



**UFAM**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*UM ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA VIA TEORIA DE CONJUNTOS*

CARLOS ADALTO SEIXAS PANTOJA

MANAUS

2019



**UFAM**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

CARLOS ADALTO SEIXAS PANTOJA

*UM ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA VIA TEORIA DE CONJUNTOS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

MANAUS  
2019

CARLOS ADALTO SEIXAS PANTOJA

UM ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA VIA TEORIA DE  
CONJUNTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26 de Agosto de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Flávia Morgana de Oliveira Jacinto  
Presidente

Prof. Dr. Francisco Eteval da Silva Feitosa  
Membro Interno

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Nadime Mustafa Moraes  
Membro Externo

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao nosso criador, Jeová Deus, que deu-me a sua força de vida e a benção de viver; aos meus pais - Raimundo Carlos Corrêa Pantoja e Lucineia Seixas Pantoja, que sempre acreditaram e apoiaram para as conquistas dos meus objetivos, além de demonstrarem seu amor como genitores; agradeço também aos meus avós paternos, já falecidos - Raimundo Alcântara Pantoja e Tereza Nunes Pantoja, que ajudaram na minha Educação e formação quando ainda era uma criança; aos meus colegas de turma, que foram como uma verdadeira âncora para a conclusão do curso; por fim, meu agradecimento especial à minha orientadora, por sua dedicação, paciência e vontade agradável de ensinar e orientar, qualidades estas, que foram determinantes e fundamentais para a conclusão deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta alguns conceitos primitivos de conjuntos, além de algumas definições de funções indispensáveis para construção do tema. A justificativa para o seu estudo é propor mais uma forma de viabilizar o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória, uma vez que boa parte dos docentes de matemática da Educação Básica consideram Combinatória um conteúdo complicado de ser ensinado e compreendido de uma forma que apresente algum sentido real para os discentes, que são induzidos à memorização mecânica de fórmulas prontas e a aplicação das mesmas à resolução de imensas listas de exercícios na tentativa de compreender tal conteúdo. Neste sentido, primeiramente, apresentaremos alguns conceitos e definições de conjuntos e funções que servirão como base para a construção do nosso trabalho, servindo também como auxílio para o professor trabalhar o ensino de combinatória em sala de aula, da maneira que propomos neste projeto de ensino, fazendo aplicações de combinatória com uma visão de conjunto. Ao longo do trabalho iremos abordar alguns tópicos de análise combinatória sem, inicialmente, mencionarmos fórmulas, ou seja, trabalharemos sempre exemplos simples e de fácil compreensão para a construção das fórmulas, dando a estas algum sentido concreto e real, em vez de só apresentá-las com a finalidade de memorização. É mais imperativo fazer o aluno trabalhar um problema construindo a solução do mesmo por meio dos conceitos que serão propostos e aplicá-lo na questão, ao invés de memorizar um determinado exercício ou outro, porque sabemos que desta maneira, quando deparar-se com um outro problema que envolva um novo conceito, não será capaz de resolvê-lo. Pensando nisso, propomos alguns projetos e atividades que podem ser trabalhados em sala de aula com o auxílio do *Software Livre Educacional Geogebra - versão 6.0.529*. Por fim, abordamos situações problemas com o objetivo de instigar nossos leitores a visualizar outros problemas de combinatória de maneira que possa sugerir ou propor soluções interpretativas baseadas na linguagem dos conjuntos, além de efetuar soluções algébricas, tendo como base os princípios, conceitos e definições de contagem.

Palavras-chave: Combinatória, Conjunto, Funções, Cardinalidade, Permutações, Arranjos, Combinações.

# ABSTRACT

This work presents some primitive concepts of sets, as well as some definitions of indispensable functions for the construction of the theme. The justification for his study is to propose another way to make Combinatorial Analysis Teaching-Learning feasible, since most Mathematics teachers of Basic Education consider Combinatorial a complicated content to be taught and understood in a way that has some meaning. real for students, who are induced to the mechanical memorization of ready formulas and their application to the solving of huge lists of exercises in an attempt to understand such content. In this sense, firstly, we will present some concepts and definitions of sets and functions that will serve as the basis for the construction of our work, also serving as an aid for the teacher to work the combinatorial teaching in the classroom, as we propose in this teaching project. , making combinatorial applications with an overview. Throughout the work we will cover some topics of combinatorial analysis without first mentioning formulas, that is, we will always work with simple and easy to understand examples for the construction of formulas, giving them some concrete and real meaning, instead of just presenting them. them for the purpose of memorization. It is more imperative to make the student work on a problem by constructing its solution through the concepts that will be proposed and apply it to the question, rather than memorizing a particular exercise or another, because we know that when we come across a problem. Another problem that involves a new concept will not be able to solve it. With that in mind, we propose some projects and activities that can be worked out in the classroom with the help of *Geogebra Educational Free Software - version 6.0.529*. Finally, we approach problem situations in order to prompt our readers to visualize other combinatorial problems. so that it can suggest or propose interpretative solutions based on the language of the sets, besides making algebraic solutions, based on the principles, concepts and definitions of counting.

Keywords: Combinatorics, Set, Functions, Cardinality, Permutations, Arrangements, Combinations.

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}_*^+$	Conjunto dos números inteiros não nulos e não negativos.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$Pol$	Polígono.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$\cong$	Aproximado.
$\sim$	Semelhante.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cap$	Interseção.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$//$	Paralelo.
$\perp$	Perpendicular.
$M_G$	Média Geométrica.
$M_P$	Média Proporcional.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
$AB$	Medida do segmento AB.
$\widehat{ABC}$	Medida do ângulo ABC.
$\widehat{B}$	Ângulo B.
$o.p.v$	Opostos pelo vértice.
$\triangle$	Triângulo.
$S_\triangle$	Área do triângulo.
$S_C$	Área do Círculo.
$S_Q$	Área do Quadrado.
■	Indica o fim de uma demonstração.

# Lista de Figuras

3.1	Conjuntos representando o Princípio Aditivo . . . . .	14
3.2	Conjuntos representando o Princípio Multiplicativo . . . . .	15
3.3	Representação da bijetividade . . . . .	18
3.4	Representação da injetividade . . . . .	22
3.5	Árvore de possibilidades . . . . .	25
3.6	União de dois conjuntos não disjuntos . . . . .	34
3.7	O Princípio da Inclusão-Exclusão para três conjuntos mutuamente não disjuntos	35
3.8	Contagem de elementos . . . . .	36
3.9	O conjunto Universo e seus subconjuntos . . . . .	38
4.1	Janela do Geogebra com os controles deslizantes . . . . .	40
4.2	Janela do Geogebra com o conjunto de pontos . . . . .	40
4.3	O conjunto de pontos . . . . .	41
4.4	Janela do Geogebra com o Polígono construído . . . . .	41
4.5	Janela do Geogebra com todas diagonais que partem de um vértice do Polígono construído . . . . .	42
4.6	Todas diagonais que partem de um vértice do Polígono construído . . . . .	42
4.7	Janela do Geogebra com todas diagonais que partem de todos os vértices do Polígono construído . . . . .	43
4.8	Todas diagonais que partindo de um dos vértices do Polígono construído . . . . .	43
4.9	Todas diagonais que partindo de todos os vértices do Polígono construído . . . . .	44
4.10	Janela de visualização <b>3D</b> do Geogebra . . . . .	45
4.11	Cubo planificado . . . . .	45
4.12	Cubo animado . . . . .	46
4.13	Cubo desejado . . . . .	46
5.1	Casa das Onze Janelas . . . . .	51
5.2	Parte do mapa da Cidade de Sergipe . . . . .	52



# Sumário

<b>1</b>	<b>APRESENTANDO A PROPOSTA DO PROJETO</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Justificativa do Estudo . . . . .	3
1.3	Objetivos . . . . .	3
1.3.1	Objetivo Geral . . . . .	3
1.3.2	Objetivos Específicos . . . . .	3
1.4	Contribuição e Relevância . . . . .	4
<b>2</b>	<b>CONJUNTOS E FUNÇÕES</b>	<b>5</b>
2.1	Conjuntos: Noções Primitivas . . . . .	5
2.1.1	Relações de Pertinência e de Continência . . . . .	5
2.1.2	O conjunto de partes . . . . .	7
2.1.3	Operações entre conjuntos: União e Intersecção . . . . .	8
2.1.4	Produto cartesiano . . . . .	9
2.2	Funções: Conceito e Tipos . . . . .	9
2.2.1	O conceito de função . . . . .	9
2.2.2	Tipos de funções . . . . .	10
2.3	Cardinalidade de um conjunto . . . . .	11
<b>3</b>	<b>ABORDAGEM COMBINATORIAL VIA TEORIA DE CONJUNTO</b>	<b>13</b>
3.1	Princípios de contagem: Aditivo e Multiplicativo . . . . .	13
3.1.1	Princípio Aditivo . . . . .	13
3.1.2	Princípio multiplicativo . . . . .	15
3.2	Permutações Simples . . . . .	17
3.3	Arranjos . . . . .	19
3.4	Combinações Simples . . . . .	22
3.5	Permutações com elementos repetidos . . . . .	29
3.6	Combinações Completas ou com Repetição . . . . .	31
3.7	Princípio da Inclusão-Exclusão . . . . .	34
<b>4</b>	<b>PROJETOS DE APLICAÇÃO UTILIZANDO O GEOGEBRA</b>	<b>39</b>

<b>5 APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b>	<b>48</b>
<b>Considerações Finais</b>	<b>60</b>
<b>Apêndice</b>	<b>62</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## APRESENTANDO A PROPOSTA DO PROJETO

### 1.1 Introdução

*Análise Combinatória* ou simplesmente *Combinatória*, é um dos mais importantes tópicos da matemática discreta, devido ao seu vasto campo de aplicabilidade. Além do mais, permite a criação de situações-problema que podem ser discutidas através da construção e discussão de ideias, favorecendo o desenvolvimento da capacidade crítica-argumentativa em diversos níveis de ensino, do Médio ao Superior. Pensando nesta amplitude do conhecimento, dedicamos este projeto a professores, discentes dos cursos de Licenciatura em Matemática e, principalmente, aos estudantes do Ensino Médio. E um dos nossos objetivos, é auxiliar estes personagens a superar lacunas no ensino e na aprendizagem de combinatória, desenvolvendo a noção de que os métodos e fórmulas matemáticas podem ser úteis e podem surgir a partir da discussão de exemplos e aplicações de resultados básicos, instigando o aluno a perceber que os conceitos e fórmulas são meros coadjuvante para a resolução de problemas, mas que o entendimento construtivo deles facilita a solução. Em outras palavras, não devemos condenar a apresentação dos conceitos e fórmulas, mas sim, o uso excessivo destas. Fazendo com que o discente saiba o que está fazendo com elas, por meio da assimilação efetiva dos conceitos e aplicações, e uma das maneiras de fazer isso é quando construímos uma representação gráfica, por meio de esquema, árvore de possibilidades, tabelas, produto cartesiano e enumeração de possibilidades (agrupamentos para solução), estamos praticando o exercício do raciocínio combinatório, com base no que chamamos de "*Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*"<sup>1</sup>. Mas é impossível, até seria contraproducente, só enumerar e discutir resultados sem apresentar algumas provas. Por isso, no Apêndice, apresentaremos uns dos mais importantes princípios da matemática, conhecido como *Princípio da Indução Matemática - PIM*, o que foi bastante útil para as demonstrações feitas no nosso trabalho. Contudo, evitamos provas que requeiram resultados ou técnicas muito avançadas para o contexto.

Com base no que acabamos de argumentar, este trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos a proposta do projeto composta pela justificativa, objetivos, contribuição e relevância do estudo. No segundo capítulo, relembramos alguns conceitos e definições de *Conjuntos* e *Funções*, já bastante vistos por professores, alunos e graduandos de matemática desde o Ensino Fundamental. Todavia, a finalidade dele é servir como base e auxílio para o desenvolvimento do projeto, além de sanar possíveis dúvidas sobre conceitos e definições de alguns conjuntos e funções especiais ou relembrar tais descrições.

O terceiro capítulo, trata dos dois principais Princípios de Contagem: *Princípio Aditivo* (Princípio Básico da Contagem) e *Princípio Multiplicativo* (Princípio Fundamental da Contagem - P.F.C.). Logo em seguida, trabalhamos no ponto principal do nosso projeto, intitulado "*Um Estudo de Análise Combinatória Via Teoria dos Conjuntos*", tendo o princípio multiplicativo como âncora deste estudo e, considerando o *Princípio da Inclusão-Exclusão* como parte relevante, pois, está diretamente relacionado com o tema do nosso trabalho.

No quarto capítulo, trabalhamos alguns projetos de ensino para sala de aula, com o auxílio do *Software Livre Educacional Geogebra* - versão 6.0.529, fazendo uma relação entre combinatória e geometria e, implicitamente, usando a linguagem de conjuntos. Uma vez que os elementos da geometria estruturam-se em conjuntos, como por exemplo, pontos, arestas, faces, vértices e etc. Neste capítulo, também são propostos projetos e atividades que podem ser trabalhados de uma forma mais geral com alunos, graduandos e professores. Faremos isso, com base o que chamamos de "*trabalho documental dos professores*"(ver em [7]). A abordagem documental estuda o trabalho dos professores a partir de suas interações com os recursos pedagógicos e tecnológicos, fazendo uma relação entre teoria e prática, desempenhando um papel essencial no desenvolvimento profissional dos professores.

Por fim, no quinto e último capítulo, abordamos situações problemas relacionados com o tema do nosso trabalho, com o objetivo de instigar nossos leitores a visualizar outros problemas de combinatória de maneira que possa sugerir ou propor soluções interpretativas baseadas na linguagem de conjuntos. Além disso, apresentamos algumas soluções algébricas para os problemas, tendo como base os princípios, conceitos e definições de contagem. Fechamos nosso trabalho com as considerações finais, relatando um pouco das dificuldades encontradas para o desenvolvimento do projeto, pontos relevantes do tema e a intenção de organizar os principais resultados do trabalho para uma possível publicação como proposta de Ensino-Aprendizagem de combinatória.

<sup>1</sup>O termo *Registro de Representação Semiótica* é usado para indicar diferentes tipos de representação como, por exemplo, escrita em língua natural ou em língua materna, escrita algébrica, tabelas, gráficos cartesianos e figuras.

*As transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática. As dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações. Para estudar esta complexidade, as representações semióticas devem ser analisadas, não a partir dos objetos ou dos conceitos matemáticos que representam, mas a partir do funcionamento representacional que é próprio do registro no qual são produzidas.*

## **1.2 Justificativa do Estudo**

O norte principal que nos levou a escrever sobre este trabalho é, viabilizar e disponibilizar uma proposta diversificada, ampla e atraente de Ensino-Aprendizagem de *Análise Combinatória Via Teoria dos Conjuntos*, que possa ajudar os personagens já citados a obter mais uma visão de compreensão efetiva de conceitos matemáticos e a assimilação do real significado do raciocínio combinatório baseado nos seus princípios. Uma vez que o ensino de combinatória na maioria das escolas do nosso Brasil, limita-se ao uso excessivo de fórmulas para calcular o que está sendo cobrado em determinados problemas, sem proporcionar aos alunos a verdadeira compreensão e interpretação necessária para as soluções criativas dos mesmos. Continuar nesta estratégia, vai de encontro com os *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)* que frisam, entre outros aspectos, a importância da construção do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, docentes, temos que ter ao procurar desenvolvê-lo. Infelizmente, o que contribui ainda mais para o empobrecimento do ensino de combinatória são publicações de mais trabalhos abordando apenas a resolução de problemas desse conteúdo através da aplicação de fórmulas sem sentido construtivo, o que torna o ensino deste tópico mecânico.

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo Geral**

Construir conceitos combinatoriais, através de estruturas que simplifiquem o desenvolvimento do raciocínio combinatório baseado nos seus princípios, via teoria dos conjuntos, propondo o uso de uma ferramenta tecnológica que possa consolidar o aprendizado.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

1. Compreender de maneira efetiva e real os conceitos combinatoriais;
2. Identificar os conceitos de Análise Combinatória em situações-problema;

3. Propor e utilizar, a medida do possível, a linguagem dos conjuntos nas resoluções de situações-problemas;
4. Relacionar outros tópicos da matemática com Combinatória, tendo auxílio de uma ferramenta tecnológica com aplicação para sala de aula.

## **1.4 Contribuição e Relevância**

Com o desenvolvimento do nosso projeto, buscamos tirar conclusões por meio de construção de estruturas de agrupamentos formulando conceitos de Análise Combinatória, elaboração de teorema, propostas de demonstrações diversificadas de propriedades e de proposições, abordando nossa proposta de ensino baseada na teoria dos conjuntos. Outro ponto relevante que podemos destacar, é a relação que buscamos fazer entre combinatória e a geometria, utilizando o Geogebra e os conceitos combinatoriais e geométricos. Ao fazermos isso, pudemos relacionar teorias (Conjuntos, Combinatória, Geometria); prática pela prática (Construção de figuras e sólidos geométricos, com a utilização do Geogebra); e prática e teoria, pois com a utilização do Geogebra, deduzimos fórmulas, como por exemplo, a que calcula o número de diagonais de um polígono, sendo está diferente daquela que aprendemos no Ensino Fundamental. Além disso, propormos ideias de aulas práticas com auxílio de ferramentas tecnológicas que hoje em dia são consideradas fundamentais no processo de Ensino-Aprendizagem. E esta maneira de estudar combinatória, torna-se uma proposta ampla e atraente, uma vez que boa parte dos conteúdos matemáticos estruturam-se na linguagem de conjuntos.

# Capítulo 2

## CONJUNTOS E FUNÇÕES

Como acontece em vários estudos ou teorias, o passo inicial é dado por conceitos *não definidos* e, neste trabalho, para começar adotamos a idéia primitiva de conjuntos dada pelo matemático alemão *Georg Cantor*<sup>2</sup> que em [14] afirmou que: "Intuitivamente, um conjunto é uma coleção qualquer de zero ou mais objetos distintos, sem repetições e sem qualquer ordenação".

<sup>2</sup>*Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, filho de pais dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Estudou na Suíça e na Alemanha e desenvolveu sua carreira na Universidade de Halle. Faleceu no hospital de doenças mentais de Halle, em 1918.*

### 2.1 Conjuntos: Noções Primitivas

Ao longo deste trabalho vamos considerar os conceitos primitivos e iniciais de *Conjuntos*, *elementos* e a *relação de pertinência*.

**Conjuntos:** São estruturas que agrupam *objetos*, constituindo uma base para construir estruturas mais complexas, listando estes objetos por propriedades. Por outro lado, um conjunto não necessariamente é constituído por objetos que compartilham mesmas características.

Os *objetos* no conjunto são chamados de *elementos* ou *membros* que se supõem sempre distintos entre si, constituem-se na entidade básica, não definida formalmente.

#### 2.1.1 Relações de Pertinência e de Continência

##### 1.1.1 - a) Relação de Pertinência

Escrevemos  $a \in A$  (lê-se: *a pertence* ao conjunto  $A$ ) para indicar que  $a$  é elemento do conjunto  $A$ . Caso contrário,  $a \notin A$  (lê-se: *a não pertence* ao conjunto  $A$ ) para indicar que  $a$  não pertence ao conjunto  $A$ . Note que as letras maiúsculas são usadas para representar conjuntos e

as minúsculas para indicar os elementos dos conjuntos.

