Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Probabilidade no Ensino Médio

Gilberto Fernandes do Nascimento

Natal, 02 de Agosto de 2013

Gilberto Fernandes do Nascimento

Probabilidade no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador:
Prof^{o}. Dr^{o}. Fagner Lemos de Santana

Natal, 02 de Agosto de 2013

Gilberto Fernandes do Nascimento

Probabilidade no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^o. Dr^o. Fagner Lemos de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira -
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes
Depatamento de Matemática - UFCG
Examinador Externo

Dedicatória

Aos meus pais José Humberto Fernandes e Izabel do Nascimento Fernandes que me orientaram com todo esforço e sabedoria para que sempre que possível procurar novos conhecimentos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao nosso maravilhoso DEUS.

Aos idealizadores deste revolucionário programa - PROFMAT.

A todos os meus Professores da UFRN, em especial, ao meu Professor Orientador Fagner Lemos de Santana que como professor e também como orientador sempre se mostrou acessível e disposto a tirar minhas dúvidas e a nossa coordenadora Viviane Simioli Medeiros Campos que sempre nos deu muita força nos momentos mais difíceis desta caminhada.

Aos meus colegas mestrandos da UFRN que cada um ao seu modo também contribuíram para esta minha conquista, em especial a Nilson Hermínio Nicácio sinômino de humildade e dedicação para com os outros.

Ao Professor Carlos Gomes, que com muita dedicação não mediu esforço para ministrar aulas extras e que nos incentivou muito para prosseguirmos.

Finalmente, agradeço aos meus Pais José Humberto Fernandes e Izabel do Nascimento Fernandes, a minha esposa, Ireuda Pereira Bessa, aos meus filhos, Djalma da Silva Pereira Neto, João Matheus Bessa Fernandes e Maria Isabel Bessa Fernandes e aos meus irmãos Gilmar Fernandes do Nascimento, Gildemar Fernandes do Nascimento e Jean Fernandes do Nascimento que tiveram paciência e compreensão por todas as horas em que abdiquei do conforto e da sempre agradável companhia de vocês para dedicar-me aos estudos requeridos por este mestrado.

Resumo

Esta dissertação busca mostrar para docentes e discentes no processo de ensino e aprendizagem um estudo sobre Probabilidade no ensino médio, um tema que aguça a percepção e o entendimento dos fenômenos de natureza aleatória que nos cerca. A mesma tem por objetivo fazer com que as pessoas que estejam envolvidas neste processo compreendam as idéias básicas de Probabilidade e, quando necessário, possam aplicá-las no mundo real. Procuramos traçar um paralelo entre a intuição e o rigor e esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e para o processo de aprendizagem dos alunos, solidificando, aprofundando e ampliando o que aprenderam em conteúdos anteriores.

Palavras-chave: Probabilidade no Ensino Médio; Ensino; Demonstrações.

Abstract

This thesis aims to show teachers and students in teaching and learning in a study of Probability High School, a subject that sharpens the perception and understanding of the phenomea of the random nature that surrounds us. The same aims do with people who are involved in this process understand basic ideas of probability and, when necessary, apply them in the real world. We seek to draw a matched between intuition and rigor and hope therebyto contribute to the work of the teacher in the classroom and the learning process of students, consolidating, deepening and expaning what they have learned in previous contents.

Keywords: Probability in high school; teaching; demonstrations.

Sumário

Introdução

No nosso cotidiano existem dois tipos de fenômenos: os determinísticos e os aleatórios. Os primeiros são aqueles que quando repetidos sob as mesmas condições apresentam os mesmos resultados, por exemplo, a água aquecida a $100°C$, sob pressão normal, entra em ebulição. Já os outros quando repetidos sob condições semelhantes podem apresentar resultados diferentes. Por exemplo, no lançamento de um dado, não podemos afirmar qual vai ser a face voltada para cima. Nestes casos, o máximo que podemos fazer é analisar quais as chances de um resultado ocorrer. É daí que surge a teoria da probabilidade, a qual é uma teoria matemática que pode ser usada para estudar os fenômenos aleatórios. A ideia de probabilidade está muito presente na vida das pessoas, sejam elas estudiosas do assunto ou leigas. Em geral as pessoas descrevem a chance de que algo ocorra através de um número chamado de probabilidade. É comum encontrarmos pessoas discutindo sobre as chances de ganhar em uma loteria, de uma criança que vai nascer ser do sexo feminino ou do sexo masculino, que determinado candidato venha a ganhar uma eleição no primeiro ou segundo turno, a chance de um dos vinte times venha a ser campeão da série A do campeonato brasileiro. É claro que a grande maioria dessas pessoas discutem sobre esse assunto através do senso comum, pois nunca estudaram a teoria das probabilidades. Estas pessoas chegam muitas vezes, a conclusões errôneas a respeito de questões que seriam simples, caso elas tivessem conhecimento da teoria da probabilidade. Vemos a seguir alguns exemplos de problemas em que isto poderia acontecer.

1. O que é mais provável: Lançar uma moeda honesta e a face voltada para cima ser cara ou em uma sala de aula com 25 alunos existirem dois alunos que fazem aniversário no mesmo dia do ano? (considere o ano com 365 dias). Apesar da grande maioria das pessoas acharem que a probabilidade de ocorrer cara é maior, podemos provar de forma simples que isto não é verdade.

2. Uma prova foi elaborada com 15 questões objetivas e cada uma com 4 alternativas, onde apenas uma delas é correta. Compare as probabilidades:

a)acertar na mega sena com uma aposta simples.

b)acertar as 15 questões da prova no chute.

A mega sena é a loteria mais popular aqui no Brasil, devido ao valor pago aos ganhadores. Como muitas pessoas jogam e no bilhete da mesma tem a probabilidade de acerto com uma aposta simples que é de exatamente 1 para 50.063.860, essas pessoas irão achar que acertar as 15 questões é muito mais fácil, mas isso não é verdade e como vamos ver mais adiante a probabilidade de acertar as 15 questões no chute é bem menor.

3. Em um programa de auditório, um participante tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas há como prêmio um camaro zero quilômetro e atrás das outras duas há uma galinha da índia. O participante escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não escolhidas pelo participante, mostrando uma galinha da índia. Neste momento, o apresentador pergunta se o participante mantém a sua escolha ou se deseja trocar de porta. Pensando em aumentar suas chances de ganhar o carro, o participante deve ou não trocar de porta?

   Percebemos que as pessoas quando leem esse problema acham que tanto faz, pois sobram duas portas e com isso a chance continuaria a mesma, mudando ou não de porta. Adiante vamos mostrar que as chances mudam.

   Este problema ficou conhecido como problema de Monty Hall, devido ao apresentador norte-americano Monty Hall em seu programa de TV tinha um quadro exatamente como o descrito no problema.[1]

4. Suponha que existam três cofres, cada um com duas gavetas. O primeiro tem uma moeda de ouro em cada gaveta, o segundo tem uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra e o terceiro tem uma moeda de prata em cada gaveta. Escolhe-se um cofre ao acaso e escolhe-se uma gaveta. Se a gaveta contém uma moeda de ouro, qual a probabilidade de que a outra gaveta contenha também uma moeda de ouro?

