



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional  
Coordenação do PROFMAT**

**THIAGO SILVA DO NASCIMENTO**

**FUNÇÕES POLINOMIAIS E  
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: DAS  
RECOMENDAÇÕES OFICIAIS ÀS  
ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS**

**Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende**

**UNIVERSIDADE  
FEDERAL  
FLUMINENSE**

**NITERÓI  
MARÇO/2020**

**THIAGO SILVA DO NASCIMENTO**

**FUNÇÕES POLINOMIAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: DAS  
RECOMENDAÇÕES OFICIAIS ÀS ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS**

Dissertação apresentada por Thiago Silva do Nascimento ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende**

Niterói  
2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

G633f Nascimento, Thiago Silva do  
FUNÇÕES POLINOMIAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: DAS  
RECOMENDAÇÕES OFICIAIS ÀS ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS / Thiago  
Silva do Nascimento ; Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende,  
orientador. Niterói, 2020.  
120 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.05323660775>

1. Ensino de álgebra. 2. Progressões aritméticas. 3.  
Funções polinomiais. 4. Ensino médio. 5. Formação de  
professores. I. Moura Rezende, Prof. Dr. Wanderley,  
orientador. II. Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - 510

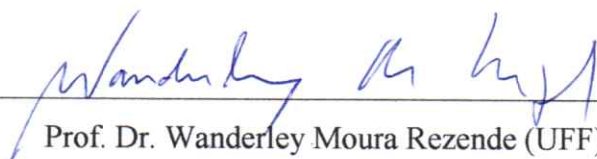
Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

**THIAGO SILVA DO NASCIMENTO**

**FUNÇÕES POLINOMIAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: DAS  
RECOMENDAÇÕES OFICIAIS ÀS ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS**

Dissertação apresentada por Thiago Silva do Nascimento ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovada em 03 de março de 2020

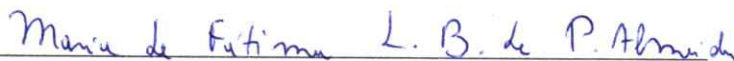


Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende (UFF)

Orientador



Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo (UFF)



Prof. Dr. Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida (UERJ)



Prof. Dr. Paulo Roberto Trales (UFF)

## Dedicatória

Dedico este trabalho a minha amada filha Rafaela.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, o senhor da minha vida que me deu força e sabedoria.

A minha esposa Cintia e filha Rafaela pelo apoio, incentivo e serem o motivo do meu esforço.

Aos meus pais (Penha, Jailton e Gilmar) pelo incentivo e apoio que sempre tiveram.

Ao meu irmão Thierry que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos.

A minha família e amigos que sempre me apoiaram.

Ao meu professor orientador Wanderley, pela paciência, dedicação e todo conhecimento que me foi transmitido, sendo um grande exemplo de pessoa e profissional.

A todos os professores do PROFMAT pelo conhecimento transmitido.

A coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e de Nível Superior-CAPES, pela concessão de bolsa de estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Lista de Figuras

- 01 – Gráfico da PA (1, 4, 7, 10, ...) (pág - 22)
- 02 – Gráfico da função real (pág - 22)
- 03 – Gráfico da P.A. (10, 8, 6, 4,...) (pág - 23)
- 04 – Gráfico da função:  $p(x) = -2x + 12$  (pág - 23)
- 05 – Gráfico de uma P.A de segunda ordem  $p_n = n^2$  (pág - 24)
- 06 – Gráfico da sequência  $p_n = 3n^2 + n - 1$  (pág - 25)
- 07 – Gráfico da função  $f(x) = 0,5x^3 - x^2 + 0,5x$  (pág - 27)
- 08 – Ampliação do gráfico de uma função diferenciável usando a ferramenta zoom + (pág - 28)
- 09 - Representação de pontos da PA  $f(1) \dots f(6)$  (pág - 30)
- 10 – Representação de pontos da PA  $f(xn)$ . (pág - 31)
- 11 – Representação de pontos da PA  $f(x_n)$ . (pág - 32)
- 12 – Representação de pontos da PA  $f(x_1) \dots f(x_6)$  (pág - 37)
- 13 – Representação de pontos da PA  $f(x_n)$  (pág - 38)
- 14 – Introdução a função polinomial de grau 1 (pág - 48)
- 15 – Taxa de variação média da função afim (pág - 48)
- 16 – Equação da reta da função polinomial de grau 1 (pág - 49)
- 17 – Exercício resolvido (pág - 50)
- 18 – Relação entre PA e função. (pág - 50)
- 19 – Relação entre PA e função exemplificada. (pág - 51)
- 20 – Exercícios sobre PA e função (pág - 52)
- 21 – Definição função quadrática (pág - 52)
- 22 – Geometria e função quadrática (pág - 53)
- 23 – Conexão entre função polinomial do 2º grau e PA (pág - 54)
- 24 – Exercícios sobre função polinomial de grau 2 e PA (pág - 54)
- 25 – Definição de PA (pág - 55)
- 26 – Exercícios sobre PA (pág - 55)
- 27 – Conexão entre PA e função afim (pág - 56)
- 28 – Introdução a função polinomial (pág - 57)
- 29 – Movimento uniforme e uniformemente variado (pág - 57)
- 30 – Grandezas diretamente proporcionais (pág - 58)

- 31 – Grandezas diretamente proporcionais (pág - 59)
- 32 – Exercícios (pág - 59)
- 33 – Introdução a função polinomial de grau 2 (pág - 59)
- 34 – Inequações (pág - 60)
- 35 – Exercícios propostos (pág - 61)
- 36 – Introdução a PA (pág - 61)
- 37 – Relação entre PA e função afim (pág - 62)
- 38 – Exercícios PA (pág - 62)
- 39 – Exercícios sobre PA e função afim (pág - 63)
- 40 – Introdução à função polinomial de grau 1 (pág - 63)
- 41 – Construção de gráfico de funções no computador (pág - 64)
- 42 – Exercício função polinomial de grau 1 (pág - 64)
- 43 – Problemas e exercícios (pág - 65)
- 44 – Introdução a função polinomial de grau 2 (pág - 65)
- 45 – Função quadrática no esporte (pág - 66)
- 46 – Exercícios resolvidos (pág - 66)
- 47 – Definição PA (pág - 67)
- 48 – Exercícios de PA (pág - 67)
- 49 – Ficha 01 – Exercício 02 – letra (c)- Grupo (B) (pág - 73)
- 50 – Ficha 01 – Exercício 02 – letra (c) (pág - 73)
- 51 – Ficha 01 – Exercício 01 – letra (b) – Grupo A (pág - 74)
- 52 – Ficha 01 – Exercício 03 – letra (b)- Grupo (D) (pág - 74)
- 53 – Ficha 02 – Exercício 05 – Grupo (C) (pág - 75)
- 54 – Ficha 02 – Exercício 06 – Grupo (A) (pág - 76)
- 55 – Ficha 03 – Exercício 01 – letra (a)- Grupo (E) (pág - 76)
- 56 – Ficha 03 – Exercício 01 – letra (b)- Grupo (B) (pág - 77)
- 57 – Ficha 04 – Exercício 01 – letra (a) e (b)- Grupo (D) (pág - 77)
- 58 – Ficha 04 – Exercício 02 – letra (a), (b) e (c)- Grupo (B) (pág - 78)
- 59 – Ficha 05 – Exercício 01 – letra (a)- Grupo (C) (pág - 79)
- 60 – Ficha 06 – Exercício 02 – letra (b)- Grupo (B) (pág - 80)
- 61 – Ficha 06 – Exercício 02 – letra (c)- Grupo (E) (pág - 80)
- 62 – Ficha 07 – Exercício 05 – Grupo (C) (pág - 81)
- 63 – Ficha 07 – Exercício 09 – Grupo (A) (pág - 81)



- 64 – Ficha 08 – Exercício 01 – letra (a) - Grupo (C) (pág - 82)
- 65 – Ficha 08 – Exercício 01 – itens (b) e (c) - Grupo (B) (pág - 82)
- 66 – Ficha 01 – Exercício 01 – letra (c)- Professor (H) (pág - 85)
- 67 – Ficha 01 – Exercício 02 – letra (b) – Professor (F) (pág - 85)
- 68 – Ficha 01 – Exercício 03 – letra (d) – Professor (G) (pág - 86)
- 69 – Ficha 02 – Exercício 01 – Professor (C) (pág - 86)
- 70 – Ficha 02 – Exercício 02 – Grupo (A) (pág - 86)
- 71 – Ficha 02 – Exercício 04 – Grupo (C) (pág - 87)
- 72 – Ficha 03 – Exercício 01 – letra (c) - Professor (H) (pág - 87)
- 73 – Ficha 03 – Exercício 02 – Professor (G) (pág - 88)
- 74 – Ficha 04 – Exercício 01 – letra (b) e (c) – Professor (H) (pág - 88)
- 75 – Ficha 04 – Exercício 02 – letra (a), (b) e (c) – Professor (H) (pág - 89)
- 76 – Ficha 05 – Exercício 01 – letras (a), (b) e (c) – Professor (J) (pág - 90)
- 77 – Ficha 06 – Exercício 01 – letra (b) – Professor (G) (pág - 91)
- 78 – Ficha 06 – Exercício 02 – letra (c) – Professor (J) (pág - 91)
- 79 – Ficha 07 – Exercício 03 – Professor (H) (pág - 92)
- 80 – Ficha 07 – Exercício 06 – Professor (D) (pág - 92)
- 81 – Ficha 08 – Exercício 01 – letra (a) – Professor (D) (pág - 93)
- 82 – Ficha 08 – Exercício 02 – Professor (G) (pág - 93)

## Lista de Tabelas

- 01 – PA de segunda ordem de razão 2 (pág - 23)
- 02 – PA de segunda ordem de razão 6 (pág - 24)
- 03 – Cronograma de atividades (pág - 71)
- 04 – Relação de exercícios resolvidos (pág - 72)
- 05 – Relação de exercícios resolvidos (pág - 84)

## Resumo

No ensino básico de matemática faz-se pouca articulação entre o estudo de sequências numéricas e o ensino de funções reais. Em particular, o ensino de progressões aritméticas se apresenta de forma pouco articulada com o estudo das funções polinomiais. Assim, este trabalho se realiza em seis níveis, a saber: (i) uma análise das recomendações e orientações de documentos oficiais (BNCC e PCN) sobre o tema; (ii) e de como os livros didáticos abordam o assunto; (iii) elaboração de uma ficha de atividades para a abordagem dos temas de forma articulada; (iv) a aplicação do material elaborado a uma turma do ensino médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro; (v) aplicação de material adaptado a um grupo piloto de dez professores; (vi) análise dos resultados obtidos com a aplicação dos instrumentos de pesquisa. Dentre as dificuldades apresentadas simultaneamente por estudantes e professores, uma mostrou-se bastante reveladora: a dificuldade de representar graficamente as sequências numéricas em questão (PA e PA de segunda ordem). Com relação aos estudantes observaram-se também grandes dificuldades deles realizarem os tratamentos algébricos.

**Palavras-chave:** Ensino de álgebra; Progressões aritméticas; Funções polinomiais; Ensino médio; Formação de professores

## Abstract

In mathematics basic education there is little connection between the study of numerical sequences and the teaching of real functions. In a specific way, the teaching of arithmetic progressions has little connection with the study of polynomial functions. Thus, this work takes place at six levels, which are: (I) an analysis of the recommendations and guidelines of official documents (BNCC and PCN) on the subject; (II) and how textbooks approach the subject; (III) elaborating an activity sheet to approach the issues in an articulated manner; (IV) the prepared material application a high school class in the state public network of Rio de Janeiro; (V) application of the adapted material to a pilot group of ten teachers; (VI) The analysis of the results obtained with the application of the research instruments. Among the presented difficulties simultaneously by students and teachers, a specific one proved to be quite revealing: the difficulty of graphing the numerical sequences in question (AP and AP of second order). Regarding students, there were also great difficulties for them to perform algebraic treatments.

Keywords: Teaching algebra; Arithmetic progressions; Polynomial functions; High school; Teacher training

## Sumário

INTRODUÇÃO .....	13
CAPÍTULO 1 - Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas .....	19
1.1 - Progressões Aritméticas: .....	19
1.2 – Funções Polinomiais: .....	25
1.3 – Funções polinomiais e PA: .....	29
CAPÍTULO 2 - O Ensino de Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas.....	41
2.1 – Orientações oficiais.....	41
2.1.1 – PCN:.....	41
2.1.2 – BNCC.....	42
2.2 – Análises de Livros didáticos .....	46
CAPÍTULO 3: EXPERIÊNCIAS DIDÁTICAS.....	70
3.1 – As fichas de atividades aplicadas aos alunos .....	70
3.1.1 Análise dos resultados por fichas de atividades: .....	73
3.2 – O questionário aplicado ao professor.....	83
3.2.1 Análise dos resultados por fichas de atividades: .....	85
Conclusão.....	95
Referências Bibliográficas.....	98
Anexo 1.....	101
Anexo 2.....	112
Anexo 3.....	123

## Introdução

A elaboração deste trabalho teve como motivação a monografia desenvolvida pelo autor como Trabalho Final de Curso em curso de Licenciatura em Matemática na UERJ, no município de Duque de Caxias. O trabalho, que teve como título “A interligação de PA (Progressão Aritmética)<sup>1</sup> e função afim”, foi orientado pelas professoras Dra. Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida (orientadora) e Msc. Adriana Feitosa (co-orientadora) e foi realizada com os formandos da graduação na época. Por conta deste trabalho, e com a oportunidade de desenvolver minha dissertação de mestrado, surgiu o interesse de ampliar os questionamentos realizados na pesquisa realizada na graduação e realizar um aprofundamento no estudo sobre Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas.

Na educação básica, o ensino de Funções Polinomiais, em sua grande maioria, pode ser visto correlacionado com outros conteúdos da matemática ou até mesmo de outras áreas de estudo, mas pouca articulação se faz com o estudo de sequências numéricas, em particular com o estudo das progressões aritméticas. Estas últimas, por sua vez, são apresentadas no ensino médio como uma “lista de números”, dissociadas do conceito de funções polinomiais e, em geral, suas propriedades são aplicadas para resolver problemas contextualizados em situações do cotidiano ou em exercícios meramente técnicos. Esse hiato entre os dois temas representa um contrassenso do ponto de vista epistemológico.

De fato, sequências numéricas, antes mesmo da construção do conceito de derivadas, conforme nos revelam Boyer (1949), Rezende (2008), Roque (2012), foram utilizadas para determinar padrões de variações de funções reais. Foi desse modo, por exemplo, que os filósofos escolásticos tipificaram os movimentos na cinemática clássica.

Com efeito. De acordo com Youshkevick (1976) a evolução do conceito de função divide-se em três etapas principais: Antiguidade, Idade Média e Período Moderno. Mas foi, sem dúvida na Idade Média, por motivos religiosos, que se iniciou o processo de *matematização*<sup>2</sup> do conceito de função (REZENDE, 2003).

---

<sup>1</sup> A partir desse momento adotaremos a expressão PA para designar uma Progressão Aritmética.

<sup>2</sup> Termo utilizado por Rezende (2003) em sua tese de doutorado para denotar o processo de caracterização de uma relação funcional por uma expressão analítica.

Nicolau de Oresme (1323–1382), por exemplo, ao estudar o movimento uniformemente acelerado, representou num gráfico a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal que ele chamou de longitudes e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes, que ele denominou latitudes. O gráfico da velocidade em função de  $t$ , representado por uma linha reta, ilustra que a taxa com que a grandeza velocidade varia em relação ao tempo é constante. Em outro momento histórico, tendo conhecimento dos ensinamentos de Oresme (1323 – 1382), Galileu Galilei (1564 – 1642) estabeleceu a relação funcional entre as grandezas espaço percorrido por um objeto se deslocando em uma rampa e tempo, observando apenas que a sequência de dados obtidos para as medidas do espaço percorrido gerava uma PA de segunda ordem – veja, por exemplo, (BOYER, 1949). Ambos os filósofos observaram os padrões das grandezas dependentes (velocidade e espaço) em função de uma variação uniforme da variável independente  $t$ . Isto é, para uma sequência de valores do tempo em PA, os valores das variáveis velocidade e posição do móvel variavam conforme uma PA e PA de segunda ordem, respectivamente, o que revelou para cada um deles as funções polinomiais de grau 1 e de grau dois, que se encontravam implícitas nos modelos observados (REZENDE, BORTOLOSSI & PESCO, 2012).

Se por um lado, o uso de PA foi (e pode ser ainda) instrumento para o estudo das variações das funções polinomiais, essas, por outro lado, são funções reais. Uma sequência de números reais é por definição – como sabemos – uma função real  $f: \mathbb{IN} \rightarrow \mathbb{IR}$ . Uma PA é, na verdade, uma função do tipo <sup>3</sup> polinomial de grau 1; uma PA de segunda ordem é uma função do tipo polinomial de grau 2; e assim, por diante.

Portanto, entre esses dois conceitos, PA e funções polinomiais, existem, do ponto de vista epistemológico, uma relação de simbiose entre eles. Entretanto, no âmbito pedagógico, já havíamos observado por conta do TCC de graduação, uma falta de articulação com o ensino desses dois tópicos importantes do ensino básico de matemática. Mas o que dizem as pesquisas na área de ensino de matemática?

Em nossa breve revisão de literatura, observamos que existem diversos trabalhos interessantes, muitos deles sugerindo o uso de softwares educacionais para o ensino de

---

<sup>3</sup> Uma função polinomial real tem como domínio o próprio conjunto dos números reais. Como nos casos considerados estamos restringindo os valores do domínio ao conjunto  $\mathbb{IN}$ , dizemos que a função citada é do tipo polinomial. Em alguns momentos do texto, mais a frente, poderemos usar a nomenclatura polinomial de forma indistinta. Particularmente, consideramos isso um preciosismo da linguagem matemática.

funções reais ou de progressões aritméticas, mas sem fazer a articulação entre eles. É o caso, por exemplo, do trabalho de dissertação de Salomão (2007) que utilizou uma planilha eletrônica, no caso o Excel, para trabalhar o conceito de PA com um grupo de oito alunos da 1ª série do Ensino Médio do período noturno de uma escola da rede pública. Outro exemplo, é a dissertação de Eduardo (2007) que explora o contexto do ensino de PA para discutir questões relacionadas ao desenvolvimento de processos de iniciação à prova. O autor também utiliza softwares (no caso, o Cabri Géomètre II) para explorar algumas propriedades de PA em atividades com os alunos.

Com relação ao universo do ensino de funções reais, o número de trabalhos é bem maior. Para efeito de balizamento de nossas intenções, destacamos sete deles: (BRAGA, 2009), (SCANO, 2009), (SIQUEIRA, 2013), (GONCALVES FILHO, 2011), (SCHÖNARDIE, 2011), (SILVA, 2009) e (BOTELHO, 2005).

Os três primeiros se utilizam de softwares matemáticos para realizarem experiências didáticas em sala de aula. Braga (2009) investigou o processo de compreensão dos conceitos envolvendo função afim e quadrática com alunos do 9º ano do ensino Fundamental, com a utilização de planilha. Scano (2009) desenvolve trabalho similar ao de Braga. Fazendo uso do Geogebra, ele desenvolve uma sequência de ensino para iniciar o estudo da função afim com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de expressar algébrica e graficamente a dependência de duas variáveis de uma função afim e reconhecer seus elementos gráficos. E Siqueira, utilizando-se dos recursos do software Geogebra, desenvolve atividades o ensino de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica no ensino médio. Foram elaboradas atividades de ensino com o objetivo de realizar a caracterização dessas funções.

Em outra linha temática, Goncalves Filho (2011) e Schönardie (2011) desenvolveram seus trabalhos tendo como referencial teórico a modelagem matemática como metodologia de ensino. Ambos os autores desenvolvem atividades para o ensino de função afim, tendo como público alvo da pesquisa alunos do primeiro ano do terceiro ciclo, utilizando a Modelagem Matemática como investigação e compreendido como ambiente de aprendizagem.

Silva (2009) e Botelho (2005), em outra perspectiva procuram estudar e caracterizar as variações de funções polinomiais. Silva (2009) elabora uma proposta para o estudo das taxas de variações de funções afim, quadrática e cúbica sem o uso do conceito de derivada. Faz isso considerando de forma sutil as taxas de variações



instantâneas como aproximações de taxas de variações médias em intervalos cada vez menores. A partir dessa ideia, desenvolve resultados e apresenta diversas aplicações deste conceito a estas classes de funções que incluem, por exemplo, novas formas de obtenção dos seus gráficos, a interpretação geométrica de seus coeficientes, bem como resolver problemas simples e interessantes de otimização.

Já Botelho (2005), considerando o universo das funções afim e quadrática e tomando como referência a abordagem adotada em (LIMA, 2013), propõe uma sequência didática que caracteriza a variação dessas funções a partir de sua relação com as progressões aritméticas, a saber: dada uma PA  $(x_n)$  no eixo das abscissas, e  $f$  e  $g$  funções afim e quadrática arbitrárias, então as sequências  $f(x_n)$  e  $g(x_n)$  são respectivamente progressões aritmética de primeira e de segunda ordem. Em verdade, a autora, assim como (LIMA, 2013), utiliza esse resultado no sentido inverso, e com as adaptações necessárias, para caracterizar as funções afins e quadráticas.

O nosso trabalho caminha mais na direção da proposta dessa última abordagem, que procura articular o estudo de funções polinomiais com o estudo de PA. Em verdade, o propósito desta dissertação é investigar como as Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas podem ser articuladas tendo em vista a construção de uma sequência didática que possa servir de referência para o ensino desses tópicos na educação básica, de modo que considere os elementos potenciais intrínsecos a construção desses dois conceitos matemáticos. As articulações propostas neste trabalho podem ser consideradas como um facilitador ou até mesmo uma forma diferente de observar tais conteúdos. Este trabalho se insere mais no âmbito *intradisciplinar* do que *interdisciplinar* como sugerem as propostas que se utilizam de modelagem matemática como metodologia de ensino. As relações que se procuram aqui se encontram no universo da própria matemática. Outro ponto que gostaríamos de destacar é que, apesar de considerarmos importante o uso de softwares matemáticos para a abordagem desses temas, neste trabalho abrimos mão dos recursos computacionais. Eles existem e estão presentes no cotidiano, mas ainda estão longe de ser uma realidade nas escolas públicas brasileiras. Em particular, na escola pública em que trabalho, localizada na Nova Holanda, Complexo da Maré, não dispomos desses recursos. Há de ressaltar, no entanto, que o material aqui construído pode ser adaptado para o ambiente interativo proporcionado por esses softwares de matemática dinâmica.

Iniciamos nossa pesquisa fazendo uma revisão teórica sobre o assunto, procurando destacar os resultados sobre Funções Polinomiais e Progressões

Aritméticas, que, ao nosso modo de ver, são elementos indispensáveis para a formação do nosso aluno no ensino médio e que, além disso, são fundamentais para uma boa organização didática desses temas na matemática escolar. Esses resultados são discutidos no primeiro capítulo da dissertação.

Isto posto, investigamos as recomendações e/ou orientações de documentos oficiais (BNCC e PCN), de acordo com o que está sendo indicado em cada texto base, observando e descrevendo suas especificidades relacionadas ao estudo de funções polinomiais e progressões aritméticas. Os resultados dessa análise encontram-se registrados na primeira parte do capítulo 2 desta dissertação.

Em seguida, investigamos como os livros didáticos abordam tais assuntos. Para tal escolhemos três coleções para serem analisadas, a saber: Matemática - Contexto & Aplicações – Luiz Roberto Dante – Editora Ática – 3ª edição – 2016; Matemática: Ciência e Aplicações – David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze De Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo – Saraiva Educação – 9ª edição – 2016; Matemática para Compreender o Mundo – Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz – Saraiva Educação – 1ª edição – 2016. Escolhemos esses livros por terem sido aprovados no processo de avaliação do PNL D de 2017 e, além disso, serem utilizados com bastante frequência no Ensino Médio. Para a análise das coleções tomamos como referência as orientações dos documentos oficiais e se elas contemplavam, em algum grau, a correlação entre o estudo de funções polinomiais e progressões aritméticas. Além disso, foram analisados outros aspectos das obras selecionadas. O conteúdo desta análise encontra-se na segunda parte do capítulo 2.

Ultrapassada essa fase inicial da investigação, elaboramos uma sequência didática com oito fichas de atividades que realizem nossa proposta de articulação para serem aplicadas em uma turma do Ensino Médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro. A experiência didática foi realizada durante os meses de agosto, setembro e outubro do ano passado contando com a participação dos alunos da turma do 1º ano da Escola Estadual Professor João Borges. O objetivo principal dessa experiência era observar como os alunos iriam reagir a essa proposta, mapear as principais dificuldades apresentadas e quais conteúdos não foram bem assimilados pelos alunos. As fichas de atividades foram aplicadas em forma de estudo dirigido, com a turma dividida em grupos de quatro alunos, por um período total de 15 horas-aula.

A partir de uma adaptação do material didático, foi elaborado um questionário para ser preenchido por um grupo piloto de dez professores de matemática da educação

básica. Neste caso, o principal objetivo era verificar o nível de compreensão deles sobre os conteúdos de PA e Funções Polinomiais abordado nas fichas dos alunos.

Os relatos da experiência realizada com os estudantes do Ensino Médio, os resultados dessa experiência e do formulário aplicado no grupo de professores são apresentados no capítulo 3 desta dissertação. E por fim, no último capítulo tecemos nossas considerações finais, procurando apontar alguns possíveis desdobramentos futuros para este trabalho.

# Capítulo 1 - Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades que relacionam o estudo das funções polinomiais e das progressões aritméticas. Antes de realizarmos estas propriedades destacaremos alguns elementos essenciais de uma PA, em particular das progressões aritméticas de segunda ordem, que não são conhecidas em geral pela grande maioria dos professores da educação básica.

## 1.1 - Progressões Aritméticas:

Iniciemos esta seção por apresentar uma definição de sequência de números reais.

### **Def. 1 – (LIMA, 2013) Definição de uma sequência numérica de números reais:**

Uma sequência numérica de números reais é uma função real com domínio  $\mathbb{N}$  que, a cada  $n$  associa um número real  $a_n$ . Os números  $a_n$  são chamados termos da sequência. É comum indicar uma sequência escrevendo apenas uma lista ordenada de seus termos:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Essas sequências podem ser finitas ou infinitas:

### **Def. 2 – (LIMA, 2001) Definições de sequências finitas ou infinitas:**

Uma sequência é finita se é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais de 1 até  $n$  (sequência finita, com  $n$  termos) e será infinita se o seu domínio for o próprio conjunto dos números naturais.