**Nota:** A relação de pertinência se dá entre elementos e conjuntos.

Podemos quando possível denotar também conjuntos por extensão, listando todos os seus elementos, em qualquer ordem, separados por vírgulas e entre chaves, como por exemplo:

Conjunto das vogais  $\mathbf{V} = \{ a, e, i, o, u \}$ , onde  $a \in \mathbf{V}$  e  $b \notin \mathbf{V}$ ;

Conjunto dos dígitos que formam a nossa base numérica  $\mathbf{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Um outro conjunto fundamental para o desenvolvimento do nosso trabalho é, o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$

Outra maneira de descrever um conjunto é por construção ou propriedade. Por exemplo, o conjunto dos Pares  $= \{x \mid x \text{ é número par} \}$  – é o conjunto de todos os elementos  $x$ , tal que  $x$  é número par. Logo, a forma geral de definição de um conjunto por propriedade é  $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$

Usamos geralmente esta anotação quando é para descrever conjuntos, que seja, impossível listar todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto  $\mathbb{Q}^+$  de todos os números racionais positivos pode ser escrito como  $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q}\}$ , para todos os inteiros positivos  $p$  e  $q$ .

• Conjunto Unitário – é constituído por um único elemento.

**Exemplo 2.1.** *Conjunto de todos os números que tem as propriedades de serem pares e primos positivos é o conjunto unitário  $\{2\}$ ;*

• Conjunto Vazio – é um conjunto desprovido de elementos, pode ser representado de duas maneiras:  $\{ \}$  ou  $\emptyset$ . E em termos de propriedades, pode ser definido de várias formas.

**Exemplo 2.2.** *Conjunto de todos os números naturais que são pares e ímpares, é o conjunto vazio  $\{ \} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ par e ímpar}\}$ .*

• Conjunto Universo – define o "contexto de discussão" e é normalmente denotado por  $\mathbf{U}$ . Podemos definir o conjunto universo para qualquer conjunto  $\mathbf{A}$ .

É importante saber em qual universo estamos trabalhando, por exemplo, se  $\mathbf{U}$  é o conjunto dos números naturais, então a equação  $x + 7 = 1$  não tem solução. Mas, se  $\mathbf{U}$  fosse o conjunto dos números inteiros, então a equação teria como solução  $x = -6$ .



### 1.1.1 - b) Relação de Continência

É a relação entre os conjuntos. Permite introduzir os conceitos de *subconjunto* e *igualdade de conjuntos*.

**Definição 2.1.** (Ver em [14]) O conjunto  $A$  é um *subconjunto* de  $B$  se, e somente se, todo elemento de  $A$  for também um elemento de  $B$ . Usamos a notação  $A \subset B$  para indicar que  $A$  é um subconjunto de  $B$ .

Nesse caso, também é comum dizer que  $A$  está contido em  $B$  ( $A \subset B$ ). Caso contrário, tem-se que  $A$  não está contido em  $B$  ( $A \not\subset B$ ).

Dizemos também que  $A$  é *subconjunto próprio* de  $B$  ( $A \subsetneq B$ ), quando  $A$  está contido propriamente em  $B$ , ou seja,  $A \subset B$  e  $A \neq B$ , se existe  $b \in B$  tal que  $b \notin A$ .

Podemos considerar também a notação  $B$  contém propriamente  $A$  ( $B \supsetneq A$ ).

**Exemplo 2.3.** Note como podemos usar a relação de continência entre os conjuntos:

$$\begin{array}{llll} a) \{a, b\} \subseteq \{b, a\} & b) \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} & c) \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} & d) \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \\ e) \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} & f) \emptyset \subseteq \mathbb{N} & g) \emptyset \subset \mathbb{N} & \end{array}$$

**Definição 2.2.** (Ver em [14]) Dois conjuntos são *iguais* se, e somente se, eles têm os mesmos elementos. Ou seja, se  $A$  e  $B$  são conjuntos, então  $A$  e  $B$  são iguais se, e somente se,  $(\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B))$ . Escrevemos  $A = B$ , se  $A$  e  $B$  forem conjuntos iguais, ou seja,  $A = B$  se, e somente se,  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .

**Exemplo 2.4.** Igualdades e relações verdadeiras

$$a) \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4\} \qquad b) \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

### 2.1.2 O conjunto de partes

A partir de um conjunto dado, podemos pensar em um novo conjunto, cujo os elementos são os subconjuntos ou *partes* do conjunto inicial.

Um conjunto pode ser dividido de várias formas diferentes, mas para que haja utilidade é necessário que esta divisão não produza conjuntos vazios, e que não haja repetição de elementos.

**Definição 2.3.** (Ver em [14]) Dado um conjunto  $A$ , o conjunto de partes de  $A$  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ . Indicamos o conjunto de partes de  $A$  por  $\wp(A)$ .

**Exemplo 2.5.** O conjunto das partes de  $A = \{a, b, c\}$  é,

$$\wp(\mathbf{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

**Observação 2.1.** Note que o conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio conjunto  $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$  são elementos desse conjunto de subconjuntos.

**Observação 2.2.** Escrevemos  $\{a\} \in \wp(\mathbf{A}); \{b, c\} \in \wp(\mathbf{A}); \{a, b, c\} \in \wp(\mathbf{A})$ , e **não**  $\{a\} \subset \wp(\mathbf{A}); \{b, c\} \subset \wp(\mathbf{A}); \{a, b, c\} \subset \wp(\mathbf{A})$ . Veja também que  $\emptyset \subset \wp(\mathbf{A})$  e  $\emptyset \in \wp(\mathbf{A})$ .

**Exemplo 2.6.** Qual o conjunto das partes do conjunto vazio? Qual o conjunto das partes do conjunto  $\{\emptyset\}$  ?

O conjunto vazio tem exatamente um subconjunto, ou seja, ele mesmo. Consequentemente,  $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$

O conjunto  $\{\emptyset\}$  tem exatamente dois subconjuntos, ou seja,  $\emptyset$  e o próprio  $\{\emptyset\}$ . Consequentemente,  $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

**Nota:** Se um conjunto tem  $n$  elementos, então o seu conjunto de partes tem  $2^n$  elementos. Demonstraremos esse fato de várias maneiras no capítulo seguinte.

## 2.1.3 Operações entre conjuntos: União e Intersecção

### 1.1.3 - a) União

Dados dois conjuntos  $\mathbf{A} = \{0, 1, 4, 9, 16\}$  e  $\mathbf{B} = \{1, 2, 4, 6, 12, 24\}$ , podemos escrever o conjunto  $\mathbf{C}$  formado pelos elementos que pertencem a  $\mathbf{A}$  ou pertencem a  $\mathbf{B}$  ou a ambos. Assim,  $\mathbf{C} = \{0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 24\}$ . O conjunto  $\mathbf{C}$  é chamado *união* de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e, é indicado por  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  (lê-se:  $\mathbf{A}$  união  $\mathbf{B}$ ).

De modo geral, dados dois conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , a união  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  é o conjunto formado pelos elementos de  $\mathbf{A}$  mais os elementos de  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ ou } x \in \mathbf{B}\}$$

Assim, a união de todos os elementos da partição, recompõe o conjunto original ( $\bigcup \wp(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ ).

**Observação 2.3.** Este "ou" da união **não** é o "ou" de exclusão da linguagem usual: "vamos à praia ou ao shopping". Ele significa: se  $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ , então  $x \in \mathbf{A}$  ou  $x \in \mathbf{B}$  ou  $x$  pertence a ambos.

### 1.1.3 - b) Intersecção

Dados dois conjuntos  $\mathbf{A} = \{0, 1, 4, 9, 16\}$  e  $\mathbf{B} = \{1, 2, 4, 6, 12, 24\}$ , podemos escrever o conjunto  $\mathbf{C}$  formado pelos elementos que pertencem *simultaneamente* a  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , ou seja, pelos

elementos *comuns* a **A** e **B**. Assim,  $C = \{1, 4\}$ . O conjunto **C** é chamado *intersecção* de **A** e **B** e, é indicado por  $A \cap B$  (lê-se: **A** intersecção **B**).

De modo geral, dados dois conjuntos **A** e **B**, a intersecção  $A \cap B$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem *simultaneamente* a **A** e a **B**:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

**Observação 2.4.** Se  $A \cap B = \emptyset$ , então os conjuntos **A** e **B** são chamados *disjuntos*.

## 2.1.4 Produto cartesiano

Primeiramente dizemos que um par ordenado consiste de dois elementos  $x$  e  $y$ , por exemplo, tomados numa determinada ordem,  $x$  é o 1º elemento e, conseqüentemente,  $y$  é o 2º. Sua designação é  $(x, y)$ . Dizemos também, que dois pares ordenados são iguais  $(x, y) = (z, w)$  se, e somente se,  $x = z$  e  $y = w$ .

**Definição 2.4.** Dado dois conjuntos não vazios **A** e **B**, chamamos de *produto cartesiano* de **A** por **B**, o novo conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , em que  $x$  é um elemento de **A** e  $y$  é um elemento de **B**, tomados um a um.

Simbolicamente temos,

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \text{ (lê-se: } A \text{ cartesiano } B\text{)}.$$

Produto cartesiano de  $n$  conjuntos  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  – Produz ênuplas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Dois ênuplas ordenadas são iguais  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ , se  $m = n$  e  $a_i = b_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Temos como um caso particular importante, quando  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  e por sua vez,  $A \times A \times \dots \times A = A^n$

## 2.2 Funções: Conceito e Tipos

### 2.2.1 O conceito de função

**Definição 2.5.** (Ver em [2]) Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios, uma *função* de **A** em **B** consiste em associar cada elemento  $x \in A$  a um único elemento  $y \in B$  tal que  $(x, y) \in A \times B$ . Se  $f$  é uma *função* de **A** em **B**, escrevemos  $f : A \rightarrow B$ .

• Dizemos também que  $y$  é a imagem de  $x$  pela função  $f$  e denotamos por  $y = f(x)$ , e o conjunto formado por todos os  $y$  é chamado de conjunto imagem da função e indicamos por  $Im(f)$

• O conjunto  $A$  é chamado de **domínio** da função e denotamos por  $D(f)$ , e o conjunto  $B$  de **contra-domínio** e escrevemos  $CD(f)$

## 2.2.2 Tipos de funções

### 1.2.2 - a) Função Injetiva ou Injetora

**Definição 2.6.** (Ver em [2]) Uma função  $f : A \rightarrow B$  é **Injetiva** quando elementos diferentes de  $A$  são associados a elementos diferentes em  $B$ , ou seja, temos a relação **um para um**. Assim, podemos escrever que  $f$  é injetiva quando  $x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in B$  ou  $f(x_1) = f(x_2) \in B \Rightarrow x_1 = x_2 \in A$ .

**Exemplo 2.7.**  $f(x) = -3x$ , temos que  $f$  é injetora, pois elementos distintos,  $x_1$  e  $x_2$ , pertencentes ao domínio, têm imagens  $-3x_1$  e  $-3x_2$ , também distintas.

**Exemplo 2.8.**  $g(x) = x^2 - 3$ . observe que  $g(-2) = 1$  e  $g(2) = 1$ , ou seja, elementos diferentes pertencentes ao domínio,  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 2$ , têm imagens iguais. Logo, a função  $g$  não é injetora.

### 1.2.2 - b) Função Sobrejetiva ou Sobrejetora

**Definição 2.7.** (Ver em [14]) Uma função  $f : A \rightarrow B$  é **Sobrejetiva** se, e somente se, para todo elemento  $y \in B$  houver um elementos  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ , isto é, quando  $Im(f) = B$

**Exemplo 2.9.** Seja a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x - 2$ , temos que  $f$  é sobrejetora, pois todos os elementos do contra-domínio estão associados com algum elemento do domínio, ou seja,  $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.10.** Seja a função  $g$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ . Se pegarmos  $y = -2 \in CD(g)$ , ele não estará associado a nenhum elemento  $x$  pertencente ao domínio. Portanto, a função  $g$  não é sobrejetora.

### 1.2.2 - c) Função Bijetiva ou Bijetora

**Definição 2.8.** (Ver em [14]) Uma função  $f : A \rightarrow B$  é **Bijetiva** se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso acontece, dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca (relação um para um) entre  $A$  e  $B$ .

**Exemplo 2.11.** Seja a função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ , temos que  $f$  é bijetora, pois, é injetora e sobrejetora simultaneamente.

**Exemplo 2.12.** Seja a função  $h$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+$  definida por  $h(x) = x^2$ , temos que  $h$  não é bijetora, pois, embora seja sobrejetora, ela não é injetora.

## 2.3 Cardinalidade de um conjunto

**Definição 2.9.** (Ver em [14]) Se existir uma bijeção entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que os conjuntos tem a mesma cardinalidade e denotaremos que a cardinalidade de  $A$  é igual a de  $B$  por  $\#A = \#B$ .

Por esse motivo, se dois conjuntos tem a mesma cardinalidade, então eles são equivalentes (segundo Cantor) e escrevemos  $A \sim B$ , satisfazendo as propriedades:

1.  $A \sim A$  (propriedade reflexiva);
2. Se  $A \sim B$ , então  $B \sim A$  (propriedade simétrica);
3. Se  $A \sim B$  e  $B \sim C$ , então  $A \sim C$  (propriedade transitiva).

• **Conjunto Enumerável** (Contável): um conjunto é enumerável quando ele é vazio ou quando existe uma bijeção entre ele e um dos subconjuntos dos Números Naturais  $\mathbb{N}$ , assim, dizemos que eles têm a *mesma Cardinalidade* ("número de elementos"). Por outro lado, um conjunto é **não Enumerável** quando não é possível estabelecer uma bijeção entre ele e os números naturais  $\mathbb{N}$ .

Intuitivamente, um conjunto é *enumerável* se seus elementos podem ser colocados numa lista de modo que qualquer elemento do conjunto pode ser alcançado se avançarmos o suficiente na lista. Não sendo possível colocar esses elementos em sucessão (na forma de lista), dizemos que o conjunto é *não enumerável*.

• **Conjunto finito:** É um conjunto que possui um número finito de elementos. Pode ser denotado por extensão listando exhaustivamente todos os elementos;

• **Conjunto infinito:** É um conjunto que possui um número infinito de elementos. Por exemplo, o conjunto dos números pares em  $\mathbb{Z} = \{y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{Z}\}$

**Definição 2.10.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja  $F_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , temos:

- (a) Um conjunto  $A$  é *finito* se ele é vazio ou se existir uma bijeção, entre ele e  $F_n$
- (b)  $A$  é *infinito* se  $A$  não for finito.
- (c)  $A$  é *infinito enumerável* se  $A \sim \mathbb{N}$ .
- (d)  $A$  é *não enumerável* se  $A$  não for enumerável.

**Exemplo 2.13.** O exemplo mais simples de conjunto enumerável, é o que serve de modelo para essa ideia: o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais.

**Exemplo 2.14.** O conjunto  $P = \{2, 4, 6, \dots\}$  dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow P$  dada por  $f(n) = 2n$  é bijetora.

**Exemplo 2.15.** O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros é enumerável. De fato, podemos pensar na função que associa  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Z}$  associando os números naturais aos inteiros, dada por:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

**Prova.**

1.  $f$  é injetiva se  $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

\* Para  $n_1$  e  $n_2$  pares  $\Rightarrow f(n_1) = \frac{n_1}{2}$  e  $f(n_2) = \frac{n_2}{2}$ . Logo,  $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2} \Rightarrow n_1 = n_2$

\* Para  $n_1$  e  $n_2$  ímpares  $\Rightarrow f(n_1) = -\frac{n_1-1}{2}$  e  $f(n_2) = -\frac{n_2-1}{2}$ . Assim,  $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow -\frac{n_1-1}{2} = -\frac{n_2-1}{2} \Rightarrow n_1-1 = n_2-1 \Rightarrow n_1 = n_2$

2.  $f$  é sobrejetiva

Seja  $z \in \mathbb{Z}$ ,

\* Se  $z = 0$ , então  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = 0 \Rightarrow -\frac{n-1}{2} = 0 \Rightarrow n-1 = 0 \Rightarrow n = 1$

\* Se  $z \neq 0$ , então  $z > 0$  ou  $z < 0$ .

Para  $z > 0$ , então  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = z$ ; basta tomar  $\frac{n}{2} = z \Rightarrow n = 2z$ ;

Para  $z < 0$ , então  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = z$ ; basta tomar  $-\frac{n-1}{2} = z \Rightarrow n = -2z+1$ ;

Portanto, Como  $f$  é injetiva e sobrejetiva,  $f$  é bijetiva. ■

**Observação 2.5.** (Ver em [14]) Temos também outros conjuntos importantes: o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos Números Racionais é **enumerável**, o conjunto dos Números Irracionais  $\mathbb{I}$  é **não enumerável**, o conjunto dos Números Reais  $\mathbb{R}$  é **não enumerável**.

**Observação 2.6.** Alguns autores não consideram o 0 como número natural, então tenha o cuidado de checar como o termo número natural é usado ao ler livros.

**Observação 2.7.** Os conjuntos podem ter outros conjuntos como elementos, como por exemplo, o conjunto  $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$  é um conjunto com quatro elementos, sendo cada um deles um conjunto. Os quatro elementos desse conjunto são  $\mathbb{N}$ , o conjunto dos números Naturais;  $\mathbb{Z}$ , o conjunto dos números inteiros;  $\mathbb{Q}$ , o conjunto dos números racionais e  $\mathbb{R}$ , o conjunto dos números reais.

**Observação 2.8.** Um erro comum é confundir o conjunto  $\emptyset$  com o conjunto unitário  $\{\emptyset\}$ , cujo, o único elemento é o conjunto  $\emptyset$ .

## Capítulo 3

# ABORDAGEM COMBINATORIAL VIA TEORIA DE CONJUNTO

Neste capítulo apresentamos uma análise com definições e exemplos comparativos entre os dois principais Princípios de Contagem: *Princípio Aditivo* (Princípio Básico da Contagem) e *Princípio Multiplicativo* (Princípio Fundamental da Contagem - P.F.C.). Logo em seguida, trabalhamos no ponto principal do nosso projeto que é utilizar o princípio multiplicativo como âncora para os tópicos de Combinatória. Depois, abordamos o *Princípio da Inclusão-Exclusão* como parte relevante, pois, está diretamente relacionado com o tema do nosso trabalho. O foco deste capítulo, é fazer com que o aluno trabalhe um problema de Combinatória, utilizando a linguagem de conjunto, pois, ela é uma maneira de estudar estruturas das coleções em suas organizações. Pensando nisso, elaboramos algumas questões nas quais utilizamos as soluções destas trabalhando a nossa proposta de visão de conjunto.

### 3.1 Princípios de contagem: Aditivo e Multiplicativo

Contar é um hábito muito antigo do ser humano. Contamos para controlar, para saber, para conhecer, para planejar, para evoluir, para brincar e para várias outras situações do dia a dia, tanto é que a primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são seus elementos. Neste contexto, temos a operação de adição que é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem.