COFRE 1	COFRE 2	COFRE 3
ouro	ouro	prata
ouro	prata	prata

[1]fonte:http://www.wikipedea.org, acessado em 20 de Janeiro de 2013.

Até mesmo pessoas que estudam probabilidade quando leem este problema de forma um pouco desatenta, de imediato afirmam que a probabilidade é de $\frac{1}{3}$, ou seja, acham que a resposta é igual a probabilidade de simplesmente escolher o cofre 1, o que vamos mostrar que também não é verdade.

Neste trabalho, procuramos apresentar a teoria das probabilidades do modo mais formal possível para ser trabalhado no ensino médio. O objetivo deste trabalho é ser uma referência sobre o assunto para que o professor, com sua leitura, possa conhecer de maneira satisfatória o tema. Em algumas turmas, este texto poderá ser utilizado diretamente como livro-texto pelos alunos. As referências usadas na parte teórica deste trabalho foram [3],[5],[6] e [7]. Alguns exemplos simples apresentados no decorrer do trabalho foram extraídos de livros do ensino médio, tais como [1] e [4]. Como pré-requisito o leitor já deve ter visto um pouco de Análise Combinatória. Para o estudo deste tema sugerimos [3] e [8].

Um pouco de história

A necessidade pela Teoria das Probabilidades surgiu nos primórdios de nossa civilização através dos jogos de azar, onde buscava-se conhecer as chances de vitória dos jogadores. Porém, enquanto teoria matemática, a probabilidade surgiu a partir das correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat nas quais eles tentavam resolver o problema da divisão das apostas. Este problema tem o seguinte enunciado: "Num jogo entre duas equipes, as apostas somaram 22 ducados e são necessários 6 pontos para que uma delas seja vencedora. Sendo o jogo interrompido quando uma equipe tem 5 pontos e a outra 3, como se dividir as apostas entre as duas equipes?" Alguns estudiosos da época chegaram a conclusões erradas a respeito deste problema. Pacioli, por exemplo, respondeu erradamente que as apostas deveriam ser divididas na razão 5 : 3, ou seja, razão entre os pontos feitos. Depois de mais de um século e meio da publicação do mesmo é que Pascal e Fermat, trocando correspondências, conseguiram chegar a uma solução correta. Utilizando caminhos diferentes, baseados em idéias que seriam a base da teoria da probabilidade eles concluíram que as apostas deveriam ser divididas na razão 11 : 5(razão entre as probabilidades que cada equipe tinha de ganhar). Estas correspondências são consideradas o inicio da moderna Teoria das Probabilidades. Pierre Simon de Laplace, assim falou:

> "É notável que uma matéria que nasceu das considerações sobre jogos de azar tivesse se elevado ao nível das mais importantes realizações do Espírito Humano"

Os fenômenos aleatórios em estudo variam em complexidade matemática, mas todos são capazes de oferecer os ingredientes e as informações básicas para que possamos utilizar no ensino médio e de maneira satisfatória a Teoria das Probabilidades.

Capítulo 1

Relembrando Análise combinatória

No Ensino Médio o estudo de análise combinatória está resumido a resolver problemas que envolvem o Princípio multiplicativo ou Princípio fundamental da contagem, Arranjo, Combinação e Permutação. Abaixo, faremos um breve resumo destes temas. Para maiores detalhes sobre Análise Combinatória, recomendamos a leitura de [9].

1.1 Princípio multiplicativo ou Princípio fundamental da contagem

Vamos supor uma sequência ordenada formada por k termos, $(a_1, a - 2, a_3, ..., a_k)$.

a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas.

a_2 pode ser escolhido de n_2 maneiras distintas, a partir de cada uma das possibilidades anteriores.

a_3 pode ser escolhido de n_3 maneiras distintas, a partir de cada uma das escolhas anteriores.

a_k pode ser escolhido de n_k maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para se construir a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ é:

$$n_1 n_2 ... n_k.$$

Vamos explicar como obter esse número no caso em que $k = 3$. Considere que o número de maneiras de construir a sequência (a_1, a_2) é x. Para cada escolha de (a_1, a_2) existem n_3 maneiras de escolher a_3. Sendo assim, o número total de maneiras de construir (a_1, a_2, a_3) é xn_3. Assim, basta-nos conhecer x, que é o número de maneiras de construir (a_1, a_2). Como para cada escolha de a_1 temos n_2 maneiras de escolher a_2 e existem n_1 maneiras de escolher a_1, então $x = n_1 n_2$.

Exemplo 1.1.1. *Uma moça possui* 5 *blusas e* 6 *saias. De quantas maneiras ela pode escolher uma blusa e uma saia?*

Aqui, as possibilidades de escolher a blusa são 5, logo $n_1 = 5$ e as possibilidades de escolher a saia são 6, logo $n_2 = 6$, portanto o total de maneiras de escolher uma blusa e uma saia é $5.6 = 30$.

1.2 Permutação Simples

Um permutação simples de n objetos distintos é uma maneira de ordenar estes n objetos, ou seja, você quer construir uma sequência com n termos escolhidos dentre os n objetos disponíveis, sem repetição. Desta forma, para a primeira escolha, temos n possibilidades. Para a segunda escolha, temos $n-1$ possibilidades, pois um dos objetos já foi escolhido. Seguindo desta forma e usando o princípio multiplicativo, temos que o número total de permutações simples de n (P_n) objetos é:

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)...3.2.1$$

Exemplo 1.2.1. *Com os algarismos* 1, 4, 5 *e* 7, *quantos números com* 4 *algarismos distintos podemos formar?*

Vamos escolher 4 algarismos entre os 4 disponívies. Então a quantidade de números é dada por $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

1.3 Arranjo Simples

Uma sequência ordenada com k termos distintos escolhidos entre os n elementos distintos de um conjunto, com $k \leq n$ é chamada arranjo simples. O número de sequências deste tipo é chamado de arranjo de "n k a k". A notação usada para o número de arranjos é $A_{n,k}$. Temos que:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

De fato, estamos construindo uma sequência com k termos, sem repetição, escolhidos dentre n elementos distintos. Assim, para escolher o primeiro termo, temos n possibilidades. Para o segundo, temos $n-1$ possibilidades, pois um dos elementos já foi escolhido e assim por diante. A diferença entre arranjo e permutação é que a sequência aqui tem apenas k termos, logo o número de arranjos será $n(n-1)...(n-(k-1))$, que é igual a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Exemplo 1.3.1. *Nos jogos Olímpicos de* 2004*, em Atenas, as quatro seleções semifinalistas do voleibol feminino foram: Brasil, China, Cuba e Rússia. De quantas meneiras distintas poderia ter sido definido o pódio?*

O pódio vai ser formado por 3 seleções, que irão ganhar as medalhas de ouro, prata e bronze e temos 4 quatro seleções na disputa. Então $n = 4$ e $k = 3$, e o total de maneiras que esse pódio será formado é dado $A_(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

1.4 Combinação Simples

A combinação simples de n elementos tomados k a k é o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos, onde $k \leq n$. A notação usada é $\binom{n}{k}$ e temos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

De fato, considere todos os arranjos com k termos formados com os n elementos do conjunto. Para cada escolha dos k elementos que formarão o arranjo, existem $k!$ (número de permutações de k elementos) arranjos com estes elementos. Como estamos interessados na quantidade de subconjuntos com k elementos, então a ordenação destes elementos não importa, logo:

$$\binom{n}{k} = \frac{A_{n,k}}{k!}.$$

Exemplo 1.4.1. *Para servir em seu aniversário a aniversariante deve escolher* 3 *sabores entre as tortas de limão, Morango, chocolate e abacaxi. De quantas maneiras distintas esta escolha pode ser feita?*

A aniversariante vai escolher 3 sabores de torta entre os 4 sabores disponíveis. Então $n = 4$ e $k = 3$, e o total de maneiras desta escolha é dado por $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!.(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{24}{6} = 4$

Capítulo 2

Espaço de Probabilidade

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos básicos da Teoria das Probabilidades.

