UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
CAMPOS AVANÇADO DE JATAÍ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA PROPOSTA DE INTERDISCIPLINARIDADE UTILIZANDO ANÁLISE COMBINATÓRIA E O ALGORITMO DE COLÔNIA DE FORMIGAS NO ENSINO MÉDIO.

DELMA ERKS PIRES

JATAÍ - GO
2019

sistema de bibliotecas ufg

PRPG

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Delma Erks Pires

Título do trabalho: Uma proposta de interdisciplinaridade utilizando análise combinatória e o algoritmo de colônia de formigas no ensino médio.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Independente da concordância com a disponibilização eletrônica, é imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Delma Erks Pires

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Esdras Teixeira Costa

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 10/01/2020

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] As assinaturas devem ser originais sendo assinadas no próprio documento, imagens coladas não serão aceitas.

Versão GRT/BC fevereiro de 2020

Delma Erks Pires

Uma proposta de interdisciplinaridade utilizando análise combinatória e o algoritmo de colônia de formigas no ensino médio.

Dissertação apresentada ao Programa de Mêstrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Universidade Federal de Goiás
PROFMAT

Jataí
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Pires, Delma Erks
Uma proposta de interdisciplinaridade utilizando análise combinatória e o algoritmo de colônia de formigas no ensino médio.
[manuscrito] / Delma Erks Pires. - 2019.
lviii, 58 f.: il.

Orientador: Prof. Esdras Teixeira Costa.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2019.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, mapas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas.

1. Otimização. 2. Modelagem matemática. 3. Métodos computacionais. I. Teixeira Costa, Esdras, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 05 da sessão de Defesa de Dissertação de DELMA ERKS PIRES, que confere o título de Mestra em MATEMÁTICA.

No dia doze de dezembro de dois mil e dezenove, a partir das 10h00, no auditório do prédio da pós-graduação, da Universidade Federal de Jataí, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "UMA PROPOSTA DE INTERDISCIPLINARIDADE UTILIZANDO ANÁLISE COMBINATÓRIA E O ALGORITMO DE COLÔNIA DE FORMIGAS NO ENSINO MÉDIO". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor ESDRAS TEIXEIRA COSTA (UAE de Ciências Exatas), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor FLAVIO GOMES DE MORAES (UAE de Ciências Exatas), membro titular interno, Professor Doutor JAIR PEREIRA DE MELO JÚNIOR; membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata aprovada pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor ESDRAS TEIXEIRA COSTA, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia doze de dezembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Esdras Teixeira Costa**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/12/2019, às 11:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Flavio Gomes De Moraes**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/12/2019, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jair Pereira de Melo Junior**, **Usuário Externo**, em 12/12/2019, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1033362** e o código CRC **62984B3A**.

Referência: Processo nº 23070.043379/2019-32 SEI nº 1033362

PIRES, Delma Erks. **Uma proposta de interdisciplinaridade utilizando análise combinatória e o algoritmo de colônia de formigas no ensino médio**. Projeto de Pesquisa, Tópicos de Matemática (MA-40), defendido e aprovado pela banca examinadora do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Unidades Acadêmica Especial de Ciências Exatas, Regional Jataí, Universidade Federal de Goiás, em 12 de dezembro de 2019, constituída pelos professores:

____

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Orientador e presidente

____

Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes
Membro interno

____

Prof. Dr. Jair Pereira de Melo Júnior
Membro externo

Resumo

Observa-se que o objetivo dos métodos computacionais inseridos em qualquer segmento é de dinamizar e organizar dados e atividades desenvolvidas em cada ambiente. Na educação não é diferente, a busca por respostas mais precisas e métodos mais eficazes, são prioridades, também se prima pela eficiência e por uma busca de qualidade na resolução de problemas, por isso o Ensino da Matemática está cada dia mais antenado com as pesquisas que priorizam o desenvolvimento da pessoa humana para viver num mundo de diversidades, buscando descobertas que facilitam a vida cotidiana com o propósito de tornar o conhecimento mais acessível e dinâmico; assim, a procura por uma informação fidedigna torna-se um instrumento importante para o processo de desenvolvimento educacional, além de ser uma ferramenta que favorece com abrangência o aprender e o fazer matemático para colaborar com o ensino e aprendizagem no qual está inserido. Este trabalho foi baseado em pesquisas bibliográficas de renomeados estudiosos sobre Otimização Matemática, Modelagem Matemática, Análise Combinatória, utilizando o Algoritmo de Colônia de Formigas através do Problema do Caixeiro Viajante - PCV. A ideia é que se possa mostrar a interdisciplinaridade em problemas como, por exemplo, encontrar o melhor caminho entre as rotas fornecidas através dos dados coletados in loco. Foi utilizado como exemplo prático a rota X do transporte escolar de uma escola rural do município de Rio Verde. Dessa forma, o objetivo do trabalho é mostrar a possibilidade de trabalhar interdisciplinaridade no Ensino Médio através de problemas como encontrar o melhor caminho através da combinação, utilizando fatores da probabilidade, ou seja o melhor desempenho possível para a situação apresentada e também simular através de modelagem matemática e otimização uma tarefa da vida real, utilizando a ideia do comportamento biológico. Neste contexto, acredita-se que este trabalho conta com um tema matemático atrativo que pode chamar a atenção dos alunos para as aulas práticas, utilizando a linguagem computacional para mostrar que a disciplina de Matemática pode ser usada como ferramenta de simulação de situações do mundo real, mesmo onde aparentemente não haveria lugar para o conhecimento matemático. Verificou-se então que é possível abordar a Matemática do Ensino Médio através desta proposta, com uma melhor solução por meio de grafos priorizando a otimização, visando desenvolver uma opção que seja mais eficiente, procurando um caminho que leve com mais eficiência a iteração entre o problema e sua solução.

Palavras-Chave: otimização, modelagem matemática, métodos computacionais.

Abstract

It is known that the purpose of the computational methods inserted in any segment is to streamline and organize data and activities developed in each environment. In education is no different, the search for more accurate answers and more effective methods are priorities, also strives for efficiency and a quest for quality problem solving, that's why Mathematics Teaching is becoming more and more aligned with research that prioritizes the development of the human person to live in a world of diversity, seeking discoveries that make everyday life easier for the purpose of making knowledge more accessible and dynamic; like this, the search for reliable information becomes an important tool for the educational development process, in addition to being a tool that comprehensively favors learning and doing mathematics to collaborate with the teaching and learning in which it is inserted. This work was based on bibliographical research of renowned scholars on Mathematical Optimization, Mathematical Modeling, Combinatorial Analysis, using the Ant Colony Algorithm through the Traveling Salesman Problem - TSP. The idea is to show that is possible to use interdisciplinarity in high school through problems like to find the best route between places using data collected in loco. Thus, the objective of the work is to show that it is possible to work with interdisciplinarity in high school using problems like to find the best course through routes by combination, using probability factors, that is, the best possible performance for the situation presented is to simulate through mathematical modeling and optimization a real life task, using the idea of biological behavior. In this context, it is believed that this work has an attractive mathematical theme that can draw students' attention to practical classes, using computational language to show how the math discipline can be used as a simulation tool for real world situations, even where apparently there would be no room for mathematical knowledge. It was then verified that it is possible to approach High School Mathematics through this proposal, with a better solution through graphs prioritizing optimization, with a better solution through graphs prioritizing optimization, looking for a path that most effectively leads the iteration between the problem and its solution.
Keywords: optimization. mathematical modeling. computational methods.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O problema da viagem entre cidades 15
Figura 2 – Diagrama de Venn 20
Figura 3 – Gráfico de Otimização: O caminho feito pela formiga é uma solução do problema 25
Figura 4 – Grafos: A parte (a) é a representação de um grafo simples e a parte (b) mostra a nomenclatura de cada componente do esquema. 27
Figura 5 – Grafo: Relacionamentos numa rede social, dessa forma, é possível modelar conexões em rede sociais.. 28
Figura 6 – Labirinto: Modelagem matemática buscando a saída de um labirinto . 28
Figura 7 – Labirinto: Ligações de um nó em outro, através de arestas 29
Figura 8 – Labirinto: O papel da probabilidade na aleatoriedade usada por cada formiga. 29
Figura 9 – Direção das arestas: Relações representadas pelas arestas têm sentido definido. 30
Figura 10 – Tipos de Grafos 31
Figura 11 – Grafos Hamiltonianos - 2019 32
Figura 12 – Formigueiro/Comida 34
Figura 13 – Formigueiro/Comida - 2019 35
Figura 14 – Grafos entre 5 cidades 37
Figura 15 – Total de quilometragem partindo da cidade I. 38
Figura 16 – Resultado do Solver/Excel 40
Figura 17 – Mapa da região da Comunidade São João. 44
Figura 18 – Resposta do problema contextualizado no MatLab 46
Figura 19 – Resposta do problema contextualizado no Solver 49

Sumário

	Introdução	9
1	ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE	14
1.1	Análise combinatória	14
1.2	Princípio fundamental da contagem	14
1.3	Fatorial	16
1.4	Permutações	16
1.5	Arranjos	17
1.6	Combinações	18
1.7	Probabilidade	19
2	FUNDAMENTOS DO ALGORITMO DE COLÔNIA DE FORMIGAS	21
2.1	Das formigas naturais para as formigas computacionais	21
2.1.1	Interdisciplinaridade	21
2.1.2	Comportamento das formigas naturais	23
2.2	Formigas artificiais e o caminho mínimo	25
2.3	Conceitos básicos sobre grafos	26
2.4	Grafos hamiltonianos	30
2.5	O problema do caixeiro viajante	32
2.6	Algoritmo de colônia de formigas (ACF) aplicado ao problema do caixeiro viajante (PCV)	33
2.7	Modelagem e otimização matemática aplicadas ao PCV	35
2.7.1	Utilizando a ferramenta Solver	39
2.8	O algoritmo de colônia de formigas aplicado ao problema do caixeiro viajante	40
3	MATERIAIS E MÉTODOS	42
3.1	Criação de um problema contextualizado — Mundo real	43
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
4.1	Solução do problema via MatLab	45
4.2	Solução do problema via Solver do MS-Excel	48
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	53

APÊNDICE A – ALGORITMO DE COLÔNIA DE FORMIGAS PARA MATLAB 58

Introdução

A utilização de abordagens matemáticas utilizando métodos computacionais como ferramenta no desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas diversos no estudo da Matemática vem sendo bastante praticada.

O uso desses métodos em todos os setores da vida vem crescendo a cada dia, para os pesquisadores Oliveira & Moura (2015), a nossa sociedade passa por momentos de transformações, essas mudanças ocorrem devido às novas tecnologias de informação e comunicação, que aos poucos, vão se interligando a atividade educativa, além disso, e a forma de ensinar e aprender podem ser beneficiados por essas tecnologias, como por exemplo, a Internet, que traz uma diversidade de informações, mídias e softwares, que auxiliam nessa aprendizagem. Enfatizam ainda, que sua prática auxilia no desenvolvimento da capacidade de analisar, deduzir e criar.

Uma percepção muito interessante relacionada ao tema estudado foi desenvolvido por Pasqualotti (2010), o autor investigou como novos modelos e tecnologias computacionais podem contribuir no processo de ensino, aprendizagem e elaboração de novos saberes sobre a docência.

Pasqualotti, diz que os resultados obtidos ali relevam que:

> A busca de novos modelos e tecnologias, para apoio ao ensino, deve ser orientada para a solução ou minimização dos problemas de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, três são os princípios para o uso de fer-ramentas computacionais na Educação Matemática: o primeiro define que a tecnologia efetiva tem que co-evoluir com as mudanças estruturais em educação e deve oferecer um apoio para as mudanças graduais que poderão acontecer; o segundo fator enfoca as ações que os estudantes executarão em suas atividades profissionais; o terceiro princípio refere-se aos diferentes tipos de aprendizagem, que são acrescidos pela formas de apresentação multissensorial e pelas novas modalidades de experiências interativas. (PASQUALOTTI, 2010, p.13)

Nota-se pelo exposto, que existe uma busca por uma evolução no campo educacional. O estudante deve ser orientado para o campo profissional tendo em vista o futuro, buscando soluções flexíveis para uma mesma situação-problema, soluções que além de desenvolver a criatividade, focam no aumento de concentração e do aprendizado. Assim, quando se estuda e desenvolve algoritmos voltados a prática educacional estamos ensinando para a vida.

Observa-se pela prática pedagógica, que a linguagem matemática é específica da disciplina, com dizeres e saberes também específicos; diante desse contexto, ficam evidentes as dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções de problemas propostos nas aulas de Matemática em conteúdos distintos. Dante (1998), afirma que embora a resolução de problemas seja tão valorizada, a mesma é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula.

Para amenizar este tipo de problema, nota-se a importância dos professores compreender e aprender como trabalhar esta metodologia, para desenvolver no discente a capacidade de resolver situações desafiadoras com criatividade, interagindo entre os colegas para que a comunicação e o aprendizado se desenvolva melhor.

Então, o aperfeiçoamento e a capacitação dos professores para que o ensino seja de excelência, e assim, aprimorado, são de suma importância para que as mudanças possam atingir patamares desejados. Como o ensino é para vida, o desenvolvimento matemático através das tecnologias abrange os patamares dos saberes com mais agilidade se os profissionais da educação estiverem dispostos a utilizar novas ferramentas.

Tornar as aulas de matemática mais atrativas, fica a cargo de cada educador, que deve buscar novas metodologias para que o ensino e aprendizagem aconteçam com mais eficiência e prazer.

Pode ser percebido, através da prática docente que muitos conteúdos podem ser trabalhados fora do planejamento tradicional, nota-se que esses conteúdos podem ser desenvolvidos com facilidade através do uso das novas tecnologias e que muitas vezes não são utilizados por motivos diversos.

De acordo com um depoimento encontrado em Fontoura:

> "As novas tecnologias ajudam no aprendizado a partir do momento em que o professor se apropria desse conhecimento", avalia Diego Trujillo, professor de inglês e coordenador de tecnologia no Colégio Ítalo. "Mas vejo que a formação ainda é carente. Há um desejo do professor de aprender, mas ele não sabe para onde ou como ir." (FONTOURA, 2018, p.2)

Percebe-se, pelo exposto, que essa apropriação de saber não depende apenas do professor, começa desde a infraestrutura da unidade escolar. Torna-se necessária a adaptação tanto do profissional da educação quanto da escola. A ausência de programas de capacitação docente para o uso das tecnologias também cria obstáculos para aplicação das mesmas.

A educação, nos dias atuais, está em busca de novos métodos para estimular o ensino e aprendizagem, para tanto, faz-se necessária uma busca por novos instrumentos didático-pedagógicos. O uso de abordagens matemáticas tomando como base os métodos computacionais como ferramenta no desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas entre estudantes vem sendo bastante utilizada. Pode-se citar como exemplo o trabalho de Santos (2017), da Universidade Federal do Paraná, em favor da qualidade de uma educação conectada, buscando enfatizar que sua prática auxilia no desenvolvimento da capacidade de analisar, deduzir e criar, enfim, de aprender a buscar soluções flexíveis para uma mesma situação-problema além de desenvolver a criatividade.

O pesquisador Barcelos (2004), afirmou que: “As TIC[1] vêm sendo incorporadas ao processo de ensino e aprendizagem[2] como ferramenta de mediação entre o indivíduo e o conhecimento”. Quando bem utilizadas, as TIC podem tornar a aprendizagem mais eficaz e oferecer ao aluno uma forma sedutora de acesso a conhecimentos e competências Unesco (2001). Assim, observa-se que a utilização dos métodos computacionais como recurso pedagógico na Matemática, se bem desenvolvida, tende a tornar o ensino e aprendizagem da disciplina em questão mais agradável.

