**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Hugo Leonardo da Silva

# Função quadrática: Investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática

Rio de Janeiro

2019

Hugo Leonardo da Silva

**Função quadrática: Investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Gabriela Santos Barbosa

Coorientadora: Prof.ª Dra Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Hugo Leonardo da.
Função quadrática: investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática / Hugo Leonardo da Silva. – 2019.
51f.. : il.

Orientadora: Gabriela Santos Barbosa.
Coorientadora: Patrícia Nunes da Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Funções (Matemática) - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Barbosa, Gabriela Santos. II. Silva, Patrícia Nunes da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.5

Patricia Bello Meijinhos - CRB/5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Hugo Leonardo da Silva

**Função quadrática: Investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Gabriela Santos Barbosa (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa.
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Pedro Carlos Pereira
Departamento de Matemática - UFRRJ

Rio de Janeiro
2019

# DEDICATÓRIA

A Deus, que é o meu refúgio e fortaleza.

Em memória de minha mãe, Tereza Cristina da Silva, que sempre dedicou sua vida para que eu e meus irmãos pudéssemos ter tempo e condições de estudo, mesmo que com muitas dificuldades.

A minha esposa, Aulinda Maria Silva de Andrade, e meu filho, Gabriel Andrade da Silva, que são os grandes responsáveis por não me deixar desistir deste trabalho, mesmo com minha ausência em diversos momentos durante essa trajetória.

A minha orientadora, Gabriela Santos Barbosa, que esteve junto comigo durante execução deste trabalho.

A minha coorientadora, Patricia Nunes da Silva, que além de auxiliar na parte histórica e teórica deste trabalho, sempre foi muito solicita nas vezes em que precisei de orientações durante todo o curso.

## AGRADECIMENTO

À professora Ana Cristina Cirillo Carvalho Siqueira que se empenhou na aplicação do teste.

A todos os professores da UERJ que ao longo dessa caminhada foram verdadeiros parceiros.

O fracasso é um quarto confortável.
O sucesso é um quarto desafiador.

*Leandro Karnal*

## RESUMO

SILVA, Hugo Leonardo da. *Função quadrática:* investigar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática. 2019. 51f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Foi elaborado um questionário para a realização de um estudo investigativo sobre os conhecimentos adquiridos em função quadrática, ou polinomial do 2º grau, por alunos do 1º ano do Ensino Médio, tendo em vista que o assunto faz parte dos conteúdos propostos nos descritores do 9º ano do Ensino Fundamental, assim como nas orientações curriculares do Ensino Médio. No questionário, que foi aplicado para 38 alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Pública Estadual Madre Tereza, situada em Realengo, zona oeste do município do Rio de Janeiro, foram abordadas questões que vão desde identificar uma função quadrática por meio de uma expressão algébrica, ou por meio de gráficos, passando pela construção de gráficos, e finalizando com a resolução de problemas contextualizados.

Os resultados obtidos sugerem que os alunos apresentam um bom conhecimento no que se refere a identificar uma função quadrática por meio de expressão algébrica, ou por meio de gráficos, porém, no que tange à construção de um gráfico, identificando seus principais elementos, e a resolução de problemas contextualizados, não adquiriu os conhecimentos necessários para desenvolver o que foi pedido.



Palavras-chave: Funções quadráticas. Conhecimentos adquiridos. Pesquisa. Função polinomial do 2º grau. Problemas contextualizados.

**ABSTRACT**

SILVA, Hugo Leonardo da. *Quadratic function*: investigate students' knowledge to deal with quadratic function issues. 2019. 51f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT ) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

A questionnaire summary to conduct na investigate study on knowledge acquired in quadrantic function by first year high school students. It was applied to thirty-light students of Madre Tereza High school, located in Realengo, West side of Rio de Janeiro. We descussed quadratic function issues, graphics and contextualized problems.

The results show that students have the necessary knowledge to identity a quadratic function, but the same does mat happen when it comes to graphics and/or a contextualized problem.

Keywords: Quadratic function. Acquired knowledge. Search. Contextualized problems.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| PDE | Plano de Desenvolvimento da Escola |
| SEED | Secretaria de Estado da Educação |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| SEEDUC | Secretaria de Estado de Educação |
| UNIRIO | Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro |
| ITA | Instituto Tecnológico de Aeronáutica |
| UFSM | Universidade Federal de Santa Maria |
| Vunesp | Vestibular da Unesp |

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

Durante o período de aluno da faculdade de licenciatura plena em matemática, na UERJ, aprendi a importância de introduzir um contexto histórico no ensino da matemática. Apresentar a matemática através das necessidades e preocupações das diferentes culturas do passado faz com que o educando se interesse mais pelo conteúdo proposto, pois dessa forma os alunos desenvolvem atitudes mais críticas e menos passivas. E o estudo de funções quadráticas, que teve sua origem nas equações de segundo grau, apresenta um vasto material histórico a ser pesquisado pelo docente, e apresentado ao educando.

Assim que conclui a licenciatura, e fui assumir turmas de ensino fundamental, tentei aplicar essa prática nas turmas que lecionava. Porém, a dificuldade em encontrar materiais produzidos, associados a falta de tempo para pesquisar, assim como o desinteresse por parte dos alunos pelo estudo, foi fazendo com que eu perdesse essa prática no meu cotidiano.

Produzir um trabalho de mestrado que tem relação com minha dissertação de graduação, através de um diagnóstico sobre um tema visto tanto no 9º ano do Ensino Fundamental como no 1º ano do Ensino Médio, e que possa contribuir com o estudo de função quadrática, fez co que eu pudesse me motiva ainda mais. Mesmo atuando como docente somente com alunos do Ensino Fundamental há mais de sete anos, tenho notado que alguns colegas de Matemática têm reclamado bastante sobre a forma como os alunos estão chegando no 1º ano do Ensino Médio. E dentre os assuntos que são trabalhados no 9º ano do Ensino Fundamental, o ensino de funções é um assunto que será amplamente visto no Ensino Médio. Em particular, o estudo das funções quadráticas, que além da matemática, tem o uso desse conhecimento em outras áreas da ciência, como a física, por exemplo.

Este trabalho tem o objetivo de diagnosticar os conhecimentos que alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, da zona oeste do município do Rio de Janeiro, apresentam para lidar com questões que envolvam os principais conceitos associados à função quadrática. Através de um questionário, buscamos identificar e compreender os principais erros e acertos cometidos por esse grupo de alunos. Investigamos também as estratégias que empregam em suas resoluções.

A importância de identificar as estratégias usadas por alunos para resolver questões sobre funções quadráticas nos possibilita identificar quais etapas do processo de ensino aprendizagem não foi compreendido pelo aluno. Com isso, é possível identificar os principais pontos que precisam ser mais bem trabalhados, assim como verificar a melhor sequência para abordagem desse estudo, conforme proposto na dissertação de mestrado na Universidade do Estado de Santa Catarina em julho de 2018 (Kosloski,2008), que propôs uma sequência didática que possa ser utilizada no ensino de função quadrática no Ensino Médio visando a exploração desse conteúdo num contexto histórico e interpretação dos problemas, além da visualização da utilização do conteúdo matemático no dia-a-dia.

Outro ponto que achei importante a ser identificado na minha pesquisa é a forma como os alunos lidam com os problemas contextualizados. O artigo presente no programa PDE do Estado do Paraná, SEED, 2014-2015, apresentado pela professora Maria Lucia Piaceski, propõe que o ensino da função quadrática seja iniciado pela contextualização de problemas, conforme defendido por Onuchic e Allevato (2009). Desta forma, trabalhar o conteúdo de funções na forma contextualizada a partir de um problema, possibilita que o aluno seja sujeito ativo na construção do conteúdo proposto.

A resolução de problemas contextualizados, como estratégia de ensino, tem sido apresentada nos documentos oficiais como os PCN (BRASIL, 1998), pois através desta metodologia de ensino o aluno tem a possibilidade de construir os conceitos durante o processo de ensino aprendizagem nas aulas de matemática.

Para Vasconcelos e Rêgo (2010, p. 6) a abordagem do conteúdo através da problematização faz com que o aluno tenha mais noção do que está sendo proposto, além de estabelecer um processo reflexivo do assunto abordado.

No primeiro capítulo será apresentado aspectos históricos, como problemas antigos sobre equação quadrática, conceitos teóricos e suas respectivas propriedades, além das aplicações em outros conhecimentos matemáticos, e outras áreas da ciência.

No segundo capítulo é feito um detalhamento do método de pesquisa: como a escola, a turma, quais as circunstâncias em que o teste foi aplicado, e a apresentação do instrumento de pesquisa.

No terceiro capítulo apresentamos uma análise dos resultados obtidos no teste.

No quarto capítulo apresento uma ideia com sugestões pedagógicas para o ensino de função quadrática. Por fim, no quinto capítulo, apresento as considerações finais da pesquisa.

# 1 O OBJETO MATEMÁTICO

Sempre que um conteúdo novo é iniciado há uma preocupação nos professores de matemática, pois nem sempre conseguimos despertar o interesse dos alunos em estuda-lo, o que acaba contribuindo para o aumento da defasagem de conteúdo. Isso tem se tornado cada vez mais frequente, tanto com alunos que avançam de um ano para o outro ainda no ensino fundamental, assim como os alunos que concluem o ensino fundamental e ingressam no ensino médio.

O estudo de funções é parte integrante e fundamental da educação básica. É a partir dela que o aluno estuda a relação entre duas ou mais grandezas, percebe o que a variação de uma dessas grandezas implica na variação da(s) outra(s) e elabora modelos que mostram esse comportamento entre as variáveis.

De fato, conforme SEEDUC (2012), ao estudar funções, o aluno precisa desenvolver habilidades e competências de:

- Compreender o conceito de função através da dependência entre variáveis.
- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade ou padrão.
- Representar pares ordenados no plano cartesiano.
- Construir gráficos de funções utilizando tabelas de pares ordenados.
- Analisar gráficos de funções (crescimento, decrescimento, zeros, variação do sinal).

O objetivo deste trabalho é focar no estudo das funções quadráticas.

## 1.1 Aspectos históricos

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

A resolução de problemas que são modelados por uma equação do segundo grau está entre os mais antigos da matemática. Há vários textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase 4000 anos que tratam o tema. A seguir, apresentamos um que consta na sexta e sétima secção de um tablete que contém vinte e quatro secções.

"Somei a área e dois terços do lado de meu quadrado, e o resultado é 0.35. Tome 1, o "coeficiente". Dois terços de 1, o coeficiente, é 0;40. Metade disso, 0;20, você multiplicará por 0;20 [e o resultado], que é 0;6,40, você adicionará a 0;35, e [o resultado], 0;41,40, tem raiz quadrada 0;50. Multiplique 0;20 por ele próprio e subtraia [o resultado] de 0;50, e 0;30 é [o lado] do quadrado".