Dentre as sequências de números reais, nosso destaque neste capítulo é para as Progressões Aritméticas, que são usualmente estudadas no ensino básico de matemática.

### **Def. 3 – (IEZZI e HAZZAN, 2012) Definição da PA:**

Chama-se PA uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\checkmark a_1 = a$$

$$\checkmark a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

onde  $a$  e  $r$  são números reais dados.

Assim, uma PA é uma sequência em que, cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante  $r$  dada.

A seguir apresentaremos algumas propriedades básicas de PA.

**Propriedade 1 – (IEZZI e HAZZAN, 2012) Fórmula do termo geral:**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma PA e admitindo dados o primeiro termo ( $a_1$ ), a razão ( $r$ ) e o índice ( $n$ ) de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando essas  $n - 1$  igualdades, temos:

$$(a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (n - 1) \cdot r$$

$$\text{E, então, } a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Observe então que a definição de PA como uma lista ordenada de números reais, feitas por recorrência, se enquadra, naturalmente, na definição de sequências em termos de função:

$$1 \rightarrow a_1$$

$$2 \rightarrow a_2 = a_1 + r$$

$$3 \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

...

$$n \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$$

...

### **Propriedade 2– (IEZZI e HAZZAN, 2012) Interpolação aritmética:**

Em toda sequência finita  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , os termos  $a_1$  e  $a_n$ , são chamados *extremos* e os demais são chamados *meios*. Assim, na PA  $(0, 3, 6, 9, 12, 15)$  os extremos são 0 e 15, enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12.

Interpolar, inserir ou intercalar  $k$  meios aritméticos entre os números  $a$  e  $b$  significa obter uma PA de extremos  $a_1 = a$  e  $a_n = b$ , com  $n = k + 2$  termos.

Para determinar os meios de uma PA é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \rightarrow b = a + (k + 1) \cdot r \rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}.$$

### **Propriedade 3 – (IEZZI e HAZZAN, 2012) Soma dos elementos de uma PA:**

A soma dos  $n$  primeiros números inteiros positivos é  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Demonstração:** faremos a demonstração por indução finita:

I) Para  $n = 1$ , temos:  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$  (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para  $n = p$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

E provemos para  $n = p + 1$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + p + (p + 1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p + 1) = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Então,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\Delta n \in \mathbb{N}^*$ .

Demonstraremos a seguir que toda PA é a restrição de uma função polinomial de grau 1 (adotaremos também neste caso, a nomenclatura “função do tipo polinomial de grau 1”).

### **Propriedade 4 – (DANTE, 2016) Conexão entre PA e função polinomial de grau 1:**

Toda PA é a restrição de uma função polinomial de grau 1.

**Demonstração:**

Considerando uma PA  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $r$ ,  $r \neq 0$ , cujo termo geral é

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Tomando  $a_n = f(x)$ ,  $n = x$ , onde  $x \in \mathbb{N}^*$ , temos que a representação geométrica dessa PA é formada por pontos do gráfico de:

$$f(x) = a_1 + (x - 1)r, \text{ dados por } (1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$$

**Exemplo 1:** Dada uma PA de razão 3 ( $r = 3$ ), onde seu primeiro termo vale 1 ( $a_1 = 1$ ), determine a função do tipo polinomial de grau 1 que define a PA.

**Solução:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$p_n = 1 + (n - 1)3$$

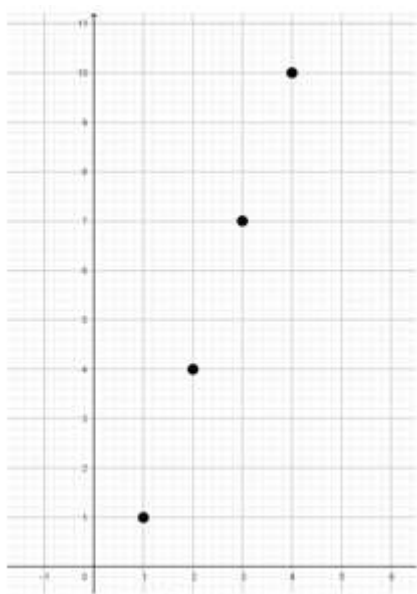
$$p_n = 3n - 2$$

Temos uma função do tipo polinomial  $p(n) = 3n - 2$ .

Observemos a seguir os gráficos da PA (1, 4, 7, 10, ...), definida por  $p(n) = 3n - 2$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e gráfico da função polinomial de grau 1, de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $p(x) = 3x - 2$ .

Figura 01: gráfico da PA (1, 4, 7, 10, ...);

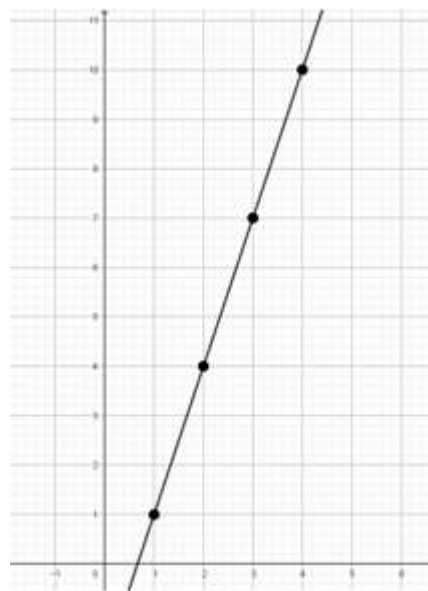
$$p(n) = 3n - 2$$



Fonte: o autor

Figura 02 - gráfico da função real

$$p(x) = 3x - 2$$



Fonte: o autor

**Exemplo 2:** Dada uma PA de razão  $-2$  ( $r = -2$ ), onde seu primeiro termo vale 10 ( $a_1 = 10$ ), determine a função do tipo polinomial de grau 1 que define a PA.

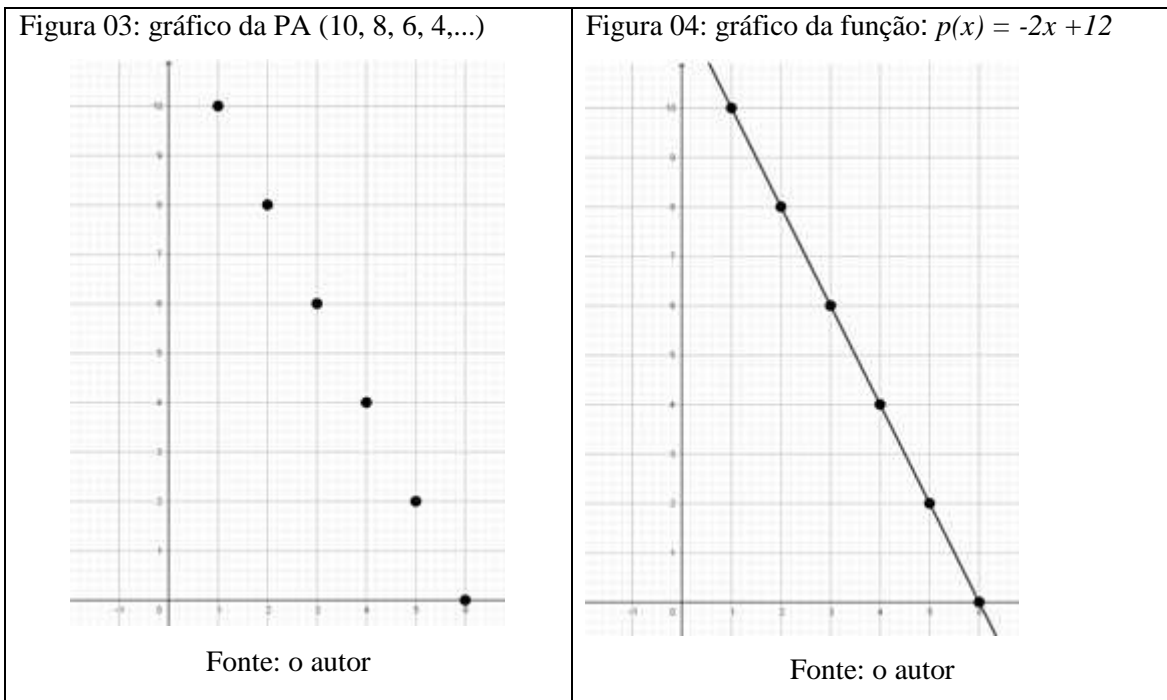
**Solução:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$p_n = 10 + (n - 1)(-2)$$

$$p_n = -2n + 12,$$

Observemos a seguir os gráficos da PA (10, 8, 6, 4, ...), definida por  $p(n) = -2n + 12$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$  e gráfico da função polinomial de grau 1, de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , definida por  $p(x) = -2x + 12$ , respectivamente:



Isto posto, trataremos agora das Progressões Aritméticas de segunda Ordem.

**Def. 4 – (LIMA, 2006) PA de segunda ordem:**

Uma PA ( $p_n$ ) é de segunda ordem quando a sequência das diferenças entre cada par de termos consecutivos,  $(\Delta p_n) = (p_{n+1} - p_n)$ , é uma PA não degenerada<sup>4</sup>.

**Exemplo 3:** A sequência  $p_n = n^2$  é uma PA de segunda ordem de razão 2.

Tabela 01: PA de segunda ordem de razão 2

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$p_n$	1	4	9	16	25	36	49	64	...
$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$	3	5	7	9	11	13	15	...	...

Fonte: o autor

<sup>4</sup> Uma PA não degenerada é aquela que possui razão diferente de zero.



Logo a sequencia é uma PA de segunda ordem, onde sua razão é igual a 2 ( $r = 2$ ).

**Exemplo 4:** A sequência  $p_n = 3n^2 + n - 1$  é uma PA de segunda ordem de razão 6.

Tabela 02: PA de segunda ordem de razão 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$p_n$	3	13	29	51	79	111	151	199	...
$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$	10	16	22	28	34	40	46	...	...

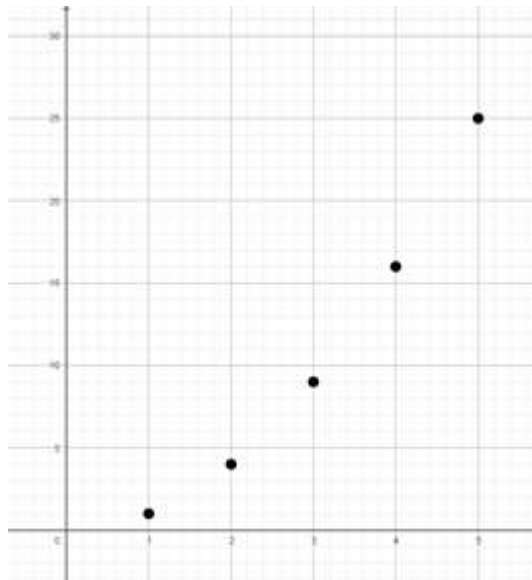
Fonte: o autor

Logo a sequencia é  $p_n$  uma PA de segunda ordem de razão 6 ( $r = 6$ ).

Ao observar os exemplos anteriores, percebemos uma particularidade, as sequências apresentadas têm como termo geral um polinômio de grau dois. Será coincidência? Ou será que podemos generalizar que toda PA de segunda ordem está associada a uma função polinomial de grau dois?

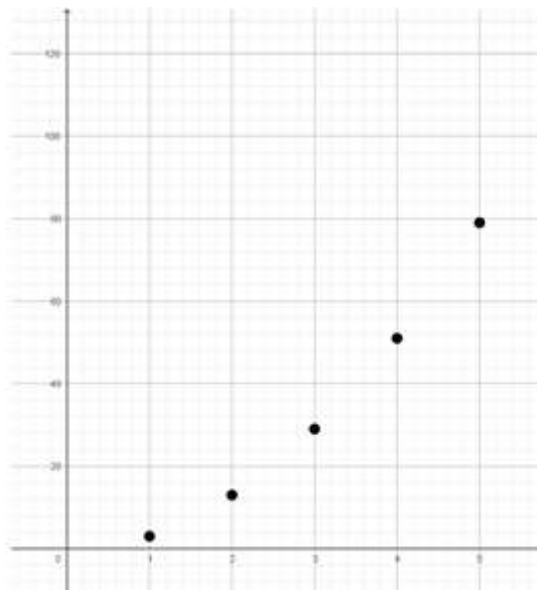
A seguir podemos ver os gráficos das progressões de segunda ordem dos exemplos 1 e 2.

Figura 05 - gráfico de uma PA de segunda ordem  $p_n = n^2$



Fonte: o autor

Figura 06 – gráfico da sequência  $p_n = 3n^2 + n - 1$



Fonte: o autor

## 1.2 – Funções Polinomiais:

A função polinomial, de natureza simples e elementar, tem um papel destacado na matemática e nas ciências. Podemos observar diversas situações do cotidiano ou da ciência em que uma função polinomial é bastante útil para modelar ou resolver um problema. Esta importância foi apresentada em um dos textos elaborados pelo projeto Klein.

Em geometria, por exemplo, a área de um círculo é proporcional ao quadrado do comprimento do seu raio e a área do quadrado é igual ao quadrado do comprimento do seu lado. Na disciplina de Física, você já deve ter ouvido falar de equação horária de um corpo em queda livre, energia potencial elástica de uma mola, energia cinética, etc. A função polinomial do segundo grau é bastante útil nesses contextos! Outros exemplos, na área de economia, de biologia ou em áreas mais diversas do conhecimento (...). (REZENDE, 2013)

Em outro parágrafo, o autor destaca a simplicidade das funções polinomiais:

Assim, dois fatores conspiram a favor das funções polinomiais: ou os fenômenos científicos se encaixam maravilhosamente em modelos descritos por funções polinomiais, ou essas funções satisfazem à condição do “menor esforço” do intelecto humano que, para vencer problemas de natureza mais complexa, tende a realizar uma simplificação dos modelos a serem utilizados. De um fato temos certeza: a simplicidade dessas funções é realmente encantadora! (REZENDE, 2013)

A seguir apresentamos uma definição de função polinomial de grau  $n$ :

**Def. 5 – (LIMA, 2013):** Definição de uma função polinomial real de grau  $n$ :

Diz-se que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial quando são dados números reais  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  não nulo, tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Antes de estudarmos a relação que existe entre os estudos de PA e funções polinomiais destacaremos algumas características interessantes das funções polinomiais, algumas delas retiradas do artigo citado acima.

### **i) Encantadora porque é simples:**

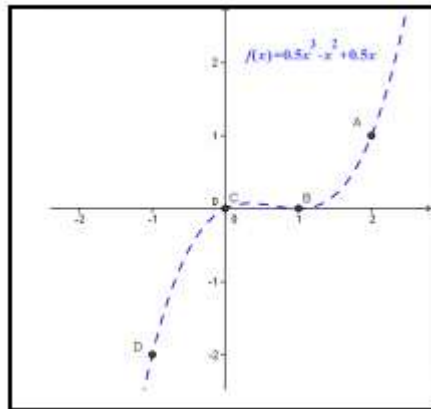
Ao calcularmos o valor de uma função polinomial em um ponto, utilizamos apenas operações algébricas elementares como a adição, a multiplicação e suas operações inversas. Por exemplo, dada a função  $f$  definida por  $f(x) = x^2 + 0,5x - 3$ ,  $f(4)$  pode ser calculado, utilizando uma “calculadora padrão”, fazendo as seguintes operações:  $4 \times 4 + 0,5 \times 4 - 3 = 16 + 2 - 3 = 15$ .

### **ii) Local x Global:**

Outro fator importante é a visibilidade que essas funções apresentam. Dada uma função polinomial  $f$  de grau  $n$ , quando conhecido  $(n + 1)$  de seus valores, podemos conhecer qualquer outro valor da função em qualquer outro ponto do seu domínio; quer dizer, quando conhecidos  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$ , para  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  pode ser determinado para qualquer valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, a função definida por  $f(x) = 0,5x^3 - x^2 + 0,5x$  é, com efeito, a única função polinomial de grau três que assume os valores  $f(-1) = -2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 0$  e  $f(2) = 1$ . Logo, sabendo que esta é uma função polinomial de grau 3, podemos determinar algebricamente qualquer outro valor de  $f$  para um número real  $x$ .

Figura 07 - gráfico da função  $f(x) = 0,5x^3 - x^2 + 0,5x$



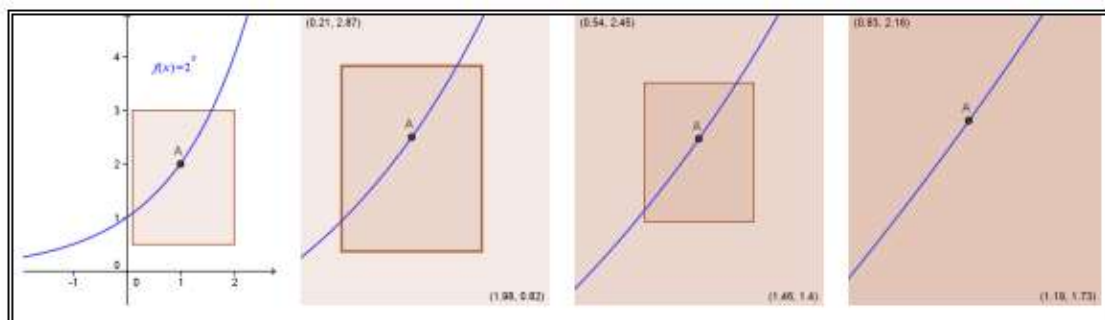
Fonte: (REZENDE, 2013, p.02)

### **iii) Funções diferenciáveis e aproximações polinomiais:**

Certas funções reais apresentam virtudes de continuidade e diferenciabilidade. O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Tal afirmação é equivalente a dizer que uma função diferenciável pode ser aproximada localmente por uma função polinomial de grau um. Daí, podemos calcular valores aproximados de uma função  $f$  na vizinhança de um ponto onde  $f$  é diferenciável, considerando a função polinomial de grau um ou uma função constante que melhor aproxima a função dada na vizinhança desse ponto. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em diversos livros de cálculo, como por exemplo, em (GUIDORIZZI, 2001, p. 465-466).

Esse processo de aproximação de uma função diferenciável por uma função polinomial de grau 1 ou por uma função constante pode ser visualizada (literalmente) por meio de um software de matemática dinâmica. Observe a figura 08 a seguir. Nela observamos uma sequência de ampliações (com a ferramenta zoom +) do gráfico de uma diferenciável na vizinhança de um ponto. Ao ampliarmos o gráfico de uma função diferenciável uma sequência de vezes, este fica similar a uma reta – curva próxima ao gráfico da função polinomial de grau 1 que aproxima a função diferenciável localmente.

Figura 08 - ampliação do gráfico de uma função diferenciável usando a ferramenta zoom +



Fonte: (REZENDE, 2013, p.02)

Mas, será que podemos aproximar uma função diferenciável por uma função polinomial de grau dois?

Brook Taylor (1685-1793), um de aluno de Newton (1643-1727), percebeu que se uma função real é  $n$ -vezes diferenciável, então podemos aproximar esta função por uma função polinomial de grau  $n$  na vizinhança de um ponto do seu domínio. Taylor observou também que quanto maior o grau do polinômio, melhor seria a aproximação realizada. As funções: exponencial, trigonométricas seno e cosseno são infinitamente diferenciáveis. Sendo assim, todas elas podem ser aproximadas localmente por uma função polinomial de grau  $n$  (que também é infinitamente diferenciável) onde o erro cometido será tão menor, quanto maior for o grau do polinômio (polinômio de Taylor). Em verdade, o que temos é que o resto:

$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$  tende a zero de forma mais rápida tanto quanto maior for o grau do polinômio de Taylor  $p_n(x)$ .

Uma versão desse resultado pode ser visualizada em (GUIDORIZZI, 2001, p. 480).

Seja  $f$  diferenciável até a ordem  $n$  no intervalo  $I$  e seja  $x_0 \in I$ .

O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + [f''(x_0)/2!](x - x_0)^2 + \dots + [f^{(n)}(x_0)/n!](x - x_0)^n$$

denomina-se polinômio de Taylor, de ordem  $n$ , de  $f$  em torno de  $x_0$ .

O polinômio de Taylor, de ordem  $n$ , de  $f$  em torno de  $x_0$  é o único polinômio de grau no máximo  $n$  que aproxima localmente  $f$  em torno de  $x_0$  de modo que o erro  $E(x)$  tenda a zero mais rapidamente que  $(x - x_0)^n$ , quando  $x$  tende a  $x_0$ .

Um demonstração para esse resultado pode ser vista (GUIDORIZZI, 2001, pp. 481-482).

### 1.3 – Funções polinomiais e PA:

Nesta seção trataremos mais especificamente das relações entre as funções polinomiais e progressões aritméticas, Abordaremos apenas os casos das funções polinomiais de graus 1 e 2.

#### 1.3.1 – Função polinomial de grau 1 e PA

Em seção anterior vimos que uma PA é uma função  $p_n$  do tipo afim. Uma questão que se põe é a seguinte: dada uma PA  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  e uma função polinomial  $f$  de grau 1, o que podemos afirmar sobre a sequência  $f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_n), \dots$ ?

O próximo teorema responde a questão:

#### Teorema 1:

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$ ,  $a$  e  $b$  números reais,  $a \neq 0$ .

Considere  $x_1, \dots, x_n$  uma PA de 1ª ordem. Então a sequência  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  também será uma PA de 1ª ordem.

#### **Demonstração:**

Considere  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  uma PA.

Aplicando a função  $f$  aos valores da PA, obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \blacktriangleright \end{array} \quad f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \blacktriangleright \end{array} \quad f(x_3) - f(x_2) = a(x_3 - x_2)$$

$$f(x_3) = ax_3 + b$$

...

$$f(x_{n-1}) = ax_{n-1} + b$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \blacktriangleright \end{array} \quad f(x_n) - f(x_{n-1}) = a(x_n - x_{n-1})$$

$$f(x_n) = ax_n + b$$

Como  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  é uma PA, tem-se que

$$(x_2 - x_1) = (x_3 - x_2) = \dots = (x_n - x_{n-1}) = r \text{ (razão da PA)}$$

Portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_3) - f(x_2) = f(x_n) - f(x_{n-1}) = r.a$$

isto é,

$$f(x_1), \dots, f(x_n) \text{ é uma PA de razão } r.a.$$

Por estes fatos, podemos afirmar que: uma função polinomial de grau 1 qualquer aplicada a uma PA de 1ª ordem tem como resultado uma nova PA de 1ª ordem.

**Exemplo 5.**

Considere a função polinomial de grau 1  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x + 1$  e  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ <sup>5</sup> uma PA de 1ª ordem.

Atribuindo os valores da PA na coordenada  $x$  da função, temos:

$$f(1) = 2.1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2.2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2.3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2.4 + 1 = 9$$

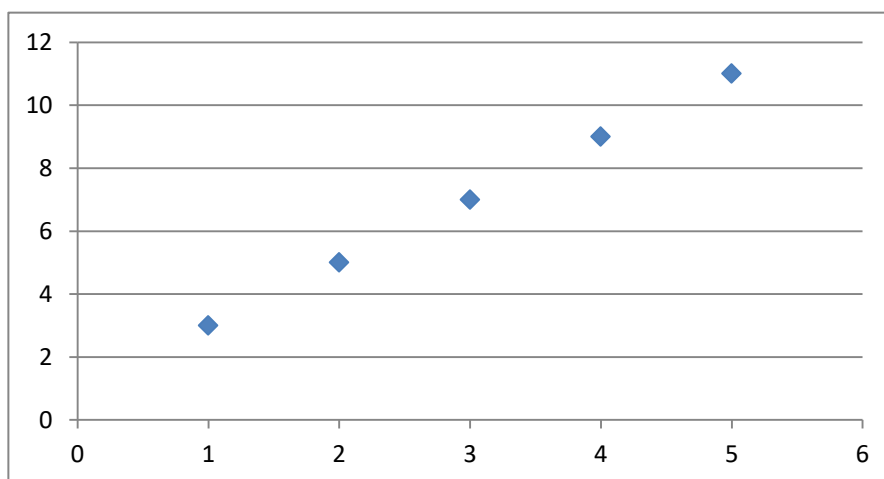
$$f(5) = 2.5 + 1 = 11$$

$$f(6) = 2.6 + 1 = 13$$

Observamos que ao ser utilizado a PA  $(1, 2, 3, 4, 5$  e  $6)$  no domínio, os valores  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$  e  $f(6)$  formam uma PA de 1ª ordem e de razão 2.

A seguir foi construído o gráfico desta última PA.

Figura 09 - Representação de pontos da PA  $f(1) \dots f(6)$



Fonte: o autor

Os pontos do gráfico da PA encontram-se sobre o gráfico da função  $f$ .

<sup>5</sup> Nos exemplos das funções polinomiais serão atribuídos 6 valores para as mesma.

