UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTU SENSU*
Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

Congruência Módulo Inteiro e Análise Documental de sua Inserção no Currículo dos Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Ronan Fernandes de Arruda
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza

DOURADOS - 2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTU SENSU*
Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

Congruência Módulo Inteiro e Análise Documental de sua Inserção no Currículo dos Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Ronan Fernandes de Arruda
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Moreira DE Souza
UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Sonner Arfux Figueiredo
UEMS - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez
UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

DOURADOS - 2019

Arruda, Ronan Fernandes
Congruência Módulo Inteiro e Análise Documental
de sua Inserção no Currículo
dos Curso de Licenciatura Plena em Matemática
Ronan Fernandes de Arruda - 2.019

Orientador: Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza

Dissertação Mestrado Profissional na Universidade Estadual
de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação
Profissional em Matemática, Dourados, 2019.

1. Aritmética;
2. Congruência módulo Inteiro $\mathbb{Z}$
3. Aritmética no Brasil - Século XX e XXI

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte, às nove horas, na Unidade Universitária de Dourados, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "Congruência Módulo Inteiro e Análise Documental de sua Inserção no Currículo dos Cursos de Licenciatura Plena em Matemática" de autoria do aluno: **RONAN FERNANDES DE ARRUDA**, CPF 583.454.181-04, sob a orientação de RAFAEL MOREIRA DE SOUZA do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: RAFAEL MOREIRA DE SOUZA **(Presidente)**, SONNER ARFUX DE FIGUEIREDO e JHOEL ESTEBANY SANDOVAL GUTIERREZ (UFMS). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

[X] Aprovação [ ] Aprovação com revisão [ ] Reprovação

EXAMINADOR	**ASSINATURA**
Dr. RAFAEL MOREIRA DE SOUZA	
Dr. SONNER ARFUX DE FIGUEIREDO	
Dr. JHOEL ESTEBANY SANDOVAL GUTIERREZ (UFMS)	

OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:

Presidente da Banca Examinadora **Aluno**

·UEMS· Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul	**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**	PROFMAT

RONAN FERNANDES DE ARRUDA

CONGRUÊNCIA MÓDULO INTEIRO E ANÁLISE DOCUMENTAL DE SUA INSERÇÃO NO CURRÍCULO DOS CURSOS DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 20/02/2020.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Jhoel Estebany Sandoval Gutierrez (UFMS)
Universidade Federal de Maro Grosso do Sul

RESUMO

Esta dissertação trás um conglomerado de informações relacionados à Congruência dos Restos, a evolução da aritmética na história da matemática, como se consolidou suas escritas algébricas e as formalizações abstratas. Tem também os conflitos de conteúdos que as mais variadas IES (Instituição de Ensino Superior) abordam que traduzem o perfil dos profissionais da Educação que ensinam a Educação básica. Abordadando o contexto histórico da evolução da escrita matemática cuneiformes até o surgimento dos valores posicionais dos números. Considerando que os números teriam a logística adequada para negociantes e guerreiros. Devendo conhecer aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser". No século XIX apontam o surgimento de uma tendência crescente a generalização e abstração; e uma outra concentrando em expressões sujeitas a restrições mais cuidadosamente definidas que as consideradas em séculos precedentes. A escrita algébricas da aritmética e todo seu rigor matemático, com definições, teoremas, proposições e exemplos didáticos que possam facilitar o entendimento do leitor leigo. Assim, dando estrutura necessária para que um profissional da educação na área da matemática possa entrar em sala de aula e através das diretrizes curriculares desenvolver um trabalho de excelência na Educação Básica. Vamos encontrar o organograma de conteúdos dos números inteiros nos documentos oficiais: LDB (Lei Diretrizes e Bases da Educação), PCN (Parâmetros Currículares Nacional), Diretrizes Curriculares Nacional, Diretrizes Curriculares de Mato Grosso do Sul, BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Fazendo assim, uma abordagem completa do ensino da Congruência dos Restos no Brasil e no Estado de Mato Grosso do Sul.

Palavras-Chave: Estado da Arte na Congruência dos Restos, Cursos de Licenciatura em Matemática e Documentos Oficiais da Educação Básica no Brasil.

ABSTRACT

This dissertation brings a conglomeration of information related to the Congruence of Remains, that is, the evolution of arithmetic in the history of mathematics, how his algebraic writings and abstract formalizations were consolidated. It also has content conflicts that the most varied IES (Higher Education Institution) address that translate the profile of education professionals that teach basic education. Approaching the historical context of the evolution of cuneiform mathematical writing until the emergence of positional values ??of numbers. Whereas the numbers would have the proper logistics for traders and warriors. Must know arithmetic "because it must rise above the sea of ??change and grasp the true self. "In the nineteenth century there was the emergence of a growing tendency towards and abstraction; and another focusing on expressions subject to constraints more carefully defined than those considered in previous centuries. The algebraic writing of arithmetic and all its mathematical rigor, with definitions, theorems, propositions and didactic examples that can facilitate the understanding of the lay reader. Thus, giving the necessary structure for a mathematics education professional to enter the classroom and through the curriculum guidelines develop a work of excellence in Basic Education. Let's find the integer content org chart in official documents: LDB (Education Guidelines and Bases Act), PCN (National Curriculum Parameters), National Curriculum Guidelines, Curriculum Guidelines of Mato Grosso do Sul, BNCC (Common National Curriculum Base). Doing so, a complete approach to the teaching of the Congruence of the Rest in Brazil and the state of Mato Grosso do Sul.

Key words: State of the Art in the Congruence of the Rest, Mathematics Degree Courses and Official Documents of Basic Education in Brazil.

"Entre os mortais é sábio quem pensa duas vezes".

Euclides de Alexandria

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida por me darem vida e saúde. A minha esposa Vanessa e meus filhos amados Marco Antonio, Carlos Eduardo e Luiz Felipe por terem tido paciência pela minha ausência nestes dias de estudos. Mencionar meu estimado amigo Prof.Dr. José Felice pela amizade e companherismo nas discussões que sempre tivemos ao abordar assuntos relacionados a educação no País. Citar esse amigo de longa data Prof. Msc. Mauricio dos Reis pelos bate papo durante os dois anos que tivemos juntos de Nova Andradina a Dourados para estudar todas as semanas. Agradecer ao querido amigo Prof. Msc. Ênio Vasconcelos que me acolheu em sua residência para estudarmos para a prova de qualificação, onde pude ter a felicidade de ter sido aprovado. Não esquecendo também dos amigos e futuros mestres que me aturaram durante as aulas e apresentações de seminários - Edison Lange, Paulo Neres, José, Marcos, Elton, Thiago. Agradecer a todos os professores do programa PROFMAT que de alguma maneira puderam contribuir para o meu conhecimento durante esta trajetoria.

Sumário

1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA ARITMÉTICA . . . **1**

1.1 História da Evolução da Teoria dos Números . . . 1

1.1.1 Egito - Papiro de Rhind . . . 1

1.1.2 Mesopotâmia . . . 2

1.1.3 Os Gregos - Pitagóricos . . . 4

1.1.4 Euclides de Alexandria . . . 8

1.1.5 Ressurgimento da Matemática Grega . . . 10

1.1.6 China e India . . . 12

1.1.7 Os Árabes . . . 16

1.1.8 A Matemática na Idade Média . . . 18

1.1.9 Aritmética no Renascimento . . . 21

1.1.10 Fermat e Descartes XVII . . . 21

1.1.11 Matemáticos da Revolução Francesa . . . 26

1.1.12 Gauss, Cauchy e Galois- Séc. XIX . . . 28

2 CONGRUÊNCIA MÓDULO INTEIRO $\mathbb{Z}$ . . . **34**

2.1 Os Números Inteiros $\mathbb{Z}$ . . . 34

2.1.1 Adição em $\mathbb{Z}$ . . . 34

2.1.2 Multiplicação em $\mathbb{Z}$ . . . 35

2.1.3 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$ . . . 35

2.1.4 Múltiplos e Divisores . . . 38

2.1.5 Algoritmo de Euclides em $\mathbb{Z}$ . . . 39

2.1.6 Máximo Divisor Comum - MDC . . . 41

2.1.7 Números Primos . . . 45

2.1.8 Critérios de Divisibilidade . . . 47

2.2 Congruências . . . 51

2.2.1 Sistema Completos de Restos . . . 59

2.2.2 Critérios de Divisibilidade - Congruência . . . 63

3 ARITMÉTICA NO BRASIL - XX e XXI **68**

3.1 Estado da Arte e Perfil de Licenciatura em Matemática no Brasil - Metade séc. XX ínicio séc XXI 68

3.2 Estrutura no Ensino Básico - Matemática 80

3.2.1 LDB - Lei Diretrizes Básicas 80

3.2.2 PCN - Plano Curricular de Nacional - Matemática 83

3.2.3 Referencial Curricular Nacional/Estadual - 2013 86

3.2.4 BNCC - Base Nacional Comum Curricular 89

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **95**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **100**

INTRODUÇÃO

Esta dissertação trás um breve conglomerado de informações relacionados à Congruência dos Restos, a evolução da aritmética na história da matemática, como se consolidou suas escritas algébricas e as formalizações abstratas. Tem também os conflitos de conteúdos que as mais variadas IES (Instituição de Ensino Superior) abordam que traduzem o perfil dos profissionais da Educação que ensinam a Educação básica.

No Capitulo 1, foi abordado o contexto histórico da evolução da escrita matemática cuneiformes até o surgimento dos valores posicionais dos números. Entre tantos nomes podemos citar Platão que faz seus estudos variando nestas duas áreas na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de Teoria dos Números) e logística (a tecnica computacional). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, que "precisavam aprender as artes dos números, ou não saberão dispor de suas tropas". O filósofo, por outro lado, deve conhecer aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser". Ao abordar a aritmética temos que citar a célebre regra na teoria dos números, hoje conhecida como *Algoritmo de Euclides*. Gauss tinha começado a trabalhar numa importante publicação em teoria dos números, fundamentais na discussão são os conceitos de *Congruência e Classe de Restos*. No século XIX começam a surgir uma tendência crescente a generalização e abstração; e uma outra concentrando em expressões sujeitas a restrições mais cuidadosamente definidas que as consideradas em séculos precedentes.

Já no Capítulo 2, temos a escrita algébricas da aritmética e todo seu rigor matemático, com definições, teoremas, proposições e exemplos didáticos que possam facilitar o entendimento do leitor leigo. Assim, estrutura necessária para que um profissional da educação na área da matemática possa entrar em sala de aula e através das diretrizes curriculares desenvolver um trabalho de excelência na Educação Básica.

No Capítulo 3, abordamos o organograma de conteúdos dos números inteiros nos documentos oficiais: LDB (Lei Diretrizes e Bases da Educação), PCN (Parâmetros Currículares Nacional), Diretrizes Curriculares Nacional, Diretrizes Curriculares de Mato Grosso do Sul, BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Fazendo assim, uma abordagem completa do ensino da Congruência dos Restos no Brasil e no Estado de Mato Grosso do Sul.

E por fim, nas considerações finais, faço uma análise dos temas abordados nos capítulos anteriores, dando uma sinopse do entendimento.

Capítulo 1

DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA ARITMÉTICA

1.1 História da Evolução da Teoria dos Números

Os matemáticos do século vinte desempenharam uma atividade intelectual altamente sofisticada, e mas boa parte do que hoje se chama matemática deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de números, grandeza e forma.

O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China. Segundo Boyer 1996: Os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang-tse não merecem confiança, mas dispomos de informações razóavelmente segura sobre os povos que viveram ao longo do Nilo e no crescente fértil dos rios Tigres e Eufrates.

Nenhuma outra cidade foi o centro da atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria, nos dia de Euclides (morreu 300a.C) aos de Hipatia (415d.C). Chamado de Pai da álgebra, Euclides, em sua obra não é de modo algum tipo de material que forma a base da álgebra moderna, nem se assemelha à álgebra geométrica de Euclides. A principal obra de Diofante que conhecemos é a *Arithmética*, tratado que era originalmente em treze livros, dos quais seis primeiros se preservaram. Deve-se ressaltar que na Grécia antiga a palavra aritmética significa Teoria dos Números, que tinha mais em comum com a filosófia que com o que consideramos como matemática.

1.1.1 Egito - Papiro de Rhind

A matemática é muito mais que contar e medir, os aspectos que são tratados em inscrições hieroglíficas. Felizmente temos outras fontes de informações que resistiram ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. Sendo o mais extenso de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30m de altura e 5m de comprimento, que está agora no Bristish Museum. Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do rio Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind - por isso o nome usual de "Papiro de Rhind".

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas duplações. Nossa palavra "multiplicação", na verdade, sugere o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos 69 por 19, seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552, e mais uma vez, dando 1.104, que é, naturalmente dezesseis vezes 69, com 16+2+1, o resultado da multplicação de 69 por 19 é 1.104+138+69, isto é, 1.311.

Muitos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulação de regra de três. O problema 72 pergunta qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como 100/10x45 ou 450 pães. Nos problemas sobre pães e cervejas, a força ou peso é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no Papiro de Ahmes.

Os problemas egípcios descritos até agora são do tipo digamos aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos, especificos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b, c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de "aha".

O problema 24, por exemplo, pede o valor de aha que somado a um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como "método de falsa posição". Um valor especifico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. O valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + (1/7)x$ é 8, em vez de 19, como se queria. Como $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta. Ahmes achou 16+1/2+1/8. Então conferiu sua resposta mostrando que se a 16+1/2+1/8 somarmos um sétimo disto, de fato obteremos 19.

Estes eram modelos que eram feitos para calcular no Egito antigo.

1.1.2 Mesopotâmia

As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas babilônicas, embora tal designação não seja inteiramente correta. A cidade de Babilônia não foi a princípio, nem foi sempre em períodos anteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome "Babilônica"para a região durante o período de cerca de 2.000 anos até aproximadamente 600 a.C.. Quando em 538a.C. a Babilônia foi dominada por Ciro da Pérsia, a cidade foi poupada mas o império babilônico terminou. A matemática Babilônica, no entanto, continuou através do período selêucida na Síria, quase até o surgimento do cristianismo.

Nesta região, "Terra dos Dois Rios"estava aberta a invasões de várias direções, o que fazia do Crescente fértil um campo de batalha, com a hegemonia mudança frequentemente. Umas das invasões mais significativas foi a dos acadianos semíticos sob Sargão I ou Sargão "O Grande"(2.276 - 2.221 a.C.). Ele estabeleceu um império que se estendeu do Golfo Pérsico ao sul, até o Mar Negro ao norte e das estepes da Pérsia a leste, até o Mediterrâneo a oeste. Sob Sargão começou uma gradual absorção pelos invasores da cultura suméria indígena, inclusive da escrita cuneiforme. Invasões e revoltas posteriores trouxeram estirpes de várias raças - amoritas, cassitas, elamitas, hititas, assírios, medos, persas e outros - ao poder político em épocas diversas, mas permaneceu um grau suficientemente alto de unidade cultural na área para que se possa chamar simplesmente de mesopotâmica essa civilização. Em particular, o uso da escrita cuneiforme formou um forte laço: Leis, registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais - tais coisas e muitas outras eram incisas em tabletas de barro mole com um estilete, e as tabletas eram então cozidas ao sol ou em fornos. Tais documentos, felizmente, eram muito menos vulneráveis aos estragos do tempo que os papiros egípcios.

A aproximadamente 4.000 anos os mesopotâmios fizeram a invenção da notação posicional - o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral, isto é, os antigos babilônios viram que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número. Um espaçamento adequado entre grupos de cunhas pode estabelecer posições, lidas da direita para esquerda, que correspondem a potências crescentes da base. Cada grupo tem valor local que depende de sua posição.

Uma tabela que os babilônios achavam muito útil não é geralmente incluida nos manuais de hoje. É uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n, tabela essencial na álgebra babilônia. Esse assunto atingiu nível consideralvelmente mais alto na Mesopotâmia que no Egito. Muitos textos de problemas do período babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituia dificuldade séria para os babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área"e "volume"serviam bem nesse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um "comprimento"com uma "área", ou uma "área"com um "volume".

As equações quadráticas tiveram soluções com três termos demasiadamente difícil para os egípcios, mas Neugebauer em 1930 revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Até os tempos modernos não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2+px+q=0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificados em três tipos:

- $x^2 + px = q$
- $x^2 = px + q$
- $x^2 + q = px$

Todos esses tipos são encontrados em textos do período babilônio antigo, de uns 4.000 anos atrás.

1.1.3 Os Gregos - Pitagóricos

A atividade intelectual das civilizações potâmicas no Egito e Mesopotâmia tinha perdido sua verve bem antes da era cristã; mas quando a cultura nos vales dos rios estavam declinando, e o bronze cedendo lugar ao ferro na fabricação de armas, vogorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral mediterrâneo. Para indicar essa mudança no centro de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800a.C e 800d.C é as vezes chamado Idade Talássica, isto é, idade do mar ou Era Helênica.

Não houve uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a beira do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, e as condições em variação são associadas a causas antecedentes. Passaram-se ainda quase dois séculos até haver alguma citação, mesmo indireta, da matemática grega. Então, durante o sexto século a.C. apareceram dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura.

Tales e Pitágoras são figuras imprecisas historicamente, pois no que se refere as suas obras, não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compulseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruido com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. Certas frases lhes são atribuídas, tais como "Conheci a ti mesmo"no caso de Tales e "Tudo é Número", de Pitágoras.

O mundo grego por muitos séculos teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava só localizada ali. Em 600a.C. colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática. Tales de Mileto(624-548a.C.) e Pitágoras de Samo (600-580a.C) tinham ainda mais vantagem pois estavam em condições de viajarem aos centros antigos de conhecimento e lá adquirir informação de primeira mão sobre astronômia e matemática.

> Durante as peregrinações de Pitágoras ele evidentemente absorveu não só informação matemática e astronômia como também muitas ideias religiosas. Pitágoras, incidentalmente, foi praticamente contemporâneo de Budá, Confucio e Lao-Tse, de modo que esse século foi crítico no desenvolvimento da religião bem como da matemática. Em Crotona fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas. Sua escola Pitagorica tinha entre seus tabus a confiança no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras "filosofia"("amor a sabedoria") e matemática ("o que é aprendido"). (Boyer, pag. 33).

Supõe-se usualmente que a maior parte do conteúdo dos dois primeiros livros de "Os Elementos"é devida aos pitágoricos. O mais importante matemático pitágorico do começo do quarto seculo a.C., Arquitas de Tarento (428-365a.C.) afirmava que só a aritmética e não a geometria fornecia provas satisfatórias, não parece haver muita razão para atribuir o surgimento do método axiomático na geometria aos pitagóricos de um século ou dois antes.

Os pitagóricos não eram os únicos a imaginar que os números ímpares tinham atributos masculinos e femininos os pares - com a concomitante crença (não destituida de preconceito), encontrada ainda em Shakespeare, de que "há divindade nos números ímpares".

1. O número um, diziam eles, é o gerador dos números é o número da razão;
2. O dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião;
3. O três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmônia, sendo composto da unidade e diversidade;
4. O quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajustes de contas;
5. O cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino;
6. O seis é o número da Criação;
7. O Dez - o mais sagrado - o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geometricas.

Na Grécia a palavra número era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou uma relação entre os inteiros (a matemática grega nos seus estágios iniciais frequentemente chegou mais perto da matemática "moderna"de hoje do que da aritmética usual das gerações que nos precederam). Segundo Boyer, Euclides afirma em (Os Elementos V3) "Uma razão é uma relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie".

A aritmética pode ser considerada uma disciplina intelectual, além de uma técnica, e a transição para esse ponto de vista parece ter sido feita na escola pitagórica. Se a tradição merece confiança, os pitagóricos não só fizeram da aritmética um ramo da filosofia; parecem ter feito dela uma base para a unificação de todos os aspectos do mundo que os rodeava. Por meio de configurações de pontos, ou unidades sem extensão, associavam números com extensão geometrica; isso os levou á aritmética celeste. Embora nenhum triângulo possa ser formado com menos de três pontos, é possivel ter triângulos de maior número de pontos, como seis, dez ou quinze. Números esses dados pela fórmula:

$$N = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{(2)}$$

eram chamados triangulares. Haviam uma infinidade de outras categorias de números privilegiados. Números quadrados sucessivos são formados pela sequência:

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$$

em que cada número ímpar por sua vez era considerado como uma configuração de pontos semelhantes a um gnômon (relógio de sombra babilônio) colocado em torno de dois lados da precedente configuração de pontos em forma de quadrado. Daí a palavra gnômon -"*sabe*" - veio ligado aos números ímpares.

A sequência de números pares:

$$N = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n(n+1)$$

produz o que os gregos chamaram "números oblongos", cada um dos quais é o dobro de um número triangular. Configurações pentagonais de pontos ilustravam os números pentagonais dados pela sequência:

$$N = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{(2)}$$

e os números hexagonais provinham da sequência

$$N = 1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

Encorajado por estas ideias, Filolaus, afirmou que " *Todas as coisas que podem ser conhecidas têm número: pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida.*"

A Pitágoras duas descobertas (1) - a construção dos sólidos geométricos e (2) - a teoria das proporcionais. A teoria das proporcionais claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos gregos antigos, e não é difícil achar uma fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias: aritmética, geométrica e harmônica - e da *proporção áurea* que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para a sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Vale ressaltar que, essa é a essência do algoritmo babilônio para a extração da raiz quadrada.

O estudo das proporções ou da igualdade de razões presumivelmente formava de início uma parte da aritmética ou teoria dos números pitagórico. Se b é a média de a, c onde $a < c$, então, mais tarde as quantidades a, b, c que entravam em tais proporções seriam provavelmente olhadas como grandezas geométricas, mas o período em que teve lugar essa mudança não é claro. Além dos números poligonais mencionados acima e da distinção entre ímpares e pares, os pitagóricos começaram em dado momento a falar em número *ímpar-ímpar* ou *par-ímpar*, conforme fosse o produto de dois números ímpares ou de um ímpar e um par, de modo que às vezes o termo par era reservado às potências inteiras de dois. A distinção entre números primos e compostos parece ter-se tornado importante. Para os pitagóricos o *dez* era perfeito, porque, entre outras coisas, é o menor inteiro n para o qual há exatamente tantos primos entre 1 e n quanto não-primos.

São atribuidos aos pitagóricos, as definições de números perfeitos, abundantes e deficientes, conforme a soma dos divisores próprios do número seja igual a, maior que, ou menor que o número em questão. Segundo essa definição, seis é o menor número perfeito, vinte e oito vindo em seguida. Que isso seja provavelmente um desenvolvimento mais tardio no pensamento pitagórico é sugerido pela veneração do dez em lugar do seis. Dois inteiros a e b se dizem *"amigáveis"* se a é a soma dos divisores próprios de b e b a soma dos divisores próprios de a. O menor tal par é o dos inteiros 220 e 284.

Quando a dedução penetrou na matemática no sexto século a.C., ou no quarto, que a incomensurabilidade tenha sido descoberta antes ou depois de 400a.C., não pode haver dúvida de que a matemática grega sofreu modificações drásticas na epoca de Platão. A dicotomia entre números e grandezas contínuas exigia um novo método para tratar a álgebra babilônia que os pitagóricos tinham herdado.

Platão é importante na história da matemática principalmente por seu papel inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção clara que se fez na Grécia antiga entre aritmética (no sentido de Teoria dos Números) e logística (a técnica computacional). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros, que "precisavam aprender as artes dos números, ou não saberão dispor de suas tropas". O filósofo, de outro lado, deve conhecer aritmética "porque deve subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser".

> Platão na *República, a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato.* Na aritmética Platão deu enfase não só a distinção entre números pares e ímpares como entre as categorias **par vezes par**, **ímpar vezes ímpar** e **ímpar vezes par**. (Boyer 1996; pag. 59).(grifo nosso).

A acadêmia platônica de Atenas tornou-se centro matemático do mundo, e dessa escola provieram os principais mestres e pesquisadores durante os meados do quarto século a.C.

1.1.4 Euclides de Alexandria

A morte de Alexandre "O Grande", levou disputas entre os generais do exército grego, mas em 306 a.C o controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I. Esse governante pôde voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros feitos, a criação de uma escola em Alexandria. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, dentre eles, Euclides - o autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos - "Os Elementos".

Os Elementos de Euclides superaram de tantos seus competidores que foram os únicos a sobreviver. Não eram, um compêncio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introdutório cobrindo toda a matemática *elementar* - isto é, `aritmética` (no sentido de "Teoria dos Números), `geometria` (de pontos, retas, círculos e esferas), e `álgebra` (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). Formado por treze livros ou capítulos, dos quais os seus primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre "Teoria dos Números", o Livro dez sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço.