Atualmente há uma busca por técnicas pedagógicas que permitem tornar o ensino cada vez mais dinâmico, neste sentido, o uso das tecnologias permite a elaboração de aulas mais atrativas, possibilitando que os alunos aprendam com mais facilidade. Para corroborar isso, pode-se citar Seegger, Canes & Garcia (2010), onde relatam que a partir do momento que o professor participa de capacitação e põe em prática os conhecimentos adquiridos para dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, esse se torna mais agradável, juntando o lúdico ao teórico.

A prática das tecnologias contribui de forma significativa, para que se desenvolva um pensamento matemático diferenciado, enfatizando que a necessidade do raciocínio lógico é vital para uma compreensão integrada do mundo atual. Libâneo, Oliveira & Toschi (2007, p.309) afirmam que: “o grande objetivo das escolas é a aprendizagem dos alunos, e a organização escolar necessária é a que leva a melhorar a qualidade dessa aprendizagem”. Oliveira & Moura, somando a este panorama em relação aos recursos tecnológicos, destaca:

> A utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino, é cada vez mas necessária, pois torna a aula mais atrativa, proporcionando aos alunos uma forma diferenciada de ensino. Para que isso se concretize de maneira que todos os envolvidos sintam-se beneficiados, a questão das TIC deve estar bem consolidada. A forma de ensinar e aprender podem ser beneficiados por essas tecnologias, como por exemplo, a Internet, que traz uma diversidade de informações, mídias e softwares, que auxiliam nessa aprendizagem. (OLIVEIRA; MOURA, 2015, p.76)

---

[1] Tecnologias da Informação e Comunicação

[2] Está sendo utilizado ensino e aprendizagem, ao invés de ensino-aprendizagem, por concordar com Assmann (1996) quando afirma que se usamos “-” ao invés do “e” simulamos que se trata de um processo único que não existe segundo este autor: o ensinar refere se à gestão e à supervisão de tarefas docentes, ao passo que aprender refere-se ao desenvolvimento de experiências pessoais de conhecimento socialmente validável no convívio humano.

A aplicação de recursos tecnológicos neste caso, não seria viável sem os conhecimentos matemáticos, eles estão intrinsecamente ligados. No estudo em questão, a Análise Combinatória está totalmente ligada ao Algoritmo das Formigas, e este, por sua vez só foi possível ser desenvolvido a partir da ideia desse conteúdo matemático, conforme explicação de Neto & Filho (2009), pode ser notado pela probabilidade de escolha de um caminho por uma determinada formiga.

Matematicamente, este algoritmo é fundamentado na distribuição de m formigas em n cidades e em permitir que cada uma destas formigas percorra um caminho fechado passando apenas uma vez por cada uma destas n cidades, segundo Dorigo & Gambardella (1997).

A partir da modelagem matemática, que é fundamental para criação e desenvolvimento do problema, pode-se dizer que a relação deste algoritmo com a Matemática, se sobressair também na questão probabilística. Assim, o objetivo dessa dissertação é mostrar como é possível trabalhar interdisciplinaridade através de exemplos como encontrar o melhor caminho através da combinação, utilizando fatores da probabilidade, ou seja, o melhor desempenho possível para a situação apresentada. Os passos técnicos, para chegar em tal solução, serão apresentado no decorrer do desenvolvimento do trabalho.

Será feita agora um resumo da estrutura deste trabalho, que foi baseado em pesquisas bibliográficas, como se pode constatar no decorrer do desenvolvimento.

No primeiro capítulo será tratada a base matemática deste trabalho que é comumente estudada no ensino médio, ou seja, serão abordadas a Análise Combinatória e a Probabilidade, contextualizado com exemplos matemáticos voltado ao tema.

Logo em seguida, no segundo capítulo, tratamos da interdisciplinaridade, com grande destaque para a temática sobre os Fundamentos do Algoritmo de Colônia de Formigas, que é a principal peça fora da Matemática presente no trabalho. Após as observações sobre esse algoritmo, foi abordado sobre o clássico Problema do Caixeiro Viajante - PCV.

A título de informação prévia, o algoritmo de colônia de formiga foi formulado quando o pesquisador italiano Marco Dorigo, ao observar o comportamento das formigas, percebeu que elas tinham tomado o caminho mais curto entre uma fonte de alimento e sua colônia, isso ocorre devido a liberação e capacitação pelas formigas de uma substância chamada feromônio, esta é uma substância volátil que permite a comunicação indireta entre as formigas, quando uma delas encontra uma fonte de alimento e esta retornando para a colônia, ela libera uma maior quantidade dessa substância que vai se depositando pelo caminho trilhal, entretanto por ser volátil ocorre a vaporização a uma certa taxa ao longo do tempo, essa observação incentivou Marco Dorigo a estudar e modelar matematicamente esse comportamento das formigas o que futuramente foi reconhecido como uma maneira alternativa e eficiente para resolver outros problemas do cotidiano.

O terceiro capítulo contextualiza a interdisciplinaridade, detalhando o problema de uma aplicação desenvolvida no mundo real, ou seja, uma modelagem matemática para o Problema do Caixeiro Viajante, envolvendo sua parte histórica, com base na problemática do transporte escolar da EMREF Escadinha do Futuro, que é uma escola rural situada no município de Rio Verde, passando por situações envolvendo as rotas desse transporte e analisando os detalhes, discorrendo o que poderia ser realizado para melhorar problemas envolvendo essa situação, utilizando tanto a Matemática, quanto a otimização por colônias de formigas, como ferramenta na solução do mesmo, e avaliando o antes e o depois.

Aqui também, foi visualizado a importância de recursos didático-pedagógicos para o ensino da Matemática, como o foco do trabalho são as abordagens matemáticas utilizando métodos computacionais, torna-se essencial relatar sobre essas abordagens em um aspecto pedagógico.

Assim, no quarto capítulo constam as considerações finais que encerram essa dissertação, ali serão discutidos os resultados obtidos, a importância da caracterização dessas abordagens, além de enfatizar as etapas e a forma de trabalhar com as novas tecnologias em sala de aula, de modo que os alunos em diferentes faixas etárias compreendam o conteúdo ministrado, dando destaque para as idades que compõem o quadro de alunos do Ensino Médio.

Ao fim deste trabalho, será discutido sobre o papel do profissional da educação da área de Matemática na utilização de métodos computacionais, utilizando ferramentas valiosas para o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de deixar clara a importância de se ter um recurso pedagógico capaz de dinamizar as aulas de Matemática.

1 Análise combinatória e probabilidade

1.1 Análise combinatória

Segundo Gouveia (2018), pode-se entender a análise combinatória ou apenas combinatória como sendo a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados a contagem, ou seja, é o estudo de um conjunto de possibilidades finitas, com base em critérios que possibilitam a contagem. Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis em um conjunto de elementos. A contagem nem sempre é um método simples, mas é um conteúdo da Matemática que pode elucidar melhor alguns problemas do nosso dia-a-dia.

Ainda de acordo com Almeida *et al.* (2011),

> A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem que nos permite resolver questões relacionadas a contagem com um elevado grau de dificuldade de maneira mais simplificada (ALMEIDA *et al.*, 2011, p.226).

Utilizando a Análise Combinatória como parte integrante dessa dissertação de mestrado, a expectativa é de elaborar uma maneira mais precisa de chegar ao resultado do problema ora apresentado.

Nesse sentido serão destacados agora os principais métodos e técnicas utilizados na resolução de inúmeros problemas, tais como: princípio fundamental da contagem (PFC), fatorial, permutações, arranjos e combinações.

1.2 Princípio fundamental da contagem

Segundo Paiva (2015), se um experimento E pode apresentar n resultados distintos e um experimento F pode apresentar k resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de E e F, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$. Este resultado, conhecido como princípio fundamental da contagem, será denotado por PFC.

Será explorada uma questão de Enem, que se encaixa perfeitamente neste estudo que está sendo realizado.

Exemplo 1. - Enem (2010). João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser apresentado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto *ABCDEFA* informa que ele sairá da cidade *A*, visitando as cidades B,C,D,EeF, nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades.

A figura abaixo mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

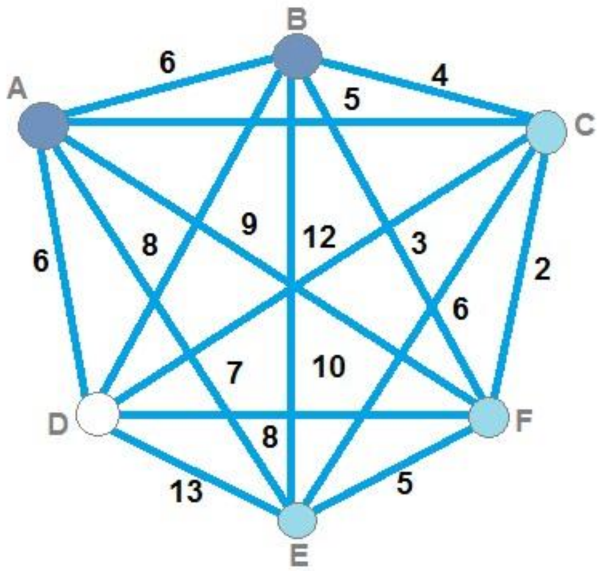

Figura 1 – O problema da viagem entre cidades
Fonte: Enem, 2010

Como João quer economizar, ele precisa determinar o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe-se que ele precisa examinar somente algumas sequências, pois os trajetos *ABCDEFA* e *AFEDCBA* tem o mesmo custo. Ele gasta 1 min e 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar a sequências possíveis no problema é de:

a) 60 min
b) 90 min
c) 120 min
d) 180 min
e) 360 min

A alternativa correta é a *b*, pois no diagrama apresentado, cada casa indica uma posição na sequência de 7 cidades, em que a cidade A deve ocupar a primeira e a última posição, as cidades B,C,D,E e F devem ser distribuídas nas posições intermediárias.

Pelo princípio fundamental da contagem, o número possível de sequências é dado por: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120$. Como cada sequência possui uma simétrica, que não precisa ser examinada, o número de sequências que João precisa analisar é 60, logo o tempo mínimo necessário, em minutos, para essa análise é $60 \cdot 1{,}5$, ou seja, 90 minutos.

Tem-se também outra possibilidade de resolução, ou seja:

Descartando as pontas, que devem ser os pontos A, as possibilidades de João efetuar as visitas de $P = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$ são de possibilidades; tempo gasto em cada sequência: 1 mim 30s = 90 segundos

90 segundos ———— 1 sequência

x segundos ———— 60 sequências

$x = 60 \cdot 90$

$x = 5400$ segundos = 90 minutos

Se os experimentos E_1, $E_2, \cdots$, E_k podem apresentar n_1, $n_2, \cdots$, n_k resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que o experimento composto de E_1, $E_2, \cdots E_k$ pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

1.3 Fatorial

Segundo Paiva (2015), seja n um número natural, com $n \geq 2$. Define-se o fatorial de n, representado por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n-1$, $n-2, \cdots, 1$. Ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot 1$$

Exemplos:

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Não será aprofundado essa técnica, mas vale ressaltar que na situação problema explorada no tópico anterior foi utilizada de forma intuitiva o conceito de fatorial.

1.4 Permutações

Conforme Almeida *et al.* (2011), dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se permutação desses n elementos todo agrupamento *ordenado* (sequência) formado por esses

n elemento. O número de permutações possíveis desses elementos pode ser obtido da seguinte forma:

i. Para escolher o primeiro elemento da sequência temos n possibilidades.
ii. Definidos os dois primeiros elementos da sequência, podemos escolher o terceiro elemento de $n - 2$ maneiras.
iii. Escolhidos os $n - 1$ primeiros elementos da sequência, o elemento que irá ocupar a última posição na sequência fica determinado de maneira única.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem na subseção 1.2, temos

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

ou seja, $P_n = n!$

Exemplo 2. (ALMEIDA *et al.*, 2011) Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns.

a) De quantas formas distintas ela pode escolher a sequência das cidades a visitar?
   [Resposta] Como são 5 cidades a serem visitadas, basta fazer a permutação de 5. São então $P_5 = 5! = 120$ formas distintas.

b) De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina?
   [Resposta] Como o destino de Petrolina já está fixado em último, sobram 4 cidades a serem escolhidas, basta fazer a permutação de 4. São então $P_4 = 4! = 24$ modos.

1.5 Arranjos

Almeida *et al.* (2011), define que dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados k a k (com $k \leq n$), qualquer agrupamento *ordenado* de k elementos escolhidos entre os n existentes. Para calcular o número de arranjos desses elementos tomados k a k, será usado o PFC (veja seção 1.2).

O primeiro elemento de um arranjo de n objetos, tomados k a k, pode ser escolhido de n maneiras diferentes; depois, o segundo elemento do arranjo pode ser escolhido de $n - 1$ maneiras; depois, o terceiro elemento do arranjo pode ser escolhido de $n - 2$ maneiras e continuando essa sequência, teremos que o último elemento do arranjo pode ser escolhido de $n - (k - 1) = n - k + 1$ maneiras diferentes. Logo:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Multiplicando-se, membro a membro, essa relação por $(n - k)! = (n - k) \cdot (n - k - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, vem:

$(n - k)! \cdot A_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot (n - k - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, donde:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

É importante destacar que será possível lançar mão dessa técnica, quando a ordem dos elementos em questão for importante, caso a ordem não seja importante, a melhor técnica é a combinação, como será abordado no próximo tópico.

1.6 Combinações

Dados n elementos distintos, chama-se combinações dos n elementos tomados de k a k, com $k \leq n$, qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n elementos. Dessa forma Almeida *et al.* (2011) descreve a dedução da fórmula da combinação, usando o princípio fundamental da contagem, para determinar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formados por k elementos distintos escolhidos entre os n, temos:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots [n - (k - 1)] = A_{n,k}$$

Contando as sequências distintas que podem ser formadas com k elementos escolhidos:

$$k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

Como qualquer permutação dos elementos de uma sequência dá origem a apenas uma combinação, o número de combinações dos n elementos tomados k a k é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

Aplicando a fórmula do arranjo, tem-se:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!}$$

Exemplo 3. (PAIVA, 2015) Um casal decide viajar em lua de mel pelo Nordeste, visitando exatamente 3 das 9 capitais. De quantos modos distintos poderiam ser escolhidas as 3 capitais, sem levar em conta a ordem das visitas?

[Resposta] Basta fazer a combinação de 3 capitais entre 9, já que a ordem de escolha não importa, assim:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!\,.\,(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,.\,6!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6!}{6\,.\,6!} = 84\;modos$$

Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantas maneiras poderia ser feita a escolha?

[Resposta] Como a cidade de Salvador será fixada, sobram duas cidades a serem escolhidas, reduzindo também em 8 cidades que podem ser escolhidas, dessa forma, basta fazer uma combinação de 2 em 8, logo:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,.\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,.\,6!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6!}{2\,.\,6!} = 28\;modos$$

1.7 Probabilidade

Almeida *et al.* (2011) ressalta que a teoria das probabilidades permite quantificar as chances de ocorrer um determinado resultado em um experimento; já o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado espaço amostral.

Dessa forma é interessante que se defina evento, que por sua vez consiste em qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

A probabilidade de um acontecimento C é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, ou seja:

$$P(C) = \frac{N°\;de\;casos\;favoráveis\;ao\;acontecimento\;C}{N°\;de\;casos\;posíveis}$$

Nessa seção, não será aprofundado os conceitos envolvendo o assunto de probabilidade, mas será explorada uma situação problema relevante para nosso objeto de estudo, para que se entenda como resolver esse conteúdo, perceber as possibilidades de trabalho em sala de aula.