#### 3.1.1 Princípio Aditivo

**Definição 3.1.** (Ver em [11]) Seja **A** um evento que pode ocorrer de  $n$  maneiras diferentes e **B** um outro evento que pode ocorrer de  $p$  maneiras, também diferentes. Dizemos que **A** e **B** são mutuamente exclusivos, quando eles não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou a realização de

um evento exclui a realização do outro, então o número de maneiras de ocorrer o evento **A** ou o evento **B** é  $n + p$ .

**Nota: Evento** é qualquer acontecimento onde temos no mínimo um resultado. Um exemplo mais simples e conhecido de evento mutuamente exclusivo é o lançamento simultâneo de uma moeda e um dado enumerado de 1 a 6, onde um resultado não depende do outro para ocorrer, no caso da moeda temos como resultado C: cara ou K: koroa, já para o dado temos seis possíveis resultados 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

*Aplicando a visão de conjunto*, temos:

Se **A** e **B** são dois conjuntos disjuntos ( $A \cap B = \emptyset$ ), com  $x$  e  $y$  elementos, respectivamente, então  $A \cup B$  possui  $x + y$  elementos.

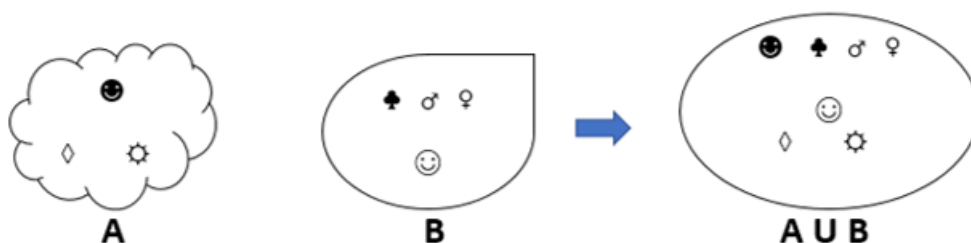


Figura 3.1: Conjuntos representando o Princípio Aditivo

**Exemplo 3.1.** *Suponha que um membro do curso de graduação em matemática da UFAM ou um estudante que tenha mestrado em matemática seja escolhido como representante para um comitê da Universidade. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para esse representante se houver 46 membros do curso de graduação em matemática e 96 mestres em matemática e nenhum for ao mesmo tempo um membro do curso e um mestre?*

**Rosolução do exemplo:**

*Há 46 maneiras de escolher um membro do curso de graduação em matemática e há 96 maneiras de escolher um mestre em matemática. Escolher um membro do curso de graduação em matemática não é o mesmo que escolher um estudante que é mestre em matemática, porque nenhum deles é ao mesmo tempo um membro do curso e um mestre. Logo, pelo Princípio Aditivo temos que há  $46 + 96 = 142$  maneiras possíveis de escolher esse representante.*

Agora apresentamos um outro princípio básico de contagem, conhecido como *Princípio Fundamental de Contagem* ou *Princípio da Multiplicação*.



### 3.1.2 Princípio multiplicativo

**Definição 3.2.** (Ver em [11]) Seja **A** um evento que pode ocorrer de  $r$  maneiras diferentes e **B** um outro evento que pode ocorrer de  $s$  maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento **A** seguido do evento **B** é  $r \times s$ .

*Aplicando a visão de conjunto*, temos:

Se **A** e **B** são dois conjuntos com  $m$  e  $n$  elementos, respectivamente, então o número de elementos  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  é  $m \times n$ .

#### Interpretação do Princípio Fundamental de Contagem utilizando conjuntos

A interpretação do Princípio Fundamental de Contagem ou Princípio da Multiplicação é dada por meio da definição de produto cartesiano de dois ou mais conjuntos. Mas, para simplificar-mos nosso trabalho iremos analisar apenas dois conjuntos.

Por exemplo, se  $\mathbf{A} = \{1, 2\}$  e  $\mathbf{B} = \{1, 2, 3\}$ , resulta que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Representamos esse produto cartesiano com um diagrama de flechas (*John Venn*):

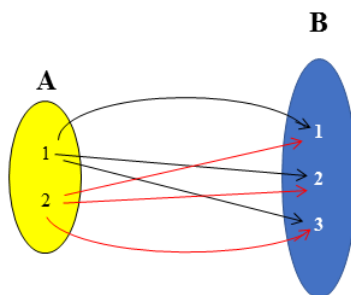


Figura 3.2: Conjuntos representando o Princípio Multiplicativo

Observe que cada elemento de **A** parte uma flecha em direção a um elemento de **B**.

**Exemplo 3.2.** Suponha que um membro do curso de graduação em matemática da UFAM e um estudante que tenha mestrado em matemática seja escolhido como representante para um comitê da Universidade. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para esses dois representantes se houver 46 membros do curso de matemática e 96 mestres em matemática e nenhum for ao mesmo tempo um membro do curso e um mestre?

**Rosolução do exemplo:**

Há 46 maneiras de escolher um membro do curso de graduação em matemática e há 96 maneiras de escolher um estudante que é mestre em matemática. Logo, pelo Princípio Fundamental de Contagem, temos que há  $46 \times 96 = 4416$  maneiras possíveis de escolher esses dois representantes.

**Exemplo 3.3.** Dado um conjunto com  $n$  elementos, quantos subconjuntos podemos formar?

**Uma solução**

Seja  $A$  o conjunto que tem  $n$  elementos e indicaremos (+) para os elementos que pertencem ao conjunto, e (-) para os elementos que não pertencem ao conjunto.

$$\begin{array}{cccccccc} (+ \text{ ou } -) & (+ \text{ ou } -) & (+ \text{ ou } -) & \cdot & \cdot & \cdot & (+ \text{ ou } -) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbf{A} = \{ & a_1, & a_2, & a_3, & \cdot & \cdot & a_n \} \end{array}$$

Ou seja, para cada elemento do conjunto temos duas possibilidades: **pertencer ou não pertencer** ao subconjunto.

**Nota:** O conjunto vazio pode ser representado por  $\emptyset = \{ -, -, -, \dots, - \}$ .

Todo subconjunto é subconjunto dele mesmo e poderá ser representado por

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \} = \{ +, +, +, \dots, + \}.$$

Ou seja, para construirmos um subconjunto podemos considerar o seguinte esquema:

$$\underbrace{\frac{+}{2} \times \frac{+}{2} \times \dots \times \frac{+}{2}}_{n - \text{vezes}}$$

Sendo assim, a resposta é  $2^n$ .

Observamos ainda, que esse exemplo é resolvido de outra maneira na seção 2.4 deste trabalho.

## 3.2 Permutações Simples

Dados  $n$  elementos distintos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , de quantos modos é possível ordená-los?

Para responder esta questão vamos considerar um exemplo mais simples. De quantos modos diferentes podemos ordenar os dígitos 3, 5 e 8?

358 385 538 583 835 853

Ou seja, 6 modos diferentes.

$$\begin{array}{ccc} \underline{1^\circ} & \underline{2^\circ} & \underline{3^\circ} \\ 3 \times 2 \times 1 = 6 \end{array}$$

Neste caso específico tivemos três modos de escolher o dígito que ocupará o primeiro lugar, dois modos para escolher o dígito que ocupará o segundo lugar e por fim, apenas um modo de escolher o dígito que ocupará o terceiro lugar. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos o resultado.

No caso geral temos,  $n$  modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar,  $(n - 1)$  modos de escolher o que ocupará o segundo lugar,  $(n - 2)$  modos de escolher o objeto que ocupará o terceiro lugar, e sucessivamente temos  $n - (n - 1) = 1$  modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Logo, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de modos de ordenar  $n$  objetos distintos é

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n! \quad (3.1)$$

Da equação (3.1), temos algumas definições importantes no processo de contagem:

**Definição 3.3.** Dado um número natural  $n \geq 2$ , chama-se **FATORIAL** de  $n$  e indica-se por  $n!$ , o produto obtido pela multiplicação de  $n$  por todos os seus antecessores inteiros e positivos, de modo sucessivo, isto é,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Além disso, consideramos as seguintes convenções:  $1! = 1$  e  $0! = 1$ .

Da definição de fatorial, surge um tipo de contagem que leva em consideração agrupamentos de elementos ordenados, que se *diferem pela ordem*, estes tipos de agrupamentos, recebem o nome de *Permutações Simples*.

Assim, podemos dizer que cada ordenação dos  $n$  objetos é chamada uma permutação simples de  $n$  objetos e o número total de permutações simples de  $n$  objetos distintos é representado por

$P_n$ . Portanto,  $P_n = n!$ , Além disso, como  $0! = 1$ , define-se  $P_0 = 1$

### Interpretação de fatorial

Podemos dizer que o  $n!$  é a quantidade de permutações de um conjunto com  $n$  elementos.

### Aplicação

Qual é o maior entre os números  $n!$  e  $2^n$ ? Isto é, um conjunto com  $n$  elementos tem mais permutações do que subconjuntos?

*Solução deste problema está no CAPÍTULO 4 – questão 2*

### Permutações simples com uma visão interpretativa de conjunto

#### Aplicação:

Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  um conjunto de  $n$  elementos, com  $a_i \in \mathbf{N}$  e  $1 \leq i \leq n$ . Quantas são as funções bijetivas  $f : A \rightarrow A$ ?

*Solução:* Temos  $n$  modos para escolher  $f(a_1)$ ; escolhida  $f(a_1)$ , teremos  $(n - 1)$  modos para

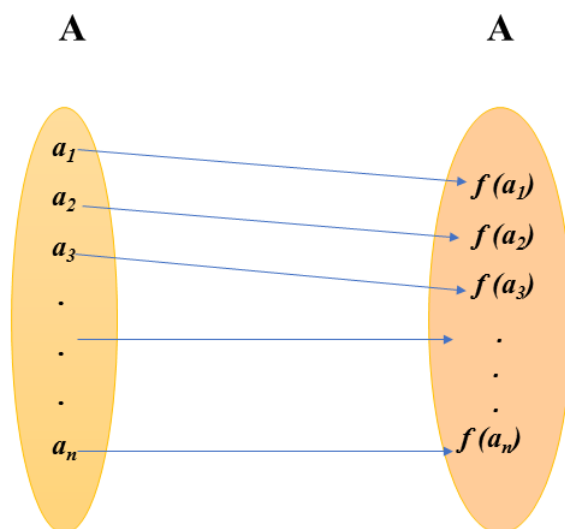


Figura 3.3: Representação da bijetividade

escolher  $f(a_2)$ ; já tendo escolhido  $f(a_1)$  e  $f(a_2)$ , ficará  $(n - 2)$  modos para escolher  $f(a_3)$ ; . . .; para  $f(a_n)$  restará apenas 1 modo.

A resposta é  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 1 = n!$

Portanto, podemos dizer que  $P_n$  é o número de funções bijetivas de um conjunto que possui  $n$  elementos em si mesmo.

### 3.3 Arranjos

Já vimos na seção anterior que permutações simples de  $n$  elementos é qualquer agrupamento ordenado desses  $n$  elementos. Agora, vamos analisar quantos agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, . . . , de  $p$  elementos podemos formar tendo  $n$  elementos, considerando  $p \leq n$ .

Considere os elementos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , então quantos agrupamentos ordenados diferentes podemos formar com 1 elemento, com 2 elementos, com 3 elementos e com 4 elementos?

- Com 1 elemento, temos:

$$(a_1), (a_2), (a_3), (a_4)$$

Ou seja, 4 agrupamentos.

- Com 2 elementos, teremos:

$$(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_3, a_1), (a_4, a_1)$$

$$(a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_4, a_2)$$

$$(a_1, a_4), (a_2, a_4), (a_3, a_4), (a_4, a_3)$$

Isto é, 12 agrupamentos, 4 possibilidades de escolher o 1º elemento e 3 possibilidades restantes para escolher o 2º elemento. Aplicando o PFC, temos o resultado,  $4 \times 3 = 12$ .

- Com 3 elementos, vem:

$$(a_1, a_2, a_3), (a_2, a_1, a_3), (a_3, a_1, a_2), (a_4, a_1, a_2)$$

$$(a_1, a_2, a_4), (a_2, a_1, a_4), (a_3, a_1, a_4), (a_4, a_1, a_3)$$

$$(a_1, a_3, a_2), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_2, a_1), (a_4, a_2, a_1)$$

$$(a_1, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_4), (a_3, a_2, a_4), (a_4, a_2, a_3)$$

$$(a_1, a_4, a_2), (a_2, a_4, a_1), (a_3, a_4, a_1), (a_4, a_3, a_1)$$

$$(a_1, a_4, a_3), (a_2, a_4, a_3), (a_3, a_4, a_2), (a_4, a_3, a_2)$$

24 agrupamentos, 4 possibilidades de escolher o 1º elemento, 3 possibilidades restantes para escolher o 2º elemento e duas possibilidades que sobram, já tendo escolhido os dois primeiros elementos. Aplicando o PFC, segue o resultado,  $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

- Finalmente, com 4 elementos (neste caso se iguala ao conceito de permutações simples):

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_2, a_1, a_3, a_4), (a_3, a_1, a_2, a_4), (a_4, a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_4, a_3), (a_2, a_1, a_4, a_3), (a_3, a_1, a_4, a_2), (a_4, a_1, a_3, a_2)$$

$$(a_1, a_3, a_2, a_4), (a_2, a_3, a_1, a_4), (a_3, a_2, a_1, a_4), (a_4, a_2, a_1, a_3)$$

$$(a_1, a_3, a_4, a_2), (a_2, a_3, a_4, a_1), (a_3, a_2, a_4, a_1), (a_4, a_2, a_3, a_1)$$

$$(a_1, a_4, a_2, a_3), (a_2, a_4, a_1, a_3), (a_3, a_4, a_1, a_2), (a_4, a_3, a_1, a_2)$$

$$(a_1, a_4, a_3, a_2), (a_2, a_4, a_3, a_1), (a_3, a_4, a_2, a_1), (a_4, a_3, a_2, a_1)$$

Ou seja, 24 agrupamentos também igual a quantidade de agrupamentos com 3 elementos. Ou seja, 4 possibilidades de escolher o 1º elemento, 3 possibilidades restantes para escolher o 2º elemento, duas possibilidades que sobram, já tendo escolhido os dois primeiros elementos e 1 possibilidade apenas para o 4º elemento. Aplicando o PFC, teremos o resultado,  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

Com base neste exemplo, vamos verificar o caso geral, ou seja, o número total desses agrupamentos de  $n$  elementos, arranjados (agrupados)  $p$  a  $p$ , com  $p \leq n$ . Vamos indicar isto por  $A_{n,p}$ .

i) Para  $n = p$ , vimos acima que  $A_{n,p} = P_n = n!$ , já estudado.

ii) Para  $n > p$ , temos  $n$  elementos distintos e vamos arranjá-los  $p$  a  $p$ , através da construção de uma árvore de possibilidades, seguindo o raciocínio do exemplo acima dado.

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{1^\circ} & \underline{2^\circ} & \underline{3^\circ} & \dots & \dots & \dots & \underline{p\text{-ésimo}} \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(p-1)] \end{array}$$

– Na primeira posição temos  $n$ , porque temos  $n$  elementos disponíveis;

– Na segunda posição teremos  $(n-1)$ , porque restam  $(n-1)$  elementos, já tendo escolhido o 1º;

– Na terceira posição vem  $(n - 2)$ , pois já tendo escolhido o 1º e o 2º elementos para ocuparem as duas primeiras posições, respectivamente.

– Seguindo este raciocínio, na  $p$ -ésima posição sobrarão apenas  $[n - (p - 1)]$  elementos para ocupá-la. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, teremos que o número total de agrupamentos de  $n$  elementos, arranjados  $p$  a  $p$  será dado por:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)]$$

Como  $[n - (p - 1)] = (n - p + 1)$ , segue:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$$

Podemos também representar  $A_{n,p}$  por meio de *Fatorial*, multiplicando por  $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$ , pois  $n > p$ , o seu valor não se altera.

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

**Definição 3.4.** (Ver em [2]) *Seja  $A$  um conjunto com  $n$  elementos. Dizemos que Arranjos de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$  ( $p \leq n$ ) são agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com  $p$  dos  $n$  elementos do conjunto. A quantidade total desses agrupamentos é denotada por  $A_{n,p}$  ou  $A_n^p$*

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

### Interpretação de Arranjo com uma visão de conjuntos

#### *Aplicação:*

Sejam  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  dois conjuntos de números naturais. Quantas são as funções injetivas  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ , Com  $m \leq n$ ?

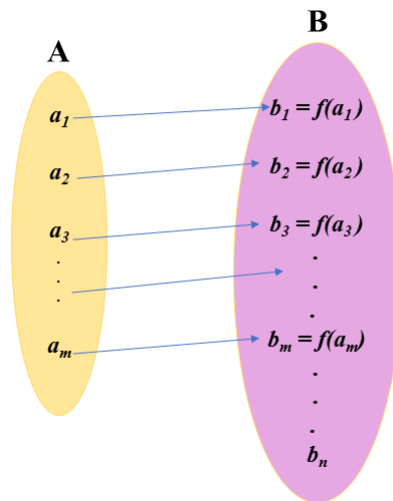


Figura 3.4: Representação da injetividade

**Solução:**

Temos  $n$  modos para escolher  $f(a_1)$ ; escolhida  $f(a_1)$ , teremos  $(n - 1)$  modos para escolher  $f(a_2)$ ; já tendo escolhido  $f(a_1)$  e  $f(a_2)$ , ficará  $(n - 2)$  modos para escolher  $f(a_3)$ ; . . .; para  $f(a_m)$  restará  $(n - p + 1)$  modos.

Logo a resposta é  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{n,p}$

**Observação 3.1.** Se você assimilou bem o conceito de Arranjo, pode notar que tem o mesmo significado do Princípio Fundamental da Contagem. Mas, o mais importante do que decorar uma fórmula e aplicá-la, é fazer com que o aluno possa compreender o que está sendo feito, neste sentido estamos dando vida ao verdadeiro aprendizado do ensino de Combinatória.

### 3.4 Combinações Simples

Para introduzir outra forma de contar, vamos responder à seguinte questão: de quantas maneiras podemos escolher  $m$  elementos diferentes de  $n$  elementos distintos dados, tendo que  $m \leq n$ ?

Consideramos primeiramente a seguinte situação: digamos que temos quatro elementos distintos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . De quantos maneiras podemos escolher 2 objetos também distintos dentre estes 4?

$$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)$$



Observe que esta situação é mesmo que dizer: "quantos são os subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com 4 elementos?"

Assim, podemos dizer que quando falamos de combinações simples, estamos diretamente tratando da relação entre conjunto e subconjunto.

Logo, cada subconjunto com  $m$  elementos é chamado de uma combinação simples de classe  $m$  dos  $n$  elementos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . Interpretando a questão acima exposta dando uma visão de conjunto, temos:

Quantos são os subconjuntos com  $m$  elementos do conjunto  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ?

Para responder esta questão vamos verificar novamente um exemplo mais simples. Considere um conjunto com 5 elementos  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ , vamos calcular o número de combinações simples com 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_2, a_5), (a_1, a_3, a_4), (a_1, a_3, a_5), (a_1, a_4, a_5), (a_2, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_5), (a_2, a_4, a_5), (a_3, a_4, a_5)$$

Mas, observe o seguinte, que cada combinação simples de 3 elementos dá origem a 6 arranjos, permutando-se de todos os modos possíveis seus 3 elementos.