Este problema enuncia e acha a solução da equação quadrática, $x^2 + \frac{2}{3}x = 0;35$, onde $2/3$ é convertido em seu equivalente sexagesimal 0;40. Ao seguirmos passo a passo na solução apresentada, seremos levados a solução $x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30$. O que é a solução positiva de $x^2 + px = q$, segundo a fórmula quadrática,$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Outro problema bem antigo é o de achar dois números conhecendo sua soma $s$ e seu produto $p$. Em termos geométricos, tal problema pede que seja determinado os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro $s$ e área $p$.

Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau$x^2 - sx + p = 0$.

De fato, se um desses números é $x$, o outro é $s - x$ e seu produto é$p = x(s - x) = sx - x^2$,onde$x^2 - sx + p = 0$.

Determinar as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é um conhecimento milenar, pois até o fim do século XVI não se usava fórmulas para determinar as raízes, já que não se representavam os coeficientes de uma equação por letras. O uso de fórmula para achar os valores das raízes só começou a partir do fim do século XVI, pois não se representavam os coeficientes de uma equação por letras. Isto teve início com o matemático francês François Viete, que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, havia apenas a forma como proceder para resolver exemplos concretos (aqueles com coeficientes numéricos). Conforme o descrito abaixo:

"Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número".

Atualmente, esse problema gera as raízes$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}$ e $s-x=\frac{s}{2}-\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}$, da equação $x^2-sx+p=0$.

É importante ressaltar que os autores dos textos cuneiformes não deixaram registrado o argumento que os levou a tais conclusões. Para alguns pesquisadores/estudiosos, esses autores podem ter usado o seguinte argumento:

Chamando de $a$ e $b$ os números procurados, com $a \leq b$, tem-se que esses números são equidistantes da média aritmética, ou seja $\frac{s}{2}=\frac{a+b}{2}$ . Chamando $d$de a diferença, temos que $d=b-\frac{s}{2}=\frac{s}{2}-a,$ onde os números $a$ e $b$ são da forma $a=\frac{s}{2}-d\ e\ b=\frac{s}{2}+d$. Substituindo no produto, temos

$$p=ab=\left(\frac{s}{2}-d\right)\left(\frac{s}{2}+d\right)=\left(\frac{s}{2}\right)^2-d^2,$$

onde

$$d^2=\left(\frac{s}{2}\right)^2-p \quad e \quad d=\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}.$$

Daí,

$$a=\frac{s}{2}-d=\frac{s}{2}-\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}$$

e

$$b=\frac{s}{2}+d=\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}.$$

Embora os babilônios já tivessem conhecimento dos números negativos, não tiveram preocupação com eventuais soluções negativas, pois os dados da soma e produto do problema sempre eram números positivos, já que não faz sentido nos problemas de determinar medidas dos lados de um retângulo. Quando aconteciam casos em que $\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2-p\right]<0$, eles simplesmente diziam que os números procurados não existiam. O que é perfeitamente correto dentro do conjunto dos números reais, já que não foram os babilônios que inventaram os números complexos.

A forma de transmitir o conhecimento matemático de geração em geração não era nada parecido com o método empregado na matemática moderna. No entanto, os problemas são frequentemente enunciados de tal maneira que, ao serem traduzidos para a notação algébrica moderna, acabam surgindo expressões complicadas, o que nos deixa ainda mais impressionados com a habilidade dos babilônios, que conseguiam reduzir tais expressões a formas padrões de equações, sem a ajuda de nossas técnicas algébricas.

## 1.2 Conceitos e propriedades

O conceito de função foi sendo construída ao longo de séculos. Mesmo os povos mais antigos, como os babilônios, já tinham uma ideia vaga de dependência de grandezas. Mas foi a partir do século XVII que começou o desenvolvimento da noção de função, com Keppler e Galileu, que procuravam estabelecer as leis do movimento. Definiremos o conceito de função quadrática e suas propriedades.

Definição de função quadrática

Uma função $f: IR \rightarrow IR$é dita quadrática quando existem números reais,$a, b\ e\ c,$ com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

Exemplos de funções quadráticas

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad onde\ a = 1, b = -3\ e\ c = 2$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad onde\ a = 2, b = 4\ e\ c = -3$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad onde\ a = 1, b = 0\ e\ c = -4$$

$$f(x) = -x^2 + 5x, \quad onde\ a = -1, b = 5\ e\ c = 0$$

$$f(x) = -2x^2, \quad onde\ a = -2, b = c = 0$$

Definição de zeros ou raízes da função quadrática

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dizemos que $x_1$ é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, se $f(x_1) = 0$. Como a função se anula em $x = x_1$, dizemos também que $x_1$é um zero da função $f(x)$.

Proposição 1

Seja $x_1$uma raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$, então $x_2 = s - x_1$ também é raiz desta equação.

Demonstração:

De fato, como $x_1$é raiz da equação, temos que ${x_1}^2 - sx_1 + p = 0$.Substituindo$x_2 = s - x_1$no lado esquerdo da equação, temos

$$(s - x_1)^2 - s(s - x_1) + p = s^2 - 2sx_1 + {x_1}^2 - s^2 + sx_1 + p \ = {x_1}^2 - sx_1 + p = 0,$$

como queríamos demonstrar.

## 1.2.1 Forma canônica do trinômio

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$.

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do produto notável $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Completando quadrado, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Ou seja,

$$ax^2 + bx + c = \boxed{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]}.$$

$$\uparrow forma\ canônica$$

A forma canônica de escrever o trinômio do segundo grau tem importantes consequências. Em primeiro lugar, ela nos conduz rapidamente à fórmula que nos dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ .

De fato, sendo $a \neq 0$, temos

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac-b^2}{4a^2} \quad \text{(iii)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \text{(iv)}$$

Para prosseguirmos, é preciso analisar o sinal do discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (ii) e (iv) revela que a equação dada não possui solução real, pois $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Se $\Delta \geq 0$,

$$\text{(iv)} \quad \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{(v)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}. \quad \text{(vi)}$$

No geral, os alunos têm feito uso da fórmula (vi) para aplicarem em exercícios concretos.

Podemos concluir que:

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais e distintas. Ou seja, $x_1 = -(b^2 - \Delta)/2a$ e $x_2 = (b^2 - \Delta)/2a$,com $x_1 < x_2$, cuja soma é

  $$s = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -b/a,$$

  e cujo produto é

  $$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = c/a.$$

  Em particular, as raízes $x_1\ e\ x_2$ são equidistantes do ponto $-b/2a$, que é a média aritmética das raízes.

- Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais e iguais, chamada de raiz dupla, igual a $-b/2a$.

  Considere $\Delta = 0$ e $a > 0$. Ao analisar a forma canônica da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

temos que $f$ assume o valor mínimo quando $x = -b/2a$. Ou seja, $x = -b/2a$ é ponto mínimo da função e $f(-b/2a) = c - \frac{b^2}{4a} = -\Delta/4a$ é valor mínimo assumido por $f(x)$.Se $a < 0$, segue de forma análoga que o valor de $f(-b/2a)$ é o valor máximo de $f(x)$ para qualquer que seja $x \in R$.

- Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais.

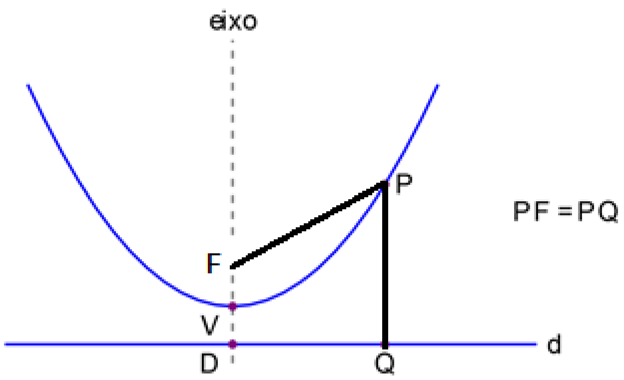
### 1.2.2 Gráficos da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Dados um ponto $F = (x_f, y_f)$ e uma reta diretriz $d$ que não o contém, a parábola de foco $F$e diretriz $d$ é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de $F$ e de $d$. A reta perpendicular à diretriz, que passa por $F = (x_f, y_f)$ , chama-se o $eixo\ da\ parábola$ (ou reta focal). O ponto V=$(x_0, y_0)$ da parábola mais próximo da diretriz chama-se o $vértice$ dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do $eixo\ da\ parábola$ com a diretriz. Ou seja, $d(V, F) = d(V, d)$.

Vale lembrar que a distância entre um ponto e uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Figura 1 - Parábola

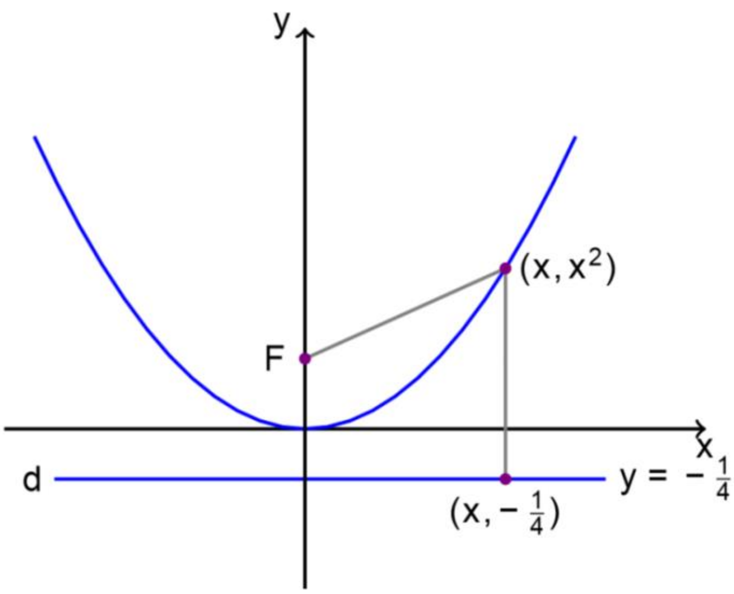



Fonte: Adaptado de Lages, 2013, p.202

Exemplo 1: O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, {}^1/_4\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -{}^1/_4$. Com efeito, a distância de um ponto qualquer $(x, x^2)$do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = \left(0, {}^1/_4\right)$ é igual a $\sqrt{x^2 + \left(x^2 - {}^1/_4\right)^2}$. A distância do mesmo ponto $(x, x^2)$ à reta $y = -{}^1/_4$ é $x^2 + {}^1/_4$. Note que $x^2 + \left(x^2 - {}^1/_4\right)^2 = x^4 + \frac{x^2}{2} + {}^1/_{16} = \left(x^2 + {}^1/_4\right)^2$, para todo $x \in R$.