Exemplo 4. (ALMEIDA *et al.*, 2011) Havia um grupo de 80 pessoas o qual 53 conhecem o Rio de Janeiro, 38 conhecem São Paulo e 21 já visitaram as duas cidades. Uma pessoa sendo escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de que ela tenha conhecido apenas uma dessas cidades?

[Resposta] Ao somar 53, com 38 e 21 ultrapassa a quantidade de pessoas do grupo (80). Logo, observa-se que 21 pessoas fazem parte da interseção das visitas às duas cidades em questão, dessa forma, será utilizado diagrama para visualização melhor do problema.

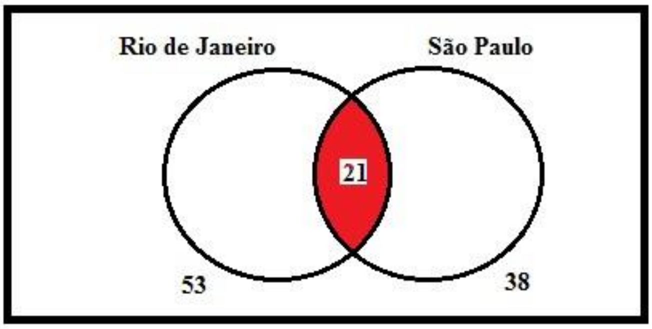

Figura 2 – Diagrama de Venn
Fonte: Própria autora

Subtraindo 21 de 53 e também de 38, temos que 32 pessoas foram apenas no Rio de Janeiro e 17 pessoas foram apenas em São Paulo, agora somando 17, com 32 e 21, totalizam 70 pessoas, ou seja, 10 pessoas não conhecem o Rio de Janeiro e nem São Paulo. Assim, tem-se que ao todo são 17 + 32 = 49 pessoas que conhecem apenas uma das duas cidades. Com isso temos:

$$P(E) = \frac{49}{80} = 0{,}6125 \; ou \; 61{,}25\%$$

Ou seja, a probabilidade de que a pessoa escolhida tenha conhecido apenas uma das duas cidades é de 0,6125 ou 61,25%.

2 Fundamentos do algoritmo de colônia de formigas

2.1 Das formigas naturais para as formigas computacionais

De acordo com Belchior *et al.* (2010), as formigas são insetos terrestres e uma das principais causas do seu sucesso organizacional é a eussocialidade, uma combinação de cuidado com a prole, sobreposição de gerações e divisão de membros da colônia em castas reprodutivas e não-reprodutivas.

Observando essas palavras, podemos notar que quando o autor fala sobre eussocialidade, o mais alto grau de organização social dos animais presentes nas sociedades mais complexas, retrata sobre a característica organizacional que requer três aspectos básicos: sobreposição de gerações em um mesmo ninho; o cuidado cooperativo com a prole e a divisão de tarefas, tendo como base os reprodutores e as operárias.

Segundo depoimento, coletado do Professor de Biologia, Ednei Oliveira, da Rede Municipal de Educação de Rio Verde – Goiás, numa entrevista realizada por mim, na EMEF Dona Josefina, escola do município de Rio Verde - Goiás, para obter mais detalhes sobre esses insetos, as formigas são um inseto social, ou seja, vive em colônias e tem comportamento direcionado para a sobrevivência da colônia ao invés de trabalhar em prol de um único indivíduo.

Segundo Araguaia (2017), esses insetos se organizam em grupos, com diferentes castas, e há divisão de tarefas entre indivíduos. Assim, existem as operárias, uma ou mais rainhas e machos. Os dois últimos grupos são responsáveis pela reprodução de novos indivíduos; e o primeiro, pela manutenção do formigueiro, incluindo aí sua limpeza e alimentação dos seus integrantes.

2.1.1 Interdisciplinaridade

Nota-se pelo contexto abordado, que o trabalho é nitidamente interdisciplinar, trata da integração entre duas ou mais disciplinas ou áreas do conhecimento para um fim comum. Utiliza portanto uma abordagem metodológica que integra conceitos, teorias e fórmulas na tentativa de compreender o objeto de estudo como um fenômeno sistêmico, conforme o CREI (2013).

O estudo da otimização via algoritmo das formigas começou pela observação do comportamento das formigas, em sua busca por alimentos e como sempre deixam feromônio no trajeto que fazem, de modo que o trajeto mais rápido terá mais feromônio e no mais longo, por seu desuso, o feromônio será evaporado. Percebe-se que se for inserida a disciplina de Biologia ao nosso estudo, este profissional poderá por sua vez buscar mais informações relevantes sobre formigas, a fim de contextualizar ainda mais a aula, assim o aluno também perceberá a existência da Matemática na natureza em suas diversas nuances.

Em relação a interdisciplinaridade as orientações curriculares para o Ensino Médio, dizem que:

> A interdisciplinaridade só é possível a partir da existência de disciplinas e do estabelecimento de um conjunto sólido de conhecimentos que elas propiciam. O que deve ser buscado é o diálogo entre esses conhecimentos para que sejam criadas possibilidades para novas aprendizagens. (BRASIL, 2006, p.38)

Se fosse possível tornar esse feromônio visível, que desenho (arte) ele nos daria? Ou observando também os trajetos a serem percorridos pelo caixeiro viajante, pode-se identificar, talvez, a formação de figuras geométricas e explorar algumas de suas principais características, auxiliando o aluno de forma analítica e ao mesmo tempo lúdica, como tomar importantes decisões.

Pode-se também propor uma trilha em fazenda, para fazer observações sobre quais são os principais trajetos escolhidos pelas formigas, além de proporcionar um passeio ecológico (Biologia) para que os alunos possam estar em contato com a natureza, também pode ser observado todo um ecossistema ali presente, estes alunos também terão a oportunidade de se exercitarem (Educação Física) em um ambiente mais saudável.

O trabalho com o espaço e forma centra-se na realização de atividades exploratórias do espaço, deslocando-se e observando esse deslocamento entre as pessoas, antecipando seus próprios passos, observando e manipulando formas, os alunos percebem as relações dos objetos no espaço e utilizam o vocabulário correspondente (em cima, em baixo, ao lado, atrás, entre esquerda e direita, no mesmo sentido, em direção contrária) Brasil (1997). Deste modo, será estudado lateralidade através dos mapas propostos.

A relação com a Geografia se estabelece, na medida em que o saber geográfico contribui para a compreensão do mundo e institui uma rede entre os elementos que constituem a natureza, o social, o econômico, o cultural e o político (PATAKI; A., 2003). O professor de geografia pode aproveitar essa oportunidade e explorar quais são os principais tipos de vegetação e solo presentes naquele habitat que estão explorando.

Após esse prazeroso e divertido passeio, cheio de novas experiências, propiciando ao discente um novo olhar, de forma que ele possa perceber o quanto as disciplinas estão interligadas, o professor, de Língua Portuguesa poderá aproveitar essa rica experiência e solicitar ao aluno que produzam um texto, dissertação ou poema acerca de sua experiência adquiridas nesse passeio, bem como tudo que aprenderam com essa experiência e como poderão aplicar esses conhecimentos adquiridos em suas vidas.

Este trabalho possui um rico potencial de trabalho interdisciplinar, a escola ou o docente poderá desenvolver um projeto específico, envolvendo o profissional da Matemática, Biologia ou Ciências, Arte, Educação Física, Língua Portuguesa e Geografia, mas provavelmente, se pesquisarmos a fundo, possivelmente, será encontrado mais conexões com outras disciplinas.

2.1.2 Comportamento das formigas naturais

Na análise organizacional das formigas naturais, observa-se que outro fator importante no comportamento dessas é a comunicação química, conforme Assis & Ferreira Jr (2003) em que indivíduos da mesma espécie podem se comunicar através da emissão de uma substância química, denominada feromônio, que tem o objetivo de marcar território, procurar por parceiros e determinar rotas.

Assim, ao encontrarem uma fonte de comida, indivíduos de diversas espécies de formigas são capazes de marcar o caminho ao retornar para a colônia, deixando então uma trilha de feromônio para que seus companheiros possam encontrar os nutrientes.

Segundo Gomes (2009), as formigas seguem os seguintes passos para se movimentarem da colônia até o alimento:

i. Em geral, as formigas seguem o menor caminho entre o formigueiro e sua fonte de alimento;
ii. Enquanto andam, as formigas depositam no solo uma substância chamada feromônio;
iii. Na presença de feromônio, elas possuem certa tendência a seguir o caminho marcado com a substância.

Nota-se pelo exposto, que as formigas conseguem localizar a rota mais curta entre sua colônia e o alimento, utilizando as marcas químicas deixadas nas trilhas que, na verdade, são quantidades de feromônio que vão acumulando e possibilitando a formação dessas trilhas, assim, outras formigas poderão detectar essa rota através do feromônio. Desta forma, quanto mais formigas passarem pela trilha mais feromônio esta trilha terá.

Imaginem que se tivermos duas trilhas, A e B: se a formiga da trilha A chegar ao alimento mais rápido que a formiga da trilha B, essa formiga da trilha A vai retornar a colônia pela mesma trilha, impregnando mais ainda a trilha A de feromônio. Desta forma, a trilha A será mais usual que a trilha B pela quantidade de feromônio ali existente. De acordo com o processo químico empregado nessa ideia, as outras formigas vão seguir essa trilha por conter mais concentração de feromônio.

Assim, a **probabilidade** das formigas que escolheram a trilha A para alcançar o alimento e retornar à colônia antes das que escolheram a trilha B, é maior, pois o menor caminho ficará com a maior concentração de feromônio, e provavelmente, será o caminho escolhido pelas outras formigas.

Essa tendência é baseada na quantidade de feromônio presente em cada caminho: quanto maior concentração, maior a chance da trilha ser seguida.

3.1.2 - Sobre as formigas computacionais

Quanto ao conceito deste tema, e segundo Chaves & Lorena (2007), formigas computacionais são heurísticas construtivas[3] (agentes), elas constroem soluções de forma probabilística utilizando duas informações:

1. A trilha de feromônio (artificial) que muda dinamicamente durante a execução do programa de modo a refletir a experiência já adquirida durante a busca;
2. A informação heurística específica do problema a ser resolvido.

Essas também podem ser chamadas de formigas artificiais, tendo como base a investigação científica na inteligência artificial – AI. A grosso modo, trata-se de fazer com que computadores desenvolvam-se com capacidades semelhantes as humanas, explica Marcelo Módolo, professor de Sistemas de Informação da Universidade Metodista de São Paulo, por intermédio de uma entrevista a jornalista Paula Sato a revista Nova Escola on-line Sato (2009).

Apresentando, superficialmente a questão da Inteligência Artificial - AI, que ao longo dos anos também apresentou distintas acepções, pode-se conceber como o faz Lisboa, que é enfático em afirmar que:

> A inteligência artificial é um ramo de pesquisa da ciência da computação que busca, através de símbolos computacionais, construir mecanismos e/ou dispositivos que simulem a capacidade do ser humano de pensar, resolver problemas, ou seja, de ser inteligente. Os principais idealizadores foram os seguintes cientistas: Hebert Simon, Allen Newell, Jonh McCarthy e vários outros, que com objetivos em comum tinham a intenção de criar um "ser" que simulasse a vida do ser humano. (LISBOA, 2010, p.14)

Atualmente, existem várias pesquisas computacionais sobre AI, como por exemplo, no estudo e aplicação de como tornar a bolsa de valores mais rentável, e a presença da inteligência artificial é constante, Nesse sentido, Pierro afirma que:

---

[3] Uma heurística construtiva, consiste em tentar encontrar uma boa rota, considerando a cada interação somente o próximo passo, ou seja, o critério de escolha é basicamente local Campello & Filho (1994). Ela parte de uma solução vazia e constrói a rota, inserindo sempre uma cidade de cada vez, até atingir a rota completa.

> Segundo dados divulgados em 2016 pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), robôs investidores programados para reagir instantaneamente ante determinadas situações são responsáveis por mais de quarenta por cento das decisões de compra e venda no mercado de ações no país, sendo que nos Estados Unidos, o percentual chegou a setenta por cento, dados extraídos da reportagem da revista eletrônica Fapesp. (PIERRO, 2018, p.2)

Falando especificamente sobe as formigas computacionais, para Dorigo, Mariezzo e Colorni (1991), elas são agentes computacionais (“formigas”) que são posicionados em um grafo e forçados a se movimentar pelos nós (vértices) até que uma condição de parada seja satisfeita. O caminho feito pela formiga é uma solução do problema. O comportamento deste algoritmo pode ser exemplificado na Figura 3.

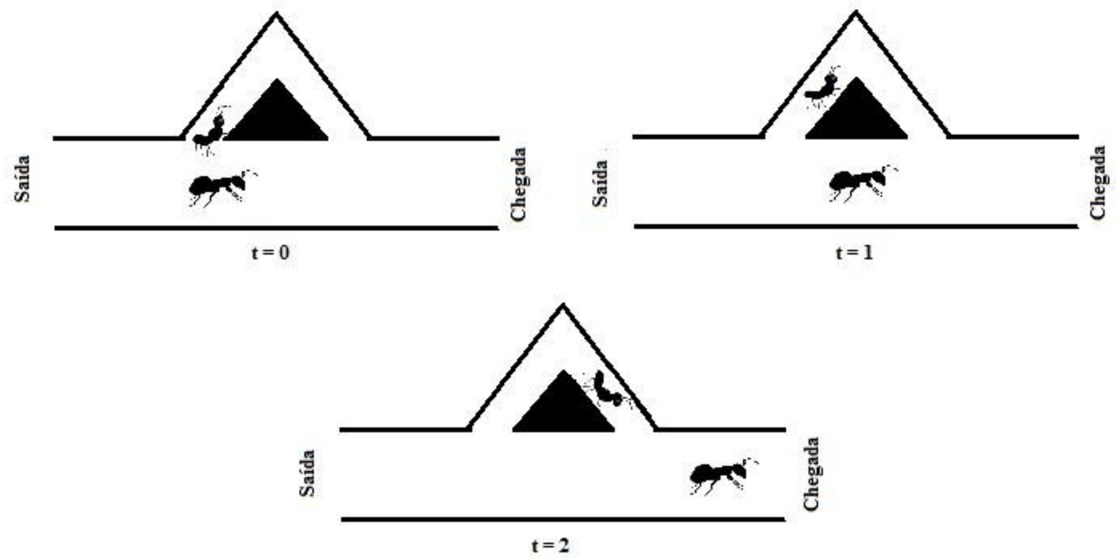

Figura 3 – Gráfico de Otimização: O caminho feito pela formiga é uma solução do problema.
Fonte: Própria autora

Conforme Dorigo, Mariezzo e Colorni (1991), no instante t = 0, cada formiga escolhe de forma aleatória qualquer um dos caminhos disponíveis. Quando se chega no objetivo, uma função definida previamente analisa o caminho realizado, e se obtém a qualidade da solução gerada. De acordo com esta análise, é realizado um depósito de feromônio artificial. Este feromônio faz parte da estratégia de reforço positivo do algoritmo e busca privilegiar as melhores soluções.

2.2 Formigas artificiais e o caminho mínimo

As formigas artificiais e seu caminho mínimo foram estudados através do trabalho de Darquennes (2005), no qual ele enfatiza que o algoritmo de colônia de formigas se inspirou no comportamento de forrageamento[4] das formigas naturais. A mesma ideia ou metodologia é utilizada para as formigas artificiais, que são usadas para desenvolver algoritmos genéticos.

