua os números pares nos 4 quadrados dos cantos.

- Complete com os números ímpares de modo que a soma das linhas, colunas e diagonais seja 15.

Figura 32 – Solução do problema

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fonte: O autor (2019)

Este método de resolução, de acordo com Jean (2004) apud Santinho e Machado (2006), é baseado nas seguintes propriedades dos Quadrados Mágicos de ordem 3:

- A soma mágica (no nosso caso: 15) é o triplo do elemento mediano;
- A soma de dois elementos dos extremos de um alinhamento que passa pelo centro é igual ao dobro do elemento mediano.

Espera-se que, com a realização desta atividade, os alunos despertem o interesse por fatos curiosos da história da matemática, favorecendo futuras abordagens do tema em sala de aula.

4.10 MULTIPLICAÇÃO À MODA HINDU

Esta atividade é destinada aos alunos do Ciclo III e tem por objetivo compreender diferentes métodos de efetuar a multiplicação de dois números naturais.

A duração desta atividade é de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve entregar um texto sobre a história da matemática hindu, com suas contribuições e seus principais matemáticos. Em seguida, o professor pode promover um debate sobre o texto.

Na segunda aula, o professor deve explicar, com o auxílio da lousa, como podemos utilizar o método de multiplicação hindu. Em seguida, deve propor o seguinte problema para seus alunos:

Utilizando o método hindu, efetue a multiplicação dos números 643 e 87.

Para solucionar este problema, os alunos devem saber efetuar a multiplicação de números naturais.

Aplicando o algoritmo da multiplicação hindu (descrito na seção 3.4.2), os alunos devem chegar ao número 55941, através do seguinte esquema:

Figura 33 – Solução do problema

		6	1	4		3	1	
5		4	8	3	2	2	4	8
5		4	2	2	8	2	1	7
		9	4	1				

Fonte: O autor (2019)

No final da atividade, o professor pode fazer comparações entre o método atual e o método hindu e questionar seus alunos sobre os pontos positivos e negativos de cada método.

4.11 TIRANDO A PROVA DOS NOVE

Esta atividade destina-se aos alunos do Ciclo III e tem por objetivo conhecer os diferentes métodos de verificar o resultado de uma adição de números naturais.

A duração desta atividade é de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve fazer a leitura, juntamente com alunos, de um texto sobre a história da matemática árabe. Após a leitura, pode ser feito um debate sobre as contribuições que os árabes deram à matemática.

Na segunda aula, o professor deve explicar, utilizando a lousa, como era feito o método da “prova dos nove” para a adição e propor o seguinte problema:

Efetue a adição dos números 375 e 426 e tire a prova dos nove.

Para chegar à solução, os alunos devem saber efetuar a adição de naturais.

Seguindo o método da “*prova dos nove*” (descrito na Seção 3.4.3), os alunos procederiam da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 375 \\ + 426 \\ \hline 801 \end{array}$$

Soma sucessiva dos algarismos das parcelas: $3+7+5 + 4+2+6 = 27 \rightarrow 2+7 = 9$

Soma sucessiva dos algarismos do total: $8+0+1 = 9$.

Desta forma, os alunos podem verificar, por meio da prova dos nove, que a adição está correta.

No final da atividade, o professor pode dar exemplos de casos em que este método de verificação não é eficaz, pois “a prova dos nove acusa o erro quando o resultado de uma operação matemática está errada, porém ao aplicar a prova dos nove e ela acusar que não há erros, ainda assim, pode ser que a operação esteja errada” (LACAVA e COSTA, 2016, p. 60).

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 55 \\ \hline 92 \end{array}$$

Soma sucessiva dos algarismos das parcelas: $6+4 + 5 +5 = 20 \rightarrow 2+0 = 2$.

Soma sucessiva dos algarismos do total: $9+2 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$.

Porém, a resposta correta é 119.

Mais detalhes sobre a Prova dos Nove podem ser encontrados em Rodrigues (1989).

O educador pode pedir para os alunos criarem seus próprios exemplos, aqueles em que a prova funciona e os outros onde ela é ineficaz.

4.12 FAZENDO A TRAVESSIA

Esta atividade pode ser proposta para os alunos do ciclo III ou ciclo IV e tem por objetivo desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo através de problemas diversos.