Tomemos como exemplo a combinação  $(a_1, a_2, a_3)$ , permutando todos os seus elementos, encontramos os arranjos

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).$$

Isto significa que o número total de Arranjos Simples de 5 elementos distintos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de Combinações Simples tomados 3 a 3, ou seja:

$$A_{5,3} = 6 \cdot C_{5,3}$$

Como 6 foi obtido fazendo Permutações Simples de 3 elementos, digamos  $a_1, a_2, a_3$ , isto é,  $P_3 = 6$ . Daí segue que:

$$A_{5,3} = P_3 \cdot C_{5,3}$$

Ou,

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{5!}{(5-3)! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

**Definição 3.5.** (Ver em [2]) Seja  $A$  um conjunto com  $n$  elementos. Dizemos que Combinações Simples de  $n$  elementos tomados  $m$  a  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) são os **subconjuntos** de  $A$  com exatamente  $m$  elementos que se podem formar com os  $n$  elementos dados. Lembrando que subconjuntos diferem entre si não pela ordem, mas apenas pela natureza de seus elementos. A quantidade total desses subconjuntos é denotada por  $C_{n,m}$ ,  $C_n^m$  ou  $\binom{n}{m}$

$$C_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(Ver em [8]) Por outro lado, se  $m > n$ , a definição se estenderá para seguinte forma:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & \text{para } m \leq n \\ 0, & \text{para } m > n \end{cases}$$

Portanto, podemos dizer que o número de arranjos de  $n$  elementos distintos tomados  $m$  a  $m$  está sempre na mesma razão para o número de combinações destes  $n$  elementos tomados  $m$  a  $m$  e esta razão é exatamente  $P_m$ .

Outro ponto que podemos destacar é que, do mesmo modo que se obtém a fórmula da combinação por meio da divisão de um arranjo pela permutação, podemos resolver problemas de combinações simples sem uso de fórmula, calculando o arranjo sem a fórmula (aplicando o P.F.C.) e dividindo o resultado pelas permutações dos elementos escolhidos.

**Exemplo 3.4.** Num grupo de 12 alunos pré-selecionados para representar uma escola em um campeonato de xadrez, de quantos maneiras diferentes podemos escolher 3?

**Resolução do exemplo:** Para escolher o 1º aluno temos 12 possibilidades; Para escolher o 2º aluno, já tendo escolhido o 1º, teremos 11 possibilidades; Para escolher o 3º aluno, nos restam 10 possibilidades. Aplicando o P. F. C. temos  $12 \times 11 \times 10 = 1320$

Como a escolha digamos dos alunos (ABC), foram contadas 6 vezes, que corresponde a  $P_3 = 6$ , devemos dividir o resultado por 6. Logo, a resposta é  $\frac{1320}{6} = 220$ .

**Teorema 3.1.** Dado um conjunto  $A$ , vazio ou com  $n$  elementos distintos, o número de Arranjos destes  $n$  elementos tomados  $m$  a  $m$  ( $A_{n,m}$ ), está sempre numa mesma razão para o número de Combinações desses  $n$  elementos tomados  $m$  a  $m$  ( $C_{n,m}$ ) e esta razão é exatamente o número de Permutações de  $m$  ( $P_m$ ), com  $m \leq n$ , isto é,

$$\frac{A_{n,m}}{C_{n,m}} = P_m$$

**Prova.** Faremos essa prova por indução sobre  $n$ , mantendo  $m$  fixo e consirando  $m \leq n$ .

i) Para  $n = m$ , temos:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = \frac{m!}{1} = m! \\ \mathbf{C}_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{m!}{m!0!} = \frac{m!}{m!} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}_{n,m}}{\mathbf{C}_{n,m}} = \frac{m!}{1} = m! = \mathbf{P}_m$$

*Nota:* Este caso vale quando o conjunto  $\mathbf{A}$  for vazio.

ii) para  $m < n$ , então existe um  $k$  natural tal que  $n = m + k$ . Daí,

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(m+k)!}{(m+k-m)!} = \frac{(m+k)!}{k!} \\ \mathbf{C}_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{(m+k)!}{m!(m+k-m)!} = \frac{(m+k)!}{m!k!} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{A}_{n,m}}{\mathbf{C}_{n,m}} = \frac{\frac{(m+k)!}{k!}}{\frac{(m+k)!}{k!m!}} = m! = \mathbf{P}_m$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática  $\frac{\mathbf{A}_{n,m}}{\mathbf{C}_{n,m}} = \mathbf{P}_m$  é verdadeira para  $m \leq n$ . ■

Falamos sobre o *Princípio da Indução Matemática* no Apêndice.

Agora apresentaremos uma outra solução para o exemplo abordado na seção 2.1 deste capítulo:

Dado um conjunto com  $n$  elementos, quantos subconjuntos podemos formar?

**Solução por Árvore de possibilidades:** considere (S) *pertence* e (N) *não pertence*.

Para um conjunto com 3 elementos  $\{ a_1, a_2, a_3 \}$ , temos como resultado  $2^3 = 8$ .

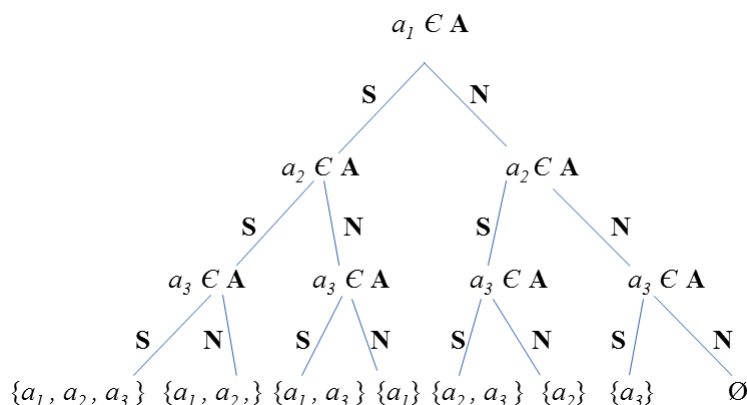


Figura 3.5: Árvore de possibilidades

Se desenvolvermos a árvore acima para um conjunto  $\{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n \}$ , chegaremos ao resultado esperado  $2^n$ .

Para generalizarmos esse resultado, conectando-o ao tema de combinatória, vamos analisar a proposição abaixo:

**Proposição 3.1.** (Ver em [14]) Se  $n \geq 0$ , então  $\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = 2^n$ .

**Demonstração: 1.** Um conjunto com  $n$  elementos tem um total  $2^n$  subconjuntos diferentes, como já vimos. Cada subconjunto tem ou zero elemento, ou um elemento, ou dois elementos ... ou  $n$  elementos. Há  $\binom{n}{0}$  subconjuntos que não tem quaisquer elemento,  $\binom{n}{1}$  subconjuntos com um elemento,  $\binom{n}{2}$  subconjuntos com dois elementos ... e  $\binom{n}{n}$  subconjuntos com  $n$  elementos. Portanto,

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m}$$

é o número total de subconjuntos de um conjunto com  $n$  elementos. Isto mostra que

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = 2^n.$$

■

Agora apresentamos duas propriedades muito úteis para facilitar os cálculos nas resoluções de problemas e nas demonstrações em combinatória.

**Propriedade 3.1.** Para quais quer  $0 \leq m \leq n$  vale que  $C_{n,m} = C_{n,n-m}$

**Demonstração: 2.**  $C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{(n-m)!(m!+n-n)} = \frac{n!}{(n-m)![(n-(n-m))!]} = C_{n,n-m}$ .

**Usando interpretação de conjunto:** Dado um conjunto com  $n$  elementos distintos, para cada subconjunto de  $m$  elementos construído, sobra um de  $n - m$  elementos.

Essa propriedade é conhecida como **igualdade das combinações complementares**, que é muito útil para facilitar os cálculos.

**Propriedade 3.2.** Para quais quer  $0 \leq m \leq n$  vale que  $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}$

**Prova.** Usando a linguagem interpretativa de conjunto

Seja  $A$  um conjunto com  $n$  elementos distintos, considere  $x \in A$ . O número de subconjuntos de  $A$  com  $m$  elementos é  $\binom{n}{m}$ . Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais  $x$  figura  $\binom{n-1}{m-1}$  com o número de subconjuntos nos quais  $x$  não figura  $\binom{n-1}{m}$ .

■

**Prova. Por Álgebra**

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} = \frac{m(n-1)! + (n-m)(n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(n-m)!(m+n-m)}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

■

Essa propriedade é conhecida como **Relação de Stifel**, que é muito útil para várias demonstrações em Combinatória.

**Proposição 3.2.** (Ver em [14]) Se  $n > 0$ , então  $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} = 0$ .

**Demonstração: 3.** Vamos fazer essa demonstração pelo Princípio da Indução Matemática sobre  $n$ .

i) Primeiramente vamos verificar para  $n = 1$ .

$$\sum_{m=0}^1 (-1)^m \binom{1}{m} = \sum_{m=0}^1 (-1)^m \binom{1}{m} = (-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = 1.1 + (-1).1 = 1 - 1 = 0$$

ii) Para  $n = 2$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} &= \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} = (-1)^0 \binom{2}{0} + (-1)^1 \binom{2}{1} + (-1)^2 \binom{2}{2} = 1.1 + \\ &(-1).2 + 1.1 = 1 - 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

iii) Agora para algum  $n$  natural qualquer, suponhamos  $\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} = 0$  verdadeira.

Vamos mostrar que esta igualdade é válida para  $(n + 1)$ . Assim temos:

$$\sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} = \binom{n+1}{0} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} \quad (3.2)$$

Aplicando a **Relação de Stifel** na última parcela da equação (3.2), segue que:

$$1 + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \left[ \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \right] = 1 + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m-1} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m}.$$

Reescrevendo o número 1, na soma temos:

$$\binom{n}{0} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m-1} = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n+1} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m-1}$$

Aplicando a hipótese de indução na 1ª e na 3ª parcela, e, a definição estendida de combinação na 2ª parcela, temos o resultado:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} + (-1)^{n+1} \binom{n}{n+1} + \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^m \binom{n}{m-1} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Portanto,  $\sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{m} = 0$ . Ou seja, a igualdade é válida para  $n+1$ . Logo, pelo **Princípio da Indução Matemática** ela é verdadeira para todo  $n > 0$

■

## Interpretação de Combinações Simples com uma visão de conjunto

Agora vamos relembrar a definição de função estritamente crescente:

**Definição 3.6.** (Ver em [12]) Uma função  $f$  é dita estritamente crescente num conjunto  $\mathbf{I}$  quando para qualquer par de pontos  $a_1$  e  $a_2$ , com  $a_1 < a_2$ , tem-se  $f(a_1) < f(a_2)$ .

Sejam  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  dois conjuntos de números naturais. Quantas são as funções  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  estritamente crescente?

**Solução:**

Aplicando a definição acima, temos que o conjunto Imagem de  $f$  terá exatamente  $n$  elementos e isso poderá ser escolhido de  $\binom{n}{m}$  modos. Feito isso, só haverá um modo de formar a

função, pois, se  $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$ . Logo a resposta é  $C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Até agora estudamos um conjunto com  $n$  elementos distintos e formamos os diversos agrupamentos possíveis, tomando  $p$  elementos de cada vez. Nestes agrupamentos vimos que se diferenciaram entre si ou pela *ordem* em que estavam colocados os elementos ou pela *natureza* de alguns deles. Quando atendeu as duas condições, trabalhamos os *Arranjos*; quando se atendeu somente a segunda condição, estudamos as *Combinações Simples*; no caso em que  $n = p$ , todos os elementos entram em cada grupo e estes diferenciaram-se apenas pela *ordem*, com este tipo de agrupamento analisamos as *Permutações*.

Resumindo, dado um problema, se:

\*  $p = n$ , o problema é de *Permutação*;

\*  $p \leq n$ , o problema é de *Arranjo*, se os agrupamentos diferem entre si pela *natureza* ou pela *ordem* dos elementos.

\*  $0 \leq p \leq n$ , o problema é de *Combinação*, se os agrupamentos diferem apenas pela *natureza* dos elementos.

Mas, lembre-se, que nada disso terá sentido se você não tiver assimilado o verdadeiro significado do raciocínio combinatório, através do entendimento baseado no conceito de conjuntos e no Princípio Fundamental de Contagem.

Agora iremos analisar outros tipos de agrupamentos onde os elementos nem todos são distintos.

### 3.5 Permutações com elementos repetidos

Para introduzirmos esta seção, vamos estudar algumas estruturas de palavras chamadas anagramas, que são palavras com ou sem sentido, formadas a partir da troca de posições das letras de uma palavra de sentido.

Considere a palavra *pop*. Vamos listar todos os anagramas desta palavra.

(*pop*) (*opp*) (*ppo*)

Temos 3 anagramas.

Se os "p's" fossem diferentes, digamos  $p_1 \neq p_2$ , teríamos 6 agrupamentos.

Analise agora a palavra *baba*. Vamos listar todos os anagramas desta palavra

(baba) (bbaa) (baab) (abab) (aabb) (abba)

Total de 6 anagramas.

Se tivermos 4 elementos diferentes, digamos  $a, b, c, d$ . Encontramos 24 anagramas.

Se tivermos uma palavra com maior quantidade de letras e estas se repetem em maior número, teremos mais dificuldade em listar todos os anagramas. Então vamos generalizar o nosso problema.

Se há  $r$  elementos, com  $r_1$  iguais do tipo 1,  $r_2$  elementos iguais do tipo 2, . . . ,  $r_m$  elementos iguais do tipo  $m$ , onde  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = r$ , então todas as permutações distintas geradas por esses elementos recebem o nome de *Permutações com Repetição* e essa quantidade é denotada por  $\mathbf{P}_n^{r_1, r_2, \dots, r_m}$

Então, quantas permutações com  $r$  elementos existem?

Se afirmarmos que são  $r!$  permutações, estaremos calculando as permutações simples desses  $r$  elementos, ou seja, estamos contando permutações de elementos iguais como se fossem diferentes, mas sabemos que existem elementos repetidos.

Assim, para descontarmos o que foi contado a mais, devemos dividir pelo número de permutações de cada elemento igual presente no conjunto.

$$\mathbf{P}_r^{r_1, r_2, \dots, r_m} = \frac{r!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_m!}. \quad \text{Permutações com Repetição}$$

Vamos verificar isto.

Considere os elementos  $a, a, a, b, c, c, d$  nem todos distintos. Qual é a quantidade de agrupamentos que podemos obter, fazendo permutações com estes 7 elementos?

Observe que são sete posições para colocar os sete elementos;

Digamos que vamos colocar primeiro as letras "a's", então devemos escolher 3 posições entre as 7 disponíveis, isto é,  $\mathbf{C}_{7,3}$ . Colocados os "a's", vamos colocar os "c's", como resta 4 posições, temos:  $\mathbf{C}_{4,2}$ . Agora para colocar a letra  $b$ , teremos  $\mathbf{C}_{2,1}$ . Por fim, a letra  $d$ , temos  $\mathbf{C}_{1,1}$

Logo,



$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{C}_{7,3} & \cdot & \mathbf{C}_{4,2} & \cdot & \mathbf{C}_{2,1} & \cdot & \mathbf{C}_{1,1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} & \cdot & \frac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \frac{1!}{1!(1-1)!} \\
\frac{7!}{3!4!} & \cdot & \frac{4!}{2!2!} & \cdot & \frac{2!}{1!1!} & \cdot & \frac{1!}{1!0!} \\
\frac{7!}{3!} & \cdot & \frac{1}{2!} & \cdot & \frac{1}{1!} & \cdot & \frac{1}{1!} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

Repetir 3 a's    Repetir 2 c's    um b    um d

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = \mathbf{P}_7^{3,2,1,1}$$

Seguindo com o mesmo raciocínio, no caso geral temos, para  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = r$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r^{r_1, r_2, \dots, r_m} &= \mathbf{C}_{r, r_1} \cdot \mathbf{C}_{(r-r_1), r_2} \cdot \dots \cdot \mathbf{C}_{(r-r_1-r_2-\dots-r_m), r_m} = \frac{r!}{r_1!(r-r_1)!} \cdot \frac{(r-r_1)!}{r_2!(r-r_1-r_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(r-r_1-r_2-\dots-r_{m-1})!}{r_m!(r-r_1-r_2-\dots-r_m)!} \\
&= \frac{r!}{r_1!r_2! \dots r_m! \cdot 0!} = \frac{r!}{r_1!r_2! \dots r_m!}
\end{aligned}$$

Assim, o número de permutações com elementos repetidos, cujas repetições satisfazem  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = r$  é dada por

$$\mathbf{P}_r^{r_1, r_2, \dots, r_m} = \frac{r!}{r_1!r_2! \dots r_m!}$$

### 3.6 Combinações Completas ou com Repetição

Vamos introduzir este tópico através da seguinte situação-problema: Hoje é seu aniversário, mas infelizmente você está sem condições financeiras de fazer uma grande comemoração. Contudo, para não passar em branco você convida apenas alguns familiares e amigos mais próximos e decide comprar 5 pizzas em uma pizzaria que oferece 8 sabores. De quantas maneiras é possível comprar estas 5 pizzas?

Analisemos o seguinte, como são 5 pizzas a serem compradas e levando em consideração que você pode pedir algumas pizzas do mesmo sabor, pois, muitas vezes um sabor é mais preferível que outro, seria errado você contar as maneiras usando  $\mathbf{C}_{8,5} = 56$ . Porque, isto é o número de maneiras de comprar 5 pizzas de sabores diferentes, dos 8 sabores oferecidos pela pizzaria.

Este problema é um típico caso de combinações completas ou com repetição, que consiste no número total de modos de escolher  $p$  elementos *distintos* ou *não* entre  $n$  elementos dados.

Representamos combinações completas ou com repetição por  $\mathbf{CR}_n^p$ .

Para chegarmos a resposta do problema acima, analisamos um caso mais simples. Vamos listar todas as combinações completas de classe 3 dos elementos  $a, b, c, d$  tomados 3 a 3:

$aaa \quad bbb \quad ccc \quad ddd \quad abc \quad bcd$   
 $aab \quad bba \quad cca \quad dda \quad abd$   
 $aac \quad bbc \quad ccb \quad ddb \quad acd$   
 $aad \quad bbd \quad ccd \quad ddc$

Ou seja,  $\mathbf{CR}_4^3 = 20$ .

Voltemos à compra das 5 pizzas. Para efetuarmos a compra, devemos escolher valores para as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_8$ , onde  $x_1$  é a quantidade de pizzas que vamos comprar do sabor 1,  $x_2$  é a quantidade de pizzas que vamos comprar do sabor 2, . . . ,  $x_8$  é a quantidade de pizzas que vamos comprar do sabor 8. Os  $x_1, x_2, \dots, x_8$  devem ser números maiores ou iguais a zero (inteiros não negativos), pois, não tem sentido serem números negativos, uma vez que representam quantidade de sabores das pizzas.