A palavra `números` para os gregos sempre se referia ao que chamamos números naturais - os inteiros positivos. O livro VII começa por uma lista de vinte e duas definições distinguindo vários tipos de números - ímpares e pares, primos e compostos, planos e sólidos (isto é, os que são produtos de dois ou três inteiros) e finalmente definindo número perfeito como "aquele que é igual às suas partes". Os Teoremas nos Livros VII, VIII e IX devem ser familiares aos leitores que tenham tido curso elementar de teoria dos números, mas a linguagem das provas certamente não será familiar. Em todos estes livros cada número é representado por um segmento, de modo que Euclides se refere a um número $\overline{AB}$. Ressaltando que a descoberta dos incomensuráveis tinha mostrado que nem todos os segmentos podem representar inteiros, mas a afirmação recíproca - de que números inteiros podem ser representados por segmentos evidentemente continua válida.

No livro VII começa com duas proposições que constituem a célebre regra na teoria dos números, hoje conhecida como *Algoritmo de Euclides* para achar o máximo divisor comum de dois números. Dados dois números diferentes, subtrai-se o menor a do maior b repetidamente até que se obtenha um resto r_1 menor que o menor número; então subtrai-se repetidamente esse resto r_1 de a até resultar um resto $r_2 < r_1$; então subtrai-se repetidamente r_2 de r_1; e assim por diante. Finalmente o processo leva a um resto r_n que mede r_{n-1}, portanto todos os restos procedentes, bem como a e b. Este número r_n será o máximo divisor comum de a e b. Entre as proposições seguintes achamos equivalentes de teoremas familiares da aritmética. Assim a proposição 8 afirma que se $an = bm$ e $cn = dm$ então $(a - c)n = (b - d)m$. A proposição 24 diz que se a e b são primos com c, então ab é primo com c. Este livro termina com uma regra (proposição 39) para achar o mínimo múltiplo comum de vários números.

O Livro VIII é dos menos interessantes do treze livros de *Os Elementos* começa com proposições sobre números em proporção continuada (progressão geométrica) e depois volta-se para propriedades simples de quadrados e cubos.

Já o livro IX, o último dos três sobre *teoria dos números*, contém vários teoremas interessantes. Destes o mais célebre é a proposição 20: *"números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos"*, isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos.

Seja P o produto de todos os primos, supostos em número finito, e consideremos o número $N = P + 1$. N não pode ser primo, pois isso contraria a hipótese de P ser o produto de todos os primos. Logo N é composto e deve ser medido por algum inteiro P. Mas P não pode ser nenhum dos fatores primos que entram em P, senão seria um fator de 1. Logo P deve ser um primo diferente de todos os fatores de P; portanto, a hipótese de P ser o produto de todos os primos é falsa.

A proposição seguinte, a última do Livro IX, é a fórmula bem conhecida para números perfeitos: *Se tantos quantos quisermos, começando com a unidade, forem colocados continuamente em dupla proporção até que a soma de todos seja um primo, e se a soma for multiplicada pelo último, o produto será perfeito*, isto é, em notação moderna, se:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

é um primo, então

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

é perfeito. A prova é facil, em termos de definição de número perfeito dada no Livro VII. Os gregos antigos conheciam os quatro primeiros números perfeitos: 6, 28, 496 e 8.128. Euclides não respondeu à pergunta recíproca - se essa fórmula fornece ou não todos os números perfeitos. Sabe-se agora que todos os números perfeitos pares são desse tipo, mas a questão da existência de números perfeitos ímpares é ainda um problema não resolvido. Das duas dúzias de números perfeitos conhecidos hoje todos são pares, mas é arriscado supor que todos sejam.

1.1.5 Ressurgimento da Matemática Grega

Hoje usamos a frase "matemática grega"como se indicasse um corpo de doutrina homogênea e bem definido. Devemos lembrar que a matemática do mundo grego cobriu um intervalo de tempo indo de pelo menos 600a.C a 600d.C. e que viajou de Jônia à ponta da Itália e Atenas, a Alexandria e a outras partes do mundo.

Diofante de Alexandria é considerado o maior algebrista grego. A matemática grega não era de alto nível, pois o período glorioso do terceiro século a.C, seguiu-se em declínio, talvez interrompido até certo ponto nos dias de Ptolomeu, mas não realmente cancelado até o século da "Idade de Prata"de 250 a 350 d.C., esse período também conhecido por Segunda Idade de Alexandria. A aritmética de Diofante era desvinculada dos métodos algébricos, assemelha-se a álgebra babilônica em muitos aspectos, mas enquanto que os matemáticos babilônios se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas até o terceiro grau, Diofante dedicava-se a resolução *exata* de equações tanto *determinadas* quanto *indeterminadas*. Devido a ênfase dada a *Arithmética* à solução de problemas indeterminados, o assunto, às vezes chamado análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise Diofantina. Como esse tipo de trabalho hoje é em geral parte de cursos de *teoria dos números* e não de *álgebra*.

Devido a isso, podemos dizer que não é adequado considerar Diofante como o pai da álgebra, mas seus trabalhos preservados nos seis livros contribuiram para a escrita moderna, tal que, existiu três estágios no desenvolvimento histórico da álgebra.

1. o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras;

2. um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações

3. um estágio simbolico ou final.

Neste sentido que o uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. Diofante conhecia as regras de combinação equivalentes às nossas leis sobre expoentes, e tinha nomes especiais para os recíprocos das seis primeiras potências das incógnitas, quantidades equivalentes às nossas potências negativas.

> Coeficientes numéricos eram escritos depois dos símbolos para as potências a que estavam associados; a adição de termos era indicada por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraídos. Com tal notação Diofante podia escrever polinômios numa incógnita quase tão concisamente quanto nós de hoje. A expressão
>
> $$2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$
>
> por exemplo, poderia ser escrito numa forma equivalente à
>
> $$SS2C3x5MS4u6$$
>
> onde as nossas letras S, C, x, M, u foram usadas para "quadrado", "cubo", "incógnita", "menos"e "unidade", nossos numerais em lugar de notação grega alfabética que se usava no tempo de Diofante. (Boyer 1996; pág 122).

Dentre tantos problemas desenvolvidos por Diofante, que são aproximadamente 150, o método usado consistia em resolvê-los envolvendo vários números desconhecidos expressando engenhosamente todas as quantidades desconhecidas, quando possível, em termos de uma apenas. Um problema da *Arithmética* servirá para ilustrar o método de Diofanti. Ao achar dois números tais que a soma seja 20 e a soma dos quadrados 208, os números são designados por x e y, mas como

$$10 + x \ e \ 10 - x$$

Então,

$$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$$

logo $x = 2$; portanto, os números procurados são 8 e 12. Entre os problemas indeterminados na *Arithmética* há alguns envolvendo equações como

$$x^2 = 1 + 30y^2 \ e \ x^2 = 1 + 26 + y^2$$

que são exemplos da chamada "equação de Pell"

$$x^2 = 1 + py^2$$

considera-se sempre uma única solução positiva. É injusto criticar Diofantes por se satisfazer com uma única resposta, pois ele estava resolvendo problemas, não *equações*. Pode-se até dizer que a *Arithmética* é uma coleção de problemas de aplicação da álgebra, não um texto de álgebra. Nesse sentido, pode-se assemelhar Diofante aos algebristas babilônios; e sua obra é considerada "o mais belo florescimento da álgebra babilônio".

Até certo ponto tal caracterização é injusta para com Diofante, pois seus números são inteiramente abstratos e não se referem a medidas de grãos ou dimensões de campos ou unidades monetárias, como no caso da álgebra egípcia e mesopotâmia. Além disso, ele se interessava apenas por soluções racionais exatas, enquanto que os babilônios tinham gostos computacionais e aceitavam aproximações de soluções racionais das equações. Notadamente Diofante teve uma influência maior sobre a teoria moderna dos números do que qualquer outro algebrista grego não geométrico. Em particular, Fermat foi levado ao seu célebre "grande"ou "último "teorema quando procurou generalizar um problema que tinha lido na *Arithmética de Diofante*: dividir um dado quadrado em dois quadrados.

Remetendo ao período bizantino do sexto século, tem-se Isídoro de Mileto (viveu 520a.C), era também matemático de relevância na época, pois foi um dos últimos dirigentes da Acadêmia Platônica de Atenas. A escola, é claro, sofrerá muitas mudanças em sua existência de mais de 900 anos, e durante os dias de Proclus tinha-se tornado um centro de estudos neoplatônicos. Quando em 527a.C Justiniano se tornou imperador do Oriente, evidentemente julgou que a cultura pagã da acadêmia, e de outras escolas filosóficas em Atenas, era uma ameaça ao cristianismo ortodoxo, por isso em 529a.C as escolas filosóficas foram fechadas e os seus membros dispersados. Roma então não era um abrigo hospitaleiro para sábios, e vários filosófos procuraram asilo no Oriente.

A data de 529a.C, portanto, pode ser considerada o marco do fim do desenvolvimento da matemática na Europa na Antiguidade. Daí por diante as sementes da ciência grega se desenvolveriam nos países do Oriente Próximo e do Extremo Oriente até que, cerca de 600 anos depois, o mundo latino estivesse mais receptivo.

1.1.6 China e India

As civilizações da China e da Índia são muito mais antigas que as da Grécia e Roma, porém não mais que as dos vales do Nilo e Mesopotâmia. Remontam à Idade Potâmica, enquanto que as culturas da Grécia e de Roma eram da Idade Talássica.

As civilizações das margens dos rios Iang-tse e Amarelo são de época comparável à do Nilo ou de entre os rios Tigre e Eufrates; O livro mais influente de matemática chinês, composto por volta de 250a.C., foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática.* Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos.

Ao passo que os gregos da mesma época estavam compondo tratados lógicamente ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios de compilar coleções de problemas especificos. *Nove Capítulos* também se assemelha á matemática egípcia pelo uso da falsa posição, mas a invenção desse processo, assim como, a origem da matemática chinesa em geral, parece independente de influência ocidental.

Os chineses tinham adoração pelo uso dos quadrados mágicos. A preocupação com tais diagramas levou o autor dos *Nove Capítulos* a resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

efetuando operações sobre colunas na matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

para reduzi-lá a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

a segunda forma representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de x, y, z.

O sistema de "numerais em barras"de 300a.C, não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo. Barras verdadeiras, de bambu, marfim ou ferro, eram carregadas numa sacola pelos administradores e usadas para cálculos. As barras eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como *"voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu movimento"*.

Provavelmente era mais rápido efetuar cancelamentos com barras sobre uma tábua de contar do que em cálculos escritos. Como na Babilônia, só relativamente tarde e que apareceu um símbolo para uma posição vazia. A idade precisa dos numerais em barras originais não pode ser determinada, mas certamente estavam em uso vários séculos antes de nossa era, isto é, muito antes de ser adotada na Índia a notação posicional. O uso de um sistema posicional centesimal em vez de decimal na China era conveniente para a adaptação aos cálculos na placa de calcular.

Notações diferentes para potências de dez vizinhas permitiam aos chinesess usar, sem confusão, um ábaco com colunas verticais marcadas. Antes do século oito o lugar em que o zero deveria aparecer era simplesmente deixado vazio.

Na China teve o avanço na impressão e da pólvora (oitavo século), do papel e da bússola (século onze), sendo pós este período o ponto mais alto da matemática século treze. O matemático *Chu Shihchieh* (viveu de 1280 - 1303 d.C) - por vinte anos viveu passando seus ensinamentos, um verdadeiro sábio errante, quando teve a oportunidade de escrever dois tratados. Sendo o primeiro deles , escrito em (1299 d.C), foi o *Suan-Hsueh Ch'i-meng* (Introdução aos estudos), obra relativamente elementar que influenciou fortemente a Coréia e o Japão, embora na China se perdessse até reaparecer no século dezenove. E o outro mais importante é o *Ssu-Yuan Yu-chien* (precioso espelho dos quatro elementos), voltado a resolver equações até de grau quatorze.

O Triângulo Aritmético, uma obra de Yang Hui inclui também resultados quanto à soma de séries e o chamado Triângulo de Pascal, coisas publicadas e melhor conhecidas através do Espelho Precioso de *Chu Shihchieh* com o qual a idade áurea da matemática chinesa teve fim. Algumas das muitas somas encontradas está:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)\frac{(2n+1)}{3!}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + ... + n^2(n+1)\frac{n(2n+1)}{3!} = n(n+1)(n+2)(n+3)\frac{n(4n+1)}{5!}$$

O Espelho precioso começa com um diagrama aritmético impropriamente conhecido no Ocidente como "Triângulo de Pascal".

No arranjo de Chu temos os coeficientes das expansões binomiais até a oitava potência, claramente dadas em numerais em barra e um símbolo redondo para o zero. Chu não reinvidicava crédito pelo triângulo, referindo-se a ele como um "diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores". É interessante observar que a descoberta chinesa do teorema binomial para potências inteiras estava associada, em sua origem, à extração de raizes e não a potenciações.

Na Índia após escavações em Mohenjo Daro fornecem provas de uma civilização antiga e de alta cultura durante as construções das pirâmides egipcias. O grande mestre religioso BUDÁ, agia na Índia mais ou menos quando Pitagóras, ao que se diz, esteve lá, o que sugere que o mesmo aprendeu seu teorema com os hindus, o que estudos mostram que seja improvável devido a familiaridade dos babilônios com o teorema pelo menos mil ano antes.

Com a queda do Império Romano do Ocidente tradicionalmente é situada no ano de 476d.C., foi nesse ano que nasceu *Aryabhata*, autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos. É claro, entretanto, que tinha havido atividade matemática na Índia muito antes disso - provavelmente antes mesmo da mítica fundação de Roma em 753a.C. A Índia, como no Egito, tinha seus estiradores de corda, e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medidas e construção de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimentos conhecidos como os *Sulvasutras* ou regras de corda; os *Siddhantas* (290d.C.)ou sistemas de astronomia;

Durante o sexto século, logo depois da composição dos Siddhantas, viveram dois matemáticos hindus dos quais se sabe terem escrito sobre o mesmo tipo de texto. O mais antigo e importante dos dois foi *Aryabhata*, cuja obra mais conhecida escrita em 499d.C e intitulada *Aryabhatiya* é um pequeno volume escrito em verso, sobre astronômia e matemática. Os nomes de vários matemáticos hindus anteriores são conhecidos, mas nada de sua obra, além de uns poucos fragmentos, se preservou. Diante disso, portanto, a posição do *Aryabhatiya* de *Aryabhata* na Índia é semelhante à de *Os Elementos* de Euclides na Grécia, cerca de oito séculos antes. Há porém mais diferenças significativas que analogia entre as obras. *Os Elementos* é uma síntese bem ordenada de matemática pura, com alto grau de abstração, uma estrutura lógica clara e uma evidente intenção pedagógica; o *Aryabhatiya* é uma curta obra descritiva, em 123 estrófes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculos usadas na astronômia e na matemática de mensuração, sem nenhuma espírito lógico ou de metodológia dedutiva.

Mas a segunda metade *Aryabhatiya* trata da medida do tempo e de trigonometria esférica; aqui observamos um elemento que iria deixar marca permanente na matemática de geração posteriores - a numeração decimal posicional. Não se sabe exatamente como *Aryabhata* efetuava seus cálculos, mas sua frase "de lugar para lugar cada um vale dez vezes o precedente"é uma indicação de que tinha em mente a aplicação do príncipio de posição. "Valor Local"tinha sido uma parte essencial da numeração babilônia, e talvez os hindus percebessem sua aplicabilidade à notação decimal para inteiros em uso na Índia.

Deve-se notar que a referência a nove símbolos, em vez de dez, significava que os indus ainda não tinham dado o segundo passo na transição para o moderno sistema de numeração - ou seja, um símbolo zero. A primeira referência especifica aos numerais hindus se encontra em 662d.C. nos escritos de Severus Sebokt, um bispo Sírio. Depois que Justiniano fechou as escolas filosóficas em Atenas alguns de seus membros se mudaram para Síria, onde fundaram centros de cultura grega. A história da matemática contém muitas anomalias, e a não menor dessas é que "a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na India se acha numa inscrição 876d.C, isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais.

Com a introdução na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso para o zero, o moderno sistema de numeração para os *inteiros* estava completo. O desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros foi umas das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática.

Os matemáticos hindus se sentiam fascinados, pelo trabalho com números, que envolvessem as operações aritméticas ordinárias ou a solução de equações determinadas ou indeterminadas. A adição e a multiplicação eram efetuadas na Índia de modo muito semelhante ao que usamos hoje, só que parecem a princípio ter preferido escrever os números com as unidades menores à esquerda, portanto trabalhar da esquerda para a direita, usando pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou farinha. Entre os esquemas usados para multiplicação havia um que é conhecido sob vários nomes: multiplicação em retículado, multiplicação em gelosia, em célula, em grade ou quadrilateral.

Não se sabe quando ou onde a multiplicação em gelosia apareceu, mas á India parece ser a fonte mais provável; foi usada lá pelo menos desde o século doze, e de la parece ter sido levada a China e à Arabia. Dos árabes passou para a Itália nos séculos quatorze e quinze e lá o nome gelosia lhe foi associado, por causa da semelhança com os gradeados colocados em frente as janelas em Veneza e outros lugares como França, Alemanha, Holanda e Rússia.

Os árabes e os europeus parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como "método de riscar"ou "método de galeão"também venha da India. Brahmagupta que viveu 628d.C. que viveu na Índia Central um pouco mais de cem anos depois de Aryabhata, tem pouco em comum com seu predecessor que tinha vivido no leste da Índia. As contribuições de Brahmagupta à àlgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raizes mesmo quando uma dela é negativa. A aritmética sistematizada dos números negativos e do zero, na verdade, encontra-se pela primeira vez em sua obra.

Na Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, mas descreveremos apenas a obra de um deles, Bhaskará (1114 a 1185 d.C.), o mais importante matemático do século doze. Foi ele que preencheu lacunas dos trabalhos de Brahmagupta, Aristóteles - no tratado *O Lilavati*, contendo numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus, equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração progressões aritméticas ou geométricas, radicais, tríades pitagóricas, Diofantinos e outros.

1.1.7 Os Árabes

Pela época em que Brahmaguta escrevia, o Império Sabeano da Arábia tinha caído e a península passava por uma crise séria. Era habitada principalmente por nômades do deserto chamados beduínos que não sabiam ler nem escrever, entre eles estava o profeta Maomé, nascido em Meca em cerca de 570d.C.. Durante suas viagens Maomé entrou em contato com os judeus e cristãos, e o amálgama dos sentimentos religiosos que surgiram em sua mente levou-o considerar-se como apóstolo de Deus enviado para conduzir seu povo. Por cerca de dez anos pregou em Meca, mas em 622d.C, perante uma conspiração para matá-lo, aceitou convite para ir para Medina. Essa fuga conhecida como Hégira, marcou o ínicio da era maometana - era que exerceria forte influência sobre o desenvolvimento da matemática.

Maomé transformou-se um líder militar e religioso sendo que em 632d.C, enquanto planejava atacar o Ímperio Bizantino, morreu em Medina. Sua morte súbida não impediu a expansão do domínio islâmico, pois seus seguidores invadiram territórios vizinhos com espantosa rapidez.

Dentro de poucos anos Damasco e Jerusalém e grande parte do vale mesopotâmico caíram perante os conquistadores; em 641d.C Alexandria, que por muitos anos fora o centro matemático do mundo, foi capturada. Por mais de um século os conquistadores árabes lutaram entre si e com seus inimigos, até que por volta de 750d.C o espírito guerreiro se abrandou.

Nessa época surgirá um cisma entre os árabes ocidentais de Marrocos e os árabes orientais que, sob o califa al-Mansur, tinham estabelecido uma nova capital em Bagdá, cidade que logo se transformaria em um novo centro da matemática. Poucos anos depois, talvez em 775d.C mais ou menos, esse *Siddhanta* foi traduzido para o árabe e não muito tempo depois o *Tetrabiblos* astrológico de Ptolomeu.

A Bagdá, nesse tempo, foram chamados estudiosos da Síria e Mesopotâmia inclusive judeus e cristãos nestoriamos; sob três grandes patronos da cultura abássica - Al-Mansur, Harum Al-Rachid e Al-Mamum - a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o período de al-Mamum (809-833d.C), que os árabes se entregaram totalmente á sua paixão por tradução. Estabelecido por al-Mamum em Bagdá uma "Casa da Sabedoria"comparável ao antigo Museu de Alexandria. Entre os mestres havia um matemático e astronomo Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, cujo nome, como de Euclides, iria se tornar famoso na Europa Ocidental.

Além de tabelas astronômicas e tratados sobre astrolábio e relógio de sol, al-Khowa rizmi escreveu dois livros sobre *Aritmética* e álgebra que tiveram papéis muito importante na história da matemática. Através de sua *Aritmética*, e do título de seu livro mais importante, *Al-jabr Wa'l muqabalah*, neste título veio o termo álgebra. Não se sabe bem o que significa os termos *al-jabr* e *muqabalah*, mas a interpretação é semelhante á que a tradução acima implica. A palavra *al-jabr* presumilvemente significa algo como "restauração"ou "completação"e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, a palavra *muqabalah*, ao que se diz, refere-se a "redução"ou "equilibrio" - isto é, ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

A matemática árabe pode, bastante razoávelmente ser dividida em quatro partes:

1 Uma aritmética - derivada presumilvemente da India e baseada no príncipio posicional;

2 Uma álgebra - embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos do muçulmanos uma forma caracteristica nova e sistemática;

3 Uma trigonométrica - cuja substância vinha principalmente da Grécia, mas à qual os árabes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas;

4 Uma geometria - que vinha da Grécia, mas para a qual os árabes contribuíram com generalizações aqui e ali.

Devido a grande facilidade na absorção da cultura dos vizinhos que conquistavam que formavam o império arabe viviam muitos povos de várias étnias: sírios, gregos, egipcios, persas, turcos e muitos outros. A matemática árabe tais diferenças culturais, ocasionalmente se tornavam evidentes, pois tinham obras chegado à Árabia que adotavam o tipo grego de numeração alfabética. Mas, os numerais hindus, por serem superiores predominaram na escrita matemática dos árabes. Chamamos de arábicos os nossos numerais porque os princípios nos dois sistemas são os mesmos e porque nossas formas derivam das arábicas. No entanto, os princípios governando os numerais arábicos presumilvemente vieram da Índia, por isso é melhor chamar nosso sistema de hindu ou indo-arábicos.

1.1.8 A Matemática na Idade Média

No que se refere à história política é costume designar a queda de Roma em 476d.C como o começo da Idade Média, e a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453d.C como o fim. Aqui poderá analisar a matemática do Império do Oriente ou Bizantino, como centro em Constantinopla (ou Bizancio), em que a língua oficial era o grego. E o Império do Ocidente, ou Romano, que não tinha um centro único nem uma única lingua falada, mas onde o latim era a língua franca dos estudiosos. Dentre estes estudiosos podemos destacar Filoponus, Miguel Constantino Psellus, Georgios Pachymeres, Manuel Moschopoulos, Nicolas Rhabdas, Cassiodoro, Isidoro de Sevilha sendo estes discípulos de Boécio.

Com Cassiodoro e Isidoro observamos que contemporâneos consideravam um homem mais culto do seu tempo, entendo assim, o auge dos lamentos do seu tempo que o estudo das letras estava morto entre nós - "*Idade das Trevas*"para as ciências. Vale destacar Gerbert 940d.C. que se ocupava ativamente de política tanto leiga quanto eclesiástica, mas tinha tempo para questões educacionais. Escreveu sobre aritmética e geometria, dependendo provavelmente da tradição de Boécio, que dominará o ensino nas escolas eclesiásticas do Ocidente e que não se aperfeiçoará!

Pelo começo do século doze a situação começou a mudar num sentido que lembrava o século nove na Árabia. *Não se pode absorver a ciência do vizinho sem lhe conhecer a língua.* Os muçulmanos tinham quebrado a barreira de linguagem que os separava da cultura grega no século nove, e os europeus latinos superaram a barreira com a cultura árabe no século doze, sendo que, nenhum europeu poderia pretender ser um matemático ou astrônomo verdadeiro sem um bom conhecimento da língua árabe; e a Europa neste século não poderia se orgulhar de qualquer matemático que não fosse mouro, judeu ou grego. O ressurgimento começou, inevitavelmente com uma série de traduções.

A princípio essas foram quase exclusivamente do árabe para o latim, mas pelo século treze havia muitas variantes - do árabe para o espanhol, do árabe para o hebraico, do grego para o latim, ou combinações como o do árabe para o hebraico para o latim. *Os Elementos de Euclides* foi uma das primeiras obras matemáticas clássicas a aparecer em tradução latina do árabe, por Adelard em 1142d.C.. Na época sua tradução não teve grande influência antes de haver passado mais de um século, mas não foi de modo algum um acontecimento isolado. Destaca-se também por Adelard as traduções da Tabela de astronomias de Al-Khowarizmi do árabe para o latim, e mais tarde (1155d.C) o Almagesto de Ptolomeu do grego para o latim.