2.1 Espaço Amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório recebe o nome de espaço amostral e será representado por Ω. Em geral, o conjunto dos possíveis resultados de um experimento aleatório é, digamos, também aleatório, ou seja, não conseguimos expressá-lo com exatidão. Por exemplo, se o experimento consiste em escolher ao acaso um habitante da cidade de Natal e medir sua altura. Para descobrir todos os resultados possíveis deveríamos conhecer as alturas todos os habitantes da cidade, o que é inviável. Sendo assim, é conveniente dizer que espaço amostral é um conjunto que contém o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Por exemplo, neste caso da altura, poderíamos escolher $\Omega = (0, 5)$ metros, ou seja, o conjunto dos números maiores que 0 e menores que 5. É claro que, com isso, para cada experimento aleatório existirão infinitos conjuntos que servem de espaço amostral, mas isso não é um problema, já que a própria escolha do espaço amostral faz parte da modelagem do experimento aleatório. Outro exemplo que podemos ver é do lançamento de um dado comum equilibrado da face que fica voltada para cima. Neste caso o espaço amostral para tal experimento é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e este é exatamente o conjunto de todos os resultados possíveis. Como vemos a seguir em um grande número de problemas vamos precisar determinar a quantidade de elementos do espaço amostral e para isso vamos recorrer a análise combinatória assunto exigido como pré-requisito para o estudo desta teoria.

2.2 σ-Álgebra

Definição 2.2.1. *Uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre um conjunto Ω é uma coleção de subconjuntos de Ω, a qual é fechada sobre operações contáveis de união, interseção e complemento de conjuntos. De uma maneira formal, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra quando possui as seguintes propriedades:*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) Se $X \in \mathcal{A}$, *então* $X^c \in \mathcal{A}$.

iii) Se $X_1, X_2, X_3, \ldots \in \mathcal{A}$, *então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{A}$.

A noção de σ-álgebra é fundamental para a construção da teoria da probabilidade. Por tratar-se de um conceito avançado para o ensino médio, vamos evitá-lo considerando em todos os casos para os quais uma σ-álgebra é necessária, o conjunto das partes de Ω, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω, o qual será denotado por $\mathcal{P}(\Omega)$. O conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ é uma σ-álgebra qualquer que seja o conjunto Ω. De fato, dado um conjunto não-vazio Ω, temos que Ω é subconjunto de Ω, ou seja, $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$, se $X \in \mathcal{P}(\Omega)$, ou seja, X é subconjunto de Ω, então o conjunto $X^c = \Omega - X$ que é o conjunto de todos os elementos de Ω que não estão em X é claramente um subconjunto de Ω, ou seja, $X^c \in \mathcal{P}(\Omega)$ e, finalmente, se $X_1, X_2, X_3, \cdots \in \mathcal{P}(\Omega)$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ também deve ser um subconjunto de Ω, pois dado um elemento x desta união, temos que x deve pertencer a pelo menos um dos conjuntos X_n, o qual é subconjunto de Ω, logo x deve estar em Ω, ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Para mais detalhes sobre σ-Álgebra veja [6].

Exemplo 2.2.1. *Podemos analisar o experimento aleatório lançamento de uma moeda honesta. Nosso espaço amostral, $\Omega = \{k, c\}$, k é cara e c é coroa, o conjunto das partes de ω é $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{k\}, \{c\}, \{k, c\}, \emptyset\}$.*

Assim podemos ver que $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\{k\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ e seu complemento $\{c\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ e que a união de todos os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ é igual a Ω. Com isso concluimos que $\mathcal{P}(\Omega)$ é uma σ-álgebra.

2.3 Definição de Probabilidade

Aqui, vamos apresentar a definição axiomática de probabilidade. De acordo com as construções feitas até aqui, a probabilidade será uma função que serve para medir os conjuntos de uma σ-álgebra de subconjuntos de um espaço amostral Ω.

Definição 2.3.1. *Dados um espaço amostral(conjunto não-vazio) Ω e uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, uma função $P : A \to [0,1]$ é uma probabilidade quando satisfaz:*

i) $P(\Omega) = 1$

ii)Se $X_1, X_2, X_3, \cdots \in \mathcal{A}$*, são conjuntos dois a dois disjuntos, então* $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n)$.

Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, onde Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em $\mathcal{A}$, e este espaço vai ser considerado neste trabalho como sendo um modelo matemático que descreve os fenômenos aleatórios. Como a idéia deste trabalho é servir de guia para um professor do ensino médio, vamos considerar apenas experimentos nos quais Ω é um conjunto finito. Além disso, como já foi mencionado, a σ-álgebra a ser usada será sempre o conjunto das partes de Ω, ou seja, $\mathcal{P}(\Omega)$. Com isso podemos considerar a seguinte definição simplificada de probabilidade:

Definição 2.3.2. *Dados um conjunto finito e não-vazio Ω, uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ é uma probabilidade quando satisfaz:*

i)$\mathcal{P}(\Omega) = 1$

ii)Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *e* $A \cap B = \emptyset$*, então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Uma função que é uma probabilidade de acordo com a definição simplificada é uma probabilidade de acordo com a definição geral. De fato, apenas a condição ii) da definição simplificada difere da condição ii) da definição geral. Como na definição simplificada estamos considerando apenas conjuntos Ω finitos, então dados uma coleção infinita de subconjuntos de Ω dois a dois disjuntos de A_1, A_2, ..., teríamos que apenas uma quantidade finita deles seriam não-vazios, logo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$$

assim,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Na última passagem, usamos o fato de $P(\emptyset) = 0$, o qual é uma consequÊncia imediata da definição, pois podemos escrever $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ e esta união é disjunta, logo $P(\Omega) = P(\Omega) + P\emptyset) \Rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2.3.1. *Se Ω é finito e $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$, então dados $p_1, p_2, p_3, ...p_n \in [0, 1]$ tais que $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$, então existe uma única probabilidade tal que $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ tal que $p(\{a_i\}) = P_i$.*

Se $A \subset \Omega$ e $a_i \in A$, $P(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$.