Esta atividade tem a duração de 2 aulas de 40 minutos.

O professor inicia a primeira aula fazendo uma explanação sobre estratégias de resolução de problemas, dentre elas, tentativa e erro, mencionando a coletânea de problemas *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, de Alcuíno de York, datada do século VIII.

Em seguida, o professor deve entregar para os alunos uma folha de papel A4 com o seguinte problema:

Um lobo, uma cabra e um repolho devem ser transportados para a outra margem de um rio num barco que só aguenta um deles além do barqueiro. Como se deve fazer para que o lobo não coma a cabra, nem a cabra coma o repolho?

Para esta atividade devemos preparar previamente o seguinte material: folhas de papel A4 com um desenho de um rio e 3 retângulos de papel sulfite 7 x 5 cm cada um com um dos nomes (ou desenhos) lobo, cabra e repolho.

Figura 34 – Ilustração do problema



Fonte: O autor (2019)

Esta atividade não exige conhecimentos prévios além da habilidade de utilizar o raciocínio lógico para resolver situações-problema diversas.

Após 15 minutos de tentativas, se nenhum aluno apresentar uma resposta satisfatória, o professor deve apresentar uma solução:

Atentando para o fato de que não podemos deixar o lobo com a cabra, nem o repolho com a cabra, o barqueiro deve levar primeiro a cabra até a outra margem do rio; voltar, pegar o repolho e levar para o lado onde está a cabra; em seguida pegar a

cabra e levar para o lado onde está o lobo; pegar o lobo e levar para o lado onde está o repolho e, finalmente, voltar e pegar a cabra para levá-la até onde estão o lobo e o repolho.

Na segunda aula, o professor pode propor outros problemas semelhantes que utilizam o raciocínio lógico-matemático e admitem mais de uma solução. Como existem versões *online*²⁶ deste problema, o educador pode propor que seus alunos resolvam este desafio, desta vez, utilizando computadores, notebooks ou aparelhos celulares.

4.13 SOMANDO POTÊNCIAS

Esta atividade destina-se aos alunos dos ciclos III e IV da EJA e tem o objetivo de utilizar potências para resolver problemas diversos.

Esta atividade tem a duração de 2 aulas de 40 minutos.

Na primeira aula, o professor deve fazer a leitura, juntamente com seus alunos, de um texto sobre a história de Leonardo de Pisa (Fibonacci), falando sobre sua obra e sua importância para o desenvolvimento da matemática ocidental. Em seguida, o professor pode promover um debate com os alunos sobre a relação entre os conteúdos citados no texto com os conteúdos que estudam atualmente.

Na segunda aula, o professor deve apresentar o “Problema dos coelhos” contido no *Liber Abaci*, de Fibonacci, sua solução e a estratégia para resolver problemas semelhantes. Depois desta explanação, o professor pode pedir a seus alunos que resolvam o seguinte problema (também oriundo do *Liber Abaci*):

Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães e facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?

Para resolver este problema, os alunos devem saber efetuar as operações de multiplicação e adição.

²⁶ <<https://rachacuca.com.br/jogos/tags/travessia-de-rio/>> Acesso em fevereiro de 2020.

Utilizando a estratégia de separar os dados do problema e a multiplicação de fatores iguais, os alunos devem chegar ao seguinte resultado:

Senhoras:		7
Mulos:	$7 \times 7 =$	49
Sacos:	$7 \times 7 \times 7 =$	343
Pães:	$7 \times 7 \times 7 \times 7 =$	2401
Facas:	$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$	16807 +
Total:		19607

No final da atividade, o professor pode fazer a associação entre as multiplicações e as potências de 7, o que levaria os alunos a pensar em uma outra estratégia de resolução:

Somando as potências de 7:

$$\begin{aligned} &7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 \\ &= 7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 \\ &= 19607. \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho verificamos que a EJA é uma modalidade de ensino que necessita de metodologias diferenciadas por atender a um público que apresenta grandes dificuldades de aprendizagem. Vimos que, ao longo de sua história no país, esta modalidade de ensino passou por transformações que procuraram reduzir os elevados índices de brasileiros que não concluíram o ensino básico.

Em contrapartida, acreditamos que História da Matemática pode ser utilizada na EJA como um importante recurso didático-pedagógico para estimular o interesse dos estudantes pela Matemática.