**Exemplo 6:**

Considere a função polinomial de grau 1  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -2x + 1$  e a seguinte PA  $x_n = 3 + 2(n - 1)$

Assim,  $f(x_n)$  é dada por:

$$x_1 = 3 + 2(1-1) = 3 \rightarrow f(x_1) = -2.3 + 1 = -5$$

$$x_2 = 3 + 2(2-1) = 5 \rightarrow f(x_2) = -2.5 + 1 = -9$$

$$x_3 = 3 + 2(3-1) = 7 \rightarrow f(x_3) = -2.7 + 1 = -13$$

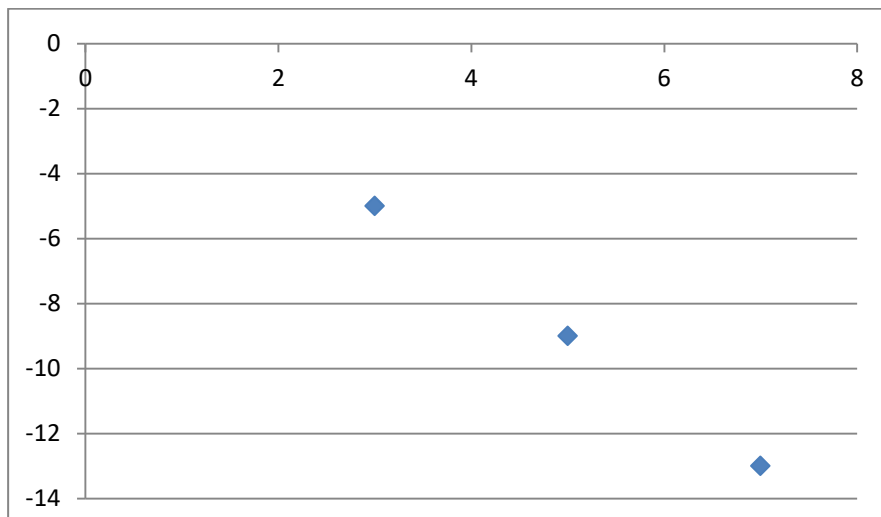
$$x_4 = 3 + 2(4-1) = 9 \rightarrow f(x_4) = -2.9 + 1 = -17$$

$$x_5 = 3 + 2(5-1) = 11 \rightarrow f(x_5) = -2.11 + 1 = -21$$

$$x_6 = 3 + 2(6-1) = 13 \rightarrow f(x_6) = -2.13 + 1 = -25$$

Observamos que ao ser utilizado a PA  $x_n$  no domínio, onde  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)$  e  $f(x_6)$  formando uma PA de 1ª ordem e de razão  $-4$ .

Figura 10 - representação de pontos da PA  $f(x_n)$ .



Fonte: o autor

Os pontos do gráfico da PA encontram-se sobre o gráfico da função f.

**Exemplo 7:**

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$ , e a PA de 1ª ordem (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Observe que:



$$f(1) = a + b$$

$$f(2) = 2a + b$$

$$f(3) = 3a + b$$

$$f(4) = 4a + b$$

$$f(5) = 5a + b$$

$$f(6) = 6a + b$$

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos desta última sequência, obtém-se o seguinte resultado:

$$f(2) - f(1) = (2a + b) - (a + b) = a$$

$$f(3) - f(2) = (3a + b) - (2a + b) = a$$

$$f(4) - f(3) = (4a + b) - (3a + b) = a$$

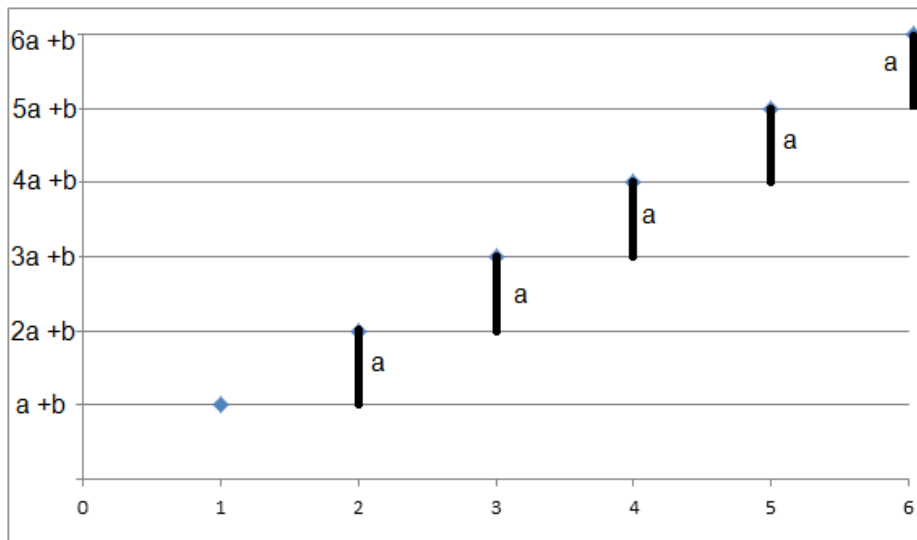
$$f(5) - f(4) = (5a + b) - (4a + b) = a$$

$$f(6) - f(5) = (6a + b) - (5a + b) = a$$

Por meio destes resultados anteriores, pode-se concluir que a os termos  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$ ,  $f(6)$ , nesta ordem, formam uma PA de 1ª ordem, pois a diferença entre os termos consecutivos é uma constante  $a$ .

No caso que  $a > 0$  (e  $a + b > 0$ ), tem-se o seguinte gráfico para a sequência  $f(n)$ .

Figura 11 – representação de pontos da PA  $f(x_n)$ .



Fonte: o autor

No caso que  $a < 0$  (e  $a + b > 0$ ), tem-se o gráfico similar ao caso anterior para a sequência  $f(n)$ . Quando o valor de  $a$  for negativo o gráfico será representado uma curva decrescente.

Observe, que, em ambos os casos, quando a PA  $x_n$  tem razão 1, a razão da PA  $f(x_n)$  é o próprio valor  $a$ .

Por outro lado, surge uma questão digna de nota: Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que leva qualquer PA  $x_n$ , definida no eixo das abscissas, em uma PA  $f(x_n)$ , no eixo das ordenadas. Podemos afirmar que  $f$  necessariamente é uma função polinomial de grau 1? O teorema seguinte responde esta questão.

### **Teorema 2: (LIMA, 2013) Teorema Fundamental da Proporcionalidade:**

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{R}$
- (2) Pondo  $a = f(1)$ , tem-se  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$
- (3)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$

#### **Demonstração:**

Provaremos as implicações (1)  $\rightarrow$  (2), (2)  $\rightarrow$  (3) e (3)  $\rightarrow$  (1). Afim de mostrar que (1)  $\rightarrow$  (2), provaremos inicialmente que, para todo número racional  $r = \frac{m}{n}$ , a hipótese (1) acarreta que  $f(rx) = rf(x)$ , seja qual for  $x \in \mathbb{R}$ . Com efeito, tem-se:

$$n \cdot f(xr) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

logo:

$$f(xr) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$$

Seja  $a = f(1)$ . Como  $f(0) = f(0 \cdot 1) = 0 \cdot f(1) = 0$ , a monotonicidade de  $f$  nos dá  $a = f(1) > f(0) = 0$ . Assim,  $a$  é positivo. Além disso, temos  $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ra$  para  $r \in \mathbb{Q}$ .

Mostremos agora que se tem  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Suponha, por absurdo, que exista algum número real  $x$  (necessariamente irracional) tal que  $f(x) \neq ax$ . Para fixar ideias, admitamos  $f(x) < ax$ . (O caso  $f(x) > ax$  seria tratado de modo análogo.) temos:

$$\frac{f(x)}{a} < x$$

Tomemos um número racional  $r$  tal que:

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então  $f(x) < ar < ax$ , ou seja,  $f(x) < f(r) < ax$ . Mas isto é absurdo, pois  $f$  é crescente logo, como  $r < x$ , deveríamos ter  $f(r) < f(x)$ . Esta contradição completa a prova de que (1)  $\rightarrow$  (2). As implicações (2)  $\rightarrow$  (3) e (3)  $\rightarrow$  (1) são óbvias.

### **Teorema 3: (LIMA, 2013) Caracterização da função afim:**

Se função monótona  $f: IR \rightarrow IR$  transforma qualquer PA  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  numa PA  $y = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$  então  $f$  é uma função afim.

#### **Demonstração:**

Com efeito, neste caso a nova função  $g: IR \rightarrow IR$ , definida por  $g(x) = f(x) - f(0)$ , transforma qualquer PA noutra PA, e agora tem a propriedade  $g(0) = 0$ . Mostremos que  $g$  é linear.

Para todo  $x \in IR$ , os números  $-x, 0, x$  formam uma PA, logo o mesmo ocorre com os números  $g(-x), 0, g(x)$ . Por conseguinte,  $g(-x) = -g(x)$ .

Em seguida, consideremos  $x \in IR$  e  $n \in IN$ . Então os números  $0, x, 2x, \dots, nx$  formam uma PA, o mesmo se dando com suas imagens por  $g: 0, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ . A razão desta progressão pode ser obtida tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é  $g(x)$ . Segue-se então que  $g(nx) = n \cdot g(x)$ . Finalmente, se  $n$  é um número inteiro negativo, temos  $-n \in IN$  logo  $g(nx) = -g(-nx) = -(-n \cdot g(x)) = n \cdot g(x)$ . Assim, vale  $g(nx) = ng(x)$  para todo  $n \in Z$  e todo  $x \in IR$ . Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue-se que  $g$  é linear:  $g(x) = ax$ , portanto, pondo  $f(0) = b$ , temos:

$$f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$$

para todo  $x \in IR$ , como queríamos demonstrar.

Observação 1: como uma função polinomial de grau 1 é uma função afim, o resultado acima serve também para caracterizar as funções polinomiais de grau 1.

### **1.3.2 – Função polinomial de grau 2 e PA de segunda ordem:**

De modo análogo ao que fizemos na seção anterior, uma questão que se põe é a seguinte: dada uma PA  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  e uma função polinomial  $f$  de grau 2, o que podemos afirmar sobre a sequência  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ?

O próximo teorema responde a questão:

**Teorema 4:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a$  e  $b$  números reais,  $a \neq 0$ . Considere  $x_1, \dots, x_n$  uma PA de 1ª ordem. Então a sequência  $f(x_1), \dots, f(x_n)$  também será uma PA de 2ª ordem.

**Demonstração:**

Tomando  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sendo uma PA.

Aplicando a função  $f$  aos valores da PA, obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$f(x_1) = x_1^2 a + x_1 b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - x_1^2)a + (x_2 - x_1)b = (x_2 + x_1)r.a + r.b = \Delta f(x_1)$$

$$f(x_2) = x_2^2 a + x_2 b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_3) - f(x_2) = (x_3^2 - x_2^2)a + (x_3 - x_2)b = (x_3 + x_2)r.a + r.b = \Delta f(x_2)$$

$$f(x_3) = x_3^2 a + x_3 b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_4) - f(x_3) = (x_4^2 - x_3^2)a + (x_4 - x_3)b = (x_4 + x_3)r.a + r.b = \Delta f(x_3)$$

$$f(x_4) = x_4^2 a + x_4 b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_5) - f(x_4) = (x_5^2 - x_4^2)a + (x_5 - x_4)b = (x_5 + x_4)r.a + r.b = \Delta f(x_4)$$

$$f(x_5) = x_5^2 a + x_5 b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_6) - f(x_5) = (x_6^2 - x_5^2)a + (x_6 - x_5)b = (x_6 + x_5)r.a + r.b = \Delta f(x_5)$$

$$f(x_6) = x_6^2 a + x_6 b + c$$

...

$$f(x_{n-1}) = (x_{n-1})^2 a + x_{n-1} b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) = (x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2)a + (x_{n-1} - x_{n-2})b = (x_{n-1} + x_{n-2})r.a + r.b$$

$$f(x_n) = (x_n)^2 a + x_n b + c$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ \bullet \end{array} \quad f(x_n) - f(x_{n-1}) = (x_n^2 - x_{n-1}^2)a + (x_n - x_{n-1})b = (x_n + x_{n-1})r.a + r.b = \Delta f(x_{n-1})$$

Basta verificar que a sequência  $\Delta f(x_n)$  é uma PA.

De fato,

$$\Delta f(x_n) - \Delta f(x_{n-1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - (f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$[(x_{n+1} + x_n)ra + rb] - [(x_n + x_{n-1})ra + rb] = (x_{n+1} + x_n - x_n - x_{n-1})ra =$$

$$[(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1})]ra = [r + r]ra = 2r^2a$$

Assim  $f(x_n)$  é PA de 2ª ordem e de ordem  $2r^2a$ .

Por estes fatos, podemos afirmar que: uma função polinomial de grau 2 qualquer aplicada a uma PA de 1ª ordem tem como resultado uma nova PA de 2ª ordem.

**Exemplo 8:**

Considere a função polinomial de grau 2  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 3x^2 - x$  e  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$  uma PA de 1ª ordem.

Atribuindo os valores da PA na coordenada x da função, temos:

$$f(1) = 3.1^2 - 1 = 2$$

$$f(2) = 3.2^2 - 2 = 10$$

$$f(3) = 3.3^2 - 3 = 24$$

$$f(4) = 3.4^2 - 4 = 44$$

$$f(5) = 3.5^2 - 5 = 70$$

$$f(6) = 3.6^2 - 6 = 102$$

Observamos que ao ser utilizado a PA  $(1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6)$  no domínio, onde  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$  e  $f(6)$  formando uma PA de 2ª ordem.

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos, observamos os seguintes resultados:

$$f(2) - f(1) = 10 - 2 = 8$$

$$f(3) - f(2) = 24 - 10 = 14$$

$$f(4) - f(3) = 44 - 24 = 20$$

$$f(5) - f(4) = 70 - 44 = 26$$

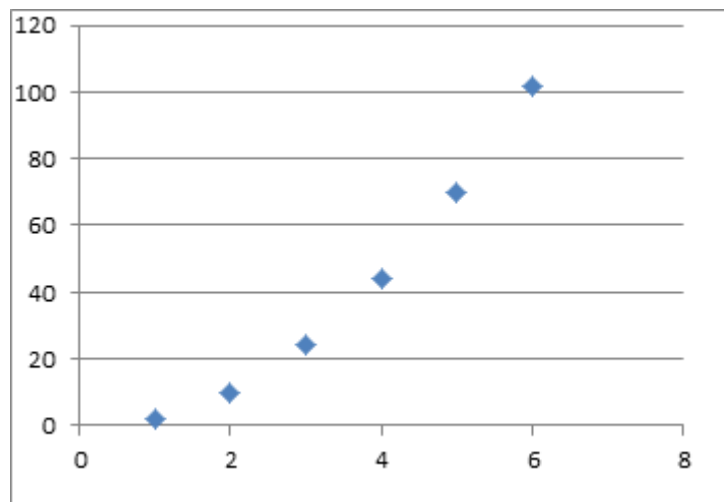
$$f(6) - f(5) = 102 - 70 = 32$$

Por meio destes valores encontrados nas diferenças, podemos visualizar que se formou uma PA de razão 6.

$$(8, 14, 20, 26, 32)$$

A seguir foi construído o gráfico da PA de segunda ordem.

Figura 12 – Representação de pontos da PA  $f(x_1) \dots f(x_6)$



Fonte: o autor

**Exemplo 9:**

Considere a função polinomial de grau 2  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  e a seguinte PA  $x_n = 1 + 3(n - 1)$

Assim,  $f(x_n)$  é dada por:

$$x_1 = 1 + 3(1-1) = 1 \rightarrow f(x_1) = -1^2 + 2.1 + 1 = 2$$

$$x_2 = 1 + 3(2-1) = 4 \rightarrow f(x_2) = -4^2 + 2.4 + 1 = -7$$

$$x_3 = 1 + 3(3-1) = 7 \rightarrow f(x_3) = -7^2 + 2.7 + 1 = -34$$

$$x_4 = 1 + 3(4-1) = 10 \rightarrow f(x_4) = -10^2 + 2.10 + 1 = -79$$

$$x_5 = 1 + 3(5-1) = 13 \rightarrow f(x_5) = -13^2 + 2.13 + 1 = -142$$

$$x_6 = 1 + 3(6-1) = 16 \rightarrow f(x_6) = -16^2 + 2.16 + 1 = -223$$

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos desta última sequência, obtém-se o seguinte resultado:

$$f(x_2) - f(x_1) = -9$$

$$f(x_3) - f(x_2) = -27$$

$$f(x_4) - f(x_3) = -45$$

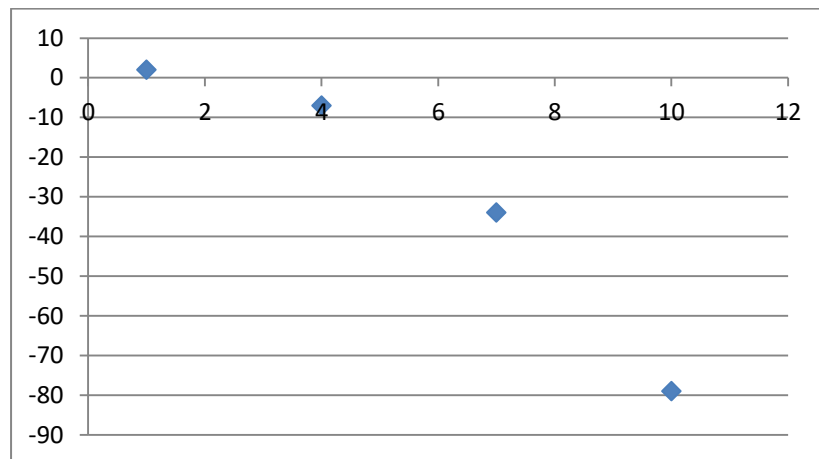
$$f(x_5) - f(x_4) = -63$$

$$f(x_6) - f(x_5) = -81$$

Observamos que ao ser utilizado a PA  $x_n$  no domínio, onde  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)$  e  $f(x_6)$  formando uma PA de 2ª ordem e de razão  $-18$ .

A seguir foi construído o gráfico da PA de segunda ordem.

Figura 13 – Representação de pontos da PA  $f(x_n)$



Fonte: o autor

**Exemplo 10:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , e a PA de 1ª ordem (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Observe que:

$$f(1) = a(1)^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$$f(2) = a(2)^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$

$$f(3) = a(3)^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$$

$$f(4) = a(4)^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c$$

$$f(5) = a(5)^2 + b \cdot 5 + c = 25a + 5b + c$$

$$f(6) = a(6)^2 + b \cdot 6 + c = 36a + 6b + c$$

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos desta última sequência, obtém-se o seguinte resultado:

$$f(2) - f(1) = (4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b$$

$$f(3) - f(2) = (9a + 3b + c) - (4a + 2b + c) = 5a + b$$

$$f(4) - f(3) = (16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) = 7a + b$$

$$f(5) - f(4) = (25a + 5b + c) - (16a + 4b + c) = 9a + b$$

$$f(6) - f(5) = (36a + 6b + c) - (25a + 5b + c) = 11a + b$$

Daí, pode-se concluir que a os termos  $[f(2) - f(1), f(3) - f(2), f(4) - f(3), f(5) - f(4), f(6) - f(5)]$ , nesta ordem, formam uma PA de 1ª ordem, pois a diferença entre os termos consecutivos é a constante  $2a$ .

**Lema 01:**

Tomando  $g$  função contínua, com  $g(0) = 0$  e  $g(1), \dots, g(n)$  uma PA de segunda ordem.

Sabendo que  $g(n) - g(n-1)$  é uma PA de 1ª ordem, logo existem  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $g(n) - g(n-1) = \alpha n + \beta$

Observe que:

$$g(1) - g(0) = \alpha + \beta$$

$$g(2) - g(1) = \alpha \cdot 2 + \beta$$

$$g(3) - g(2) = \alpha \cdot 3 + \beta$$

....

$$g(n) - g(n-1) = \alpha n + \beta$$

Somando as equações, temos:

$$g(n) - g(0) = \alpha(1 + \dots + n) + n\beta$$

$$g(n) = \alpha \frac{n(n+1)}{2} + n\beta = \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\alpha}{2} n + n\beta$$

$$g(n) = \frac{\alpha}{2} n^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)n$$

Existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que:  $g(n) = an^2 + bn$

**Teorema 5: (LIMA, 2013) Caracterização da função polinomial de grau 2 (quadrática):**

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que transforma toda PA não-constante  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  numa PA de segunda ordem não-degenerada  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$ , então  $f$  é uma função quadrática.

**Demonstração:**

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com a propriedade de transformar toda PA de segunda ordem não-degenerada. Substituindo  $f(x)$  por  $g(x) = f(x) - f(0)$ , vemos que  $g$  tem as mesmas propriedades de  $f$  e mais a propriedade adicional de que  $g(0) = 0$ .

Considerando a PA 1, 2, 3, 4, 5, ..., vemos que os valores  $g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$  formam uma PA de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes  $a \neq 0$  e  $b$  tais que

$$g(n) = an^2 + bn$$



Em seguida, fixemos arbitrariamente um número  $p \in \mathbb{N}$  e consideremos a PA  
 $1p, 2p, 3p, \dots, pn, \dots$

$$g(pn) = a(pn)^2 + b(pn)$$

Como  $pn \in \mathbb{N}$ , temos

$$g(pn) = a(pn)^2 + bpn = ap^2n^2 + bpn, \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

De onde:  $a(p) = ap^2$  e  $b(p) = bp$

$$g(pn) = ap^2n^2 + bpn, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Logo, para quaisquer números naturais  $n$  e  $p$  vale:

$$g\left(p\left(\frac{n}{p}\right)\right) = g(n) = an^2 + bn = ap^2\left(\frac{n}{p}\right)^2 + bp\left(\frac{n}{p}\right).$$

De onde:  $g\left(\frac{n}{p}\right) = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right)$ .

Vemos então que as funções contínuas  $g(x)$  e  $ax^2 + bx$  são tais que  
 $g(r) = ar^2 + br$  para todo número racional positivo  $r = \frac{n}{p}$ .

Segue-se que  $g(x) = ax^2 + bx$  para todo número real positivo  $x$ . De modo análogo, considerando a PA  $-1, -2, -3, \dots$ , concluiríamos que  $g(x) = ax^2 + bx$  para todo  $x \leq 0$ . Logo, pondo  $f(0) = c$ , temos  $f(x) = g(x) + c$ , ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

## Capítulo 2 - O Ensino de Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas

### 2.1 – Orientações oficiais.

Nesta seção serão destacadas algumas orientações curriculares para o ensino médio mostram ser importante para o ensino de funções reais, em particular as funções polinomiais, no âmbito nacional. Para esta revisão escolhemos o PCN (Parâmetro Curricular Nacional) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para realizar esta pesquisa. Procuraremos dar ênfase em como estão sendo propostos os estudos das funções polinomiais e das sequências numéricas, as articulações entre esses tópicos e algumas relações com outros temas, além das metodologias de ensino sugeridas.

#### 2.1.1 – PCN:

A análise deste texto foi desenvolvida priorizando o que está sendo relacionado com o tema deste estudo, que seria função polinomial e progressão, observando os destaques e a forma que devem ser abordados tais temas. De acordo com o mesmo, o tema de funções no âmbito da matemática do Ensino Médio pode ser desenvolvido com a contribuição da tecnologia como um facilitador de aprendizagem. De fato, o uso de tecnologias no ensino de matemática em sentido amplo contribui com novas possibilidades didáticas e atitudes mais proativas dos discentes, muito mais do que a simples memorização de fórmulas.

Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.  
(PCN, 2000)

A leitura, a construção de gráficos e suas interpretações ajudam sobremaneira no estudo de funções, pois a visualização do gráfico revela para os estudantes algumas propriedades “escondidas” em sua representação algébrica.

Outro elemento facilitador para a compreensão de alguns conteúdos matemáticos seria a atitude interdisciplinar, ou seja, a relação que determinado tema matemático pode apresentar em diferentes disciplinas. Neste sentido, o conceito de função é realmente privilegiado,

podendo ser usado para a interpretação de diversos fenômenos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia.  
(PCN, 2000)

O ensino de funções sem articulação com o mundo real pode se tornar um dos maiores obstáculos para a aprendizagem dos estudantes. É muito comum, por exemplo, o questionamento feito pelos estudantes aos seus professores perguntando sobre ”por que estudam isso?”. Uma contribuição para a tentativa da solução desta pergunta seria a construção de situações problemas, as mais diversas possíveis, que envolvem esse conteúdo, tal e como sugere o próprio PCN.

Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.  
(PCN, 2000)

Neste trabalho de dissertação, como já afirmado anteriormente, daremos ênfase também às relações intradisciplinares que o conceito de função estabelece com outros tópicos ou campos da própria matemática: sua relação com o estudo de sequências (onde está baseado nosso estudo), com a matemática financeira, a geometria etc.. Como o próprio texto do PCN (2000) afirma, “as sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções”. As progressões aritméticas são funções do “tipo afim”; as progressões geométricas são do “tipo exponencial”; e as progressões aritméticas de segunda ordem (pouco estudadas na educação básica) são do “tipo quadrática”.

### 2.1.2 – BNCC

A BNCC (Base Nacional Curricular Comum), apesar de controversa, é um documento mais completo em termos de orientações específicas para o professor. Em nossa análise, usaremos tanto a “base” do Ensino Médio, como a do Ensino Fundamental.

O documento geral é organizado, em cada etapa (Ensino Médio e Ensino Básico), por área de conhecimento, que por sua vez são organizadas por competências específicas de área. No Ensino Fundamental, as competências específicas de área são organizadas por componente curriculares e competências específicas de componentes. No Ensino Médio, as competências específicas de área são organizadas em habilidades específicas. Esta estrutura de Competências e Habilidades é consequência de uma discussão das últimas décadas que é consoante os termos preconizados na LDB.

Para facilitar a compreensão da BNCC, assim como do nosso próprio texto, cabe apresentar o sistema de códigos utilizados no documento. Na BNCC as habilidades específicas são representadas por meio de códigos. Por exemplo, o código **(EM13LGG103)** refere-se à terceira habilidade proposta na área de Linguagens e suas Tecnologias relacionada à competência específica 1, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

- EM – Indica a etapa de Ensino Médio.
- 13 – O primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição dos currículos.
- LGG – A segunda sequência de letras indica a área (três letras ou duas letras), onde a abreviação de Matemática e suas Tecnologias.
- 103 – Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

O código (EM13MAT401) refere-se à competência específica 4(Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas)de Matemática do Ensino Médio.

Tendo em vista o objetivo desta pesquisa restringiremos nossa análise do documento no que diz respeito às orientações e conexões sugeridas em relação ao ensino de funções polinomiais e progressões aritméticas. O estudo de funções, no documento, é proposto inicialmente para ser realizado a partir do 9º ano. Nesta etapa, sugere-se que o conceito de função seja apresentado como relações de dependência unívoca entre duas variáveis.

**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(BNCC, 2017)

O documento sugere trabalhar, ainda neste nível, com as representações numérica, algébrica e gráfica do conceito de função. O documento destaca também a importância de “que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação”, estabelecendo dessa forma conexões do conceito de função com conteúdos que pertencem ao domínio do Ensino Fundamental. (BNCC, 2017)

Ao analisar o texto da Base referente ao Ensino Médio, as primeiras habilidades pertencentes a funções seriam a análise de seus gráficos, suas taxas de variações, podendo ter o apoio de tecnologias. O texto sugere ainda explorar as funções polinomiais de 1º e 2º graus como modelos para a resolução de problemas.