A figura a seguir representa o gráfico da função $f(x) = x^2$

Figura 2 – Gráfico de $f(x) = x^2$

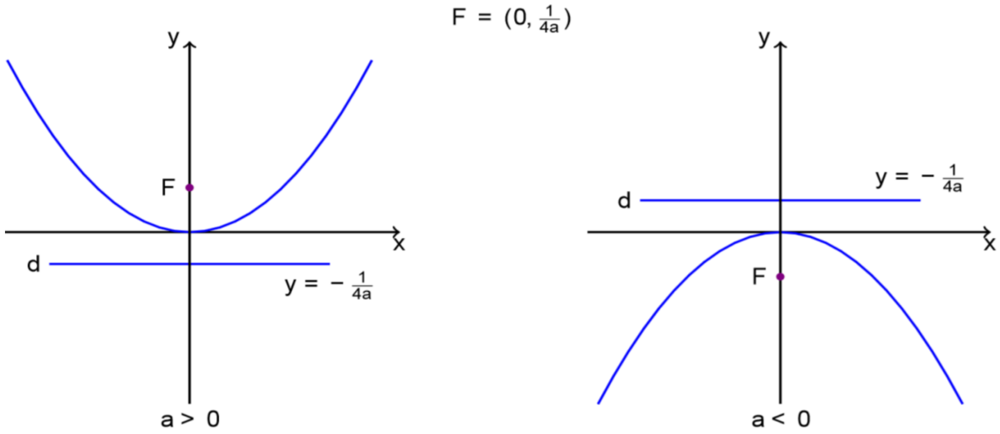



Fonte: Lages, 2013, p.202

Exemplo 2: Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, {}^1/_{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -{}^1/_{4a}$ .

De fato, para todo $x \in R$, vale a igualdade $x^2 + \left(ax^2 - {}^1/_{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + {}^1/_{4a}\right)^2$ , onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = \left(0, {}^1/_{4a}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -{}^1/_{4a}$.

Figura 3 – Gráficos de $f(x) = ax^2$

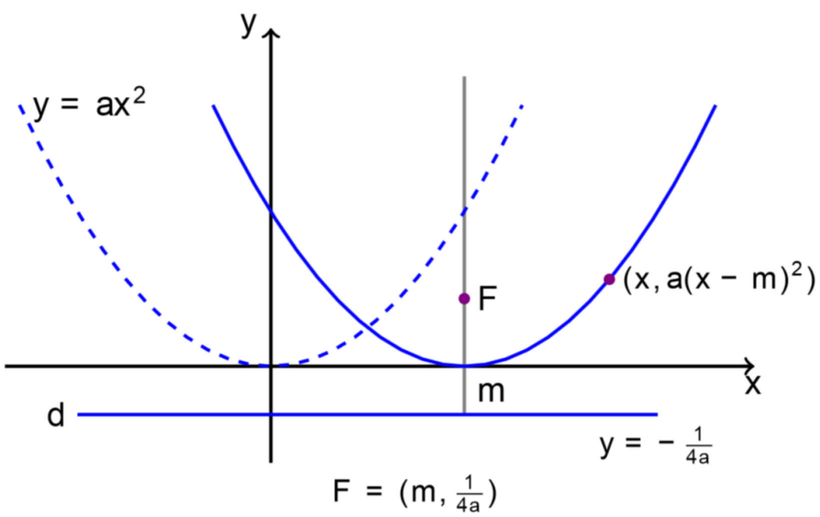



Fonte: Lages, 2013, p.204.

Exemplo 3: Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in R$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, {}^{1}/_{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -{}^{1}/_{4a}$.

Para se chegar a essa conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para $x \in R$, vale a igualdade$(x-m)^2 + \left[a(x-m)^2 - {}^{1}/_{4a}\right]^2 = \left[a(x-m)^2 + {}^{1}/_{4a}\right]^2$,ou então observa-se simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$pode ser obtido a partir do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \to (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$, conforme a figura a seguir.

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$

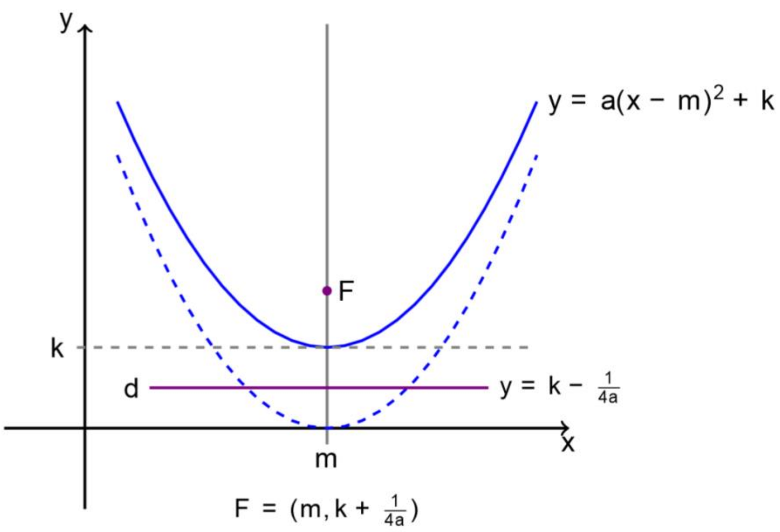



Fonte: Lages, 2013, p.204.

Exemplo 3: Dados $a, m, \in R$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + {}^{1}/_{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - {}^{1}/_{4a}$.

A afirmação, a diretriz é$y = k - {}^{1}/_{4a}$, resulta imediatamente do exemplo anterior, levando em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \to (x, y+k)$, que leva o eixo $OX$ na reta $y = k$ e a reta $y = -{}^{1}/_{4a}$ na reta $y = k - {}^{1}/_{4a}$.

Figura 5 – Gráfico de $y = a(x-m)^2 + k$




Fonte: Lages, 2013, p.205.

Segue-se deste último exemplo que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e cujo foco é o ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$. Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

Com efeito, a forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c$ nos dá $ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + k$, onde $m = -{}^{b}/_{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é aquele de abcissa $x = -{}^{b}/_{2a}$ . Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $x = -{}^{b}/_{2a}$ , o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$.

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é um elemento de grande importância para entender o comportamento desta função. As abcissas $\alpha\ e\ \beta$, são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando este gráfico intercepta o eixo$OX$.

O ponto médio do segmento $[\alpha, \beta]$ é a abcissa do vértice da parábola. Se o gráfico está inteiramente acima, ou inteiramente abaixo do eixo horizontal $OX$, a equação não possui raízes. Se o gráfico apenas tangencia o eixo $OX$, a equação tem apenas uma raiz (única) dupla. Se $\alpha < x < \beta$ então $f(x)$ tem sinal contrário ao sinal de $a$; se $x < \alpha$ ou $x > \beta$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $a$. Esta e outras conclusões resultam imediatamente do exame do gráfico.

## 1.3 **Aplicações**

Entendemos que cabem aos professores a tarefa de mediar o processo de construção do conhecimento através de situações que despertem os educandos, levando-os a pensar e buscar soluções para os problemas apresentados e que os mesmos tenham relações com sua vivência. Para isso é necessário que haja a contextualização do fazer matemático afim de que o processo de ensino aprendizagem realmente seja efetivado.

Porém, para que esse processo de ensino aprendizagem se efetive, faz-se necessário o aprimoramento dos professores tanto na parte didática como na metodológica, através de cursos de formação continuada, pois o que vem sendo observado há algum tempo é um número grande de alunos que não conseguem entender essa matemática que a escola lhes ensina e que na maioria das vezes não conseguem utilizar o conhecimento adquirido em situações do seu cotidiano.

Além disso, é preciso considerar que pela Educação Matemática o ensino possibilite análises, discussões e apropriações de conceitos e formulação de ideias, fazendo com que os educandos utilizem do conhecimento adquirido em situações vivenciadas fora da sala de aula.

Agora, veremos alguns exemplos sobre funções quadráticas aplicas em outras áreas da ciência e no dia a dia.

### 1.3.1 Aplicações na Física

Exemplo: Um foguete caiu depois de ser lançado, devido a uma pane no sistema de navegação. Sabendo-se que a trajetória do foguete até sua queda é descrita pela função quadrática $h(t) = 12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2$, onde $h$ é a altura, em metros, e $t$ é o tempo, em segundos . Pede-se

a) Após quanto tempo, depois de lançado, o foguete atingiu a altura máxima?
b) O foguete atingiu a altura máxima a quantos metros do solo?
c) Após quantos segundos, aproximadamente, ao partir, o foguete toca o solo?

Solução:

a) A função quadrática $h(t) = 12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2$ atingirá sua altura máxima no vértice da parábola, que é obtido quando$t = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2\cdot(-2{,}5)} = 6\ segundos.$

b) A função quadrática $h(t) = 12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2$ atingirá sua altura máxima no valor máximo desta parábola. Ou seja, $h(-\frac{b}{2a}) = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{30^2-4\cdot(-2{,}5)\cdot 12{,}5}{4\cdot(-2{,}5)} = 102{,}5\ metros.$ Como o foguete partiu de uma altura de 12,5 metros, a altura máxima atingida pelo foguete, em relação ao solo, foi de 102,5 + 12,5 = 115 metros.

c) O foguete toca o solo quando a altura em relação ao solo nula ($h = 0$). Igualando a função quadrática a zero temos, $12{,}5 + 30t - 2{,}5t^2 = 0$. Resolvendo a equação, temos$t = \frac{-30\pm\sqrt{30^2-4\cdot(-2{,}5)\cdot 12{,}5}}{2\cdot(-2{,}5)} = 12{,}4\ segundos.$ (foi desconsiderada a raiz negativa).

### 1.3.2 Aplicações na Química

Exemplo(UNIRIO): Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo $t$, em horas, de acordo com a fórmula $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$ . Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatilize totalmente é:

a) Inferior a 15 minutos.
b) Superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.
c) Superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.
d) Superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.
e) Superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

Solução:

Aparentemente a função dada acima não é uma função do 2º grau, mas se aplicarmos a mudança de parâmetros$3^t = x$, teremos $3^{2t} = x^2$. Assim, a função passa a ser representada por $m = -x^2 - 3x + 108$. Como a questão pede o tempo máximo antes que o material se volatize temos que a volatilização total ocorrerá quando $m = 0$, com isso, $-x^2 - 3x + 108 = 0$, resolvendo a equação temos$(x + 12)(x - 9) = 0$. Isto é, $x_1 = -12$ e $x_2 = 9$. Voltando para a variável $t$, temos$3^t = 9$. Logo, $t = 2$. Portanto os cientistas têm entre 90 e 120 minutos.