[4] Forrageamento é a busca e a exploração de recursos alimentares.

Percebe-se pelo exposto na seção 2.1 que através do feromônio vai acontecer o forrageamento, observando que o desenvolvimento do algoritmo utilizando as formigas artificiais baseia-se totalmente nas formigas naturais, nesse caso, a ideia é encontrar o caminho mínimo e, assim, começamos o estudo da otimização.

O algoritmo ACO (Ant Colony Optimization) foi o primeiro baseado no comportamento de formiga, desenvolvido por Marco Dorigo, na década de 90 (DORIGO; STüTZLE, 2004), adaptando o comportamento das formigas reais para a busca da solução para o problema do caminho mínimo, por meio de grafos. Para isto, Dorigo, neste trabalho, relacionou cada aresta do grafo a uma variável e a denominou trilha de feromônio artificial.

O mesmo autor diz ainda que, a construção da solução é iniciada quando cada formiga parte de um vértice – denominado ninho – e a seleção do próximo vértice (alimento) é feita aleatoriamente; as informações de cada aresta (caminho) são armazenadas para a tomada de decisão. Define-se que a quantidade inicial de feromônio é constante para todos os vértices e arestas. O aumento do número de "formigas" eleva a performance do algoritmo, entretanto aumenta o tempo de processamento.

Aqui cabe mostrar um pouco da teoria dos grafos, e expor o papel da probabilidade na aleatoriedade usada por cada formiga em um vértice. Para Castro & Zuben (2010), boa parte dos algoritmos de otimização baseados em colônias de formigas é utilizada para resolver problemas de otimização combinatória representados por grafos.

2.3 Conceitos básicos sobre grafos

No estudo da Geometria Plana, os vértices e arestas, são abordados frequentemente, como esta disposto na Base Nacional Comum Curricular, Brasil (2018), do Ensino Básico, especificamente do Ensino Fundamental e Ensino Médio, observa-se que esses conteúdos são requisitos para o estudo dessa disciplina, assim, pode-se tranquilamente estudar os grafos nesses dois segmentos educacionais.

> Um grafo é uma estrutura matemática simples, muito útil na modelagem e resolução de diversos problemas. A Teoria de Grafos nasceu de um problema prático na cidade de Kaliningrado, antiga Königsberg, na Rússia, sendo um nascimento diferente de muitos dos ramos da Matemática que nasceram abstratos e somente muitos anos depois vieram a ter aplicações práticas. Os objetos de estudo são os vértices (ou nós) do grafo, e as arestas. (ASSIS; FERREIRA JR, 2003, p.26)

Matematicamente, temos as seguintes definições, retirada de Souza (2014, p.3):

Definição 2.3.1 (Grafo)**.** Um grafo é um par $G = (V,A)$, onde V é um conjunto finito não vazio e A é uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de V.

Definição 2.3.2. Um grafo **simples** G é um grafo $G = (V,A)$, onde A é um conjunto de pares distintos não ordenados de elementos distintos de V.

Segundo Norton & Digiampietri (2017), os grafos são representados como um conjunto de nós (vértices) conectados par a par por linhas (arestas), conforme os esquemas apresentado a seguir na Figura 4, a parte (a) é a representação de um grafo simples e a parte (b) mostra a nomenclatura de cada componente do esquema:

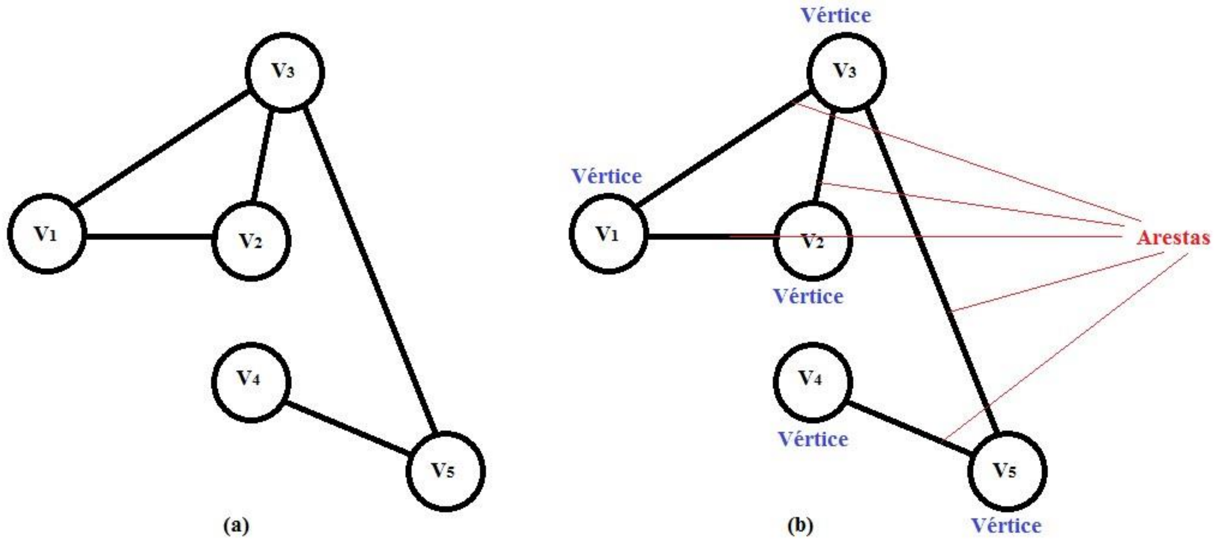

Figura 4 – Grafos: A parte (a) é a representação de um grafo simples e a parte (b) mostra a nomenclatura de cada componente do esquema.
Fonte: Própria autora, 2019

Algumas dúvidas comuns são, conforme explica Norton & Digiampietri (2017), querer saber se essas arestas devem necessariamente unir todos os vértices ou se todos os vértices devem necessariamente ter sua aresta. A resposta é que não, não tem que ser assim, só terá ligação se tiver um relacionamento que precisa mapeado. Como exemplo, pode-se imaginar os relacionamentos numa rede social, dessa forma, é possível modelar conexões em rede sociais. Observe a exemplificação na Figura 5.

Assim, se a pessoa 1, conhece as pessoas 2 e 3; a pessoa 3, conhece as pessoas 1 e 5; a pessoa 4 conhece apenas a pessoa 5. Esse seria parte desse mapeamento em uma rede social. Como demonstrado na Figura 5.

Outro exemplo interessante que Norton & Digiampietri (2017) aplica, é a modelagem matemática buscando a saída de um labirinto. Em seguida, pergunta como seria essa modelagem, nesse labirinto? Se for colocado um nó em cada canto ou em cada passo que se

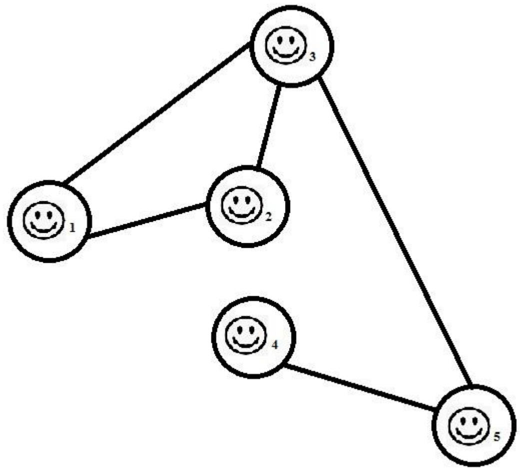

Figura 5 – Grafo: Relacionamentos numa rede social, dessa forma, é possível modelar conexões em rede sociais.
Fonte: Própria autora, 2019

der, ter a preocupação de se conectar com os caminhos possíveis, saindo do primeiro nó pode-se caminhar por vários outros até encontrar a saída, desse modo vai ser conseguido modelar um labirinto através de nós. Como pode ser observado na Figura 6, mostrada logo a seguir:

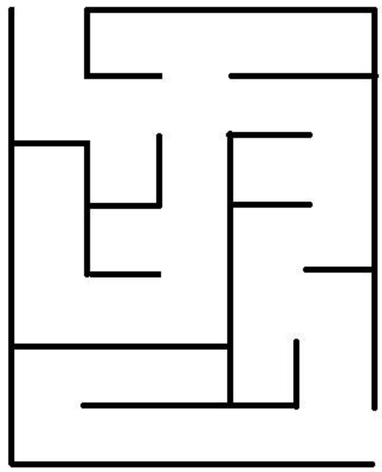

Figura 6 – Labirinto: Modelagem matemática buscando a saída de um labirinto.
Fonte: Própria autora, 2019

A Figura 7 mostra as ligações de um nó em outro, através de arestas, aqui representado pelas linhas vermelhas, claramente pode-se notar as possibilidades para se chegar em outro nó utilizando essas arestas.

Aqui pode-se perceber o papel da probabilidade na aleatoriedade usada por cada formiga, pois ao entrar no labirinto e chegar ao terceiro nó, a formiga poderá escolher

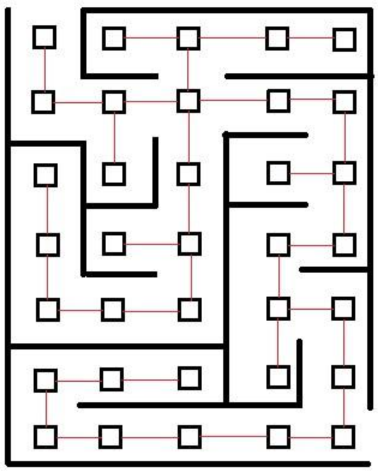

Figura 7 – Labirinto: Ligações de um nó em outro, através de arestas.
Fonte: Própria autora, 2019

qual o próximo nó irá percorrer. Nesse caso é visível que ela terá 50% de possibilidade para escolher o nó 4 ou o nó 5. Assim, o conteúdo de probabilidade será bem introduzido utilizando o estudo dos grafos como referência. Como mostra a Figura 8:

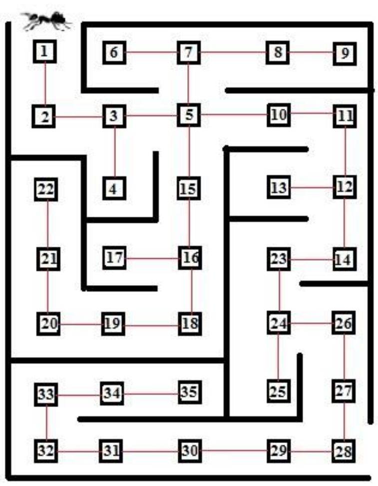

Figura 8 – Labirinto: O papel da probabilidade na aleatoriedade usada por cada formiga.
Fonte: Própria autora, 2019

Alguns grafos são dirigidos ou direcionados, isso porque as arestas tem uma direção, vão de um vértice ao outro, isso significa que as relações representadas pelas arestas têm sentido definido, note que a Figura 9, expõe exatamente isso, V_1 vai para V_2, mas V_2 não vai para V_1. Logo, temos relações diferentes, assim, as arestas só podem ser seguidas em uma única direção. No caso dos grafos dirigidos, pode-se pensar nas arestas como pares ordenados de vértices, saindo de um vértice e chegando em outro vértice, e ainda ter uma aresta saindo de um vértice e chegando no mesmo vértice, ou seja, esse par ordenado pode ser ele mesmo, é um auto laço ou self-loop.

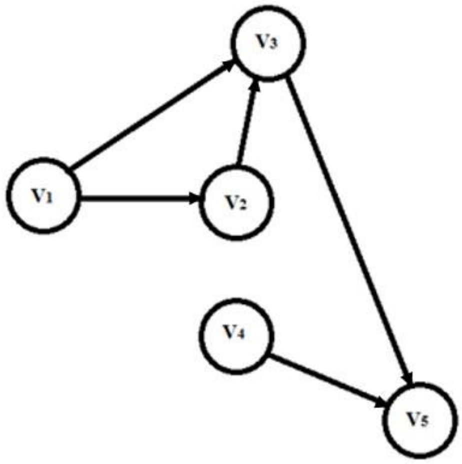

Figura 9 – Direção das arestas: Relações representadas pelas arestas têm sentido definido.
Fonte: Própria autora, 2019

Tem-se também os grafos não dirigidos, ou sejam os não direcionados. Nesse caso, a aresta não tem direção nem sentido definido, a relação entre os vértices apenas existe, assim, as arestas são pares *não ordenados* de vértices. Desse modo os self-loops não são permitidos.

Conforme visto em Carvalho (2016), o professor Paulo Cezar do IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, no PAPMEM – Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio de Janeiro/2016, defendeu que esse conteúdo de Grafos deveria ser apresentado aos alunos ainda no Ensino Médio e cita ainda que em vários países esse conteúdo está no ensino básico, visto que é um tema extremamente importante para as aplicações, lembrando ainda que, esse conteúdo é uma área da Matemática que faz parte da combinatória, e quando for pensado nesse tema, lembrar obrigatoriamente da contagem, mas combinatória é bem mais que isso, então, o ideal é frisar que combinatória é o estudo dos conjuntos finitos de um modo geral.

2.4 Grafos hamiltonianos

Para estudar sobre o Problema do Caixeiro Viajante, primeiramente, tem que entender sobre os grafos Hamiltonianos, que já existem há alguns séculos, porém, ultimamente sua abordagem tornou-se mais usual, por que os cientistas entenderam a importância dos mesmos no desenvolvimento computacional. Existem estudos sobre os grafos Hamiltonianos que atendem tanto o campo teórico quanto suas aplicações, e são usados em programações de problemas simples até problemas mais complexos.

A partir desse estudo sobre grafos hamiltonianos, será possível entender melhor o procedimento do Problema do Caixeiro Viajante, pois ambos tem procedimentos específicos e comuns.

> Um problema aparentemente similar ao dos grafos eulerianos[5] é o de procurar em no grafo *G* uma trilha fechada que passe por todos os vértices uma e só uma vez. Uma trilha assim teria de ser necessariamente um ciclo (salvo no caso do grafo nulo com um vértice); chama-se essa tal ciclo de ciclo hamiltoniano. O nome homenageia Sir Willian R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema – embora a primeira formulação tenha sido feita por Kirkman em 1885. (JURKIEWICZ, 2009, p.58)

No exemplo exposto na Figura 10, $G1$ é um grafo Hamiltoniano e conexo, já $G2$ não é Hamiltoniano pois é desconexo, nos dois casos $G = (V,A)$, onde V são os vértices e A as arestas.

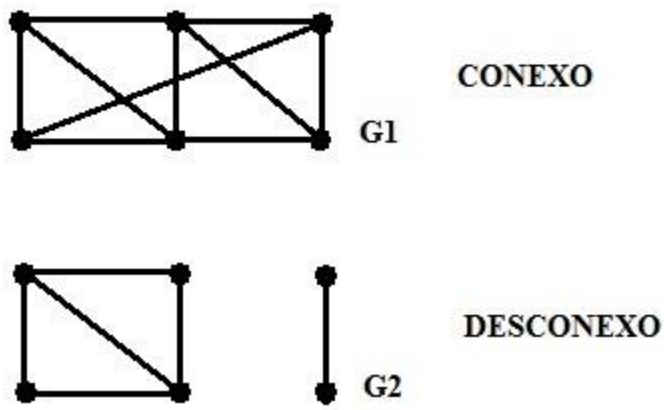

Figura 10 – Tipos de Grafos
Fonte: Própria autora, 2019

Conforme Jurkiewicz (2009), $G1$ é conexo porque todos os pontos estão conectados com o próximo ponto e $G2$ é desconexo porque existe uma descontinuidade. Mas o que realmente nos interessa é o conjunto de pontos (V = vértices) e o conjunto de ligações entre eles (A = arestas). Essa estrutura recebe o nome de grafo.