Como sabemos que a soma total das pizzas deve ser 5, independente da quantidade dos sabores que iremos escolher, então é o mesmo que tomar uma solução em inteiros não negativos da equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$

Portanto, podemos interpretar *combinações completas ou com repetição* de duas maneiras:

1ª)  $\mathbf{CR}_n^p$  é o número de modos de escolher  $p$  elementos, distintos ou não, de um total de  $n$  elementos dados;

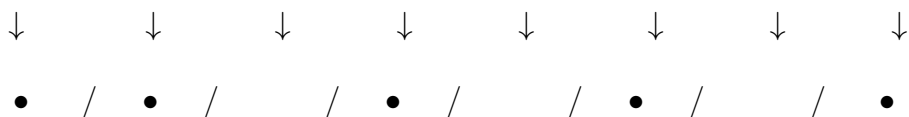
2ª)  $\mathbf{CR}_n^p$  é o número de soluções (em inteiros não negativos) da equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ .

Temos um esquema bem simples para encontrar algumas soluções destas equações, conhecido como **bola-barra**. Onde, cada **bola** representa *uma unidade* no valor da incógnita e cada **barra** é usado para *separar as unidades*. Neste esquema, o número total de bolas é dado por  $p$  e o número total de barras que você coloca no esquema será  $(n - 1)$ , veja como funciona:

$$\mathbf{CR}_8^5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$$

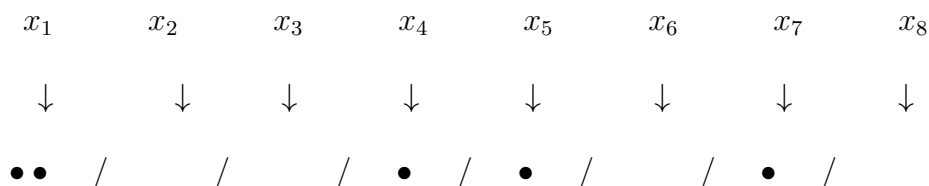
**Uma solução:**

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$



A Solução  $\{(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)\}$  - significa uma pizza do sabor 1, uma pizza do sabor 2, nenhuma pizza do sabor 3, uma pizza do sabor 4, nenhuma pizza do sabor 5, uma pizza do sabor 6, nenhuma pizza do sabor 7 e uma pizza do sabor 8.

**Outra possível solução:**



A Solução  $\{(2, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)\}$  - significa duas pizzas do sabor 1, nenhuma pizza do sabor 2, nenhuma pizza do sabor 3, uma pizza do sabor 4, uma pizza do sabor 5, nenhuma pizza do sabor 6, uma pizza do sabor 7 e nenhuma pizza do sabor 8.

Analisando o esquema **bola-barra**, temos que para formar uma representação, devemos arrumar em fila 5 bolas (pois em cada possível solução, o total de unidade nas incógnitas é 5, já que  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5$ ) e mais 7 barras para separar as 8 incógnitas. Ou seja, o modo de fazer isso é

$$P_{5+7}^{5,7} = \frac{12!}{7!5!} = C_{12}^5$$

Assim,

$$CR_8^5 = C_{12}^5 = 792$$

No caso geral, para calcular  $CR_n^p$ , isto é, o número de soluções inteiras e não negativas da equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$ , onde temos  $p$  bolas e  $(n - 1)$  barras é

$$CR_n^p = P_{p+(n-1)}^{p,(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p$$

**Interpretação de Combinações Completas com uma visão de conjunto**

**Aplicação:**

Sejam  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e  $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  dois conjuntos de números naturais. Quantas são as funções  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  crescentes?

**Solução:** Para nos auxiliar na resolução da questão, vamos relembrar a definição de função crescente:

**Definição 3.7.** (Ver em [12]) Uma função  $f$  é dita crescente num conjunto  $I$  quando para qualquer par de pontos  $a_1$  e  $a_2$ , com  $a_1 < a_2$ , tem-se  $f(a_1) \leq f(a_2)$ .

Aplicando a definição acima, então basta escolher  $m$  elementos, não necessariamente distintos, no Contra-Domínio para formarem a Imagem da função, o que pode ser feito de  $\mathbf{CR}_n^m$  modos. Escolhidos os elementos, só haverá um modo de estabelecer a correspondência entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Logo, a resposta é  $\mathbf{CR}_n^m = \mathbf{C}_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

### 3.7 Princípio da Inclusão-Exclusão

Em Combinatória não poderíamos deixar de falar sobre um importante princípio de contagem que está diretamente relacionado com o tema do nosso trabalho, este princípio é conhecido como "*Princípio da Inclusão-Exclusão*". Na primeira subseção deste capítulo, fizemos uma referência a um princípio elementar de contagem que estabelece que o número de elementos da união de conjuntos disjuntos é a soma dos números de elementos de cada conjunto (*Princípio Aditivo*).

Na sua versão mais geral, o princípio da inclusão-exclusão, afirma que a união de dois conjuntos, não necessariamente disjuntos, satisfaz a seguinte expressão em termos de sua cardinalidade:

$$\#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Uma das maneiras de justificar este fato é: suponha que haja  $z$  elementos comuns a  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , e que além disso, temos  $x$  elementos que pertence a  $\mathbf{A}$  e não a  $\mathbf{B}$ , e  $y$  elementos que pertence a  $\mathbf{B}$ , mas não a  $\mathbf{A}$ , como mostra a figura abaixo:

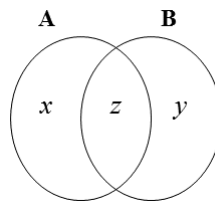


Figura 3.6: União de dois conjuntos não disjuntos

Da observação da figura, temos:  $\#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = x + z + y$

Por outro lado, temos também que,

$$\#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (x + z) + (z + y) - z = x + z + y = \#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$$

Para três conjuntos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , o Princípio da Inclusão-Exclusão afirma que

$$\#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} + \#\mathbf{C} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \#(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

Antes de justificar este fato, vamos considerar as seguintes propriedades:

$$\textit{Associativa: } *(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \qquad *(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

$$\textit{Distributiva: } *\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \qquad *\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \#[\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}] &= \#[(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}] \\ &= \#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) + \#\mathbf{C} - \#[(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}] \\ &= \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \#\mathbf{C} - \#[(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})] \\ &= \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \#\mathbf{C} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \#(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \\ &= \#\mathbf{A} + \#\mathbf{B} + \#\mathbf{C} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \#(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra esta fórmula

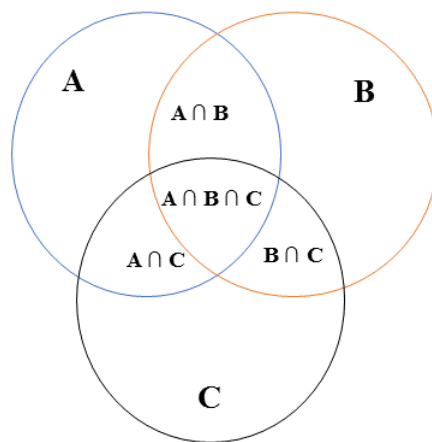


Figura 3.7: O Princípio da Inclusão-Exclusão para três conjuntos mutuamente não disjuntos

Cabe ressaltarmos também, que essa expressão ainda conta os elementos que aparecem em um conjunto uma só vez. Um elemento que ocorre em dois conjuntos também é contado uma vez, pois este elemento aparecerá em uma das três intersecções dos conjuntos. Todavia, os elementos que aparecem nos três conjuntos não serão contados por essa expressão, porque eles aparecem nas três intersecções dos conjuntos. Isso está ilustrado no painel b) da figura 2.9.

Portanto para retificar esta não contagem, adicionamos os números de elementos da intersecção dos três conjuntos. Essa expressão final conta cada elemento uma só vez, sempre que ele estiver em um, dois ou três conjuntos.

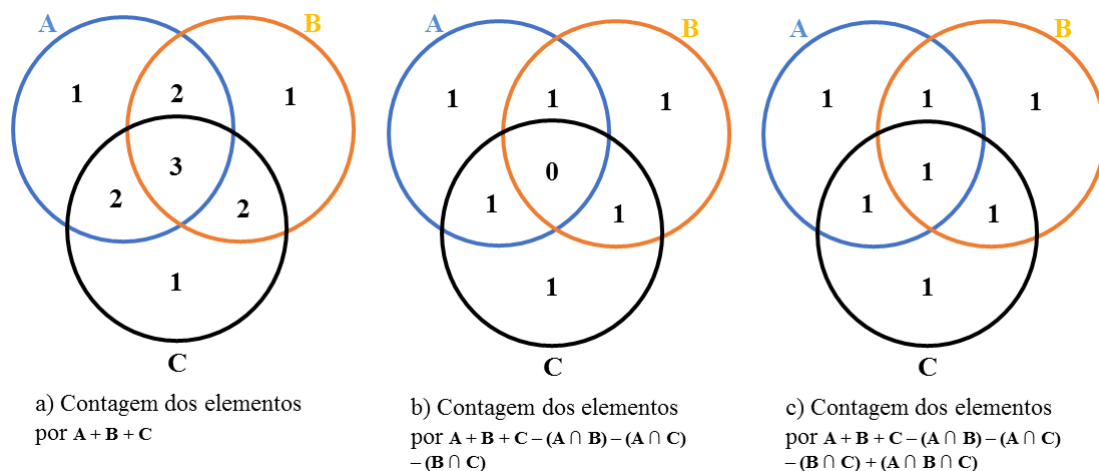


Figura 3.8: Contagem de elementos

Para quatro conjuntos  $A, B, C, D$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \#[A \cup B \cup C \cup D] &= \#A + \#B + \#C + \#D - \\ & \quad [ \#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(A \cap D) + \#(B \cap C) + \#(B \cap D) + \#(C \cap D) ] \\ & \quad + [ \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D) ] \\ & \quad - \#(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Vamos generalizar esta fórmula para  $n$  conjuntos não mutuamente disjuntos através do seguinte teorema:

**Teorema 3.2.** (Ver em [14]) Considere  $A_1, A_2, \dots, A_n$  como conjuntos finitos e

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Então,

$$\# \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \#(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \# \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \quad (3.3)$$

**Prova.** Vamos demonstrar essa fórmula, aplicando o que já estudamos na seção de combinações e verificando que um elemento da união é contado exatamente uma vez pelo lado direito

da equação acima (Observe a Figura 2.9). Suponha que  $a$  seja um elemento de  $m$  dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , em que  $1 \leq m \leq n$ . Nosso objetivo é contar esse elemento a partir da Proposição 2.2 da seção 2.4, assim temos:

$$C_{m,0} - C_{m,1} + C_{m,2} - \dots + (-1)^m C_{m,m} = 0$$

Dai segue que,

$$1 = C_{m,0} = C_{m,1} - C_{m,2} + \dots + (-1)^{m+1} C_{m,m} \quad (3.4)$$

Este elemento  $a$  é contado  $C_{m,1}$  vezes por  $\sum \#(A_i)$ , é contado  $C_{m,2}$  vezes por  $\sum \#(A_i \cap A_j)$ . Em geral, é contado  $C_{m,m}$  vezes pelo somatório envolvendo  $m$  dos conjuntos  $A_i$ . Então substituindo estas expressões na equação (3.4), obtemos que cada elemento na união é contado exatamente uma vez pela expressão do lado direito da equação (3.3). Isso demonstra o Princípio da Inclusão-Exclusão. ■

**Nota:** O Princípio da Inclusão-Exclusão fornece uma fórmula para o número de elementos na união de  $n$  conjuntos para cada número inteiro positivo  $n$ . Há termos nessa fórmula para o número de elementos na intersecção de todo subconjunto não vazio da coleção de  $n$  conjuntos. Assim, há  $2^n - 1$  termos nessa fórmula.

**Exemplo 3.5.** *De quantos modos podemos iluminar uma sala que possui  $n$  lâmpadas?*

**Solução:**

*Para cada lâmpada que temos na sala, teremos que tomar duas decisões, se ficará **ligada** ou **desligada**. No entanto, temos uma situação em que a sala não ficará iluminada, que é deixando desligada todas as lâmpadas. Portanto, a resposta é  $2^n - 1$ .*

**Exemplo 3.6.** *Numa prova com três questões ( $q_1, q_2, q_3$ ), verificou-se que: 5 alunos acertaram as três questões; 15 alunos acertaram as questões  $q_1$  e  $q_3$ ; 17 alunos acertaram as questões  $q_1$  e  $q_2$ ; 12 alunos acertaram as questões  $q_2$  e  $q_3$ ; 55 alunos acertaram a questão  $q_1$ ; 55 alunos acertaram a questão  $q_2$ ; 64 alunos acertaram a questão  $q_3$ ; 13 alunos erraram as três questões.*

a) *Quantos alunos fizeram a prova (Aplique o Princípio da Inclusão-Exclusão)?*

b) *Faça o diagrama de Venn com a representação do conjunto Universo e seus subconjuntos.*

**Solução:**

Considere  $A$  como sendo o conjunto dos alunos que acertaram a questão  $q_1$ ,  $B$  o conjunto dos alunos que acertaram a questão  $q_2$ ,  $C$  o conjunto dos alunos que acertaram a questão  $q_3$  e  $\bar{N}$  o conjunto dos alunos que erraram as três questões.

a) Temos:

$$\#A = 55; \quad \#B = 55; \quad \#C = 64; \quad \#(A \cap B) = 17; \quad \#(A \cap C) = 15;$$

$$\#(B \cap C) = 12; \quad \#(A \cap B \cap C) = 5;$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) &= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \\ &= 55 + 55 + 64 - 17 - 15 - 12 + 5 = 135 \end{aligned}$$

Como 13 alunos erraram as três questões. Assim, o total de alunos é  $135 + 13 = 148$ .

b) Considere  $\tilde{N}$ , como o número de alunos que erraram as três questões

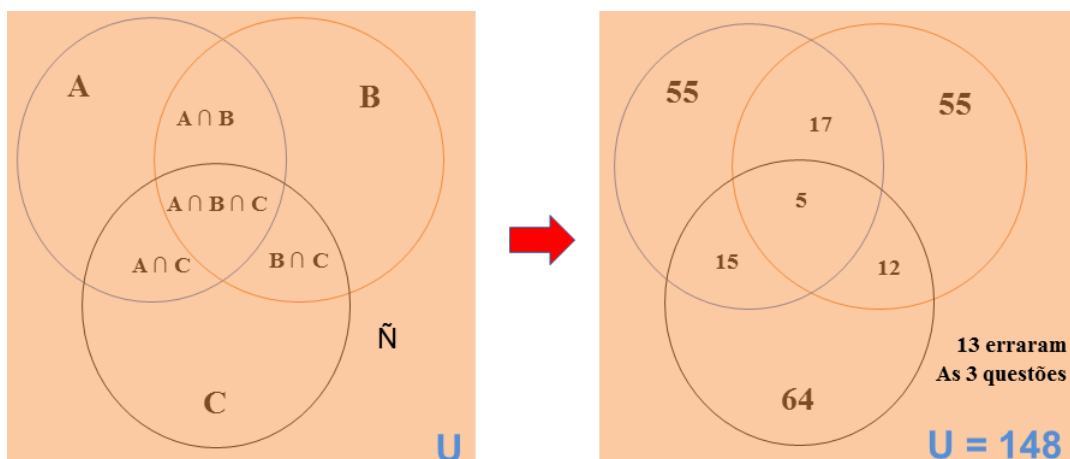


Figura 3.9: O conjunto Universo e seus subconjuntos



## Capítulo 4

# PROJETOS DE APLICAÇÃO UTILIZANDO O GEOGEBRA

Este capítulo é constituído por projetos que podem ser usados ou adaptados para o uso em sala de aula. Sugere que sejam acompanhados de atividades desenvolvidas com o uso do Software Livre Educacional **Geogebra** - versão 6.0.529. Além disso, recomendamos que sejam feitas pesquisas independentes para construção de atitude crítica do ensino da matemática.

O nível de dificuldade entre projetos e dentro deles é variável. O primeiro projeto é, de todos, o mais detalhado e tem por finalidade ilustrar como adaptar este texto, construindo a direção para uma sequência orientada de atividades para a sala de aula.

**Objetivos do Projeto 1.** *Os objetivos principais dos Projetos são: 1) fazer com que o aluno relacione **Combinatória** com a **Geometria**; 2) Fazer com que o aluno deduza fórmulas geométricas mais conhecidas através da análise combinatória.*

**Projeto 1.** *Vamos encontrar o número de diagonais dos Polígonos regulares mais conhecidos, começando com o triângulo equilátero e terminando com o icosagono. Façamos isso aplicando combinatória e em seguida vamos fazer a construção dos polígonos e das suas diagonais utilizando o Geogebra.*

### Desenvolvimento do Projeto 1.

*i) Aplicando combinatória:*

*Temos que para cada segmento que formamos de um polígono, dentre lados e diagonais, precisamos de dois vértices, ou seja,  $C_{n,2}$ . Como sabemos que cada polígono pode ser classificado de acordo com a quantidade de vértices ou lados que ele possui, temos que o número de diagonais ( $D_n$ ) é dado por:  $D_n = C_{n,2} - n$ , onde  $C_{n,2}$  é o total de segmentos dos polígonos dos quais  $n$  é o número de lados, que também pode ser interpretado como a quantidade de vértices.*

ii) Construção no Geogebra.

1º passo: construção de dois controles deslizantes  $r$  e  $n$ . O primeiro vai de 0 a 10 e incremento 0,1, o segundo de 3 a 20 e incremento 1. O controle deslizante  $r$  vai determinar o raio de uma circunferência onde os polígonos vão estar inscritos, o controle deslizante  $n$  a quantidade de lados desses polígonos.

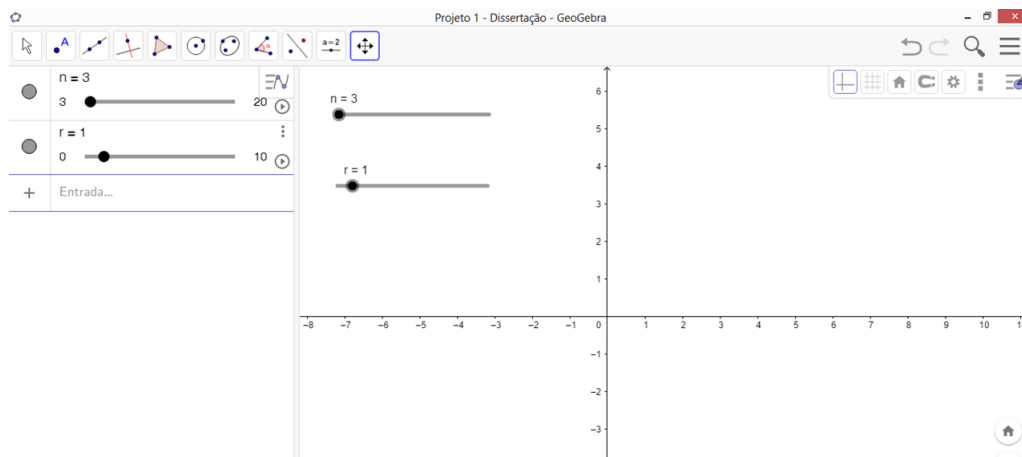


Figura 4.1: Janela do Geogebra com os controles deslizantes

2º passo: Na barra entrada, construa uma lista de pontos com o seguinte comando:

$$L_1 = \text{Sequência}[\text{Girar}[(r, 0), i \frac{2\pi}{n}], i, 0, n].$$

Este comando cria um conjunto de pontos em torno da origem e que distam  $r$  dela.