Exemplo (ITA) Os dados experimentais da tabela a seguir correspondem as concentrações de uma substância química medidas em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em mols) após 2,5 segundos é:

| Tempos | Concentração |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 1 |

Solução:

Como foi dito que a linha que passa pelos pontos é uma parábola, podemos representar essa linha pela função do 2º grau $C(t) = at^2 + bt + c$, onde $C$ é a concentração em $t$ segundos. Para encontrarmos a concentração em 2,5 segundos, primeiramente precisamos encontrar os valores dos coeficientes $a$, $b$ e $c$. Usando os valores da tabela, temos

$$C(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3$$
$$C(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5$$
$$C(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 1.$$

Obtendo o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c + 5 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}.$$

Isolando o valor de $a$ na primeira linha, temos $a = 3 - (b + c)$. Substituindo o valor de $a$ na segunda e terceira linhas, temos o sistema

$$\begin{cases} 2b + 3c = 7 \\ 3b + 4c = 13 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema pelo método da adição

$$\begin{cases} 2b + 3c = 7 \ \cdot (-4) \\ 3b + 4c = 13 \cdot (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8b - 12c = -28 \\ 9b + 12c = 39 \end{cases} \xrightarrow[linha\ 1 + linha\ 2]{} b = 11$$

Substituindo o valor de $b = 11$ na equação $2b + 3c = 7$, temos $2 \cdot 11 + 3c = 7 \Rightarrow 3c = 7 - 22 \Rightarrow c = -5$.

Substituindo $b = 11$e $c = -5$, na equação $a = 3 - (b + c)$, temos $a = 3 - \big(11 + (-5)\big) \Rightarrow a = -3$.

Assim a função que representa a concentração é dada por $C(t) = -3t^2 + 11t - 5$.Como a questão pediu o valor da concentração em $t = 2{,}5$ segundos, então $C(2{,}5) = -3 \cdot (2{,}5)^2 + 11 \cdot (2{,}5) - 5 = 3{,}75$ mols.

### 1.3.3 Aplicações na Biologia

Exemplo 1: (UFSM) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $V(t) = at^2 + b$, onde $V(t)$ é o número de elementos vivos no tempo $t$(meses). Sabendo que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no décimo mês, é?

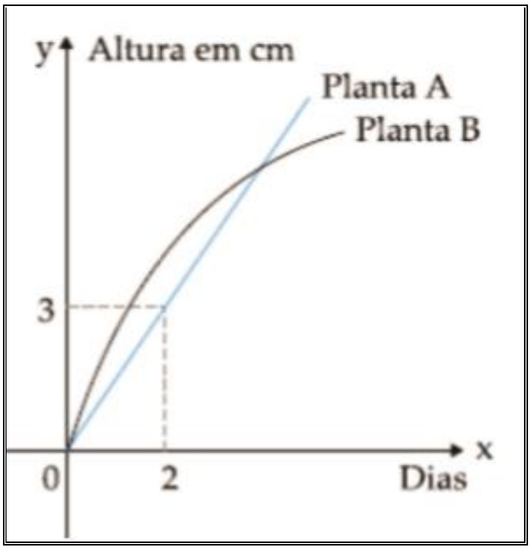
Solução:

Como inicialmente tinha 720 animais, temos que, $V(0) = 720 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b = 720 \Rightarrow b = 720$. A outra informação dada diz que todos os animais morreram após 12 meses. Com isso, $V(12) = 0 \Rightarrow a.12^2 + 720 = 0 \ \Rightarrow 144a = -720 \ \Rightarrow a = -5$.

Portanto, $V(t) = -5t^2 + 720$. Logo, no décimo mês, a quantidade de frangos de frangos ainda vivos é dada por $V(10) = -5(10)^2 + 720 = \ -500 + 720 = 220$ frangos.

Exemplo 2: (Vunesp) Duas plantas de mesma espécie A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$ . Um esboço desse gráfico está representado na figura a seguir.

Figura 6 – Gráficos de $f(x) = \frac{3}{2}x$ e $y = \frac{24x - x^2}{12}$




Fonte: Cavalcante, 2017

Determine:

a) A equação da reta.
b) O dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

Solução:

a) Podemos escrever a lei de formação da reta, que representa o crescimento da planta A, como $f(x) = mx + n$. Como esse reta passa pelos pontos (0, 0) e (2,3), então $n = 0\ e\ m \cdot 2 + 0 = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$. Logo, $f(x) = \frac{3}{2}x$.

b) Para determinarmos o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura basta igualarmos as duas funções. Ou seja, $\frac{24x - x^2}{12} = \frac{3x}{2} \Rightarrow 2 \cdot (24x - x^2) = 12 \cdot 3x \Rightarrow -x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ e\ x_2 = 6$.
Portanto, as plantas atingiram a mesma altura no sexto dia, e essa altura é calculada substituindo o valor de $x$ por 6 em qualquer uma das funções. Assim, a altura pedida é dada por$y = \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$ cm.

### 1.3.4 Aplicações no dia a dia

Exemplo 1: Uma escola vai realizar um passeio. Para isso, alugou um ônibus com capacidade para 40 passageiros. A empresa exigiu que cada passageiro pague R$ 60,00 mais R$ 10,00 por lugar vago. Qual é o número de passageiros ideal para a empresa, de modo que sua rentabilidade neste passeio seja máxima?

Solução:

Seja $n$ o número de passageiros presentes neste passeio. Então, $40 - n$ é o número de lugares vagos. Logo, cada passageiro presente pagará $R\$\,60{,}00 + R\$10{,}00(40 - n)$. Chamando de $R(n)$ a rentabilidade dessa empresa, temos que a função $R(n) = n\big(60 + 10 \cdot (40 - n)\big)$ representa a rentabilidade dessa empresa. Desenvolvendo os produtos teremos

$$R(n) = n\big(60 + 10 \cdot (40 - n)\big)$$
$$R(n) = n(60 + 400 - 10n)$$
$$R(n) = n(460 - 10n)$$
$$\boxed{R(n) = -10n^2 + 460n}$$

Como podemos perceber a receita arrecada pela empresa de ônibus é uma função quadrática do número de passageiros presentes na excursão. A rentabilidade máxima dessa empresa será determinada pelo  do vértice da parábola, onde $n_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-460}{2 \cdot (-10)} = 23$. A título de informação, o valor arrecadado com esses 23 passageiros é de R$ 5.290,00, que é calculado substituindo $n$ por 23 na função.

Exemplo 2: O diretor de uma peça de teatro percebeu que, com o ingresso a R$ 40,00, em média 300 pessoas assistem ao espetáculo e que, para cada R$ 1,00 a menos no preço do ingresso, o público aumenta de 10 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

Solução:

Seja $x$ o valor em reais diminuído do preço do ingresso. Logo, $40 - x$ será o valor pago por cada expectador e, $10x$, o aumento do número de expectadores. Assim, a receita obtida em função de $x$ é dada por $R(x) = (40 - x)(300 + 10x)$, Desenvolvendo a função, temos

$$R(x) = (40 - x)(300 + 10x)$$

$$R(x) = 1200 + 400x - 300x - 10x^2$$

$$R(x) = -10x^2 + 100x + 1200$$

Para determinar o preço do ingresso para que a receita máxima, primeiro vamos calcular o valor da coordenada$x$ do vérice, que determinará o valor máximo a ser diminuído, para depois subtrairmos do valor do ingresso sem desconto. Assim, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-10)} = 5$, é o valor máximo de desconto. Portanto, o preço do ingresso deve ser de $40 - 5 = 35$ reais, para que a receita seja máxima.

# 2 O MÉTODO DA PESQUISA

Este capítulo aborda a pesquisa realizada com 38 alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual do munícipio do Rio de Janeiro. Esta pesquisa foi realizada através de um questionário que abordou os principais conceitos ensinados no estudo de função quadrática, que foi aplicado para esse grupo de alunos com a finalidade de analisar seus conhecimentos sobre função quadrática.

Neste capítulo, apresentamos o método utilizado em nosso estudo, que busca identificar as principais dificuldades encontradas pelos alunos, assim como as circunstâncias da aplicação do teste.

É importante ressaltar que este estudo também tem o objetivo de auxiliar o professor em sua prática pedagógica, pois o mesmo busca identificar os principais tópicos desse assunto em que os alunos apresentam maior dificuldade. Assim, o professor poderá dar maior importância aos tópicos em que os alunos estão com mais dificuldades, e também, rever a forma como esses tópicos estão sendo abordados em sala de aula. Como subsídio, mostraremos no capítulo 4, sugestões para o ensino de função quadrática.

## 2.1 A escola e a turma

O questionário foi aplicado em 38 alunos de uma turma de 1º ano do ensino médio diurno, da escola estadual Madre Tereza, em Realengo, zona oeste do município do Rio de Janeiro. Pelo fato da escola ser localizada fora de comunidade, os alunos da escola estadual Madre Tereza são de diferentes bairros da zona oeste do Rio de Janeiro, como Magalhães Bastos, Realengo, Padre Miguel e Bangu. Alunos com perfis de baixa renda familiar, pouco interesse pelos estudos e que encontram salas de aula lotadas.

Apesar da escola ter uma clientela de diferentes comunidades conflagradas por violência, não há relatos de conflitos entre os alunos.

A estrutura física da escola está muito ruim, com salas de aula interditadas, o que agrava ainda mais o trabalho do professor e, consequentemente, prejudica o aluno no processo de aprendizagem.

A aplicação do questionário foi feita pela professora de matemática da turma, Ana Cristina Cirillo Carvalho Siqueira, que organizou os alunos separadamente como se fosse uma avaliação rotineira da turma. Foi percebido pela professora muita dificuldade por boa parte dos alunos, mesmo sendo um assunto já trabalhado com eles pela professora. Vale ressaltar que este é um assunto que os alunos já têm contato desde o 9º ano do ensino fundamental.

## 2.2 As circunstâncias da aplicação do questionário

O teste teve início na sala de aula da turma, durante o horário de aula da professora de matemática, com duração inicial de 2 tempos de aula. Foi relatado pela professora que o teste teve que ser interrompido porque parte do teto de gesso da sala de aula despencou. Como a escola estava com outras salas interditadas, o teste foi recolhido pela professora que deu continuidade na aula seguinte.

Fora esse contratempo referente a estrutura da sala de aula, também foi relatado pela professora que poucos alunos estavam realmente interessados em responder o questionário, além de apresentarem muitas dificuldades em resolver as questões. Dificuldade que se manteve mesmo com o auxílio da professora que colocou algumas fórmulas matemáticas no quadro para que os alunos pudessem usá-las.

