UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Angelita Possamai

QUADRADOS MÁGICOS

Florianópolis

2020

Angelita Possamai

QUADRADOS MÁGICOS

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Possamai, Angelita
Quadrados Mágicos / Angelita Possamai ; orientadora, Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2020.
82 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Quadrados mágicos. 3. Regra prática para preencher um Quadrado Mágico. 4. Atividades sobre Quadrados Mágicos. 5. Questões Olímpicas e do Banco de Questões sobre Quadrado Mágico. I. Gonçalves, Maria Inez Cardoso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Angelita Possamai

QUADRADOS MÁGICOS

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht
UFSC

Prof. Dr. Vinícius Viana Luiz Albani
Profmat-UFSC

Dr. Raphael Falcão da Hora
Profmat-UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso
Data: 03/03/2020 11:01:14-0300
CPF: 908.897.119-68

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso
Data: 03/03/2020 11:01:50-0300
CPF: 908.897.119-68

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientadora

Florianópolis, 13 de Fevereiro 2020.

Primeiramente dedico este trabalho a Deus, pelo dom da vida e aos ensinamentos dos meus pais (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu companheiro de todas as horas Augusto Eduardo Althoff, que sempre esteve comigo me incentivando e apoiando nas horas mais difíceis deste mestrado, pelo meu colega de trabalho, Maicon Teixeira de Matos que fez com que eu fizesse o exame de acesso ao PROFMAT, por todos os meus colegas e, em especial a Valmiré de Aguiar, Graça Aparecida Prestes Sabadini, Marlene Jucelia Beloli Stairk, Karine Luiz Calegari Mrotskoski pelo companheirismo nos estudos, caronas.

Á todos os meus mestres que não mediram esforços para transmitir seus conhecimentos, e em especial a professora Dra. Maria Inez Gonçalves, que me sugeriu este tema "Quadrados Mágicos", e que sempre me fascinou, e também por orientar para que esta dissertação fosse concluída com êxito.

E aqui não posso deixar de registrar o meu agradecimento a Prefeitura Municipal de Içara, na pessoa do Prefeito Municipal Sr. Murialdo Canto Gastaldon e da Secretária de Educação, Sra. Gerusa Bolsoni que depositaram toda a confiança em minha pessoa e no meu trabalho, para que eu pudesse participar das aulas do PROFMAT na UFSC-Florianópolis.

"Cada segundo é tempo para mudar tudo para sempre."

Charles Chaplin

RESUMO

Nesta dissertação serão descritos os quadrados mágicos, citando exemplos de alguns tipos e dando enfoque a regra de formação do "Quadrado Mágico Tradicional ou Puro", que possui, além das características básicas, outros aspectos, como os números usados para o seu preenchimento são consecutivos e começam a partir do número 1 até o número n^2. Não é possível ter uma única regra para a construção dos mesmos. Dependendo do número de linhas/colunas que possuem, tem-se três maneiras de preenchê-los: o primeiro para os quadrados mágicos com o número de linhas/colunas ímpares $(3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7, \ldots)$, para os quadrados mágicos com números de linhas/colunas pares, múltiplos do número 2 e não múltiplos do número 4 $(6 \times 6, 10 \times 10, 14 \times 14, \ldots)$ e os quadrados mágicos com o número de linhas/colunas múltiplos de 4 $(4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, \ldots)$. Na sequência apresenta-se alguns exercícios envolvendo quadrados mágicos onde, você professor pode utilizar com seus alunos em sala de aula.
Palavras-chave: Quadrado mágico. Quadrado mágico tradicional. Constante mágica. Elemento central.