**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolva a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

**(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.  
(BNCC, 2017)

Com efeito, a contextualização e o uso da representação gráfica são estratégias que, contribuem para a formação geral do estudante. Em verdade, o texto destaca que, para uma melhor compreensão do aluno sobre o tema, é fundamental que este seja estimulado a explorar diferentes registros de representação, realizando tanto conversões da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa.

**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

**(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(BNCC, 2017)

A representação geométrica das funções polinomiais de 1º e 2º grau no plano cartesiano pode ser explorada com softwares e aplicativos de matemática dinâmica. Um bom exemplo de software com esse perfil é GeoGebra, disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt>.

Outras competências indicadas no texto referem-se a habilidades relacionadas à investigação e à formulação de argumentos, que podem ser induzidas por manipulações ou experimentações com diferentes materiais concretos ou tecnologias digitais. Por meio desta metodologia os estudantes começam a formular contraexemplos e elaborar argumentos para validar suas proposições, dando um importante passo para desenvolvimento de suas próprias demonstrações. Observar padrões, criar generalizações e construir modelos utilizando função polinomial de 1º e 2º graus são habilidades de grande importância na formação matemática dos estudantes. Elas encontram-se relatadas em (EM13MAT501) e (EM13MAT502) e representam o foco de nosso trabalho.

**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

**(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$ . (BNCC, 2017)

Em outro momento, o texto da BNCC destaca a relação entre funções afins de domínios discretos com progressões aritméticas e a relação entre progressões geométricas com funções exponenciais. Por outro lado, nada se fala sobre progressões aritméticas de segunda ordem e sua relação com funções quadráticas.

**(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

**(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BNCC, 2017)

Problemas de otimização são sugeridos apenas no estudo de funções quadráticas, em contextos envolvendo Superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática.

**(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (BNCC, 2017)

Na próxima seção faremos uma breve análise de Livros Didáticos, procurando detectar o estado da arte, enfatizando nosso principal objeto de estudo: articulação entre o estudo de funções polinomiais e progressões aritméticas.

## 2.2 – Análises de Livros didáticos

Nesta seção faremos uma breve análise de Livros Didáticos, procurando dar ênfase ao nosso principal objeto de estudo: a articulação entre os estudos de funções polinomiais e progressões aritméticas no ensino básico de matemática.

Para fazer essa análise nos reportaremos aos livros aprovados no último Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ensino Médio, visto que esses já passaram de alguma forma por um crivo de avaliação.

O PNLD foi criado em 1985, com a edição do Decreto nº 91.542, de 19/8/85, que trouxe, dentre outras, as seguintes mudanças:

- Indicação do livro didático pelos professores;
- Reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável e o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção, visando maior durabilidade e possibilitando a implantação de bancos de livros didáticos;
- Extensão da oferta aos alunos de 1ª e 2ª série das escolas públicas e comunitárias;
- Fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE e garantindo o critério de escolha do livro pelos professores.

Em 2002 inicia-se a distribuição integral dos livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental, mas é apenas em 2005 que há a primeira distribuição parcial dos livros didáticos para o ensino médio, contemplando apenas as disciplinas de português e matemática com distribuição para a 1ª série das regiões norte e nordeste. A partir do ano 2006 inicia-se a distribuição parcial dos livros didáticos para todas as regiões do país. E aos poucos vão sendo inseridos livros didáticos de outras disciplinas. Atualmente, o PNLD é voltado para toda a educação básica, exceto a educação infantil. A inserção dos livros didáticos de forma gratuita no ensino médio é algo relativamente recente nas escolas públicas.

Com base no guia do PNLD do Ensino Médio de 2017, observa-se que oito obras foram aprovadas:

- ***Matemática - Contexto & Aplicações*** – Luiz Roberto Dante – Editora Ática  
3ª edição – 2016
- ***Quadrante – Matemática*** – Diego Prestes Eduardo – Editora SM  
1ª edição – 2016
- ***Matemática: Ciência e Aplicações*** – David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze De Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo – Saraiva Educação  
9ª edição – 2016
- ***Matemática para Compreender o Mundo*** – Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz – Saraiva Educação  
1ª edição – 2016
- ***Matemática: Interação e Tecnologia*** – Rodrigo Balestri - Editora Leya  
2ª edição – 2016
- ***#Contato Matemática*** – Joamir Souza, Jacqueline Garcia – Editora FTD  
1ª edição – 2016
- ***Matemática*** – Paiva – Manoel Paiva – Editora Moderna  
3ª edição – 2016
- ***Conexões Com a Matemática*** – Fabio Martins De Leonardo – Editora Moderna  
3ª edição – 2016 selecionamos os três livros que são escolhidos na maioria das escolas Públicas, são eles: “Matemática: Contexto e Aplicações”; “Matemática: Ciência e Aplicações”; e “Matemática para compreender o Mundo”.

Em nossa análise, conforme já anunciado, procuraremos observar: exemplos, exercícios e aplicações com outras áreas do conhecimento; a relação existente entre funções polinomiais (de grau 1 e grau 2) e progressões aritméticas (de 1ª ordem e 2ª ordem). Os resultados da análise de cada um dos livros serão apresentados em subseções à parte e, em cada uma delas, analisaremos os tópicos funções polinomiais de grau 1 e de grau 2, em tópicos separados.

### 2.2.1 - Livro 1: Matemática: Contexto e Aplicações – Dante:

#### 2.2.1.1 - Função polinomial de grau 1:

A função polinomial de grau 1 é iniciada com problemas do cotidiano, utilizando as seguintes exemplificações: salário mensal de um comerciante e uma corrida de táxi.



Figura 14 – Introdução a função polinomial de grau 1

**1 Situações iniciais**

Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R\$ 2 500,00 e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. Nessas condições, podemos dizer que:

$$\text{salário mensal} = 2\,500,00 + 0,06 \cdot (\text{total das vendas do mês})$$

Observe que o salário desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês. Representando o total de venda por  $x$ , temos:

$$s(x) = 2\,500,00 + 0,06x$$

ou  $s(x) = 0,06x + 2\,500,00$

ou  $y = 0,06x + 2\,500,00$  ①

Esse é um exemplo de **função afim**.

Fonte: (Dante, 2016, p.73)

O tópico 4, do capítulo de função polinomial de grau 1, apresenta a taxa de variação média da função afim, apresentando uma representação gráfica deste conceito. Porém, na própria figura, pode-se observar o erro no gráfico da função ao indicar uma pequena curvatura no final da reta.

Figura 15 – Taxa de variação média da função afim

**4 Taxa de variação média da função afim**  
 $f(x) = ax + b$

Em qualquer função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quando damos um acréscimo  $h$  à variável  $x$ , passando de  $x$  para  $x + h$ , há, em correspondência, um acréscimo  $f(x + h) - f(x)$  no valor da função.

Dados  $x$  e  $x + h$  números reais, com  $h \neq 0$ , o número  $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  chama-se **taxa de variação média da função  $f$  no intervalo  $[x, x + h]$** .

Fonte: (Dante, 2016, p.75)

Uma relação importante apresentada nesta obra aparece no tópico 7 deste capítulo. Trata-se da explicação do significado do coeficiente angular (ou inclinação) e a relação da equação da reta com o gráfico da função polinomial de grau 1 associada.

Entretanto, a observação apresentada só faz sentido se os eixos  $x$  e  $y$  encontram-se na escala 1:1.

Figura 16 – Equação da reta da função polinomial de grau 1

### Equação da reta

Seja uma função afim  $f(x) = ax + b$ , dizemos que  $y = ax + b$  é a equação da reta  $r$ , dada pela função. Assim,  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , que na função afim é a taxa de variação, agora, na reta, recebe o nome de **coeficiente angular** (ou inclinação da reta) da reta.

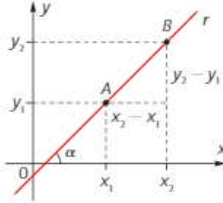
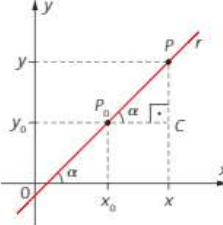
A relação entre o coeficiente angular com o ângulo de inclinação  $\alpha$  que o eixo  $Ox$  forma com a reta  $r$  é dada por  $a = \tan \alpha$ .

Se  $P(x, y)$  é um ponto genérico de uma reta  $r$ , então o coeficiente angular  $a$  e um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  dela determinam essa reta:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + a(x - x_0)$$

Essa é a equação da reta que passa pelo ponto  $P(x_0, y_0)$  e tem coeficiente angular  $a$ .

$$a = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} = \tan \alpha$$

Fonte: (Dante, 2016, p.83)

Os diversos exercícios propostos neste capítulo apresentam diferentes dificuldades. Para alguns exercícios resolvidos apresenta-se um passo a passo, com o intuito de mostrar para os alunos uma forma de resolução, explicando o que está compreendido na questão proposta.

Figura 17 – Exercício resolvido

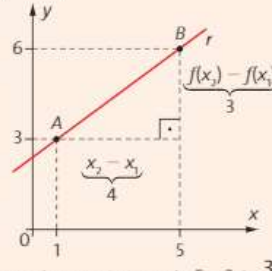
**Exercícios resolvidos**
passo a passo: exercício 2

1. Calcule a taxa de variação da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos  $A(1, 3)$  e  $B(5, 6)$ . Verifique se a função afim cujo gráfico é essa reta é crescente ou decrescente.

**Resolução:**  
Sabemos que:  $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$ . Em  $A(1, 3)$  temos  $f(1) = 3$  e em  $B(5, 6)$  temos  $f(5) = 6$ . Assim,  $a = \frac{6 - 3}{5 - 1} = \frac{3}{4}$ .

Portanto, a taxa de variação é igual a  $\frac{3}{4}$ . Em outras palavras, a razão entre a variação dos valores de  $f(x)$  e a correspondente variação dos valores de  $x$  no intervalo  $[1, 5]$  é  $\frac{3}{4}$ .

Como  $\frac{3}{4} > 0$ , a função afim é crescente.



**1. Lendo e compreendendo**

a) O que é dado no problema?  
Um gráfico de barras com o número de espécies em extinção de 1983 a 2007.

b) O que se pede?  
O número de espécies em extinção em 2011.

**2. Planejando a solução**

Devemos usar o gráfico do enunciado para fazer a projeção do número de espécies em extinção em 2011. É essencial perceber que esse gráfico é uma função afim e, portanto, devemos obter a taxa de variação dessa função.

**3. Executando o que foi planejado**

Precisamos obter a lei da função afim que relaciona o número de espécies em extinção com o ano. Do gráfico, temos que  $f(1983) = 239$  e  $f(2007) = 461$ . Genericamente, uma função afim é do tipo:  $f(x) = ax + b$ . Vamos obter a taxa de variação  $a$  dessa função fazendo:

Fonte: (Dante, 2016, p.80)

No trecho descrito pelo autor como “Outras conexões”, apresenta-se a correlação existente entre uma função polinomial de grau 1 e uma PA, destacando que uma PA pode ser escrita como uma função afim. Em seguida, o autor estabelece uma caracterização da função afim por meio de progressões aritméticas.

Figura 18 – Relação entre PA e função.

**Observação:** Esse resultado pode ser provado de modo geral: se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim definida por  $f(x) = ax + b$  e  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  é uma progressão aritmética de razão  $r$ , então  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_i), \dots$  também é uma progressão aritmética e sua razão é  $a \cdot r$ . E, reciprocamente, se uma função crescente ou decrescente,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , transforma qualquer progressão aritmética  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$  em uma outra progressão aritmética  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_i), \dots$ , então  $f$  é uma função afim.

Fonte: (Dante, 2016, p.89)

Após tal observação o autor procura explicar o fato por meio de exemplos particulares.

Figura 19 – Relação entre PA e função exemplificada.

## Função afim e progressão aritmética (PA)

Há um relacionamento muito importante entre a função afim e uma progressão aritmética.

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada **razão** da progressão aritmética.

Por exemplo, a sequência:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$$

é uma progressão aritmética de razão 3.

Consideremos agora a função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2x + 1$ .  
Vamos constatar que:

$$f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), f(19), \dots$$

é também uma progressão aritmética.

Assim,

$f(x) = 2x + 1$	$f(10) = 21$
$f(1) = 3$	$f(13) = 27$
$f(7) = 15$	$f(19) = 39; \text{ etc.}$

Observe que:

$$3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, \dots$$

Fonte: (Dante, 2016, p.89)

Posteriormente, o texto propõe três exercícios que exploram esse assunto, com destaque para o exercício 45 que estimula a construção de modelos afins para a resolução de um problema de cinemática.

Figura 20 – Exercícios sobre PA e função

### Exercícios

**42.** Dada a progressão aritmética  $-2, 3, 8, 13, 18, 23, \dots$  e a função afim  $f(x) = 3x - 1$ :

a) determine a razão dessa progressão aritmética;  
 *$r = 5$*

b) verifique que  $f(-2), f(3), f(8), f(13), f(18), f(23), \dots$  é também uma progressão aritmética (PA);  
 *$-7, 8, 23, 38, 53, 68$  é uma PA.*

c) determine a razão dessa nova progressão aritmética.  
 *$r = 15$*

**43.** Se tivermos uma PA  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de razão 3 que é levada a outra PA  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  pela função afim  $f(x) = 4x + 1$ , qual é a razão dessa segunda PA?  
 *$r = 12 (4 \cdot 3 = 12)$*

**44.** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim que transforma a PA  $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$  em outra PA  $9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, \dots$ , qual é a lei dessa função afim?  *$f(x) = 4x + 1$*

**45. Física**

Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com velocidade constante. A posição desse ponto material no instante  $t_0 = 0$  s é  $S_0 = 100$  m e, no instante  $t = 5,0$  s, é  $S = 400$  m.

Nessas condições, determine:

a) a velocidade desse ponto material;  *$v = 60$  m/s*

b) a função da posição em relação ao tempo;  *$S = 60t + 100$*

c) a posição no instante  $t = 10$  s;  *$S = 700$  m*

d) o instante em que a posição  $S$  é 1000 m.  *$t = 15$  s*

Fonte: (Dante, 2016, p.91)

### 2.2.1.2 - Função polinomial de grau 2:

A função polinomial de grau 2 foi introduzida por Dante por meio de um problema de otimização, em que se quer descobrir, dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, aquele que tem maior área. Logo depois, define função quadrática algebricamente, como sendo aquela cuja expressão analítica tem a forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Figura 21 – Definição função quadrática

## 1 Definição de função quadrática

**➤** Reúna-se com um colega, considerem um retângulo de perímetro 20 m e tentem responder às questões a seguir.

a) Todos os retângulos de mesmo perímetro têm a mesma área? *Não.*

b) Caso não tenham a mesma área, existem algumas dimensões do retângulo que resultem em uma área máxima? *Sim.*

**Fique atento!**

Para chegar às suas conclusões, testem diversas dimensões possíveis para o retângulo considerado (por exemplo, ele pode ter 8 m de comprimento e 2 m de largura, ou 7 m de comprimento e 3 m de largura, etc.) e calculem o perímetro e a área.

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **quadrática** quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow ax^2 + bx + c$

*Comente com os alunos que a função quadrática também recebe o nome de "função polinomial do 2º grau" e que a função quadrática que leva  $x \in \mathbb{R}$  a  $ax^2 + bx + c$  também pertence a  $\mathbb{R}$ .*

Fonte: (Dante, 2016, p.103)

O autor utiliza outras situações que envolvem diferentes conteúdos matemáticos, podendo ser representadas por uma função quadrática. Citados no livro têm os seguintes exemplos: quantidade de diagonais de um polígono; fenômenos da física (movimento uniformemente variado); total de partidas disputadas em um esporte.

Figura 22 – Geometria e função quadrática

**Na Geometria**

Você já estudou, no Ensino Fundamental, que o número de diagonais ( $d$ ) em um polígono convexo de  $n$  lados é dado por  $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ . Vamos relembrar.

The diagram illustrates the formula for the number of diagonals in a convex polygon. It shows four examples:

- A triangle with  $n=3$  sides and  $d=0$  diagonals.
- A quadrilateral with  $n=4$  sides and  $d=2$  diagonals.
- A pentagon with  $n=5$  sides and  $d=5$  diagonals.
- A hexagon with  $n=6$  sides and  $d=9$  diagonals.

Fonte: (Dante, 2016, p.104)

Ainda na parte sobre Contexto e Aplicações do Dante, o tópico 10 apresenta a conexão entre função quadrática e PA de segunda ordem. Segundo o autor, dada uma PA  $(x_n)$  no eixo das abscissas, os termos  $f(x_n)$  não formam uma PA, porém a razão da diferença entre os elementos consecutivos geram uma PA, isto é,  $f(x_n)$  é, desta forma, uma PA de 2ª ordem.

Figura 23 – Conexão entre função polinomial do 2º grau e PA

**10 Conexão entre função quadrática e progressão aritmética**

Já vimos no capítulo anterior que uma função afim  $f(x) = ax + b$  transforma uma progressão aritmética em uma outra progressão aritmética. Vimos também que essa propriedade caracteriza a função afim, ou seja, se uma função tem essa propriedade, ela é considerada afim e, reciprocamente, se ela for afim, terá essa propriedade.

Vejamos agora o que ocorre com a função quadrática.

Consideremos a função quadrática  $f(x) = x^2$  e a progressão aritmética:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$$

e vejamos o que ocorre com:

- $f(1) = 1$       •  $f(7) = 49$       ...
- $f(3) = 9$       •  $f(9) = 81$       •  $f(2n - 1) = 4n^2 - 4n + 1$
- $f(5) = 25$     •  $f(11) = 121$     •  $f(2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1$

assim, obtemos a sequência:

$$1, 9, 25, 49, 81, 121, \dots, 4n^2 - 4n + 1, 4n^2 + 4n + 1, \dots$$

Fonte: (Dante, 2016, p.135)

Seguidamente, o autor propõe alguns exercícios para os alunos usarem esse resultado.

Figura 24 – Exercícios sobre função polinomial de grau 2 e PA

**Exercícios**

77. Exercício 75: razão da primeira PA: 1; razão da última PA: 2;  $a = 1$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$  (correto)  
Exercício 76: razão da primeira PA: 2; razão da última PA: 8;  $a = 1$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$  (correto)

75. Dada a progressão aritmética  $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = x^2 + 1$ , verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots, f(n), f(n + 1), \dots$  é uma PA. É uma PA de razão 2.

76. Dada a progressão aritmética  $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ , verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(3), f(5), f(7), f(9), f(11), \dots, f(2n - 1), f(2n + 1), \dots$  é uma PA. É uma PA de razão 8.

77. É possível provar que, se  $r$  é a razão da primeira PA, então a razão da última PA será  $2ar^2$ . Constate esse fato nos dois exercícios anteriores.

78. Dada a progressão aritmética  $1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots, 3n + 1, \dots$  e a função quadrática  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ :

- verifique que a sequência formada pela diferença dos termos consecutivos de  $f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), \dots, f(3n + 1), \dots$  é uma PA; É uma PA de razão 72.
- determine as razões da primeira e da última PA. Constate que, se  $r$  é a razão da primeira PA, a razão da última pode ser encontrada por  $2ar^2$ . Razão da primeira PA: 3; Razão da última PA: 72;  $a = 4$ ;  $2ar^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3^2 = 72$  (correto).

Fonte: (Dante, 2016, p.135)

### 2.2.1.3 - Progressão aritmética:

O tema PA é iniciado com uma situação problema relacionada a uma empresa que propõe um aumento constante de produtos ano após ano. O autor apresenta a definição deste conteúdo de forma algébrica, inserindo suas propriedades e principais características.

Figura 25 – Definição de PA

**Definição**

Progressão aritmética (PA) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada **razão** da progressão e é representada pela letra  $r$ .

Fonte: (Dante, 2016, p.212)

Quanto aos exercícios de PA, podemos perceber que o autor varia o nível de dificuldade das questões de forma crescente, proporcionando aos alunos a observação de questões algébricas, apresentando também questões contextualizadas.

Figura 26 – Exercícios sobre PA

**Exercícios**

12. Verifique se a sequência dada é uma PA e, se for, dê o valor da razão  $r$ .

a)  $(2, 5, 8, 11, 14)$  PA;  $r = 3$

b)  $(15, 10, 5, 0, -5)$  PA;  $r = -5$

c)  $(2, 3, 5, 7)$  Não é PA.

d)  $(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2)$  PA;  $r = \frac{1}{3}$

e)  $(1, 1 + \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3}, 1 + 3\sqrt{3})$  PA;  $r = \sqrt{3}$

f)  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$  Não é PA.

13. Escreva a PA de:

a) cinco termos, em que o 1º termo é  $a_1 = 7$  e a razão é  $r = 4$ ; PA  $(7, 11, 15, 19, 23)$

b) quatro termos, em que o 1º termo é  $a_1 = -6$  e a razão é  $r = 8$ . PA  $(-6, 2, 10, 18)$

14. Determine a fórmula do termo geral de cada PA:

a)  $(2, 7, \dots)$ ;  $a_n = 5n - 3$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$

24. **ATIVIDADE EM DUPLA** Dada uma PA  $a_3 + a_7 = 2$ , qual é o valor de  $a_1 + a_9$ ? 2

25. **ATIVIDADE EM DUPLA** Suponham que, em 2013, um determinado cometa tenha passado pela Terra. Se esse cometa faz uma passagem pela Terra a cada 34 anos, então quantas vezes ele teria passado pela Terra de 1500 até 2013? 16 vezes.

26. **ATIVIDADE EM DUPLA** Sabe-se que três números inteiros estão em PA. Se esses números têm por soma 24 e por produto 120, calculem os três números. 1, 8, 15 ou 15, 8, 1

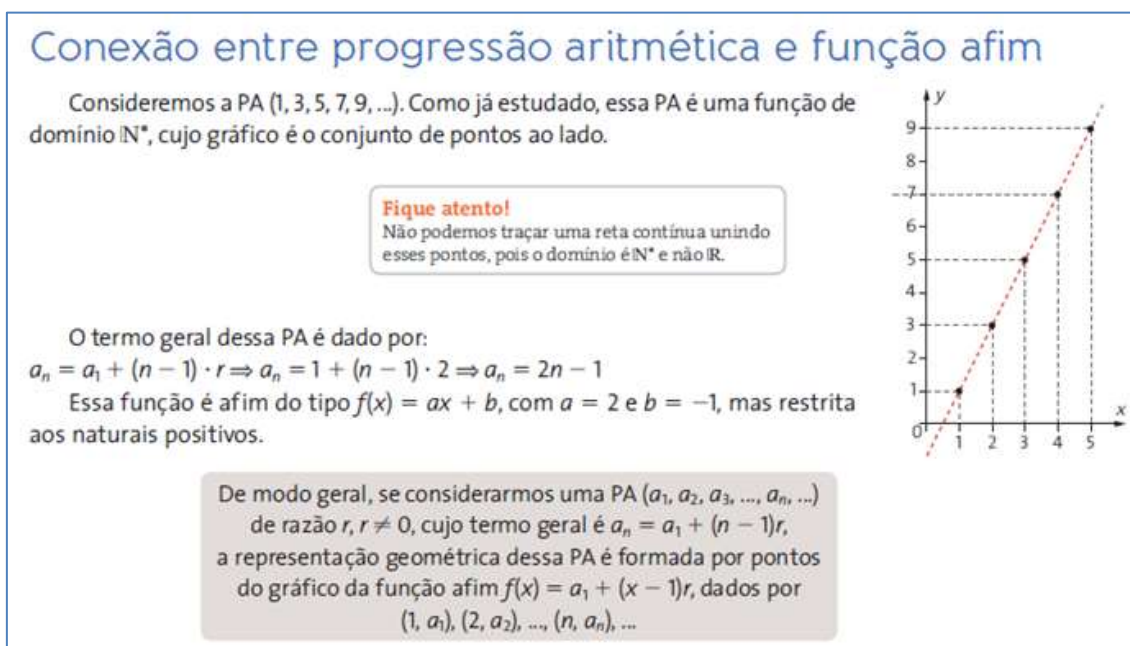
27. **ATIVIDADE EM DUPLA** A produção de uma indústria cresceu em PA nos meses de janeiro a dezembro. A produção no mês de outubro foi de 190 máquinas e a diferença de produção nos meses de agosto e de março foi de 50 máquinas. Quantas máquinas foram produzidas em novembro? 200 máquinas.

Fonte: (Dante, 2016, p.216)

Neste capítulo o autor retoma o estudo de função afim, definindo PA como uma restrição da função afim no domínio dos números naturais.



Figura 27 – Conexão entre PA e função afim



Fonte: (Dante, 2016, p.218)

Entretanto, não há investimento em questões que explorem essa relação entre PA e função, ou ainda com função quadrática.

## 2.2.2 - Livro 2 : Matemática – Ciência e Aplicações – Gelson Iezzi:

### 2.2.2.1 - Função polinomial de grau 1:

Nesta obra a função polinomial de grau 1 foi introduzida por três exemplos do cotidiano: uma corrida de táxi; salário de um corretor de imóveis e valor a ser pago num restaurante self-service. O autor utiliza estes exemplos para facilitar a visualização da ideia que envolve o conceito de função afim.

Figura 28 – Introdução a função polinomial

**EXEMPLO 1**

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R\$ 4,00 mais R\$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento).

Ou seja, ele pagou  $15 \cdot \text{R\$ } 2,20 = \text{R\$ } 33,00$  pela distância percorrida mais R\$ 4,00 pela bandeirada; isto é:

$$\text{R\$ } 33,00 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 37,00$$

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos pagaria, pela corrida:

$$25 \cdot \text{R\$ } 2,20 + \text{R\$ } 4,00 = \text{R\$ } 59,00.$$

Podemos notar que, para cada distância  $x$  percorrida pelo táxi, há certo preço  $p$  para a corrida. Nesse caso, a fórmula que expressa  $p$  (em reais) em função de  $x$  (em quilômetros) é:

$$p(x) = 2,20 \cdot x + 4,00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.70)

Logo depois, utiliza a definição de forma algébrica, generalizando o seu conceito e propriedades.

Em termos de aplicações de conteúdo, o autor destaca o movimento uniforme e movimento uniformemente variado. Durante a exemplificação de movimento uniforme, a posição  $s$  de um objeto é apresentada como uma função polinomial de grau 1 do tempo  $t$ . Destaca-se no texto que qualquer taxa de variação média desse tipo de função é um valor constante.