Foi durante o período de traduções do século doze e século seguinte que surgiu confusão quanto ao nome de al-Khowarizmi que levou à palavra *algoritmo*. Os numerais hindus tinham sido explicados aos leitores latinos por Adelard e Sevilha mais ou menos na mesma ocasião em que um sistema latino semelhante foi apresentado aos judeus por Abraham ibn Ezra (1090-1167d.C), autor de livros sobre astrologia, filosofia e matemática. Assim como na cultura bizantina os numerais alfabeticos gregos, acrescidos de um símbolo especial para o zero, substituiram os numerais hindus, sendo que Abraham usou os nove primeiros numerais alfabéticos hebraicos, e um círculo para zero, no sistema posicional para os inteiros.

No século treze autores de várias classes sociais ajudaram a popularizar o "algoritmo"mas mencionaremos somente três deles:

- Alexandre de Villedieu 1225d.C - era um franciscano francês;
- John de Halifax 1200d.C - também conhecido como Sacrobosco, era um mestre inglês;
- e Leonardo de Pisa - 1180d.C, mais conhecido como Fibonacci ou "filho de Bonaccio",

Fibonacci descreve em seu livro o novo algarismo mencionado o célebre, completado em 1202, mas tem o nome enganador - *Liber abaci* ou Livro do Ábaco. E não é sobre ábaco que o livro menciona, mas sim, um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos no qual o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado. O livro trás uma ideia quase moderna, mas que era característica da forma de pensar medieval tanto islâmica como cristã - que a aritmética e a geometria são interligadas e se auxiliam mutuamente. Isso, é claro, faz lembrar a *Álgebra de Al-Khowarizmi*, mas era aceito igualmente na tradição latina oriunda de Boécio.

No Entanto, o livro trata mais de números que de geometria. Descreve primeiro "as nove cifras indianas", juntamente com o símbolo 0(zero), chamado *zephirum* em árabe. Incidentalmente é de *zephirum* e suas variantes que derivam nossas palavras "cifras"e "zero".

Muito de *Liber abaci* e desinteressante, mas alguns dos problemas sao tão estimulantes que foram usados por autores posteriores. Entre esses acha-se um perene, que pode ter sido sugerido por um problema semelhante no papiro Ahmes. Fibonacci propõe: *Sete velhas foram a Roma, cada uma tinha sete mulas, cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas.*

Sem dúvida o problema que mais inspirou aos futuros matemáticos foi o seguinte:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Esse problema célebre dá origem à "sequência de Fibonacci"

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., u_n, ...$$

onde,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

em que cada termo após os dois primeiros é a soma dois imediatamente precedentes. Verifica-se que essa sequência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que

$$lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

é a razão da secção áurea

$$(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

A sequência se aplica também a questões de filotaxia e crescimento orgânico.

Leonardo de Pisa sem dúvida foi matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval, mas muito de sua obra era demasiado avançado para ser entendido por seus contemporâneos.

1.1.9 Aritmética no Renascimento

O século treze apresenta um progresso tão grande com relação ao que o procede na Idade Média que ocasionalmente, e não imparcialmente, tem sido considerado como "o maior dos séculos".

Leonardo de Pisa na Europa Ocidental veio rivalizar com as outras civilizações no nível de suas realizações matemáticas; mas isto era apenas uma pequena parte do que estava acontecendo com a cultura latina em seu todo. Muitas das universidades famosas - Bologna, Paris, Oxford e Cambridge - foram fundadas no fim do século doze ou início do século treze, e essa foi também o período em que as grandes catedrais góticas - Chartres, Norte Dame, Westminster, Reims - foram construídas. A filosofia e a ciência aristotélicas tinham sido recuperadas e eram ensinadas nas universidades e nas escolas religiosas.

O século treze é o período dos grandes eruditos e homens da igreja como Alberto Magno, Robert Grossetest, Tomás de Aquino e Roger Bacon.

A primeira metade do século dezesseis viu surgir uma nuvem de álgebras alemãs, entre as mais importantes delas a *Coss* (1525) de Cristoph Rudolff, a *Rechunung* (1527d.C) de Peter Apian e a *Arithmetica Integra* (1544d.C) de Michael Stifel; Sendo a segunda merecendo menção pelo fato de nela, uma aritmética comercial o chamado **Triângulo de Pascal** ser impresso, na página de rosto, quase 100 anos antes do nascimento de Pascal.

1.1.10 Fermat e Descartes XVII

Os principais matemáticos foram René Descartes (1596-1675d.C) e Pierre Fermat (1601-1665d.C), esses homens, não só como indivíduos, mas também coletivamente, pois desde os dias de Platão não havia tanta intercomunicação matemática quanto no século dezessete.

A filosofia e a ciência de Descartes eram quase revolucionária em sua ruptura com o passado, em contraste, sua matemática tinha fortes elos com a tradição anterior. Pois, Descartes quando estava no exército - 1619d.C teve mais interesse nos cáculos, pois com o frio do inverno acabará ficando dez horas na cama pensando em problemas. Foi durante esse período de sua vida que ele descobriu a fórmula sobre poliedros que usualmente leva o nome de Euler $v + f = a + 2$.

Descartes contribuiu com a publicação de *La Géométrie*, que na primeira secção tem como título *Como os Cálculos de Aritmética se relacionam com operações de geometria*, a segunda secção descreve *como a multiplicação, a divisão, e a extração de raizes quadradas sao efetuadas geometricamente.* Aqui Descartes faz o que até certo ponto tinha sido feito Al-Khowarizmi - fornecia um correspondente geométrico de operações algébricas, mostrando que as cinco operações aritméticas correspondem a construções simples com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria.

O uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e das do fim para incógnitas, a adaptação da notação exponencial a estas, e o uso dos símbolos germânicos $+ e -$, tudo isso fez com que a notação de Descartes se assemelhasse à nossa pois naturalmente tiramos a nossa da dele.

Agora se Descartes tinha um rival em capacidade matemática, era Fermat, com suas habilidades pode contribuir a partir de 1621, com a retomada da *Aritmética* de Diofante, o que de imediato o fascinou, sendo fundador da moderna Teoria dos Números. Muitos aspectos do assunto apelaram à sua imaginação, inclusive os:

- números perfeitos e amigáveis;
- números figurados;
- quadrados mágicos;
- tríades de Pitágoras;
- Divisibilidade e
- números primos.

Fermat conseguiu provar a afirmação de Girard de que todo número primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito de uma só maneira como soma de dois quadrados.

Mostrou que se $4n + 1$ não é a soma de dois quadrados, há sempre um inteiro menor dessa forma que não é a soma de dois quadrados. Usando essa relação recursiva para traz chega-se à falsa conclusão de que o menor inteiro desse tipo, 5, não é a soma de dois quadrados (ao passo que $5 = 1^2 + 2^2$), portanto o teorema geral fica provado. Como é facil provar que nenhum inteiro da forma $4n - 1$, pode ser a soma de dois quadrados e como os primos exceto o 2 são da forma $4n + 1$ ou $4n - 1$ pelo teorema de Fermat pode-se classificar os números primos em números que são ou não somas de dois quadrados.

O primo 23, não pode ser dividido, ao passo que o primo 29 pode ser escrito como $29 = 2^2 + 5^2$. Fermat usou seu metódo para provar que nenhum cubo é soma de dois cubos - isto é, não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^3 + y^3 = z^3$.

Indo além, enunciou a proposição geral que para n um inteiro maior que dois não há valores inteiros positivos x, y, z, tais que $x^n + y^n = z^n$, ficando conhecido como o Último Teorema de Fermat.

Se Fermat estava certo ou não ao enunciar seu "grande"teorema não se sabe ainda, mas chegou-se a decisão sobre duas outras conjecturas em teoria dos números. Talvez dois milênios antes de seu tempo tenha havido uma hipótese chinesa que dizia que n é primo se $2^n - 2$ é divisivel por n é um inteiro maior que um.

Metade desta conjectura sabe-se hoje ser falsa, pois $2^{341} - 2$ é divisivel por 341, e $341 = 11 \times 31$ é composto; mas a outra metade é verdadeira, e o *Pequeno* teorema de Fermat é uma generalização disso. Uma consideração de muitos casos de números da forma $a^{p-1} - 1$ é divisivel por p.

Baseado numa indução sobre apenas cinco casos ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) Fermat formulou uma segunda conjectura - que os inteiros da forma

$$2^{2^n} + 1$$

agora conhecidos como *números de Fermat*, são sempre primos. Euler um século mais tarde mostrou que essa conjectura é falsa. Pois

$$2^{2^n} + 1$$

é composto. Na verdade hoje se sabe que

$$2^{2^n} + 1$$

não é primo para n entre cinco e dezesseis inclusive, e começamos a nos perguntar se existe algum outro número de Fermat primo além daqueles que Fermat conhecia.

Fermat por ser um homem modesto quase não publicou. Contentava-se em escrever a Mersenne sobre suas ideias, tendo publicado o teorema intitulado *Números de Mersenne*, isto é,

$$2^p - 1$$

o que ainda o é conhecido.

Embora Pascal em 1654 trabalhasse em sua *As Cônicas*, teve disponibilidade para questões como: em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutiferas o jogo e interrompido. Numa carta de Pascal a Fermat sobre isso, e a correspondencia entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das Probabilidades. Pascal contribuiu de forma mais sistemática pois havia ligado o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, levando a discussão tão mais longe que Cardan que o arranjo triangular a partir daí e conhecido como *Triângulo de Pascal*.

O método de prova dessa propriedade é mais significativa que a propriedade em si, pois aqui em 1654, Pascal deu uma explanação eminentemente claro do método de indução matemática. Fermat esperava interessar Pascal na Teoria dos Números, e em 1654, ele envia o enunciado de um de seus mais belos teoremas: *Todo inteiro é composto de um, dois ou três numeros triangulares, de um, dois, três ou quatro quadrados, de um, dois, três, quatro ou cinco pentágonos, um, dois, três, quatro, cinco ou seis hexágonos, e assim ao infinito*. Tal teorema só foi provado no século XIX.

Pascal considerou o teorema rico, mas preferiu se dedicar ao problema para soma das potências m-enésimas dos primeiros n inteiros consecutivos - pois isso relacionava com o triângulo aritmético, com raciocinio por recorrência e com analise infinitesimal.

Com a morte de Pascal em 1662 e de Fermat em 1665, encerrou-se um grande período da Matemática Francesa. A França e a Itália, outrora líderes, estavam em declínio matematicamente, e a Dinamarca permanecia fora da corrente principal. Durante o século XVII que estamos considerando - o intervalo entre Descartes e Fermat de um lado e Newton e Leibniz de outro - havia duas regiões em particular em que a matemática estava florescente: a Grã-Bretanha e os Países Baixos. Aqui achamos não figuras isoladas como na França, Itália e Dinamarca, mas um punhado de ingleses eminentes e outro punhado de matemáticos holandeses e flamengos.

Isaac Newton, nasceu prematuro no dia de nata de 1642, o ano da morte de Galileu. Em Trinity College em 1661, teve acesso a um exemplar de Euclides, e logo depois leu *Clavis* de Oughred, a *Geometria a Renato Descartes* de Schooten, a *Otica* de Kleper, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido o mais importante para eles, *Aritmetica Infinitorum* de Wallis. Também veio a conhecer obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros.

Não admira que Newton escreve a Hooke: *Se eu enxerguei mais longe que Descartes e porque me sustentei sobre os ombros de gigantes.*

Durante boa parte de (1665-1666d.C), logo depois de Newton ter obtido seu grau, o Trinity College foi fechado por causa da peste, e Newton foi para casa para viver e pensar. O resultado foi o mais produtivo período de descoberta matemática jamais referido, pois foi durante esses meses, Newton mais tarde afirmou que ele fez quatro de duas principais descobertas:

- O Teorema Binomial
- O Cálculo
- A Lei da gravitação
- A natureza das cores.

A primeira dela nos parece tão evidente agora que é dificil ver por que a descoberta tardou tanto. Havia pelo menos meio milênio que os coeficientes binominais para potências inteiras eram conhecidos. Cardan e Pascal, entre outros, conheciam perfeitamente a regra de sucessão para coeficientes, mas eles nao usavam a notação exponencial de Descartes, por isso não podiam fazer a transição relativamente simples de potência inteira para fracionária.

O Teorema Binomial descoberto em 1664, foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton a Henry Oldenburg - secretário da Royal Society, e publicado por Wallis na *Álgebra de Wallis* de 1685. Newton descobriu que

$$(P+PQ)\frac{m}{n} = P\frac{m}{n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + ...$$

onde $P+PQ$ representa uma quantidade cuja raiz ou potência ou cuja raiz de uma potência se quer achar, P sendo o primeiro termo dessa quantidade, Q sendo os termos restantes divididos por essa primeira e $\frac{m}{n}$ o índice numérico das potências $P+PQ$. Finalmente, em lugar dos termos que ocorrem durante o trabalho no quociente, foi usado $A, B, C, D, E, ...$ Assim A representa o primeiro termo $P\frac{m}{n}$; B o segundo termo $\frac{m}{n}AQ$; e assim por diante.

Na Teoria dos Números, Euler tinha interesse por muitos aspectos da matemática, especialmente em análise e matemática aplicada, mas numa direção Euler deu grandes contribuições sem rivalidade para D'Alembert. Euler não publicou tratado sobre o assunto, mas escreveu cartas e artigos sobre vários aspectos da teoria dos números.

Lembramos que Fermat firmará que:

1. Números da forma $2^{2^n}+1$ aparentemente são sempre primos;

2. Se p é primo e a um número então $a^p - a$ é divisivel por p.

A primeira desta conjectura de Fermat, Euler derrubou em 1732 graças à sua incrível facilidade em computação, mostrando que

$$2^{2^5}+1 = 4294967297$$

é fatorável em $6700417x641$. Hoje a conjectura de Fermat foi tão completamente vazia que os matemáticos inclinam à opinião contrária - que não há outros números de Fermat primo maiores que o número 65537 que corresponde a $n = 4$.

Para a segunda conjectura, conhecida como Pequeno Teorema de Fermat. Euler foi o primeiro a publicar uma prova, que apareceu em *Commentarii* de Petersburgo em 1736, é tão surpreendente elementar que a descrevemos aqui. A prova e feito por indução sobre a.

Se $a = 1$ o teorema vale evidentemente. Agora se $a = k$, $k \in \mathbf{Z}$, então vale para $a = k+1$. Para isso, usaremos o teorema binomial para escrever que $(k+1)^p$ como $k^p + mp + 1$, onde m é um inteiro. Subtraindo $k+1$ de ambos os lados, vemos que

$$(k+1)^p - (k+1) = mp + (k^p - k)$$

.

Como o último termo do segundo membro por hipótese é divisível por p, resulta que o segundo membro é divisível por p, e portanto o primeiro membro da equação também; o teorema portanto vale, por indução matemática, para todos os valores de a.

Tendo provado o pequeno Teorema de Fermat, Euler demonstrou uma afirmação um pouco mais geral, em que usava o que veio a chamar *Função ϕ de Euler.* Se m é um inteiro positivo maior que um, a função $\phi(m)$ é definida como o número de inteiros menores que m que são primos com m (mas incluindo o inteiro um em cada caso). Costuma-se definir $\phi(1)$ como 1, para $n = 2, 3, 4...$ os valores de $\phi(n)$ são 1, 2 e 2 respectivamente. Se p é um primo então claramente $\phi(p) = p - 1$. Pode-se provar que

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

onde $p_1, p_2, ..., p_r$ são os fatores primos distintos de m. Usando este resultado Euler mostrou que

$$a^{\phi(m)-1}$$

é divisível por m se a é primo com m.

Euler decidiu duas conjecturas de Fermat, mas não o *Último teorema de Fermat*, embora provasse a impossibilidade de soluções inteiras de

$$x^n + y^n = z^n$$

para $n = 3$

Em 1747 Euler ajuntou aos três pares de números amigáveis conhecidos por Fermat mais vinte e sete, mais tarde aumentou esses trinta para mais de sessenta. Euler também provou que todos os números perfeitos pares são da forma dada por Euclides

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

onde $2^n - 1$ é primo. Se existe ou não número ímpar perfeito é uma questão aberta.

Também não está resolvida até hoje uma questão levantada em correspondência entre Euler e Cristian Goldbach (1690-1764). Escrevendo em 1742 Goldbach disse que todo inteiro par (> 2) é a soma de dois primos. Esse chamado teorema de Goldbach apareceu impresso em 1770 na Inglaterra nas *Meditationes Algebraicae* de Edward Waring. Neste exemplar também tem a conjectura - *que todo inteiro ímpar é um primo ou a soma de três primos.* Waring publicou nesta edição um teorema com o nome de seu amigo e díscipulo John Wilson (1741-1793) - *se p é primo, então $(p-1)! + 1$ é um multiplo de p.*

1.1.11 Matemáticos da Revolução Francesa

O século dezoito teve a infelicidade de vir depois do dezessete e antes do dezenove. Como poderia qualquer período que seguisse o *Século do Gênio* e precedesse a *Idade*

Áurea da matemática ser considerada outra coisa senão um interlúdio. A geometria analítica e o cálculo foram inventados no século XVII; o surgimento do rigor matemático e o florescimento da geometria estão associados ao XIX.

A maior parte dos matemáticos franceses do seculo dezoito estava associada não as universidades mas à igreja ou à classe militar, outros conseguiam proteção do rei ou se tornavam professores particulares. Lagrange (1736-1813), o único de nosso grupo que era propriamente francês, nasceu em Turim, de pais que tinham sido abastados e de ascendência francesa e italiana. Laplace (1749-1827) também nasceu pobre, como monge, encontrou amigos influentes que lhe proporcionaram educação - também numa acadêmia militar. Legendre (1752-1833) não teve dificuldades para garantir sua educação, mas mesmo ele não era estritamente professor de universidade embora ensinasse durante cinco anos na École Militaire de Paris.

As *Mémorias* do Institut contém também uma das tentativas de Legendre de provar o póstulado das paralelas, mas de todas as suas contribuições à matemática as que mais agradavam a Legendre eram os trabalhos sobre integrais elípticas e sobre Teoria dos Números. publicou um *Essai sur la theórie des mombres (1797-1798)* e dois volumes, o primeiro tratado a ser dedicado exclusivamente ao assunto. O famoso "*Último Teorema de Fermat*" o atraiu, e por volta de 1825 ele deu uma prova de sua insolubilidade para $n = 5$. Quase igualmente famoso é um teorema sobre CONGRUÊNCIA que Legendre publicou no tratado de 1797-1798. Se, dados inteiros p e q existe um inteiro x tal que $x^2 - q$ é divisível por p, então q é chamado um resto quadratico de p; escreveremos agora (segundo uma notação introduzida por Gauss)

$$x^2 \equiv q(modp)$$

é lemos isso como "x^2"é congruente a q módulo p.

Legendre redescobriu um belo teorema, dado antes em forma menos moderna de Euler, conhecido como lei da reciprocidade quadrática: se p e q são primos, então as congruências

$$x^2 \equiv q(modp)$$

$$x^2 \equiv p(modq)$$

são ambas resolúveis ou ambas não-resolúveis, a menos que p e q sejam ambas da forma $4n + 3$, e nesse caso uma é resolúvel e a outra não.

Por exemplo $x^2 \equiv 13(mod17)$ tem a solução $x = 8$ e $x^2 \equiv 13(mod5)$ não tem solução. De outro lado, $x^2 \equiv 19(mod11)$ não tem solução, enquanto que $x^2 \equiv 11(mod19)$ tem solução $x = 7$. O teorema na exposição de Legendre tem a forma

$$(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$$

onde o símbolo de Legendre (p/q) denota 1 ou -1 conforme

$$x^2 \equiv p(modq)$$

tenha ou não solução em x.

Legendre mostrou que não existe função algébrica racional que sempre forneça primos, mas ele observou que

$$n^2 + n + 17$$

é primo para todos os valores de n de 1 a 16, e

$$2n^2 + 29$$

é primo para valores de n de 1 a 28. Euler tinha mostrado antes que

$$n^2 - n + 41$$

é primo para valores de n de 1 a 40.

Como tantos dos maiores matemáticos modernos Lagrange tinha um profundo interesse pela Teoria dos Números. Embora não usasse a linguagem das conguências, Lagrange provou em 1768, equivalente do enunciado que para um módulo primo p a congruência $f(x) \equiv 0$ não pode ter mais que n soluções distintas, onde n é o grau (exceto no caso trivial em que todos os coeficientes de $f(x)$ são divisiveis por p). Dois anos depois ele publicou uma demonstração do teorema, para o qual Fermat disserá ter uma prova, que diz que todo inteiro positivo é a soma de no máximo quatro quadrados perfeitos; por isso esse teorema é frequentemente chamado o Teorema de Lagrange dos quatro quadrados. Ao mesmo tempo ele deu também a primeira prova de um resultado conhecido como Teorema de Wilson, que aparecerá nas *Meditationes Algebraicae* de Waring no mesmo ano - *para qualquer primo p, o inteiro*

$$(p-1)! + 1$$

é divisível por p.

1.1.12 Gauss, Cauchy e Galois- Séc. XIX

Mais do que qualquer outro período, o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da Matemática. Seu crescimento durante estes cem anos é de longe o maior que a soma total da produtividade em todas as épocas precedentes.

Cal Friedrich Gauss (1777-1855), diferentemente dos homens que discutimos anteriormente, foi menino prodígio. Gauss era uma criança que se divertia com cálculos matemáticos, uma anedota referente a seus começos na escola é característica. *Um dia,* *para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardosia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase que imediatamente Gauss colocou sua ardosia sobre a mesa dizendo. "Aí Está!"* O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardosia de Gauss era a única com a resposta correta 5050.

O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética

$$1 + 2 + ... + 99 + 100$$

presumivelmente pela fórmula

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

Aos dezenove anos, fez uma descoberta brilhante, que foi construir com régua e compasso, o triângulo equilátero e o pentágono regular. Gauss comemorou sua descoberta iniciando um diário em que nos dezoito anos seguintes anotou muitas de suas descobertas. Obteve numerosos resultados ainda quando estudante. Entre as descobertas significativas de seus dias de estudante podemos destacar o método dos mínimos quadrados, a prova da lei da reciprocidade quadrática na teoria dos números, e sobre o teorema Fundamental da Algebra.

Enquanto ainda era estudante em Gottingen, Gauss tinha começado a trabalhar numa importante publicação em teoria dos números; aparecendo dois anos depois de sua dissertação de doutoramento, as *Disquisitiones Arithmeticae* constituem um dos grandes clássicos da literatura matemática. Consiste com sete secções. Culminando com duas provas da lei da reciprocidade quadrática, as quatro primeiras secções sao essencialmente uma reformulação mais compacta da teoria dos números do século XVIII. fundamentais na discussão são os conceitos de ***Congruência e Classe de Restos***.

Gauss chamou a lei da reciprocidade quadrática, que Legendre tinha publicado um par de anos antes, de *Teorema Aureum*, ou a jóia da aritmética. Em obra posterior Gauss tentou achar teoremas compatíveis para congruências

$$x^n \equiv p(modq)$$

para $n = 3$ e $n = 4$; mas para estes casos achou necessário entender o significado da palavra inteiro para incluir os chamados inteiros de Gauss, isto é, números da forma $a + bi$, em que a e b são inteiros. Os inteiros de Gauss formam um dominio de integridade como os inteiros reais, porém mais gerais. Os problemas de divisibilidade tornam-se mais complicados, pois 5 já não é primo, sendo decomponivel no produto de dois primos - $1+2i$ e $1-2i$. Na verdade, nenhum número primo real da forma $4n+1$ é um *primo de Gauss*, ao passo que primos reais da forma $4n-1$ permanecem primos no sentido generalizado.

Nas *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss inclui o Teorema Fundamental da Aritmética, um dos príncipios básicos que continuam a valer no domínio de integridade dos inteiros de Gauss. Todo domínio de integridade em que a fatoração é única é chamada hoje de dominio de integridade de Gauss. No livro tem também a demonstração do teorema, conhecido desde os tempos de Euclides - de que todo inteiro positivo pode ser representado de um e um só modo (exceto quanto à ordem dos fatores) como um produto de primos.

Com a fórmula

$$a = \frac{a}{la}$$

o número de primos menores que um dado inteiro a se aproxima assintoticamente do quociente $\frac{a}{la}$ quando a cresce indefinidamente.

Legendre tinha chegado perto de antecipar este teorema, mas o que é estranho é que Gauss escreveu isto, como presumimos, ele guardou para si este belo resultado. Não sabemos se ele tinha ou não uma prova do teorema, ou sequer quando foi escrita a afirmação.

A distribuição dos primos tem fascinado os matemáticos. Em 1845, quando Gauss estava velho, um professor parisiense, Joseph L.F. Bertrand (1822-1900), adivinhou que se $n > 3$ existe sempre ao menos um primos entre n e $2n$ (mais precisamente $2n - 2$) inclusive.