Demonstração. Sejam $P, P^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, probabilidades tais $P(\{a_1\}) = p_1 = P^*(\{a_1\})$, $P(\{a_2\}) = p_2 = P^*(\{a_2\})$, $P(\{a_n\}) = p_n = P^*(\{a_n\})$. Dado $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, temos que $A = \bigcup_{a_i \in A}\{a_i\}$ e esta união é disjunta, logo:

$$P(A) = P(\bigcup_{a_i \in A}\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

e

$$P^*(A) = P^*(\bigcup_{a_i \in A}\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} P^*(\{a_i\}) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

logo,

$$P(A) = P^*(A)$$

Como $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, ω qualquer, temos que a imagem de duas funções coincidem com todos os pontos de seus domínios portanto,

$$P = P^*$$

. □

O teorema acima nos diz que para conhecermos uma função probabilidade completamente, no caso de um espaço amostral finito, basta conhecer $P(\{a\})$ para cada $a \in \Omega$.

Exemplo 2.3.1. *Seja Ω um conjunto finito. A função $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ dada por $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ é uma probabilidade? De fato, as duas primeiras condições são imediatas.*

Para a 3^a, tome $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $A \cap B = \emptyset$. temos que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} \\ &= \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} \\ &= \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Acima usamos o princípio aditivo que diz que o número de elementos da união de dois conjuntos finitos e disjuntos é a soma dos números dos elementos de cada um.

O espaço de probabilidade apresentado no exemplo acima é chamado espaço equiprovável, devido ao fato de que se $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, então $P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$, qualquer que seja o $i \in \{1, 2, ..., n\}$, ou seja, cada elemento do espaço amostral possui a mesma probabilidade. Em muito livros do ensino médio, o exemplo acima é colocado como definição de probabilidade. Isso restringe muito a capacidade para modelar fenômenos aleatórios desta teoria. Em muitos casos, considerar que os elementos de Ω são equiprováveis constitui um erro que leva a conclusões muito equivocadas. No exemplo abaixo, vamos calcular as probabilidades pedidas considerando que o espaço de probabilidade em questão é o equiprovável. No final, faremos um comentário sobre o porque deste procedimento ser equivocado.

Exemplo 2.3.2. *Um campeonato de fórmula 1 vai ser disputado por 12 pilotos dos quais apenas 3 são brasileiros. Encontre cada uma das probabilidades abaixo:*

a)Qual a probabilidade de termos um brasileiro campeão?

Primeiro vamos determinar o espaço amostral referente a este experimento, que é o conjunto

$$\Omega = \{b_1, b_2, b_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

onde b_1, b_2, b_3 são os brasileiros. Note que $\#\Omega = 12$ O evento E_1 é ter um brasileiro campeão, logo $E_1 = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $\#E_1 = 3$. A probabilidade é:

$$P(E_1) = \frac{\#E_1}{\#\Omega} = \frac{3}{12} = 0,25$$

b)Qual a probabilidade de termos um estrangeiro campeão?

Novamente, o número de casos possíveis é

$$\#\Omega = 12$$

Queremos encontrar a probabilidade do evento

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\},$$

ou seja a probabilidade de um estrangeiro ser campeão. Como $\#E_2 = 9$*, então*

$$P(E_2) = \frac{\#E_2}{\#\Omega} = \frac{9}{12} = 0,75$$

Esta probabilidade também poderia ter sido encontrada da seguinte forma:

$$P(E_1) + P(E_2) = 1 \Rightarrow P(E_2) = 1 - P(E_1) \Rightarrow P(E_2) = 1 - 0,25 \Rightarrow P(E_2) = 0,75$$

Apesar de tratarmos este exemplo como sendo equiprovável, na prática isto não é verdade, pois sabemos que para um piloto ser campeão fatores como habilidade na pista, motor do carro e a equipe pela qual estão competindo devem ser levado em conta, e ao considerar que todos tem a mesma probabilidade de serem campeão estamos cometendo um erro de avaliação.

2.4 Propriedades da Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ um espaço de probabilidade.

i)$P(E^c) = 1 - P(E)$: Temos que $E^c = \Omega - E$, assim E e E^c são eventos disjuntos, logo:

$$P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c).$$

Como,

$$E \cup E^c = \Omega$$

temos:

$$P(E \cup E^c) = P(\Omega) = 1$$

$$P(E) + P(E^c) = 1 \Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$$

ii)Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$:

Note que se $A \subset B$, então $B = A \cup (B - A)$, E que A e $B - A$ são eventos disjuntos, logo:

$$P(B) = P[A \cup (B - A)]$$

então,

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

logo,

$$P(A) \leq P(B),$$

pois $P(B - A) \geq 0$.

iii)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

Temos que

$$A \cup B = (A - B) \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B],$$

como $(A - B)$ e B são eventos mutuamente exclusivos, temos:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

mas

$$A = (A \cap B) \cup (A - B)$$

como $A \cap B$ e $A - B$ são eventos mutuamente excluisvos então,

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A - B)] \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$

logo,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

com isso,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

iv)$P(\emptyset) = 0$:

Temos que $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ e Ω e $\emptyset$ são eventos disjuntos, logo

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) \Rightarrow P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow 1 + P(\emptyset) = 1$$

portanto,

$$P(\emptyset) = 0$$

2.5 Classificação dos Eventos

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alguns eventos recebem um certo destaque. Abaixo, listamos alguns:

i)Evento Certo - Quando o evento tem probabilidade 1.

Exemplo 2.5.1. *No lançamento de um dado, qual a probabilidade de que a face que fica voltada para cima seja um número menor que* 7*?*

O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e o evento "ocorrer um número menor que* 7*" é* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, logo* $\Omega = E$*, e* $P(E) = 1$.

ii)Evento Impossível - Quando o evento possui probabilidade 0.

Exemplo 2.5.2. *No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de que a soma das faces que ficam voltadas para cima seja igual* 15*?*

Quando lançamos dois dados a soma das faces podem variar de 2 *a* 12*, logo nosso espaço amostral é,* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *e o evento "ocorrer uma soma igual a* 15*" é* $E = \emptyset$*, portanto* $P(E) = 0$.

iii)Eventos Complementares - Dois eventos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$ são complementares quando, $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 2.5.3. *No lançamento de dois dados honestos a soma das faces voltadas para cima é observada. Considere dois eventos,* $A = \{resultadodasomadasfacesserpar\}$ *e* $B = \{resultadodasomadasfacessermpar\}$*. O espaço amostral é* $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ *sendo o evento* $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ *e o* $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$*, como podemos ver* $A \cup B = \Omega$ *e* $A \cap B = \emptyset$ *,ou seja, estes eventos são complementares.*

2.6 Alguns exemplos

A seguir, alguns exemplos.

Exemplo 2.6.1. *Lança-se uma moeda e observa-se a face que fica voltada para cima. O espaço amostral deste experimento é* $\Omega = \{k, c\}$ *onde* k *representa cara e c representa coroa. Considere* $A = \{k\}$*,* $B = \{c\}$ $C = \{k, c\}$ *e* $D = \emptyset$*. Vamos definir a probabilidade por:* $P(A) = \frac{1}{2}$*,* $P(B) = \frac{1}{2}$*. Como podemos ver a probabilidade de ocorrer cara é a mesma de ocorrer coroa, ou seja, temos um espaço equiprovável. Neste caso, costuma-se dizer que a moeda é honesta ou não-viciada.*

Exemplo 2.6.2. *No lançamento de um dado viciado, as probabilidades de ocorrência de cada uma faces são dadas por:* $P(\{1\}) = 0,15$, $P(\{2\}) = p$, $P(\{3\}) = \frac{p}{6}$, $P(\{4\}) = \frac{p}{3}$, $P(\{5\}) = 0,25$ *e* $P(\{6\}) = \frac{p}{2}$.

a)encontre o valor de p.