No entanto, percebemos que para alcançar os objetivos almejados, o recurso à história exige do educador não só o conhecimento dos tópicos de História da Matemática que irá mencionar, mas também de metodologias capazes de fazer uma ponte entre os conteúdos e a realidade em que os educandos vivem.

Ao apresentar um resumo dos principais fatos históricos da Matemática, dos babilônios a Fibonacci, estamos reforçando a tese de que a formação dos professores não pode prescindir destes conhecimentos. Os mesmos, podem ser utilizados para introduzir um novo conteúdo do currículo, para contextualizar um determinado problema ou, ainda, para responder a famosa pergunta: *“Professor, quem inventou a Matemática?”*.

Por fim, ao propor uma lista de atividades relacionadas à História da Matemática para serem aplicadas na EJA, pretendemos incentivar os professores a tornar o ensino de matemática mais instigante e próximo das metodologias construtivistas. Sabemos que muitos professores de Matemática relutam em fazer uso de metodologias não-tradicionais, mas alguns estudos comprovam que, atualmente, para alcançar nossos objetivos enquanto educadores, o ensino tradicional tem se mostrado ineficiente.

Assim, acreditamos que esta obra possa ser capaz de cativar professores ou futuros professores da EJA, no sentido de buscar na História da Matemática recursos para tornar a aprendizagem dos alunos mais significativa.

REFERÊNCIAS

AOKI, V. **EJA Moderna: Educação de Jovens e Adultos: anos finais do ensino fundamental: manual do educador.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

ARANHA, M. L. D. A. **História da educação.** 2^a. ed. São Paulo: Moderna, 1996.

ARAÚJO, N. S. R. D. **A Educação de Jovens e Adultos e a Resolução de Problemas Matemáticos.** Dissertação (Dissertação em Educação Matemática) - UEM. Maringá, p. 172. 2007.

BONGIOVANNI, O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.5**, p. 94-106, 2007. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>>. Acesso em: 16 set. 2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Ed. da USP, 1974.

BRASIL. **Lei 9394:** Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: [s.n.], 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 05 set. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 04 set. 2019.

BRASIL. **Parecer CNE/CEB n. 11/2000, de 10 de maio de 2000.** Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/PCB11_2000.pdf>. Acesso em: 05 set. 2019.

D' AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da Teoria à Prática.** 16^a. ed. Campinas: Papirus, 2008.

D'AMBROSIO, B. S. REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. **Revista Brasileira de História da Matemática**, p. 399-406, 2007.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Plana, Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria**. 7. ed. São Paulo: Atual, v. 9, 1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5ª. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

FONSECA, M. D. C. F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

FOSSA, J. A. MATEMÁTICA, HISTÓRIA E COMPREENSÃO. **Universidade Federal do Rio Grande do Norte**, 02 nov. 2008. 7-15.

FREIRE, J. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008.

LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. D. A prova dos nove e o caso da “Arithmetica Primaria” de Cezar Pinheiro. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, p. 54-73, 2016. ISSN 1.

LOPES, F. J. A. AS PROPOSITIONES AD ACUENDOS JUVENES - TRADUÇÃO. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, 2017. ISSN 33.

MARTINS, M. D. C. Eratóstenes: um génio do período Helénico! **Correio dos Açores**, ago. 2014.

MIGUEL, A.; BRITO, A. D. J. Professores de Matemática: Arquivos, 01 Março 2010. Disponível em: <https://professoresdematematica.files.wordpress.com/2010/03/a_historia_da_matematica_na_formacao_do_professor_de_matematica_antonio_miguel_arlete_brito.pdf>. Acesso em: 10 Agosto 2019.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 2ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOREIRA, M. A.; CABALLERO, M. C.; RODRÍGUEZ, M. L. **Aprendizagem Significativa um conceito subjacente**. Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos: [s.n.]. 1997. p. 19-44.

PAZ, N. S. D.; SANTOS, V. M. D. C. **Teorema de Tales: demonstrações e aplicações**. Monografia (Licenciatura em Matemática) - UPE. Nazaré da Mata, p. 55. 2017.

PEDROSO, H. A. Uma Breve História da Equação do 2º Grau. **REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA**, São José do Rio Preto, v. 2, 2010.