Figura 29 – Movimento uniforme e uniformemente variado

## Movimento uniforme e movimento uniformemente variado

Vamos imaginar que você esteja na estrada em um automóvel no qual o velocímetro se mantém sempre na mesma posição (durante um determinado intervalo de tempo) indicando, por exemplo, 80 km/h.

Nas aulas de Física você já deve ter aprendido que se trata de um **movimento uniforme**: se considerarmos intervalos de tempo iguais, o automóvel sofre variações de espaço iguais (no exemplo, o automóvel percorre 40 km a cada meia hora ou 20 km a cada 15 minutos e assim por diante).

Decorre daí que a função horária dos espaços, no movimento uniforme, é:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t$$

- $s(t)$  representa o espaço correspondente ao tempo  $t$ , com  $t \geq 0$ ; observe que  $s$  e  $t$  são as grandezas relacionadas;
- as constantes  $s_0$  e  $v$  representam, respectivamente, o espaço inicial (correspondente a  $t = 0$ ) e a velocidade escalar (velocidade do móvel em cada instante considerado).

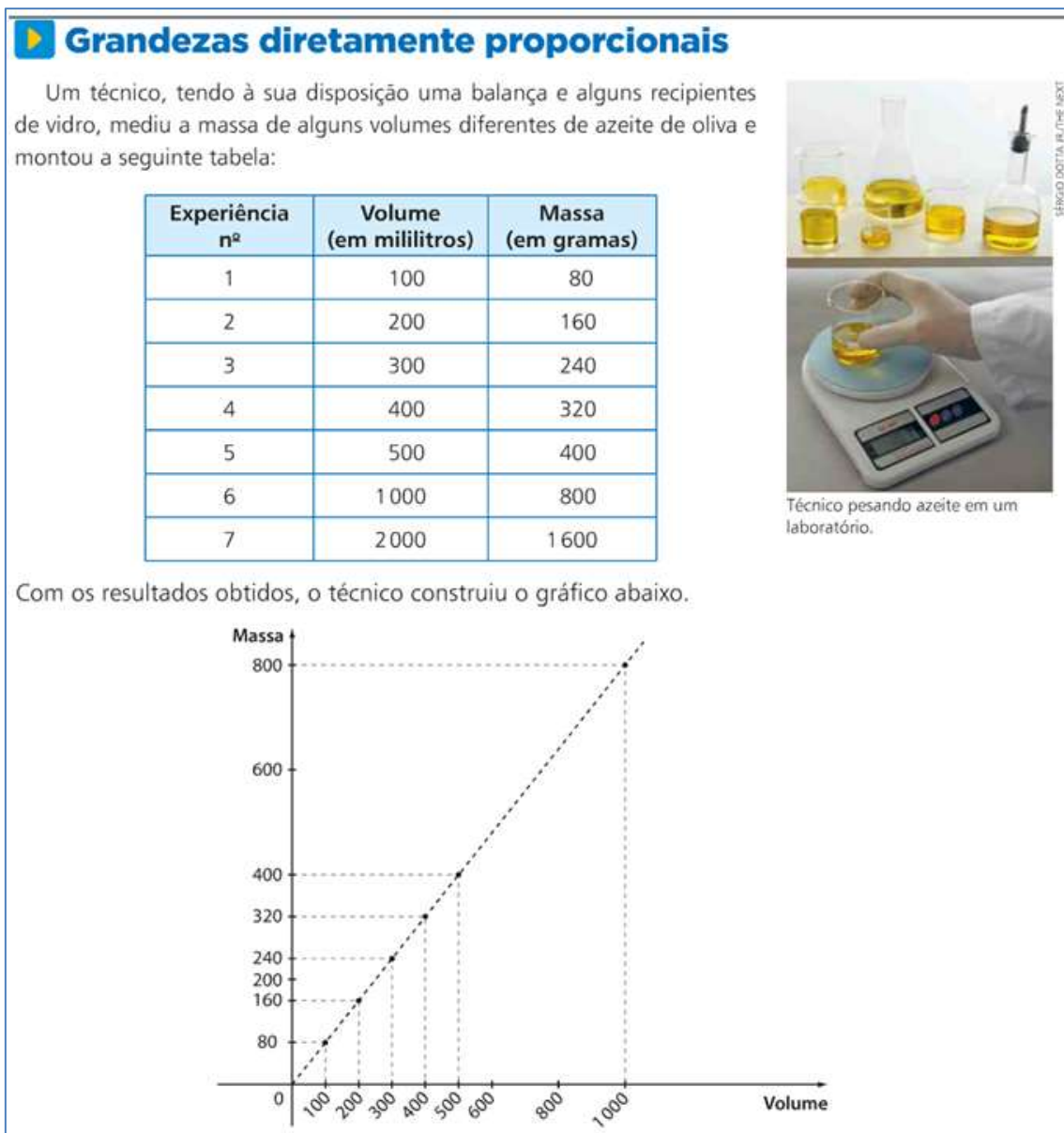
Observe que \* representa a lei de uma função do 1º grau:  $y = ax + b$ , com  $x$  e  $y$  representados por  $t$  e  $s$ , respectivamente. A taxa média de variação dessa função é constante e igual ao coeficiente de  $x$ , que vale  $a$ . Desse modo, em \*,  $v$  representa a taxa média de variação dos espaços, considerando o intervalo de  $t_1$  a  $t_2$ :

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$$

Fonte: (Iezzi, 2016, p.83)

Em seguida são apresentados exemplos de situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais, estabelecendo estudos comparativos de registros em tabelas e gráficos cartesianos, destacando a propriedade de que as taxas de variações são constantes para esses tipos de funções.

Figura 30 – Grandezas diretamente proporcionais



Fonte: (Iezzi, 2016, p.77)

Figura 31 – Grandezas diretamente proporcionais

Ele notou, então, que havia vários pontos alinhados determinando uma reta, a qual passa pela origem do sistema cartesiano, ou seja, tinha obtido o gráfico de uma **função linear**.

Ao observar os pares de valores da tabela, o técnico percebeu que, em todas as experiências, a razão entre a massa e o volume era 0,8:

$$\frac{80}{100} = 0,8 \quad \frac{160}{200} = 0,8 \quad \dots \quad \frac{400}{500} = 0,8 \quad \dots$$

Fonte: (Iezzi, 2016, p.77)

Os exercícios propostos são apresentados em ordem crescente de dificuldade, explorando tanto representação gráfica como a representação algébrica.

Figura 32 – Exercícios

**31** Determine a taxa média de variação das seguintes funções do 1º grau:

a)  $f(x) = 4x + \frac{1}{2}$       c)  $h(x) = x + 2$   
 b)  $g(x) = -3x$       d)  $i(x) = 4 - x$

**32** O gráfico ao lado mostra a evolução da massa (**m**) de um mamífero, em quilogramas, nos primeiros meses de vida.

a) Com quantos quilogramas esse mamífero nasceu?  
 b) Qual era a sua massa com 2 meses de vida?  
 c) Mantida essa tendência até o 5º mês, qual seria a massa do mamífero com 4,5 meses de vida?

**34** A valorização anual do preço (em reais) de um quadro é constante. Seu preço atual é R\$ 4 500,00. Há quatro anos, o quadro custava R\$ 3 300,00. Qual será o seu preço daqui a cinco anos?

**35** O custo **C**, em milhares de reais, de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com  $x \geq 0$ , cujo gráfico está representado abaixo.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.84)

### 2.2.2.2 - Função polinomial de grau 2:

A função polinomial de grau 2, no livro escrito por Iezzi, é introduzida por meio de um problema envolvendo jogos de futebol em um campeonato, onde o número de jogos varia em função da quantidade de times. Em seguida, a partir desse exemplo, apresenta a definição de função polinomial de grau 2 por meio de sua forma algébrica.

Figura 33 – Introdução a função polinomial de grau 2

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como é o Campeonato Brasileiro de Futebol), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380$$

Enfim, para cada número (**x**) de clubes, é possível calcular o número (**y**) de jogos do campeonato. O valor de **y** é função de **x**.

Nesse caso, a regra que permite calcular **y** a partir de **x** é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1), \text{ ou seja, } y = x^2 - x$$


Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.94)

Neste livro, o autor desenvolve os tópicos usuais envolvendo este tema, não apresentando qualquer relação desse tipo de função com outros conteúdos ou conceitos da matemática ou da física.

O capítulo sobre função polinomial de grau 2 não apresenta qualquer relação com o estudo de progressões aritméticas. Os exercícios possuem um alto grau de dificuldade e exploram uma grande quantidade de conteúdo, mas, como já afirmado, nada articulado com o estudo de progressões aritméticas.

Figura 34 - Inequações

 **Inequações**

Vamos retomar a situação 1 da introdução deste capítulo.  
Vimos que a lei que expressa o número (**y**) de jogos do campeonato em função do número (**x**) de clubes é:

$$y = x^2 - x$$

Suponhamos que a Confederação Brasileira de Futebol (CBF), ao organizar um campeonato, perceba que só há datas disponíveis para a realização de no máximo 150 jogos. Quantos clubes poderão participar?  
Para responder a essa questão, temos de resolver a **inequação**:

$$x^2 - x \leq 150$$

que equivale a  $x^2 - x - 150 \leq 0$ .

Esse é um exemplo de uma inequação do 2º grau, conteúdo que passaremos a estudar agora.  
O processo de resolução de uma inequação do 2º grau está baseado no estudo do sinal da função do 2º grau envolvida na desigualdade. É importante observar a analogia entre o processo que será apresentado e um dos processos usados para resolver inequações do 1º grau, como vimos no capítulo anterior.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.111)

Os exercícios propostos são de diversos tipos: questões resolvidas, exercícios contextualizados e questões propostas para o aluno com diferentes níveis de dificuldade. A seguir temos alguns exercícios propostos pelo autor.

Figura 35 – Exercícios propostos

**EXERCÍCIOS**
 **FAÇA NO CADERNO**

**4** Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$	f) $y = 3x^2$
b) $y = 4x - x^2$	g) $y = x^2 - 5x + 9$
c) $y = -x^2 + 2x + 15$	h) $y = -x^2 + 2$
d) $y = 9x^2 - 1$	i) $y = x^2 - x - 6$
e) $y = -x^2 + 6x - 9$	j) $y = (x + 3) \cdot (x - 5)$

**5** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes equações:

a)  $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$

**10** Economistas estimam que os valores médios, em reais, das ações de duas empresas **A** e **B** sejam dados, respectivamente, por  $v_A(t) = 4,20 + \frac{1}{4}t$  e  $v_B(t) = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t + 3,20$ , em que **t** é o tempo, em anos, contado a partir da data desta previsão.

a) Qual é o valor atual das ações de cada uma das empresas?

b) Daqui a 4 anos qual ação estará mais valorizada?

c) Daqui a quantos anos as ações das duas empresas terão o mesmo valor? Qual será esse valor?

Fonte: (Iezzi, 2016, p.100)

### 2.2.2.3 Progressão aritmética:

Neste livro, o capítulo sobre PA foi iniciado com um problema de matemática recreativa explorando construções de quadrados.

Figura 36 – Introdução a PA

**Progressões aritméticas**

**TROQUE IDEIAS**

**Observação de regularidades**

As figuras seguintes mostram a construção de quadrados justapostos usando palitos.

1ª figura:

2ª figura:

3ª figura:

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.174)

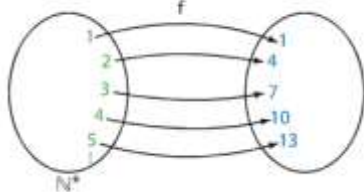
Seguidamente, o autor apresenta a definição e a generalização dos seus elementos algebricamente e estabelece uma conexão com a função afim. Utilizando a representação por diagramas, apresenta uma PA como uma função  $f$  com domínio em  $\mathbb{N}^*$ , interpretando o gráfico da PA como uma sequência de pontos alinhados,

diferenciando o gráfico da PA e a reta que contém esses pontos e representa a o gráfico da função afim associada à sequência.

Figura 37 – Relação entre PA e função afim

**▶ Progressão aritmética e função afim**

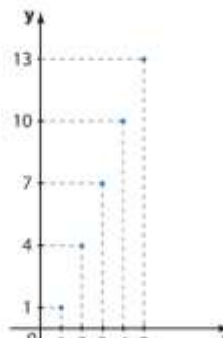
Vamos estabelecer uma importante conexão entre P.A. e função afim. Já vimos que a P.A. (1, 4, 7, 10, 13, ...) é uma função  $f$  de domínio em  $\mathbb{N}^*$ , como mostra o diagrama abaixo:



No gráfico ao lado, podemos observar parte do conjunto dos pontos que representam  $f$ . Lembre que, embora os pontos estejam alinhados, não traçamos uma reta, pois  $f$  está definida apenas para valores naturais positivos. O termo geral dessa P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar  $f$  à função dada por  $y = -2 + 3x$ , restrita aos valores naturais não nulos que a variável  $x$  assume. Observe abaixo o gráfico da função afim dada por  $y = -2 + 3x$ , com domínio  $\mathbb{R}$ , e compare com o gráfico ao lado:



Fonte: (Iezzi, 2016, p.181)

Como esta unidade, que envolve PA, não apresenta grande desenvolvimento sobre o tema a ser estudado, o autor divide os exercícios da seguinte maneira: exemplos, exercícios resolvidos e propostos, com o intuito de contribuir com a prática dos alunos.

Figura 38 – Exercícios PA

**EXERCÍCIOS** FAÇA NO CADERNO

**32** Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A.  $(-45, -41, -37, -33, \dots)$ .

**33** Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A.  $(0,15; 0,40; 0,65; 0,9; \dots)$ .

**34** Para a compra de uma TV pode-se optar por um dos planos seguintes:

- plano alfa: entrada de R\$ 400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes, sendo a primeira de R\$ 35,00, a segunda de R\$ 50,00, a terceira de R\$ 65,00 e assim por diante;
- plano beta: 15 prestações mensais iguais de R\$ 130,00 cada uma.

**a)** Em qual dos planos o desembolso total é maior?

**b)** Qual deveria ser o valor da entrada do plano alfa para que, mantidas as demais condições, os desembolsos totais fossem iguais?

Fonte: (Iezzi, 2016, p.180)

Apresenta um exercício que mostra esta relação por meio dos itens (a) e (b), que pedem para determinar a lei de formação da função e a PA associada à função afim  $f$ .

Figura 39 – Exercícios sobre PA e função afim

EXERCÍCIO

40 Seja  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  a função cujo gráfico está abaixo representado.

a) Determine a lei de  $f$ .

b) Qual é a progressão aritmética associada à função  $f$ ? Obtenha seu termo geral.

O gráfico mostra um plano cartesiano com o eixo x rotulado de 0 a 4 e o eixo y rotulado de -3 a 3. Pontos são plotados em (1, 3), (2, 1), (3, -1) e (4, -3). Linhas tracejadas conectam cada ponto aos seus respectivos valores no eixo x e y.

Fonte: (Iezzi, 2016, p.181)

### 2.2.3 - Livro 3: Matemática Ensino Médio – Kátia Stocco:

#### 2.2.3.1 - Função polinomial de grau 1:

Na obra de Kátia Stocco, o capítulo de função polinomial de grau 1 foi inserido com um problema envolvendo gasto de combustível, variando o total de litros de combustível em função do tempo.

Figura 40 – Introdução à função polinomial de grau 1

Um avião de caça tem a capacidade de tanque de aproximadamente 5 500 litros; imagine que ele comece a ser abastecido em voo com 500 litros em seus tanques por um KC-135 e seja abastecido durante 30 segundos; podemos descrever a quantidade  $V$  de combustível no tanque desse avião em função do tempo  $t$  de abastecimento.

Para isso é preciso lembrar que um galão equivale a 3,6 litros. Então, um avião como o KC-135 coloca no avião de caça 3 600 litros por minuto. Isso é o mesmo que 60 litros por segundo.

Podemos expressar a relação entre  $V$  e  $t$  por:  $V = t \cdot 60 + 500$  para  $t \in [0, 30]$ . Essa relação é um exemplo de **função afim**.

Fonte: (Kátia, 2016, p.94)

Posteriormente, apresenta as definições por meio de exemplos abstratos, desenvolvendo o tema em contexto algébrico. No final do capítulo apresenta um



segmento com “foco na tecnologia”. Foram propostas atividades de construção de gráficos de funções com o programa Winplot.

Figura 41 – Construção de gráfico de funções no computador

**FOCO NA TECNOLOGIA**
Computador

Construindo gráficos de funções no computador

REGISTRE NO CADERNO

Nos capítulos anteriores, você construiu gráficos utilizando a planilha eletrônica. Agora vamos conhecer um outro aplicativo com essa finalidade, o Winplot.

Winplot é um programa *freeware*, isto é, um *software* distribuído gratuitamente na internet. Ele foi desenvolvido pelo professor norte-americano Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, na década de 1980. Sua versão em português pode ser conseguida de muitas formas diferentes na rede mundial de computadores. Sugerimos que você obtenha uma versão no endereço eletrônico da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. Vamos lá.

Fonte: (Kátia, 2016, p.98)

O capítulo de função polinomial de grau 1 não apresenta relação com o estudo de PA. Suas propriedades são apresentadas de forma algébrica sem relação com problemas contextualizados ou com outros conteúdos.

Ao analisarmos os exercícios propostos, pode-se observar que em alguns deles poderiam ter sido feitas algumas relações com PA. No exercício 36, por exemplo, o autor apresenta um problema que envolve uma sequência de figura simples que sinaliza uma PA.

Figura 42 – Exercício função polinomial de grau 1

**FAZER E APRENDER**
REGISTRE NO CADERNO

**36.** Observe a sequência de triângulos formados por palitos:



a) Copie a tabela em seu caderno e complete-a.

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Número de palitos	3	5	7							

b) Qual é a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos que se quer formar?

c) De que tipo é essa função?

d) Qual é o domínio e a imagem dessa função?

b) Expresse a lei que dá o perímetro em função do número de triângulos.

c) Determine o domínio e a imagem dessa função.

d) A função é crescente ou decrescente? Por quê?

e) Construa um gráfico para a função e explique por que ele será formado apenas por pontos isolados.

**38.** Estude o sinal de cada função dada abaixo.

a) $f(x) = 3x - 36$	d) $f(x) = -8x - 4$
b) $f(x) = -4x + 36$	e) $f(x) = 6x$
c) $f(x) = 5x + 35$	f) $f(x) = -5x$

**39.** Resolva graficamente as inequações.

a) $x + 3 > -6$	c) $2(x - 3) > -1$
b) $-2x + 5 > -8$	d) $3x + 6 \leq -1,5$

Fonte: (Kátia, 2016, p.109)

64

Quanto aos exercícios resolvidos, problemas e exercícios propostos. Observamos que o nível de dificuldade proposto vai aumentando de acordo com o decorrer dos exercícios, apresentando no final da seção um exercício contextualizado.

Figura 43 – Problemas e exercícios

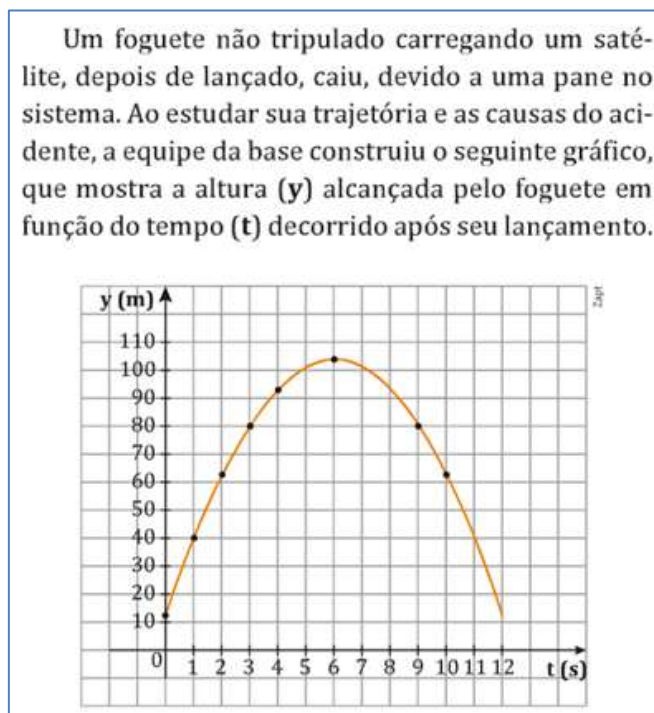
<p><b>41.</b> Resolva em <math>\mathbb{R}</math> as inequações.</p> <p>a) <math>5(x-2) - 2(x-1) &gt; 4(x+2)</math>      c) <math>(x-4)^2 &lt; (x-3)^2</math></p> <p>b) <math>\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{x-1}{6}</math>      d) <math>2 - \frac{x-1}{10} \leq 5</math></p> <p><b>42.</b> Seja a inequação <math>\frac{x-3}{5} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x-4}{10}</math>.</p> <p>Determine:</p> <p>a) a maior solução real;</p> <p>b) a maior solução par;</p> <p>c) a maior solução ímpar;</p>	<p><b>46.</b> Em Imaginolândia, onde a moeda também é o Real, qualquer cliente da TPT (Telefone para Todos) paga R\$ 18,50 por sua assinatura mensal e R\$ 1,25 para cada minuto falado. À soma da assinatura com o preço total dos minutos falados é aplicada uma taxa de imposto de 16%.</p> <p>a) Qual é o número máximo de minutos que um cliente pode utilizar sem que a sua conta mensal atinja R\$ 70,00?</p> <p>b) Se a taxa for elevada para 18%, qual é o número máximo de minutos que o cliente poderá falar para que sua conta mensal seja menor que R\$ 70,00?</p>
--	---

Fonte: (Kátia, 2016, p.110)

### 2.2.3.2 - Função polinomial de grau 2:

No capítulo sobre função quadrática, a autora inicia com um problema envolvendo um foguete que foi lançado, representando a sua trajetória pelo gráfico de uma função.

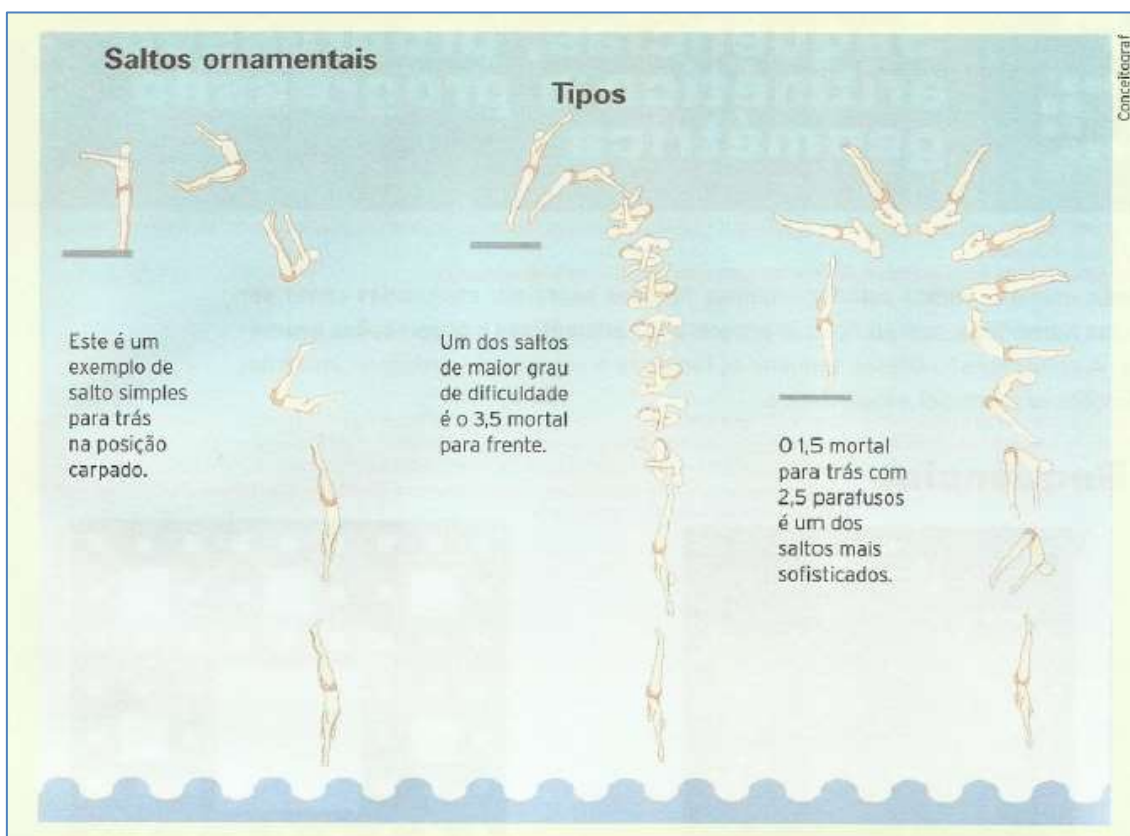
Figura 44 – Introdução a função polinomial de grau 2



Fonte: (Kátia, 2016, p.113)

Ao final deste capítulo o autor apresenta um problema relacionado à prática de saltos ornamentais, em que para cada um dos saltos está indicada a parábola que descreve a trajetória do salto.

Figura 45 – Função quadrática no esporte



Fonte: (Kátia, 2016, p.135)

Observando os exercícios descritos pela autora, observa-se, em geral, a predominância de exercícios padrões e bem usuais em relação ao tema.

Figura 46 – Exercícios resolvidos

<p><b>R5.</b> Determine <math>m</math> e <math>n</math> para que o vértice da parábola de equação <math>y = x^2 - mx + n</math> seja <math>(-1, 2)</math>. Classifique o vértice em ponto de máximo ou ponto de mínimo.</p> <p><b>Resolução</b></p> $x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow -\frac{-m}{2 \cdot 1} = -1 \Rightarrow m = -2$ $y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\frac{(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot n}{4 \cdot 1} = 2 \Rightarrow n = 3$ <p>O vértice é ponto de mínimo, pois <math>a &gt; 0</math>.</p>	<p><b>R8.</b> De todos os retângulos de perímetro igual a 40 cm, determine o de área máxima.</p> <p><b>Resolução</b></p> <p>Indicando a medida, em cm, de um lado de um retângulo por <math>x</math> (<math>x &gt; 0</math>), o outro lado, paralelo a esse, também terá medida <math>x</math>. Logo, cada um dos outros dois lados medirá:</p> $\frac{40 - 2x}{2} = 20 - x, \text{ com } x < 20.$
--	--

Fonte: (Kátia, 2016, p.126)

Em nenhum momento, no capítulo de função polinomial de grau 2, observa-se a relação desse modelo de função com o conceito de PA. Suas propriedades são apresentadas por meio de exemplos simples e sem relação com problemas contextualizados.