Neste exemplo, temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Por ii)* $P(\Omega) = 1$ *então podemos afirmar que:*

$$\begin{aligned}
1 &= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&= 0,15 + p + \frac{p}{6} + \frac{p}{3} + 0,25 + \frac{p}{2} \\
&\Rightarrow p + \frac{p}{6} + \frac{p}{3} + \frac{p}{2} = 0,6 \\
&\Rightarrow 6p + p + 2p + 3p = 3,6 \\
&\Rightarrow 12p = 3,6 \\
&\Rightarrow p = 0,3
\end{aligned}$$

b) Qual é a probabilidade de ocorrer face ímpar?

$$\begin{aligned}
P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) &= 0,15 + \frac{p}{6} + 0,25 \\
&= 0,15 + \frac{0,3}{6} + 0,25 \\
&= 0,15 + 0,05 + 0,25 \\
&= 0,45
\end{aligned}$$

c)Qual a probabilidade de ocorrer uma face par? Neste experimento, para $A = \{1, 3, 5\}$ *e* $B = \{2, 4, 6\}$ *temos que* A *e* B *são eventos complementares, logo*

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A),$$

queremos encontrar $P(B)$ *e já sabemos que* $P(A) = 0,45$, *logo*

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = 0,55$$

Exemplo 2.6.3. *Qual a probabilidade de se obter um número primo no lançamento de uma dado honesto?*

Temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *logo* $\#\Omega = 6$. *Este é um experimento equipróvavel(o enunciado nos diz que o dado é honesto) logo todas as faces tem a mesma chance de* *serem obtidas. O evento "ocorrência de um número primo" é* $A = \{2, 3, 5\}$ *e* $\#A = 3$, *logo:*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Também podemos pensar na resolução do seguinte modo: $P(2) = P(3) = P(5) = \frac{1}{6}$, *pois o espaço é equiprovável.*

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2.6.4. *Sejam* A *e* B *pontos extremos de um segmento de reta* $\overline{AB}$ *e* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 *pontos de* $\overline{AB}$*.Sabendo que* $m(\overline{AP_1}) + m(\overline{P_1P_2}) + m(\overline{P_2P_3}) + m(\overline{P_3P_4}) + m(\overline{P_4P_5}) + m(\overline{P_5B}) = m(\overline{AB})$ *onde* m *denota a medida de cada segmento, qual a probabilidade de selecionado ao acaso um ponto pertencente a* AB *que este ponto também pertença a* $\overline{P_1P_2}$*?*

Neste exemplo o espaço de probabilidade é não equiprovável. Aqui, temos o que alguns chamam de probabilidade geométrica, já que o experimento envolve elementos de geometria. Vamos considerar que o espaço amostral é $\Omega = \{\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \overline{P_4P_5}, \overline{P_5P_6}\}$, *onde* $P_0 = A$ *e* $P_6 = B$, *e a probabilidade de que o ponto esteja em um dos segmentos é dada por:*

$$P(P_iP_{i+1}) = \frac{\textit{comprimento } \overline{P_iP_{i+1}}}{\textit{comprimento } \overline{AB}}.$$

Sendo assim, a probabilidade pedida é:

$$P(P_iP_{i+1}) = \frac{\textit{comprimento } \overline{P_1P_2}}{\textit{comprimento } \overline{AB}}.$$

Exemplo 2.6.5. *Uma caixa contém* 6 *bolas vermelhas,* 4 *brancas e* 5 *azuis. Qual a probabilidade de extrairmos ao acaso uma bola da caixa e a mesma ser vermelha ou branca?*

O nosso espaço amostral Ω *será o conjunto de todas as bolas, logo* $\#\Omega = 6 + 4 + 5 = 15$. *Os evento* E_1 *e* E_2, *extrair uma bola vermelha e extrair uma bola branca, respectivamente, são tais que:* $\#E_1 = 6$ *e* $\#E_2 = 4$.. *Como a extração é feita ao acaso, consideraremos que o espaço de probabilidade em questão é o equiprovável. Assim, temos:*

$$P(E_1) = \frac{\#E_1}{\#\Omega} = \frac{6}{15}$$

e

$$P(E_2) = \frac{\#E_2}{\#\Omega} = \frac{4}{15}$$

Mas como $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{6}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Uma outra forma de resolver o problema acima é considerando como espaço amostral o conjunto $\Omega = \{v, b, a\}$ e definir a probabilidade por $P(v) = \frac{6}{15}$, $P(b) = \frac{4}{15}$ e $P(a) = \frac{5}{15}$. Fazendo desta forma, o espaço de probabilidade em questão não é o equiprovável.

Exemplo 2.6.6. *Uma moeda é jogada três vezes. Qual é a probabilidade de se obter:*

a)duas coroas?

Vamos indicar com (c)coroa e com (k)cara. O espaço amostral Ω para este experimento é o conjunto formado por todas as possibilidades de como as faces poderão ficar voltadas para cima,

$$\Omega = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\},$$

logo $\#\Omega = 8$. Essa quantidade de elementos do espaço amostral poderia ter sido encontrada através do princípio multiplicativo (ver [4] ou [8]), onde para cada moeda jogada temos duas possibilidades logo,

$$\#\Omega = 2.2.2 = 8$$

O evento E_1 é obter duas coroas, ou seja, $E_1 = \{cck, ckc, kcc\}$ e $\#E_1 = 3$ Assim:

$$P(E_1) = \frac{\#E_1}{\#\Omega} = \frac{3}{8} = 0,375$$

b)pelo menos duas caras? O evento E_2 é obter pelo menos duas caras, ou seja, $E_2 = \{ckk, kck, kkc, kkk\}$ e $\#E_2 = 4$ Logo:

$$P(E_2) = \frac{\#E_2}{\#\Omega} = \frac{4}{8} = 0,5$$

Exemplo 2.6.7. *A equipe médica de um hospital é composta de 6 mulheres e 4 homens e cada equipe de plantonistas é formada por 6 pessoas. Qual a probabilidade de*

escolhendo-se aleatoriamente uma dessas equipes, ela tenha o número de mulheres igual ao número de homens?
O nosso espaço amostral Ω *é o conjunto de equipes com* 6 *pessoas que podemos formar: essas equipes podem ter,* 6 *mulheres ou* 5 *mulheres e* 1 *homem ou* 4 *mulheres e* 2 *homens ou* 3 *mulheres e* 3 *homens ou* 2 *mulheres e* 4 *homens. Para calcularmos a quantidade de equipes usaremos combinação quando temos uma equipe formada somente por mulher e combinação com o princípio mutiplicativo quando temos uma equipe formada com homens e mulheres.*

$$\begin{aligned}
\#\Omega &= C_{6;6} + C_{6;5}.C_{4;1} + C_{6;4}.C_{4;2} + C_{6;3}.C_{4;3} + C_{6;2}.C_{4;4} \\
&= 1 + 6.4 + 15.6 + 20.4 + 15.1 \\
&= 1 + 24 + 90 + 80 + 15 \\
&= 210
\end{aligned}$$

O evento E_1*, é o conjunto de equipes que tem o número de mulheres igual ao número de homens. A quantidade de elementos deste conjunto será dada por:*

$$\#E_1 = C_{6;3}.C_{4;3} = 20.4 = 80$$

A probabilidade de ocorrer E_1*, é*

$$P(E_1) = \frac{\#E_1}{\#\Omega} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

Exemplo 2.6.8. *De um baralho de* 52 *cartas tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Qual a probabilidade de que as:*

a)As duas cartas sejam reis?