RODRIGUES, F. W. A Prova dos Nove. **RPM - Revista do Professor de Matemática - Nº14**, Rio de Janeiro, 1989.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. D. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, M.; OREY, D. C. Etnomatemática e modelagem: a análise de um problema retórico babilônio. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 6, p. 80-103, Setembro 2013. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274030491008>>. Acesso em: 14 set. 2019.

SANTINHO, M. S.; MACHADO, R. M. Os Fascinantes Quadrados Mágicos. **UNICAMP - LEM - IMECC**, Campinas, SP, 2006. Disponível em: <<http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf>>. Acesso em: Fevereiro 2020.

SANTOS, I. D. S. F. D.; PRESTES, R. I.; VALE, A. M. D. BRASIL, 1930 - 1961: ESCOLA NOVA, LDB E DISPUTA ENTRE ESCOLA PÚBLICA E ESCOLA PRIVADA. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, p. 131-149, Jun 2006.

STRELHOW, T. B. BREVE HISTÓRIA SOBRE A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS NO BRASIL. **Revista HISTEDBR On-line**, p. 49-59, 2010. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/revista/edicoes/38/art05_38.pdf>. Acesso em: 04 Setembro 2019.

VENTURA, J. A EJA e os Desafios da Formação Docente nas Licenciaturas. **FAEEBA**, Salvador, p. 71-82, 2012.

VIANNA, C. R. **História da Matemática e Educação Matemática**. Natal, p. 222-227. 2001.

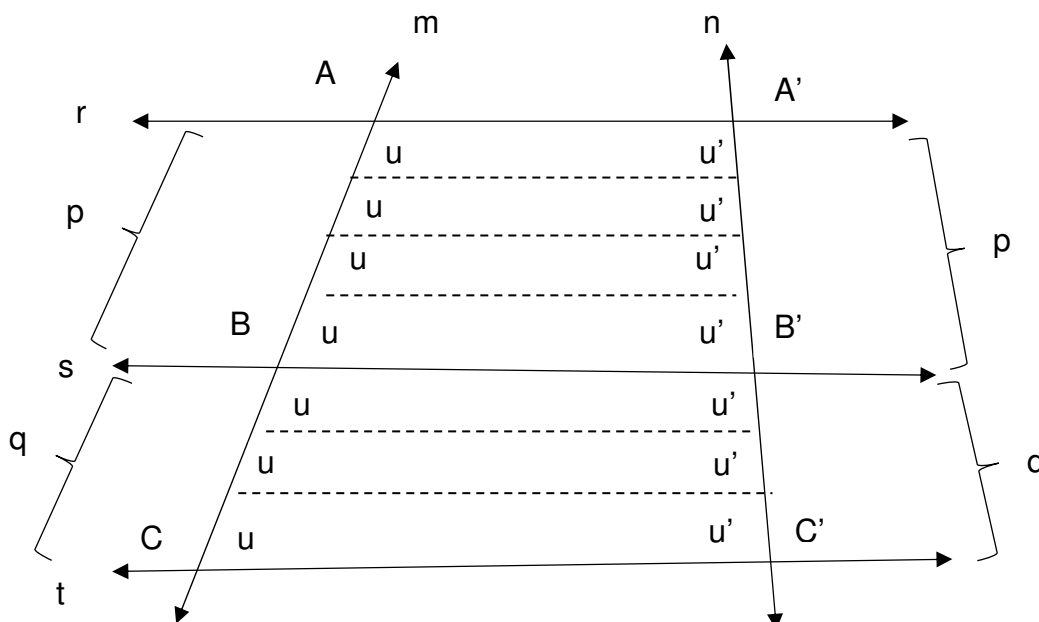
APÊNDICES

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TALES

A demonstração a seguir, de acordo com Dolce e Pompeo (1993), considera os dois casos de segmentos: comensuráveis e incomensuráveis.

1º Caso: \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis.