Esta conjectura, conhecida como postulado de Bertrand, foi provada em 1850 por Pafnuti Tchebycheff da Universidade de S. Petersburgo. Sem conhecer Gauss sobre primos, mostrou que se $\frac{\Pi(n)(lnn)}{n}$ se aproxima de um limite quando n cresce indefinidamente, este limite tem que ser um.

Problemas sobre o número e a distribuição de primos fascinaram muitos matemáticos dos dias de Euclides até hoje. O que pode ser considerado como corolário profundo e difícil do teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos foi provado por um matemático que em 1855 sucederia a Gauss em Gotting, este foi Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) o homem que fez mais que qualquer outro para ampliar as *Disquisitiones Arithmeticae*. O teorema de Dirichlet diz que não só o número de primos é infinito mas que se considerarmos só os inteiros numa progressão aritmética

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, ..., a + nb$$

em que a e b são primos entre si, então mesmo neste subconjunto relativamente mais esparso dos inteiros existirão ainda infinitos primos. Devemos observar que o teorema de Dirichlet mostrou que o domínio discreto da teoria dos números não pode ser estudado isolado do ramo da matemática que trata de variáveis contínuas - isto é, a teoria dos números exigia a ajuda da análise. O próprio Gauss tinha dado um exemplo notável do fato de propriedades dos primos se intrometerem do modo mais inesperado no reino da geometria.

Lembremos que Fermat acreditava que números da forma 2^{2^n} são primos, conjectura que Euler mostrou ser incorreta. O número $2^{2^2}+1=17$ é primo, como também $2^{2^3}+1=257$ e $2^{2^4}+1=65.537$. Gauss já tinha mostrado que o polígono de dezessete lados é construtível, e um polígono regular de 257 ou 65.537 lados.

Gauss responde afirmativamente á questão, mostrando que um polígono regular de N lados pode ser construido com instrumentos euclidianos se e só se o número N é da forma

$$N = 2^m p_1 p_2 p_3 ... p_r$$

onde m é qualquer inteiro positivo e os p são primos de Fermat distintos. Resta uma questão, a que Gauss não respondeu e não foi ainda respondida. O número de primos de Fermat e finito ou infinito? Para $n = 5, 6, 7, 8, 9$ sabe-se que os números de Fermat não são primos, e parece possível que existam apenas cinco e só cinco polígonos regulares construtivos com número primos de lados, dois conhecidos na antiguidade e os três que foram descobertos por Gauss.

Neste mesmo século temos Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), contribuiu em quase tantos campos quanto seu contemporâneo Gauss. Embora na Teoria dos Números seu trabalho seja menos conhecido que o de Legendre e Gauss, é a Cauchy que devemos a primeira demonstração geral de um dos mais belos e difícis teoremas de Fermat - que todo inteiro positivo é a soma de no máximo três números triangulares ou quatro números quadráticos ou cinco pentagonais ou seus hexagonais, e assim por diante indefinidamente. Esta prova é um clímax adequado ao estudo de números figurados iniciado pelos pitagoricos cerca de 2300 anos antes.

E por fim temos Galois, nasceu perto de Paris no vilarejo de Bourg-la-Reine, onde seu pai era prefeito. Quando entrou na escola aos dez anos mostrou pouco interesse por Latim, Grego, ou Álgebra, mas ficou fascinado pela geometria de Legendre. Aos dezesseis anos Galois tentou entrar na École Polytechnique, onde teve sua primeira recusa; Entrou na École Normale, e em 1830 apresentou outro artigo a Acadêmia num concurso de prêmios, que também teve seus artigo perdido e o avaliador morrido. Uma terceira tentativa de apresentar um artigo a Acadêmia resultou em que Poison devolvesse com pedido de demonstrações. De tantas frustações acabou se envolvendo em um duelo. Na noite anterior que antecede o duelo, com premonições de morte, Galois passou horas escrevendo, numa carta a um amigo chamado Chevalier, notas para a posteridade sobre suas descobertas. Pediu que a carta fosse publicada na *Revue Encyclopédique* e expressou a esperança de que Jacobi e Gauss dessem publicamente sua opinião quanto à importância de seus teoremas. Na manhã de 30 de maio de 1832, Galois encontrou seu adversário num duelo com pistolas, que resultou em sua morte, tinha vinte anos.

Na Ítalia tinha tomado parte um tanto menos ativa no desenvolvimento da álgebra abstrata que a França, a Alemanha e a Inglaterra, mas durante os últimos anos do século dezenove houve matemáticos italianos que se interessaram profundamente pela lógica matemática, sendo o mais conhecido, Giuseppe Peano (1858-1932), durante sua trajetória construiu o postulado de Peano, fórmulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*:

1. Zero é um número;
2. Se a é um número, o sucessor de a é um número;
3. Zero não é sucessor de um número;
4. Dois números cujos sucessores são iguais sao eles próprios iguais;
5. Se um conjunto S de números contém o Zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S.

Em retrospecto podemos admirar o século XIX como um período de incomparável realização, em geometria, análise e álgebra. Em extensão, imaginação, rigor, abstração e generalidade nenhum século anterior podia comparar-se com ele.

Muito da matemática do seculo XX foi caracterizada por tendências que ja eram perceptíveis no fim do século XIX. Incluem a ênfase nas estruturas subjacentes comuns que indicam correspondências entre áreas da matemática que tinham sido consideradas não relacionadas até então. Tem-se um grande movimento de matemáticos ao redor do mundo. Pelo fim da primeira guerra mundial, matemáticos da Itália, da URSS, dos EUA eram parte do movimento matemático principal que durante duzentos anos precedentes parecia a contribuições da Europa Ocidental e do Norte. Desde o fim da Segunda Guerra-Mundial o mesmo se tornou verdade para numerosas comunidades matemáticas na Ásia e América do Sul. Houve também o estado da pesquisa numa dada área bem como a força de alguns indivíduos, mas há também fatores externos como o desenvolvimento de campos associados, como a física, estatística e ciência da computação, ou pressões econômicas e sociais que usualmente servem para apoiar aplicações.

Com a ascensão de Hitler ao poder na Alemanha desencadeou uma catástrofe que logo afetou as instituições matemáticas em todo o mundo. Em 1933 muitos professores foram despedidos das Universidades alemãs, sendo os judeus mais prejudicados. Com isso, houve muitas migrações de estudiosos para os EUA, entre eles Hermann Weyl e também os algébristas Emil, Richard Brauer e Emmy Noether; os analistas Richard Courant e Jacques Hadamard; o especialista em probabilidades Willian Feller; o estatístico Jerzi Neyman; os logicos Kurt Godel e Alfred Tarski; o historiador da matemática Otto Neugebauer, para citar alguns poucos.

Se a matemática mudou de forma entre as guerras, é igualmente verdade que muito da matemática em seguida à Segunda Guerra representou algo radicalmente novo, anunciando uma nova era.

A teoria dos conjuntos e a teoria da medida durante o século XX invadiram uma parte sempre maior da matemática. Durante os vinte anos que se seguiram à Segunda Guerra Mundial tem pouco a ver com as ciências naturais, sendo impulsionado por problemas dentro da própria matemática pura; no entanto no mesmo período as aplicações da matematica à ciência se multiplicaram enormemente. A explicação desta anomalia parece clara: A abstração e a percepção de configurações vêm desempenhando papéis mais importantes no estudo da natureza, assim como na matemática. Que existe uma conexão íntima entre fenômenos experimentais e estruturas matemáticas parece ser totalmente confirmado do modo mais inesperado pelas descobertas recentes da fisica contemporânea, embora as razões subjacentes à concordancia permaneçam obscura.

Capítulo 2

CONGRUÊNCIA MÓDULO INTEIRO $\mathbb{Z}$

2.1 Os Números Inteiros $\mathbb{Z}$

Aqui neste capítulo será abordado o conceito do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, a formalização algébrica dos números, através do conceito que $a - b$ com $a < b$, sendo interpretados pelos Licenciados em Matemática para ensinar crianças na Educação Básica. Sendo que cotidianamente usando a ideia intuitiva de débitos, por exemplo! Sendo agregados ao conjunto dos números naturais.

O conjunto dos números inteiros são notados desta forma:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}.$$

2.1.1 Adição em $\mathbb{Z}$

A adição nos inteiros está bem definidas:

- Associatividade:
  $(a + b) + c = a + (b + c); \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z};$
- Comutatividade:
  $a + b = b + a; \forall\ a, b, \in \mathbb{Z};$
- Elemento Neutro Aditivo:
  $a + 0 = a; \forall\ a \in \mathbb{Z};$
- Elemento Oposto ou Simétrico:
  Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que: $a + b = 0$.

Proposição 2.1.1. *(*Lei do Cancelamento da adição*). Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a + c = b + c$, então $a = b$*

2.1.2 Multiplicação em $\mathbb{Z}$

A multiplicação nos números inteiros está bem definida na aritmética a partir dos axiomas:

- Associatividade:
  $(ab)c = a(bc); \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z};$

- Comutatividade:
  $ab = ba; \forall\ a, b, \in \mathbb{Z};$

- Elemento Neutro Multiplicativo:
  1 é o elemento neutro multiplicativo, então $a1 = a; \forall\ a \in \mathbb{Z};$

- Lei do Anulamento Multiplicativo:
  $ab = 0 \implies a = 0\ ou\ b = 0;$

- Distribuitividade:
  $a(b + c) = ab + ac; \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}.$

Proposição 2.1.2. *Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, então:*

- $a(b + c) = ab + ac$ *e* $(a - b)c = ac - bc$*;*

- $a0 = 0$*, e* $0a = 0$*;*

- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$*;*

- $(-a)(-b) = ab$*;*

- *(Lei do Cancelamento da multiplicação)*
  $(ab = ac)$ *e* $c \neq 0 \implies\ b = c.$

2.1.3 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

Os elementos de

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, ...\} = \mathbb{N}$$

são chamados *inteiros positivos* e os $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_-^*$ os *inteiros estritamente positivos.*

Os elementos de

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$$

inteiros negativos e os

$$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$$

os *inteiros estritamente negativos.*

As propriedades envolvendo as relações de $\leq$ e $<$ sobre $\mathbb{Z}$, são básicas e mostram que $\leq$ é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Z}$, compatível com a adição e a multiplicação.

- Reflexiva - $a \leq a$;
- Anti-Simétrica - $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$;
- Transitiva - $a \leq b$ e $b \leq c \implies a \leq c$;
- Lei da tricotomia - $a \leq b$ ou $b \leq a$. As propriedades garantem que $\leq$ é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Z}$.

$$a, b \in \mathbb{Z} \implies a = b; a < b \ ou \ a > b;$$

- $a \leq b \implies a + c \leq b + c;\ \forall\ c \in \mathbb{Z}$. ($\leq$ é compatível com a Adição);
- $a \leq b$ e $0 \leq c \implies ac \leq bc$. ($\leq$ é compatível com a multiplicação).

  As propriedades acima, nos dão base para mencionar as dez propriedades que podem ordenar os números inteiros:

  I) $a \leq b \iff -b \leq -a \iff 0 \leq b - a$;

  II) $a < b \iff -b < -a \iff 0 < b - a$;

  III) $a \leq b$ e $c \leq d \implies a + c \leq b + d$;

  IV) $a \leq b$ e $c < d \implies a + c < b + d$;

  V) *Regras de Sinais:*

  1) $a > 0$ e $b > 0 \implies ab > 0$;

  2) $a < 0$ e $b < 0 \implies ab > 0$;

  3) $a < 0$ e $b > 0 \implies ab < 0$;

  VI) $a^2 \geq 0; \forall a \in \mathbb{Z}$ e $a^2 > 0$ sempre que $a \neq 0$;

  VII) $a < b$ e $c > 0 \implies ac < bc$;

  VIII) $a < b$ e $c < 0 \implies ac > bc$;

  IX) $ac \leq bc$ e $c > 0 \implies a \leq b$;

  X) $ac \leq bc$ e $c < 0 \implies a \geq b$.

A partir daqui admitiremos $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais ou inteiros positivos.

Príncipio de Indução. Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n. Suponhamos que:

a) $P(r)$ é verdadeira, onde r é um número natural $\mathbb{N}$;

b) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo número natural k.

Então $P(n)$ é verdadeiro para todo número natural $n \geq r$.

Como interessante aplicação desse princípio, vamos estabelecer a seguinte desigualdade: *quaisquer que sejam o número $x \geq -1$ e o número inteiro $n \geq 1$, vale a seguinte desigualdade:*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Se $x \geq 0$, essa desigualdade segue facilmente da fórmula binomial, pois

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3 + \ldots + x^n$$

e todos os termos que aí aparecem são não negativos.

Para provar a desigualdade no caso mais geral $x \geq -1$ (x podendo ser negativo), observamos que ela é uma proposição $P(n)$. É fácil verificar que $P(1)$ é verdadeira. Vamos provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$; para isso partimos de $P(k)$, isto é,

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Multiplicando essa desigualdade pelo número não negativo $1+x$, obtemos:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Como $kx^2 \geq 0$, podemos desprezar este termo, obtendo $P(k+1)$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Isso completa a demonstração de que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Como $P(1)$ é verdadeira, conclui-se, pelo princípio de indução, que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo 2.1.1. *Verifique se $6 \mid n(n+1)(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Solução:

Por indução, temos que:

Para $n = 1$

$$6 \mid 1(1+1)(2(1)+1) \Rightarrow 6 \mid 2(3) \Rightarrow 6 \mid 6;$$

ou seja, $n = 1$ é verdadeira. Vamos supor que para $n = k$ seja verdadeira, $6 \mid k(k+1)(2k+1)$. Queremos provar que vale para $n = k+1$. Então, $6 \mid n(n+1)(2n+1)$, temos:

$$n(n+1)(2n+1) = n(n+1)([n+2] + [n-1])$$

$$= n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n-1)$$

$$= n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)$$

Como

$$6|[n(n+1)(n+2)] \text{ e } 6|[(n-1)n(n+1)]$$

por serem números consecutivos, temos que:

$$6|[n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)].$$

Portanto,

$$6 \mid n(n+1)(2n+1).$$

Definição 2.1.1. *Para todo $a \in \mathbb{Z}$, o* valor absoluto *ou* módulo *de a (notação $|a|$) é definido pelas seguintes condições:*

$$|a| = a \text{ sem que } a \geq 0;$$
$$|a| = -a \text{ se } a < 0.$$

Proposição 2.1.3. *Se a e b são elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$, então:*

i) $|a| = |-a|$;
ii) $|ab| = |a||b|$;
iii) $-|a| \leq a \leq |a|$.
iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

2.1.4 Múltiplos e Divisores

Definição 2.1.2. *Diz-se que um número inteiro a* divide *um número inteiro b se $b = ac$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Quando isto acontece também se diz que a é divisor de b, que b é* múltiplo *de a ou b é divisível por a.*

A notação usual será $a \mid b$ para indicar que a divide b e $a \nmid b$ no caso contrário. O inteiro c tal que $b = ac$ é chamado *quociente* de b por a e indicado por $c = \frac{b}{a}$. Em $\mathbb{Z}$ o conjunto dos múltiplos de um dado elemento a será também indicado por M_a e é assim constituído:

$$M_a = \{0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...\} = M_{-a}.$$

Por exemplo:

$$M_0 = \{0\}, M_1 = M_{-1} = \mathbb{Z};$$

$$M_2 = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\} = M_{-2};$$

$$M_3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\} = M_{-3}.$$

Os elementos de M_2 são os *números pares* de $\mathbb{Z}$. É claro que os ímpares de $\mathbb{Z}$ são os elementos de

$$\mathbb{Z} - M_2 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}, .$$

ou seja,

$$M_2 = \{2k|k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\mathbb{Z} - M_2 = \{2k + 1|k \in \mathbb{Z}\}.$$

Deve-se notar as propriedades que garantem a divisibilidade dos números:

D_1 - Reflexiva: $a|a$;

D_2 - $a|b$ e $b|a \implies a = \pm b$;

D_3 - Transitiva: $a|b$ e $b|c \Longrightarrow a = |c$;

D_4 - $a|b$ e $a|c \implies a|(bx + cy), \ \forall \ x, y \in \mathbb{Z}$;

D_5 - $a|b \iff |a||b|$;

D_6 - Se $a = b + c$ e $d|c$, então: $d|a \iff d|b$.

2.1.5 Algoritmo de Euclides em $\mathbb{Z}$

Mesmo quando um número natural a não divide o número natural b, Euclides, nos seus *Elementos*, explicita claramente que é sempre possível efeturar a divisão de b por a, com resto.

Teorema 2.1.1. *Divisão Euclidiana: Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{Z}, \ b > 0$, *existe um único par de inteiros* q *e* r, *de maneira que*

$$a = bq + r,$$

onde $0 \leq r < b$.

Demonstração: Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, \ b - a, \ b - 2a, \ ... \, b - na, \ ...$$

pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento não negativo,

$$r = b - qa.$$

Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < b$. Se $a|b$, então $r = 0$ e nada mais tem-se a provar. Agora, se $a \nmid b$, então $r \neq a$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorrer, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Então, sendo, $r = c + a = b - qa$ teríamos

$$c = b - (q + 1)a \in S,$$

com $c < r$ que é uma *contradição*, pois r é o menor elemento de S. Portanto, temos que $b = aq + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r. Agora vamos provar a unicidade. Dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - aq$ e $r^{'} = b - aq^{'}$, com $r < r^{'} < a$, teríamos $r^{'} - r \geq a$, o que acarretaria $r^{'} \geq r + a \geq a$, absurdo!!! Portanto $r = r^{'}$. Segue que

$$b - aq = b - aq^{'} \Longrightarrow aq = aq^{'},$$

portanto $q = q^{'}$.

c.q.d

No teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b por a.

Observação 2.1.1. *O resto da divisão de b por a é* zero *se, e somente se, $a|b$.*

Exemplo 2.1.2. *Vamos achar o quociente e o resto da divisão de 19 por 5.*

Solução:

Considere as diferenças sucessivas:

$$19 - 5 = 14, 19 - 2.5 = 9, 19 - 3.5 = 4 < 5$$

isto nos dá $q = 3$ e $r = 4$.

Exemplo 2.1.3. *Dado um número natural $n \in N$ qualquer, temos duas possibilidades:*

- *O resto da divisão de n por 2 é 0, isto é, existe $q \in N$ tal que $n = 2q$;*
- *O resto da divisão de n por 2 é 1, ou seja, existe $q \in N$ tal que $n = 2q + 1$.*

Portanto, os números naturais se dividem em dois conjuntos, a dos números da forma $2q$ para algum $q \in N$, chamados de números pares, e a dos números ímpares da forma $2q + 1$.

Observação 2.1.2. *Dizemos que um número natural par tem paridade par. Dizemos que um número natural ímpar tem paridade ímpar . Dizemos que dois números naturais têm a mesma paridade se ambos forem pares ou ambos forem ímpares.*

Exemplo 2.1.4. *Fixado um número natural $m \geq 2$, pode-se sempre escrever um número qualquer n, de modo único, na forma:*

$$n = mk + r, \text{ onde } k, r \in N \text{ e } r < m.$$

Um exemplo é que, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:

$$3k, \ 3k+1 \text{ ou } 3k+2,$$

ou ainda, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas:

$$4k, \ 4k+1, \ 4k+2, \text{ ou } 4k+3.$$

Exemplo 2.1.5. *Seja a um inteiro. Mostre que, um dos inteiros $a, a+2, a+4$ é divisivel por 3.*

Solução: Devido o Algoritmo de Euclides, temos que, $a = 3k$, $a = 3k+1$ ou $a = 3k+2$.

No primeiro caso:

$$a = 3k \Rightarrow 3 \mid a,$$

logo é verdadeira a divisibilidade.

Vamos testar agora para $a = 3k+1$, ou seja, para o inteiro $a+2$, temos que:

$$a + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k+1) \Rightarrow \text{ e portanto } 3 \mid (a+2).$$

por fim para $a = 3k+2$ com o inteiro $a+4$, obtemos:

$$a + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k+2) \Longrightarrow 3 \mid (a+4).$$

2.1.6 Máximo Divisor Comum - MDC

Definição 2.1.3. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Um número $d \in \mathbb{N}$ se diz* máximo divisor comum *de a e b se:*

i) $d \mid a$ e $d \mid b$;

ii) Se c é um número natural tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Definição 2.1.4. *Sejam a e b números inteiros quaisquer. Entendemos por* máximo divisor comum *de a e b e indicamos por mdc(a,b) o número inteiro positivo definido por:*

$$mdc(a, b) = mdc(|a|, |b|),$$

onde o segundo membro indica, o máximo divisor comum de $|a|$ e $|b|$ em $\mathbb{N}$.

Observação 2.1.3. *Se mdc(a,b)=1, diz-se que a e b são primos* ***entre si*** *ou que* ***a é primo com b****.*

Exemplo 2.1.6.

$$mdc(-4,6) = mdc(4,6) = 2.$$

Proposição 2.1.4. *Um número d é o máximo divisor comum de a e b $a, b \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, forem satisfeitos os seguintes axiomas:*

- $d \geq 0$*;*
- $d \mid a$ *e* $d \mid b$*;*
- $c \mid a$ *e* $c \mid b \Longrightarrow c \mid d$*.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Como $d = mdc(a,b) = mdc(|a|,|b|)$, então $d \geq 0$. Por hipótese $d \mid |a|$ e $d \mid |b|$ o que implica $d \mid a$ e $d \mid b$. Finalmente, se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $|c| \mid |a|$ e $|c| \mid |b|$, portanto,

$$|c| \mid mdc(|a|,|b|); \quad c \mid d$$

.

c.q.d

Proposição 2.1.5. *Se $a \mid b$, então $mdc(a,b) = |a|$.*

Demonstração:

i) Obviamente $|a| \geq 0$.

ii) Por hipótese $a = |a|$, então a é múltiplo de $|a|$ e como $a \mid b$, então $|a| \mid b$.

iii) Se $c \mid a$ e $c \mid b \Longrightarrow c \mid |a|$

Proposição 2.1.6. *Se $a = bq + r$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.*

Demonstração:
Como d=mdc(a,b), então $d \mid a$ e $d \mid b$. Desta última relação resulta que $d \mid bq$. Logo, $d \mid (a - bq)$, ou seja, $d \mid r$. Por outro lado, se $c \mid b$ e $c \mid r$, então $c \mid (bq + r)$. Como $a = bq + r$, então $c \mid a$ e $c \mid b$ o que implica $c \mid d$, já que d=mdc(a,b).

c.q.d

Para provar a existência do máximo divisor comum, aplicaremos sucessivamente, a partir de a e b, o Algoritmo de Euclides da divisão da seguinte maneira:

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < b;$$

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1);$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2.$$

$$\vdots$$

Se acontecer de r_1 ser nulo, então, temos que, $b = mdc(a, b)$, e o processo termina. Mas, de qualquer maneira, na sequência

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > 0$$

para algum índice n deverá ocorrer $r_{n+1} = 0$. De fato, se todos os r_i fossem não nulos, então $\{b, r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ não teria mínimo, o que não é possível. Assim, para algum n:

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n.$$

Como consequência temos:

$$r_n = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = mdc(b, r_1) = mdc(a, b)$$

ou seja:

$$r_n = mdc(a, b).$$

Exemplo 2.1.7. *Achemos, por este processo o máximo divisor comum de* $(41, 12)$.

$$41 = 12.3 + 5;$$

$$12 = 5.2 + 2;$$

$$5 = 2.2 + 1;$$

$$2 = 1.2.$$

logo,

$$1 = mdc(1, 2) = mdc(2, 5) = mdc(5, 12) = mdc(12, 41).$$

Proposição 2.1.7. *Se $d = mdc(a, b)$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ de maneira que*

$$d = ax_0 + by_0.$$

Demonstração:

Se a=b=0, então d=0 e qualquer x_0, y_0 satisfaz $0 = 0x_0 + 0y_0$.

1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ou ambos, seja:

$$S = \{ax + by / x, y \in \mathbb{Z}\}$$

como $a.a + b.b = a^2 + b^2 \in S$ e $a^2 + b^2 > 0$, então em S há elementos estritamente positivos. Se d é o menor desses inteiros, mostraremos que $d = mdc(a, b)$. De fato:

2. Como $d \in S$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ de modo que $d = ax_0 + by_0$. Aplicando o algoritmo de Euclides aos elementos a e d

$$a = dq + r; \quad (0 \leq r < d)$$

substituindo d nesta igualdade pelo segundo membro da igualdade anterior:

$$r = a - ax_0q - bqy_0,$$

e então:

$$r = a(1 - qx_0) + b(q - y_0)$$

de onde se conclui que $r \in S$. Sendo r não negativo e levando em conta que d é o menor dos elementos estritamente positivos de S, então $r = 0$. Donde $a = dq$ e $d \mid a$. De maneira analógo, demonstra-se que $d \mid b$.