O nosso espaço amostral Ω *é o conjunto de maneiras que podemos tirar duas cartas* c_1 *e* c_2*. Para calcular esta quantidade, note que para a* 1^a *retirada temos* 52 *possibilidades e para a* 2^a*, como não há reposição temos 51. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:*

$$\#\Omega = 52 \times 51 = 2.652$$

Seja E_1 *o evento "as duas cartas são reis". Como no baralho existem* 4 *reis,* 4 *opções, um de cada naipe para a* 1^a *escolha e* 3 *para a* 2^a*, logo:*

$$\#E_1 = 4 \times 3 = 12$$

A probabilidade de ocorrer E_1 é:

$$P(E_1) = \frac{\#E_1}{\#\Omega} = \frac{12}{2652} = 0,0045$$

b)As duas cartas sejam de paus?

Seja o evento E_2 "as duas cartas são de paus". Como no baralho existem 13 cartas de paus teremos 13 possibilidades para a 1^a escolha e 12 para a 2^a, logo:

$$\#E_2 = 13 \times 12 = 156$$

A probabilidade de ocorrer E_2 é:

$$P(E_2) = \frac{\#E_2}{\#\Omega} = \frac{156}{2652} = 0,0588$$

Exemplo 2.6.9. *Em um programa de auditório, um participante tem diante de si três portas. Atrás de uma dessas portas há como prêmio um camaro zero quilômetro e atrás das outras duas há uma galinha da índia. O participante escolhe inicialmente uma das portas. O apresentador (que sabe qual é a porta que contém o prêmio) abre uma das portas não escolhidas pelo participante, mostrando a galinha da índia. Neste momento, o apresentador pergunta se o participante mantém a sua escolha ou se deseja trocar de porta. Pensando em aumentar suas chances de ganhar o carro, o participante deve ou não trocar de porta?*

Temos três portas, A, B e C, como a escolha de uma das portas é equiprovável, então as probabilidades são iguais, ou seja:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Ao escolher uma porta, a probabilidade do participante ganhar o carro é $\dfrac{1}{3}$ e de ganhar a galinha é $\dfrac{2}{3}$. Como o apresentador abre exatamente a porta que o participante não escolheu e que não contém o prêmio, então o evento "o participante ganha o carro trocando de porta" fica igual ao evento "o participante escolheu uma porta que tinha uma galinha", o qual já vimos ter probabilidade $\frac{2}{3}$. Assim, trocando de porta, a probabilidade de ganhar o carro aumenta.

Capítulo 3

Probabilidade condicional

Neste capítulo, vamos tratar de probabilidade condicional. Começamos com um exemplo que ilustra este conceito.

Exemplo 3.0.10. *No lançamento de dois dados um vermelho e um branco, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos nos dois dados seja menor que* 7*? Depois calcule a mesma probabilidade sabendo que um dos dados teve resultado* 4*.*

O espaço amostral Ω *do experimento é o conjunto dos pares que aparecem na tabela abaixo:*

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Vamos considerar dois eventos A *e* B

A: a soma dos números obtidos seja menor que 7*, ou seja,*

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$$

e

$$\#A = 15.$$

B: sair o número 4 *em pelo menos um dado, ou seja,*

$$B = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\}$$

e

$$\#B = 11.$$

Aqui, vamos considerar $P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$ *pois o espaço é equiprovável. Dessa forma, temos que* $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. *Para encontrar a probabilidade de que a soma das faces seja menor que* 7 *mas sabendo que uma das faces apresentou o número* 4, *é natural imaginar que para este caso o espaço amostral pode ser o evento* B. *Da mesma forma, o evento* A *deve ser modificado, e por um argumento semelhante ao apresentado acima, é conveniente usarmos* $A \cap B$. *Assim, a probabilidade que queremos calcular é:*

$$\frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{4}{11},$$

já que $A \cap B = \{(1,4),(2,4),(4,1),(4,2)\}$. *Este último exemplo motiva a seguinte definição.*

Definição 3.0.1. *Seja* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *um espaço de probabilidade. Dados dois eventos* A *e* B, *com* $P(B) > 0$, *a probabilidade condicional de* A *dado* B *é definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo 3.0.11. *A operadora de turismo BRASTUR fretou um avião que partiu de Porto Alegre no Rio Grande do sul com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com* 150 *passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu duas perguntas e os dados da pesquisa estão na tabela abaixo:*

a)já voou antes? b)já esteve em Natal?

xxxxxxxxxxxxxxx	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	25	40	65
Já conhecia Natal	50	35	85
Total	75	75	150

o guia seleciona uma pessoa ao acaso para ganhar um passeio de buggy, e pergunta se ele já conhecia Natal e ele respondeu que sim. Sabendo disso, qual a probabilidade de ela nunca ter voado?

O espaço amostral Ω *é o conjunto de passageiros e* $\#\Omega = 150$. *Vamos considerar dois eventos* A *"voando pela primeira vez" e* B *"já conhecia Natal". Assim, temos* $\#A = 75$ *e* $\#B = 85$. *Aqui vamos considerar um espaço equipróvavel, pois as pessoas que* *estão no avião tem a mesma probabilidade de ser selecionada. Queremos a probabilidade de A acontecer dado que já aconteceu B, ou seja:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Note que $\#(B \cap A) = 50$. Assim:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{50}{85} \\ &= \frac{50}{85} \\ &= \frac{10}{17} \end{aligned}$$

Exemplo 3.0.12. *Suponha que existam três cofres, cada um com duas gavetas. O primeiro tem uma moeda de ouro em cada gaveta, o segundo tem uma moeda de ouro em uma gaveta e uma moeda de prata na outra e o terceiro tem uma moeda de prata em cada gaveta. Escolhe-se um cofre ao acaso e escolhe-se uma gaveta. Sabendo que a gaveta escolhida contém uma moeda de ouro, qual a probabilidade de que a outra gaveta contenha também uma moeda de ouro?*