ABSTRACT

In this dissertation, the magic squares are selected, citing examples of some types and focusing on the training rule "Traditional or Pure Magic Square", which has, in addition to the basic characteristics, other aspects, such as the numbers used to fill in them. consecutive and start from number 1 to number n^2. It is not possible to have a single rule for building them. Depending on the number of rows / columns you have, there are three ways to fill: the first for magic squares with the odd number of rows / columns $(3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7, \ldots)$, for the magic squares with row numbers / even columns, multiples of the number 2 and not multiples of the number 4 $(6 \times 6, 10 \times 10, 14 \times 14, \ldots)$ and the magic squares with the number of rows / columns multiple of 4 $(4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, \ldots)$. Following are some exercises involving magic graphics that the teacher can use with his students in the classroom.
Keywords: Magic square. Traditional magic square. Magic constant. Central element.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os quadrados mágicos podem ser vistos como tabelas quadradas, ou seja, tabelas com o mesmo número de linhas e colunas, as quais são completadas com números (elementos) de maneira que a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal (diagonal principal e diagonal secundária) seja sempre um mesmo número, chamado de constante mágica. Normalmente os números usados são $1, 2, 3, \ldots, n^2$, no caso de um quadrado mágico com n linhas e n colunas. A constante mágica depende da ordem do quadrado mágico, ou seja, do número de linhas e colunas, bem como dos números que serão usados para preencher o quadrado mágico. Conforme a quantidade de linhas/colunas, este quadrado possui uma constante mágica específica. Por exemplo, um quadrado mágico puro ou tradicional 3×3, possui 3 linhas e 3 colunas, e tem como constante mágica o número 15, que é igual a 3 vezes o elemento central de 1 a 9, que é o 5 (mediana), logo $3 \times 5 = 15$.

A construção de quadrados mágicos é um assunto bastante antigo e intrigante, o qual despertou, ao longo dos anos, o interesse não só de matemáticos e pessoas que se interessam por curiosidades matemáticas, mas também de artistas e religiosos, (FULTS, 1974; MORAN, 1982; PICKOVER, 2002). Parte deste interesse se deve ao fato da simplicidade de compreender a sua definição e dos desafios propostos para a sua solução. Atualmente, os quadrados mágicos estão cada vez mais presentes nas escolas, podendo ser usados simplesmente como ferramenta para despertar o interesse dos alunos por desafios matemáticos, aparecendo, por exemplo, em questões da Olimpíada de Matemática, mas também para auxiliar no ensino de tópicos como os conjuntos dos números naturais, inteiros e fracionários, progressões aritméticas, matrizes, sistemas de equações lineares e etc, (GADOTTI et al., 2013; MACHADO, 2013).

No capítulo 2, apresentamos um pouco do desenvolvimento histórico, como surgiram, em especial a lenda contada sobre o seu surgimento no casco de uma tartaruga encontrada pelo imperador Yu, no rio Lo, contada há cerca de 2800 a.C. na China.

No terceiro capítulo, apresentamos a definição de quadrado mágico, com a sua principal característica, de que a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é um mesmo número, chamada "constante mágica", e ainda que existem quadrados mágicos que possuem além destas, outras características e até quadrados mágicos que não são tão mágicos por assim dizer. Neste capítulo, destacam-se alguns destes tipos de quadrados mágicos, exemplificando para a melhor compreensão destas propriedades.

No capítulo 4, veremos com detalhes, de maneira prática e objetiva, as regras de como preencher um quadrado mágico tradicional. Existem vários métodos utilizados para a construção dos quadrados mágicos, (FULTS, 1974; PICKOVER, 2002). Procuramos aqui enunciar regras simples de serem utilizadas e acessível para ser repassadas aos alunos das séries finais do ensino fundamental. No entanto, não é possível obter uma única regra prática geral para a construção de um quadrado mágico de ordem qualquer. Mas é possível estabelecer uma regra de construção de acordo com a ordem do quadrado mágico, dividindo-os em três classes: os de ordem ímpar, aqueles em que a ordem é um múltiplo de 2 mas não de 4 e os que a ordem é um múltiplo de 4. Além do detalhamento das regras, apresentamos também, detalhadamente, os exemplos de cada uma destas classes, destacando para cada caso a sua constante mágica, o seu elemento central (mediana) e a soma dos elementos de 1 até n^2, para que o leitor possa facilmente acompanhar.

E no capítulo 5, serão apresentados alguns exercícios resolvidos, envolvendo quadrados mágicos para uso em sala de aula, a partir do ensino fundamental II, com a utilização dos números naturais, inteiros ou racionais. Os passatempos, que aparecem em jornais e revistas, os chamados Sudoku. Questões Olímpicas da OBMEP, ou seja, questões que já se fizeram presentes nas Olimpíadas de matemática das escolas públicas e também as atividades do Banco de Questões para estudo e fixação, o qual se encontram na página da OBMEP, disponível para alunos, professores e o público em geral, com as suas respectivas soluções.