A relação entre os grafos Hamiltoniano conexos e Problema do Caixeiro Viajante dá-se exatamente por que na resolução do problema do caixeiro viajante, parti-se de um ponto e passa por todos os outros, não repetindo nenhum ponto do circuito, e isso é basicamente a teoria dos grafos Hamiltoniano conexos.

Para Jurkiewicz (2009), todo Problema do Caixeiro Viajante é um problema de grafo Hamiltoniano, este problema por sua vez, consiste em passar por todos os vértices do grafo uma única vez a fim de encontrar um caminho ótimo. Um grafo G conexo é Hamiltoniano se existir

[5] Um grafo é euleriano quando o mesmo percorre cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornar.

um ciclo que inclui todos os vértices de G, lembrando que o ponto de saída e de chegada é o mesmo, sendo assim, o primeiro vértice repete-se. Na Figura 11 temos um clássico exemplo de grafo Hamiltoniano.

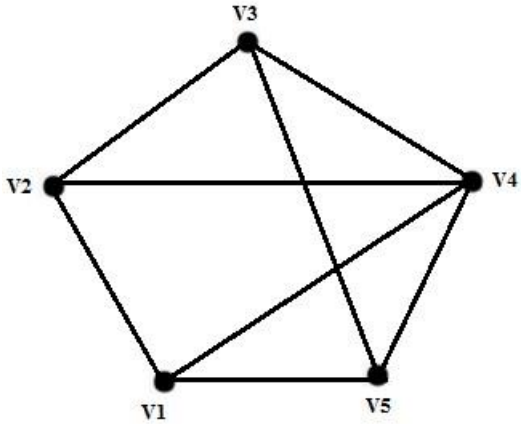

Figura 11 – Grafos Hamiltonianos - 2019
Fonte: Própria autora, 2019

> O problema de saber se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da teoria dos grafos por sua aplicabilidade em comunicação, transporte e planejamento. Entretanto, até hoje, nenhuma condição necessária e suficiente foi encontrada para os grafos hamiltoniano. Na verdade, todos os teoremas descritos estão muito longe de oferecer uma previsão razoável de solução. (JURKIEWICZ, 2009, p.67)

2.5 O problema do caixeiro viajante

Este é um problema clássico da Matemática: Um caixeiro viajante precisa visitar n cidades diferentes. Não importa a ordem com que as cidades serão visitadas. De cada cidade pode-se ir diretamente a qualquer outra. Deve-se descobrir a rota que torna mínima a viagem total do caixeiro, que sairá de uma cidade, passará por todas as demais exatamente uma vez e retornará à cidade de início.

Antigamente os vendedores ambulantes, ou caixeiros viajantes, como eram conhecidos, se deslocavam entre diversas cidades e vilarejos com o intuito de oferecer e vender suas mercadorias, no entanto os meios de locomoção eram muito restritos, e eles deveriam encontrar rotas inteligentes devido a dificuldade que enfrentavam, o problema ficou estabelecido então como: qual a melhor rota a se fazer, saindo de uma cidade inicial passando por todas as demais cidades e retornar a cidade de origem, apesar desse problema ter origem antiga ele se aplica perfeitamente nos dias de hoje.

De acordo com Santiago, pode-se afirmar que:

> Esta rota é denominada ciclo Hamiltoniano de custo mínimo. A representação deste problema pode ser feita através de um grafo completo G = (V, A), onde V é o conjunto de vértices representando as cidades e A o conjunto de arcos

> ou arestas que conectam cada par de cidades i, j $\in$ V. A cada aresta é atribuído um valor de custo $C_{i,j}$, que é a distância da entre as cidades i e j. (SANTIAGO, 2015, p.3)

Lembrando que o Problema do Caixeiro Viajante é de otimização combinatória, e assim, pensando em resolver esse problema cuja sua resolução está avaliada em ganhos financeiros significativos, alguns matemáticos buscam por construção de um algoritmo que resolva tal problema. Pode-se citar como percursor no desenvolvimento desse algoritmo Dorigo & Stützle (2004), um pesquisador preocupado com esse tema. A seguir, pode ser observado e verificado pela fala de Souza (2018), a importância desse tipo de descoberta.

> Instituições como o Clay Math Institute (CMI) oferecem prêmios de 1 milhão de dólares se matemáticos provarem que existem métodos eficientes para estes problemas ou provarem o contrário – que não existe método algum que um dia possa resolver este problema. Este problema é um caso clássico em que a descoberta pode trazer ganhos bilionários no dia seguinte à descoberta. Afinal, isso tornará mais eficiente a operação de diversas indústrias como serviços de entrega (ótima rota), redes de supermercado (quais produtos colocar na “mochila”), empresas áreas (em que vôo alocar cada funcionário), rotas de transporte público e outros mais. O caixeiro viajante ganharia 1 milhão, a humanidade pode ganhar bilhões. (SOUZA, 2018)

A abordagem que será representada nesse trabalho está relacionada com a incrível capacidade das formigas de conseguir encontrar o menor caminho entre uma fonte de alimento e sua colônia. A obervação e o estudo desse fenômeno realizado por Dorigo & Stützle (2004), permitiu a elaboração de um algoritmo computacional capaz de resolver um problema prático da sociedade, altamente dependente da programação, o problema de roteamento, que será apresentado mais adiante.

2.6 Algoritmo de colônia de formigas (ACF) aplicado ao problema do caixeiro viajante (PCV)

Para Pereira (2007), os algoritmos genéticos são algoritmos de busca, baseados nos conceitos de seleção natural e sobrevivência do indivíduo mais apto, assim, o algoritmo de colônia de formigas é uma demonstração de algoritmos genéticos. Esses são compostos por uma sequência de rotinas computacionais, elaboradas com o intuito de simular o comportamento da evolução natural por meio de programação. Atualmente esse método é considerado relevante dentre tantos outros métodos heurísticos[6] para resolução de problemas de otimização.

---

[6] Métodos heurísticos, para Dorigo & Stützle (2004), do aspecto didático-metodológico, é muito mais do que simplesmente apresentar as soluções para um problema. Esta área é baseada, principalmente, na construção de novas ideias para problemas reais, normalmente traçando paralelos com outros saberes.

Nessa seção será apresentado um problema de roteamento, em seguida será representado genericamente em formato de grafos. Na Figura 12, da pode-se observar três caminhos que ligam o ponto inicial (o ninho) ao ponto final (alimento). Cada um desses caminhos é composto por nós representado pelos círculos e arestas que são as retas de comprimento variáveis que os ligam, então cada rota possível tem um conjunto de nós e arestas que somam distâncias distintas, entretanto e nesse caso específico, apenas uma apresenta a menor distância entre os pontos definidos. Esse percurso é chamado de rota ótima.

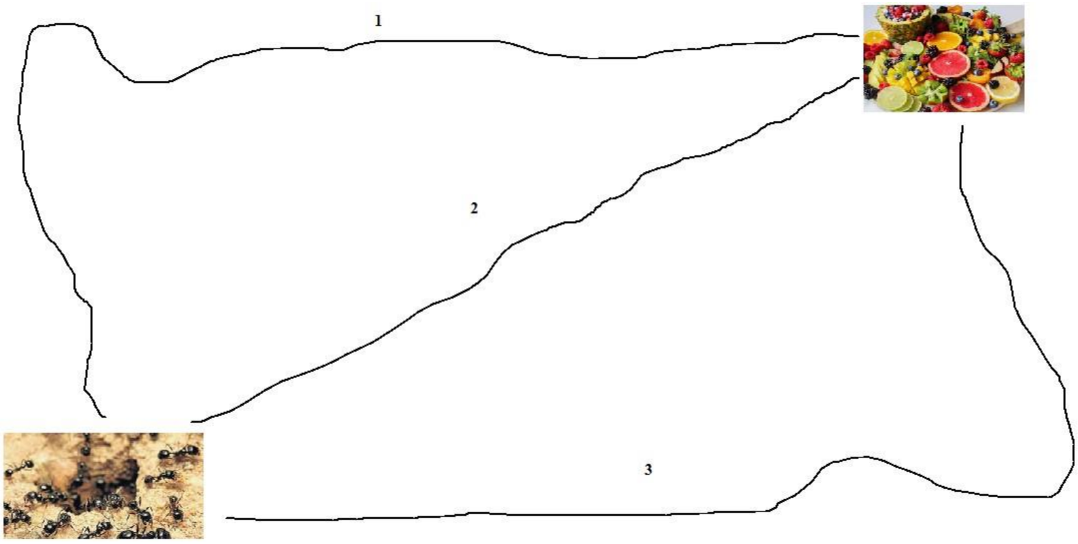

Figura 12 – Formigueiro/Comida
Fonte: Própria autora, 2019

Para ilustrar de forma simplificada o comportamento das formigas, temos em uma extremidade o formigueiro e na outra alguns frutos, que seriam a fonte de alimento. Entre esses dois pontos, existem três caminhos com distâncias diferentes que podem ser percorridos pelas formigas, sendo considerada a rota ótima o caminho 2, como mostra a Figura 12.

Em situações com muitos vértices, nas quais o número de rotas possíveis é muito alto, a grande quantidade de cálculos necessários torna muito trabalhosa e demorada a busca pela rota ótima. Assim sendo, existem alguns métodos que apesar de não encontrar necessariamente a melhor rota, possuem grande eficácia na busca por rotas viáveis, esses mecanismos são conhecidos por *métodos heurísticos*. O nosso exemplo, foi abordado a partir de métodos heurísticos nas colônias de formigas.

> ACO (Ant Colony Optimization) cuja fonte de inspiração é o comportamento de colônias de formigas, baseia-se na observância de que as formigas são capazes de encontrar o menor caminho entre o ninho e a fonte de alimento. Esses comportamentos são explorados em colônias artificias de formigas para a obtenção de soluções aproximadas aos problemas de Otimização

Combinatória, como por exemplo o Problema do Caixeiro Viajante. (SANTIAGO, 2015, p.9)

Suponha agora, que três formigas saiam do formigueiro ao mesmo tempo, e cada uma delas siga por um caminho diferente na mesma velocidade, veja que a formiga que seguiu o caminho 2 é a primeira a encontrar a fonte de alimentos. Consequentemente ela é a primeira a voltar ao ninho, liberando feromônio e influenciando a escolha das demais. A Figura 13 refere-se a esse procedimento.

A partir do momento que as formigas encontram o alimento e retornam liberando feromônio, as próximas já não saem de maneira aleatoriamente e desordenada, usam a influência do feromônio já liberado. Após certo tempo, e à medida que o processo de busca prossegue, naturalmente a rota mais curta, no caso o caminho 2 da Figura 13, vai se fortalecendo em relação aos demais.

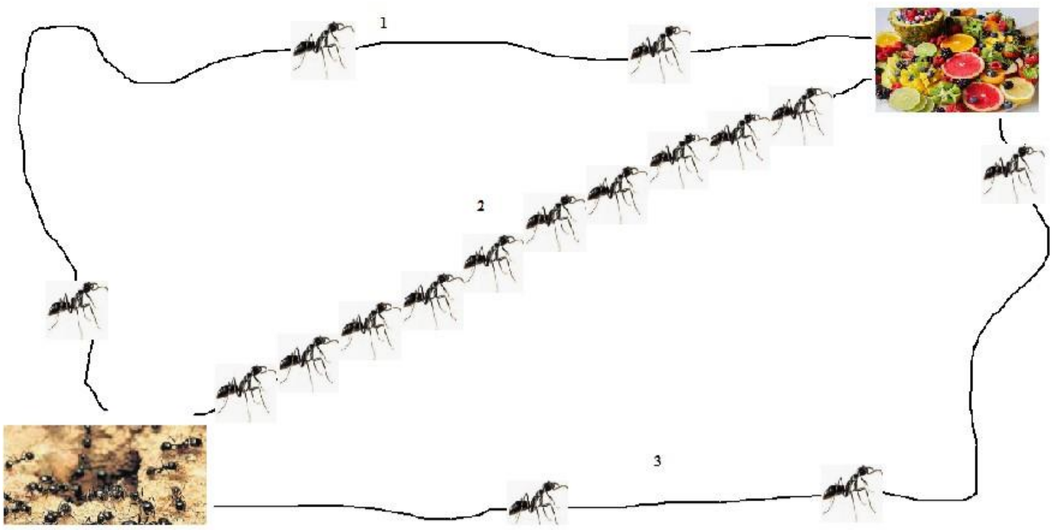

Figura 13 – Formigueiro/Comida - 2019
Fonte: Própria autora, 2019

Isso ocorre por que a concentração de feromônio aumenta de maneira gradativa, até que, depois de um certo tempo, todas as formigas estarão fazendo esse caminho. Esse tipo de circuito como mostra na Figura 13 é uma estrutura organizada para facilitar a compreensão científica, e se encaixa em um tipo de grafos.

2.7 Modelagem e otimização matemática aplicadas ao PCV

Atualmente, a modelagem matemática tem seu valor reconhecido como método científico, servindo como ferramenta de auxílio em problemas das mais diversas áreas, inclusive no ensino de matemática, como expõe Assis (2003).

Para efeito de melhorar o entendimento sobre a otimização matemática, e sem perda da generalidade, observa-se que o homem está sempre em busca da melhor maneira de realizar tarefas, sempre à procura de uma forma mais eficiente.

Assim, a busca do modelo ideal para a realização dessas atividades tornou-se primordial, então percebe-se pelo exposto que o papel do modelo matemático é auxiliar para que os resultados se tornem mais precisos. De acordo com Rocha, Lopes & Murata (2008), a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver modelos matemáticos voltados aos sistemas reais.

Para obter praticidade na exemplificação, o Problema do Caixeiro Viajante pode ser resumido da seguinte forma: um homem tem que viajar por 5 cidades. Ele então deve descobrir todas as possibilidades tendo como critério o de passar apenas uma vez em cada cidade e voltar à cidade inicial, lembrando que para começar a contar essas possibilidades, ele tem que fixar apenas uma cidade, que será a cidade de partida e de chegada, após, deve descobrir todas as possibilidades para então escolher a de menor distância.

Observando o enunciado do Problema do Caixeiro Viajante mencionado acima, percebe-se claramente a descrição da teoria dos grafos Hamiltonianos, que diz: partindo de um ponto e passando por todos os outros, não repetindo nenhum ponto do circuito, e retornando ao ponto de origem, assim, fica nítido a semelhança entre esses dois enunciados, pois basicamente esse é a teoria dos grafos Hamiltoniano, como consta na página 31.

A partir desse entendimento, nota-se como esses dois modelos estão interligados, pois ambos tem o mesmo procedimento no desenvolvimento das ações.

Neste sentido, os exemplos do capítulo 1 se encaixam perfeitamente ao que será discutido a seguir.

Na Figura 14, dadas as distâncias entre as 5 cidades, essas nomeadas de cidade I, II, III, IV e V. O algoritmo deverá encontrar o menor caminho entre as cidades, assim, após perfazer o circuito hamiltoniano, ele não vai encontrar o menor caminho entre dois vértices quaisquer.

Por exemplo, para ir da cidade III para cidade V a distância é 110 km, que por acaso é a menor distância entre as cidades citadas, porém, o que busca-se aqui não é uma distância isolada, precisa-se completar o ciclo Hamiltoniano para poder afirmar a solução ótima. Aqui, foi utilizado a hipotética situação dessas 5 cidades, disposta conforme a Figura 14.