COFRE 1	COFRE 2	COFRE 3
ouro	ouro	prata
ouro	prata	prata

Este é um dos problemas mencionados na introdução deste trabalho, e vamos resolvê-lo da seguinte forma: nosso espaço amostral referente a retirada de duas moedas será: $\Omega = \{(o,o),(o,p),(p,o),(p,p)\}$, onde "o"representa a moeda de ouro e "p"a moeda de prata. Este espaço é formado por 4 eventos $A = (o,o)$, $B = (o,p)$, $C = (p,o)$ e $D = (p,p)$ todos disjuntos dois a dois. Cada cofre tem a mesma probabilidade de ser escolhido, logo $P(cofre1) = P(cofre2) = P(cofre3) = \frac{1}{3}$. Se o cofre escolhido for o primeiro estamos escolhendo o evento A, $P(A) = \frac{1}{3}$, se o cofre escolhido for o terceiro estamos escolhendo o evento D, $P(D) = \frac{1}{3}$ e se escolhermos o cofre 2 estamos escolhendo $B \cup C$ e, como $P(B)+P(C) = \frac{1}{3}$, então $P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$. A probabilidade que queremos é $P(A \cup C|A \cup B)$, já que $A \cup C$ contém os elementos de Ω nos quais a moeda na segunda gaveta é de ouro e $A \cup B$ contém os elementos nos quais a 1ª moeda *foi de ouro. Assim,*

$$\begin{aligned}
P(A \cup C|A \cup B) &= \frac{P[(A \cup C) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} \\
&= \frac{P[(A \cup C) \cap B] + P[(A \cup C) \cap A]}{P(A \cup B)} \\
&= \frac{P(\emptyset) + P(A)}{P(B) + P(A)}, \textit{ pois os eventos } A,\ B \textit{ e } C \textit{ são disjuntos} \\
&= \frac{1/3}{1/6 + 1/3} \\
&= \frac{1/3}{1/2} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3.1 Propriedades da Probabilidade Condicional

Sejam $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, um espaço de probabilidade e $B \subset \Omega$ um evento tal que $P(B) > 0$.

i)$P(\emptyset|B) = 0$ - De fato, temos:

$$\begin{aligned}
P(\emptyset|B) &= \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\emptyset)}{P(B)} \\
&= \frac{0}{P(B)} = 0 \\
&\Rightarrow P(\emptyset|B) = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ii)$P(\Omega|B) = 1$ - De fato, temos:

$$\begin{aligned}
P(\Omega|B) &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

iii)Se $A \subset \Omega$, então $0 \leq P(A|B) \leq 1$ - Sabemos que $A \cap B \subset B$, logo das propriedades de probabilidade segue que:

$$\begin{aligned} 0 \leq P(A \cap B) \leq P(B) &\Rightarrow \frac{0}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} \\ &\Rightarrow 0 \leq P(A|B) \leq 1 \end{aligned}$$

iv) Se $A \cap C = \emptyset$, então $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$ - De fato, temos:

$$\begin{aligned} P(A \cup C|B) &= \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)} \quad A \cap B \text{ e } B \cap C \text{ são disjuntos} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A|B) + P(C|B) \end{aligned}$$

Com essas propriedades podemos concluir que se $P(B) > 0$, então $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P^*)$, onde $P^*(A) = P(A|B)$, é um espaço de probabilidade.

3.2 Eventos Independentes

Definição 3.2.1. *Sejam A_1, A_2, A_3,...A_n eventos de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Dizemos que estes eventos são independentes quando:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n)$$

Como consequência imediata da definição, temos que:

i)o conjunto vazio $\emptyset$ é independente de qualquer $A \subset \Omega$.

Sabemos que

$$P(\emptyset) = 0,$$

logo $P(\emptyset)P(A) = 0$. Como,

$$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) = 0$$

segue que,

$$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) = 0 = P(\emptyset)P(A)$$

ii)o espaço amostral Ω é independente de qualquer $A \subset \Omega$.

Sabemos que

$$P(\Omega) = 1$$

logo $P(\Omega)P(A) = P(A)$. Como,

$$P(\Omega \cap A) = P(A)$$

segue que,

$$P(\Omega \cap A) = 1.P(A) = P(\Omega)P(A)$$

No caso em que temos dois eventos independentes A e B com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B)P(A)}{P(A)} \\ &= P(B) \end{aligned}$$

Ou seja, o fato de sabermos que B ocorreu não afeta a probabilidade de A, o que é representado por $P(A|B) = P(A)$. O mesmo ocorre com $P(B|A)$. Isso ilustra bem o porque do nome *eventos independentes*.

Exemplo 3.2.1. *Consideremos um casal que teve três filhos. Sejam os eventos A, pelo menos dois sejam do sexo masculino e B, pelo menos um de cada sexo. Vamos considerar neste exemplo que as chances de nascimento de um filho do sexo masculino é a mesma para um filho do sexo feminino. Verifique se os eventos A e Bsão independentes.*

O espaço amostral é o conjunto

$$\Omega = \{mmm, mmf, mfm, fmm, fff, ffm, fmf, mff\}$$

onde m representa o sexo masculino e f o sexo feminino. Aqui, como trata-se de filhos, os quais obviamente são distintos, vamos considerar que a ordem de nascimento é importante, ou seja, o evento mmf *que signifca que os dois primeiros filhos foram do sexo masculino e o terceiro do feminino é diferente do evento* mfm. *Para calcular* $\#\Omega$, *podemos ver no conjunto ou então pelo princípio multiplicativo, onde para cada nascimento teremos duas possibilidades, logo,* $\#\Omega = 2.2.2 = 8$. *Temos que* $A = \{mmf, mfm, fmm, mmm\}$, *assim* $\#A = 4$, *e:*

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Temos também que $B = \{mmf, mfm, fmm, ffm, fmf, mff\}$, *assim* $\#B = 6$, *logo:*

$$P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Para fazer esta verificação, note que

$$A \cap B = \{mmf, mfm, fmm\},$$

assim e $\#(A \cap B) = 3$ *logo:*

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

Pela definição, dois eventos A e B são independentes quando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. *Como*

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

portanto, A e B são eventos independentes.

Exemplo 3.2.2. *Sendo A e B eventos independentes com* $P(A) = 0,2$ *e* $P(B) = 0,4$, *calcule:*

a)$P(A \cap B)$.

Como os eventos A e B são independentes,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$$

b)$P(A \cup B)$.

Usando as propriedades da probabilidade, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,4 - 0,08 = 0,52$$

Exemplo 3.2.3. *Em uma estante da biblioteca da escola estão* 12 *livros de Matemática,* 7 *livros de Física e* 5 *livros de Química. Um estudante escolhe, sucessivamente e com reposição, dois desses livros. Qual é a probabilidade de que os dois livros escolhidos sejam de Matemática?*

Nosso espaço amostral Ω *é o conjunto formado por todos os livros, logo* $\#\Omega = 24$. *Vamos definir os eventos* M, *escolher um livro de Matemática, logo* $\#M = 12$, F *escolher um livro de Física, logo* $\#F = 7$ *e* Q, *escolher um livro de Química, logo* $\#Q = 5$. *A probabilidade de escolha de cada livro é a mesma, então a probabilidade de escolha de um livro de Matemática é dada por*

$$P(M) = \frac{\#M}{\#\Omega} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2},$$

a probabilidade de escolha de um livro de Física é dada por

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{7}{24},$$

e a probabilidade de escolha de um livro de Química é dada por

$$P(Q) = \frac{5}{24}.$$

Como a escolha é feita com reposição, o fato de escolhermos um livro de Matemática na primeira não muda a probabilidade de escolhermos um livro de Matemática também na segunda, quando isto acontece temos eventos independentes então a probabilidade pedida é

$$P(M \cap M) = P(M)P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

.