Os alunos também relataram que o questionário estava muito extenso. Em contrapartida, a professora colocou para os alunos que o questionário estava numa ordem “cronológica” em que os assuntos costumam ser ensinados.

Vale ressaltar que boa parte das questões apresentadas no questionário eram questões que não envolviam cálculos, apenas marcar quais as respostas corretas de acordo com o enunciado. Além disso, a quantidade de assuntos abordados se fazia necessário para que todos os conceitos ensinados em função quadrática pudessem ser abordados. Com isso, o resultado de análise desses questionários tem a pretensão de mostrar quais desses conceitos do estudo de função quadrática o aluno não conseguiu assimilar corretamente, além de nos mostrar quais as estratégias os alunos estão usando para resolver as questões propostas. .

## 2.3 Apresentação do instrumento de pesquisa

Esta etapa foi de caráter exploratório para diagnosticar os conhecimentos que os alunos traziam em relação ao estudo das funções quadráticas, mesmo sendo um assunto já visto por eles no 9º ano do ensino fundamental, assim como no 1º ano do ensino médio.

O questionário elaborado para este estudo consta de 7 questões, entre objetivas e discursivas, aplicado coletivamente, onde cada aluno resolveu individualmente seu teste. Cada uma das sete questões apresentadas no teste abordou um determinado tópico do estudo de função quadrática.

No teste diagnóstico foi pedido que os alunos respondessem a questões como:

- Identificar uma função polinomial do 2º grau através da lei de formação;
- Identificar os coeficientes das funções que haviam sido identificadas no exercício anterior;
- Calcular o valor numérico de uma função quadrática;
- Usar os valores numéricos obtidos no exercício anterior para determinar os zeros, ou raízes, da função;
- Conhecendo os zeros dessas funções, foi pedido que escrevessem as funções na forma fatorada;
- Identificar dentre os gráficos dados quais eram de função quadrática;
- Fazer um esboço de função quadrática mostrando seus principais elementos;
- Resolver problemas que recaem numa função quadrática.

# 3 ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo mostraremos os resultados obtidos após a análise de resultados.

## 3.1 Olhar geral sobre o teste

Após a aplicação do teste diagnóstico foi possível fazer uma análise sobre o desempenho dos alunos. Diante dos resultados obtidos percebemos como os alunos apresentam dificuldades em realizar as atividades relacionadas ao ensino de função quadrática. No teste diagnóstico colocamos questões que envolvem os conceitos trabalhados neste tema, como:

- identificar uma função quadrática através da lei de formação dada, ou através de gráficos apresentados;
- identificar os coeficientes da função quadrática;
- determinar os zeros da função;
- determinar a lei de formação de uma função quadrática conhecendo-se suas raízes;
- construção de gráficos identificando suas raízes, o termo independente e as coordenadas do vértice da parábola;
- resolução de problemas que recaem numa função quadrática.

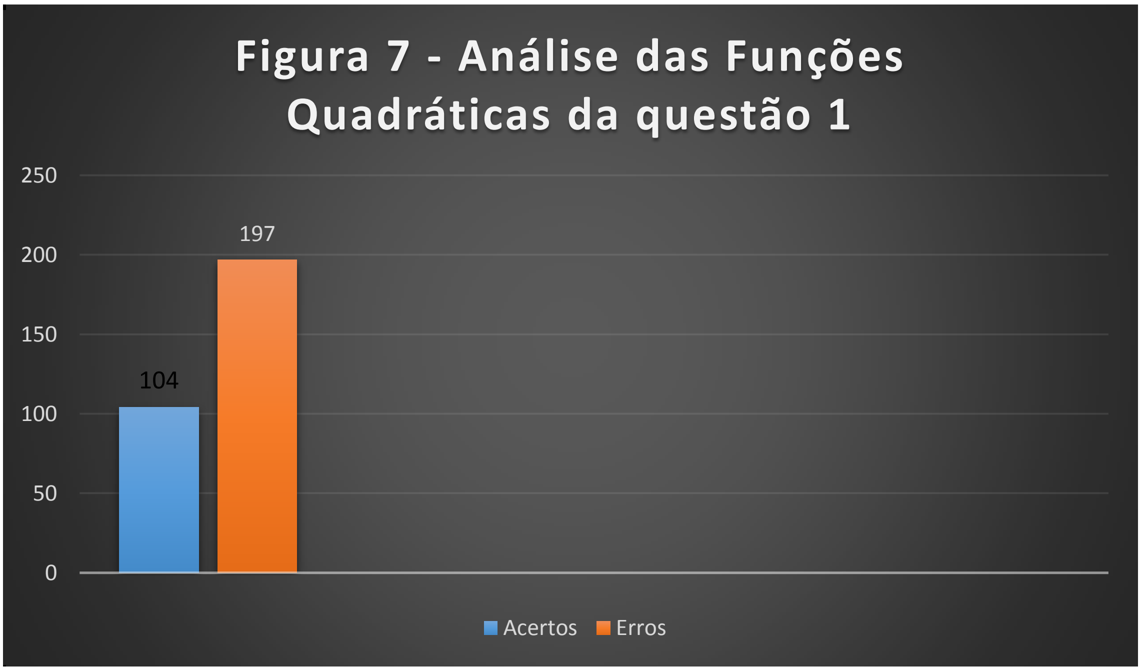
Embora tenha havido reclamações de alguns alunos com relação à quantidade de questões abordadas no teste, entendemos que o número de questões se fazia necessário para que pudéssemos abordar todos os conteúdos trabalhados no estudo da função quadrática. E, mesmo que o teste tenha sido interrompido na primeira tentativa de aplicação, devido a problemas estruturais da sala de aula, entendemos que os resultados obtidos reproduziram com fidelidade o conhecimento que tais alunos tinham em relação aos conteúdos abordados.

Numa análise geral de desempenho, vale ressaltar que dos 38 alunos avaliados 21 tiveram um resultado acima da média da turma, enquanto 4 ficaram na média, e 13 abaixo da média. Em contrapartida, nenhum aluno conseguiu ter um desempenho mínimo que se espera de um aluno ao avaliarmos tanto quantitativamente, como qualitativamente. Portanto, podemos afirmar que os alunos não estão conseguindo fixar/aprender o estudo das funções quadráticas.

## 3.2 Olhar por questão: tipos de erros, tipos de estratégias dos acertos e questões em branco

Agora, apresentaremos os resultados obtidos por questão, mostrando o percentual de acertos em cada questão, quais as estratégias usadas nesses acertos e, quais questões foram deixadas em branco.

Na questão 1, que só abordava o conhecimento de uma função polinomial do 2º grau através de sua lei de formação e, considerando apenas as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = 4x^2 - 16$, $t(x) = 4 - x^2$, $\mathrm{r}(x) = (x-7)^2$ e $\mathrm{c}(x) = (x+5)(x-4)$, o gráfico a seguir nos mostra o total de acertos e erros cometidos pelos 38 alunos presentes.

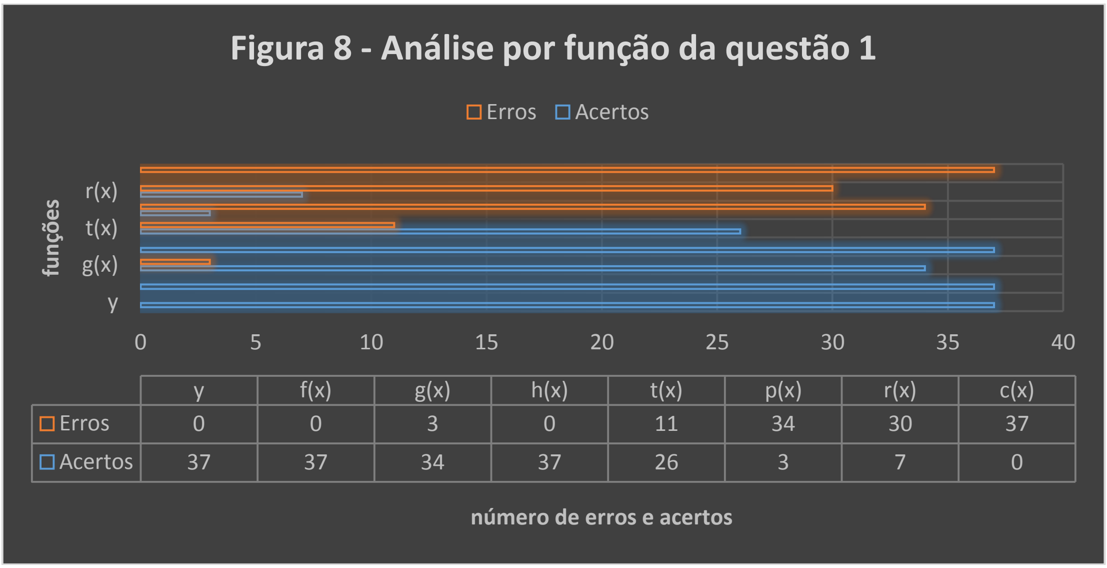



Fonte: o autor, 2019

O gráfico acima nos mostra o resultado geral do número de erros e acertos considerando cada resposta dada por item. É importante ressaltar que a marcação, ou não, de um item é sinalizado como erro ou acerto. Além disso, devemos observar que um mesmo aluno pode ter cometido mais de um tipo de erro. Por isso, a soma dos erros pode ultrapassar o total de erros.

Agora, analisaremos os erros e acertos que foram dados em cada item apresentado na questão 1. Nas funções polinomiais $y = 3x + 5$ e $h(x) = -3x^3 + 5x^2$, de 1º e 3º graus, respectivamente, assim como na função quadrática completa $f(x) = x^2 + 2x + 3$, não houve erro, com excessão do aluno que entregou o teste em branco. Isso nos sugere que os alunos conseguem diferenciar bem as funções polinomiais. Agora, destacaremos os erros cometidos nas outras funções.