Pode ser observado, pelas seis rotas listadas, que se for fixado a cidade I como ponto de partida e necessariamente de chegada, passando obrigatoriamente pela cidade II, faltará apenas 3 cidades, assim, o número de rotas é exatamente 3! = 6, desse modo,

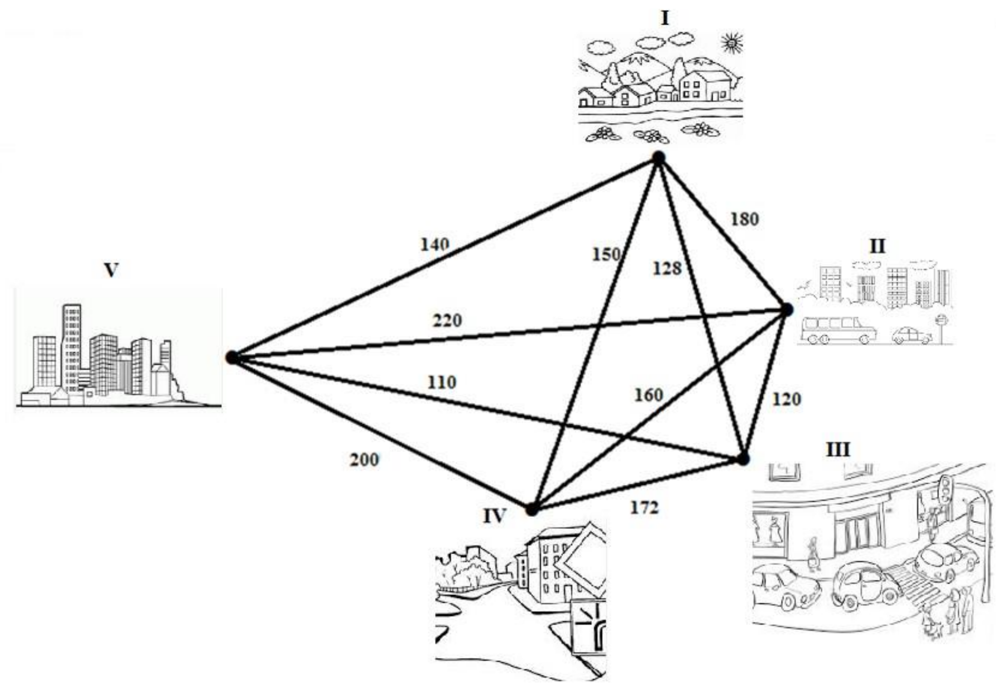

Figura 14 – Grafos entre 5 cidades
Fonte: Própria autora, 2019

obtêm-se as seguintes rotas com essa opção:

1ª Rota: I-II, II-III, III-IV, IV-V, V-I
2ª Rota: I-II, II-III, III-V, V-IV, IV-V
3ª Rota: I-II, II-IV, IV-III, III-V, V-I
4ª Rota: I-II, II-IV, IV-V, V-III, III-I
5ª Rota: I-II, II-V, V-III, III-IV, IV-I
6ª Rota: I-II, II-V, V-IV, IV-V, V-I

Analogamente, pode ser utilizado outras alternativas de rotas, fixando novamente o ponto I e passando necessariamente no ponto III. Nesse caso, tem-se outras 6 possibilidades de rotas. Assim, quando for fixado o ponto I com qualquer outro ponto as quantidades de rotas serão as mesmas, 24 possibilidades, e, como são 5 cidades, ao final será encontrado 120 possíveis rotas, usando então como referência para os cálculos o valor 5!, lembrando que no exemplo foi trabalhado com 5 cidades.

No caso do exemplo citado, não é tão fácil analisar a distância mais curta utilizando apenas os critérios solicitados pelo problema, pois, as exigências de cálculos são demasiadamente grandes, nesse simples enunciado, são 120 possibilidades; o que tornaria inviável para uma solução rápida, imagine então, o que acontecerá para ser calculado a

Ciclo Hamiltoniano	Total de Quilometragem	Ciclo Inverso
I – II – III – IV – V – I	180+120+172+200+140=812	I – V – IV – III – II – I
I – II – III – V – IV – I	180+120+110+200+150=760	I – IV – V – III – II – I
I – II – IV – III – V – I	180+160+172+110+140=762	I – V – III – IV – II – I
I – II – IV – V – III – I	180+160+200+110+128=778	I – III – V – IV – II – I
I – II – V – III – IV – I	180+220+110+172+150=832	I – IV – III – V – II – I
I – II – V – IV – III – I	180+220+200+172+128=900	I – III – IV – V – II – I
I – III – II – IV – V – I	128+120+160+200+140=748	I – V – IV – III – II – I
I – III – II – V – IV – I	128+120+220+200+150=818	I – IV – V – II – III – I
I – III – IV – II – V – I	128+172+160+220+140=820	I – V – II – IV – III – I
I – III – V – II – IV – I	128+110+220+160+150=768	I – IV – II – V – III – I
I – IV – II – III – V – I	150+160+120+110+140=680	I – V – III – II – IV – I
I – IV – III – II – V – I	150+172+120+220+140=802	I – V – II – III – IV – I

Figura 15 – Total de quilometragem partindo da cidade I.
Fonte: Própria autora, 2019

menor distância quando for o dobro da quantidade de cidades, no caso 10 cidades, o que acarretaria em usar como base de cálculo 10!. Nota-se pela Figura 15, que disponibiliza as distâncias, que para cada Ciclo Hamiltoniano, existe o Ciclo Inverso, onde as distâncias são as mesmas, perfazendo o caminho inverso, assim das 120 possibilidades existentes, 60 são duplicadas.

Assim, foi observado que fazer cálculos manualmente, dificulta ou inviabiliza o trabalho, e em alguns casos mesmo utilizando a programação como ferramenta de trabalho, ainda assim, este ficará propenso a demorar praticamente mais de 4 meses para realização desses cálculos, segundo Jurkiewicz (2009).

Desse modo, nota-se que a criação de um algoritmo *preciso* é importante para obtenção de resultados eficazes, do contrário quando for trabalhado com uma grande quantidade de opções, provavelmente pode-se encontrar apenas uma solução sub-ótima, o que aumenta a possibilidade do erro, tornando assim o algoritmo ineficiente.

A tabela 1 a seguir, trata das distâncias entre as 5 cidades, do enunciado proposto na página 36, que será aplicada no desenvolvimento deste problema, para conseguir encontrar o melhor caminho, ou o caminho ótimo.

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
I	0	180	128	150	140
II	180	0	120	160	220
III	128	120	0	172	110
IV	150	160	172	0	200
V	140	220	110	200	0

Tabela 1 – Tabela das distâncias entre as cidades estudadas

Segundo Darquennes (2005), o problema do caixeiro viajante (PCV) é, então, uma maneira geral da encontrar um circuito mínimo hamiltoniano cujo gráfico tem um custo ponderado, observando que um circuito hamiltoniano é um passeio fechado visitando cada nó exatamente uma vez.

2.7 Utilizando a ferramenta Solver

Para encontrar a nossa solução ótima, ou seja, a de menor percurso realizado, será utilizado a soma $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, sendo que $X_1 = X_n$, onde $X_1 = I$, ou seja, a primeira cidade; $X_2 = II$, ou seja, a segunda cidade, e assim por diante, lembrando que no caso do Problema do Caixeiro Viajante, $X_n = I$. A primeira solução que for apresentada será utilizando a ferramenta Solver, do software MS-Excel.

De acordo com o circuito Hamiltoniano, que é aquele que sai de uma cidade (vértice), passa por todas as outras cidades, apenas uma vez, e volta a cidade inicial, mostrado através da tabela na Figura 15, pode-se notar que tem dois trajetos onde as distâncias são menores, portanto, em condições iguais de tráfego e acessibilidade, essas opções são:

$$I - IV - II - III - V - I$$

e

$$I - V - III - II - IV - I,$$

ambas com 680 quilômetros são mais viáveis.

A ideia do caixeiro viajante é analisar todas as rotas e nos dizer qual a rotas mais econômica ou mais viável, pois, em alguns casos, nem sempre a rota mais curta será a rota ideal, exemplo são as rotas das linhas telefônicas, pois às vezes o caminho mais curto está congestionado e a própria companhia nos redireciona para uma rota onde aconteça a comunicação com mais eficácia.

Para resolver esse tipo de problema com um número não tão grande de cidades, existem vários aplicativos que buscam o resultado ótimo, basicamente, em computadores domésticos com capacidade de resolver esse exercício, como exemplo, a utilização do Microsoft Excel (2007) e seu SOLVER garante resultados confiáveis para os cálculos envolvidos. Assim, foi utilizado para resolução do problema estudado, o aplicativo ora citado, que além de oferecer uma plataforma de aprendizado simples, para os métodos apresentados, os resultados podem ser divulgados em formas de gráficos e tabelas, facilitando o entendimento. Dessa forma, pode-se conciliar a teoria e a prática em sala de aula. A seguir, será descrito os passos percorridos para chegar ao resultado ótimo.

1º Passo: Abrir um novo arquivo no programa MS-Excel, criar uma tabela e após, preenchê-la com os dados coletados das distâncias entre as cidades;

2º Passo: Construir duas outras tabelas, no caso do exemplo da Figura 16, elas estão em verde mais claro e azul, começando pela cidade 1 até a 5, e finalizando pela cidade 1, pois, o ponto de saída é o mesmo de chegada, com suas respectivas distâncias;

3º Passo: Observar que após as somatórias, as duas tabelas a princípio, terão os mesmos valores, pois são as mesmas distâncias, esses valores só vão mudar após a utilização do Solver do MS-Excel;

4º Passo: Aplicar a formulação do Solver do MS-Excel na última tabela, para encontrar o melhor caminho. Aqui, não será detalhado a resolução do Solver, pois foi utilizado o MatLat para demonstrar o melhor caminho.

	I	II	III	IV	V
I	0	180	128	150	140
II	180	0	120	160	220
III	128	120	0	172	110
IV	150	160	172	0	200
V	140	220	110	200	0

1	2	3	4	5	1	Total
	180	120	172	200	140	812

3	2	4	1	5	3	Total
	120	160	150	140	110	680

Figura 16 – Resultado do Solver/Excel
Fonte: Própria autora, 2019

Com esse resultado do MS-Excel, verifica-se que realmente a menor distância entre essas cidades é 680 km, ou seja, a melhor rota tem essa quilometragem.

2.8 O algoritmo de colônia de formigas aplicado ao problema do caixeiro viajante

Para Cerqueira & Cravo (2016), a relação entre o algoritmo de colônias de formigas (ACF) e o problema do caixeiro viajante (PCV) é a simulação do comportamento de um conjunto de agentes que cooperam entre si para resolver um problema de otimização por meio de comunicações bem simples.

Para Goldbarg & Luna (2000), o PVC é um dos mais conhecidos problemas de programação matemática, sendo então um tema atual e instigante para ser usado dentro de sala de aula. Assim, este trabalho se encaixa dentro de um contexto para uma educação moderna que busca novos métodos para estimular o ensino e aprendizagem, e na qual se faz necessária uma busca por novos instrumentos didático-pedagógicos. Portanto, discorrer sobre esse tema, nada mais é que atentar novos caminhos, enfatizando uma nova prática educacional, e ao propor que sejam estudados algoritmos, propõe-se que o método educacional utilize a modelagem matemática em problemas que podem ser resolvidos a partir de uma lógica computacional.

Assim, pode ser perceber pelo exposto, que a otimização caracteriza essa ferramenta de maximização ou minimização que se tornou o algoritmo de colônias de formigas (ACF), um importante aliado para resolução de problemas e otimização de gastos. desta forma, é correto destacar alguns problemas que utilizam resoluções através do PCV, entre eles estão:

- Transporte escolar;
- Rotas de distribuição dos correios;
- Rotas telefônicas;
- Comunicação online.

Este tipo de pesquisa que busca proporcionar uma melhor solução por meio de grafos priorizando a otimização, visa desenvolver uma opção que seja mais eficiente, procurando um caminho que leve com mais eficiência a iteração entre o problema e sua solução. Para se criar um programa computacional que atenda esses critérios é necessário o conhecimento em uma linguagem de programação que permita a execução do algoritmo, desse modo, pode-se explorar um conhecimento computacional específico, refazendo assim a busca para mostrar com mais precisão soluções de problemas do nosso dia-a-dia.

3 Materiais e métodos

Este trabalho foi baseado em pesquisas bibliográficas de renomeados estudiosos, utilizando a uma pesquisa experimental aplicada no transporte escolar da EMREF Escadinha do Futuro, sobre otimização, modelagem matemática, análise combinatória, algoritmos e interdisciplinaridade utilizando como referência o algoritmo de colônia de formigas através do problema do caixeiro viajante. O objetivo do modelo criado (problema), é minimizar os atrasos dos alunos na unidade escolar, ou seja, encontrar o melhor caminho através da combinação, utilizando fatores da probabilidade.

O caminho que essa pesquisa percorreu para alcançar o objetivo, foi uma revisão bibliográfica, em caráter qualitativo. A dissertação realizada foi desenvolvida através de leituras de autores que também descrevem sobre temas idênticos. Ao elaborar os textos, é razoável que os mesmos possuam clareza a ponto de que outro pesquisador ao ler o trabalho acadêmico, consiga reproduzir, de forma idêntica, a pesquisa realizada.

A partir desta área de estudo, considerada ideal para essa dissertação, a pesquisa tem como base as Ciências Exatas e suas Tecnologias, que abrangem todo o grupo de conhecimento contido na idealização e construção desse trabalho que buscar a operacionalização de dados reais.

Após findar a parte das explicações dos distintos conteúdos, foi destacado a estrutura dessa dissertação. Em primeiro lugar, foi apresentada a introdução de forma contextualizada.

Esse trabalho foi dividido em duas partes, contendo ao todo cinco capítulos. A primeira parte é constituída por três capítulos, que são:

1. Análise Combinatória
2. Fundamentos do Algoritmo de Colônia de Formigas
3. Materiais e Métodos

A segunda parte é composta por dois capítulos, o quarto capítulo trata da discussão da dissertação em relação ao resultado, e quinto capítulo conclui todo o trabalho desenvolvido.

4. Resultados e Discussões
5. Conclusão

Após, segue-se o capítulo referente a bibliografia e ao apêndice, respectivamente.

3 .1 Criação de um problema contextualizado — Mundo real

Nesta seção o principal objeto de estudo será encontrar o melhor caminho através da combinação, utilizando fatores da probabilidade, para o problema de organização do transporte de uma escola rural, do município de Rio Verde – Goiás.

Foi observado em pesquisa de campo, que a sala de aula da 2ª Série do Ensino Médio é formada por 12 alunos, esses alunos são distribuídos em oito rotas diferentes, e todos eles utilizam o transporte escolar que a Secretaria Municipal de Educação disponibiliza. Essas rotas são das estradas rurais da região da Comunidade São João Batista.

O questionamento que pode ser levantado durante o conteúdo ministrado para desenvolvimento desse trabalho é o seguinte: de quantas maneiras a rota X pode sair da unidade escolar mencionada e retornar para a mesma utilizando o melhor caminho? Está sendo abordado, uma situação concreta, prática, partindo da realidade dos alunos da escola; através da utilização prática do algoritmo das formigas, assim será apresentada uma solução computacional ótima para a organização deste caso particular de transporte escolar. Se for levar em consideração a rota otimizada, pode-se num futuro próximo trabalhar com a economia que o município pode alcançar otimizando as rotas existentes.