Antes de apresentarmos os próximos exemplos, vamos considerar uma sequência de experimentos dois a dois independentes, experimentos estes que o fato de um ter acontecido não afeta a probalilidade do outro acontecer. Em cada uma destas realizações podem ter apenas dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso. Por exemplo: Conformidade dos itens saindo da linha de produção de uma fábrica de roupas “ou” sequência de tiros feita por um atirador para atingir um alvo. Vamos analisar a probabilidade de que em uma sequência de n experimentos como estes tenhamos k sucessos, sabendo que a probabilidade de sucesso em cada experimento é p e a de fracasso é $1 - p = q$. O espaço amostral neste caso é o conjunto de sequências com n termos s ou f (sucesso ou fracasso). Por exemplo se $n = 8$, então $ssfsfssf$ é um resultado possível. Desde que os n experimentos sejam independentes, temos que a probabilidade de cada resultado da sequência de experimentos é $p^k q^{n-k}$, onde k é o número de sucessos do resultado. Como queremos a probabilidade de k sucessos não importando em quais realizações estes sucessos ocorram, então devemos saber, primeiro, de quantas formas podem ocorrer k sucessos em n experimentos, ou seja, quantos são os subconjuntos de $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$ com k elementos. Cada subconjunto de I com k elementos indicará um dos resultados com $k$sucessos. Por exemplo, para $n = 8$ o subconjunto $\{1, 3, 5, 8\}$ representa o resultado $sfsfsffs$. Sabemos, da análise combinatória que esta quantidade de subconjuntos é:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Agora devemos somar as probabilidades de cada um dos $\binom{n}{k}$ resultados com k sucessos. Como todos têm a mesma probabilidade ($p^k q^{n-k}$), então a probabilidade procurada é:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Observação 3.2.1. *Dizemos que um experimento modelado como descrito acima tem distribuição binomial.*

Exemplo 3.2.4. *Um dado é jogado* 5 *vezes. Qual é a probabilidade sair o número* 2 *três vezes?*

A probabilidade de sair o número 2*(sucesso) em cada jogada é* $p = P(2) = \frac{1}{6}$ *e a probabilidade de não sair o número* 2*(fracasso) em cada jogada* $q = \frac{5}{6}$. *Aqui,* p *representa a probabilidade de sucesso,* q *representa a de fracasso e* 5 *o número de jogadas. A probabilidade que queremos será dada por:*

$$P = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

com $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ *e* $k = 3$, *logo*

$$P = \binom{5}{3} \times (\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^2 = 10 \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} = \frac{250}{7776} = \frac{125}{3888}$$

Exemplo 3.2.5. *A probabilidade de um casal ter um filho loiro é de* $\frac{1}{4}$. *Se este casal tiver* 6 *filhos, qual a probabilidade de que metade sejam loiros?*

Temos que a probalidade de ser loiro (sucesso), é $p = \frac{1}{4}$, *e que a probabilidade de não ser loiro (fracasso), é* $q = \frac{3}{4}$. *Neste caso temo* $n = 6$ *e* $k = 3$, *logo a probabilidade procurada é:*

$$P = \binom{6}{3} \times (\frac{1}{4})^3 \times (\frac{3}{4})^3 = 20 \times (\frac{1}{64}) \times (\frac{27}{64}) = \frac{540}{4096} = 0,13$$

Exemplo 3.2.6. *Uma prova foi elaborada com* 15 *questões objetivas e cada uma possui 4 alternativas, onde apenas uma delas é correta. Compare as seguintes probabilidades:*

a)acertar na mega sena com uma aposta simples.

b)acertar as 15 *questões da prova "no chute".*

Esta questão está no início do nosso trabalho e antes de começar a resolvê-la lembremos o que é uma aposta simples na loteria Mega-sena. Para fazermos uma aposta simples nesta loteria devemos escolher entre os números 1, 2, 3, 4, 5, ..., 59, 60 *apenas* 6. *Nosso espaço espaço amostral* Ω *é o conjunto de todas as possíveis apostas simples, e a quantidade de elementos deste conjunto é o número de subconjuntos com* 6 *números que podemos formar dentre esses* 60, *logo* $\#\Omega = \binom{60}{6} = 50.063.860$. *Cada aposta simples tem a mesma probabilidade de ocorrer, logo a probabilidade* P_1 *de ganhar com uma aposta simles é:*

$$P_1 = \frac{1}{50.063.860}$$

.

E na prova com 15 *questões, como cada questão tem* 4 *alternativas de resposta e apenas uma está correta, então* $p = \frac{1}{4}$ *é a probabilidade de acerto em cada questão e* $q = \frac{3}{4}$ *é a de erro em cada questão. A probabilidade* P_2 *de acertar as* 15 *questões no chute é:*

$$P_2 = \binom{15}{15} \times (\frac{1}{4})^{15} \times (\frac{3}{4})^0 = 1 \times \frac{1}{1.073.741.824} \times 1 = \frac{1}{1.073.741.824}.$$

Com isso, vemos que esta probabilidade é menor do que a de ganhar na mega sena com uma única aposta. Para ilustrar bem a diferença, fazemos:

$$\frac{1/50.063.860}{1/1.073.741.824} = \frac{1.073.741.824}{50.063.860} = 21,4$$

ou seja acertar a Mega-sena com um único bilhete é $21,4$ *vezes mais provável do que acertar as 15 questões no chute.*

Capítulo 4

Conclusão

O objetivo do nosso trabalho é primeiro aguçar e despertar o interesse das pessoas que tenham acesso ao mesmo pela da teoria da probabilidade, mostrando que esta teoria, mesmo no ensino médio, pode ser apresentada de uma maneira formal e ao mesmo tempo acessível ao entendimento dos alunos. E esta formalidade é motivo de preocupação de muitos docentes, pois em todos os livros deste nível de ensino com os quais trabalhei e pesquisei percebi que os autores não tiveram esta preocupação, e os mesmos reduzem o estudo desta teoria ao quociente, "casos favoráveis por casos possíveis." Neste trabalho podemos ver que esta teoria é muito mais abrangente que tudo isso, e desta forma esperamos contribuir para melhoria do ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] DANTE, L. R.; *Matemática, vol único*, 1ª ed. São Paulo: Atica, 2009.

[2] FAVARO, S.; Kmeteuk, O. F. *Noções de Lógica e Matemática Básica*, Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

[3] HOEL, P.; Port, S. C.; Stone, C.J. *Introdução à Teoria da Probabilidade*, Rio de janeiro: Interciência, 1978.

[4] IEZZI, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, D. *Ciências e Aplicações, vol. 2*, 5ª ed. São Paulo: Atual, 2010.

[5] IEZZI, G.; Hazzan, S. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 5*, 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

[6] JAMES, B. R. *Probabilidade: Um Curso Intermediário*, 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

[7] LIMA, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 2*, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] MORGADO, A. C.; Carvalho, J. B. P.; Pinto, P. C.; Fernadez, P. *Análise Combinatória e Probabilidade* 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006

[9] PEREIRA, A. G.; Campos, V. S. M. *Análise combinatória e Probabilidade - SEDIS* EDUFRN: Natal, 2006.