3. Como $d = ax_0 + by_0$, todo divisor c de a e b é divisor de d.

c.q.d

Corolário 2.1.1. *Dois números a e b são primos entre si, se, e somente se, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $ax_0 + by_0 = 1$.*

Exemplo 2.1.8. *Seja $a = -26$ e $b = 18$. Determine x_0 e y_0. Solução:*

Como já vimos pelas propriedades acima, temos que:

$$26 = 18.1 + 8;$$

$$18 = 8.2 + 2;$$

$$8 = 2.4.$$

Como mdc(26, 18) = 2, toma-se a igualdade onde o resto é 2 e faz-se:

$$2 = 18 - 8.2;$$

$$8 = 26 - 18.1.$$

Então:

$$2 = 18 - (26 - 18.1).2 = 26(-2) + 18.3,$$

isto mostra que (-2, 3) é solução de

$$26x + 18y = 2.$$

Portanto, $x_0 = 2$ *e* $y_0 = 3$ *são uma solução de*

$$(-26)x + 18y = 2.$$

2.1.7 Números Primos

Definição 2.1.5. *Um número* $p \in \mathbb{Z}$ *é chamado* inteiro primo *se* $|p|$ *é primo em* $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.9. $-2, -3$ *e* -5 *são inteiros primos pois* $2, 3$ *e* 5 *são primos em* $\mathbb{N}$.

Proposição 2.1.8. *Seja* $p \in \mathbb{Z}$. *Então* p *é um número primo se, e somente se,* $p \neq 0$ *ou* $p \neq \pm 1$ *e os únicos divisores de* p *são* ± 1 *e* $\pm p$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Se p é primo em $\mathbb{Z}$ então $|p|$ é primo em $\mathbb{N}$. Logo $|p| \neq 0$ e $|p| \neq 1$, o que implica $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$. Se $a \mid p$, então $|a| \mid |p|$ e, devido à hipótese, $|a| = 1$ ou $|a| = |p|$. Logo $a = \pm 1$ ou $a = \pm p$.

($\Longleftarrow$) Se $p \neq 0$ e $p \neq \pm 1$, então $|p| \neq 0$ ou $|p| \neq 1$. Se $c \in \mathbb{N}$ e $c \mid |p|$, então $|p| = cq$; $(q \in \mathbb{N})$ e então $|p| \mid |cq|$. Daí $p = \pm cq = c(\pm q)$ e portanto $c \mid p$ em $\mathbb{Z}$. Pela hipótese $c = \pm 1$ ou $c = \pm p$. Como $p \in \mathbb{N}$, então $c = 1$ ou $c = |p|$. Assim provamos que $|p|$ é primo em $\mathbb{N}$. Logo p é primo em $\mathbb{Z}$.

c.q.d

Proposição 2.1.9. *Sejam* a, b *e* p *números inteiros. Se* $p \mid ab$ *e* p *é primo, então* $p \mid a$ *ou* $p \mid b$.

Teorema 2.1.2. *(Teorema Fundamental da Aritmética em* $\mathbb{Z}$*). Seja* $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ *e* $a \neq \pm 1$. *Então existem números primos*

$$p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}\ (r \geq 1)$$

todos maiores que 1, de maneira que:

$$a = p_1.p_2.\ldots.p_r \text{ ou } a = -(p_1.p_2.\ldots.p_r)$$

conforme $a > 0$ *ou* $a < 0$.

Exemplo 2.1.10. *Vejam estes exemplos abaixo:*

$$100 = 2.2.5.5;$$

$$-105 = -(3.5.7).$$

Teorema 2.1.3. *Teorema de Euclides. A sequência dos números primos é infinita.*

Demonstração:

Vamos supor que a sequência dos primos seja finita. Seja pois, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a lista de todos os primos. Consideremos

$$n = p_1.p_2.\ldots p_r + 1.$$

É claro que n não é divisivel por nenhum dos p_i acima, e que n é maior do que qualquer p_i. Mas, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, ou n é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo que não pertence à nossa lista. Portanto a sequência dos números primos não pode ser finita.

c.q.d

Teorema 2.1.4. *Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a $\sqrt{n}$.*

Demonstração:

Sendo n composto então $n = n_1.n_2$, onde $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$. Sem perda de generalidade vamos supor $n_1 < n_2$. logo, $n_1 \leq \sqrt{n}$, caso contrário, teríamos

$$n = n_1.n_2 > \sqrt{n}.\sqrt{n} = n.$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, n_1 possui algum fator primo

$$p \leq \sqrt{n}.$$

c.q.d

Os fatores primos repetidos, se necessário, e ordenando os primos em ordem crescente, temos o seguinte enunciado:

Teorema 2.1.5. *Dado um número natural $n > 1$, existem primos $p_1 < \ldots < p_r$ e $\alpha_1 \ldots \alpha_r \in \mathbb{N}^*$, univocadamene determinados, tais que*

$$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Demonstração: Considerando $p^0 = 1$, onde p é um número primo qualquer. Assim dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ e $m > 1$ quaisquer, podemos escrever

$$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r} \quad e \quad n = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.p_3^{\beta_3}\dots p_r^{\beta_r}$$

usando o mesmo conjunto de primos $p_1.p_2.\dots.p_r$, desde que permitamos que os expoentes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad , \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ variem em $\mathbb{N}$ e não apenas em $\mathbb{N}^*$.

Exemplo 2.1.11. *Os números* $2^3.3^2.7.11$ *e* $2.5^2.13$ *podem ser escrito, respectivamente,* $2^3.5^0.3^2.7.11.13^0$ *e* $2.3^0 5^2.7^0.11^0.13$

Observe que um número natural $n > 1$, escrito na forma $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$, como no teorema acima, e um quadrado perfeito se, e somente se, cada expoente α_i for par.

Proposição 2.1.10. *Seja* $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$ *um número natural. Se* n' *é um divisor de* n*, então*

$$n' = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.p_3^{\beta_3}\dots p_r^{\beta_r}$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ *para* $i = 1, 2, \dots, r$.

Demonstração:

Seja n' um divisor de n e seja p^β a potência de um primo p que figura na decomposição de n' em fatores primos. Como $p^\beta | n$ segue que p^β divide algum $p_i^{\alpha_i}$ por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j}$, e consequentemente, $p = p_i$ e $\beta \leq \alpha_i$.

c.q.d

Denotando por $d(n)$ o número de divisores do número natural n, segue, por uma contagem fácil,

$$d(n) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1).\dots.(\alpha_r + 1).$$

Observação 2.1.4. *A fórmula acima nos mostra que um número* $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$ *possuí uma quantidade ímpar de divisores se, e somente se, cada* α_i *é par, ou seja, se, e somente se,* n *é um quadrado perfeito.*

2.1.8 Critérios de Divisibilidade

Proposição 2.1.11. *Um número é divisivel por 3 se, e somente se, a soma de seus digitos é divisível por 3.*

Consideremos um número n com 5 digitos $abcde$ na base 10, ele pode ser escrito na forma:

$$n = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10^1 + e \times 10^0.$$

Fazendo as substituições abaixo:

$$10 = 9 + 1;$$

$$100 = 99 + 1;$$

$$1000 = 999 + 1;$$

$$10000 = 9999 + 1;$$

obtendo

$$\begin{aligned} n &= a(9999 + 1) + b(999 + 1) + c(99 + 1) + d(9 + 1) + e \\ &= (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e) \\ & 9(1111a + 111b + 11c + 1d) + (a + b + c + d + e). \end{aligned}$$

Concluimos que se:

$$3 \mid 9(1111a + 111b + 11c + 1d)$$

e

$$3 \mid (a + b + c + d + e).$$

então

$$3 \mid n.$$

Para obter um critério de divisibilidade por 9 basta, no argumento acima, substituir 3 por 9, concluindo o seguinte:

Proposição 2.1.12. *Um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus dígitos é divisível por 9.*

Exemplo 2.1.12. 4578 *é divisível por 3 pois,* $(4 + 5 + 7 + 8) = 24$ *é divisível por 3.*

Exemplo 2.1.13. 4578 *não é divisível por 9 pois,* $(4 + 5 + 7 + 8) = 24$ *não é divisível por 9.*

O critério de divisibilidade por 4 se obtém considerando-se o número na forma $100k + ab$ onde ab é o número formado pelos dois últimos dígitos, isto é, o das dezenas e o da unidade e observando ser 100 ou múltiplo de 4

Exemplo 2.1.14. 72548 *é divisível por* 4 *pois,* 48 *é múltiplo de* 4*. Como* 14 *não é multiplo de* 4*, então* 73514 *não é divisível por* 4.

Discutimos, agora, os critérios de divisibilidade por 7 e 11. Iniciamos com 7. Para descrever o critério consideremos:

Exemplo 2.1.15. *Seja* $n = 59325$. *Separamos o dígito* 5 *das unidades e do número restante* 5932*, subtraímos o dobro deste dígito, isto é:*

$$\begin{array}{c} 5932 \\ -10 \\ \hline 5922 \end{array}$$

Em seguida repetimos este procedimento até a obtenção de um número suficientemente pequeno que possamos reconhecer, facilmente, se é ou não divisível por 7.

$$\begin{array}{c} 592 \\ -4 \\ \hline 588 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 58 \\ -16 \\ \hline 42 \end{array}$$

O 42 é divisível por 7. Vamos provar é que este fato irá implicar que o número original também deverá ser divisível por 7. Seja i o dígito das unidades do número n, com $n = 10k + i$. No procedimento descrito acima obtivemos um número $r = k - 2i$. Logo se um dos números $10k + i$ ou $k - 2i$, for múltiplo de 7, o outro também o é.

$$7|10k + i \Leftrightarrow 7|k - 2i.$$

Exemplo 2.1.16. *Seja* $n = 735421$. *Vamos proceder da maneira descrita acima:*

$$73542 - 2 \times 1 = 73540;$$

$$7354 - 2 \times 0 = 7354;$$

$$735 - 2 \times 4 = 727;$$

$$72 - 2 \times 7 = 58.$$

como $7 \nmid 58$, então $7 \nmid 735421$.

Para a descrição do critério de divisibilidade por 11, também vamos utilizar um exemplo. Seja n um número de 5 dígitos $abcde$. Como sabemos este pode ser representado como

$$n = a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10^1 + e \times 10^0,$$

fazendo as seguintes substituições, temos:

$$10 = 11 - 1;$$

$$100 = 99 + 1;$$

$$1000 = 1001 - 1;$$

$$10000 = 9999 + 1.$$

obtemos

$$a(9999 + 1) + b(1001 - 1) + c(99 + 1) + d(11 - 1) + e =$$

$$= 9999a + 1001b + 99c + 11d + [(a + c + e) - (b + d)]$$

Como

$$9999a + 1001b + 99c + 11d$$

é divisível por 11, então n será divisível por 11, se, e somente se,

$$[(a + c + e) - (b + d)]$$

o for.

Observe que os dígitos a, c e c ocupam posições ímpares em $abcde$ enquanto b, d posições pares. Nesta última sentença, utilizamos dois fatos elementares:

- Todo número da forma $999\ldots9$, onde o número de "9"é par, é divisível por 11.
- Todo número da forma $100\ldots01$, onde o número de "0"entre os dois "uns"é par, também é múltiplo de 11.

Para a prova observe que:

$$9999 = 9900 + 99;$$

$$999999 = 999900 + 99;$$

$$\ldots$$

$$1001 = 990 + 11;$$

$$100001 = 99990 + 11;$$

$$\ldots$$

Exemplo 2.1.17. *Seja m um inteiro ímpar. Mostre que o resto da divisão de m por 4 é 1 ou 3.*

Solução:

Vamos supor que $m = 2k + 1$. Se r é o resto na divisão de m por 4, então:

$$2n + 1 = 4q + r \qquad (r = 0, 1, 2 \text{ ou } 3)$$

Para $r = 0$ ou $r = 2$, o segundo membro dessa igualdade seria par, o que não é possível.

Exemplo 2.1.18. *Seja a um inteiro tal que* $2 \nmid a$ *e* $3 \nmid a$. *Prove que* $24 \mid (a^2 - 1)$. Solução: *Aplicando o Algoritmo de Euclides da divisão para a como dividendo e 6 como divisor, obtemos:*

$$a = 6r + s \quad (s = 0, 1, 2, 3, 4, \ ou\ 5)$$

Como $2 \nmid a$ *e* $3 \nmid a$, *então* $s = 1$ *ou* $s = 5$.

1. $a^2 - 1 = (6r + 1)^2 - 1 = 36r^2 + 12r = 12r(3r + 1)$. *Se r é par, então* $12r$ *é múltiplo de 24 e o mesmo se pode dizer, portanto,* $a^2 - 1$;

2. *Se r é ímpar, então* $3r + 1$ *é par, daí* $24 \mid (a^2 - 1)$. *No caso* $s = 5$, *segue o mesmo racíocinio.*

2.2 Congruências

Nesta seção, será apresentado uma das noções mais fecundas da aritmética, introduzida por Gauss no seu livro ***Disquisitiones Arithmeticae***, de 1801. Trata-se de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado.

Definição 2.2.1. *Sejam a, b e m números inteiros,* $m > 0$. *Dizemos que a é* côngruo *a b, módulo m, se* $m \mid (a - b)$.

$$a \equiv b \ (mod\ m).$$

Exemplo 2.2.1. *Aqui poderá ser verificado a aplicação das congruências e suas propriedades:*

$$7 \equiv 15 \ (mod\ 8), \ pois \ \ 8 \mid (-8).$$

$$3 \equiv 21 \ (mod\ 6), \ pois \ \ 3 - 21 = -18 \ e \ 6 \mid (-18).$$

$$a \equiv a \ (mod\ m), \forall a \in \mathbb{Z} \ e \ \forall m > 0, \ a - a = 0 \ e \ m \mid 0.$$

A definição acima estabelece uma relação sobre $\mathbb{Z}$, chamada de *Congruência*, para a qual valem as seguintes propriedades:

- Para todo $m > 0$, a relação $\equiv$ é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, é uma relação de equivalência:

    1. a. $a \in \mathbb{Z} \implies a \equiv a \ (mod\ m)$;
    2. b. $a \equiv b \ (mod\ m) \implies b \equiv a \ (mod\ m)$;
    3. c. $a \equiv b \ (mod\ m) \ e \ b \equiv c \ (mod\ m) \implies a \equiv c \ (mod\ m)$.

PROVA de c: Por hipotése $m \mid (a-b)$ e $m \mid (b-c)$. Então:

$$m \mid (a-b)+(b-c),$$

ou seja, $m \mid (a-c)$. Donde $a \equiv c \ (mod\ m)$.

- Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \equiv b \ (mod\ m)$ se, e somente se, a e b fornecem mesmo resto na divisão euclidiana por m.

  PROVA:

  ($\Longrightarrow$) Por hipótese $a = b+km$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Supondo que a divisão euclidiana de b por m se expresse por $b = mq + r$ $(0 \leq r < m)$ então:

  $$a = b + km = mq + r + km = m(k+q) + r;$$

  como $0 \leq r < m)$, então r é o resto na divisão euclidiana de a por m.

  ($\Longleftarrow$) Se $a = mq_1 + r$ e $b = mq_2 + r$ $(0 \leq r < m)$, então:

  $$a - b = mq_1 - mq_2 = m(q_1 - q_2);$$

  o que implica

  $$a \equiv b \ (mod\ m)$$

- Se $a \equiv b (modm)$, então $a \pm c \equiv b \pm c \ (mod\ m)$ e $ac \equiv bc \ (mod\ m)$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.

  PROVA:

  Da segunda afirmação: por hipótese $a - b = mq, q \in \mathbb{Z}$. Logo $ac - bc = m(qc)$ e isto significa que $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.

- Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então $a \pm c \equiv b \pm d \ (mod\ m)$ e $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.

  PROVA:

  Da segunda afirmação: das hipóteses e de C_3 decorre que $ac \equiv bc \ (mod\ m)$ e $cb \equiv db \ (mod\ m)$. Logo, pela transitividade: $ac \equiv bd \ (mod\ m)$. Isto posto, por indução se mostra que: para quaisquer $a_1, a_2 \ldots, a_n$, $b_1, b_2 \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$, se $a_i \equiv b_i (modm)$, então:

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \ (mod\ m) \quad e \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \ (mod\ m)$$

- Se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então $ra \equiv rb \ (mod\ m)$ e a $a^r \equiv b^r \ (mod\ m)$, para todo inteiro $r > 1$.

Exemplo 2.2.2. *Prove que se $(n+1!)+1$ for divisivil por n, então n é um número primo.*

Solução:

Suponha que:

$$n = l.k;$$

i) $n > k > l \Rightarrow (n-1)! = (n-1)(n-2)\dots k \dots 2.1 \Rightarrow (n-1)! + 1 \equiv 0 mod n$

contudo,

$(n-1!) + 1 \equiv 0 \ mod \ n \Rightarrow 1 \equiv 0 \ mod \ n \quad (\rightarrow\leftarrow)$ *absurdo!!!*

ii) $n > k = l$

$\Rightarrow (n+1)! = (n-1)(n-2)\dots 2k \dots k \dots 2.1$

$\Rightarrow (n-1!) \equiv 0 \ mod \ n$

$\Rightarrow 0 \equiv (n-1)! + 1 \ mod \ n \equiv 1 \ mod \ n \quad (\rightarrow\leftarrow)$ *absurdo!!!*

n não possui divisores, portanto, n é primo

Exemplo 2.2.3. *Mostremos que $10^{200} - 1$ é divisível por 11.*

Solução*:*

Como

$$10 \equiv -1 \ (mod 11);$$

então

$$10^{200} \equiv (-1)^{200} \ (mod \ 11).$$

Portanto,

$$10^{200} - 1 \equiv 0 \ (mod \ 11).$$

E daí conclui-se que:

$$11 \mid (10^{200} - 1).$$

- Se $ca \equiv cb \ (mod \ m)$ e $mdc(m, c) = d > 0$, então:

$$a \equiv b(mod\frac{m}{d})$$

Prova:

Por hipótese $c(a-b) = mk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí:

$$\frac{c}{d}(a-b) = \frac{m}{d}k;$$

onde,

$$mdc(\frac{c}{d}, \frac{m}{d}) = 1;$$

Donde $\frac{m}{d} \mid (a-b)$ e portanto $a \equiv b \ (mod \ \frac{m}{d})$.

Corolário 2.2.1. *Se* $ca \equiv cb \ (mod\ m)$ *e* $mdc(c, m) = 1$ *então* $a \equiv b \ (mod\ m)$*.*

Corolário 2.2.2. *Se* $ca \equiv cb \ (mod\ p)$ *onde* p *é primo e* $p \nmid c$*, então* $a \equiv b \ (mod\ p)$*.*

Definição 2.2.2. *Dizemos que uma solução* x_0 *de* $ax \equiv b \ (mod\ m)$ *é única módulo* m *quando qualquer outra solução* x_1 *for congruente a* x_0 *módulo* m*.*

Definição 2.2.3. *Uma solução* $\overline{a}$ *de* $ax \equiv 1 \ (mod\ m)$ *é chamada de um inverso de* a *módulo* m*.*

Proposição 2.2.1. *Seja* p *um número primo. O inteiro positivo* a *é o seu próprio inverso módulo* p *se, e somente se,*

$$a \equiv 1 \ (mod\ p) \ ou \ a \equiv -1 \ (mod\ p)$$

. ***Demonstração:***

Se a *é o seu próprio inverso, então* $a^2 \equiv 1 \ (mod\ p)$*, o que significa que* $p \mid (a^2 - 1)$*. Mas se* $p \mid (a - 1).(a + 1)$*, sendo* p *primo,* $p \mid (a - 1)$ *ou* $p \mid (a + 1)$*, o que implica* $a \equiv 1 \ (mod\ p)$ *ou* $a \equiv -1 \ (mod\ p)$*.*

c.q.d

O exemplo abaixo irá nos direcionar para um entendimento mais claro sobre o Teorema de Wilson.

Exemplo 2.2.4. *Tomando* $p = 13$*. Vamos mostrar que dentre os números* $1, 2, 3, \ldots, 12$ *somente os números 1 e 12 são os seus próprios inversos módulo 13. Pois,* $1 \equiv 1(mod 13)$ *e* $12 \equiv -1(mod 13)$ *é nenhum dos números* $2, 3, \ldots, 11$ *é congruente a 1 ou a -1 módulo 13. Mas, como os números* $2, 3, \ldots, 11$ *são todos relativamente primos com 13, cada um deles possui, um único inverso módulo 13.*

$$2 \times 7 \equiv 1 \ (mod\ 13);$$

$$3 \times 9 \equiv 1 \ (mod\ 13);$$

$$4 \times 10 \equiv 1 \ (mod\ 13);$$

$$5 \times 8 \equiv 1 \ (mod\ 13);$$

$$6 \times 11 \equiv 1 \ (mod\ 13).$$

Multiplicando estas congruências membro a membro, obtem-se:

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \equiv 1 \ (mod\ 13);$$

multiplicando ambos os lados por 12 teremos:

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \equiv 1 \times 12 \ (mod\ 13).$$

portanto,

$$12! \equiv -1 \ (mod\ 13).$$

temos finalmente:

$$(13-1)! \equiv -1 \ (mod\ 13).$$

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Wilson) Se p é primo, então $(p-1)! \equiv -1 \ (mod\ p)$.*

Demonstração:

Como $(2-1)! \equiv 1 \equiv -1 \ (mod\ 2)$ o resultado é válido para $p = 2$.

A congruência $ax \equiv 1 \ (mod\ p)$ tem uma única solução para todo a no conjunto 1, 2, 3,..., p-1 e como, destes elementos, somente 1 e $p-1$ são seus próprios inversos módulo p, podemos agrupar os números $2, 3, 4, \ldots, p-2$ em $\frac{p-3}{2}$ pares cujo produto seja congruente a 1 módulo p.

Se multiplicarmos estas congruências, membro a membro, teremos,

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (p-2) \equiv 1 \ (mod\ p);$$

Multiplicando-se ambos os lados desta congruência por $(p-1)$ teremos:

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (p-2)(p-1) \equiv -1 \ (mod\ p).$$

Exemplo 2.2.5. *Usando o Teorema de Wilson, encontre o menor resíduo positivo de:*

- *a)* $6 \times 7 \times \times 8 \times 9$ *módulo5*

  Solução:

  Para acharmos o menor resíduo positivo de $6 \times 7 \times \times 8 \times 9$, vamos utilizar o fator elementar de que

$$6 \equiv 1 \ (mod\ 5);$$

$$7 \equiv 2 \ (mod\ 5);$$

$$8 \equiv 3 \ (mod\ 5);$$

$$9 \equiv 4 \ (mod\ 5);$$

Logo

$$6 \times 7 \times \times 8 \times 9 \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ (mod\ 5).$$

e pelo Teorema de Wilson, sendo:

$$4! \equiv -1 \ (mod\ 5);$$

temos,

$$6 \times 7 \times \times 8 \times 9 \equiv -1 \equiv 4 \ (mod\ 5).$$

Teorema 2.2.2. *(Pequeno Teorema de Fermat) Seja p primo. Se $p \nmid a$ então*

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p).$$

Demonstração:

Sabemos que o conjunto formado pelos p números $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ constitui um sistema completo de resíduos módulo p. Isto significa que qualquer conjunto contendo no máximo p elementos incongruentes módulo p pode ser colocado em correspondência biunivoca com um subconjunto de $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$.

Vamos, agora, considerar os números $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$. Como $(a, p) = 1$, nenhum destes números ia, $1 \leq i \leq (p-1)$ é divisivel por p, ou seja, nenhum é congruente a zero módulo p.

Quaisquer dois deles são incongruentes módulo p, pois

$$aj \equiv ak \ (mod \ p);$$

implicando

$$j \equiv k \ (mod \ p).$$

e isto só é possível se $j = k$ uma vez que ambos são positivos e menores do que p. Temos, portanto, um conjunto de $p-1$ elementos incongruentes módulo p e não-divisíveis por p. Logo, cada um deles é congruente a exatamente um dentre os elementos $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$. Disto, multiplicando membro a membro, teremos:

$$a(2a)(3a)\ldots(p-1)a \equiv 1.2.3\ldots(p-1) \ (mod \ p);$$

ou seja,

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \ (mod \ p).$$

Como,

$$((p-1)!, p) = 1,$$

podemos cancelar o fator $(p-1)!$ em amos os lados, obtendo:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p).$$

Exemplo 2.2.6. *Usando o Pequeno Teorema de Fermat, encontrar o resto da divisão de 2^{100000} por 17.*

Solução:

Pelo Teorema de Fermat temos,

$$a^{p-1} \equiv 1 (mod p);$$

quando p é primo e $p \nmid a$. Logo, como 17 é primo e $17 \nmid 2$ temos,

$$2^{16} \equiv 1(mod 17);$$

. Mas

$$100000 = 6250 \times 16.$$

Portanto,

$$2^{100000} = (2^{(16)6250}) \equiv 1^{6250} \equiv 1(mod 17).$$

Logo, o resto da divisão por 17 de 2^{100000} é 1.