Primeiramente foi nomeado os pontos das rotas, o Ponto 1, Ponto 2, Ponto 3, Ponto 4, Ponto 5, Ponto 6, Ponto 7, Ponto 8 e Ponto 9. Conforme mostra a Figura 17, a partir do Google (1998). Na primeira tentativa, foi tomado o Ponto 1 como partida, e passando necessariamente pelo Ponto 2, e assim sucessivamente, até o Ponto 9, dessa forma teve-se a primeira alternativa de rota, assim, foi compilado essa alternativa que resultou em 84 Km. O questionamento levantado é, quantas possibilidades existem para essa rota que foi nomeada de Rota 1, ou seja, qual é a rota mais otimizada, isso significa o melhor caminho, aplicando o Algoritmo de Colônia de Formigas ao Problema do Caixeiro Viajante.

Percebe-se então que, como tem 9 pontos, ao final será encontrado 362880 possíveis rotas, usando como referência para os cálculos 9! como já foi explicado na página 38. Assim, cada ponto fixado vai produzir 40.320 possibilidades. Para calcular todas as possibilidades, iría-se demorar um tempo considerável, e utilizando aplicativos disponíveis no mercado, chega-se rapidamente a melhor rota.

Por sorteio, foi trabalhado com a rota que a princípio será nomeada de Rota 1, da maneira que essa rota esta sendo realizada, o tempo gasto é de 2 horas, com 84 km rodados.

Ao utilizar um algoritmo para modelar o problema de otimização para encontrar o melhor caminho, diminuindo assim, o tempo de trajeto dos alunos desta escola rural, será mostrado que a Matemática busca a cada dia facilitar a vivência do homem frente as dificuldades do nosso dia-a-dia. Destacando a importância da Matemática no mundo real, e conduzindo os alunos a observação que um está intrinsecamente ligado ao outro.

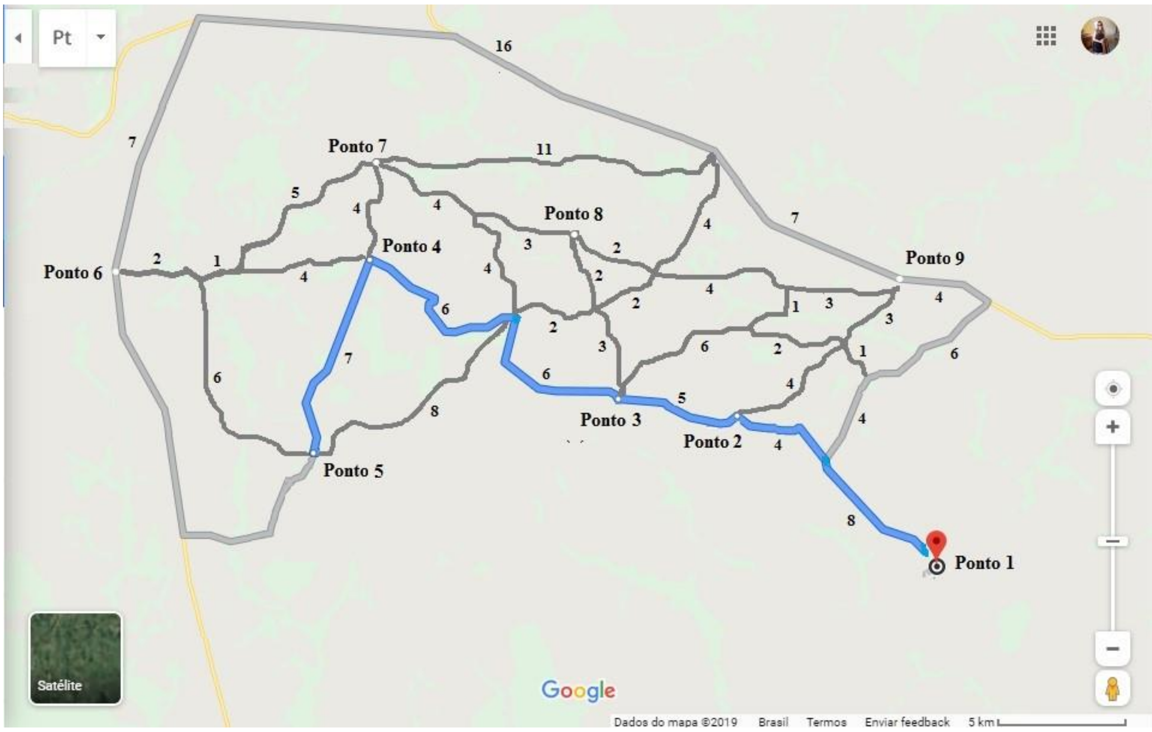

Figura 17 – Mapa da região da Comunidade São João.
Fonte: Google Maps, 2019

Diante do questionamento levantado, foi utilizado o Problema do Caixeiro Viajante para resolver a pergunta elaborada, dessa forma foi verificado a viabilidade dessa modelagem no encaixe deste tema, essa abordagem pode ser utilizada em uma salas do Ensino Médio. Nessa seção foi utilizado a formulação de Resolução do PCV através do aplicativo MatLab e também do Solver do MS-Excel.

4 Resultados e discussões

Aqui foi analisado todos os dados coletados em loco para desenvolvimento do problema contextualizado no mundo real, dessa dissertação, a prioridade foi direcionar o conhecimento do estudo de caso apresentado, assim, pode-se chegar a abordagem necessária para se obter um resultado. A princípio foi utilizado o MatLab[7] e em seguida o Solver do MS-EXCEL.

4.1 Solução do problema via MatLab

Utilizando o MatLab, pode-se encontrar o caminho otimizado de maneira mais rápida. Os passos para aplicação no software, estão descritos a seguir. A complexidade desse problema de transporte escolar, se dá devido às muitas possibilidades de montar uma rota ideal, ou seja, o melhor caminho para atender os alunos. Com as distâncias conseguidas após um trabalho realizado pela própria autora em loco, conseguiu-se montar uma tabela para entender a realidade vivenciada pelos alunos.

Os dados foram dispostos em uma matriz 9 x 9, após isso, foram informados os comandos para o programa MatLab encontrar o caminho ótimo. O programa dispõe de diversas extensões (chamadas toolboxes ou blocksets). Além dos módulos adicionais, o MatLab conta com o Simulink, um ambiente de simulação baseado em diagrama de blocos e plataforma para Model-Based Design. Uma alternativa neste ponto seria o uso do Octave; segundo Neto & Nascimento (2011), o Octave[8], que é um software gratuito, que roda scripts do MatLab, utilizado para cálculos numéricos, oferecendo recursos suficientes para resolução de problemas com algoritmos genéticos. A solução detalhada à frente só não foi testada nesse aplicativo por falta de tempo, mas não se pode descartá-lo, pois, é uma alternativa interessante, por ser livre.

Após compilar o algoritmo que será abordado a seguir no MatLAb, foi encontrado o melhor caminho como será mostrado na Figura 18 a seguir. Assim, será mostrado agora aos detalhes e comentários sobre o código.

---

[7] MATLAB - Matrix Laboratory trata-se de um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico.

[8] Octave - linguagem computacional, desenvolvida para computação matemática, possui compatibilidade com MatLab, tendo um grande número de funções semelhantes, segundo Neto & Nascimento (2011).

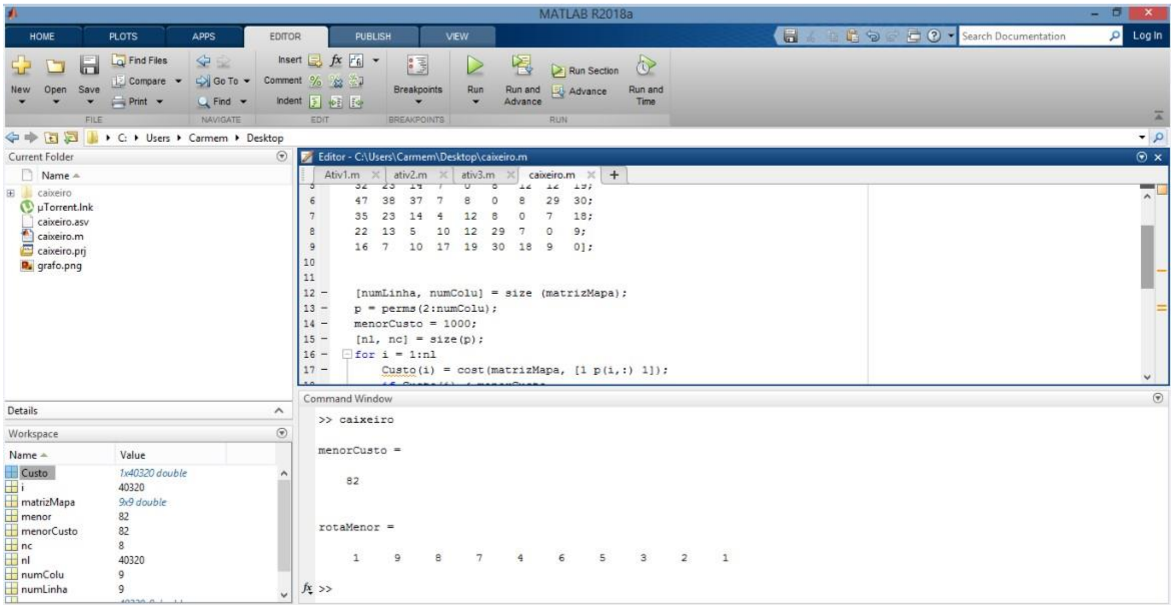

Figura 18 – Resposta do problema contextualizado no MatLab
Fonte: Própria autora, 2019

O primeiro passo foi criar no MatLab, uma matriz com as distâncias oriundas das arestas contidas no Mapa da região da Comunidade São João Batista, que foi nomeada por matriz de arcos, matrizMapa.

matrizMapa =	[0	12	21	30	32	47	35	22	16;
	12	0	5	21	23	38	23	13	7;
	21	5	0	12	14	37	14	5	10;
	30	21	12	0	7	7	4	10	17;
	32	23	14	7	0	8	12	12	19;
	47	38	37	7	8	0	8	29	30;
	35	23	14	4	12	8	0	7	18;
	22	13	5	10	12	29	7	0	9;
	16	7	10	17	19	30	18	9	0];

```
[numLinha, numColu] = size (matrizMapa);
```

Nesta linha acima, são atribuídas às variáveis numLinha e numColu as quantias de linhas e colunas da matriz dos arcos.

```
p = perms (2:numColu)
```

Perms é uma função do MatLAb que gera matriz permutando todas as combinações possíveis. Neste caso permutará entre 2 e 9, que são os nós mutáveis.

```
menorCusto = 1000;
```

Atribui-se à variável menorCusto um valor arbitrário que será superior ao custo do caminho do algoritmo.

```
[n1, nc] = size (p);
```

São atribuídas às variáveis n1 e nc as quantias de linhas e colunas da matriz dos arcos. Neste caso, foi utilizado apenas a quantidade de linhas.

```
for   i=1:n1
      Custo (i) = cost (matrizMapa, [1 p(i, :)  1]);
      if   Custo (i) < menorCusto
           menorCusto = Custo (i);
           rotaMenor = [a  p (i, :)  1];
      end
end
```

Este laço acima é responsável pela iteração. A partir de 1 até o valor de número de linhas da matriz permutada, a função Custo será executada; nela, é calculado o custo de cada uma das 362.880 possibilidades de caminho. Caso em alguma iteração haja um custo menor que o anterior, então esta nova informação é salva na variável menorCurso. Ao final do laço, a rota que tem o melhor caminho é salva na variável rotaMenor.

```
function  [c] = cost (Distancia, caminho)
     c = 0;
      for  i = 1: (length (caminho)  -1)
            c  =  + Distancia (Caminho (i), Caminho (i+1));
      end
end
```

A função c definida acima realiza o cálculo do custo. Ela tem duas entradas: a matriz dos arcos e a matriz permutada. Para que não haja interferências no somatório, foi instanciado c=0 e só depois disso foi feita a iteração para somar os custos de um nó ao outro. Ao final do laço, a variável c retorna o somatório das distâncias de cada nó da matriz permutada.

Para efeito de clareza na apresentação do código, o mesmo consta completo sem os comentários acima no apêndice A.

Após compilar o algoritmo, pode-se notar que o melhor caminho saindo do Ponto 1, é

1 9 8 7 4 6 5 3 2 1

Descrevendo esses caminhos temos: o transporte escolar rural desta rota parte do ponto onde ficou fixo para sua saída que é o Ponto 1, após faz o seguinte trajeto; Ponto 9, Ponto 8, Ponto 7, Ponto 4, Ponto 6, Ponto 5, Ponto 3, Ponto 2 e assim, se completa o trajeto voltado ao ponto inicial que é o Ponto 1.

4.2 Solução do problema via Solver do MS-Excel

Outra forma rápida de se resolver este problema é usando a ferramenta Solver do MS-Excel, já mostrada antes, para isso, terá que ser colocado os dados no software MS-Excel, utilizando uma matriz de variáveis e custos. Os passos para utilização do Solver no MS-Excel, foram descritos na página 39 desse trabalho acadêmico. Pode-se perceber que o mesmo também nos dá o melhor caminho através da Rota 1, porém, ele não leva em consideração que a única maneira de saída é o Ponto 1.

Assim, a resolução considerada foi resposta do software MatLab que é um "Matrix Laboratory"e, como tal, fornece muitas maneiras convenientes para a criação de matrizes de várias dimensões e nos dará uma resposta precisa quanto a essa otimização. Lembrando que o cálculo do MS-Excel através do Solver não está incorreto, apenas inadequado para essa situação-problema, por esse motivo não vamos levar em consideração para o problema proposta nesse trabalho.

Essa inadequação, se dá justamente no momento da saída, pois obrigatoriamente, temos que sair do Ponto 1. Na resolução do Solver, ele não leva isso em consideração, apenas calcula o melhor caminho.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	12	21	30	32	47	35	22	16	
2	12	0	5	21	23	38	23	13	7	
3	21	5	0	12	14	37	14	5	10	
4	30	21	12	0	7	7	4	10	17	
5	32	23	14	7	0	8	12	12	19	
6	47	38	37	7	8	0	8	29	30	
7	35	23	14	4	12	8	0	7	18	
8	22	13	5	10	12	29	7	0	9	
9	16	7	10	17	19	30	18	9	0	

Distância Antes do Solver:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	Total
	12	5	12	7	8	8	7	9	16	84

Distância Depois do Solver:

6	5	4	7	8	3	2	9	1	6	Total
	8	7	4	7	5	5	7	16	16	75

Figura 19 – Resposta do problema contextualizado no Solver
Fonte: Própria autora, 2019

O que se percebeu na Figura 19, ao compilar o algoritmo e obter a resposta, é que a quilometragem baixou 9 km da inicial, porém, nessa rota uma particularidade importante não foi levada em consideração, o fato de ser obrigatório a saída do Ponto 1. Esta característica fez com que fosse desconsiderado a análise dessa resposta, em particular, durante a discussão dos resultados, que será feita a seguir, na conclusão deste trabalho.

5 Conclusão

Primeiramente, foi realizado uma análise da economia de 2 Km, referente a resposta fornecida pelo MatLab. Assim, pode-se imaginar, se essa quilometragem for multiplicada pelo número de dias letivos no ano, e lembrando que, como a escola tem 8 rotas diferentes, e supondo que nessas outras rotas também haja essa economia, então será multiplicada por 8. E se esse estudo for aplicado em todas as rotas do transporte escolar do município de Rio Verde, no estado de Goiás, ganhos consideráveis aconteceram em termos financeiros, tempo, desgaste do veículo e com certeza um ganho na aprendizagem dos alunos, pois os mesmo vão chegar a unidade escolar mais descansados, e consequentemente, mais dispostos.