Figura 35 – Ilustração do 1º Caso



Fonte: O autor (2019)

Dadas as retas $r \parallel s \parallel t$ e as transversais m e n , existe um segmento u que é múltiplo de \overline{AB} e \overline{CD} .

$$\text{Portanto, } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{pu}{qu} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Considerando a propriedade²⁷: “Se duas retas são transversais de um feixe de paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento

²⁷ Para demonstração, consultar Dolce e Pompeo (1993, p. 184).

correspondente da outra transversal também é dividido em p partes e essas partes são congruentes entre si” (DOLCE e POMPEO, 1993), temos:

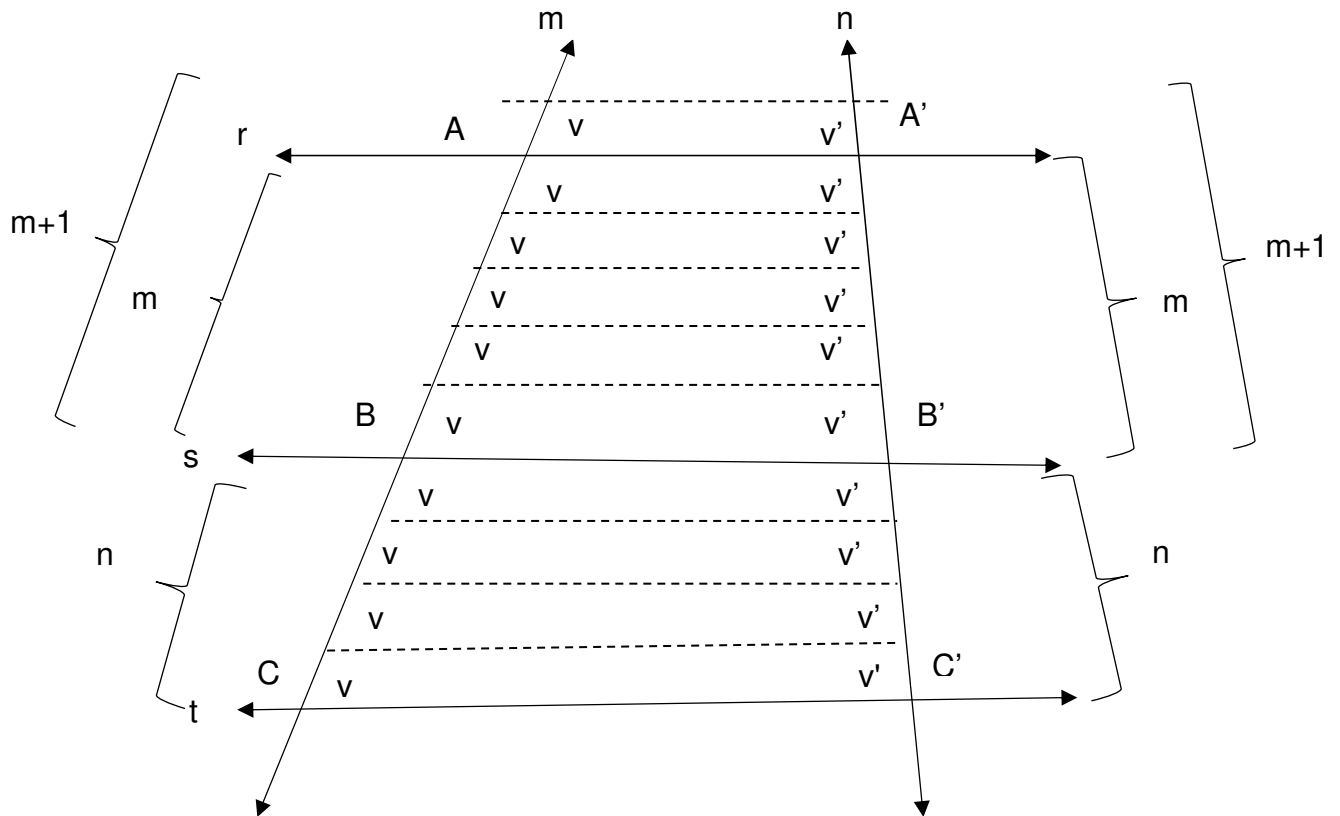
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{pu'}{qu'} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

Assim, de (1) e (2), vem: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

2º Caso: \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis.

Neste caso, não existe um segmento submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{CD} .

Figura 36 – Ilustração do 2º caso



Fonte: O autor (2019)

Tomamos um segmento v , tal que $\overline{CD} = n \cdot v$ (3), com n inteiro.