Corolário 2.2.3. *Se p é um primo e a é um inteiro positivo, então*

$$a^p \equiv a(mod p).$$

Demonstração: *Temos que analisar dois casos, se $p \mid a$ e se $p \nmid a$:*

- *i) Se $p \mid a$, então $p \mid (a(a^{p-1} - 1))$. Portanto,*

$$a^p \equiv a(mod p).$$

- *ii) Se $p \nmid a$, tem-se $p \mid (a^{p-1} - 1))$. Portanto,*

$$p \mid (a^p - a).$$

  Logo,

$$a^p \equiv a(mod p).$$

Exemplo 2.2.7. *Encontrar o dígito das unidades de 3^{100} quando expresso na base 7.* Solução:

Vamos encontrar o menor resíduo positivo 3^{100} módulo 7. Como 7 é primo e $7 \nmid 3$, temos que,

$$3^6 \equiv 1(mod 7);$$

Sendo $100 = 6 \times 16 + 4$ temos,

$$3^{96} = (3^6)^{16} \equiv (1)^{16} \equiv 1(mod 7);$$

Agora,

$$3^2 = 9 \equiv 2(mod 7);$$

logo,

$$3^4 \equiv 4(mod 7);$$

Assim,

$$3^{100} = 3^{96} \times 3^4 \equiv 1 \times 4 \equiv 4(mod 7).$$

Exemplo 2.2.8. *Mostrar que se p é um primo ímpar, então*

$$2(p-3)! \equiv -1(modp).$$

Solução: *Sendo p primo, temos, pelo Teorema de Wilson que,*

$$(p-1)! \equiv -1(modp);$$

Mas,

$$(p-1)! = (p-1)(p-2)(p-3)!;$$

Como

$$(p-1) \equiv -1(modp) \text{ e } (p-2) \equiv -2(modp)$$

Para $p \neq 2$ *temos,*

$$(p-1)(p-2)(p-3)! \equiv (-1)(-2)(p-3)! \equiv 2(p-3)! \equiv -1(modp).$$

Definição 2.2.4. *Se n é um inteiro positivo, a* a função Φ de Euler*, denotada por* $\Phi(n)$*, é definida como sendo o número de inteiros positivos menores do que ou iguais a n que são relativamente primos com m.*

Definição 2.2.5. *Um* Sistema Reduzido de Resíduos *módulo m é um conjunto de* $\Phi(m)$ *inteiros*

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\Phi(m)};$$

tais que cada elemento do conjunto é relativamente primo com m, e se $i \neq j$*, então*

$$r_i \equiv r_j(modm).$$

Exemplo 2.2.9. *O conjunto* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *é um sistema completo de residuos módulo 8, portanto,* $1, 3, 5, 7$ *é um sistema de resíduos módulo 8. A fim de se obter um sistema reduzido de resíduos de um sistema completo módulo m, basta retirar os elementos do sistema completo que não são relativamente primos com m.*

Teorema 2.2.3. *Seja a um inteiro positivo tal que* $(a, m) = 1$*. Se* $r_1, r_2, \ldots, r_{\Phi(m)}$ *é um sistema reduzido de resíduos módulo m, então* $ar_1.r_2.\ldots.r_{\Phi(m)}$ *é, também, um sistema reduzido de resíduos módulo m.*

Exemplo 2.2.10. *Sejam* $m = 8$ *e* $a = 5$*. Usaremos a ideia intuitiva para o Teorema de Euler que será visto logo a frente. Sabemos que o conjunto* $1, 3, 5, 7$ *é um sistema reduzido de resíduos módulo 8. Consideremos o conjunto formado por* $5 \times 1, 5 \times 3, 5 \times 5, 5 \times 7$*. Este conjunto também constitui um sistema reduzido de resíduos módulo 8. Isto é:*

$$5 \times 1 \equiv 5(mod8);$$

$$5 \times 3 \equiv 7(mod8);$$

$$5 \times 5 \equiv 1(mod8);$$

$$5 \times 7 \equiv 3(mod8).$$

multiplicando-se, membro a membro, estas congruências obtemos

$$5^4(1 \times 3 \times 5 \times 7) \equiv (1 \times 3 \times 5 \times 7)(mod8);$$

Como,

$$(1 \times 3 \times 5 \times 7, 8) = 1;$$

podemos cancelar o fator $(1 \times 3 \times 5 \times 7)$ *obtendo;*

$$5^4 \equiv 1(mod8);$$

observe que $\Phi(8) = 4$*, ou seja, provamos que,*

$$5^{\Phi(8)} \equiv 1(mod8).$$

Teorema 2.2.4. *Euler. Se m é um inteiro positivo e a um inteiro com $(a, m) = 1$, então*

$$a^{\Phi(m)} \equiv 1(modm).$$

2.2.1 Sistema Completos de Restos

Sendo a congruência uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$, então, para todo $m > 0$, fica determinada sobre o conjunto dos inteiros, através de $\equiv$, uma partição em classes de equivalência, módulo m.

Exemplo 2.2.11. *Se $m = 3$, as classes são:*

$$\{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\};$$

$$\{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\};$$

$$\{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

A escolha de um elemento em cada uma das classes, para representá-la, muitas vezes pode facilitar a análise que envolvem congruências.

Definição 2.2.6. *Um conjunto de m inteiros, $m > 0$, forma um* Sistema Completo de Restos Módulo m *se dois quaisquer desses números, diferentes entre si, são incôngruos módulo m.*

Exemplo 2.2.12. *O conjunto* $0, 1, 2, \ldots, m-1$ *é um sistema completo de restos módulo* m. *De fato, se* i *e* j *são inteiros tais que* $0 \leq i < i < m$, *então* $0 < j - i < m$ *e portanto* $j \not\equiv i (modm)$. *Esse conjunto é chamado* Sistema Completo de Restos Mínimos Positivos.

Proposição 2.2.2. *Se* $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ *é um sistema completo de restos módulo* m, *então todo inteiro* a *é côngruo a um e somente um dos* r_i.

Demonstração: Aplicando o algoritmo da divisão aos elementos a e m, onde $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$. Ou seja,

$$a \equiv r \ (mod\ m); \quad r \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}.$$

Por outro lado a divisão de $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ por m fornecerá m restos, distintos dois a dois, e daí, para um certo r_j, obterá:

$$r_j = mq_j + r \ \ ou \ \ r_j \equiv r \ (mod\ m);$$

$$a \equiv r \ (mod\ m);$$

$$a \equiv r_j \ (mod\ m);$$

$$a \equiv r_k \ (mod\ m);$$

$$r_j \equiv r_k \ (mod\ m).$$

O que implica

$$r_j \equiv r_k,$$

pela definição de sistema completo de restos.

Exemplo 2.2.13. *Prove que* $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0(mod 7)$.

Solução: *Se*

$$a^b = 2222^{5555} \Rightarrow a = 2222 \ e \ b = 5555;$$

Pelo Algoritmo de Euclides, temos que:

1. $a = 2222$. *Por congruência obtemos,*

$$2222 = 317 \times 7 + 3;$$

Logo,

$$2222 \equiv 3 \ (mod\ 7);$$

$$(2222)^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 (mod 7);$$

$$(2222^2)^3 \equiv 2^3 = 8 \equiv 1 \ (mod\ 7).$$

2. $b = 5555$. *Por congruência,*

$$5555 = 925 \times 6 + 5;$$

Logo,

$$5555 \equiv 5 \ (mod \ 6);$$

Então,

$$5555^{2222} = (2222^6)^{925} \times 2222^5;$$

$$5555^{2222} \equiv 1^{925} \times 2222^5 \ (mod \ 7);$$

$$5555^{2222} \equiv 2222^5 \ (mod \ 7);$$

$$5555^{2222} \equiv 2222^2 \times 2222^2 \times 2222^1 \ (mod \ 7);$$

$$5555^{2222} \equiv 2 \times 2 \times 3 \ (mod \ 7);$$

$$5555^{2222} \equiv 12 \ (mod \ 7) = 5 \ (mod \ 7).$$

Agora vamos analisar a segunda parte, ou seja,

$$a^b = 5555^{2222} \ com \ a = 5555 \ e \ b = 2222.$$

3. $a = 5555$. *Pelo Algoritmo de Euclides, ou seja, congruência temos que,*

$$5555 = 793 \times 7 + 4;$$

Implicando,

$$5555 \equiv 4 \ (mod \ 7);$$

$$(5555)^2 \equiv 4^2 \ (mod \ 7) = 2 \ (mod \ 7);$$

$$(5555^2)^3 \equiv 2^3 \ (mod \ 7) = 8 \ (mod \ 7) = 1 \ (mod \ 7).$$

Para

4. $b = 2222$. *Por Euclides temos que,*

$$2222 = 370 \times 6 + 2;$$

logo,

$$5555^{2222} \equiv 5555^{370 \times 6} \times 5555^2;$$

$$5555^{2222} \equiv 1^{370 \times 6} \times 2 \equiv 2 \ (mod \ 7).$$

Portanto

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5 + 2 \ (mod \ 7) \equiv 0 \ (mod \ 7).$$

Exemplo 2.2.14. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *tais que,*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Prove que pelo menos 1 deles é divisivel por 3.

Solução:

Vamos analisar para a ser divisivel por 3. Temos 3 possibilidades: Pelo Algoritmo de Euclides $a = 3q + r$; *com* $q, r \in \mathbb{Z}$. *Logo,*

i) $a \equiv 0 \ (mod\ 3)$;

ii) $a \equiv 1 \ (mod\ 3)$;

iii)$a \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

i) Com $r = 0 \Rightarrow a = 3q + 0$ *elevando ambos os membros ao quadrado, temos*

$$a^2 = (3q)^2 = 3.3q^2.$$

ii) Com $r = 1 \rightarrow a = 3q + 1$, *elevando ambos os lados ao quadrados , obtemos*

$$a^2 = (3q + 1)^2 = (3q + 1).(3q + 1) = 3.3q^2 + 3q + 3q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1.$$

iii) Com $r = 2 \Rightarrow 3q + 2$ *elevando os membros ao quadrado,*

$$a^2 = (3q + 2).(3q + 2) = 3.3q^2 + 2.3q + 2.3q + 4 = 3(3q^2 + 4q) + 1$$

Portanto podemos afirmar que:

$$a^2 \equiv 0 \ (mod\ 3);$$

$$a^2 \equiv 1 \ (mod\ 3);$$

$$a^2 \equiv 1 \ (mod\ 3).$$

ou seja, resto 1 *ou* 0.

Analogamente vale para b^2 *e* c^2. *Contudo,*

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \ (mod\ 3);$$

Teríamos,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 1 = 1 + 1.$$

*Que é **Absurdo**!*

2.2.2 Critérios de Divisibilidade - Congruência

Aqui vamos reforçar os critérios de divisibilidade usando noção de congruência.

1. 1 - *Critérios de Divisibilidade por 2, 5 e 10.*

   Notando que:

$$10 \equiv 0 \; mod \; 2;$$
$$10 \equiv 0 \; mod \; 5;$$
$$10 \equiv 0 \; mod \; 10.$$

Temos que,

$$n_i 10^i \equiv 0 \; mod \; 2, \quad mod \; 5, \quad mod \; 10; \qquad i \geq 1.$$

Portanto, dado um número $n = n_r n_{r-1} n_{r-2} \dots n_0$, na base 10, temos que:

$$n \equiv n_0 \; mod \; 2, \quad mod \; 5, \quad mod \; 10.$$

O que nos diz que n é divisivel por 2, 5, 10 se, e somente se, n_0 é divisível por 2, 5, 10.

1. 2- *Critérios de Divisibilidade por 3 e 9.*

   Vamos revisar em congruência o critério de divisibilidade por 3 e 9.
   Como,

$$10 \equiv 1 \; mod \; 3, \quad mod \; 9;$$

segue que,

$$n_i 10^i \equiv n_i \; mod \; 3, \quad mod \; 9;$$

Isso mostra que, se n é representado na base 10 como,

$$n_r n_{r-1} n_{r-2} \dots n_0;$$

Então,

$$n \equiv n_r + n_{r-1} + \dots + n_0 mod \; 3, \quad mod \; 9;$$

O que prova que n é divisível por 3 ou 9 se, e somente se,

$$n_r + n_{r-1} + \dots + n_0;$$

É divisível, respectivamente por 3 ou por 9.

1. 3 - *Critérios de Divisibilidade por 11.*

Como,

$$10 + 1 \equiv 0 \ mod \ 11;$$

Temos que:

$$10^{2n} \equiv 1 \ mod \ 11;$$

E

$$10^{2n+1} + 1 \equiv 0 \ mod \ 11;$$

Seja $n = n_r \dots n_5 n_4 n_3 n_2 n_1 n_0$ um número escrito na base 10. Então, temos que:

$$n_0 \equiv n_0 \ mod \ 11;$$
$$n_1 10 + n_1 \equiv 0 \ mod \ 11;$$
$$n_2 10^2 \equiv n_2 \ mod \ 11;$$
$$n_3 10^3 + n_3 \equiv 0 \ mod \ 11;$$
$$\dots .$$

Somando membro a membro, as congruências acima temos que:

$$n + n_1 + n_3 + n_5 + \dots \equiv n_0 + n_2 + n_4 \dots \ mod \ 11.$$

Portanto, n é divisível por 11 se, e somente se,

$$n \equiv 0 \ mod \ 11.$$

Exemplo 2.2.15. *Encontre o último algarismo do número*

$$7^{7^7}.$$

Solução: *Vamos considerar que estamos na base 10, logo temos por congruência que:*

$$7^0 \equiv 1 \ (mod \ 10);$$

$$7^1 \equiv 7 \ (mod \ 10);$$

$$7^2 \equiv 49 = 9 \ (mod \ 10);$$

$$7^3 \equiv 7^2.7 = 9.7 = 63 = 3 \ (mod \ 10);$$

$$7^4 = 7^3.7 = 3.7 = 21 \equiv 1 \ (mod \ 10);$$

Se continuar teremos

$$7^5 = 7^3.7^2 = 9.3 = 27 \equiv 7 \ (mod \ 10).$$

Percebe-se que há uma rotação de 4 casas de potência que resolve-se, logo

$$7^{4n} \equiv 1 \ (mod \ 10);$$

$$7^{4n+1} \equiv 7 \ (mod\ 10);$$

$$7^{4n+2} \equiv 9 \ (mod\ 10);$$

$$7^{4n+3} \equiv 3 \ (mod\ 10).$$

Analisando a potência 7^7 na base 4, temos:

$$7^7 \equiv X \ (mod\ 4);$$

Ou seja,

$$7^1 \equiv 3 \ (mod\ 4);$$

$$7^2 \equiv 1 \ (mod\ 4);$$

$$7^3 = 7^2.7 = 1.3 \equiv 3 \ (mod\ 4);$$

$$7^4 = 7^2.7^2 = 1.1 \equiv 1 \ (mod\ 4);$$

$$7^5 = 7^2.7^3 = 1.3 \equiv 3 \ (mod\ 4);$$

$$7^6 = 7^3.7^3 = 3.3 = 9 \equiv 1 \ (mod\ 4);$$

$$7^7 = 7^3.7^3.7 = 3.3.7 = 1.7 = 7 \equiv 3 \ (mod\ 4).$$

Portanto

$$7^{7^7} \equiv 7^3 \ (mod\ 10) \equiv 3 \ (mod\ 10).$$

Exemplo 2.2.16. *Achar o algarismo das unidades no numero*

$$7^{7^{7^7}} \equiv X \ (mod\ 10).$$

Solução:

$$7^{4n} \equiv 1 \ (mod\ 10);$$

$$7^{4n+1} \equiv 7 \ (mod\ 10);$$

$$7^{4n+2} \equiv 9 \ (mod\ 10);$$

$$7^{4n+3} \equiv 3 \ (mod\ 10).$$

Agora precisamos descobrir o valor de

$$7^{7^7} \equiv X \ (mod\ 4);$$

Note que,

$$7^0 \equiv 1 \ (mod\ 4);$$

$$7^1 \equiv 3 \ (mod\ 4);$$

$$7^2 \equiv 1 \ (mod\ 4).$$

logo,

$$7^7 = 7^2.7^2.7^2.7 \equiv 3\ (mod\ 4).$$

Portanto

$$7^{7^{7^7}} \equiv 3\ (mod\ 10).$$

Apartir destes exemplos mais elaborados, podemos também citar outros exemplos com complexidade mais de facil entendimento algebrico. Vejam o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2.17. *Determine o resto da divisão* 28^{237} *por 13.* Solução: *Tomando o mesmo racicionio dos exemplos anteriores, temos que:*

$$28 \equiv 2\ (mod\ 13);$$

$$28^2 \equiv 2^2\ (mod\ 13);$$

$$28^4 \equiv 4^2\ (mod\ 13) \Rightarrow 28^4 \equiv 3\ (mod\ 13);$$

$$(28^4)^3 \equiv 3^3\ (mod\ 13) \Rightarrow 28^{12} \equiv 1\ (mod\ 13);$$

$$(28^{12})^{19}.28^9 = 1^{19}.28^9 = 28^4.28^4.28 = 3.3.2 \equiv 5\ (mod\ 13).$$

Exemplo 2.2.18. *Determine através da congruência se o resto é 0.*

$$2^{70} + 3^{70} \equiv 0\ (mod\ 13).$$

Solução: *Vamos analisar por partes, ou seja,* $2^{70} \equiv X\ (mod\ 13)$,

$$2^4 = 16 \equiv 3\ (mod\ 13);$$

$$2^5 = 32 \equiv 6\ (mod\ 13);$$

$$2^6 = 64 \equiv -1\ (mod\ 13)$$

sabe que

$$(-1) \equiv 12\ (mod\ 13);$$

logo

$$2^{70} = 2^{6.11+4} = 2^{6.11}.2^4 = 2^{6.11}.3 = (-1).3 = -3 \equiv 10\ (mod\ 13).$$

Portanto,

$$2^{70} \equiv 10\ (mod\ 13).$$

Agora vamos analisar a segunda parte $3^{70} \equiv X\ (mod\ 13)$.

$$3^3 = 27 \equiv 1\ (mod\ 13);$$

Então pelo Algoritmo de Euclides sabe-se que $70 = 3.23 + 1$. *Então,*

$$3^{3.23+1} = (3^3)^{23}.3 = 1^{23}.3 \equiv 3\ (mod\ 13);$$

Portanto,

$$2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0\ (mod\ 13).$$

O próximo capítulo será abordado os documentos oficiais que regulamentam as estruturas que servem de base para os currículos das Universidades e a Educação Básica no ensino deste conteúdo.

Capítulo 3

ARITMÉTICA NO BRASIL - XX e XXI

3.1 Estado da Arte e Perfil de Licenciatura em Matemática no Brasil - Metade séc. XX ínicio séc XXI

Segundo D'Ambrosio, não é sem razão que a raiz da qual se origina a palavra Matemática, significa justamente isto: *explicação, entendimento, manejo da realidade,objetivos muito mais amplo que o simples contar e medir.* Na verdade, através do estudo da Matemática se alcançava um instrução maior de conhecimentos matemáticos, e por isso os estudos matemáticos - no sentido de teorias abstratas como as organizadas pelos gregos - eram destinadas à preparação das elites dirigentes. Em meados do século XIX, que a Educação se estabeleceu como uma disciplina acadêmica, com o advento da educação para todos, consequência natural da industrialização, e o aparecimento da universidade moderna na Alemanha. A preocupação com o ensino da Matemática entre os matemáticos era tal que em 1908 durante o Congresso Internacional de Matemática que se realizou em Roma, foi fundada a Comissão Internacional de Ensino da Matemática - precursora do Congresso Internacional de Educação Matemática em 1968.

O aparecimento de uma literatura própria, com livros e revistas especializadas, bem como de graus acadêmicos e de Departamento de Educação Matemática, são indicadores decisivos no reconhecimento de uma nova disciplina. A partir daí, as especialidades começam a se caracterizar. Áreas de investigação são definidas e se refletem na programação dos próprios congressos internacionais.

D'Ambrosio diz que (1986):

> O trabalho da Comissão de Programa de um congresso é efetivamente um trabalho de pesquisa sobre o **Estado da Arte**, onde se procura analisar, na literatura, o que tem recebido de maior atenção dos pesquisadores e naturalmente quais têm sido os propulsores de novas direções.

Com isso temos a visão de Gatti, que afirma:

> No Brasil, para GATTI (2006, pág 37)- A formação de professores em cursos específicos é inaugurada no Brasil no final do século XIX com as Escolas Normais destinadas à formação de docentes para as primeiras letras. Essas escolas correspondiam ao nível secundário de então. Nesse período, e ainda por décadas, a oferta de escolarização era bem escassa no país, destinada a bem poucos. Nos inícios do século XX aparece a preocupação com a formação de professores para o secundário (correspondendo aos atuais anos finais do ensino fundamental e ao ensino médio), em cursos regulares e específicos.

A formação desse tipo de professor inicia-se com a criação de universidades. Até então esse trabalho era exercido por profissionais liberais ou autodidatas, mas há que considerar que o número de escolas secundárias era bem pequeno, bem como o número de alunos.

Com o início da progresso da industrialização no país, nas primeiras décadas do século XX, a necessidade de maior escolarização começa a se colocar entre os trabalhadores e inicia-se uma pequena expansão no sistema de ensino. Para atender a essa expansão, mais professores passam a ser demandados.

Então, nos anos 1930, a partir da formação de bacharéis, acrescenta-se um ano com disciplinas da área de educação para a obtenção da licenciatura, esta dirigida à formação de docentes para o ensino secundário (formação que veio a denominar-se 3 + 1). Esse modelo vai se aplicar também ao curso de Pedagogia, regulamentado em 1939, destinado a formar bacharéis especialistas em educação e, complementarmente, formar professores para as Escolas Normais, os quais tinham também, por extensão e portaria ministerial, a possibilidade de lecionar algumas disciplinas no ensino secundário.

> A diferenciação entre o professor polivalente, para as primeiras séries de ensino, e o professor especialista, para as demais séries, fica assim, histórica e socialmente, instaurada, sendo vigente até nossos dias, tanto nos cursos, como na carreira e salários e sobretudo nas representações da comunidade social, da acadêmica e dos políticos, mesmo com a atual exigência de formação em nível superior dos professores dos anos iniciais da educação básica. Qualquer inovação na estrutura de instituições e cursos formadores de professores esbarra nessa representação tradicional, e nos interesses instituídos, o que dificulta repensar essa formação de modo mais integrado e em novas bases, bem como a implementação de fato de um formato novo que poderia propiciar saltos qualitativos nessas formações, com reflexos nas escolas, como ocorreu em vários países nos últimos anos, por exemplo, em Cuba, na Coreia e na Irlanda. (GATTI, 2006 - pag. 52)

Em que pese o esforço de muitos países nos últimos decênios no sentido de organizar e estruturar carreiras do magistério com o objetivo de torná-las mais próximas do que fora estabelecido pela recomendação OIT-UNESCO em 1966, o fato é que a grande maioria dos países ainda não logrou atingir os padrões mínimos necessários para colocar a profissão docente à altura de sua responsabilidade pública para com os milhões de estudantes.

Em 2006 existiam, segundo a RAIS - A Relação Anual de Informações Sociais (RAIS), 2.949.428 postos de trabalho para professores e outros profissionais de ensino , sendo que 82,6% deles provinham de estabelecimentos públicos. Entre os postos de trabalho, registrados pelo MTE (Ministério do Trabalho e Emprego) para os profissionais do ensino, 77% , eram femininos. A docência continua, pois, significando boa oportunidade de emprego para as mulheres no mesmo patamar do maior e mais tradicional grupo de inserção feminina no mercado de trabalho.

Exitem registros de 2006, que a RAIS registrou 2.803.761 empregos para professores no Brasil, em todos os níveis de ensino. Nada menos que 77% desses empregos 2.159.269 são de professores da educação básica, a qual compreende a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Mas, é o ensino fundamental que provê quase três quartos dos postos de trabalho (1.551.160) para professores da educação básica, dada a obrigatoriedade desse nível de ensino e o seu grau de universalização no país. O ensino médio, por sua vez, contribui com 14,1% e a educação infantil, com apenas 7,6%. Os demais 23%, 644.492 postos de trabalho, estão no ensino superior, 16,8%; na educação profissional 5,6%; e na educação especial 0,6%, sendo que estes últimos atendem, majoritariamente, crianças e adolescentes na educação básica.

Em termos regionais, as maiores ofertas de empregos estão nas áreas mais populosas, sendo que 41,2% deles se localizam no Sudeste, 27% no Nordeste, 18% no Sul. Os menores mercados de trabalho para docentes, por sua vez, se localizam no Centro-Oeste e no Norte do Brasil 7,3% e 6,5%, respectivamente.