Nas funções polinomiais do 2º grau incompletas $g(x) = 4x^2 - 16$e $t(x) = 4 - x^2$, com 8% e 30% de erros, respectivamente, entendemos que a falta de uma das parcelas do polinômio$ax^2 + bx + c$ faz com que o aluno não reconheça que a função quadrática incompleta é uma função quadrática. É interessante notar que a ordem de apresentação dos termos do polinômio de segundo grau parece interferir neste não reconhecimento. Ainda assim, o percentual de erro é muito menor em relação a outros tipos de escrita da função quadrática, como foi possível diagnosticar nas funções fatoradas $r(x) = (x - 7)^2$e $c(x) = (x + 5)(x - 4)$ com 81% e 100% de erros, respectivamente. Esse caso de não identificação de uma função polinomial fatorada como sendo uma quadrática, nos leva a conclusão de que é preciso reforçar o estudo dos polinômios ainda no 8º ano do Ensino Fundamental, que é quando o aluno tem o primeiro contato com fatoração de polinômios e produtos notáveis. Por fim, na função racional $p(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 10$, 92% dos alunos idetificaram essa função como sendo uma quadrática, pois estão "aceitando" que $\frac{1}{x}$ pode ser um termo de função polinomial. Este item associado aos itens em que as funções estão incompletas ou fatoradas, sugere que o entendimento de função quadrática é bastante formal e estrutural. Ele parece estar mais associado à presença dos símbolos $x^2$ e $x$ do que ao seu real significado. O gráfico a seguir mostra esse resultado por questão.




| | y | f(x) | g(x) | h(x) | t(x) | p(x) | r(x) | c(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erros | 0 | 0 | 3 | 0 | 11 | 34 | 30 | 37 |
| Acertos | 37 | 37 | 34 | 37 | 26 | 3 | 7 | 0 |

Fonte: o autor, 2019

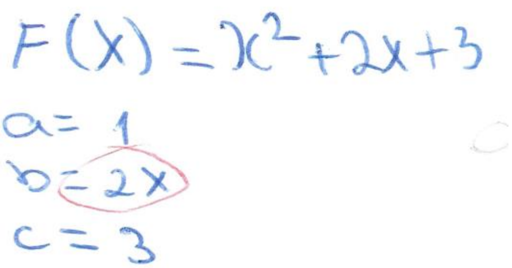
Na questão 2, foi pedido para que os alunos identificassem os coeficientes das funções quadráticas sinalizadas por eles no exercício anterior. Considerando apenas as questões acertadas no exercício anterior, dos 38 alunos presentes, apenas 47% identificaram os coeficientes corretamente. Os outros 53% acertaram apenas os coeficientes das funções quadráticas cuja lei de formação era uma expressão algébrica polinomial do 2º grau completa.

Ao analisarmos as respostas de cada item respondido, concluímos que:

Nas funções $y = 3x + 5$ e $h(x) = -3x^3 + 5x^2$ não houve erro, pois nenhum aluno sinalizou essa função como sendo uma quadrática na questão anterior.

Na função $f(x) = x^2 + 2x + 3$, 34 alunos identificaram corretamente os coeficientes $a$, $b$ e $c$, da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, enquanto 2 alunos deixaram em branco, e 1 aluno errou ao "carregar" a variável $x$ como se ela fizesse parte do coeficiente $b$, conforme mostrado na figura 9.

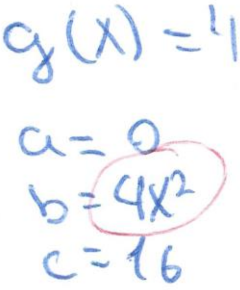
Figura 9 – erro cometido na função $f(x)$




Fonte: dados da pesquisa, 2019

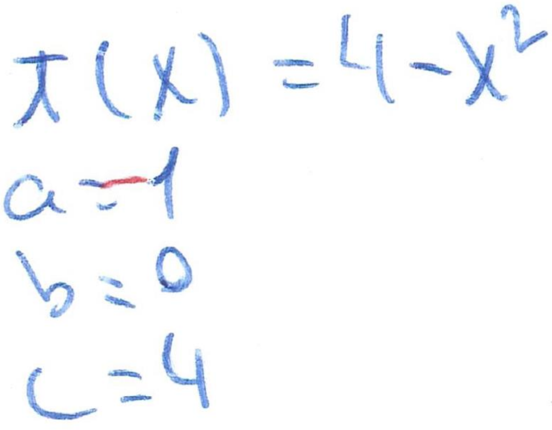
Nas funções quadráticas incompletas, dos 34 alunos que identificaram $g(x) = 4x^2 - 16$ como uma função quadrática, 29% cometeram erros. Já em $t(x) = 4 - x^2$, dos 26 alunos que haviam sinalizado corretamente essa função no exercício anterior, 12 acertaram na identificação dos coeficientes, 7 deixaram em branco, e 7 cometeram algum tipo de erro, o que mostra um percentual de 54% de erros contra 46% de acertos. Dentre os erros cometidos nas duas funções, estão o de "carregar" a variável como se ela fizesse parte do coeficiente, associar o termo independente $c$ como se fosse o coeficiente $b$, ou o contrário, pelo simples fato da falta de uma das parcelas, ou por erro de sinal. O alto índice de erros cometidos nessas funções nos sugere que a compreensão para identificar os coeficientes $a$, $b$ e $c$ requer a escrita da função na forma $F(x) = ax^2 + bx + c$. É importante observar que a incidência no erro de "carregar" a variável como se fosse parte do coeficiente diminui quando o coeficiente é igual a 1. As figuras 10 e 11 mostram alguns dos erros apontados aqui.

Figura 10 – Tipo de erros cometidos na função $g(x)$




Fonte: dados da pesquisa, 2019

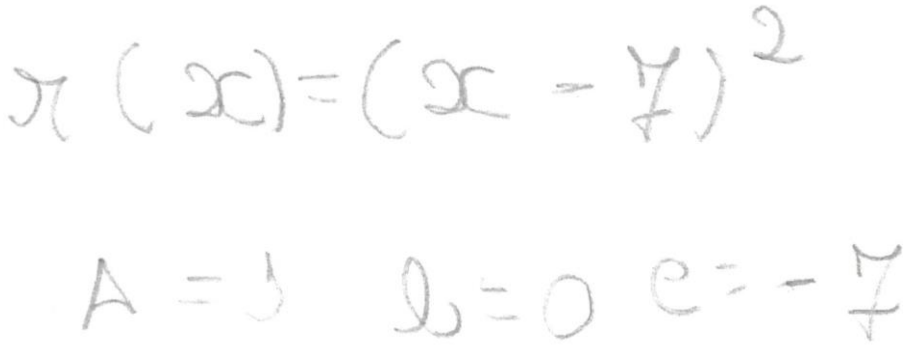
Figura 11 – tipo de erros cometidos na função $t(x)$




Fonte: dados da pesquisa, 2019

Na função quadrática escrita na forma fatorada $r(x) = (x - 7)^2$, onde apenas 7 alunos a sinalizaram no exercício anterior, nenhum conseguiu identificar os coeficientes corretamente. Desses 7, 3 deixaram em branco e 4 não desenvolveram o produto notável para que a função ficasse na forma $\mathrm{f}(x) = ax^2 + bx + c$, o que facilitaria na idenficação dos coeficientes. Desta forma, concluímos que o erro cometido neste item decorre do emprego inadequado das propriedades e operações com binômios. A imagem a seguir sinaliza esses erros cometidos.

Figura 12 – tipos de erros cometidos na função $r(x)$




Fonte: dados da pesquisa, 2019

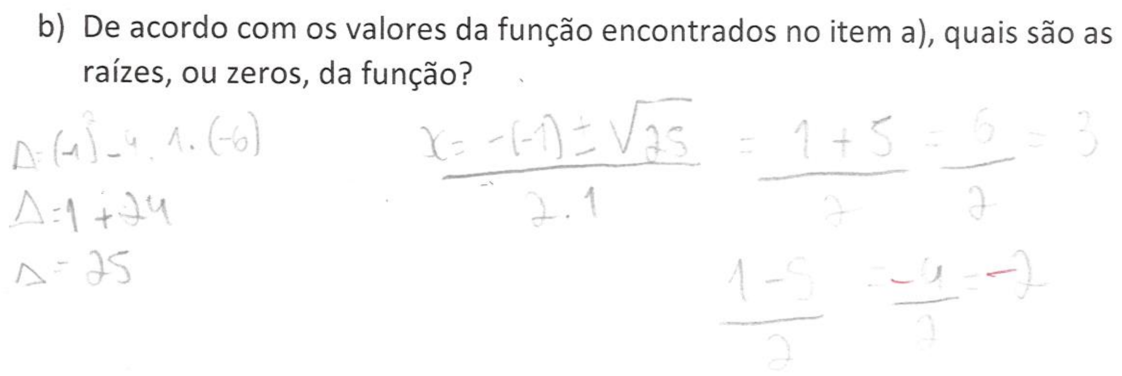
Observação: Não apontamos os possíveis erros na função racional $p(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 10$ pelo fato de não ser uma função quadrática. Assim como não foram apontados erros na função quadrática $c(x) = (x + 5)(x - 4)$, pois nenhum aluno a sinalizou como sendo uma quadrática.

Na 3ª questão, através da lei de formação de uma função quadrática, foi pedido para que os alunos realizassem três atividades divididas nas questões 3a), 3b) e 3c). Em 3a) foi pedido para calcular o valor da função de cada item dado. Na questão 3b), era pra identificar quais dos itens dados em 3a) estavam associados a zeros da função. Já em 3c), foi pedido para que a função polinomial fosse reescrita como produto de dois polinômios de 1º grau.

Na questão 3a), nenhum aluno calculou todos os valores pedidos. Com isso, ficou impossível que os alunos usassem esses valores para responder 3b). Além disso, os 29 alunos que responderam 3a) só calcularam um dos valores pedidos, o que levanta a hipótese de que os alunos não estão acostumados a esse tipo de enunciado. E quando olhamos para os cálculos realizados, nenhum aluno usou os parênteses, que é de extrema importância nas contas de subtração com números inteiros. Isso ficou muito notório quando contabilizamos os erros e acertos, em que 41% acertaram, enquanto os 59% restantes erraram nos sinais, o que nos mostra que os alunos apresentam dificuldades em lidar com expressões numéricas que envolvam subtrações com números inteiros por não dominarem esse tipo de representação. É importante dominar a representação sim! Pois futuramente a má utilização de símbolos pode comprometer a aprendizagem de conceitos.

Na questão 3b), do total de alunos, 34 responderam fazendo o uso prioritário da fórmula que fornece as raízes em função dos coeficientes, como exemplifica a Figura 13.

Figura 13 – uso de fórmula para calcular as raízes




Fonte: dados da pesquisa, 2019

Como pôde ser observado, o estudante identificou os coeficientes, calculou o discriminante e usou a fórmula. Neste caso, inferimos que o estudante não compreende o conceito de raiz, pois não recorreu aos resultados de 3a) para responder 3b).

Cabe mencionar que aconteceram erros e acertos na aplicação da fórmula. Dos 34 que fizeram o uso da fórmula, 10 apresentavam erros e não conseguiram chegar ao resultado final, e 24 usaram a fórmula corretamente, sendo que 10 desses 24 erraram no cálculo de uma das raízes por não apresentarem domínio em expressões numéricas que envolve subtração com números inteiros, conforme já mencionado na questão 3a).