2 UMA BREVE HISTÓRIA DOS QUADRADOS MÁGICOS

Os quadrados mágicos são considerados um dos desafios matemáticos mais antigos e intrigantes. Há cerca de quatro mil anos atrás, foi descoberto que um conjunto de números naturais podia ser escrito em um quadrado, no formato de um jogo de xadrez, em que a soma dos números contidos em cada linha, coluna e diagonais seriam iguais a uma constante, (FULTS, 1974).

Acredita-se que o primeiro quadrado mágico foi conhecido em torno de 2800 a.C. na China. A lenda do quadrado mágico conta que o imperador Yu, da Dinastia Hsia, costumava caminhar com frequência nas margens do rio Lo (rio Amarelo, em chinês), até que em um certo dia, observou a presença de uma tartaruga, a qual possuía um casco diferente, onde se podia notar as marcas de pontos e alguns quadros, conforme a Figura 1. O imperador pegou a tartaruga pela cauda e começou a contar os pontos e os quadros, observando que cada quadrado continha quantidades diferentes de pontos, que variava de um a nove, e, para seu espanto notou que a quantidade de pontos em cada linha, coluna e diagonal era de 15 pontos. A este padrão encontrado no casco da tartaruga, deu-se o nome de Lo [1] Shu [2].

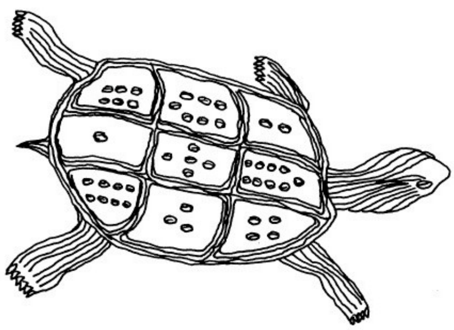

Figura 1 – Tartaruga encontrada pelo Imperador Yu no rio Lo.(FULTS, 1974)

Os quadrados mágicos que se originaram na China com o imperador Yu, se espalharam para a Índia e Japão, onde vários estudos foram feitos no primeiro século d.C. Estes tipos de quadrados foram aparecendo como decorações e com o passar dos anos surgiram em diversas regiões do mundo oriental (FULTS, 1974). Considerados sagrados pelos países da Ásia, acredita-se que o primeiro registro de um quadrado mágico de ordem 4, ou seja, com quatro linhas e quatro colunas, deu-se em 1100 d.C. no portão da pequena

[1]Lo significa rio.
[2]shu significa livre

cidade Klajuraho, localizada no estado de Madhya Pradesh, na Índia Central. Na Europa, os quadrados mágicos ficaram conhecidos a partir da obra "Tratado de Quadrados Mágicos" do escritor Manuel Moschopoulos, um nativo de Constantinopla (atual Istambul na Turquia), a partir do século XV.

No Ocidente, o primeiro registro que se tem sobre os quadrados mágicos foi trazido pelo alemão Cornelius Agrippa (1486-1535) em sua obra "De Oculta Philosophia", na qual ficou encantado pelos quadrados mágicos (FULTS, 1974). Cornelius se aprofundou no estudo dos quadrados mágicos de diversas ordens, os quais associou com os sete planetas conhecidos na época: Saturno, Júpiter, Marte, Vênus, Mercúrio, a Lua e o Sol. Os quadrados mágicos também influenciaram artistas como o alemão Albrecht Dürer (1471 – 1528), que registrou um quadrado mágico de ordem 4, observado na Figura 2, na gravura Melancolia I. O quadrado de Dürer tem uma particularidade de que através da indicação da asa do anjo, se observa a data em que a gravura foi executada: 1514, ou seja, os quatro algarismos centrais, pertencentes aos dois quadrados centrais da última linha.

Desde o século XVII muitos matemáticos e leigos, vem estudando os quadrados mágicos e tem sido um assunto interessante e intrigante em diversos países. "Ainda hoje os quadrados mágicos servem de amuleto no Tibete, na Índia e em grande parte do Sudeste da Ásia", (GADOTTI et al., 2013).