O Brasil não constitui uma exceção. Apesar das várias tentativas de valorização dos professores empreendidas nos últimos anos pelo Governo Federal, Estados, Municípios e Distrito Federal, destacando-se mais recentemente a lei que instituiu um piso salarial e o decreto sobre a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica liderada pela Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), a situação atual é bastante crítica, certamente devido a omissões que se acumularam e foram progressivamente se agravando ao longo da história. As sucessivas avaliações da educação brasileira, em âmbito nacional ou internacional, indicam que o baixo rendimento escolar persiste e demonstram a magnitude e a complexidade do problema.

O número de cursos de Matemática e a proporcionalmente escassa procura por eles não condiz com a extensa presença e a importância desse componente curricular na educação básica. Esse dado sugere que devem faltar professores de Matemática para atender as necessidades das redes escolares. Segundo os mencionados estudos do INEP(O

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) realizados em 2006, haveria apenas 27% de professores de Matemática com formação específica na área.

O que se observa pelos dados do censo da RAIS de 2006 é que a oferta de cursos e as escolhas dos estudantes revertem a tradicional hierarquia que coloca no topo do currículo da escola básica o ensino de Língua Portuguesa e de Matemática. Isso não quer dizer que esses componentes deixaram de ser altamente valorizados no ensino básico. Ao contrário, sua presença nas redes escolares tem sido reforçada, inclusive pela adoção da avaliação do rendimento escolar dos alunos do ensino fundamental e médio, promovida pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e, recentemente, pela criação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), os quais incidem justamente sobre os resultados do rendimento dos alunos em Língua Portuguesa e Matemática.

Diante dos atuais desafios da educação básica e dos problemas que a formação docente vem enfrentando, e com o propósito de compreender as características que esta tem assumido, são apresentados, a seguir, os principais resultados da pesquisa Formação de professores para o ensino fundamental: instituições formadoras e seus currículos, realizada, em 2008, pelo Departamento de Pesquisas Educacionais da Fundação Carlos Chagas, com apoio da Fundação Vitor Civita, sob coordenação das pesquisadoras Bernardete A. Gatti e Marina R. Nunes (2008). A pesquisa analisou, por amostra representativa, a estrutura curricular e as ementas de 165 cursos presenciais de instituições de ensino superior do país que promovem a formação inicial de docentes nas áreas de Pedagogia, Letras: Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas. Os cursos foram distribuídos da seguinte forma: 71 de Pedagogia, 32 de licenciatura em Letras: Língua Portuguesa, 31 de licenciatura em Matemática e 31 de licenciatura em Ciências Biológicas.

Nas estruturas curriculares dos cursos de Matemática, foram listadas 1.228 disciplinas: 1.128 obrigatórias e 100 optativas. As disciplinas foram agrupadas segundo as categorias básicas utilizadas para a análise de todas as áreas, sendo atendidas as especialidades da área. Os conhecimentos específicos da área agrega conteúdos disciplinares específicos da área de Matemática, ou seja, saberes que apresentam um nível de aprofundamento mais elevado, para atuação do matemático. São exemplos: Álgebra Moderna, Análise na Reta, Cálculo Diferencial, Equações Diferenciais Ordinárias, Geometria Diferencial, Introdução à Lógica, Séries Infinitas, Teoria dos Grupos. A categoria dos conhecimentos específicos para a docência concentra as disciplinas que fornecem instrumental para atuação do profissional de Matemática como professor. Compõe-se de:

- Conteúdos do currículo dirigidos à escola básica são conhecimentos específicos da área necessários para que o profissional atue como docente. Exemplos: Análise Combinatória, Estatística Básica, Fundamentos da Álgebra, Geometria, Probabilidade, Sequências Numéricas;

- Didáticas específicas, metodologias e práticas de ensino, que incluem: Didática da Matemática, Instrumentalização para o Ensino da Matemática, O Ensino da Matemática Através de Problemas;

- Saberes relacionados à tecnologia, em enfoque de utilização, que incorporam: Aplicações da Informática para o Ensino da Matemática, Computação para o Ensino, Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), aplicações à educação matemática. A categoria conhecimentos relativos às modalidades e níveis de ensino específicos reúne as disciplinas relativas a áreas de atuação junto a segmentos determinados:

- Na educação especial, disciplinas tais como: Educação Inclusiva, Métodos e Técnicas da Educação Inclusiva para o Ensino da Matemática, Língua Brasileira de Sinais (Libras);

- Na educação de jovens e adultos (EJA), apenas uma disciplina: Educação Matemática na EJA.

A categoria outros saberes congrega disciplinas que ampliam o repertório do professor, como, por exemplo, temas transversais, novas tecnologias, religião etc. No caso da Matemática, foram incluídas as disciplinas referentes à Física e à Química. As categorias são semelhantes às duas outras licenciaturas já expostas.

Para (GATTI; NUNES, 2008) A análise da estrutura curricular dos cursos de Matemática mostra que a maioria das disciplinas obrigatórias oferecidas pelas IES(Instituição de Ensino Superior) concentra-se em duas categorias: conhecimentos específicos da área e conhecimentos específicos para a docência, 32,1% e 30%, respectivamente. Entre as demais categorias, 14,7% dizem respeito à categoria outros saberes que, como dito, englobam os temas transversais e novas tecnologias e, no caso da Matemática, as disciplinas de Física e Química (9,2%); Fundamentos Teóricos (13,3%), subdivididos em Sistemas Educacionais (3,6%), Pesquisa e TCC (4,6%) e Atividades Complementares (5,1%).

Embora a proporção de disciplinas relativas a conhecimentos específicos da área e conhecimentos específicos para a docência se equilibre melhor nas licenciaturas em Matemática do que nas outras licenciaturas estudadas, quando se computa o número de disciplinas em cada uma delas, em termos do número de horas-aula em cada categoria, há que ressaltar algumas diferenças. Há maior proporção de horas-aula dedicadas às disciplinas de conhecimentos especializados da área, e menor proporção de horas para conhecimentos específicos para a docência. Também há, proporcionalmente, menor número de horas para Pesquisa e TCC. Observa-se ainda que apenas 0,7% das disciplinas desta licenciatura são destinadas às modalidades e níveis de ensino específicos.

Nas Diretrizes para formação dos professores em Matemática diz que um curso de Bacharelado/Licenciado em Matemática deve ter um programa flexível de forma a qualificar os seus graduados para a Pós-graduação visando a pesquisa e o ensino superior, ou para oportunidades de trabalho fora do ambiente acadêmico. Dentro dessas perspectivas, os programas de Bacharelado/Licenciado em Matemática devem permitir diferentes formações para os seus graduados, quer visando o profissional que deseja seguir uma carreira acadêmica, como aquele que se encaminhará para o mercado de trabalho não acadêmico e que necessita além de uma sólida base de conteúdos matemáticos, de uma formação mais flexível contemplando áreas de aplicação.

Desejam-se as seguintes características para o Licenciado em Matemática:

i) Visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;

ii) Visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;

iii) Visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

Detalhando mais a questão, mostra a distribuição da carga horária das disciplinas em cada subcategoria de análise e a sua frequência em relação ao total. Verifica-se que, em termos de carga horária, proporcionalmente, Didática geral ocupa 1,6% do tempo da licenciatura; Conhecimentos dirigidos à escola básica, 18,5%; Conhecimentos aprofundados específicos da área disciplinar, 34,1%. Pesquisa e TCC ocupam 3,7% do tempo do curso, menos horas do que atividades complementares (5%), que contemplam rótulos como atividades acadêmico-científico-culturais, atividades complementares, estudos independentes.

No que se refere a sistemas educacionais, que já representam muito pouco no total de horas oferecidas (3,3%), vale destacar que, desse percentual, 2,0% correspondem a estrutura e funcionamento do ensino, 0,7% das horas são dedicadas a currículo, 0,5% a gestão escolar e 0,1% a ofício docente. Apesar de disciplinas relacionadas a esses temas serem importantes na formação de professores, nota-se que os cursos de licenciatura de Matemática ainda não incorporaram em suas matrizes curriculares um número de horas maior quanto a aspectos importantes para a formação de profissionais que vão atuar nas escolas de ensino fundamental e médio.

A avaliação educacional, por exemplo, o problema enfrentado no dia a dia das escolas, e uma questão discutida em relação aos resultados das avaliações externas dessa disciplina (SAEB, , ENEM, PISA) e aos baixos índices apresentados pelos alunos nessas avaliações, não consta das matrizes curriculares dos cursos de licenciatura em Matemática.

Avaliar alunos não é questão trivial para educadores. Exige formação e discussão. Porém, os licenciandos em Matemática, assim como os das demais licenciaturas estudadas, não recebem essa formação, pelo que foi constatado.

Voltando as Diretrizes de formação do Licenciado em Matemática, observa-se a dualidade em Formação e Capacidades que o Licenciado em Matemática deverão ter em suas competências e habilidades destacando primeiramente a formação:

- Capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão;
- Capacidade de trabalhar em equipes multi-disciplinares;
- Capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas;
- Capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;
- Habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
- Estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
- Conhecimento de questões contemporâneas;
- Educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social;
- Participar de programas de formação continuada;
- Realizar estudos de pós-graduação
- Trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber.

No que se refere às competências e habilidades próprias do educador matemático, o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de:

a) Elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;

b) Analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;

c) Analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;

d) Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;

e) Perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

f) Contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.

Observa-se, ainda, que nem todas as instituições apresentam disciplinas relacionadas a Pesquisa e TCC, o que é preocupante, considerando que atualmente a elaboração de um trabalho de conclusão de curso é item obrigatório para a obtenção do diploma de licenciado em Matemática. Considerando o conjunto de disciplinas optativas oferecidas pelos cursos, verifica-se que são privilegiados os conhecimentos específicos da área (42%), seguidos de outros saberes (25%) e de conhecimentos específicos para a docência (22%). Na primeira categoria, são exemplos: Corpos e Extensões, Programação não Linear e Espaços Métricos. Na segunda categoria, aparecem como optativas matérias como Ecologia e Poluição, Matemática e Meio Ambiente, Inglês Técnico I e Física Experimental III e, na terceira, Matemática Discreta e Teoria dos Conjuntos.

Ao relacionar a distribuição das disciplinas agrupadas nas categorias com as IES das diferentes regiões do país, verifica-se pequena variação entre elas. As regiões Nordeste e Centro-Oeste são as que possuem menor percentual de conhecimentos específicos para a docência, ao passo que a Norte e a Sul são as que mais ministram esse conjunto de disciplinas.

Por outro lado, quando se compara essa categoria e a de conhecimentos específicos da área, nota-se que são as regiões Sul e Sudeste aquelas que registram maior equilíbrio na distribuição. Já a região Norte é a única em que as disciplinas relativas à formação específica para a docência superam aquelas específicas da área. O Nordeste destaca-se por ter um percentual ligeiramente superior em relação aos sistemas educacionais (6%). No interior dessa categoria, chama a atenção que, no Centro-Oeste, não há registro de disciplinas direcionadas ao currículo, à gestão escolar e ao ofício docente.

Aprofundando a análise das ementas Conforme as Diretrizes Curriculares para a Licenciatura de Matemática, os conteúdos considerados comuns a esses cursos de licenciatura são: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Os cursos analisados oferecem os conteúdos considerados comuns a todos os cursos de licenciatura em Matemática. Encontram-se, porém, diferenças nas denominações e quanto ao aprofundamento. O número de disciplinas em cada uma dessas subáreas também varia muito. Varia muito, ainda, a carga horária atribuída a esses conteúdos, mostrando ênfases institucionais diferentes. Às vezes, há uma só disciplina em uma subárea, outras vezes, quatro ou mais. Cerca de 16% dos currículos examinados apresentam conteúdos bastante especializados e de grande aprofundamento, importantes na formação de profissionais matemáticos, porém, não tão importantes para professores da educação básica. De outro lado, 45% desses currículos oferecem apenas conceitos básicos introdutórios. Entretanto, alguns dos cursos (21%) também trabalham esses conteúdos em disciplinas ligadas à prática de ensino como componente curricular, ou a conteúdos da educação básica.

Além dos conteúdos considerados comuns aos cursos de licenciatura em Matemática, a parte comum do currículo deve incluir conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de álgebra, geometria e análise. Todos os cursos analisados contemplam esses conteúdos, algumas vezes em disciplinas isoladas, outras sob a forma de introdução aos conteúdos do ensino superior.

As denominações para as disciplinas isoladas aparecem como tópicos ou fundamentos de matemática elementar, matemática ou matemática básica, matemática para o ensino, geometria no ensino, educação matemática no ensino fundamental e no ensino médio. Os conteúdos trabalhados nessas disciplinas envolvem conjuntos numéricos, operações elementares, diversas funções (função polinomial, logarítmica, exponencial e trigonométrica), progressões aritméticas e geométricas, geometria plana e espacial, proporcionalidade, números complexos, polinômios, equações, combinatória, matrizes e determinantes, juros simples e compostos.

As disciplinas referentes às metodologias e práticas de ensino específicas procuram atender às 400 horas de prática como componente curricular, previstas nas Diretrizes Curriculares para Formação de Professores da Educação Básica. Identificou-se que todos os cursos de licenciatura em Matemática analisados possuem disciplinas específicas referentes à prática de ensino, denominadas: Prática e Metodologia do Ensino de Matemática; Prática de Ensino de Matemática; Prática de Ensino Fundamental; Prática; Prática Pedagógica para o Ensino de Matemática; Laboratórios de Ensino; Projetos de Ensino; Instrumentação para o Ensino de Matemática, entre outras.

Não se percebe, porém, um projeto intencional que relacione aspectos de formação para a docência e há ementas repetitivas e vagas.

Alguns poucos cursos contemplam uma dimensão mais ampla de formação propondo disciplinas como Introdução à Informática; Introdução à História da Matemática; Matemática, Sociedade e Cultura; Educação e Cultura; Educação Matemática e TIC; Educação Matemática e Suas Investigações; Educação Inclusiva. Dentre os currículos e ementas analisados, verificou-se que apenas um deles não possui uma disciplina específica para trabalhar com conceitos ligados à computação. Porém, quando se trata de uso da informática para a educação, esta é referida claramente em apenas 29% dos cursos.

Três dos cursos apresentam várias disciplinas com ementas que fazem referência às novas tecnologias de informação e comunicação. Observa-se, no entanto, que as ementas mostram mais uma discussão sobre a utilização dessas tecnologias do que a sua aplicação propriamente dita. Questiona-se se a forma como esse conhecimento vem sendo ministrado favorece a utilização das novas tecnologias nas práticas de ensino dos futuros professores. Ou seja, se disciplinas que apenas discutem, teoricamente, a informática no ensino e que fornecem fundamentos da computação são suficientes para uma futura prática docente com utilização das novas tecnologias.

Fica claro que esses cursos de licenciatura em Matemática estão formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação Matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática, forçando o licenciado a encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação.

Uma característica também percebida nas estruturas curriculares diz respeito à incorporação da pesquisa como princípio formativo. As instituições oferecem atividades/disciplinas que permitem a elaboração de um trabalho de conclusão de curso, o TCC. Algumas poucas oferecem disciplina que aborda questões ligadas à metodologia de pesquisa, outras oferecem também disciplinas que apresentam e discutem questões ligadas à pesquisa educacional e investigações em educação matemática, e ainda outras oferecem orientação para a elaboração do TCC.

Essas disciplinas/atividades podem propiciar o desenvolvimento de certas competências e habilidades próprias do educador matemático, capacitando o futuro professor para se expressar escrita e oralmente com clareza e precisão; compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas; aprender continuadamente, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento; identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento e ter uma educação abrangente, necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social. Porém, as ementas, de um lado, não permitem inferir, pelo seu conteúdo, o papel efetivo das disciplinas acerca da pesquisa educacional na direção antes mencionada e, de outro lado, tampouco permitem saber como as orientações de TCC se desenvolvem.

Considerando as fragilidades relativas a esses cursos, pode-se apontar a prática de ensino e o estágio como aspectos que merecem maior atenção na análise da formação de professores, da maneira como ela está sendo realizada pelos cursos de licenciatura. Considerando que é, principalmente, nessas disciplinas/atividades que serão desenvolvidas e discutidas as competências e habilidades que o futuro professor precisa adquirir para elaborar propostas efetivas de ensino-aprendizagem de matemática voltadas à sua atuação na educação básica, entende-se que a clareza e a objetividade nos projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura em Matemática nessas disciplinas/atividades deixam muito a desejar.

Outro aspecto que indica a fragilidade desses cursos é o desequilíbrio entre formação na área específica e formação para a docência, em que quase não existe uma perspectiva de formação integradora. Nesse sentido, a falta de critérios e de práticas, claramente explicitados nos projetos pedagógicos, que possibilitem um diálogo crescente entre os dois contextos formativos (a escola básica e o ensino superior) constitui também uma debilidade nos projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura em Matemática.

Quanto às demais licenciaturas analisadas em seus currículos Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas, que respondem pela formação inicial de professores que irão lecionar do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e no ensino médio, verificou-se que:

- Predomina nos currículos a formação disciplinar específica, em detrimento da formação de professores para essas áreas do conhecimento.
- Há grande dissonância entre os projetos pedagógicos formulados e a estrutura do conjunto de disciplinas e suas ementas, parecendo que aqueles são documentos que não orientam de fato a realização dos cursos.
- Raras instituições especificam em que consistem os estágios e sob que forma de orientação são realizados, se há convênio com escolas das redes, entre outros aspectos.
- A questão das práticas de ensino, exigidas pelas diretrizes curriculares, mostra-se problemática, pois às vezes se coloca que estão embutidas em diversas disciplinas, sem especificação clara, outras vezes aparecem em separado, mas com ementas muito vagas.
- Na maior parte dos ementários analisados não foi observada uma articulação entre as disciplinas de formação específicas (conteúdos da área disciplinar) e as de formação pedagógica (conteúdos da docência).
- Saberes relacionados a tecnologias no ensino estão praticamente ausentes.
- Aparecem nos currículos muitas horas dedicadas a atividades complementares, ou seminários, ou atividades culturais etc., que ficam sem nenhuma especificação quanto a que se referem, se são atividades acompanhadas por docentes, seus objetivos, etc.
- Os cursos de licenciatura em Letras e em Ciências Biológicas registram percentual em torno de 10

- Os cursos de licenciatura em Matemática se diferenciam por apresentarem um percentual um pouco maior de disciplinas relativas aos conhecimentos específicos para a docência.

- As disciplinas da categoria conhecimentos relativos aos sistemas educacionais registram percentuais inexpressivos de presença em todas as licenciaturas analisadas. Quando se desagrega esta categoria, nota-se que a maior parte das matérias aloca-se em estrutura e funcionamento do ensino, ficando aspectos ligados a currículo, a gestão escolar e a ofício docente com percentuais irrisórios.

- Uma parte dessas licenciaturas promovem especialização precoce em aspectos que poderiam ser abordados em especializações ou pós-graduação.

Reafirma-se o que já está colocado em vários estudos sobre as licenciaturas: que elas ocupam um lugar secundário no modelo de universidade brasileira. Dentro desse quadro, a formação de professores é considerada atividade de menor categoria e quem a ela se dedica é pouco valorizado. Decorre daí uma ordem hierárquica na academia universitária, as atividades de pesquisa e de pós-graduação possuem reconhecimento e ênfase, a dedicação ao ensino e à formação de professores supõe perda de prestígio acadêmico.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, os cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura em Matemática tem como objetivo principal a formação de professores para a educação básica.

As aplicações da Matemática têm se expandido nas décadas mais recentes. A Matemática tem uma longa história de intercâmbio com a Física e as Engenharias e, mais recentemente, com as Ciências Econômicas, Biológicas, Humanas e Sociais. As habilidades e competências adquiridas ao longo da formação do matemático tais como o raciocínio lógico, a postura crítica e a capacidade de resolver problemas, fazem do mesmo um profissional capaz de ocupar posições no mercado de trabalho também fora do ambiente acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável.

Chama a atenção o percentual relativamente pequeno no ENADE de alunos dos cursos de Matemática, sobretudo quando se tem em conta que, juntamente com Língua Portuguesa, a Matemática constitui o componente curricular que possui o maior número de aulas na escola básica, o que anuncia provável falta de professor na área, como já apontado pelos estudos do Inep e Conselho Nacional de Educação. Mais crítica é ainda a proporção dos estudantes das ciências duras: Física e Química, áreas tradicionalmente deficitárias quanto ao número de professores nos sistemas escolares não só brasileiros, como de diversos países.

Certamente os estudantes dessas áreas encontram melhores ofertas de trabalho fora da docência. Mas, vale repetir, os componentes curriculares da área de ciências somente figuram desagregados no ensino médio, que possui um contingente relativamente pequeno de alunos em relação ao ensino fundamental (19% das matrículas na escola básica).

Constata-se nas instituições de ensino superior que oferecem licenciaturas a ausência de um perfil profissional claro de professor. Os currículos não se voltam para as questões ligadas ao campo da prática profissional, seus fundamentos metodológicos e formas de trabalhar em sala de aula. Continuam a privilegiar preponderantemente os conhecimentos da área disciplinar em detrimento dos conhecimentos pedagógicos propriamente ditos.

3.2 Estrutura no Ensino Básico - Matemática

3.2.1 LDB - Lei Diretrizes Básicas

O conteúdo aqui apresentado está atualizado até a data de fechamento da edição.

Segundo a LDB, temo que:

Da Educação Básica, na Seção I, das disposições gerais, no Art. 22: A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

No Art. 23: A educação básica poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.

Art. 24. A educação básica, nos níveis fundamental e médio, será organizada de acordo com as seguintes regras comuns:

- I - A carga horária mínima anual será de oitocentas horas para o ensino fundamental e para o ensino médio, distribuídas por um mínimo de duzentos dias de efetivo trabalho escolar, excluído o tempo reservado aos exames finais, quando houver;

Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos.

Já na Seção III que refere-se ao Ensino Fundamental, tem-se no Art. 32: O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante:

- I - o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- II - A compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
- III - O desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
- IV - O fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

Art. 35-A: A Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas seguintes áreas do conhecimento:

- I - Linguagens e suas tecnologias;
- II - Matemática e suas tecnologias;
- III - Ciências da natureza e suas tecnologias;
- IV - Ciências humanas e sociais aplicadas.

Art. 36. O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:

- I - E suas tecnologias;
- II - Matemática e suas tecnologias;
- III - Ciências da natureza e suas tecnologias;
- IV -Ciências humanas e sociais aplicadas;
- V - formação técnica e profissional.

Art. 43. A educação superior tem por finalidade:

- I - Estimular a criação cultural e o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo;

- II - Formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento, aptos para a inserção em setores profissionais e para a participação no desenvolvimento da sociedade brasileira, e colaborar na sua formação contínua;
- III - Incentivar o trabalho de pesquisa e investigação científica, visando o desenvolvimento da ciência e da tecnologia e da criação e difusão da cultura, e, desse modo, desenvolver o entendimento do homem e do meio em que vive;
- IV - Promover a divulgação de conhecimentos culturais, científicos e técnicos que constituem patrimônio da humanidade e comunicar o saber através do ensino, de publicações ou de outras formas de comunicação; Lei n 33 o 9.394/1996
- V - Suscitar o desejo permanente de aperfeiçoamento cultural e profissional e possibilitar a correspondente concretização, integrando os conhecimentos que vão sendo adquiridos numa estrutura intelectual sistematizadora do conhecimento de cada geração;
- VI - Estimular o conhecimento dos problemas do mundo presente, em particular os nacionais e regionais, prestar serviços especializados à comunidade e estabelecer com esta uma relação de reciprocidade;
- VII - Promover a extensão, aberta à participação da população, visando à difusão das conquistas e benefícios resultantes da criação cultural e da pesquisa científica e tecnológica geradas na instituição.
- VIII - Atuar em favor da universalização e do aprimoramento da educação básica, mediante a formação e a capacitação de profissionais, a realização de pesquisas pedagógicas e o desenvolvimento de atividades de extensão que aproximem os dois níveis escolares.

Art. 44. A educação superior abrangerá os seguintes cursos e programas:

- I - Cursos sequenciais por campo de saber, de diferentes níveis de abrangência, abertos a candidatos que atendam aos requisitos estabelecidos pelas instituições de ensino, desde que tenham concluído o ensino médio ou equivalente;
- II - De graduação, abertos a candidatos que tenham concluído o ensino médio ou equivalente e tenham sido classificados em processo seletivo;

Art. 45. A educação superior será ministrada em instituições de ensino superior, públicas ou privadas, com variados graus de abrangência ou especialização. Art. 46. A autorização e o reconhecimento de cursos, bem como o credenciamento de instituições de educação superior, terão prazos limitados, sendo renovados, periodicamente, após processo regular de avaliação.