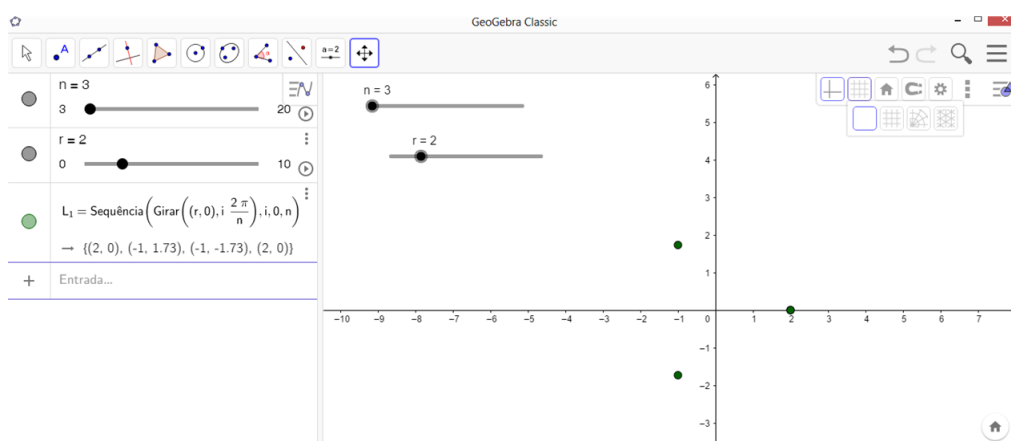


Figura 4.2: Janela do Geogebra com o conjunto de pontos

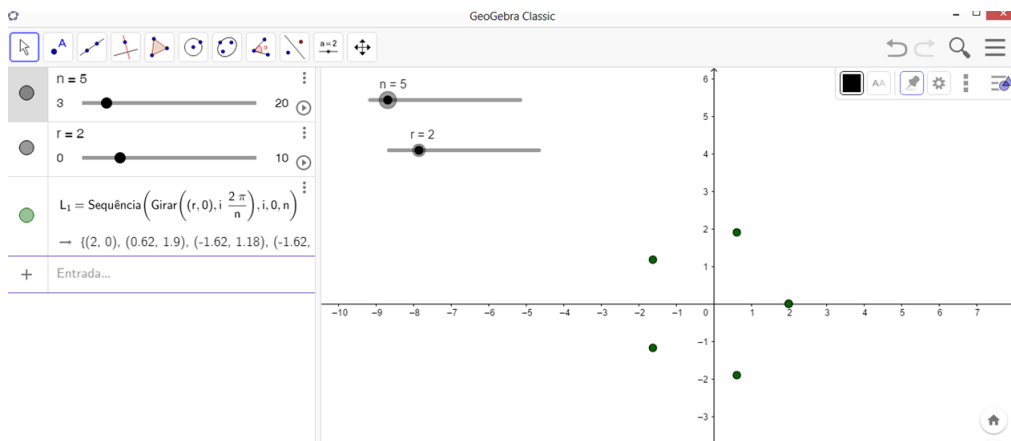


Figura 4.3: O conjunto de pontos

3º passo: Construa um polígono que contém a lista que acabamos de construir. Digite na barra entrada:  $\text{Polígono}[L_1]$

Você pode excluir os eixos, como preferir.

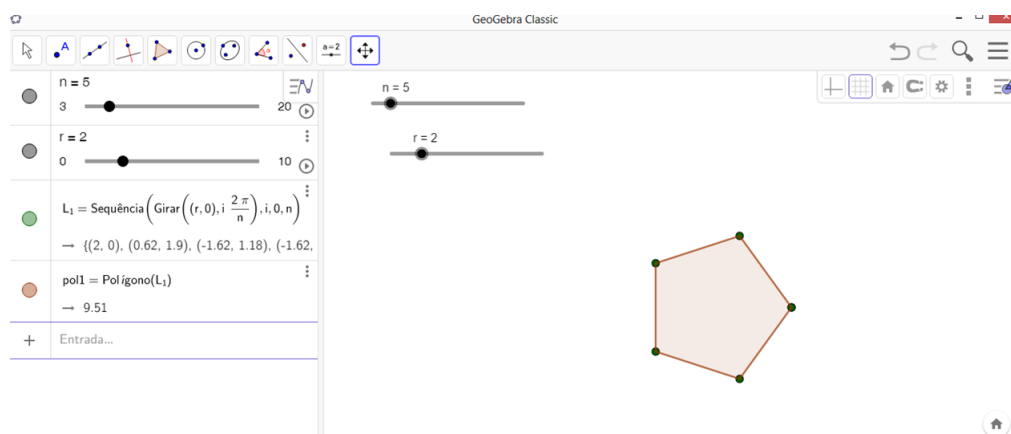


Figura 4.4: Janela do Geogebra com o Polígono construído

4º passo: Construa uma segunda lista que deve conter todas as diagonais que partem de um único vértice. Digite na barra entrada:

$$L_2 = \text{Sequência}[\text{Segmento}[\text{Elemento}[L_1, 1], \text{Elemento}[L_1, i]], i, 3, n - 1].$$

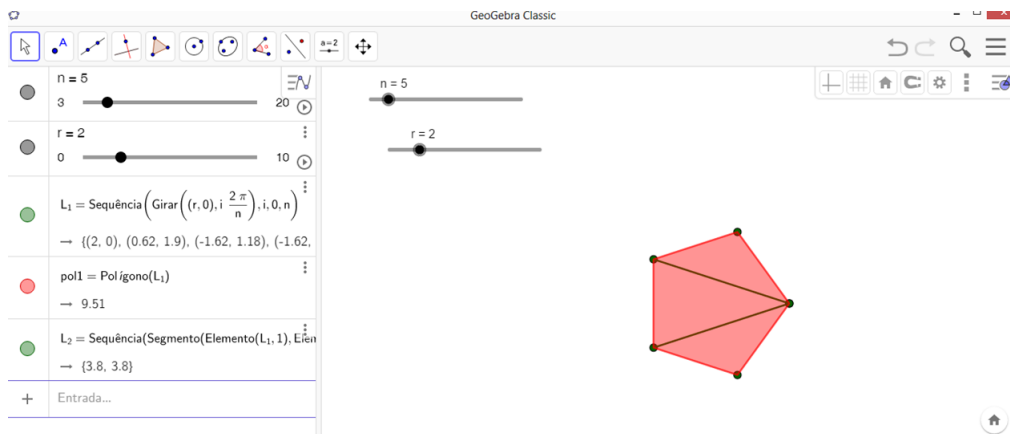


Figura 4.5: Janela do Geogebra com todas diagonais que partem de um vértice do Polígono construído

Mova os controles deslizantes **n** e **r** para ver a quantidade de diagonais.

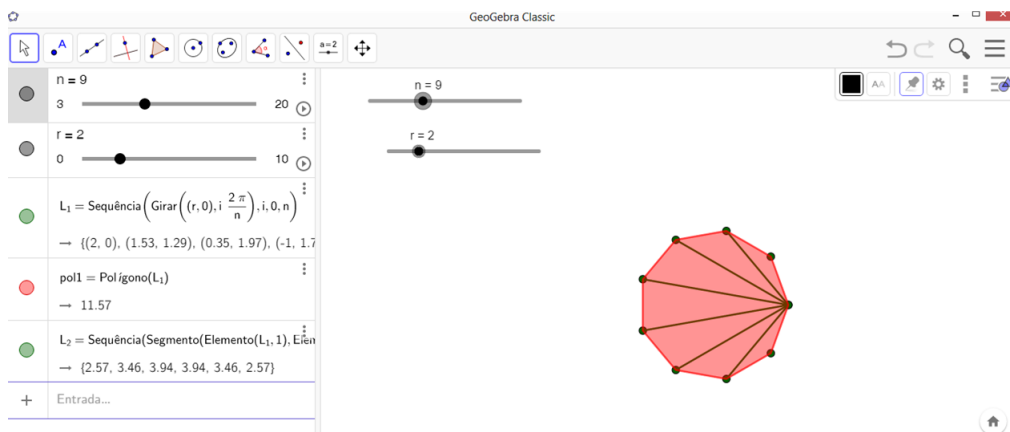


Figura 4.6: Todas diagonais que partem de um vértice do Polígono construído

5º passo: Agora vamos construir as diagonais que partem de todos os vértices. Digite na barra entrada:

$$L_3 = Sequência[Sequência[Segmento[Elemento[L_1, j], Elemento[L_1, i + j]], i, 2, n - 2], j, 1, n - 2].$$

Oculte a  $L_1$  e  $L_2$  e deixe exibida apenas a  $L_3$ , pode-se mudar a cor e a espessura das diagonais do polígono ou do próprio polígono.

Finalmente está pronta a nossa construção e você pode ocultar a  $L_3$  e exibir a  $L_2$  e vice-versa, movendo o controle deslizante **n** para ver a quantidade de diagonais que parte de um vértice e de todos os vértices.

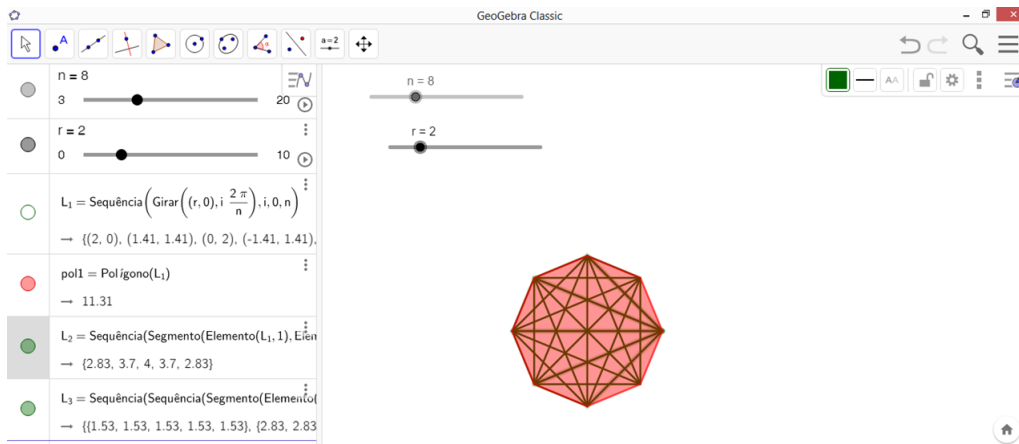


Figura 4.7: Janela do Geogebra com todas diagonais que partem de todos os vértices do Polígono construído

Observe as duas figuras abaixo: uma mostra todas as diagonais que partem de um único vértice e a outra mostrando todas diagonais que partem de todos os vértices do Polígono construído.

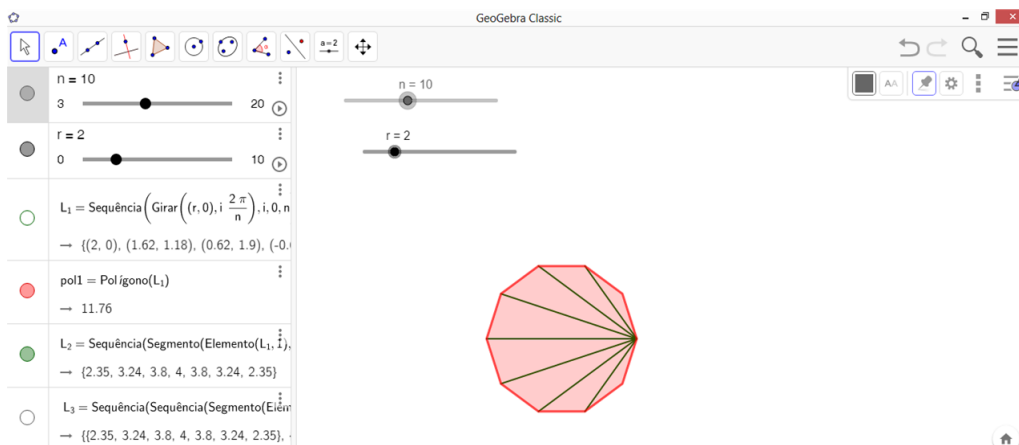


Figura 4.8: Todas diagonais que partindo de um dos vértices do Polígono construído

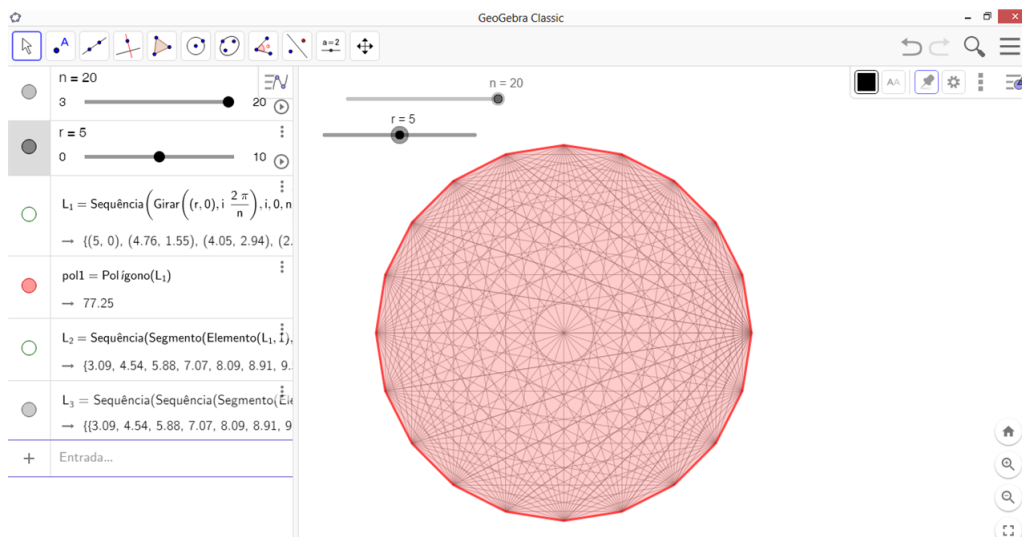


Figura 4.9: Todas diagonais que partindo de todos os vértices do Polígono construído

**Projeto 2.** Agora iremos contar quantos dados (cubos) diferentes podemos formar escrevendo em suas faces números de 1 a 6. Descrevendo a contagem por combinatória e depois fazendo a construção no Geogebra.

- a) Supondo uma face de cada cor;
- b) Supondo faces iguais;
- c) Supondo que as faces são iguais e que a soma dos pontos das faces oposta seja igual a 7.

**Desenvolvimento do Projeto 2.**

i) Utilizando Combinatória:

a) A face F1 pode ser escolhida de 6 modos, a face F2 de 5 modos, e assim sucessivamente. Logo, o número de possibilidades é  $6! = 720$ ;

b) Primeiramente, fazendo a conta para faces de cores diferentes, temos 720 (pelo item a). Agora como as faces são indistinguíveis, por possuírem a mesma cor, o mesmo dado foi contado várias vezes. Por exemplo, o dado que tem F1 para cima e F6 para baixo é igual ao dado que tem F6 para cima e F1 para baixo. Esse mesmo dado aparece outra vez com F1 para frente e F6 para trás, com F1 na esquerda e F6 na direita, e assim por diante. Resumindo, o mesmo dado foi contado tantas vezes quantas são as posições de colocá-lo. Então teremos: 6 modos de escolher a face de cima, escolhida a face de cima restará 4 modos de escolher a face da frente. Aplicando o P.F.C., temos  $6 \times 4 = 24$ . Logo a resposta é  $\frac{720}{24} = 30$

c) Um dado com faces de cores diferentes pode, agora, ser numerado de apenas  $6 \times 4 \times 2 = 48$  modos. Pois, temos 6 opções para a escolha da F1 (que automaticamente determina a F6), 4 opções para F2 (que automaticamente determina a F5) e duas opções para F3 (que automaticamente determina a F4). Porém, como as faces são iguais, cada dado é contado 24 vezes, como no item anterior. Portanto, a resposta é  $\frac{48}{24} = 2$

ii) Construção no Geogebra: Para construir o cubo devemos exibir a janela de visualização 3D do Geogebra, então clique no menu "Exibir" e escolha a opção "janela de Visualização 3D", se preferir feche a outra janela que exibe os dois eixos.

1º passo: Na barra de ferramentas do Geogebra, clique no ícone "Pirâmide", no qual podemos criar de forma rápida alguns poliedros mais simples e entre eles o cubo. Clique na opção do cubo, e na janela 3D, clique em dois pontos que será o tamanho da medida das arestas do cubo, aqui no nosso caso, será os pontos (0,0,0) e (2,0,0). Você poderá aumentar ou diminuir o zoom no ícone ao lado e mover a janela de visualização.

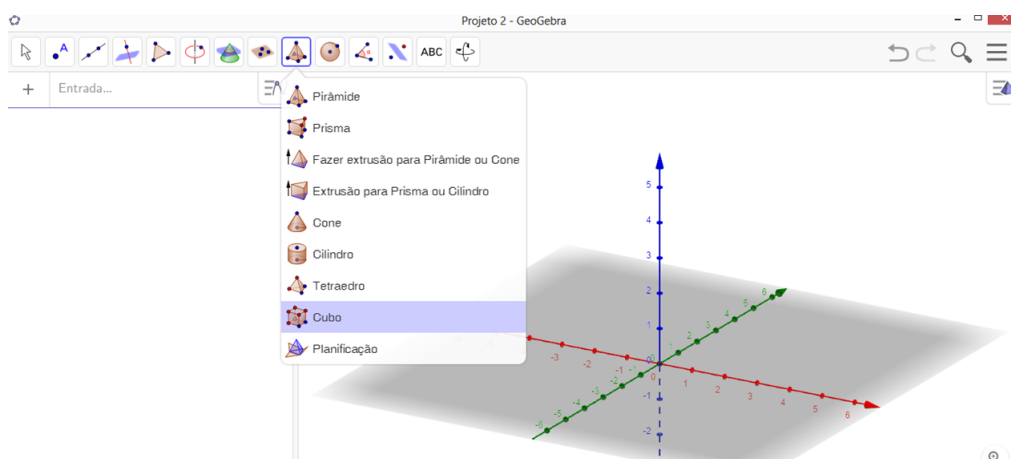


Figura 4.10: Janela de visualização 3D do Geogebra

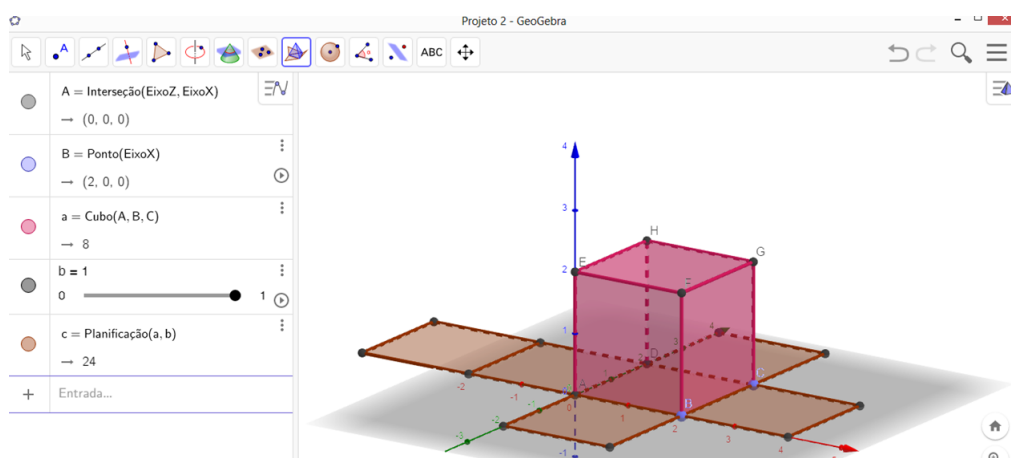


Figura 4.11: Cubo planificado

2º passo: Para exibir a planificação do cubo, clique no ícone do "cubo" na barra de ferramentas e a última opção é a "Planificação", clique com o cursor do mouse em cima do cubo, então exibirá a planificação, e automaticamente criará um **Controle Deslizante** na janela de álgebra, no qual você poderá clicá-lo com o botão direito e escolher a opção "Animação". Mude a cor das faces, clicando em cima delas com o botão do mouse, se preciso mova os eixos.