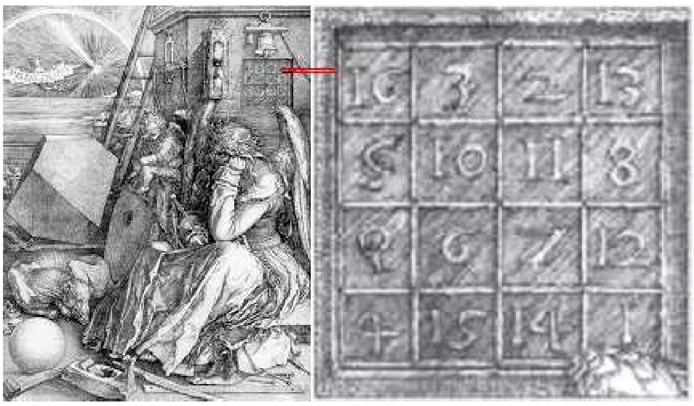

Figura 2 – Quadrado mágico na obra Melancolia I, do alemão Albrecht Durer.(PICKOVER, 2002)

Para (SANTINHO; MACHADO., 2006),

> despertaram também interesse em alguns matemáticos, pelos problemas difíceis que originaram, em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma dada ordem. Bernard Frénicle de Bessy (1602 – 1675), Claude Gaspar Bachet (1581 – 1638), Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Leonhard Euler (1707 – 1783) estudaram quadrados mágicos e cubos mágicos.

3 QUADRADOS MÁGICOS: DEFINIÇÃO, CLASSIFICAÇÃO E PROPRIEDADES

Neste capítulo serão apresentados os principais tipos de quadrados mágicos, suas definições, propriedades e exemplos.

Um **quadrado mágico** é uma matriz [1] quadrada $n \times n$, sendo $n > 2$, desenhada como um tabuleiro de damas com n linhas e n colunas, as quais são preenchidos com números distintos em arranjos particulares, de forma que a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal [2] e da diagonal secundária [3] sejam iguais a uma constante, chamada **constante mágica**. A ordem n de um quadrado mágico é o número de colunas ou de linhas que ele apresenta. Os números usados são normalmente números inteiros começando pelo número 1 e seguindo algum padrão. Existem tipos de quadrado mágicos que satisfazem outras propriedades além das propriedades básicas (soma dos elementos de todas as linhas, colunas, diagonal principal e diagonal secundária serem iguais). E existem também alguns tipos onde uma ou mais do que uma das propriedades básicas não são satisfeitas. A seguir, a título de curiosidade, apresentamos os tipos mais comuns de quadrados mágicos, maiores detalhes podem ser encontrados em (FULTS, 1974; PICKOVER, 2002). No que segue, quando falarmos em quadrado mágico, estaremos nos referindo a uma tabela quadrada $n \times n$, preenchida com números inteiros distintos seguindo algum padrão, de maneira que a soma dos elementos de cada linha, cada coluna e de cada diagonal seja a constante mágica.

O quadrado mágico tradicional, normal ou puro: É o quadrado mágico, que se possuir ordem n, é completado com os inteiros $1, 2, \dots n^2$. Este é o tipo de quadrado mágico mais estudado e conhecido e será o foco deste trabalho, como mencionado anteriormente. Na seção 4 discutiremos como encontrar a constante mágica associado a um quadrado mágico tradicional, bem como regras para preencher tais quadrados e algumas propriedades especiais que eles possuem.

Exemplo 3.0.1 *Na Figura 3 pode-se observar um quadrado mágico tradicional de ordem* 3*, onde:*

- *A soma dos elementos da diagonal principal satisfaz:* $8 + 5 + 2 = 15$.

[1] Uma matriz real de ordem $m \times n$, é uma tabela formada por $m \times n$ números reais distribuídos em m linhas e n colunas, maiores detalhes podem ser encontrado no livro (HEFEZ; FERNANDES, 2016)

[2] Diagonal princial é a coleção das entradas $a_{i,j}$ em que i é igual a j. A diagonal principal de um quadrado mágico une o seu canto superior esquerdo ao canto inferior direito

[3] A diagonal secundária de um quadrado mágico une o seu canto superior direito ao canto inferior esquerdo

- *A soma dos elementos da diagonal secundária satisfaz:* $6 + 5 + 4 = 15$.