Dos Profissionais da Educação Art. 61. Consideram-se profissionais da educação escolar básica os que, nela estando em efetivo exercício e tendo sido formados em cursos reconhecidos, são: Parágrafo único. A formação dos profissionais da educação, de modo a atender às especificidades do exercício de suas atividades, bem como aos objetivos das diferentes etapas e modalidades da educação básica, terá como fundamentos:

- I - A presença de sólida formação básica, que propicie o conhecimento dos fundamentos científicos e sociais de suas competências de trabalho;

- II - A associação entre teorias e práticas, mediante estágios supervisionados e capacitação em serviço;

- III - O aproveitamento da formação e experiências anteriores, em instituições de ensino e em outras atividades.

Art. 62: A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura plena, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos cinco primeiros anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal.

Art. 65. A formação docente, exceto para a educação superior, incluirá prática de ensino de, no mínimo, trezentas horas.

Art. 87. É instituída a Década da Educação, a iniciar-se um ano a partir da publicação desta Lei. § 1o A União, no prazo de um ano a partir da publicação desta Lei, encaminhará, ao Congresso Nacional, o Plano Nacional de Educação, com diretrizes e metas para os dez anos seguintes, em sintonia com a Declaração Mundial sobre Educação para Todos.

3.2.2 PCN - Plano Curricular de Nacional - Matemática

Para o Parâmetro Curricular Nacional em Matemática o papel fundamental da educação no desenvolvimento das pessoas e das sociedades amplia-se ainda mais no despertar do novo milênio e aponta para a necessidade de se construir uma escola voltada para a formação de cidadãos. Vivemos numa era marcada pela competição e pela excelência, onde progressos científicos e avanços tecnológicos definem exigências novas para os jovens que ingressarão no mundo do trabalho. Tal demanda impõe uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país.

No PCN nota-se a procura, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Ou seja, ter uma educação que possa nivelar todos os estudantes no País.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. No ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo. Indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e das Tecnologias da Comunicação. Na segunda parte discute-se a especificidade do processo ensino-aprendizagem nos terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, levando em conta o desenvolvimento afetivo, social e cognitivo dos adolescentes.

No PCN de Matemática tem abordado estudos dos movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20 que não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão.

Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna. A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino por se considerar que, juntamente com a área de Ciências, ela constituía uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto procurou-se aproximar a Matemática desenvolvida na escola da Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores. Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Tem evidenciado que no PCN de Matemática a dualidade entre o "Professor e o

Saber Matemático", ou seja, tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência.

Esse processo de transformação do saber científico em saber escolar não passa apenas por mudanças de natureza epistemológica, mas é marcado significativamente por condições de ordem social e cultural que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras.

A discussão sobre a seleção e a organização de conteúdos tem como diretriz a consecução dos objetivos arrolados no item precedente e seu caráter de essencialidade ao desempenho das funções básicas do cidadão brasileiro.

Há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento).

O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes. A seleção de conteúdos a serem trabalhados pode se dar numa perspectiva mais ampla, ao procurar identificá-los como formas e saberes culturais cuja assimilação é essencial para que produza novos conhecimentos. Dessa forma, pode-se considerar que os conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes.

Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas. Com relação às operações, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo, contemplando diferentes tipos exato e aproximado, mental e escrito.

> No PCN de Matemática (pág. 66), no terceiro Ciclo, com relação aos números naturais, muitas vezes se considera que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo; no entanto, é fundamental que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números grandes e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza. É pouco provável que ele tenha desenvolvido plenamente essas noções, tendo em vista a complexidade dos conteúdos, como saber quantos agrupamentos de centena são necessários para construir uma dezena de milhar relações de inclusão. Também os estudos relacionados ao desenvolvimento histórico dos números podem fornecer excelentes contextos para evidenciar as regras desse sistema e a necessidade da construção de números, que não os naturais. Conceitos como os de múltiplo e divisor de um número natural ou o conceito de número primo podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver.

As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas idéias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações. O estudo desses números não poderá, no entanto, restringir-se apenas a esses aspectos mas incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais.

3.2.3 Referencial Curricular Nacional/Estadual - 2013

Quanto às etapas correspondentes aos diferentes momentos constitutivos do desenvolvimento educacional, a Educação Básica compreende:

1. Ensino Fundamental, obrigatório e gratuito, com duração de 9 (nove) anos, é organizado e tratado em duas fases: a dos 5 (cinco) anos iniciais e a dos 4 (quatro) anos finais;

2. Ensino Médio, com duração mínima de 3 (três) anos.

Estas Diretrizes inspiram-se nos princípios constitucionais e na LDB e se operacionalizam, sobretudo por meio do projeto político-pedagógico e do regimento escolar, do sistema de avaliação, da gestão democrática e da organização da escola, na formação inicial e continuada do professor, tendo como base os princípios afirmados nos itens anteriores, entre os quais o cuidado e o compromisso com a educação integral de todos, atendendo-se às dimensões orgânica, sequencial e articulada da Educação Básica.

O projeto político-pedagógico, nomeado na LDB como proposta ou projeto pedagógico, representa mais do que um documento. É um dos meios de viabilizar a escola democrática e autônoma para todos, com qualidade social. Autonomia pressupõe liberdade e capacidade de decidir a partir de regras relacionais. O exercício da autonomia administrativa e pedagógica da escola pode ser traduzido como a capacidade de governar a si mesmo, por meio de normas próprias.

Art. 15 Os componentes curriculares obrigatórios do Ensino Fundamental serão assim organizados em relação às áreas de conhecimento:

1. Linguagens:

   a Língua Portuguesa;

   b Língua Materna, para populações indígenas;

   c Língua Estrangeira moderna;

   d Arte;

   e Educação Física;

2. Matemática;

3. Ciências da Natureza;

4. Ciências Humanas:

Os componentes definidos pela LDB como obrigatórios são:

> O estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil;
> O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, deve assegurar sua função formativa para todos os estudantes, sejam adolescentes, jovens ou adultos, atendendo:
> O Ensino Médio pode organizar-se em tempos escolares no formato de séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.
> No Ensino Médio regular, a duração mínima é de 3 anos, com carga horária mínima total de 2.400 horas, tendo como referência uma carga horária anual de 800 horas, distribuídas em pelo menos 200 dias de efetivo trabalho escolar.
>
> O ensino médio, conforme a legislação nacional, organiza-se a partir de uma única proposta que tem como objetivo superar a dualidade que caracteriza essa etapa de ensino, formação para o mundo do trabalho e preparação para a continuidade dos estudos. Para tanto, propõe-se uma formação integral que pressupõe o acesso aos conhecimentos produzidos e acumulados historicamente ao longo dos tempos. A formação integral visa à unidade entre as dimensões da formação humana, que constituem a base da proposta e do desenvolvimento do currículo do ensino médio.

As necessidades cotidianas do homem fazem do ensino da Matemática ser voltado para a aprendizagem significativa que lhe permita reconhecer, selecionar informações e resolver problemas, com o objetivo de facilitar a compreensão de mundo e contribuir na formação da cidadania. A evolução do conhecimento matemático está associada à inserção do indivíduo no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais.

Para que o estudante seja inserido, no mundo das relações sociais, a Matemática perpassa por todos os outros componentes do Ensino Fundamental, uns de forma mais superficial, outros mais aprofundadamente.

A Lógica, a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Probabilidade e a Estatística, entre outras compõem o espectro das Matemáticas e, em sua diversidade e especificidade, abrangem um vasto corpo de linguagens, de práticas, conceitos e formas de pensar, que constituem o objetivo da área de Matemática.

O ensino da Matemática deverá fazer uso de metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, favorecendo a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de pensar, conhecer e enfrentar desafios. A Matemática deve ser vista pelo estudante como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação e que, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.

Portanto, o aprendizado da Matemática é importante para que o estudante desempenhe suas capacidades intelectuais, estruture seu pensamento, agilize o raciocínio, na aplicação em situações da vida cotidiana e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas. Área do conhecimento: Matemática.

No sexto ano do Ensino Fundamental encontra-se os conteudos a serem ministrados por bimestre, sendo no 1º bimestre dado os respectivos conteúdos: Sistema de Numeração Decimal; Operações Fundamentais; Expressão numérica em $\mathbb{N}$; Potenciação; Radiciação; Múltiplos e Divisores e Critérios de Divisibilidade.

Sendo que o aluno necessitará de perceber perceber como se constrói o sistema de numeração decimal, ler e escrever os números naturais de acordo com as classes/ordens.

Calcular resultados envolvendo as operações fundamentais com números naturais. Identificar e aplicar as propriedades das operações fundamentais envolvendo os números naturais em resolução de problemas. Identificar as regras para calcular o valor numérico de uma expressão, combinando as quatro operações, eliminando chaves, colchetes e parênteses. Realizar potenciação com números naturais. Perceber que a radiciação de números relativos é a operação inversa da potenciação. Resolver radiciação de números naturais. Reconhecer se um número natural é ou não um múltiplo e/ou divisor de outro. Conhecer e utilizar critérios de divisibilidade para auxiliar a composição e a decomposição de números naturais. Utilizar critérios de divisibilidade para auxiliar a composição e a decomposição de números naturais na resolução de problemas.

Já no 2º bimestre encontramos nas diretrizes os conteudos Números primos e fatoração (m.m.c. e m.d.c.).

Onde os alunos irão precisar identificar os números primos. Utilizar os números primos na fatoração e decomposição de um número. Calcular o máximo divisor comum (m.d.c) e/ou mínimo múltiplo comum (m.m.c) de dois ou mais números naturais. Resolver problema envolvendo o máximo divisor comum (m.d.c) e mínimo múltiplo comum (m.m.c) de dois ou mais números naturais.

Nas diretrizes do 7º ano é abordado os conteudos ligados a aritmética, tais como: Números inteiros (adição e subtração); Números inteiros (adição e subtração); Números inteiros (multiplicação e divisão).

Nos quais deverão realizar cálculo envolvendo as operações de adição e/ou subtração com números inteiros. E também ·Resolver problemas envolvendo as operações de adição e/ou subtração com números inteiros Realizar cálculos de multiplicação e/ou divisão com números inteiros; ·Resolver problemas envolvendo as operações de multiplicação e/ou divisão com números inteiros.

Na Educação Básica as novas diretrizes estão concentradas na BNCC que asseguram aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

3.2.4 BNCC - Base Nacional Comum Curricular

Já na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. A BNCC e os currículos se identificam na comunhão de princípios e valores que, como já mencionado, orientam a LDB e as DCN. Dessa maneira, reconhecem que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica.

Na BNCC, o Ensino Fundamental está organizado em cinco áreas do conhecimento:

1. Linguagens

2. Matemática

3. Ciências da Natureza

4. Ciências Humanas

5. Ensino Religioso.

Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dos nove anos. Essas competências explicitam como as dez competências gerais se expressam nessas áreas.

Na BNCC, o Ensino Médio está organizado em quatro áreas do conhecimento, conforme determina a LDB:

1. Linguagens e suas Tecnologias
2. Matemática e suas Tecnologias
3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias
4. Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessa etapa, tanto no âmbito da BNCC como dos itinerários formativos das diferentes áreas. Essas competências explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental os Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada. Aqui será identificado os conteúdos elencados para ser ensinado na educação basica conforme a BNCC, no Ensino Fundamental, por exemplo, temos:

- Números e Objetos de Conhecimento

1. Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal

2. Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

3. Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

4. Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana

5. Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

6. Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos

7. Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

8. Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos é múltiplo de, é divisor de, é fator de, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.

9. Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

10. Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações

- Números

- Múltiplos e divisores de um número natural

- Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples

- Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações

- Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operado

No 8º ano temos:

- Números e Objetos de Conhecimento

1. Notação científica
2. Potenciação e radiciação
3. O princípio multiplicativo da contagem
4. Porcentagens
5. Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral

Já no ultimo ano do Ensino Fundamental, temos as Unidades Temáticas:

- Probabilidade e estatística e Objetos de Conhecimento
- Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes;

Na BNCC o Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica, direito público subjetivo de todo cidadão brasileiro. Todavia, a realidade educacional do País tem mostrado que essa etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação. Para além da necessidade de universalizar o atendimento, tem-se mostrado crucial garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, respondendo às suas demandas e aspirações presentes e futuras.

Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores e que se refletem nos contextos atuais, abrindo-se criativamente para o novo.

Essa estrutura adota a flexibilidade como princípio de organização curricular, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do protagonismo juvenil e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida.

Essa organização não exclui necessariamente as disciplinas, com suas especificidades e saberes próprios historicamente construídos, mas, sim, implica o fortalecimento das relações entre elas e a sua contextualização para apreensão e intervenção na realidade, requerendo trabalho conjugado e cooperativo dos seus professores no planejamento e na execução dos planos de ensino (Parecer CNE/CP nº 11/200957). A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.

Nesse contexto, é necessário reorientar currículos e propostas pedagógicas compostos, indissociavelmente, por formação geral básica e itinerário formativo (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 10). Nesse processo de reorientação curricular, é imprescindível aos sistemas de ensino, às redes escolares e às escolas:

As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática, verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas, e ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência da Base Nacional Comum Curricular ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de dissertação abordou o Estado da Arte da Aritmética, modelos de curso em Licenciatura Plena em Matemática na abordagem da teoria dos números e suas linguagens pedagógicas e abstratas, nos documentos oficiais a partir da LDB - Lei e Diretrizes da Educação Básica. Com intuito de mostrar a evolução dos conteúdos durante a história da humanidade - principalmente na evolução das escritas numericas e álgebricas. A evolução da escrita que hoje conhecemos notou-se que houve um avanço significativona parte pedagógica/didática e abstrata.

A história nos mostrou que a aritmética teve avanços significativos, acompanhando a evolução de disputas por territórios ou mesmo pela evolução intelectual. Com notório destaque ao período de Euclides de alexandria (300a.C). Tendo um progresso incomensurável para as principais escritas matemáticas. Com períodos deturbados que podem ser classificados como um período sombrio para as pesquisas. No final do século XIII com as implantações das primeiras universidades observou-se um resgaste as pesquisas que puderam se ocupar dos escritos traduzidos pelos árabes, onde reuniram celebres nomes de volta as pesquisas. Já no século XVII observou que surgiram vários nomes que contribuiram em muito com a linguagem algébrica abstrata e a formalização da escrita. Sendo que, até nos dias atuais são usadas nas universidades para demonstrar a construção dos números. Vale ressaltar que no século XVIII teve a infelicidade de vir depois do dezessete e antes do dezenove. Como poderia qualquer período que seguisse o *Século do Gênio* e precedesse a *Idade Áurea* da matemática ser considerada outra coisa senão um interlúdio. A geometria analítica e o cálculo foram inventados no século XVII; o surgimento do rigor matemático e o florescimento da geometria estão associados ao XIX. Mesmo com influência destas escritas matemáticas, o Brasil do século XX, inicia-se com deficít na Educação de uma maneira geral, tendo em vista, o modelo de professores que eram responsáveis para formação acadêmica e da Educação Básica. Na pesquisa realizada, observou-se que estes profissionais, em sua maioria não tinham formação específica para estar ministrando conteúdos de alta complexidade na Educação Básica, dificultando sua permanência a frente de uma sala de aula.

Na primeira metade do século XX, o Governo Federal, busca criar programas para capacitar estes profissionais. Mas, somente a partir de (1986d.C) com a crição da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), que inicia-se um processo de regulamentação da Educação Básica com currículos pré determinados a cada faixa etária da criança. Cria também convênios com Universidades no País para capacitar os professores que estavam em sala de aula. Logo após, tivemos a implantação dos PCN - Parâmetros Curriculares Nacional em especial de Matemática, buscando esclarecer como a educação deve ser encaminhada com seus respectivos conteúdos. Com a finalidade de fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializando informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. Evidenciou que no PCN de Matemática esta dualidade entre o "Professor e o Saber Matemático", e uma transposição em aproximar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido. Aparentemente deve priorizar que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. As linguagens abstratas sem a parte pedagógica nota-se claramente que estas variáveis persistem na escola, mesmo porque a pesquisa monstrou as mais variadas qualificações de profissionais dentro das escolas.

Mesmo com a organização dos currículos de Matemática (PCN) para o Ensino Fundamental que contemplam o estudo dos números e das operações no campo da Aritmética e da Álgebra, o estudo das grandezas e das medidas que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento). Vimos que no terceiro Ciclo, abordou os números naturais, devendo o aluno exercitar este conhecimento em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números grandes. Ressaltado conceitos como os de múltiplo, divisor de um número natural ou o conceito de número primo.

Nos Referencial Curricular Nacional valendo a partir de 2013, observou-se que, estas diretrizes inspiram-se nos princípios constitucionais e na LDB, do regimento escolar, do sistema de avaliação, da gestão democrática e da organização da escola, na formação inicial e continuada do professor. No Art. 15, item 2 - tem citado a Matemática, como componentes essenciais para o Ensino Fundamental, sendo que no sexto ano, encontramos os conteudos a serem ministrados por bimestre, ou seja, no 1º bimestre temos os respectivos conteúdos: Sistema de Numeração Decimal; Operações Fundamentais; Expressão numérica em $\mathbb{N}$; Potenciação; Radiciação; Múltiplos e Divisores e Critérios de Divisibilidade. Já no 2º bimestre encontramos nas diretrizes, os conteúdos dos números primos, fatoração para descobrir m.m.c. - mínimo múltiplo comum e m.d.c. - máximo divisor comun). No que se refere aos conteúdos para o 7º ano é abordado os conteudos ligados a aritmética, tais como: Números inteiros (adição e subtração); Números inteiros (adição e subtração); Números inteiros (multiplicação e divisão). Exigindo do professor e do aluno um pouco mais da questão didática, pois os conteúdos refere-se a matemática abstrata ou contextualizada nesta fase.

Diante do fator dos cursos de licenciatura em Matemática estarem formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação Matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática. Temos com análise nos documentos acima que o licenciado precisará encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação, pois a Educação Básica exigirá o rigor destas ciências em sala. Podendo assim beneficiar o aprendizado do conteúdo citado acima.

citando alguns exemplos de exercícios que são abordados no Ensino Fundamental.

Exemplo 4.0.1. *Na prova final de um torneio de* montain bike, $\frac{1}{4}$ *dos 32 ciclistas são convidados. Quantos ciclistas foram convidados?* Solução:

Para responder a esta pergunta, cria-se algumas variáveis, tais como:

1 - *32 ciclistas correspondem a um inteiro;*

2 - $\frac{1}{4}$ *correspondem à quarta parte do inteiro, ou seja, à quarta parte de 32. Dividindo os ciclistas em quatro partes iguais, temos, na prática*

$$32.\frac{1}{4} = 8$$

Ao invés de entrar com o conceito do Algoritmo de Euclides, no sexto ano, utiliza-se a *Relação Fundamental da Divisão*:

$$dividendo = quociente \bullet divisor + resto$$

ressaltando que o resto é sempre menor que o divisor.

Exemplo 4.0.2. *André precisa transportar 115 estudantes ate o museu. Em cada viagem, ele pode levar, no máximo 8 pessoas. Qual é o menor número de viagens que André terá que fazer para levar todos os estudantes?*

$$\begin{array}{r|l} 115 & 8 \\ \hline & 14 \\ 3 & \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{r|l} Dividendo & Divisor \\ \hline & Quociente \\ Resto & \end{array}$$

A linguagem nesta fase e bem elementar, não necessitando de mecanismos algébricos para solução, mas sim o conhecimento do Algoritmo de Euclides. Mesmo na abordagem dos critérios de divisibilidade, nota-se o apenas o uso do Algoritmo e a valorização do **resto**.

A *priori* o uso da linguagem para **múltiplos** vem vinculada a linguagem **sequência**. Conhecendo os critérios de divisibilidade, e os múltiplos de um número natural, fica mais claro, conhecer os divisores de um número natural.

Exemplo 4.0.3. *Maria Eduarda quer acomodar seus 18 livros novos em uma estante. Quantas prateleiras serão necessárias para acomodar esses livros de modo que fique sempre a mesma quantidade de livros em cada prateleira?* Solução:

$Prateleiras$	$N^o deLivros$
1	18
2	9
3	6
6	3
9	2
18	1

Dizemos que os números 1, 2, 3, 6, 9 e 18 são os **divisores** de 18.
Observações:

1 - O Zero não é divisor de nenhum número natural;

2 - Todo número natural tem como divisor o número 1;

3 - Todo número natural diferente de zero tem como divisor ele mesmo.

A palavra `números` para os gregos sempre se referia ao que chamamos números naturais - os inteiros positivos. Euclides em seu livro VII ja comentava com duas proposições que constituem a célebre regra na teoria dos números, hoje conhecida como *Algoritmo de Euclides* para achar o máximo divisor comum de dois numeros. Já o livro IX sobre *teoria dos números*, ja tinha vários teoremas interessantes: *"números primos são mais do que qualquer quantidade fixada de números primos"*, isto é, Euclides dá aqui a prova elementar bem conhecida do fato que há infinitos números primos.

Nos estudos realizados a linguagem usada para a Educação Básica remete que: *Há números naturais maiores que 1 que têm apenas dois divisores naturais distintos: o número 1 e o próprio número*, esses números são chamados de **números primos**. Caso o número tenha mais de dois divisores são chamados de **números compostos**.

Decompor um número em fatores primos e uma processo que requer muito conhecimento dos números primos, veja: Vamos decompor o numero 60.

$$60 = 12.5$$

$$60 = 2.6.5$$

$$60 = 2.3.2.5$$

Deve-se ressaltar que na Grécia antiga a palavra aritmética significa Teoria dos Números, que tinha mais em comum com a filosófia que com o que consideramos como matemática. A adição e a multiplicação eram efetuadas na Índia de modo muito semelhante ao que usamos hoje

Para a abordagem do mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum, vamos dar um outro exemplo de como e feito no ensino fundamental.

Exemplo 4.0.4. *Paulo tem vários DVDs, sendo 15 filmes de suspense e 20 de comédia. Ele quer organizá-los em gavetas sem misturar os gêneros e ocupando a menor quantidade de gavetas. Cada gaveta deverá ter o mesmo número de DVDs. Quantos DVDs Paulo devera colocar em cada gaveta?* Solução:

$$\begin{array}{c|cc}
15,20 & 2 & \\
15,10 & 2 & \\
15,5 & 3 & \\
5,5 & 5 & \rightarrow Comum\ a\ ambos \Rightarrow m.d.c \\
1,1 & & \\
 & 2.2.3.5 = 60 & \Rightarrow m.m.c
\end{array}$$

A partir destes exemplos nota-se que a linguagem já nao utiliza-se mais do Algoritmo de Euclides, pelo que foi observado dificultando a análise dos restos, ou seja, nas frações usa-se o método de que a fração e não inteira, logo temos os números com vírgula. Disto podemos dizer que os elementos da álgebra aritmética são números, e suas operações as da aritmética, enquanto a álgebra simbólica é uma ciência que olha somente as combinações de sinais e símbolos de acordo com certas leis.

Somente no 7º ano que é inserido o conceito de números negativos, ou seja, números inteiros: Adição, subtração, multiplicação e suas propriedades e Divisão. No 8º e 9º ano as abstrações dos contéudos já estão em um nível mais elevado e mesmo assim, deixa de usar o conceito dos restos. Visto que foram retirados alguns exemplos dos livros didáticos e como consequencia foi feito uma análise minuciosa dos conteúdos ali inseridos, reforçou a tese de que os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.

Para encerrar minhas considerações finais irei parafrasear as palavras de Newton quando escreve a Hooke: *Se eu enxerguei mais longe que Descartes e porque me sustentei sobre os ombros de gigantes.*

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Edgard Blucher. 1996.

[2] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral.

[3] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

[4] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília:MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

[5] Currículo de referência de Mato Grosso do Sul: educação infantil e ensino fundamental / Organizadores Helio Queiroz Daher; Kalícia de Brito França; Manuelina Martins da Silva Arantes Cabral. Campo Grande : SED, 2019.

[6] CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO CÂMARA DE EDUCAÇÃO SUPERIOR RESOLUÇÃO CNE/CES 3, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2003. Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática.

[7] D´AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte**. UNICAMP. São Paulo. 1993.

[8] Gatti, Bernadete Angelina II. Barreto, Elba Siqueira de Sá. **Professores do Brasil: impasses e desafios**. Brasília: UNESCO, 2009.

[9] LDB: Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Brasília : Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017. Conteúdo: Leis de diretrizes e bases da educação

nacional, Lei no 9.394/1996. Lei no 4.024/1961. 1. Educação, legislação, Brasil. 2. Educação e Estado, Brasil. 3. Política educacional, Brasil.

[10] Mori, Iracema: Matemática: Ideias e Desafios, 7º ano/ Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga - 15ª ed. reformulada - São Paulo: Saraiva, 2009.

[11] Projeto Araribá: matemática organizadora - Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; Editor responsável Fábio Martins de Leonardo. 8º ano - 3ª ed. - São Paulo. Moderna 2010.

[12] Projeto Araribá: matemática organizadora - Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; Editor responsável Fábio Martins de Leonardo. - 3ª ed. - São Paulo. Moderna 2010.

[13] Paiva, Manoel: Matemática, volume único/ Manoel Paiva - 1ª ed. - São Paulo: Moderna 2005