Suponha agora, que as estradas rurais fossem mais conservadas, esse tempo também seria otimizado consideravelmente, dessa forma, o tempo de permanência do aluno dentro do transporte escolar seria também otimizado, ou seja, menor. Lembrando que a rota indicada pelo software MatLab não é a realizada pelo motorista do referido transporte escolar, e ainda deve-se levar em conta a questão da manutenção das estradas rurais. Observa-se também, que se fosse para fazer, cálculo por cálculo manualmente dessa rota, levaria-se muito tempo calculando algo que o computador faz em minutos. Nesse sentido, poderá ser apresentado para o aluno que a Matemática e a Computação caminham de braços dados e tem atuação importante no seu dia-a-dia.

Percebe-se também que os métodos explicados neste trabalho podem ser utilizados em diversos conteúdos dentro da sala de aula, em diversos seguimentos do Ensino Básico, tais como: formulação do problema (parte da modelagem matemática), cálculos de distâncias, geometria, com o estudo de ponto, reta, aresta e vértice, além do conteúdo de análise combinatória do capítulo 1.

Nota-se que as ferramentas matemáticas utilizadas neste processo, são importantes para compreensão do processo de ensino-aprendizagem. Saber como elas são usadas e detalhar seu uso, verificando se é realmente possível transformar todo o processo de simulação do comportamento das formigas (ou pelo menos uma parte dele) em material didático que possa ser usado no Ensino Médio é uma lição importante que pode ser acompanhada durante todos os passos desta dissertação.

Foi ressaltado o grande potencial interdisciplinar deste estudo, visto que é possível o desenvolvimento de um projeto que englobando Matemática (análise combinatória e probabilidade), Biologia (ecossistema e biodiversidade), Artes (figuras geométricas e assimétrica), Geografia (Vegetação), Português (produção de texto), Educação Física (caminhada); lembrando que, se for feita uma reflexão mais abrangente, provavelmente será possível entrar em conexões com outras disciplinas. Havendo um boa sinergia entre o corpo docente e o grupo gestor, pode-se envolver os alunos, além de mostrar-lhes o quanto a Matemática pode ser surpreendente.

Ao realizar essa pesquisa para viabilizar esta dissertação, foi observado que é possível utilizar este algoritmo, que já era conhecido no âmbito da Matemática Aplicada, para trabalhar os conteúdos de análise combinatória e otimização com alunos que estejam cursando a segunda série do Ensino Médio ou como revisão para a terceira série do ensino médio, com aplicabilidade prática, propiciando uma maior proximidade com conteúdos matemáticos, em especial, esses mais complexos e/ou elaborado para os alunos dessa fase.

Também é possível um trabalho de forma bem intuitiva com os discentes do Ensino Fundamental através do estudo de grafos, no campo da geometria, pois nessa etapa são estudados vértices e arestas com clareza, fazendo cálculos de probabilidades dos possíveis caminhos a serem escolhidos, pois ao chegarem no Ensino Médio, não haverá tanta dificuldade quando o professor de Matemática for abordar os assuntos de Análise Combinatória e Probabilidade, visto que superficialmente houve uma abordagem simples, porém de bastante relevância.

É consenso nacional o conhecimento dos problemas estruturais das unidades escolares de Educação Básica, por falta de incentivo de políticas públicas ou por má gestão das referidas unidades, mas caso esta tenha um laboratório de informática que seja funcional, poderá ser explorado o MatLab (ou sua alternativa gratuita Octave), por exemplo, ou outros aplicativos de matemática que estejam disponíveis do portal do professor, essas são ideias que podem dinamizar as aulas, trazendo para esse aluno uma realidade diferente, despertando talvez este aluno para o caminho da docência, pois nosso país está muito carente destes profissionais, principalmente na área de exatas.

Através dos cálculos de distâncias de cada destino, os professores da educação básica podem lançar mão desse trabalho para o estudo de geometria analítica, que é abordado de forma superficial no Ensino Fundamental com progressivo aprofundamento no Ensino Médio.

Estimulando os alunos a observar e registrar o comportamento das formigas, será possível estabelecer relações com o conteúdo de Probabilidade, possibilitando ao aluno vislumbrar o quanto a Matemática está presente em seus cotidianos, bem como mudar a maneira como veem e se relacionam com a Matemática, podendo acarretar em significativos avanços no ensino da Matemática Básica, bem como em Biologia, visto que também é observada as técnicas utilizadas pelas formigas para encontrar alimento, além da utilização do feromônio nessa busca, otimizando essa procura.

No momento de observação, provavelmente, os alunos vão perceber, e se darão conta de quão grande é a diversidade de vegetação existente num ecossistema, poderá acontecer alguns registros e análise sobre o tema abordado, junto ao professor de Geografia, após poderá ser comunicado ao professor de Educação Física quanto tempo durou essa trilha, como está seus respectivos condicionamentos físicos e sobre a importância de se hidratar durante uma atividade física. E por fim, apresentar uma produção de texto ao profissional de Língua Portuguesa sobre o quanto essa experiência foi rica e o quanto puderam aprender de forma bastante abrangente.

Propõe-se que trabalhos sistemáticos nesse sentido sejam realizados e registrados para que seja possível reforçar o que este estudo está sugerindo. Espera-se que com o tempo, existam propostas que abrangem cada vez mais esse tema, para que haja uma recorrente e significativa melhora no sucesso acadêmico, além de consequentemente melhorar a autoestima desse discente, possibilitando que este seja um profissional engajado e eficiente, adequado ao mercado de trabalho.

Aconteceu uma interdisciplinaridade significativa no desenvolvimento deste estudo, fortalecendo a ideia de que as disciplinas com seus conteúdos não são fragmentados, pelo contrário, que uma esta interligada a outra, mesmo tendo particularidades pertinentes a cada uma delas. Contudo, o desenvolvimento de um projeto com essas características, só poderá ser realizado, quando toda comunidade escolar endossar e enriquecer com criatividade esta proposta, o que implica em um fundamental compartilhamento de ideias, desse modo, é notório que o consenso deverá existir.

Referências

ALMEIDA, N. d. *et al.* **Matemática–Ciências e Aplicações**. São Paulo: Saraiva, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 14, 16, 17, 18 e 19.

ARAGUAIA, M. **Formiga (Família Formicidade)**. 2017. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/animais/formiga.html>. Citado na página 21.

ASSIS, R.; FERREIRA JR, W. **Um Modelo Computacional de Recrutamento em Formigas**. 2003. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio13art_3. pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 26.

ASSIS, R. A. **Modelos em Estratégias de Forrageamento de Formigas**. 2003. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306721/1/ Assis_RaulAbreude_M.pdf>. Citado na página 36.

ASSMANN, H. **Metáforas novas para reencantar a educação: epistemologia e didática**. [S.l.]: Unimep Piracicaba, 1996. Citado na página 11.

BARCELOS, G. **Inovação no sistema de ensino: o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas licenciaturas em Matemática da Região Sudeste.** Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado em Ciências de Engenharia., 2004. Disponível em: <http://www.uenf.br/Uenf/Downloads/POS-ENGPRODUCAO_ 2397_1213388268.pdf>. Citado na página 11.

BELCHIOR, C. *et al.* **Ecologia, comportamento e história natural da formiga ceifeira Pogonomyrmex naegelii (Formicidae, Myrmicinae) em cerrado: ritmo biológico, dieta, área de vida, estrutura e demografia dos ninhos**. Universidade Federal de Uberlândia, 2010. Disponível em: <https: //repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/13326/1/ceres.pdf>. Citado na página 21.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.** Brasília: Ministério da Educação, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Citado na página 22.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. [S.l.]: Volume 2. Brasília: Ministério da Educação, 2006. Citado na página 22.

______. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Versão Final Revista. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http:// basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado na página 26.

CAMPELLO, R. E.; FILHO, N. M. **Algoritmos e heurísticas: desenvolvimento e avaliação de performance**. [S.l.]: Editora Universitária da Universidade Federal Fluminense - EDUFF, v.1. 228p., 1994. Citado na página 24.

CARVALHO, P. **Algoritmos em grafos**. IMPA, 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=djN4d_WPuvc>. Citado na página 30.

CASTRO, L.; ZUBEN, F. J. V. **Inteligência coletiva**. UNICAMP, 2010. Disponível em: <ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ia013_1s07/topico4_07.pdf>. Citado na página 26.

CERQUEIRA, F.; CRAVO, G. **Metaheurística da colônia de formigas aplicada ao problema do caixeiro viajante**. 2016. Citado na página 40.

CHAVES, A. A.; LORENA, L. A. N. **Otimização Combinatória**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2007. Disponível em: <http://www.lac.inpe.br/~lorena/cap/Aula_C03.pdf>. Citado na página 24.

CREI. **Interdisciplinaridade**. Centro de Referência de Educação Integral,, 2013. Disponível em: <https://educacaointegral.org.br/glossario/interdisciplinaridade/>. Citado na página 21.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de matemática**. [S.l.]: Editora Atica, 1998. Citado na página 10.

DARQUENNES, D. Implementation and applications of ant colony algorithms. **Facultées Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur Institut d'Informatique**, v. 40, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 39.

DORIGO, M.; GAMBARDELLA, L. M. **"Ant Colonies for the Tavelling Salesman Problem"**. [S.l.]: Biosystems, Vol. 43, pp73-81, 1997. Citado na página 12.

DORIGO, M.; STüTZLE, T. **Ant Colony Optimization**. Scituate, MA, USA: Bradford Company, 2004. ISBN 0262042193. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 33.

ENEM. **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP, 2010. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno5_amarelo_com_gab.pdf>. Citado na página 14.

FONTOURA, J. **Quais os desafios dos professores para incorporar as novas tecnologias no ensino**. Educação on-line, 2018. Disponível em: <http://www.revistaeducacao.com.br/ quais-os-desafios-dos-professores-para-incorporar-as-novas-tecnologias-no-ensino/>. Citado na página 10.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: Modelos e algoritmos**. [S.l.]: Editora Campus, 2000. Citado na página 40.

GOMES, F. **Algoritmos de Colônias de Formigas**. UNICAMP, 2009. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~chico/mt852/formigas.pdf>. Citado na página 23.

GOOGLE, M. **Google Maps**. Larry Page and Sergey Brin, 1998. Disponível em: <https://maps.google.com.br/maps?hl=pt-BR&tab=wl>. Citado na página 43.

GOUVEIA, R. **Análise combinatória**. Toda matéria, 2018. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria>. Citado na página 14.

JURKIEWICZ, S. **Grafos: uma introdução.** Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 38.

LIBÂNEO, J.; OLIVEIRA, J.; TOSCHI, M. **Educação escolar: políticas, estrutura e organização**. [S.l.]: São Paulo: Cortez, 2007. Citado na página 11.

LISBOA, B. **Inteligência artificial**. UFSJ, 2010. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/orcv/materialdeestudointeligenciaartificial.pdf>. Citado na página 24.

NETO, F. G. A.; NASCIMENTO, V. H. **Apostila Introdutória de Matlab/Octave.** Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/256601/mod_resource/content/1/apostila_matlab_octave.pdf>. Citado na página 45.

NETO, R. F. T.; FILHO, M. G. **Proposta de um framework para prototipagem de sistemas heurísticos multiagentes baseados em algorítmos de colônia de formigas**. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), 2009. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/pope/v29n3/a11v29n3.pdf>. Citado na página 12.

NORTON, T. R.; DIGIAMPIETRI, L. A. **Estrutura de Dados - Grafos - Conceitos básicos Engenharia de Computação**. UNIVESP, 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MC0u4f334mI>. Citado na página 27.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. **TIC'S na educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno**. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva 2**. São Paulo: Editora Moderna, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 14, 16 e 19.

PASQUALOTTI, A. **Ambientes VRML para o ensino-aprendizagem de matemática: modelo conceitual e estudo de caso**. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2010. Citado na página 9.

PATAKI, I.; A., A. S. **Equador, Paralelos e Meridianos: Apenas linha Imaginárias?** [S.l.]: PUC-SP, 2003. Citado na página 22.

PEREIRA, J. P. G. **Heurísticas computacionais aplicadas à otimização estrutural de treliças bidimensionais**. 2007. Citado na página 33.

PIERRO, B. **O mundo mediado por algoritmos**. FAPESP, 2018. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/2018/04/19/o-mundo-mediado-por-algoritmos>. Citado na página 25.

ROCHA, R. R.; LOPES, L. C. O.; MURATA, V. V. **Implementação e avaliação de técnicas de identificação de sistemas lineares usando software livre**. 2008. Disponível em: <https://ssl4799.websiteseguro.com/swge5/seg/cd2008/PDF/SA08-10673.PDF>. Citado na página 36.

SANTIAGO, P. **Método GRASP e ACO em Otimização**. Unicamp, 2015. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~mac/db/2015-1S-120022.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

SANTOS, W. **Integração de recursos computacionais para atividades docentes em sala de aula**. PUC/PR, 2017. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/2609214110.pdf>. Citado na página 10.

SATO, P. **O que é inteligência artificial? Onde ela é aplicada?** 2009. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/ciencias/fundamentos/ inteligencia-artificial-onde-ela-aplicada-476528.shtml>. Citado na página 24.

SEEGGER, V.; CANES, S.; GARCIA, C. **Estratégias tecnológicas na prática pedagógica**. 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/remoa/article/viewFile/6196/3695>. Citado na página 11.

SOUZA, F. A. **O Caixeiro Viajante que pode ganhar um milhão de délares**. Revista Eletrônica Deviante, 2018. Disponível em: <https://www.deviante.com.br/noticias/ciencia/o-caixeiro-viajante-que-pode-ganhar-um-milhao-de-dolares/#disqus_thread>. Citado na página 33.

SOUZA, R. F. d. **Resolução de problemas via teoria de grafos**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/tcc_get.php?cpf=32301760812&d=20171109002758&h=3592e438189c0fc1afa05af9be80184b074d4444>. Citado na página 26.

UNESCO. **Educação: um tesouro a descobrir – Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre educação para o século XXI**. [S.l.]: 6. ed. Tradução José Carlos Eufrásio. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC, 288p., 2001. Citado na página 11.

APÊNDICE A – Algoritmo de colônia de formigas para MatLab

```
matrizMapa = [ 0 12 21 30 32 47 35 22 16;
               12  0  5 21 23 38 23 13;  7
               21  5  0 12 14 37 14  5; 10
               30 21 12  0  7  7  4 10; 17
               32 23 14  7  0  8 12 12; 19
               47 38 37  7  8  0  8 29; 30
               35 23 14  4 12 8 0  7 18;
               22 13  5 10 12 29  7  0;  9
               16  7 10 17 19 30 18  9;  0]
[numLinha, numColu] = size (matrizMapa);
p = perms (2:numColu);
menorCusto = 1000;
[n1,nc]=size(p);
for i=1:n1
    Custo(i)=cost(matrizMapa, [1 p(i,:) 1]);
    if Custo (i) < menorCusto
        menorCusto = Custo(i);
        rotaMenor = [a p(i,:) 1];
    end
end

menorCusto
rotaMenor

    function [c] = cost (Distancia, Caminho)
    c = 0;
    for i = 1: (length(caminho) -1)
        c = c + Distancia(Caminho(i), Caminho(i+1));
    end
end
```