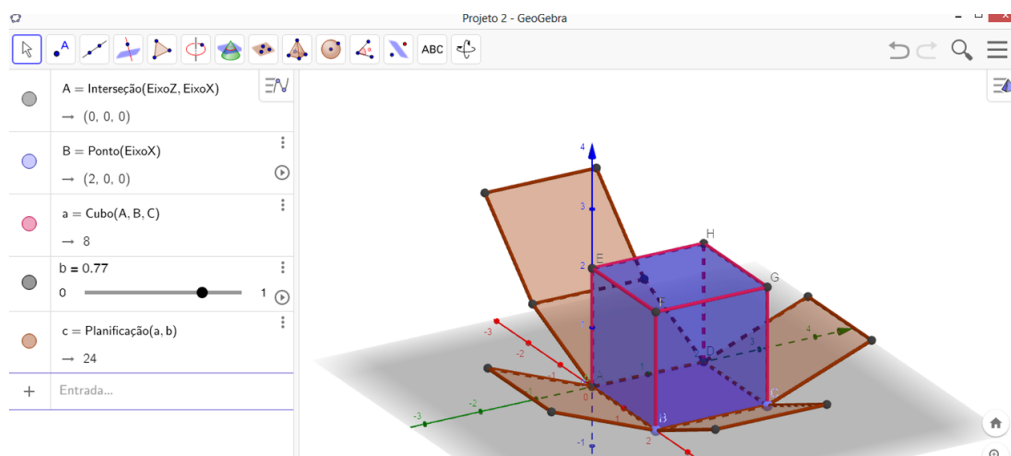


Figura 4.12: Cubo animado

3º Remova os pontos (clique em cima deles), nomeie as faces, coloque o cubo numa posição conveniente e a cor desejada para uma melhor visualização, remova os eixos. Assim, estará pronta nossa construção.

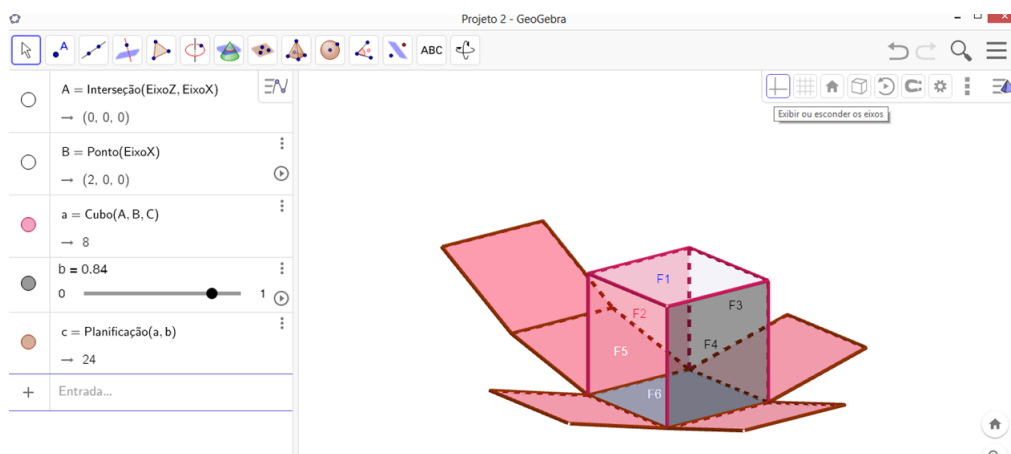


Figura 4.13: Cubo desejado



**Atividade 1.** *Quantos dados diferentes podemos formar escrevendo em suas faces números de 1 a 6, supondo faces de mesma cor. Descreva a contagem por **Combinatória** e depois fazendo a construção no **Geogebra**.*

a) *Dodecaedro regular;*

b) *Icosaedro regular.*

**Atividade 2.** *Encontre a soma dos ângulos internos de um polígono Regular de  $n$  lados, considere  $n > 3$ .*

a) *Descreva a contagem por **Combinatória**;*

b) *Faça a construção no **Geogebra**.*

## Capítulo 5

# APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo abordamos situações problemas com o objetivo de instigar nossos leitores a visualizar outros problemas de combinatória de maneira que possa sugerir ou propor soluções interpretativas baseadas na linguagem dos conjuntos, além de efetuar soluções algébricas, tendo como base os princípios, conceitos e definições de contagem.

1ª) (UFF-RJ) Dado o conjunto  $\mathbf{P} = \{\{0\}, 0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ , considere as afirmativas:

I)  $\{0\} \in \mathbf{P}$       II)  $\{0\} \subset \mathbf{P}$       III)  $\emptyset \in \mathbf{P}$

Com relação a essas afirmativas conclui-se que:

- a) todas são verdadeiras;      b) apenas a I é verdadeira;      c) apenas a II é verdadeira;  
d) apenas a III é verdadeira;      e) todas são falsas;

**Solução:** O conjunto  $\mathbf{P}$  tem a seguinte estrutura  $\mathbf{P} = \{0\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\{0\}, \{\emptyset\}\}$ . Assim, com base nela, podemos dizer que todas as afirmativas são verdadeiras. Logo, a alternativa **a)** é a correta.

2ª) Qual é o maior entre  $n!$  e  $2^n$ ? Isto é, um conjunto com  $n$  elementos tem mais permutações ou mais subconjuntos?

**Solução:**

i) Primeiramente observamos que para  $0 < n < 4$ , vale que:  
 $2^1 > 1!$  ,       $2^2 > 2!$       e       $2^3 > 3!$  .

Enquanto que:

$$2^4 < 4! \Leftrightarrow 16 < 24 \quad e \quad 2^5 < 5! \Leftrightarrow 32 < 120 .$$

ii) Considere a proposição  $P(n)$ :  $2^n < n!$ . Vamos provar por indução sobre  $n$  que para  $n \geq 4$   $P(n)$  é verdadeira para todo natural maior que 3.

Para  $n = 4$ , vimos em i) que  $P(n)$  é verdadeira;

Agora suponha  $P(n)$  válida para algum  $n > 4$ , vamos mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para  $(n + 1)$ , ou seja,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$$

Logo,  $P(n + 1)$  é verdadeira. Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq 4$ . ■

3ª) Prove que  $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n-1) + (n+1)n}{2} = \frac{n[(n-1) + (n+1)]}{2} = \frac{n(2n)}{2} = n^2 \end{aligned}$$
■

4ª) Se um conjunto  $C$  possui 7 elementos distintos, quantos são os subconjuntos com 3 elementos do conjunto  $C$ .

**Solução:** Digamos que os 7 elementos distintos do conjunto sejam  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  e  $e_7$ .

$$\text{Usando Combinação } \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = 35$$

5ª) Uma equipe de Futsal é formada por 5 jogadores de linha (sendo um goleiro) e 7 jogadores, no máximo, como reservas. O Futsal é praticado em quadra retangular de piso rígido, com medidas que variam de acordo com a categoria. O tempo de duração de uma partida é de 40 minutos, cronometrados, divididos em dois períodos de 20 minutos cada, com tempo máximo de 10 minutos para descanso entre ambos, para as categorias Principal e Juvenil. No intervalo do primeiro para o segundo tempo, o técnico planeja fazer até três substituições. Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo, sendo que ele dispõe de 7 atletas que jogam em qualquer posição?

a) Responda com argumentos combinatórios;

b) Use a fórmula.

**Solução do item a:**

i) Considere que os jogadores **A, B, C, D e E** estavam jogando no 1º tempo e os jogadores **F, G, H, I, J, K e L** estavam no banco. Se o técnico optar em fazer uma substituição, ele tem 5 possibilidades de escolha para o jogador que irá sair e 7 possibilidades para o jogador que irá entrar, ou seja,  $5 \times 7 = 35$  formações distintas;

ii) Se ele decidir fazer duas substituições, escolhendo dois atletas entre os jogadores **A, B, C, D e E**, ele pode escolher os pares que saem de  $C_{5,2} = 10$  modos, substituindo-os por pares que entram de  $C_{7,2} = 21$  maneiras. Assim, ele pode fazer um total  $C_{5,2} \times C_{7,2} = 10 \times 21 = 210$  formações diferentes.

iii) Se ele optar em substituir três jogadores, serão  $10 \times 35$  formações distintas. Porque há 10 possibilidades de escolher o trio de jogadores que irá sair e 35 para o trio que irá entrar.

Portanto, a resposta é  $35 + 210 + 350 = 595$  formações distintas.

Sendo que faltou o caso em que o técnico decide não fazer substituição.

Retificando a resposta temos,  $595 + 1 = 596$  formações diferentes.

b) **Solução item b.**

$$C_{5,1} \cdot C_{7,1} + C_{5,2} \cdot C_{7,2} + C_{5,3} \cdot C_{7,3} + 1 = 596.$$

6<sup>a</sup>)

Figura 5.1: Casa das Onze Janelas



[https://pt.wikipedia.org/wiki/Palacete\\_das\\_Onze\\_Janelas](https://pt.wikipedia.org/wiki/Palacete_das_Onze_Janelas)

De quantos modos diferentes os servidores que trabalham na limpeza e manutenção do Museu, poderão escolher de como ele ficará aberto?

**Solução:**

Para cada janela do prédio, eles terão que tomar duas decisões, se ficará **aberta** ou **fechada**. No entanto, há apenas um modo em que ele ficará fechado. Logo, a resposta é  $2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$ .

7<sup>a</sup>) Prove que um produto de  $p$  inteiros consecutivos é sempre dividido por  $p!$

**Solução:**

Seja  $a$  um inteiro qualquer, então temos que analisar três casos: Só consecutivos positivos, só consecutivos negativos e consecutivos positivos e negativos:

i) Se  $a$  é positivo e seus consecutivos também são, então fazendo o produto de  $p$  inteiros  $a.(a+1).(a+2). \dots .(a+p-1)$  e dividir por  $p!$ , tem que resultar exatamente em um quociente inteiro:

$$\frac{a.(a+1).(a+2). \dots .(a+p-1)}{p!} = C_{a+p-1}^p \quad \text{é um inteiro;}$$

ii) Se  $a$  é negativo e seus consecutivos também são, então fazendo o produto de  $p$  inteiros  $a.(a-1).(a-2). \dots .(a-p+1)$  e dividir por  $p!$ , também tem que dar um quociente inteiro:

*Casa das Onze Janelas ou Palacete das Onze Janelas ou Museu de Arte Casa das Onze Janelas é um edifício histórico da cidade brasileira de Belém, no estado do Pará.*

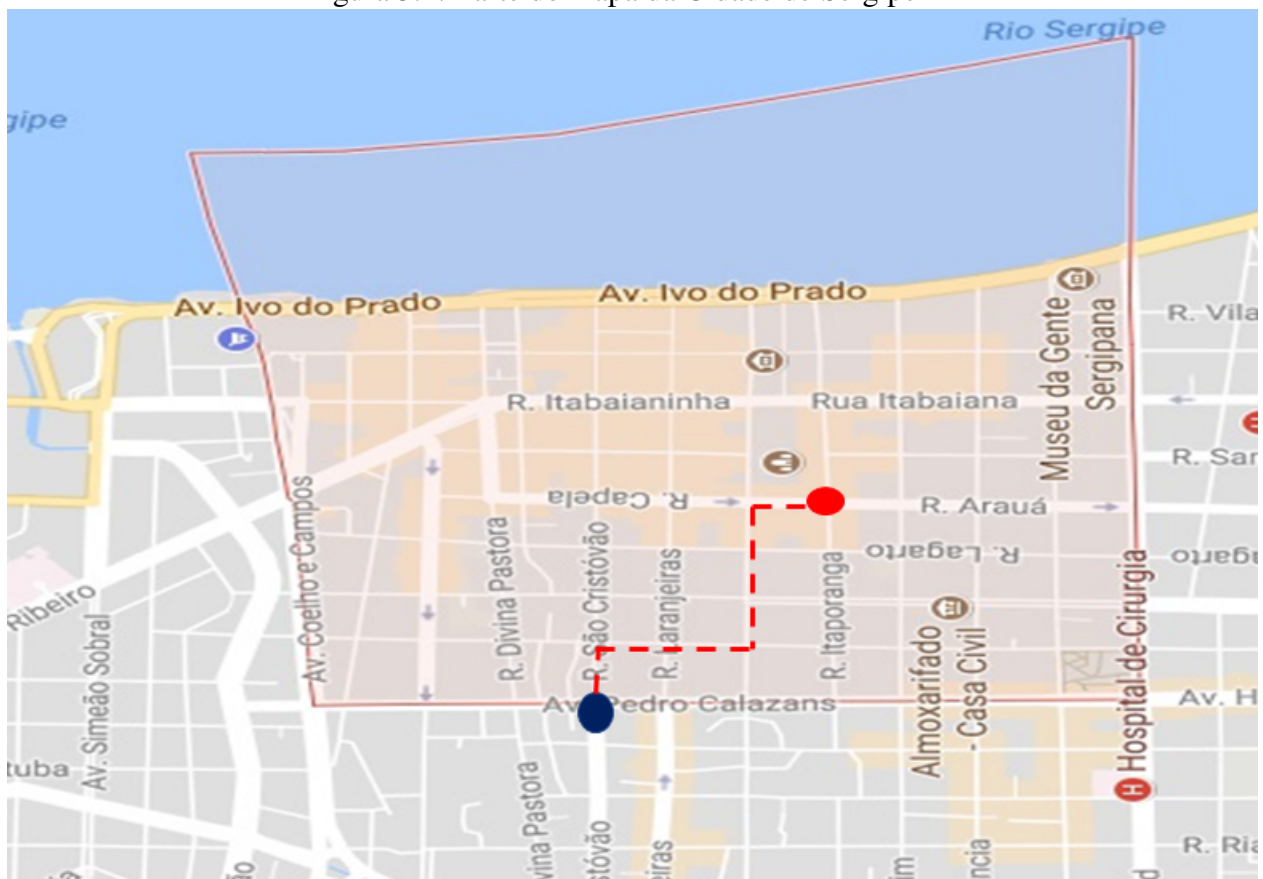
*Trata-se do Museu de Arte Moderna e Contemporânea mais importante da cidade de Belém e do Estado do Pará, é também um ponto turístico da cidade de Belém, construída no século XVIII como moradia por Domingos da Costa Barcelar, senhor de engenho. Hoje em dia, desde 2002, a edificação abriga o Museu de Arte Casa das Onze Janelas.*

$$\frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \dots \cdot (a-p+1)}{p!} = (-1)^p C_{-a-p+1}^p \quad \text{é um inteiro;}$$

iii) Se o produto contém inteiros positivos e negativos, ele é igual a zero e, portanto, inteiro. ■

8ª) Na figura abaixo temos uma pequena parte do mapa da cidade de Sergipe, do ponto Azul que está localizado na esquina da Av. Pedro Calazans com a Rua São Cristóvão ao ponto vermelho localizado na esquina da Rua Itaporanga com a Rua Arauá temos 12 quadras. A linha pontilhada vermelha indica um dos caminhos que uma pessoa pode seguir para ir do ponto azul até o vermelho.

Figura 5.2: Parte do mapa da Cidade de Sergipe



<https://www.google.com.br/maps/place/R.+João+Pessoa,+262+-+Centro,+Aracaju+-+SE,+49010-130/@-10.910297,-37.0578651,15z/data=!4m5!3m4!1s0x71ab365373f06ed:0xcdd240a6ac83eff!8m2!3d-10.910297!4d-37.0491104>

Quantos caminhos diferentes, com o mesmo comprimento que o traçado (suponha que as quadras sejam homogêneas), existem para uma pessoa ir do ponto azul ao vermelho?

### **Solução:**

Para uma pessoa ir do ponto azul ao vermelho, ela deve andar 3 quadras para direita e 4 quadras para cima. Vamos dividir o percurso em 7 etapas, numeradas de 1 a 7, em que cada etapa é andar uma quadra para direita(D) ou para cima (C). O caminho indicado pela linha tracejada da figura seria formado pelas etapas:

$$1 - C, 2 - D, 3 - D, 4 - C, 5 - C, 6 - C, 7 - D$$

Para formar um desses caminhos basta escolher as 3 etapas D entre as 7 possíveis. Por exemplo, se escolhermos as etapas 1ª, 2ª e 6ª para D, as demais serão C e teremos o caminho:

$$1 - D, 2 - D, 3 - C, 4 - C, 5 - C, 6 - D, 7 - C$$

**Nota:** Aqui o aluno deve perceber que ele acabou de aplicar a propriedade da **igualdade das combinações complementares**

Na escolha das 3 etapas, temos tantas possibilidades quantos sejam os subconjuntos de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  com 3 elementos, ou seja  $C_7^3 = 35$ . Portanto, como existem 35 subconjuntos, há 35 caminhos distintos para uma pessoa ir do ponto azul ao vermelho.

### **Outra solução:**

Como há um total de sete etapas, na qual 3 para direita e 4 para cima. Então basta calcular o número total de permutações com repetição, isto é,  $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$

9ª) É dia das crianças e Carlos decide presentear seus 5 sobrinhos: Pyetro, Gustavo, Ana, Jhulia e Gabriel Lucca; sendo que ele dispõe de 7 presentes. Como ele fará essa distribuição de modo que cada um receba pelo menos um presente e todos estes devem ser distribuídos?

- Supondo que todos os presentes sejam iguais.
- Supondo que todos os presentes sejam diferentes.

### **Solução do item a:**

Já tendo distribuído um presente para cada um dos sobrinhos, sobrarão 2 presentes, para serem distribuídos entre os cinco novamente. O modo de fazer isso é  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$ , ou seja, encontrar o número de soluções não negativas da equação. Logo, a resposta é  $CR_5^2 = C_6^2 = 15$

**Solução do item b:**

É preciso fazermos suposições:

i) Vamos supor que um dos sobrinho fique com 3 presentes e os demais com 1, então para escolher este sobrinho, teremos 5 possibilidades. Os presentes dos demais podem ser distribuídos de  $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$  modos. Os outros 3 presentes que sobrarem, ficará com o sobrinho suposto. ;

ii) Agora vamos imaginar que dois dos sobrinhos fiquem cada um com exatamente 2 presentes. O modo de escolher esses sobrinhos é  $C_{5,2} = 10$ ;

O modo de escolher os presentes dos outros três sobrinhos é  $7 \times 6 \times 5 = 210$ .