- *A soma dos elementos de cada linha satisfaz:*

$$\begin{aligned} 8+1+6 &= 15 \\ 3+5+7 &= 15 \\ 4+9+2 &= 15 \end{aligned} .$$

- *A soma dos elementos de cada coluna satisfaz:*

$$\begin{aligned} 8+3+4 &= 15 \\ 1+5+9 &= 15 \\ 6+7+2 &= 15 \end{aligned} .$$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 3 – Quadrado mágico tradicional 3x3

Exemplo 3.0.2 *A seguir será apresentado um quadrado mágico tradicional de ordem* 4*, Figura 4. A constante mágica é* 34*, como podemos facilmente verificar:*

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Figura 4 – Quadrado mágico tradicional 4x4.

- *Soma dos elementos da diagonal principal:* $1 + 6 + 11 + 16 = 34$.

- *Soma dos elementos da diagonal secundária:* $4 + 7 + 10 + 13 = 34$.

- *Soma dos elementos de cada linha:*

$$\begin{array}{rcl} 1+15+14+4 & = & 34 \\ 12+6+7+9 & = & 34 \\ 8+10+11+5 & = & 34 \\ 13+3+2+16 & = & 34 \end{array}.$$

- *Soma dos elementos de cada coluna:*

$$\begin{array}{rcl} 1+12+8+13 & = & 34 \\ 15+6+10+3 & = & 34 \\ 14+7+11+2 & = & 34 \\ 4+9+5+16 & = & 34 \end{array}.$$

O quadrado imperfeito ou defeituoso: É um tipo especial de quadrado mágico, o qual não obedece a todas as propriedades básicas. Por exemplo, pode possuir somas dos elementos de cada coluna e de cada linha iguais, mas as somas dos elementos de cada diagonal podem ser diferentes.

Exemplo 3.0.3 *No quadrado mágico da figura 5, observa-se que a soma das colunas é igual a* 15*, mas a mesma constante não é observada nas linhas e em uma das diagonais.*

3	2	1
5	4	6
7	9	8

Figura 5 – Quadrado defeituoso ou imperfeito.

- *A soma dos elementos da diagonal principal:* $3+4+8=15$

- *A soma dos elementos da diagonal secundária:* $1+4+7=12$

- *A soma dos elementos de cada linha:*

$$\begin{array}{rcl} 3+2+1 & = & 6 \\ 5+4+6 & = & 15 \\ 7+9+8 & = & 24 \end{array}.$$

- *A soma dos elementos de cada coluna equivale a* 15*, como observamos:*

$$\begin{aligned} 3+5+7 &= 15 \\ 2+4+9 &= 15 \\ 1+6+8 &= 15 \end{aligned} .$$

O quadrado semimágico: É um tipo especial de quadrado mágico, onde somente a soma dos elementos das linhas e das colunas são iguais. Não possui nenhuma exigência sobre a soma dos elementos das diagonais.

Exemplo 3.0.4 *Observa-se na Figura 6, onde a soma dos elementos da diagonal principal difere da diagonal secundária e das linhas/colunas:*

1	2	15	16
6	11	7	10
13	12	4	5
14	9	8	3

Figura 6 – Quadrado semimágico.

- *A soma dos elementos da diagonal principal:* $1+11+4+3=19$
- *A soma dos elementos da diagonal secundária:* $16+7+12+14=49$
- *A soma dos elementos de cada linha resulta em* 34*:*

$$\begin{aligned} 1+2+15+16 &= 34 \\ 6+11+7+10 &= 34 \\ 13+12+4+5 &= 34 \\ 14+9+8+3 &= 34 \end{aligned} .$$

- *A soma dos elementos de cada coluna resulta em* 34*:*

$$\begin{aligned} 1+6+13+14 &= 34 \\ 2+11+12+9 &= 34 \\ 15+7+4+8 &= 34 \\ 16+10+5+3 &= 34 \end{aligned} .$$

O quadrado mágico hipermágico: É um tipo de quadrado mágico que, além de satisfazer as propriedades básicas, pode ser rearranjado de maneira que se obtenha um outro quadrado mágico. Por exemplo, se ao trocarmos duas colunas de lugar ou duas linhas, obtem-se um novo quadrado mágico.