Uma análise geral dos procedimentos de 3b) nos sugere que os estudantes, ao longo de sua formação, são orientados a privilegiar cálculos e uso de fórmulas, porém não os dominam completamente.

Na questão 3c), mesmo com a orientação da professora, dos 24 alunos que conseguiram determinar pelo menos uma das raízes, apenas 2 souberam escrever a função na forma fatorada corretamente, 14 erraram apenas nos sinais, pela não utilização dos parênteses no caso da raiz negativa, o que nos remete ao comentário já feito em 3a), onde a má utilização dos símbolos compromete a aprendizagem de conceitos, e 11 não entenderam o que deveria ser feito.

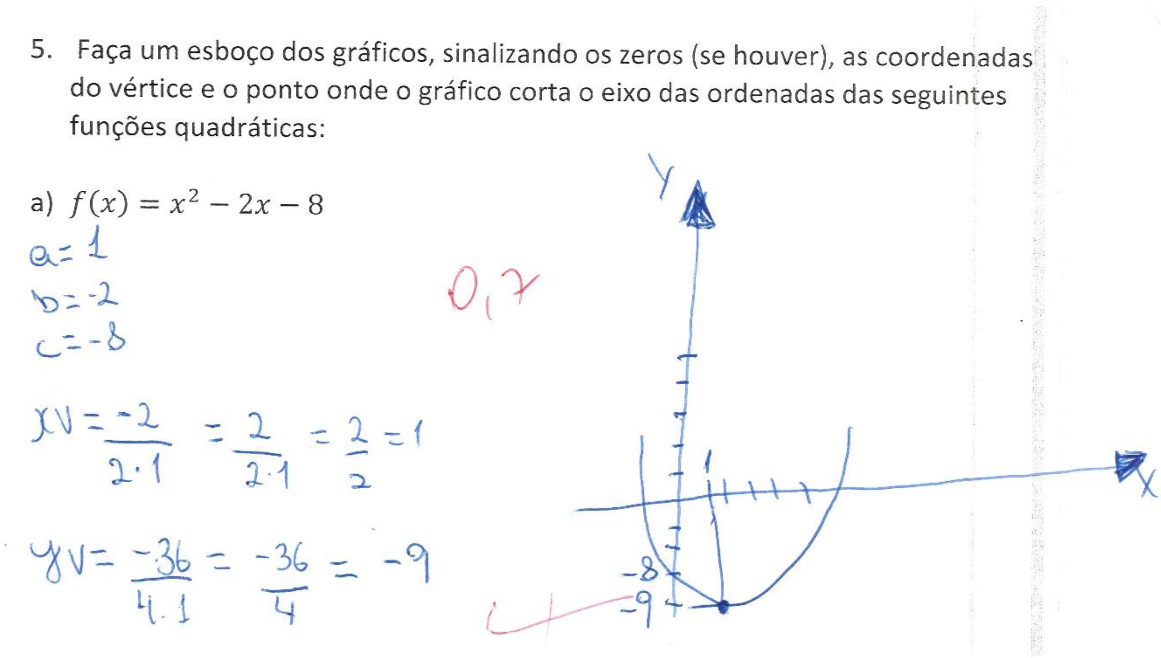
Observando globalmente a questão 3, levantamos a hipótese de que a realização mecânica das tarefas é algo que os alunos estão desenvolvendo ao longo da vida escolar.

Na 4ª questão foram apresentados 7 gráficos, sendo 3 de função polinomial do 2º grau, 1 de função modular, 1 de função logarítmica, 1 de função polinomial de 1º grau e 1 de função racional, solicitando que fossem identificados quais representavam uma função polinomial do 2º grau. Dos 38 alunos, apenas 4 deixaram essa questão em branco. Os outros 34 responderam corretamente. O sucesso nessa questão sugere que os alunos conseguem fazer uma leitura correta do gráfico de uma função quadrática. É importante comentar que o sucesso na leitura do gráfico das funções polinomiais do 2º grau não nos permite levantar a hipótese de que dominam os outros gráficos propostos na questão.

De todas as atividades propostas no teste, essa questão foi a que teve o maior percentual de acertos, com 89% dos alunos identificando corretamente os gráficos.

Na 5ª questão foi solicitado que fizessem um esboço do gráfico para cada lei de formação dada nos itens a), b) e c), apresentando as coordenadas do vértice da parábola, as raízes, caso existam, e os pontos de interceptação do gráfico com o eixo das ordenadas do plano cartesiano. Ao analisarmos os 114 itens dessa questão, concluímos que 85 foram deixados em branco, sendo 9 testes com a questão 5 totalmente em branco, e 29 testes com apenas o item a) feito. Aliás, o item a) foi o único feito pelos alunos, o que totaliza 29. Ainda assim, nenhum foi feito com todos os elementos pedidos. Desses 29 feitos, 24 apresentaram um esboço do gráfico e os cálculos do vértice da parábola, enquanto os outros 5 só realizaram os cálculos do vértice da parábola, conforme podemos visualizar na imagem.

Figura 14 – esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 8$




Fonte: dados da pesquisa, 2019

O fracasso na realização dessa atividade mostra a dificuldade que os alunos têm ao passar da linguagem algébrica para a linguagem gráfica. Além disso, os alunos não conseguem associar uma situação proposta aos conceitos que dominam sobre função quadrática. E isso sinaliza um domínio ainda muito baixo e que é preciso avançar no estudo de funções quadráticas, assim como requer uma melhor interpretação de um texto.

As questões 6, 7, 8 e 9, abordavam problemas que recaem numa função quadrática, foram deixadas completamente em branco. Esse resultado reforça o quanto é preciso avançar no estudo das funções quadráticas. E revela também que para que a resolução de problemas deixe de ser o maior desafio do ensino da função quadrática, resta ainda o desafio de ensinar nossos alunos a transformar um problema matemático em uma sentença matemática que represente uma função qualquer.

# 4 SUGESTÕES PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Quando elaborei o teste diagnóstico procurei seguir uma sequência de conhecimentos para o ensino da função quadrática. Entendo que o ponto inicial desse estudo passe pelo conhecimento da lei de formação que representa uma função quadrática. Não vejo sentido iniciar esse estudo sem que o aluno saiba como é a sentença matemática que representa tal função. Ao mesmo tempo, de posse do resultado do teste aplicado, percebi que a abordagem deste assunto não pode ficar isolada dos problemas contextualizados. Os alunos de uma forma geral não têm muito interesse pelo estudo da matemática, e isso se dá porque boa parte do conhecimento matemático fica muito presa ao conhecimento algébrico. O estudo da função quadrática possui uma infinidade de aplicações práticas, o que possibilita o professor a tornar a aula mais atrativa para o aluno. Aliás, segundo Ausubel (2003), uma das principais características para se promover a aprendizagem significativa é a predisposição do estudante em aprender.

Os métodos/estratégias que vem sendo utilizados pelos professores, têm sido bastante discutidos. Os estudantes estão cada vez mais conectados com a tecnologia e desinteressados pelo método "tradicional" adotado por boa parte dos docentes, onde o ensino é descontextualizado, firmado apenas em algoritmos e técnicas operatórias.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio nos dizem que o estudo das funções deve ser contextualizado, não se limitando de situações puramente abstratas ou o uso de tabelas, em que o professor propõe uma atividade com uma equação para que os estudantes atribuam valores para a variável $\boldsymbol{x}$ e calculem $\boldsymbol{y}$.

Segundo Santos, "a verdadeira aprendizagem se dá quando o aluno (re)constrói o conhecimento e forma conceitos sólidos sobre o mundo, o que vai possibilitá-lo agir e reagir diante da realidade". Para Santos, toda estratégia de aprendizagem deve passar por sete etapas, que são: dar sentido ao conteúdo, especificar, compreender, definir, argumentar, discutir e levar para a vida. Estas etapas não precisam seguir essa ordem, necessariamente, embora seja dessa forma que elas costumam ocorrer. O significado/importância de cada etapa será resumido.

- Dar sentido ao conteúdo: as atividades propostas pelo docente devem ter um significado contextual;

- Especificar: desenvolver perguntas que abordem elementos específicos do objeto de estudo;

- Compreender: através dos métodos de aprendizagem utilizados, esse é o momento em que se constrói o conceito;
- Definir: é aqui que o aluno interpreta com suas palavras o objeto de estudo compreendido;
- Argumentar: é nesta etapa que o aluno relaciona os conceitos apresentados;
- Discutir: é aqui que o aluno cria uma cadeia de raciocínio para argumentar o seu discurso de forma coerente;
- Levar para a vida: Aqui é onde se aplica o conceito em sua vida prática.

Assim, propõe-se o estudo da função quadrática fazendo com que o aluno seja ativo no processo, questionando, dialogando e buscando o conhecimento através da interação.

A proposta didática começaria por apresentar diversos problemas contextualizados, onde esses problemas serão discutidos e resolvidos, na medida em que os conceitos forem abordados. Por exemplo, o problema “A trajetória da bola num chute a gol é dada pela função $h(t) = -t^2 + 6t$, supondo que $h$ seja a altura atingida pela bola, em metros e $t$ o tempo, em segundos, após o chute. Quanto tempo a bola leva até atingir o chão pela primeira vez, após o chute? Qual é a altura máxima atingida pela bola?” Em seguida, propõe-se que se inicie o estudo específico da função quadrática, abordando outras atividades em que sejam possível verificar se o aluno compreendeu os conceitos abordados anteriormente. Sempre que for abordado um assunto específico do estudo da função quadrática, a ideia é voltar no problema inicial e relacionar esse conceito com o problema proposto. Por exemplo, quando for abordada com o aluno a lei de formação que caracteriza uma função quadrática, identificando seus coeficientes, volta-se ao problema proposto inicialmente e dialoga-se com o aluno para que o mesmo identifique esses elementos. Assim, a medida que cada conceito específico for abordado, volta-se ao problema inicial e discute-se com o aluno como tal conhecimento se aplica no problema proposto.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos anos a educação vem sendo amplamente discutida em diversas áreas do conhecimento, sempre com ênfase na aprendizagem por áreas de conhecimento. Através desse estudo, foi possível observar quanto o estudo das funções quadráticas não está sendo assimilado por boa parte dos alunos, principalmente no que diz respeito a resolução de problemas contextualizados.

Este trabalho apresentou um questionário que foi aplicado em alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública do Estado do Rio de Janeiro, com o intuito de verificar o nível de conhecimento que alunos do 1º ano do ensino médio têm sobre funções quadráticas. Após análises dos resultados obtidos, foi possível perceber como os alunos apresentam dificuldades na realização de atividades relacionadas ao estudo de função quadrática. O teste apresentou questões que abordam os conceitos sugeridos nas orientações curriculares para o 1º ano do ensino médio.