### 2.2.3.3 - Progressão Aritmética:

A obra descrita por Kátia Stocco apresenta PA por meio de exemplos numéricos arbitrários, procurando destacar o padrão que caracteriza tal tipo de sequência.

Figura 47 – Definição PA

Finalmente, na terceira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando somamos 0,01 ao termo anterior a ele:

$$1 \xrightarrow{+ 0,01} 1,01 \xrightarrow{+ 0,01} 1,02 \xrightarrow{+ 0,01} 1,03 \xrightarrow{+ 0,01} 1,04 \dots$$

A esse tipo de sequência chamamos **progressão aritmética**.

**Progressão aritmética (P.A.)** é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante.

Essa constante, que indicaremos por **r**, é denominada **razão da progressão aritmética**.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$  é uma P.A.  $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2$

Fonte: (Kátia, 2016, p.149)

A autora não apresenta relação com outros conteúdos da matemática ou da física como outros livros realizam.

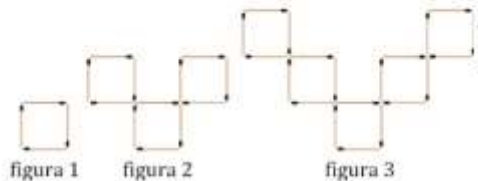
Figura 48 – Exercícios de PA

**47.** Qual é o número mínimo de termos que devemos somar, a partir do 1º, na sequência  $(-15, -11, -7, \dots)$ , para que a soma dos  $n$  primeiros termos seja positiva?

**48.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. é dada por  $2n \cdot (n - 4)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Qual é o termo geral dessa P.A.?

**49.** Em um certo telhado, as telhas dispõem-se de modo que cada fila tem 2 telhas a mais que a anterior. Um telhadista está calculando quantas telhas precisa para as 4 faces do telhado. Ajude-o a calcular o número de telhas, sabendo que em cada face, de cima para baixo, há 4 telhas na primeira fileira e 38 na última.

**51.** Observe as três primeiras figuras de uma sequência.



Se as figuras são formadas com palitos de fósforo e seguem a mesma lei de formação, quantos deles são necessários para construir, ao mesmo tempo, as 50 primeiras figuras dessa sequência?

Fonte: (Kátia, 2016, p.156)

As propriedades de PA são apresentadas por meio de exemplos simples e sem relação com problemas contextualizados. Não se estabelece relação com o conceito de função.

#### 2.2.4 - Conclusão parcial

A relação entre função polinomial do primeiro grau e as progressões aritméticas pôde ser percebida nos primeiros livros analisados. Já a articulação entre funções polinomiais do segundo grau e as progressões aritméticas de segunda ordem só é explorada, e de forma superficial, no livro do Dante. No próximo capítulo apresentaremos uma sequência didática que possibilite essa articulação.

## Capítulo 3: Experiências didáticas

Neste capítulo faremos o relato de duas experiências didáticas realizadas com alunos do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino e outra com um grupo de professores de matemática da educação básica. A experiência com os alunos foi realizada tendo como referência a aplicação de oito fichas de atividades construídas pelo autor. A partir dos conteúdos das fichas de atividades preparadas para os alunos, elaborou-se um material similar para ser aplicado aos professores. Antes de apresentar e fazer uma análise das experiências realizadas, cabe destacar aqui esses materiais construídos.

### 3.1 – As fichas de atividades aplicadas aos alunos

Trata-se de uma coletânea de oito fichas de atividades que procuram explorar as relações entre funções polinomiais de grau 1 e progressões aritméticas e funções polinomiais de grau 2 e progressões aritméticas de segunda ordem. Em todas as fichas exploram-se as conversões de registros: aritmético (tabela), algébrico e geométrico (gráfico). A sequência didática está organizada da seguinte forma:

Ficha 1 – Composta de três exercícios, a ficha tem como objetivo levar o aluno a perceber - aritmética, algébrica e graficamente - que uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , define uma PA.

Ficha 2 – Esta ficha apresenta uma definição para PA não muito usual na educação básica: PA como função polinomial de grau 1 definida em um domínio discreto. A partir dessa “nova” representação algébrica de PA explora-se o reconhecimento (aritmético e gráfico) do primeiro termo e da razão da PA. A ficha de atividades é composta de 10 exercícios.

Ficha 3 – Esta ficha, composta de três exercícios, procura fazer o caminho de volta: dada as progressões aritméticas, o aluno deve recuperar a função polinomial de grau 1 que gera a PA.

Ficha 4 – Na ficha 4 explora-se o conceito de taxa de variação média de uma função real em um intervalo, no caso, de uma função polinomial de grau 1. A ficha possui três exercícios.

Ficha 5 – A quinta ficha explora uma característica das funções polinomiais de grau 1: dada uma PA  $x_n$  no eixo  $Ox$ , e uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA. Esta ficha é composta de três exercícios.

Ficha 6 – Composta de três exercícios, esta ficha tem como objetivo levar o aluno a perceber que o gráfico de uma sequência  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ , encontra-se em um arco de parábola e que os valores  $f(n+1) - f(n)$  são iguais.

Ficha 7 - Nesta ficha apresenta-se uma PA de segunda ordem por meio de uma função polinomial de grau 2 definida em um domínio discreto. O principal objetivo da ficha é familiarizar o aluno com esse tipo de sequência que, em geral, não é estudada no ensino médio. Por meio da realização dos seus dez exercícios o aluno deverá ser capaz de determinar o primeiro termo, a razão e o gráfico de uma PA de segunda ordem  $f_n$ , dada por  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ .

Ficha 8 – A ficha, composta de dois exercícios, tem com principal objetivo levar o aluno a determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA de segunda ordem dada.

Os conteúdos dessas fichas podem ser visualizados no anexo 1. Fizemos essa opção de organização pelo fato da sequência didática ser extensa e sua apresentação agora não agregar qualquer informação relevante. Entretanto, sugerimos a leitura do conteúdo das fichas antes de ter acesso à análise dos resultados. Na análise dos resultados da experiência realizada com os alunos, procuraremos trazer, sempre que for o caso, o enunciado da questão.

A atividade foi realizada na Escola Estadual Professor João Borges, localizada na Nova Holanda, Complexo da Maré. A escola possui dois anos de inaugurada, com turmas de 1ª séries e 2ª series de ensino Médio, sendo em turno único para os alunos. O maior

problema visto nesta unidade escolar foi a falta de professores. Por conta disso as atividades foram realizadas em horários em que não tinha professor de Inglês na escola.

O cronograma para a execução das atividades foi planejado para cinco aulas, onde cada uma possuiria três tempos de 50 minutos, totalizando 750 minutos. A tabela a seguir apresenta cronograma com a previsão do desenvolvimento das fichas propostas por aula planejada.

Tabela 03 – Cronograma de atividades

Encontro	Fichas desenvolvidas	Data
01	01	27/08/19
02	02 e 03	10/09/19
03	04 e 05	17/09/19
04	06 e 07	24/09/19
05	08 e 09	01/10/19

Fonte: o autor

A pesquisa foi desenvolvida com alunos da 1ª série do Ensino Médio, onde todos os alunos podiam participar, sendo eles divididos em grupos de no máximo quatro pessoas. A turma foi dividida em oito grupos, denominados por Grupo A, B, C, D, E, F, G e H.

A tabela a seguir indica se os exercícios relacionados a cada ficha foram resolvidos ou não por cada grupo (a indicação “X” indica que foi realizado).



Tabela 04 – Relação de exercícios resolvidos

FICHA	EXERCÍCIO	A	B	C	D	E	F	G	H
1	EX1	X	X	X	X	X	X	X	
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	
	EX3	X	X	X	X	X	X		
2	EX1	X	X	X	X	X	X	X	
	EX2	X	X	X	X	X	X		
	EX3		X	X			X		
	EX4		X						
	EX5	X	X	X	X	X			
	EX6	X	X		X	X			
	EX7								
	EX8	X	X	X	X	X			
	EX9	X	X		X	X			
	EX10								
3	EX1	X	X		X	X			
	EX2								
4	EX1	X	X	X	X	X	X	X	
	EX2				X				
	EX3								
5	EX1								
	EX2								
	EX3								
6	EX1	X	X	X	X	X			X
	EX2		X	X		X			
	EX3		X	X		X			
7	EX1	X	X	X		X	X		
	EX2			X		X	X		
	EX3			X					
	EX4		X			X	X		
	EX5	X	X	X	X	X			
	EX6		X	X	X	X			
	EX7			X					
	EX8	X	X	X	X	X		X	
	EX9			X	X	X			
	EX10		X	X					
8	EX1	X	X		X	X		X	
	EX2		X		X				

Fonte: o autor

### 3.1.1 Análise dos resultados por fichas de atividades:

A análise dos resultados foi desenvolvida por ficha de atividades, considerando as respostas dos alunos dadas às suas respectivas questões e subitens. Foi observada também a descrição dos erros obtidos pelos grupos e as diferentes formas de responder cada questão. Esses tipos de erros foram categorizados. A seguir são descritos os principais aspectos que compõe as atividades e os seus respectivos comentários.

### Ficha 01: Função polinomial de grau 1:

A ficha é composta de três exercícios subdivididos em alguns itens. A diferença entre os exercícios são os coeficientes das funções, onde seus gráficos são diferenciados entre crescente e decrescente.

O objetivo destas questões é levar o aluno a perceber - aritmética, algébrica e graficamente - que uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , define uma PA.

Na primeira parte, os alunos cometeram pequenos erros ao utilizar operações com números negativos, porém de forma geral, a grande maioria solucionou a questão de forma correta.

No trecho retirado de uma solução de um dos grupos, todas as diferenças encontradas entre os termos consecutivos deveriam obter o mesmo número como resultado, podemos perceber que algumas diferenças seria 3, -1 ou -3. Esses pequenos erros acontecem de forma recorrente pela falta de atenção ou até mesmo por ser considerada uma operação fácil de resolver

Figura 49 : Ficha 01 – Exercício 02 – letra (c)- Grupo (B)

c) Calcule os seguintes valores:

$$g(2) - g(1) = 1 - 4 = -3$$
$$g(3) - g(2) = 2 - 1 = 1$$
$$g(4) - g(3) = 6 - 2 = 4$$
$$g(5) - g(4) = 5 - 2 = 3$$
$$g(6) - g(5) = 11 - 8 = 3$$

Universidade Federal Fluminense

Fonte: o Autor

O item (b) dos exercícios desta ficha pedia para representar os pares ordenados no plano cartesiano, como mostrado a seguir:

Figura 50: Ficha 01 – Exercício 02 – letra (c)

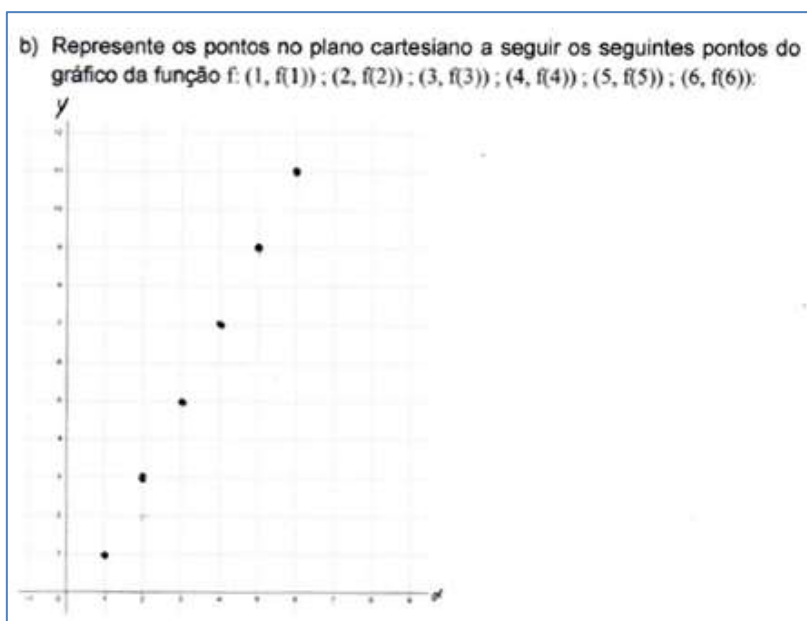
b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $f$ :  $(1, f(1))$ ;  $(2, f(2))$ ;  $(3, f(3))$ ;  $(4, f(4))$ ;  $(5, f(5))$ ;  $(6, f(6))$ :

Fonte: o Autor

O objetivo desta questão era a representação do gráfico apenas pelos pares ordenados e não pela construção da reta que passa pelos pontos, pois o domínio é o conjunto dos naturais ( $\mathbb{N}$ ).

Para nossa surpresa, quatro dos grupos representaram os pares ordenados de forma correta e não construiu a reta que une os pontos. Essa forma correta de desenvolver o item (b) se encontra no trecho retirado de um dos grupos.

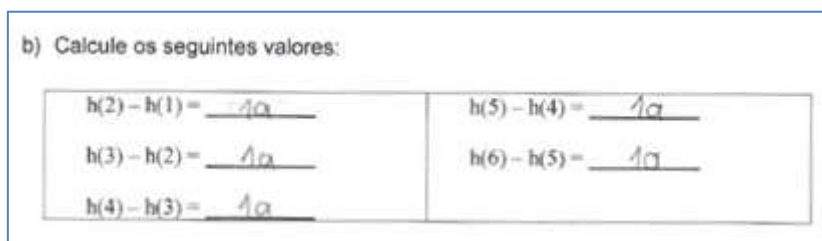
Figura 51: Ficha 01 – Exercício 01 – letra (b) – Grupo A



Fonte: o autor

O exercício 03 foi proposto com o intuito de generalizar o resultado anterior para uma função polinomial de grau 1 qualquer. Neste caso a razão da sequência é o coeficiente  $a$  da função. Na figura a seguir apresentamos o recorte da resolução correta realizada por um dos grupos.

Figura 52: Ficha 01 – Exercício 03 – letra (b)- Grupo (D)



Fonte: o Autor

## Ficha 02: Progressão aritmética:

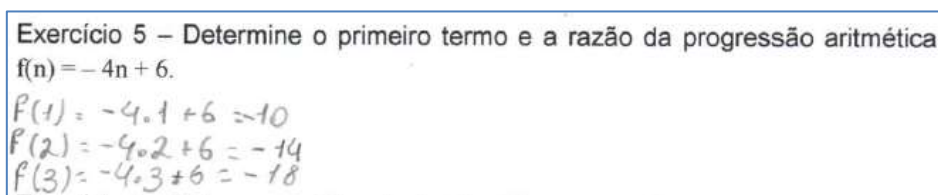
A ficha é composta de dez exercícios, considerando diferentes formas de representação de progressões aritméticas por meio de funções polinomiais de grau 1 crescentes e decrescentes.

A intenção seria levar o aluno a identificar aritmética e algebricamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

A intenção na construção destas questões era observar se os alunos percebem a representação das sequências no plano cartesiano e se eles conseguem determinar o valor da razão e do primeiro termo da PA a partir do gráfico construído.

Na resolução para a determinação do primeiro termo e da razão, foi encontrado apenas um tipo de erro: erro de cálculo com números positivos e negativos.

Figura 53: Ficha 02 – Exercício 05 – Grupo (C)



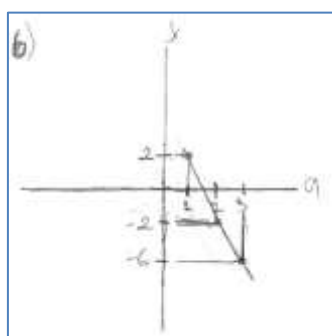
Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética  
 $f(n) = -4n + 6$ .  
 $f(1) = -4 \cdot 1 + 6 = -10$   
 $f(2) = -4 \cdot 2 + 6 = -14$   
 $f(3) = -4 \cdot 3 + 6 = -18$

Fonte: o Autor

A construção do gráfico da função foi desenvolvida por apenas dois grupos. Os estudantes apresentam grandes dificuldades ao construir graficamente e identificar os elementos nele presentes.

Assim, ao desenvolver erradamente o item anterior, não seria possível acertar o item que pede a construção no plano cartesiano. A seguir temos um trecho que mostra um dos grupos que solucionou de forma parcialmente correta o item. Deveriam apresentar apenas os pontos de coordenadas inteiras.

Figura 54: Ficha 02 – Exercício 06 – Grupo (A)



Fonte: o Autor

Os exercícios 07 e 10 desta ficha orientam aos grupos para compararem com outros colegas de sala, porém essa foi a maior dificuldade encontrada nesta aplicação da ficha 02, pelo motivo dos discentes não quererem dividir ou compartilhar as atividades propostas.

Apenas dois grupos realizaram a comparação entre eles, estas comparações contribuem para a observação de outra forma na solução dos exercícios aplicados.

### Ficha 03: Função e Progressão:

A ficha é composta de dois exercícios, com atividades que tentam induzir o aluno a perceber que uma PA pode ser representada como uma função polinomial de grau 1, obedecendo a lei de formação da função  $(f(n) = an + b)$ .

O objetivo destas atividades é perceber se o aluno consegue determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada e se os estudantes assimilaram de forma coesa cada uma das definições de função e progressão, sua representação gráfica e a interligação dos conteúdos.

Dos grupos que participaram da pesquisa, apenas quatro conseguiram determinar o primeiro termo e a razão da PA, a seguir temos o trecho de um dos grupos que conseguiu perceber a PA e seus elementos.

Figura 55: Ficha 03 – Exercício 01 – letra (a) - Grupo (E)

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = 1 - 3                      Razão = 4

Fonte: o Autor

Para determinar a função  $f(n)$  que representa a função polinomial utilizando os elementos da PA, que corresponde ao item (b) do exercício 1, apenas dois grupos conseguiram representar a função polinomial  $f(x)$ .

Figura 56: Ficha 03 – Exercício 01 – letra (b)- Grupo (B)

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.  
 $f_n = 4n - 3$   
Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

Fonte: o Autor

Nenhum dos grupos conseguiu construir o gráfico da função PA. A dificuldade na construção gráfica utilizando o plano cartesiano pode ser observada novamente, muito provável os discentes trazerem esta dificuldade desde o início do segundo segmento do Ensino Fundamental, momento de grande importância para o aprendizado e assimilação destes conceitos.

#### Ficha 04 – Função polinomial do primeiro grau:

A ficha é composta de três exercícios, onde é abordado o conceito de Taxa de Variação Média de uma função polinomial de grau 1. Para facilitar o entendimento dos alunos foi apresentada a explicação e a representação gráfica desse conceito. O objetivo era levar o aluno a perceber que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1 não depende do intervalo escolhido. Sete grupos resolveram apenas os itens (a) e (b) do exercício 1 de forma correta. Temos a seguir um exemplo:

Figura 57: Ficha 04 – Exercício 01 – letra (a) e (b)- Grupo (D)

Exercício 1:  
 Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = 2x - 3$ , determine:

a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0, 1]$   $-0,5$

b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1, 3]$

c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1, 1]$

d) O que observou?

*Handwritten work:*

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{1 - 0}{-2 - (-3)} = \frac{1}{-2 + 3} = \frac{1}{1} = 1$$

*Handwritten calculations for item (a):*

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\frac{-1 - (-3)}{1 - 0} = \frac{-1 + 3}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Fonte: o Autor

Ao analisar os itens seguintes, podemos perceber que apenas um grupo desenvolveu a atividade 2, sendo sua resolução da mesma forma que a anterior. O grupo que respondeu a atividade obteve êxito no seu desenvolvimento.

Figura 58: Ficha 04 – Exercício 02 – letra (a), (b) e (c)- Grupo (B)

Exercício 2  
 Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = -x + 5$ , determine:

a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .  $\frac{4-5}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1$   
 $f(0) = -0 + 5 = 5$ ,  $f(1) = -1 + 5 = 4$

b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .  
 $f(1) = -1 + 5 = 4$ ,  $f(3) = -3 + 5 = 2$

c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$   
 $f(-1) = -(-1) + 5 = 6$ ,  $f(1) = -1 + 5 = 4$

Fonte: o Autor

O item 3, que utiliza a forma generalizada de uma função polinomial de grau 1, não foi desenvolvido por nenhum grupo que respondeu a pesquisa. Uma das grandes fontes dessas dificuldades é, sem dúvida, o pouco investimento que se faz na educação básica no desenvolvimento da linguagem simbólica e do pensamento algébrico, em particular em processos de generalização.

### Ficha 05 - Progressão aritmética:

A ficha é composta de três exercícios, subdivididos em três itens. A diferença entre os exercícios são os coeficientes das funções polinomiais e a PA que está definida no eixo  $Ox$ .

O objetivo destas questões é fazer com que o aluno observe que dada uma PA  $(x_n)$  no eixo  $Ox$  e uma função polinomial de grau 1, a sequência  $f(x_n)$  também era uma PA, levando o mesmo a perceber que dada uma PA  $x_n$  no eixo  $Ox$ , e uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA.

Apesar desta ficha não apresentar grandes dificuldades nos exercícios propostos, esta não foi desenvolvida por nenhum grupo, mesmo sendo explicado o que deveria ser desenvolvido.

A seguir temos uma das questões propostas.

Figura 59: Ficha 05 – Exercício 01 – letra (a)- Grupo (C)

Exercício 1:  
Considere a função polinomial  $f(x) = 7x - 9$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por  $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))$ ?

Fonte: o Autor

### Ficha 06 – Função polinomial de grau 2:

A ficha é composta de três exercícios subdivididos em alguns itens. A diferença entre os exercícios são os coeficientes das funções polinomiais de grau 2, onde seus gráficos são diferenciados no formato da concavidade.

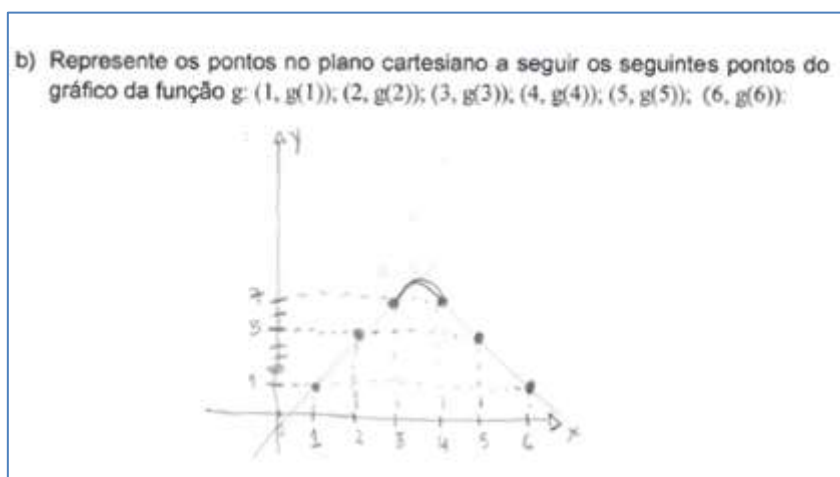
O objetivo destas questões é fazer com que o aluno perceba que, dada uma função polinomial de grau 2, os pontos do gráfico da sequência  $(f(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , encontram-se em uma parábola e que a sequência  $(f(n+1) - f(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é uma PA.

Com relação a esses exercícios, podemos observar que os grupos desenvolveram as operações aritméticas de forma correta. Quando o coeficiente  $a$  da função era negativo, percebemos uma quantidade menor de soluções. Por exemplo, seis grupos responderam a questão 1 item (a) e na questão 2 item (a) apenas três grupos desenvolveram as atividades propostas.

No item que solicitava a representação gráfica nos exercícios 1 e 2, um grupo que respondeu de forma correta o item (a) não construiu o seu gráfico no item (b). Um dos grupos transcreveu o gráfico de modo que sua forma sugere ser uma parábola (veja a figura a seguir).



Figura 60: Ficha 06 – Exercício 02 – letra (b)- Grupo (B)



Fonte: o Autor

Ao desenvolver a diferença entre os termos consecutivos, podemos perceber que os resultados encontrados representam uma PA, onde a maior dificuldade encontrada pelos estudantes foi quando inserimos números negativos. A seguir, foi retirado um trecho da resposta de um dos grupos que respondeu a questão.

Figura 61: Ficha 06 – Exercício 02 – letra (c)- Grupo (E)

c) Calcule os seguintes valores:

$g(2) - g(1) = \underline{\quad 4 \quad}$	$g(5) - g(4) = \underline{\quad -7 \quad}$
$g(3) - g(2) = \underline{\quad 2 \quad}$	$g(6) - g(5) = \underline{\quad -4 \quad}$
$g(4) - g(3) = \underline{\quad 0 \quad}$	

Fonte: o Autor

### Ficha 07 – Progressão aritmética de segunda ordem:

A ficha é composta de dez exercícios, sendo formada por meio de diferentes registros de progressões aritméticas de segunda ordem. A intenção na construção destas questões é fazer com que o aluno perceba a representação da forma algébrica no plano cartesiano, representar graficamente o valor da razão e do primeiro termo da PA.

Ao tentar descobrir o valor da razão e do primeiro termo da PA nos exercícios 1 e 5, a maior quantidade de erro ocorre quando se considera números negativos e suas operações. A seguir apresentamos uma solução incorreta apresentada por um dos grupos.

Figura 62: Ficha 07 – Exercício 05 – Grupo (C)

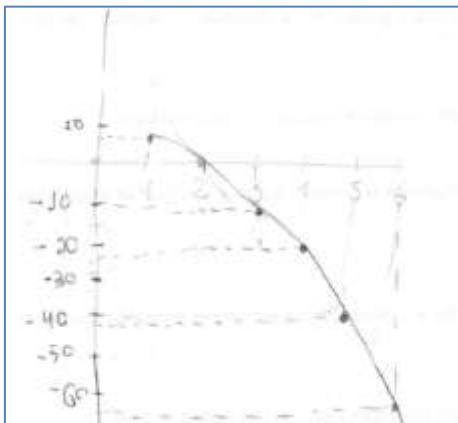
Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da progressão aritmética  $f(n) = -n^2 + 6n - 4$ .