Para escolher os presentes de um dos sobrinhos a receber 2 presentes, pode ser feito de  $C_{4,2} = 6$  modos. Depois desta escolha, sobrará 2 presentes, que será dado ao outro sobrinho, ou seja, restará apenas um modo de fazer isso. Logo, a resposta é  $5 \times 840 + 10 \times 210 \times 6 \times 1 = 16800$ .

10ª) Mostre que o número de subconjuntos de um conjunto de  $n$  elementos com número **par** de elementos é o mesmo que o número de subconjuntos com um número **ímpar** de elementos.

**Solução:**

Seja  $A$  um conjunto com  $n$  elementos. Como  $A$  é não vazio, então o número de subconjuntos de  $A$  é

$$\text{(Ver o binômio de Newton em [14]) } 2^n = (1 + 1)^n = \sum_p^n \binom{n}{p} 1^p \cdot 1^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$$

Note que  $\binom{n}{p}$  é a quantidade de subconjunto de  $p$  elementos de um conjunto com  $n$  elementos. Precisamos demonstrar que

$$\text{(Para } p \text{ par)} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \text{ (Para } p \text{ ímpar)}$$

Observe que:

$$i) 2^n = (1 + 1)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ par}}}^n \binom{n}{p} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ ímpar}}}^n \binom{n}{p}$$



$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X} & + & \mathbf{Y} \end{array}$$

$$\text{ii) } 0^n = (1 - 1)^n = \sum_p^n \binom{n}{p} (-1)^p \cdot 1^{n-p} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ par}}}^n \binom{n}{p} - \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impar}}}^n \binom{n}{p} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$$

$$\text{Pois, } (-1)^p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ for par} \\ -1, & \text{se } p \text{ for impar} \end{cases}$$

Somando i) e ii), temos:

$$2^n + 0^n = \mathbf{X} + \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \Rightarrow 2^n = 2\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} = 2^{n-1}$$

$$\text{De i) segue que } \mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2^n \Rightarrow 2^{n-1} + \mathbf{Y} = 2^n \Rightarrow \mathbf{Y} = 2^{n-1}$$

Portanto,  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ . Assim, o enunciado da questão é verdadeiro. ■

11<sup>a</sup>) Sejam  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e  $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  dois conjuntos de números naturais.

a) Quantas são as funções  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ?

b) Quantas são as funções sobrejetivas  $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ? Com  $n \geq m$  (Considere somente os casos particulares  $m = n$  e  $n = m + 1$ ).

**Solução do item a:**

A imagem de cada elemento de  $\mathbf{A}$ , pode ser escolhida de  $m$  modos. Logo a resposta é  $m^n$

**Solução do item b:**

i) Para  $m = n$ , teremos o número de funções bijetivas, pois supondo que  $\#\mathbf{A} = \#\mathbf{B} = m$ , Temos  $m$  modos para escolher  $f(a_1)$ ; escolhida  $f(a_1)$ , teremos  $(m - 1)$  modos para escolher  $f(a_2)$ ; já tendo escolhido  $f(a_1)$  e  $f(a_2)$ , ficará  $(m - 2)$  modos para escolher  $f(a_3)$ ; . . .; para  $f(a_n) = f(a_m)$  restará apenas 1 modo.

A resposta é  $m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \dots 1 = m!$

ii) Para  $n = m + 1$ , temos que dois elementos de  $A$  terão a mesma imagem em  $B$  e a correspondência entre os demais  $(n - 2)$  elementos de  $A$  e os demais  $(m - 1)$  elementos de  $B$  será bijetiva.

– Escolha dos dois elementos de  $A$  que terão a mesma imagem  $C_{n, 2} = C_{m+1, 2}$ ;

– O modo de escolher a imagem dos dois elementos de  $A$  é  $m$  vezes;

– O modo de escolher as imagens dos demais elementos de  $A$  é  $(m - 1)!$  vezes

Logo, a resposta é  $C_{m+1, 2} \cdot m \cdot (m - 1)! = C_{m+1, 2} \cdot m!$

12<sup>a</sup>) Seja  $A$  um conjunto e suponha que  $\binom{A}{2}$  represente o conjunto de todos os subconjuntos de 2 elementos de  $A$ . Quais dos seguintes enunciados é verdadeiro?

a)  $\binom{A \cup B}{2} = \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}$ ;

b)  $\binom{A \cup B}{2} \supset \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}$ ;

c)  $\binom{A \cap B}{2} = \binom{A}{2} \cap \binom{B}{2}$ ;

d)  $\binom{A \cap B}{2} \subseteq \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}$ ;

**Solução:**

a)  $\binom{A \cup B}{2} = \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}$ ;

A afirmação é falsa. De fato, vamos verificar através de um exemplo que não vale em geral a seguinte inclusão  $\binom{A \cup B}{2} \subset \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}$ .

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$ .  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e um dos seus subconjuntos com 2 elementos é o subconjunto  $\{1, 4\}$ . Mas sabemos que  $\binom{A}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$  e  $\binom{B}{2} = \{\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$ .

Logo,  $\{1, 4\}$  não é um elemento de  $\binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2}$ , apesar de ser um elemento de  $\binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2}$

$$\text{b) } \binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2} \supset \binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2}.$$

A afirmação é verdadeira, pois sabemos que dados  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , dois conjuntos quaisquer, sempre vale  $\mathbf{A} \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$  e  $\mathbf{B} \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ .

Logo,  $\binom{\mathbf{A}}{2} \subset \binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2}$  e  $\binom{\mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2}$ . Assim,  $\binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2} \supset \binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2}$ .

$$\text{c) } \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} = \binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2}.$$

Vamos mostrar que valem duas inclusões:

1ª) Para quaisquer conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , vale sempre sempre que  $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$  e  $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \subset \mathbf{B}$ .

Logo,  $\binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{A}}{2}$  e  $\binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{B}}{2}$ . Assim,  $\binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} = \binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2}$ .

2ª) agora vamos mostrar a inclusão contrária. Se  $\binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} = \emptyset$ , então a inclusão  $\binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2}$  é imediata, porque o conjunto  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto. Por outro lado, se  $\binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \neq \emptyset$ , então existe  $\{p, q\} \in \binom{\mathbf{A}}{2}$  e  $\{p, q\} \in \binom{\mathbf{B}}{2}$ .

Portanto, temos:  $p, q \in \mathbf{A}$  e  $p, q \in \mathbf{B} \Rightarrow p \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$  e  $q \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ .

Assim,  $\{p, q\} \in \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2}$ . Logo,  $\binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2}$

$$\text{d) } \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} \subseteq \binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2}.$$

Do item c) e utilizando o fato que a interseção é sempre subconjunto da união. Logo, vale:

$$\binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} = \binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \subset \binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2}$$

**Outra solução por Cardinalidade:**

Seja  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  e  $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ , com  $2 \leq m \leq n$ .

Para  $n = m$ .

**i) A e B disjuntos, temos que  $A \cap B = \emptyset$ , logo  $\#(A \cap B) = 0$  e,**

$$* \#(A \cup B) = \#A + \#B = m + n = m + m = 2m \Rightarrow \# \binom{A \cup B}{2} = \binom{2m}{2} =$$

$$\frac{2m!}{2!(2m-2)!} = \frac{2m(2m-1)(2m-2)!}{2!(2m-2)!} = \frac{2m(2m-1)}{2} = 2m^2 - m;$$

$$* \# \left[ \binom{A}{2} \cup \binom{B}{2} \right] = \# \binom{A}{2} + \# \binom{B}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} = \frac{m!}{2!(m-2)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} =$$

$$\frac{m!}{2!(m-2)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} = 2 \frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{m(m-1)(m-2)!}{(m-2)!} = m^2 - m;$$

Logo, a afirmativa **a)** é falsa e a **b)** é verdadeira, pois,  $2m^2 - m = m^2 + m^2 - m > m^2 - m$

$$* (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow \# \binom{A \cap B}{2} = \binom{\#(A \cap B)}{2} = \binom{0}{2} = 0, \text{ por definição};$$

$$* \binom{A}{2} \cap \binom{B}{2} = \emptyset \Rightarrow \# \left[ \binom{A}{2} \cap \binom{B}{2} \right] = 0;$$

Assim, a afirmativa **c)** é verdadeira e por sua vez, é fácil ver que a afirmativa **d)**, também é.

**ii) A e B não-disjuntos:**

\* Se tivermos 1 elemento pertencente a  $A \cap B$ , temos:

$$\#(A \cap B) = 1 \Rightarrow \# \binom{A \cap B}{2} = \binom{\#(A \cap B)}{2} = \binom{1}{2} = 0, \text{ por definição.}$$

\* Se tivermos 2 elementos pertencentes a  $A \cap B$ , teremos:

$$\#(A \cap B) = 2 \Rightarrow \# \binom{A \cap B}{2} = \binom{\#(A \cap B)}{2} = \binom{2}{2} = 1$$

\* Se tivermos 3 elementos pertencentes a  $A \cap B$ , então:

$$\#(A \cap B) = 3 \Rightarrow \# \binom{A \cap B}{2} = \binom{\#(A \cap B)}{2} = \binom{3}{2} = 3$$

Continuando com esse mesmo raciocínio para  $k$  elementos pertencentes a  $A \cap B$ , com  $k \leq m$ , temos:

$$\#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = k \Rightarrow \# \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} = \binom{\#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{2} = \binom{k}{2}$$

Aplicando a *Relação de Stifel* em  $\binom{k}{2} = \binom{k-1}{2-1} + \binom{k-1}{2}$

Logo, para  $k$  elementos pertencentes a  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ , temos:

$$\begin{aligned} \# \binom{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}{2} &= \binom{\#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{2} = \binom{k}{2} = \binom{k-1}{2-1} + \binom{k-1}{2} = \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} = \\ k-1 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)!}{2!(k-3)!} &= (k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \frac{2(k-1) + (k-1)(k-2)}{2} = \\ \frac{(k-1)[2 + (k-2)]}{2} &= \frac{(k-1)(k)}{2} = \frac{k^2 - k}{2}. \end{aligned}$$

$$* \# \left[ \binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \right] = \binom{\#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{2} = \binom{k}{2} = \frac{k^2 - k}{2}$$

Logo, as afirmativas **c)** e **d)** continuam sendo verdadeiras.

$$\begin{aligned} * \#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= \# \mathbf{A} + \# \mathbf{B} - \#(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = m + n - k = m + m - k = 2m - k \Rightarrow \# \binom{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}{2} = \\ \binom{\#(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})}{2} &= \binom{2m - k}{2} = \frac{(2m - k)!}{2![(2m - k) - 2]!} = \frac{(2m - k)[(2m - k) - 1][(2m - k) - 2]!}{2![(2m - k) - 2]!} = \\ \frac{(2m - k)[(2m - k) - 1]}{2} &= \frac{(2m - k)^2 - (2m - k)}{2} = \frac{4m^2 - 4mk + k^2 - (2m - k)}{2} = \\ 2m^2 - 2mk - m + \frac{k^2 + k}{2} &= m^2 + m^2 - 2mk - m + \frac{k^2 + k}{2} = m^2 - 2mk + m^2 - m + \frac{k^2 + k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \# \left[ \binom{\mathbf{A}}{2} \cup \binom{\mathbf{B}}{2} \right] &= \# \binom{\mathbf{A}}{2} + \# \binom{\mathbf{B}}{2} - \# \left[ \binom{\mathbf{A}}{2} \cap \binom{\mathbf{B}}{2} \right] = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} - \binom{k}{2} = \\ \binom{m}{2} + \binom{m}{2} - \binom{k}{2} &= 2 \binom{m}{2} - \binom{k}{2} = m^2 - m - \frac{k^2 - k}{2} = m^2 - m - \frac{k^2 + k}{2} \end{aligned}$$

Assim, a afirmativa **a)** continua sendo falsa e **b)** verdadeira, pois,

$$m^2 - 2mk + m^2 - m + \frac{k^2 + k}{2} > m^2 - m - \frac{k^2 + k}{2}.$$

Portanto, com base nestas análises, podemos afirmar que as afirmativas dos itens **b)**, **c)** e **d)** são verdadeiras.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento deste trabalho, encontramos algumas dificuldades relacionadas a bibliografias específicas que abordassem a nossa proposta de ensino. Contudo, entre uma e outra biografia, sempre foi possível destacar tópicos importantes relacionados com o projeto. Assim, somando estes pontos com ideias cultivadas e desenvolvidas no curso de *Matemática Discreta*, aliadas a sugetões pontuais recebidas durante o período de orientação e elaboração desse trabalho, pudemos enriquecer o mesmo com conceitos, definições, exemplos e aplicações que foram fundamentais para a sua construção e conclusão.

Já sabendo que *Análise combinatória* é um dos mais importantes tópicos da Matemática Discreta, devido ao seu vasto campo de aplicabilidade, buscamos abordar situações-problema que pudessem ser discutidas através da construção e discussão de ideias, favorecendo o desenvolvimento da capacidade crítica-argumentativa em diversos níveis de ensino. Por isso, propomos viabilizar e disponibilizar esta proposta diversificada, ampla e atraente de ensino de combinatória baseada na *Teoria dos Conjuntos*, que visa auxiliar professores, discentes dos cursos de Licenciatura em Matemática e, principalmente, aos estudantes do Ensino Médio, a superar lacunas no ensino e na aprendizagem de combinatória. Outra finalidade deste projeto, é fazer com que estes personagens acima citados desenvolva a noção de que os métodos e fórmulas matemáticas podem ser úteis e podem surgir a partir da discussão de exemplos e aplicações de resultados básicos, como pudemos verificar. Mas é impossível, até seria displicente, só enumerar e discutir resultados sem apresentar algumas provas. Todavia, buscamos evitar neste trabalho, provas que apresentassem resultados ou técnicas muito avançadas para o contexto. Propomos também, alguns projetos de ensino para sala de aula, com o auxílio do *Software Livre Educacional Geogebra* - versão 6.0.529, fazendo uma relação entre combinatória e geometria, utilizando da tendência tecnologica como ferramenta facilitadora do aprendizado.

Portanto, apresentamos este trabalho como uma alternativa de ensino que possa ajudar professores e graduandos a obter mais uma visão de compreensão efetiva de conceitos matemáticos e a assimilação do real significado do raciocínio combinatório baseado nos seus princípios. A fim de proporcionar aos discentes a verdadeira compreensão e interpretação necessária para as soluções criativas de problemas, que frisam, entre outros aspectos, a importância da construção do raciocínio combinatório na formação dos mesmos e o cuidado que nós, docentes, temos que

ter ao procurar desenvolvê-lo.

Assim, esperamos que esta proposta de ensino conduza nossos leitores a visualizar outros problemas de combinatória de maneira que possa sugerir ou propor soluções interpretativas baseadas na linguagem de conjuntos, tendo como base os princípios, conceitos e definições de contagem. Por fim, ficaremos na expectativa de que ele seja aplicado como proposta ou ideia de ensino a ser trabalhado em sala de aula e também na expectativa para sua aprovação e publicação pela revista do professor de matemática, pois, consideramos uma proposta facilitadora para o Ensino-Aprendizagem de Combinatória.

# APÊNDICE - Princípio da Indução Matemática (PIM)

Como já comentamos neste trabalho, a primeira experiência que a maioria de nós temos com a Matemática é por meio do processo de *contagem*, primeiramente enumerando objetos sem atribuir significado algum e depois aprendemos a formar sequências para contar estes objetos que serão chamados elementos de um conjunto. Estas mesmas etapas de aprendizado devem ser empreendidas ao se estabelecer a fundamentação matemática para formação de um dos conjuntos mais importantes que temos, o *Conjunto dos Números Naturais* ( $\mathbb{N}$ ). Assim, olhando os números naturais como uma simples sequência, estamos diante do que chamamos de *números ordinais*. E para descrever matematicamente a estrutura dos números naturais, no sentido de números ordinais, é feita uma lista de propriedades essenciais, chamadas de *axiomas*, que especificam a estrutura da sequência. Giuseppe Peano (1858 - 1932) propôs 4 axiomas, baseado na noção de sucessor de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais). No entanto, o axioma que iremos abordar neste apêndice, é o quarto, o que foi bastante útil para as demonstrações feitas no nosso trabalho, e ele tem o seguinte enunciado:

Seja  $X$  um conjunto de números naturais, isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ . Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de cada elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Este axioma é chamado de *Axioma da Indução*. Ele fornece um processo de contagem para garantir que um determinado subconjunto  $X$  de  $\mathbb{N}$ , inclui na verdade, todos os elementos de  $\mathbb{N}$ .

O Axioma da Indução pode ser reescrito como abaixo, usando a linguagem de propriedades. Nesta forma, ele é chamado de Princípio da *Indução Finita* ou da *Indução Matemática*.

Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:

- i)  $P(1)$  é válida;
- ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n + 1)$ .

Logo,  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] Castrucci, Benedito: *Elementos de Teoria dos Conjuntos* – Série professor nº3 – São Paulo, A. Oshiro, 1968.
- [2] Dante, Luiz Roberto: *Matemática* (volume único) – 1ª ed. – São Paulo, Ática, 2005.
- [3] Duval, R. *Representations and mathematics visualization*. Geometrical pictures: kind of representation and specific processings. In HITT, F. (Org.). Cinvestav, 2002.
- [4] Duval, R. *Sémiosis et noésis* – 1993. (Préprint do livro publicado com o título "*Sémiosis et pensée humaine*". Bern: Peter Lang, 1995).
- [5] Fonseca, Vitor da: *Desenvolvimento Cognitivo e Processo de Ensino-Aprendizagem* – abordagem psicopedagógica à luz de Vygotsky – Petrópolis, RJ, Vozes, 2019.
- [6] Geogebra. Disponível em <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>
- [7] Gueudet, Ghislaine; Trouche, Luc: *Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática*. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 6 – número 3 – 2015. Este texto é a tradução em Português (com uma atualização das referências) de um artigo publicado em 2007 em francês: GUEUDET, G. ; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. Education et didactique, Rennes, 2, 3, 7-33. 2008.
- [8] Hefez, Abramo: *Curso de Álgebra* (volume I) – 5ª ed. – Rio de Janeiro, Impa, 2014.
- [9] Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Machado, Antonio: *Matemática e Realidade* – 6ª ed. – São Paulo, Atual, 2009.
- [10] Moretti, Méricles Thadeu: *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012. Este texto é uma tradução do artigo: Duval, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993.

- [11] Morgado, Augusto C.; Carvalho, João B. P. de; Carvalho, Paulo Cezar P.; Fernandez, Pedro: *Análise Combinatória e Probabilidade* – 9ª ed. – Rio de Janeiro, SM, 1991.
- [12] Morgado, Augusto C.; Carvalho, Paulo Cezar P.: *Matemática Discreta* – 2ª ed. – Rio de Janeiro, SBM, 2015.
- [13] Ribnikov, K.: *Analysis Combinatorio* – Moscou, Mir, 1988.
- [14] Rosen, Kenneth H.: *Discrete Mathematics and its Application* – 6th, international edition, Mc Graw Hill, 2007.
- [15] Sá, Carlos C. de; Rocha, Jorge: *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* – 2ª ed. – Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [16] Teixeira, Paulo Jorge M.: *Resolvendo problemas de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental* – 1ª Ed. – Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2014.