Dentre os conceitos abordados, o que mais me causou preocupação foi o que envolveu a resolução de problemas que recaem numa função quadrática, onde nenhum aluno conseguiu resolver nenhuma das questões apresentadas. Por isso, foi proposto, no capítulo anterior, que o estudo de função quadrática seja trabalhado desde o início com problemas contextualizados que envolvam algo mais concreto para os alunos.

É de conhecimento de todos as dificuldades encontradas em ministrar aulas em escolas públicas de ensino, onde muitas vezes não há uma estrutura adequada, além da desmotivação dos professores, que recebem uma baixa remuneração financeira, falta de interesse dos alunos e, a falta de apoio dos poderes constituintes. Além dessas dificuldades, é importante destacar que os professores devem ser formados para terem um olhar diferenciado sobre os erros dos alunos. Não adianta ficar lamentando, ou reclamando, da falta de conhecimentos básicos apresentados pelos alunos. Se faz necessário que o docente entenda a importância da diagnose dos erros cometidos pelos educandos, que de posse dessa diagnose, possa organizar e planejar suas aulas.

Por fim, que o resultado desta pesquisa possa subsidiar outros professores, tendo a certeza de que o estudo e pesquisa sobre este tema não se esgota aqui.

# REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. Aquisição e retenção de conhecimento: uma perspectiva cognitiva. Paralelo, 2003.

BRASIL. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. MEC, vol. 2, 2006.

L. R. Dante. Matemática: contexto e aplicações. Ática, vol. 1, 2010.

DOS SANTOS, J. C. F. Aprendizagem significativa: modalidades de aprendizagem e o papel do professor, Mediação, 2008.

LIMA, Elon Lages, Números e Funções Reais, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2013, SBM.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

LIMA, E. L. et al. (1997) A Matemática do Ensino Médio. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Volume 1. (Coleção do Professor de Matemática).

GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO. Currículo Mínimo 2012 Matemática. Disponível em <http://bit.ly/XR6GxU>. Acesso em 15/02/2013.

BOYER, C. B. (1996). História da Matemáticas 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA., 2003.

SANTOS, L. M. Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática. Curitiba: Ibpex, 2009.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. Boletim GEPEM, n.55, 2009.

VASCONCELOS, M. B. F; RÊGO, R. G. A contextualização como recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In: VI EPBEM, Monteiro. PB, 2010.

PIACESKI, Maria Lucia. O estudo da função quadrática na metodologia de resolução de problemas, UEL, 2014.

**ANEXO -** Questionário aplicado aos alunos

1. Dentre as funções abaixo, marque com um x as que são polinomiais do 2º grau (ou quadráticas):

( ) $y = 3x + 5$
( ) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
( ) $g(x) = 4x^2 - 16$
( ) $h(x) = -3x^3 + 5x^2$
( ) $t(x) = 4 - x^2$
( ) $p(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 10$
( ) $r(x) = (x - 7)^2$
( ) $c(x) = (x + 5)(x - 4)$

2. Das funções identificadas como sendo quadráticas no exercício 1, reescreva tais funções e informe os valores dos coeficientes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$e $\boldsymbol{c}$**,** de cada uma. (Lembrando que toda funções quadrática pode ser escrita como $y = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$, tal que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$e $\boldsymbol{c}$são números reais, sendo$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$**.**)

3. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - x - 6$, determine:

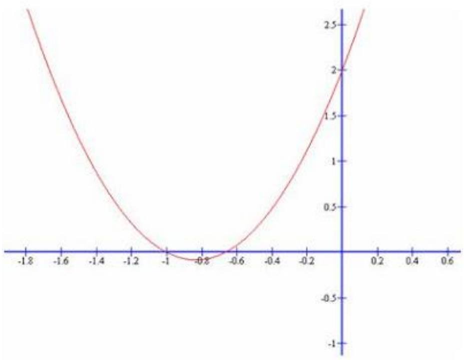
a) $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\ e\ f(3)$.

b) De acordo com os valores da função encontrados no item a), quais são as raízes, ou zeros, da função?

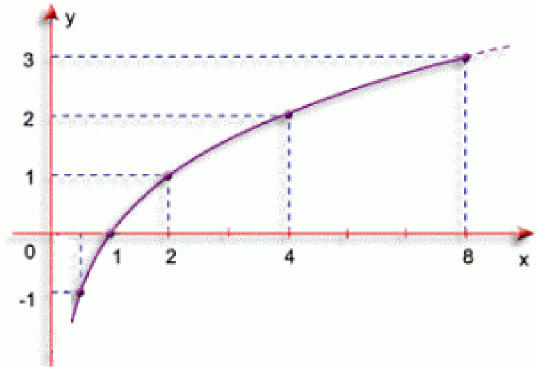
c) Usando o item b), escreva a função na forma fatorada. Ou seja, como um produto de dois polinômios de 1º grau.

4. Quais dos gráficos a seguir representam uma função quadrática?

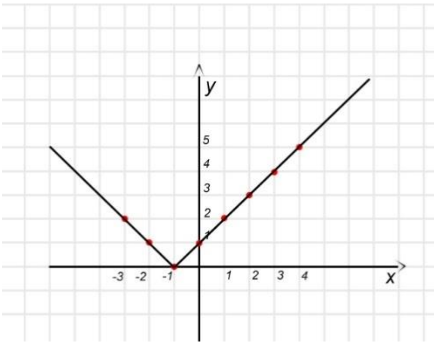
a)



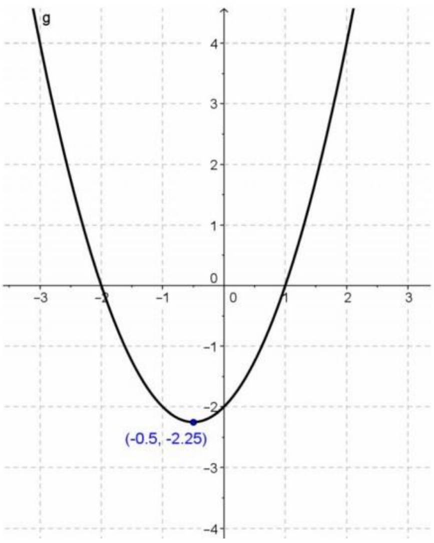
b)



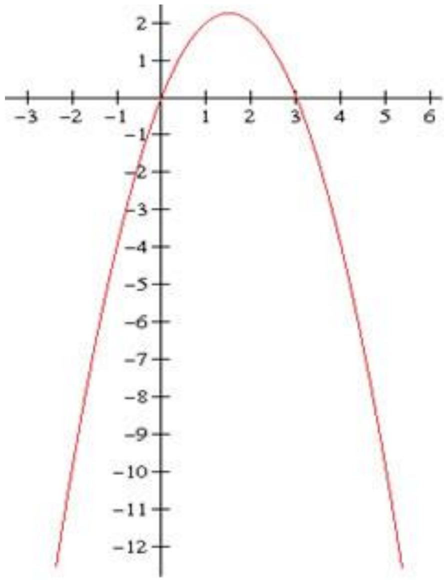

c)



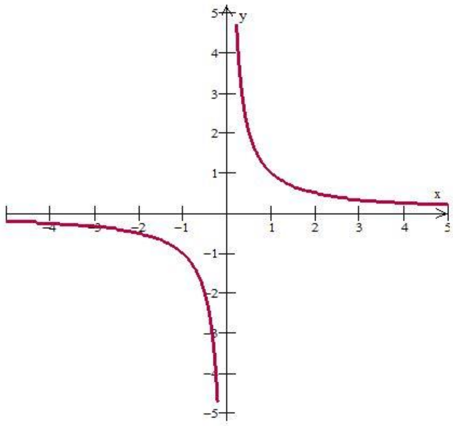

d)



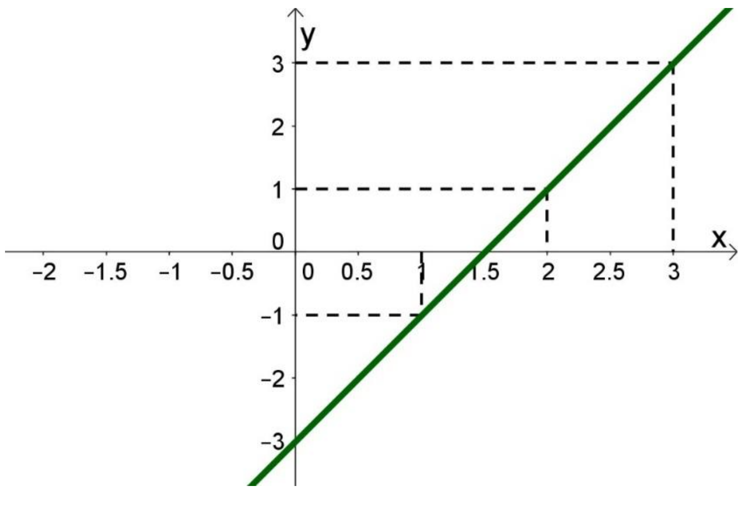

e)



f)



g)



5. Faça um esboço dos gráficos, sinalizando os zeros (se houver), as coordenadas do vértice e o ponto onde o gráfico corta o eixo das ordenadas das seguintes funções quadráticas:

   a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$
   b) $y = -x^2 - 4$
   c) $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

6. Tem-se uma sala quadrada de 25 $m^2$ de área. Deseja-se ampliar a mesma para que tenha uma área de 30 $m^2$, quais serão as novas dimensões dessa sala?

7. (PC MG 2008 – Acadepol – adaptado) O número de ocorrências registradas das 12 às 18 horas em um dia do mês de janeiro, em uma delegacia do interior de Minas Gerais, é dado por $f(t) = -t^2 + 30t - 216$, em que $12 \leq t \leq 18$ é a hora desse dia. Qual foi a hora em que ocorreu o número máximo de ocorrências nesse dia? E o qual foi o número máximo de ocorrência nesse dia?

8. (PM ES 2013 – Funcab) Uma festa no pátio de uma escola reuniu um público de 2800 pessoas numa área retangular de dimensões $x$ e $(x + 60)$ metros. Determine o valor de $x$, em metros, de modo que o público tenha sido de, aproximadamente, quatro pessoas por metro quadrado.

9. (PM Pará 2012 - adaptado) Uma empresa criou o modelo matemático $L(x) = -100x^2 + 1000x - 1900$ para representar o lucro diário obtido pela venda de certo produto, na qual $x$ representa as unidades vendidas. Quantas unidades essa empresa precisa vender por dia para que seu lucro seja máximo? Qual é o valor desse lucro máximo? E quantas peças essa empresa precisa vender, no mínimo, para que não tenha prejuízo?