(3, 12, 20, 36)

Fonte: o Autor

A representação gráfica é, sem dúvida, uma das grandes dificuldades. Os alunos não conseguem diferenciar a representação do gráfico de uma função e a inserção de pontos no plano cartesiano. Na sequência apresentamos um exemplo, considerado parcialmente correto – ignorando problemas de escalas e precisão do registro – em que os alunos consideram o gráfico como uma linha cheia.

Figura 63: Ficha 07 – Exercício 09 – Grupo (A)



Fonte: o Autor

### Ficha 08 – Função e Progressão:

A ficha é composta de dois exercícios, que tentam induzir o aluno a perceber que uma PA de segunda ordem pode ser representada como uma função polinomial de grau 2 ( $f(n) = an^2 + bn + c$ ). O objetivo destas atividades é levar o aluno a determinar algebricamente e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada.

Cinco grupos conseguiram desenvolver o exercício corretamente. Segue um exemplo de resposta.

Figura 64: Ficha 08 – Exercício 01 – letra (a) - Grupo (C)

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = 5                      Razão = 2

Fonte: o Autor

Os demais itens deste exercício não foram respondidos pelos alunos. Uma justificativa para isso talvez seja a pouca habilidade dos estudantes com manipulações algébricas.

Figura 65: Ficha 08 – Exercício 01 – itens (b) e (c) - Grupo (B)

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

c) Faça o gráfico da PA.

Fonte: o Autor

### 3.2 – O questionário aplicado ao professor

O questionário é uma adaptação das questões propostas aos estudantes. O número de fichas (oito), os conteúdos são os mesmos, mas os objetivos são outros. O que se pretende aqui não é ensinar ao professor, mas tão somente verificar se ele tem a competência necessária para a resolução do conteúdo abordado na ficha. Por esta razão apresentamos a seguir apenas os objetivos de cada ficha de atividades:

Ficha 1 - Verificar se o professor percebe - aritmética, algébrica e graficamente - que uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , define uma PA. No exercício 1, a função é crescente, no 2, a função é decrescente e no exercício 3, considera-se o caso geral.

Ficha 2 - Verificar se o professor identifica, aritmética, algebricamente e graficamente, a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a > 0$  ou  $a < 0$ .

Ficha 3 - Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada.

Ficha 4 - Verificar se o professor reconhece que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1 não depende do intervalo escolhido. No exercício 3 o professor deve reconhecer que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$  é igual a  $a$ .

Ficha 5 - Verificar se o professor reconhece que dada uma PA  $x_n$  no eixo  $Ox$ , e uma função polinomial de grau 1,  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA.

Ficha 6 - Verificar se o professor percebe que o gráfico de uma sequência  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ , encontra-se em um arco de parábola e que os valores de  $f(n + 1) - f(n)$  são iguais.

Ficha 7 - Verificar se o professor determina o primeiro termo, a razão e o gráfico de uma PA de segunda ordem  $f_n$ , dada por  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ .

Ficha 8 - Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada.

Na análise dos resultados da experiência, assim como no caso dos alunos, procuraremos trazer, sempre que for o caso, o enunciado da questão. Entretanto, recomendamos a leitura do questionário no anexo 2 antes de se fazer a análise dos resultados da pesquisa.

As atividades foram aplicadas com dez professores de matemática da educação básica, cada professor com sua respectiva formação e experiência acadêmicas. Quatro deles fazem o curso de pós-graduação *lato sensu* em Ensino de Matemática do IME-UFF e atuam no ensino médio e fundamental. Dos outros seis professores, três também têm pós-graduação *lato sensu*, e os outros três se formaram em instituições particulares de ensino. Para manter o sigilo dos seus nomes, eles foram denominados de maneira aleatória, por letras de A até J.

A aplicação das fichas foi por meio de uma distribuição individual, onde cada docente realizou o desenvolvimento dos exercícios em momento mais conveniente a cada um, pois para realizar um encontro de todos os professores não seria possível pela diferença de carga horária e diferentes dias de trabalho.

A tabela a seguir indica se os exercícios relacionados a cada ficha foram resolvidos ou não por cada professor.

Tabela 5 – Relação de exercícios resolvidos

FICHA	EXERCÍCIO	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X		X	X	X
	EX3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX4	X	X	X	X	X	X		X	X	X
	EX5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX6	X	X	X	X	X	X		X	X	
3	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EX3	X	X	X	X		X	X	X	X	X
7	EX1	X	X	X	X	X	X	X	X		
	EX2	X	X	X	X	X	X		X	X	
	EX3	X	X		X	X	X	X	X	X	
	EX4	X	X		X	X	X		X	X	
	EX5	X	X		X		X	X	X	X	
	EX6	X	X		X		X		X	X	
8	EX1	X	X	X	X		X	X		X	
	EX2	X	X		X		X	X			

Fonte: o autor

### 3.2.1 Análise dos resultados por fichas de atividades:

A análise dos resultados foi desenvolvida por ficha de atividades, considerando as respostas dos professores dadas às suas respectivas questões e subitens. Foram observadas também a descrição dos erros obtidos e as diferentes formas de responder

cada questão. A seguir são descritos os principais aspectos que compõe as atividades e os seus respectivos comentários.

### Ficha 01: Função polinomial de grau 1:

Os primeiros itens dos exercícios foram todos respondidos de forma correta, observando que cada docente desenvolve de forma particular. A seguir temos um trecho retirado de uma das respostas apresentada, onde podemos perceber o resultado correto.

Figura 66: Ficha 01 – Exercício 01 – letra (c)- Professor (H)

c) Calcule os seguintes valores:	
$f(2) - f(1) = \underline{\quad 2 \quad}$	$f(5) - f(4) = \underline{\quad 2 \quad}$
$f(3) - f(2) = \underline{\quad 2 \quad}$	$f(6) - f(5) = \underline{\quad 2 \quad}$
$f(4) - f(3) = \underline{\quad 2 \quad}$	

Fonte: o Autor

No item que pede a construção gráfica da função no plano cartesiano, cinco das respostas analisadas representaram os pontos e construíram a reta que intercepta os pontos, ignorando o fato de o domínio ser um conjunto discreto.

Figura 67: Ficha 01 – Exercício 02 – letra (b) – Professor (F)



Fonte: o Autor

Para efeito de ilustração apresentamos a seguir a resposta satisfatória do professor G para o item (d) do exercício 3.

Figura 68: Ficha 01 – Exercício 03 – letra (d) – Professor (G)

d) Você tem alguma ideia de como seria o gráfico de  $h$ ? Escolha um valor para  $a$  e um valor para  $b$  e faça o gráfico de  $h(n) = an + b$ :

Pontos dispostos numa linha reta, com a mesma distância entre eles

Fonte: o autor

### Ficha 02: Progressão aritmética:

A ficha é composta de seis exercícios, considerando diferentes formas de representação de progressões aritméticas por meio de funções polinomiais de grau 1 crescentes ou decrescentes. A intenção na construção destas questões era observar se os professores percebem a representação no plano cartesiano dessas sequências e se conseguem determinar o valor da razão e do primeiro termo da PA a partir do gráfico por eles construído.

No que tange às questões de natureza algébrica, todos os professores desenvolveram suas soluções de forma correta.

Figura 69: Ficha 02 – Exercício 01 – Professor (C)

Exercício 1 – Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética  
 $f(n) = 3n - 5$   
 $f(1) = -2$   
 $f(2) = 1$   
 $a_1 = -2$   $r = 3$

Fonte: o Autor

Um erro que apareceu com frequência foi na construção dos gráficos das progressões aritméticas, onde a metade dos professores construiu de forma equivocada uma reta utilizando os pontos da PA. A seguir, temos um trecho que foi desenvolvido por um dos professores pesquisados.

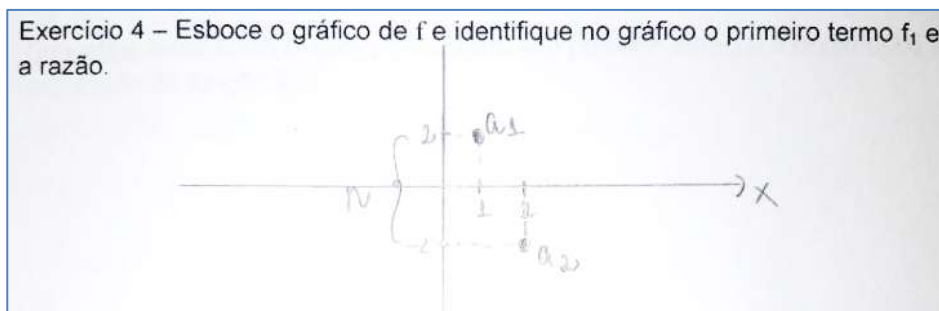
Figura 70: Ficha 02 – Exercício 02 – Grupo (A)

Exercício 2 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.  
 $f(2) = 3$

Fonte: o Autor

Porém, alguns docentes realizaram a representação gráfica das progressões aritméticas corretamente, mas indicaram o primeiro termo da PA como sendo o ponto  $(1, a_1)$ .

Figura 71: Ficha 02 – Exercício 04 – Grupo (C)



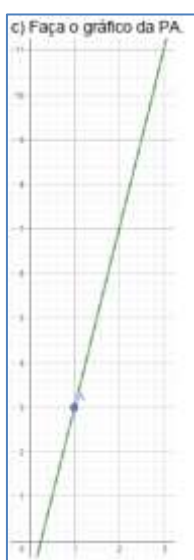
Fonte: o Autor

### Ficha 03: Função e Progressão:

A ficha é composta de dois exercícios. O objetivo destas atividades seria verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = an + b$ , que define a PA dada.

No primeiro exercício, todos os professores que participaram da pesquisa conseguiram encontrar a expressão algébrica da função polinomial de grau 1, no entanto, apresentaram as mesmas dificuldades com relação à tarefa de representar o gráfico da função encontrada.

Figura 72: Ficha 03 – Exercício 01 – letra (c) - Professor (H)



Fonte: o Autor



Encontramos resultados análogos para o exercício 2.

Figura 73: Ficha 03 – Exercício 02 – Professor (G)

Exercício 2 – Considere uma PA de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3. Determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

$$f(n) = -2n + 5$$

Fonte: o Autor

#### Ficha 04 – Função polinomial do primeiro grau:

O objetivo desta ficha seria examinar se o professor reconhece que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1 não depende do intervalo escolhido. No exercício 3 o professor deve reconhecer que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$  é igual a  $a$ .

Os exercícios 1 e 2 foram desenvolvidos de forma correta por todos os professores que participaram da pesquisa, exceto o professor H que cometeu um erro de cálculo ou esquecimento pelo fato de não dividir a diferença entre os valores de  $f$  nos extremos pelo comprimento do intervalo.

Figura 74: Ficha 04 – Exercício 01 – letra (b) e (c) – Professor (H)

b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .  
 $x=1; h=2$   $\frac{3+1}{2} = 4$   
 $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$   
 $f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$   
 $x=-1; h=2$   $\frac{-1+5}{2} = 4$   
 $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$   
 $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

Fonte: o Autor

No exercício seguinte o professor H resolveu a questão corretamente o que indica claramente que foi uma questão de esquecimento.

Figura 75: Ficha 04 – Exercício 02 – letra (a), (b) e (c) – Professor (H)

a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .  
$$\frac{-1+5-5}{1-0} = -1.$$

b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .  
$$\frac{-3+5+1-5}{3-1} = -1.$$

c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$ .  
$$\frac{-1+5-5-1}{1+1} = -1.$$

Fonte: o Autor

Com relação ao exercício 3, pode-se dizer que todos os professores responderam corretamente indicando que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1,  $f(n) = an + b$ , é igual a  $a$ .

#### Ficha 05 - Progressão Aritmética:

A ficha é composta de três exercícios, subdivididos em três itens. A diferença entre os exercícios são os coeficientes das funções polinomiais e a PA que está definida no eixo  $OX$ .

O objetivo destas questões é verificar se o professor reconhece que dada uma PA  $x_n$  no eixo  $Ox$ , e uma função polinomial de grau 1,  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA. Todos os docentes que participaram da pesquisa desenvolveram as atividades de forma correta.

Figura 76: Ficha 05 – Exercício 01 – letras (a), (b) e (c) – Professor (J)

Exercício 1:  
Considere a função polinomial  $f(x) = 7x - 9$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por  $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$ .

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))$ ?  
 $f(x_n)$  é uma PA cuja razão é  $3 \times 7$   
 $f(2) = 7(2) - 9$   
 $f(5) = 7(2+3) - 9$   
 $f(8) = 7(2+3+3) - 9$   
 $f(11) = 7(2+3+3+3) - 9$

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$f(5) - f(2) = 21$	$f(17) - f(14) = 21$
$f(8) - f(5) = 21$	$f(20) - f(17) = 21$
$f(11) - f(8) = 21$	$f(23) - f(20) = 21$
$f(14) - f(11) = 21$	

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?  
*A diferença entre termos consecutivos vai dar sempre 21*

Fonte: o Autor

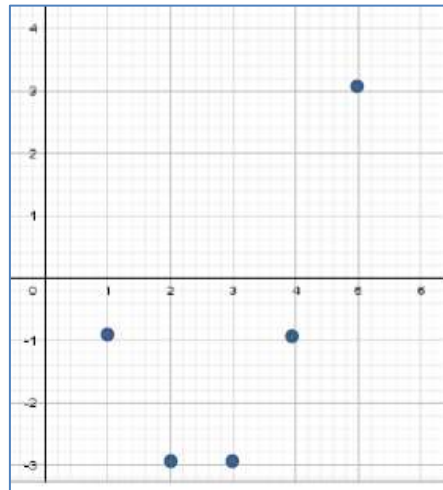
### Ficha 06 – Função polinomial de grau 2:

A ficha é composta de três exercícios subdivididos em alguns itens. A diferença entre os exercícios são os coeficientes das funções polinomiais de grau 2, onde seus gráficos são diferenciados no formato da concavidade.

O objetivo é verificar se o professor percebe que o gráfico de uma sequência  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ , encontra-se em um arco de parábola e que os valores de  $f(n + 1) - f(n)$  são iguais.

No item que solicitava a representação gráfica nos exercícios 1 e 2, cinco professores responderam de forma correta (ver figura 65), dois deles deixaram em branco e três deles fizeram a representação em linha cheia.

Figura 77: Ficha 06 – Exercício 01 – letra (b) – Professor (G)



Fonte: o Autor

Nos itens (a) e (c) os professores não demonstraram dificuldades com cálculos aritméticos.

Figura 78: Ficha 06 – Exercício 02 – letra (c) – Professor (J)

c) Calcule os seguintes valores:

$g(2) - g(1) = \underline{\quad 4 \quad}$	$g(5) - g(4) = \underline{\quad -2 \quad}$
$g(3) - g(2) = \underline{\quad 2 \quad}$	$g(6) - g(5) = \underline{\quad -4 \quad}$
$g(4) - g(3) = \underline{\quad 0 \quad}$	

Fonte: o Autor

### Ficha 07 – Progressão aritmética de segunda ordem:

A ficha é composta de seis exercícios, sendo formada por meio de diferentes formas de representação de progressões aritméticas de segunda ordem por meio de funções.

A intenção na construção destas questões é perceber a forma algébrica no plano cartesiano, a solução dos itens com a utilização das operações básicas e com números inteiros, encontrar no gráfico construído o valor da razão e do primeiro termo da PA.

O objetivo desta atividade é observar se o professor determina o primeiro termo, a razão e o gráfico de uma PA de segunda ordem  $f_n$ , dada por  $f: N^* \rightarrow IR$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a \neq 0$ .

Sete dos dez professores conseguiram determinar o primeiro termo e a razão. Por outro lado, cinco deles tiveram dificuldades na representação gráfica da PA de segunda

ordem. Cabe destacar ainda que um dos professores não desenvolveu a atividade, pois nunca tinha ouvido falar de algo envolvendo este tema (PA de segunda ordem).

Figura 79: Ficha 07 – Exercício 03 – Professor (H)

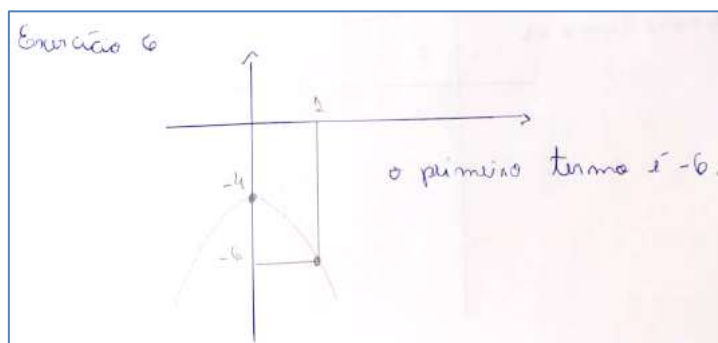
Exercício 3 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da progressão aritmética  $f(n) = -n^2 + 6n - 4$ .

$f(1) = -1^2 + 6.1 - 4. = 1$        $f(3) = -3^2 + 6.3 - 4. = 5$        $f(5) = -5^2 + 6.5 - 4. = 1$   
 $f(2) = -2^2 + 6.2 - 4. = 4$        $f(4) = -4^2 + 6.4 - 4. = 4$        $f(6) = -6^2 + 6.6 - 4. = -4$   
 $1 ; 4 ; 5 ; 4 ; 1 ; -4 \Rightarrow 3 ; 1 ; -1 ; -3 ; -5$   
 Primeiro termo: 3  
 Razão: -2

Fonte: o Autor

Na sequência temos o gráfico de uma representação da PA de segunda feita de forma equivocada apresentada por um dos professores.

Figura 80: Ficha 07 – Exercício 06 – Professor (D)



Fonte: o Autor

### Ficha 08 – Função e Progressão:

A ficha é composta de dois exercícios, com o objetivo de verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada.

O item (a) do exercício 1 (que pedia a razão e o primeiro termo da PA de segunda ordem) desta ficha foi desenvolvida de forma correta por todos os professores. No item (b), em que era pedido a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada, apenas quatro responderam corretamente. E destes, apenas dois conseguiram fazer a representação correta para a sequência dada.

Figura 81: Ficha 08 – Exercício 01 – letra (a) – Professor (D)

Exercício 1 – Considere a PA  $f_1 = 5, f_2 = 7, f_3 = 11, f_4 = 17, f_5 = 25 \dots$

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = 5

Razão = 2

Fonte: o Autor

O exercício de número 2 foi feito pela metade dos professores que participaram da pesquisa. Todos os cinco docentes que responderam a pesquisa realizaram de forma correta.

A seguir temos um trecho que mostra o desenvolvimento de uma solução correta para esta atividade.

Figura 82: Ficha 08 – Exercício 02 – Professor (G)

Exercício 2 – Considere uma PA de razão de segunda ordem de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3 e o segundo termo é 0.

Monte a PA de segunda ordem e determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.

PA  $f_1 = 5, f_2 = 7, f_3 = 11, f_4 = 17, f_5 = 25 \dots$

$f(n) = -n^2 + 4$

Fonte: o Autor

## Conclusão

Na educação básica, em específico no Ensino Médio, o estudo de PA não recebe a devida atenção. Esse assunto é, em geral, tratado de forma dissociada do estudo das funções reais, o que, por conta disso, causa alguns obstáculos epistemológicos em relação ao próprio conceito: PA, por exemplo, também é função! Outro ponto que observamos é a ausência de outros tipos de PA: PA de segunda ordem; por exemplo, não de conhecimento de muitos professores (fato que foi corroborado por nossa pesquisa) O curioso é que se ensinam funções polinomiais (de graus 1 e 2), mas, por outro lado, não se faz relação entre essa família de funções e o estudo de progressões aritméticas, ainda que os documentos oficiais BNCC e PCN, como ficou explícito nessa pesquisa, façam recomendações para que essas conexões entre esses dois tópicos do ensino básico de matemática sejam realizadas.

Diante da análise dos livros didáticos, autorizados pelo PNDL 2017, que fizemos no capítulo, percebe-se que as conexões entre as progressões aritméticas e funções polinomiais também são pouco exploradas. Apenas uma obra, ainda que de forma muito incipiente, explorou esses assuntos de forma articulada. Foi com essa ausência de bons exemplos que se pensou em fazer a sequência didática aplicada a uma turma do 1º ano do ensino médio de uma escola pública da rede estadual do Rio de Janeiro e a um grupo piloto de dez professores de matemática que atuam na educação básica. Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de orientar o docente para o ensino desses conteúdos.

As fichas de atividades apresentadas para os alunos do Ensino Médio tinham como principal objetivo visualizar quais fundamentos desses assuntos os discentes possuíam, ao mesmo tempo em que pudessem se apresentar como um material alternativo para o ensino desses assuntos. Com relação à eficácia do material didático para o ensino, não foi possível fazer um julgamento preciso. Entretanto, de antemão, podemos sugerir, por meio de nossa experiência, alguns pontos para revisão do material elaborado: (i) a inserção dos conceitos não usuais para os estudantes (como taxa de variação e progressões aritméticas de segunda ordem, por exemplo) poderiam ser feitas de forma mais gradativa e com um melhor preparo; (ii) elaboração de um manual para o professor atentando para as “paradas obrigatórias”, necessárias para se fazer uma revisão de conteúdos, principalmente no que toca às competências algébricas; (iii) elaboração de uma ficha de atividade que explorasse a caracterização da função polinomial de grau 2 como uma função que leva qualquer PA  $(x_n)$ , no eixo  $Ox$ , em uma

PA de segunda ordem ( $f(x_n)$ ), no eixo das ordenadas (essa ficha já foi construída e pode ser vislumbrada no anexo 3).

Se por um lado, a ficha não serviu ao propósito de “ensinar ao aluno”, por outro, ela mostrou ser bastante reveladora no que tange à avaliação das dificuldades dos estudantes. Dentre elas, a maior dificuldade encontrada por eles foi a construção gráfica das funções e desenvolver exercícios que requisitem habilidades algébricas em sua resolução. Ainda que haja um predomínio do ensino de álgebra na educação básica, percebe-se, pelas atitudes dos estudantes, que este é feito de forma desorientada e sem sentido. Cabe destacar aqui, entretanto, que a participação nas atividades propostas pelos estudantes foi um facilitador que contribuiu para a conclusão da análise desta pesquisa.

A ficha de atividades respondida por professores formados foi aplicada com o intuito de perceber a competência de cada docente em relação aos assuntos propostos. Muitas das dificuldades dos alunos podem ser consequências das dificuldades de seus professores! Ainda que nenhum dos professores pesquisados fossem de fato professores dos alunos que participaram da pesquisa, estes representam um bom universo para ser investigado. Sete, dos dez professores que participaram do grupo investigado, fazem (ou fizeram) um curso de pós-graduação em Ensino de Matemática. São professores diferenciados que estão em busca de um aperfeiçoamento profissional. Com base nas respostas, percebe-se que a maioria dos pesquisados responderam todos os itens corretamente, não possuem qualquer dificuldade com relação às habilidades algébricas, porém o erro mais comum foi obtido na representação gráfica das sequências numéricas no plano cartesiano. Ainda que tenham feito um curso de Análise em suas graduações, não estão habituados a enxergar a PA ou PA de segunda ordem como uma função real. Logo, mesmo que estes professores não tenham lecionado para os alunos participantes da pesquisa, pode-se conjecturar que a dificuldade dos estudantes na representação gráfica das sequências esteja relacionada às próprias dificuldades de seus professores e do encaminhamento realizado por eles ao abordarem o assunto. Outro elemento que sobressai nas respostas dos professores é o desconhecimento deles a respeito da existência de Progressões Aritméticas de segunda ordem. Alguns, inclusive, revelaram que tiveram que pesquisar um pouco sobre o assunto a fim de responder o questionário. Outros, simplesmente, deixaram em branco os tópicos do questionário referente a esse tema. Assim, diante dessas dificuldades apresentadas pelos professores, acreditamos que esses conteúdos, aqui destacados, devem ser mais, e melhor, trabalhados nos cursos



de licenciatura em Matemática. O ensino de Cálculo e Análise, no ensino superior, estão longe e pouco articulados com o ensino de Funções Reais e Sequências Numéricas na Educação Básica.

Nesse sentido, pode-se dizer que essa pesquisa contribuiu para revelar esse hiato entre esses dois mundos: a formação dos professores e a sala de aula de matemática. Como trabalho futuro, deseja-se aperfeiçoar a sequência didática para que ela possa ser de fato uma boa partitura para o ensino desses assuntos, funções polinomiais e progressões aritméticas, no ensino básico.

## Referências Bibliográficas

BOTELHO, L. M. L. **Funções Polinomiais na Educação Básica: Uma Proposta.** Monografia (especialização) em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática. Niterói: UFF, 2005.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development.** New York: Dover Publications Inc., 1949.

BRAGA, E. R. **A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no Ensino Fundamental com o recurso da planilha.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: PUC, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Matemática e suas tecnologias, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

DANTE, L. R. **Matemática - Contexto & Aplicações.** 3ª edição. São Paulo: Editora Ática 2016.

DA SILVA, L. D. **Estudo da noção de taxa de variação no ensino médio.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

DEGENSZAJN, D., IEZZI, G., ALMEIDA, N., DOLCE, O., PÉRIGO, R. **Matemática: Ciência e Aplicações.** 9ª edição. São Paulo: Saraiva Educação, 2016.

EDUARDO, A.C. **Uma abordagem para iniciação à prova no EM utilizando P.A.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2007.

GONÇALVES FILHO, L. **Modelagem Matemática e o ensino de Função de 1º Grau.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2011.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. 5ª ed. Vol.1. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos S.A., 2001.

IEZZI, G., HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar – vol. 4**. 8ª edição. São Paulo: Atual editora, 2012.

KÁTIA STOCCO, K., DINIZ, M. I. **Matemática para Compreender o Mundo**. 1ª edição. São Paulo: Saraiva Educação, 2016.

LIMA, E.L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática**. Volume 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003. 455 pp.

REZENDE, W. M. **Galileu e as Novas Tecnologias no Estudo das Funções Reais no Ensino Básico**. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 4, 2008, Rio de Janeiro. Anais do IV HTEM. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. CD-ROM.

REZENDE, W. M., BORTOLOSSI, H. J. e PESCO, D. U. **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra**. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra. PUC-SP. ISSN 2237-9657, pp.74 - 89, 2012.