Como \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis, se dividirmos \overline{AB} em um certo número m , inteiro, de partes v , teremos:

$$m \cdot v < \overline{AB} < (m + 1) \cdot v \quad (4)$$

De (3) e (4), temos:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \quad (5)$$

Aplicando a propriedade anterior, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{C'D'} = n \cdot v' \\ m \cdot v < \overline{A'B'} < (m+1) \cdot v \end{array} \right.$$

O que nos dá:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \quad (6)$$

Como v é um submúltiplo de \overline{CD} que pode variar, se dividimos v , aumentaremos n e, nestas condições, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contínuas que definem um único número real $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, pela expressão (5), e é igual a $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$, pela expressão (6).

Portanto, como esse número é único, temos:

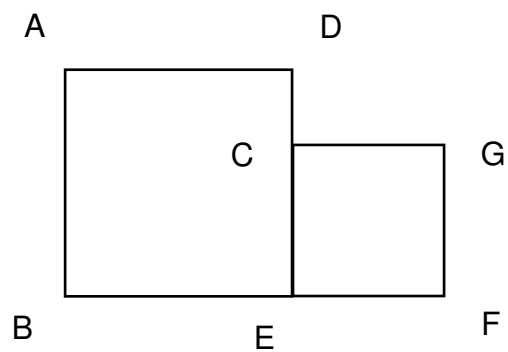
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Esta demonstração é atribuída ao matemático e astrônomo árabe Thabit Ibn Qurra (826 - 901d.C.).

Considere os quadrados de lados **ABDE** e **CEFG** justapostos:

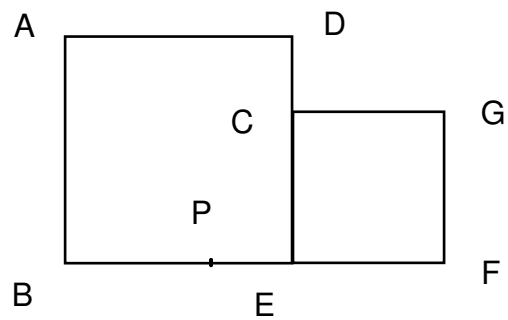
Figura 37 – Ilustração do 1º Passo



Fonte: O autor (2019)

Marca-se o ponto P sobre \overline{BE} tal que $\overline{BP} = \overline{EF}$.

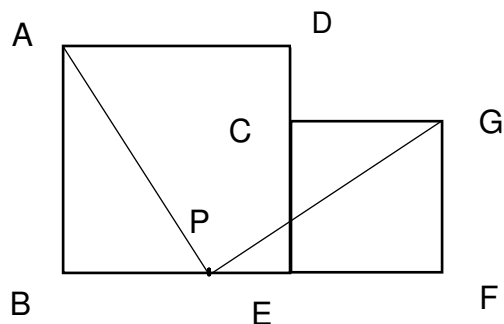
Figura 38 – Ilustração do 2º Passo



Fonte: O autor (2019)

Traça-se os segmentos \overline{AP} e \overline{GP} :

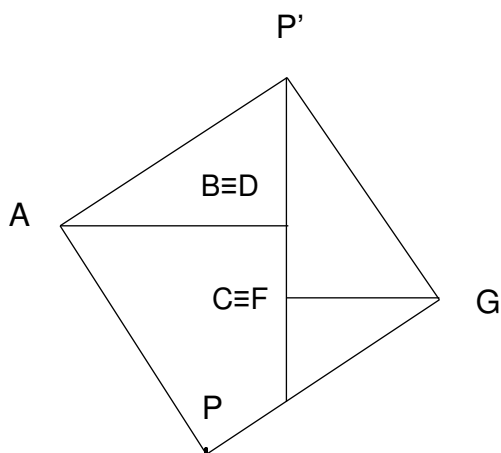
Figura 39 – Ilustração do 3º Passo



Fonte: O autor (2019)

Rotaciona-se em 90° os triângulos ABP e EFG, fazendo \overline{AB} coincidir com \overline{AD} e \overline{FG} coincidir com \overline{CG} :

Figura 40 – Ilustração do 4º Passo



Fonte: O autor (2019)

Assim, concluímos que os dois quadrados de lados \mathbf{b} e \mathbf{c} , e áreas $\mathbf{b^2}$ e $\mathbf{c^2}$, deram origem ao quadrado de lado \mathbf{a} e área $\mathbf{a^2}$, ou seja, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$. □