REZENDE, W. M. **Funções Polinomiais e o Mundo Digital**. Projeto Klein. SBM. 2013. Acesso em jan/2018. Disponível em <http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/17/2016/02/Func%CC%A7o%CC%83es-Polinomiais-e-o-mundo-digital2.pdf>

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012

SALOMÃO, P. R. **Argumentação e Prova na matemática do Ensino Médio: Progressões Aritméticas e o uso das tecnologias**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2007.

SCANO, F. C. **Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2009.

SCHÖNARDIE, B. **Modelagem Matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

SIQUEIRA, D. M. **Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: USP, 2013.

WALLE, V.D.; JOHN, A. **Matemática do ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6ª edição. Porto Alegre: Saraiva, 2009.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century.** Archive for History of Exact Sciences, 16, pp. 37-85. 1976/77.

## Anexo 1

Ficha de atividades aplicada com os alunos:

### Pesquisa – Dissertação

**Thiago Silva do Nascimento**

**Orientador: Wanderley Moura Rezende**

**Aluno:** \_\_\_\_\_

#### **FICHA 01: Função polinomial de grau 1:**

**Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3.**

**Levar o aluno a perceber - aritmética, algébrica e graficamente - que uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , define uma PA. No exercício 1, a função é crescente, no 2, a função é decrescente e no exercício 3, considera-se o caso geral.**

**Exercício 1 – Considere a função  $f$  definida por:**

**$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $f(n) = 2n - 1$**

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = f(n) = 2n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $f$ :  $(1, f(1)) ; (2, f(2)) ; (3, f(3)) ; (4, f(4)) ; (5, f(5)) ; (6, f(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$$f(2) - f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(3) - f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(4) - f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(5) - f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(6) - f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

**Resposta:**

**Exercício 02 – Considere agora a função  $g$  definida por:**

**$g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $g(n) = -3n + 7$**

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

n =	y = g(n) = -3n + 7
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função g: (1, g(1)); (2, g(2)); (3, g(3)); (4, g(4)); (5, g(5)); (6, g(6)):

c) Calcule os seguintes valores:

$$g(2) - g(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(3) - g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(4) - g(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(5) - g(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(6) - g(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

Exercício 03 – Considere agora a função h definida por:

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $h(n) = an + b$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

n =	y = h(n) = an + b
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Calcule os seguintes valores:

$$h(2) - h(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(3) - h(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(4) - h(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(5) - h(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(6) - h(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

d) Você tem alguma ideia de como seria o gráfico de h? Escolha um valor para **a** e um valor para **b** e faça o gráfico de  $h(n) = an + b$ :

e) Compare o seu resultado com o do colega do lado. O que esses gráficos têm em comum?

**FICHA 02: Progressão aritmética:**

Com as atividades acima você deve ter percebido que para qualquer função

$f: \mathbb{IN} \rightarrow \mathbb{IR}$ ,  $f(n) = an + b$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{IR}$  tem as seguintes propriedades:

- (i) O gráfico de  $f$  é uma sequência de pontos contido em uma reta;
- (ii) A diferença de dois valores consecutivos,  $f(n + 1) - f(n)$  tem sempre o mesmo valor.

Quando isso acontece dizemos que a função  $f$  é uma progressão aritmética (PA) de razão igual a  $a$ , onde o primeiro termo da PA é  $f(1)$ .

**Definição:** Uma PA é uma função  $f: \mathbb{IN} \rightarrow \mathbb{IR}$  definida por  $f(n) = an + b$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{IR}$

**Notação:** Em geral podemos representar uma PA apenas pelos valores imagens da função do seguinte modo. Exemplos:

1)  $f(n) = 2n - 1$

$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7, \dots, f(n) = 2n - 1$

Ou ainda, de outro modo,

$f_1 = 1, f_2 = 3, f_3 = 5, f_4 = 7, \dots, f_n = 2n - 1$

2)  $g(n) = -3n + 7$

$g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = -2, g(4) = -5, \dots, g(n) = -3n + 7$

Ou ainda, de outro modo,

$g_1 = 4, g_2 = 1, g_3 = -2, g_4 = -5, \dots, g(n) = -3n + 7$

Resolva agora os seguintes exercícios:

**Objetivo do exercício 1.**

Levar o aluno a identificar aritmética e algebricamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{IN}^* \rightarrow \mathbb{IR}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a > 0$ .

Exercício 1 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = 3n - 5$ .

**Objetivo do exercício 2.**

Levar o aluno a identificar graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{IN}^* \rightarrow \mathbb{IR}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a > 0$ .

Exercício 2 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Objetivo dos exercícios 3 e 4:

Levar o aluno a realizar comparações dos exercícios resolvidos por eles e outros alunos, perceber também a diferença entre os exercícios anteriores.

Exercício 3 – Compare com a solução do colega ao lado.

Exercício 4 – Agora Compare o que você encontrou no exercício anterior com o gráfico a seguir. O que você observou?

Objetivo do exercício 5.

Levar o aluno a identificar aritmética e algébrica a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -4n + 6$ .

Objetivo do exercício 6.

Levar o aluno a identificar graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 6 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Objetivo do exercício 7.

Levar o aluno a realizar comparações dos exercícios resolvidos por eles e outros alunos.

Exercício 7 – Compare com a solução do colega ao lado.

Objetivo do exercício 8.

Levar o aluno a identificar aritmética e algébrica a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 8 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -2n - 4$ .

Objetivo: do exercício 9.

Levar o aluno a identificar graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .



Exercício 9 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

**Objetivo do exercício 10.**

Levar o aluno a realizar comparações dos exercícios resolvidos por eles e outros alunos.

Exercício 10 – Compare com a solução do colega ao lado

### **Ficha 03: Função e Progressão:**

**Objetivo do exercício 1.**

Levar o aluno a determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada.

Exercício 1 – Considere a PA  $f_1 = 3, f_2 = 7, f_3 = 11, \dots$

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = \_\_\_\_\_ Razão = \_\_\_\_\_

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

c) Faça o gráfico da PA.

**Objetivo do exercício 2.**

Levar o aluno a determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada a sua razão e o primeiro termo.

Exercício 2 – Considere uma PA de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3. Determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

#### **Fórmula do termo geral de uma PA (DANTE, 2013, p.215):**

Em uma PA  $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$  de razão  $r$ , partindo do 1º termo, para avançar um termo basta somar  $r$  ao 1º termo ( $f_2 = f_1 + r$ ); para avançar dois termos basta somar  $2r$  ao 1º termo ( $f_3 = f_1 + 2r$ ); para avançar três termos basta somar  $3r$  ao 1º termos ( $f_4 = f_1 + 3r$ ); e assim por diante.

Desse modo encontramos o termo de ordem  $n$ , denominado termo geral da PA, que é dado por:

$$f_n = f_1 + (n - 1)r$$

#### Ficha 04 – Função polinomial do primeiro grau

Possivelmente, você já estudou funções polinomiais do primeiro grau (ou função afim). A seguir, precisamos que você relembre alguns tópicos relacionados a esse conteúdo:

##### 1 - Definição de função polinomial do primeiro grau

Def. – (LIMA, 2013) Definição de uma função polinomial de grau 1:

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se polinomial de grau 1 quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

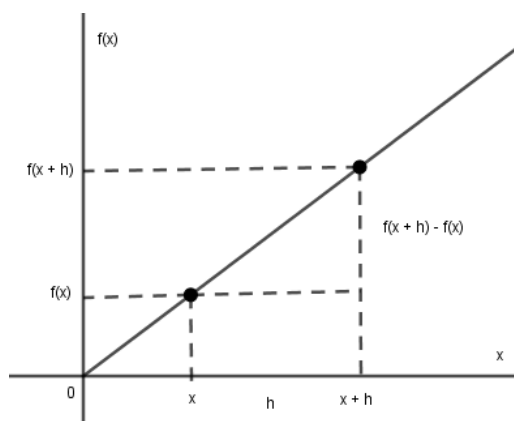
2 - Como o gráfico da função polinomial de grau 1  $f$  é uma reta, para esboçar o gráfico da função basta traçar uma reta que passa por dois pontos distintos do plano determinado pelos valores de  $f$  em dois pontos distintos do seu domínio:  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

##### 3 – Taxa de variação média:

Def. – (DANTE, 2016) Taxa de variação média da função polinomial de grau 1

Em qualquer função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quando acrescentamos  $h$  à variável  $x$ , passando de  $x$  para  $x + h$ , em correspondência, um acréscimo  $f(x + h) - f(x)$  no valor da função.

Dados  $x$  e  $x + h$  números reais, com  $h \neq 0$ , o número 
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
 chama-se **taxa de variação média da função  $f$  no intervalo  $[x, x + h]$ ,  $h = x_2 - x_1$ .**



Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3.

Levar o aluno a perceber que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1 não depende do intervalo escolhido. No exercício 3 o aluno deve calcular e perceber que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$  é igual a  $a$ .

Exercício 1:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = 2x - 3$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$
- d) O que observou?

Exercício 2:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = -x + 5$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$
- d) O que observou?

Exercício 3:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$
- d) O que observou?
- e) Compare seu resultado com o do colega
- f) Determine a taxa de variação de  $f(x) = ax + b = \underline{\hspace{2cm}}$

#### **Ficha 05 - Progressão aritmética:**

Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3.

Levar o aluno a perceber que dada uma PA  $x_n$  no eixo  $Ox$ , e uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA

Exercício 1:

Considere a função polinomial  $f(x) = 7x - 9$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))$ ?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(5) - f(2) =$$

$$f(8) - f(5) =$$

$$f(11) - f(8) =$$

$$f(14) - f(11) =$$

$$f(17) - f(14) =$$

$$f(20) - f(17) =$$

$$f(23) - f(20) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

Exercício 2:

Considere a função polinomial  $f(x) = -3x + 5$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))$ ?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(5) - f(2) =$$

$$f(8) - f(5) =$$

$$f(11) - f(8) =$$

$$f(14) - f(11) =$$

$$f(17) - f(14) =$$

$$f(20) - f(17) =$$

$$f(23) - f(20) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

Exercício 3:

Considere a função polinomial  $f(x) = -3x + 7$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (15, 10, 5, 0, -5, -10, -15, -20).

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(15), f(10), f(5), f(0), f(-5), f(-10), f(-15), f(-20))$ ? Será que podemos afirmar que  $f(x_n)$  também será uma PA?

## FICHA 06 – Função polinomial de grau 2:

Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3.

Levar o aluno a perceber que o gráfico de uma sequência  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , a diferente de 0, encontra-se em um arco de parábola e que os valores de  $f(n+1) - f(n)$  são iguais.

Exercício 1 – Considere a função  $f$  definida por:

$$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde: } f(n) = n^2 - 5n + 3$$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = f(n) = n^2 - 5n + 3$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $f$ :  $(1, f(1))$ ;  $(2, f(2))$ ;  $(3, f(3))$ ;  $(4, f(4))$ ;  $(5, f(5))$ ;  $(6, f(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$f(2) - f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f(5) - f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(3) - f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f(6) - f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(4) - f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$	

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

Exercício 02 – Considere agora a função  $g$  definida por:

$$g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde: } g(n) = -n^2 + 7n - 5$$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = g(n) = -n^2 + 7n - 5$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $g$ :  $(1, g(1))$ ;  $(2, g(2))$ ;  $(3, g(3))$ ;  $(4, g(4))$ ;  $(5, g(5))$ ;  $(6, g(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$$g(2) - g(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(3) - g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(4) - g(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(5) - g(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(6) - g(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

Exercício 03 – Considere agora a função  $h$  definida por:

$$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde: } h(n) = an^2 + bn + c$$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = h(n) = an^2 + bn + c$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Calcule os seguintes valores:

$$h(2) - h(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(3) - h(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(4) - h(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(5) - h(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(6) - h(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

d) Você tem alguma ideia de como seria o gráfico de  $h$ ? Escolha um valor para **a** e um valor para **b** e faça o gráfico de  $h(n) = an^2 + bn + c$ :

## FICHA 07 – Progressão aritmética de segunda ordem:

**Definição:** Uma PA de segunda ordem é uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$

**Notação:** Em geral podemos representar uma PA apenas pelos valores imagens da função do seguinte modo. Exemplos:

1)  $f(n) = n^2 - 5n + 3$

$f(1) = -1, f(2) = -3, f(3) = -3, f(4) = -1, f(5) = 3, f(6) = 9, \dots, f(n) = n^2 - 5n + 3$   
(-1, -3, -3, -1, 3, 9, ...)

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos:

(-2, 0, 2, 4, 6)

Ou ainda, de outro modo,

$f_1 = -1, f_2 = -3, f_3 = -3, f_4 = -1, \dots, f_n = n^2 - 5n + 3$

2)  $g(n) = -n^2 + 7n - 5$

$g(1) = 1, g(2) = 5, g(3) = 7, g(4) = 7, g(5) = 5, g(6) = 1, \dots, g(n) = -n^2 + 7n - 5$

Desenvolvendo a diferença entre os termos consecutivos:

(4, 2, 0, -2, -4)

Ou ainda, de outro modo,

$g_1 = 4, g_2 = 1, g_3 = -2, g_4 = -5, \dots, g(n) = -n^2 + 7n - 5$

Resolva agora os seguintes exercícios:

**Objetivos dos exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.**

Levar o aluno a determinar o primeiro termo, a razão e o gráfico de uma PA de segunda ordem  $f_n$ , dada por  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , a diferente de 0.

Exercício 1 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da PA de segunda ordem  $f(n) = n^2 - 8n + 6$ .

Exercício 2 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Exercício 3 – Compare com a solução do colega ao lado.

Exercício 4 – Agora Compare o que você encontrou no exercício anterior com o gráfico a seguir. O que você observou?

Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da PA  $f(n) = -n^2 + 6n - 4$ .

Exercício 6 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Exercício 7 – Compare com a solução do colega ao lado.

Exercício 8 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -2n - 4$ .

Exercício 9 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Exercício 10 – Compare com a solução do colega ao lado

### **Ficha 08 – Função e Progressão:**

#### **Objetivo do exercício 1.**

Levar o aluno a determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada.

Exercício 1 – Considere a PA  $f_1 = 5, f_2 = 7, f_3 = 11, f_4 = 17, f_5 = 25 \dots$

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = \_\_\_\_\_ Razão = \_\_\_\_\_

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

c) Faça o gráfico da PA.

#### **Objetivo do exercício 2.**

Levar o aluno a determinar algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada o seu primeiro termo e sua razão.

Exercício 2 – Considere uma PA de razão de segunda ordem de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3 e o segundo termo é 0.

Monte a PA de segunda ordem e determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.



## Anexo 2

Ficha de atividades aplicada com os professores:

### Pesquisa – Dissertação

**Thiago Silva do Nascimento**

**Orientador: Wanderley Moura Rezende**

**Professor(a):** \_\_\_\_\_

#### **FICHA 01: Função polinomial de grau 1:**

Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3:

Verificar se o professor percebe - aritmética, algébrica e graficamente - que uma função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , define uma PA. No exercício 1, a função é crescente, no 2, a função é decrescente e no exercício 3, considera-se o caso geral.

Exercício 1 – Considere a função  $f$  definida por:

$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $f(n) = 2n - 1$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = f(n) = 2n - 1$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $f$ :  $(1, f(1)) ; (2, f(2)) ; (3, f(3)) ; (4, f(4)) ; (5, f(5)) ; (6, f(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$$f(2) - f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(3) - f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(4) - f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(5) - f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(6) - f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

Exercício 02 – Considere agora a função  $g$  definida por:

$g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $g(n) = -3n + 7$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

n =	y = g(n) = -3n + 7
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função g: (1, g(1)); (2, g(2)); (3, g(3)); (4, g(4)); (5, g(5)); (6, g(6)):

c) Calcule os seguintes valores:

$$g(2) - g(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(3) - g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(4) - g(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(5) - g(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$g(6) - g(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

Exercício 03 – Considere agora a função h definida por:

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $h(n) = an + b$

e) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

n =	y = h(n) = an + b
1	
2	
3	
4	
5	
6	

f) Calcule os seguintes valores:

$$h(2) - h(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(3) - h(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(4) - h(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(5) - h(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(6) - h(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

g) O que você observou com os valores encontrados acima?

Resposta:

h) Você tem alguma ideia de como seria o gráfico de h? Escolha um valor para a e um valor para b e faça o gráfico de  $h(n) = an + b$ :

## **FICHA 02: Progressão aritmética:**

### Objetivo do exercício 1:

Verificar se o professor identifica, aritmética e algebricamente, a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a > 0$ .

Exercício 1 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = 3n - 5$ .

### Objetivo do exercício 2:

Verificar se o professor identifica graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a > 0$ .

Exercício 2 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

### Objetivo do exercício 3:

Verificar se o professor identifica, aritmética e algebricamente, a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 3 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -4n + 6$ .

### Objetivo do exercício 4:

Verificar se o professor identifica graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 4 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

### Objetivo do exercício 5:

Verificar se o professor identifica, aritmética e algebricamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -2n - 4$ .

### Objetivo: do exercício 6:

Verificar se o professor identifica graficamente a razão e o primeiro termo de uma PA definida por uma função polinomial de grau 1,  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , com  $a < 0$ .

Exercício 6 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

**Ficha 03: Função e Progressão:**

Objetivo do exercício 1 da ficha 3.

Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada.

Exercício 1 – Considere a PA  $f_1 = 3, f_2 = 7, f_3 = 11, \dots$

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = \_\_\_\_\_ Razão = \_\_\_\_\_

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

c) Faça o gráfico da PA.

Objetivo do exercício 2:

Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 1,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an + b$ , que define a PA dada a sua razão e o primeiro termo.

Exercício 2 – Considere uma PA de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3. Determine a expressão  $f(n) = an + b$  que define a PA.

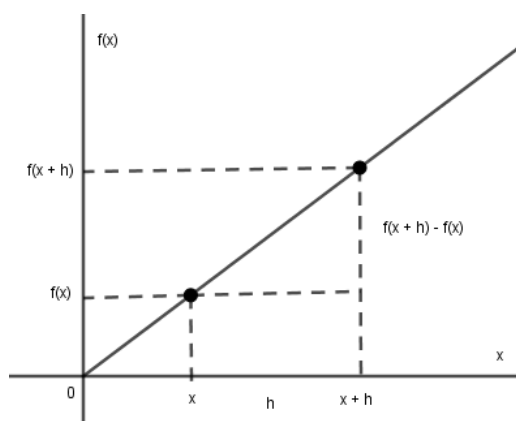
Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

## Ficha 04 – Função polinomial do primeiro grau

### 1 – Taxa de variação média:

Def. – (DANTE, 2016) Taxa de variação média da função polinomial de grau 1  
Em qualquer função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quando acrescentamos  $h$  à variável  $x$ , passando de  $x$  para  $x + h$ , em correspondência, um acréscimo  $f(x + h) - f(x)$  no valor da função.

Dados  $x$  e  $x + h$  números reais, com  $h \neq 0$ , o número  
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
 chama-se **taxa de variação média da função  $f$  no intervalo  $[x, x + h]$ ,  $h = x_2 - x_1$ .**



### Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3:

Verificar se o professor reconhece que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1 não depende do intervalo escolhido. No exercício 3 o professor deve reconhecer que a taxa de variação média de uma função polinomial de grau 1  $f(x) = ax+b$  é igual a  $a$ .

#### Exercício 1:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = 2x - 3$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$

#### Exercício 2:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = -x + 5$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$

Exercício 3:

Dada a função polinomial de grau 1  $f(x) = ax + b$ , determine:

- a) Taxa de variação da função no intervalo:  $[0,1]$ .
- b) Taxa de variação da função no intervalo:  $[1,3]$ .
- c) Taxa de variação da função no intervalo:  $[-1,1]$
- d) O que observou?
- e) Determine a taxa de variação de  $f(x) = ax + b =$  \_\_\_\_\_

## Ficha 05 - Progressão aritmética:

### Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3:

Verificar se o professor reconhece que dada uma PA  $x_n$  no eixo Ox, e uma função polinomial de grau 1,  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x_n)$  é uma PA.

#### Exercício 1:

Considere a função polinomial  $f(x) = 7x - 9$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência (f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(5) - f(2) =$$

$$f(8) - f(5) =$$

$$f(11) - f(8) =$$

$$f(14) - f(11) =$$

$$f(17) - f(14) =$$

$$f(20) - f(17) =$$

$$f(23) - f(20) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

#### Exercício 2:

Considere a função polinomial  $f(x) = -3x + 5$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência (f(2), f(5), f(8), f(11), f(14), f(17), f(20), f(23))?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(5) - f(2) =$$

$$f(8) - f(5) =$$

$$f(11) - f(8) =$$

$$f(14) - f(11) =$$

$$f(17) - f(14) =$$

$$f(20) - f(17) =$$

$$f(23) - f(20) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

#### Exercício 3:

Considere a função polinomial  $f(x) = -3x + 7$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (15, 10, 5, 0, -5, -10, -15, -20).

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência (f(15), f(10), f(5), f(0), f(-5), f(-10), f(-15), f(-20))?

Será que podemos afirmar que  $f(x_n)$  também será uma PA?

**FICHA 06 – Função polinomial de grau 2:**

Objetivos dos exercícios 1, 2 e 3:

Verificar se o professor percebe que o gráfico de uma sequência  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a$  diferente de 0, encontra-se em um arco de parábola e que os valores de  $f(n+1) - f(n)$  são iguais.

Exercício 1 – Considere a função  $f$  definida por: $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $f(n) = n^2 - 5n + 3$ 

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = f(n) = n^2 - 5n + 3$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $f$ :  $(1, f(1))$ ;  $(2, f(2))$ ;  $(3, f(3))$ ;  $(4, f(4))$ ;  $(5, f(5))$ ;  $(6, f(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$f(2) - f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(5) - f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(3) - f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(6) - f(5) = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(4) - f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$

Exercício 02 – Considere agora a função  $g$  definida por: $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $g(n) = -n^2 + 7n - 5$ 

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = g(n) = -n^2 + 7n - 5$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Represente os pontos no plano cartesiano a seguir os seguintes pontos do gráfico da função  $g$ :  $(1, g(1))$ ;  $(2, g(2))$ ;  $(3, g(3))$ ;  $(4, g(4))$ ;  $(5, g(5))$ ;  $(6, g(6))$ :

c) Calcule os seguintes valores:

$g(2) - g(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(5) - g(4) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(3) - g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(6) - g(5) = \underline{\hspace{2cm}}$

$g(4) - g(3) = \underline{\hspace{2cm}}$



Exercício 03 – Considere agora a função  $h$  definida por:  
 $h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:  $h(n) = an^2 + bn + c$

a) Complete a tabela, determinando os valores da função nos pontos indicados:

$n =$	$y = h(n) = an^2 + bn + c$
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Calcule os seguintes valores:

$$h(2) - h(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(3) - h(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(4) - h(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(5) - h(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h(6) - h(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Você tem alguma ideia de como seria o gráfico de  $h$ ? Escolha um valor para  $a$  e um valor para  $b$  e faça o gráfico de  $h(n) = an^2 + bn + c$ :

### **FICHA 07 – Progressão aritmética de segunda ordem:**

Objetivos dos exercícios 1, 2, 3, 4, 5 e 6:

Verificar se o professor determina o primeiro termo, a razão e o gráfico de uma PA de segunda ordem  $f_n$ , dada por  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , a diferente de 0.

Exercício 1 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da PA de segunda ordem  $f(n) = n^2 - 8n + 6$ .

Exercício 2 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Exercício 3 – Determine o primeiro termo e a razão (desenvolvendo os seis primeiros termos) da PA  $f(n) = -n^2 + 6n - 4$ .

Exercício 4 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

Exercício 5 – Determine o primeiro termo e a razão da PA  $f(n) = -2n^2 - 4$ .

Exercício 6 – Esboce o gráfico de  $f$  e identifique no gráfico o primeiro termo  $f_1$  e a razão.

### Ficha 08 – Função e Progressão:

Objetivo do exercício 1.

Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada.

Exercício 1 – Considere a PA  $f_1 = 5, f_2 = 7, f_3 = 11, f_4 = 17, f_5 = 25 \dots$

a) Quais são os valores da razão e do primeiro termo da PA?

Primeiro termo = \_\_\_\_\_ Razão = \_\_\_\_\_

b) Usando o item anterior, determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.

Sugestão: tente lembrar como encontramos o primeiro termo e a razão dada a expressão da função  $f(n)$ .

c) Faça o gráfico da PA.

Objetivo do exercício 2.

Verificar se o professor determina algébrica e graficamente a função polinomial de grau 2,  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(n) = an^2 + bn + c$ , que define a PA dada o seu primeiro termo e sua razão.

Exercício 2 – Considere uma PA de razão de segunda ordem de razão  $(-2)$  cujo primeiro termo é o número 3 e o segundo termo é 0.

Monte a PA de segunda ordem e determine a expressão  $f(n) = an^2 + bn + c$  que define a PA.

## Anexo 3

### Ficha 09 – Progressão aritmética de segunda ordem:

Exercício 1:

Considere a função polinomial  $f(x) = x^2 - 2x + 9$  e  $x_n$  uma PA de segunda ordem no eixo OX definida por (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência (f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), f(12), f(14))?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(4) - f(2) =$$

$$f(6) - f(4) =$$

$$f(8) - f(6) =$$

$$f(10) - f(8) =$$

$$f(12) - f(10) =$$

$$f(14) - f(12) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

Exercício 2:

Considere a função polinomial  $f(x) = -x^2 + 2x + 5$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência (f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), f(12), f(14))?

b) Não conseguiu responder ao item anterior? Faça então os seguintes cálculos:

$$f(4) - f(2) =$$

$$f(6) - f(4) =$$

$$f(8) - f(6) =$$

$$f(10) - f(8) =$$

$$f(12) - f(10) =$$

$$f(14) - f(12) =$$

c) Então, o que você observou em relação às diferenças entre os termos consecutivos de  $f(x_n)$ ?

Exercício 3:

Considere a função polinomial  $f(x) = -x^2 + x + 7$  e  $x_n$  uma PA no eixo OX definida por  $(20, 17, 12, 5, -4, -15, -28)$ .

a) O que podemos afirmar sobre a sequência de  $f(x_n)$ ? Isto é, o que podemos dizer sobre a sequência  $(f(20), f(17), f(14), f(11), f(8), f(5), f(2))$ ?

Será que podemos afirmar que  $f(x_n)$  também será uma PA?