Existem 8 quadrados mágicos de ordem 3, e todos são classificados como hipermágicos. Já dos 880 quadrados mágicos de ordem 4, sabe-se que pelo menos 448 não são hipermágicos, conforme (PICKOVER, 2002), página 8 e 78.

Exemplo 3.0.5 *Observa-se na Figura 7, que a troca de duas linhas (a primeira com a terceira) e a soma dos elementos de cada linha, cada coluna e de cada diagonal, nos quadrados é sempre* 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 7 – Quadrado hipermágico

Exemplo 3.0.6 *Observa-se na Figura 8 a troca de duas colunas (a primeira com a terceira) e a soma dos elementos de cada linha, cada coluna e de cada diagonal, nos quadrados é sempre* 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figura 8 – Quadrado hipermágico

O quadrado mágico diabólico ou perfeito: São quadrados mágicos, que além das propriedades básicas, possuem a propriedade adicional de que a soma dos elementos de qualquer diagonal estendida paralela a diagonal principal ou a diagonal secundária, também é igual a constante mágica. As diagonais estendidas possuem o mesmo número de elementos da diagonal principal e secundária, porém aparecem em diagonais menores que se completam. Para melhor observação e entendimento das diagonais estendidas, consta na Figura 9, destacada nas cores amarelo, azul e rosa, as três diagonais estendidas paralelas a diagonal principal. Da mesma forma ocorre com as diagonais estendidas paralelas a diagonal secundária.

Exemplo 3.0.7 *Na Figura 9, vemos também que a soma dos elementos de cada linha, coluna, diagonal principal e diagonal secundária é* 34*, assim como nas diagonais estendidas:*

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

Figura 9 – Quadrado diabólico.

- *A soma dos elementos da diagonal principal:* $4 + 11 + 13 + 6 = 34$
- *A soma dos elementos da diagonal secundária:* $9 + 2 + 8 + 15 = 34$
- *A soma dos elementos de cada diagonal estendida paralela a diagonal principal:*

$$\begin{aligned} 14 + 8 + 3 + 9 &= 34 \\ 5 + 2 + 12 + 15 &= 34 \\ 1 + 10 + 16 + 7 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos de cada diagonal estendida paralela a diagonal secundária:*

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 16 + 6 &= 34 \\ 10 + 13 + 7 + 4 &= 34 \\ 3 + 12 + 14 + 5 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos de cada linha:*

$$\begin{aligned} 4 + 5 + 16 + 9 &= 34 \\ 14 + 11 + 2 + 7 &= 34 \\ 1 + 8 + 13 + 12 &= 34 \\ 15 + 10 + 3 + 6 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos de cada coluna:*

$$\begin{aligned} 4 + 14 + 1 + 15 &= 34 \\ 5 + 11 + 8 + 10 &= 34 \\ 16 + 2 + 13 + 3 &= 34 \\ 9 + 7 + 12 + 6 &= 34 \end{aligned}.$$

O quadrado mágico semidiabólico: O quadrado mágico semidiabólico ou semi-Nasik de um quadrado mágico de ordem par é aquele cujo a soma das diagonais curtas [4] têm a mesma soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal (principal e secundária).

Exemplo 3.0.8 *Destaca-se na Figura 10 os 4 elementos pertencentes as diagonais curtas paralelas, a diagonal secundária.*

1	14	12	7
4	15	9	6
13	2	8	11
16	3	5	10

Figura 10 – Quadrado mágico semidiabólico.

- *A soma dos elementos da diagonal principal:* $1 + 15 + 8 + 10 = 34$.
- *A soma dos elementos da diagonal secundária:* $7 + 9 + 2 + 16 = 34$.
- *A soma dos elementos das diagonais curtas paralelas a diagonal principal:* $12 + 6 + 13 + 3 = 34$.
- *A soma dos elementos das diagonais curtas paralelas a diagonal secundária:* $14 + 4 + 11 + 5 = 34$.
- *A soma dos elementos de cada linha:*

$$\begin{aligned} 1 + 14 + 12 + 7 &= 34 \\ 4 + 15 + 9 + 6 &= 34 \\ 13 + 2 + 8 + 11 &= 34 \\ 16 + 3 + 5 + 10 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos de cada coluna:*

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 13 + 16 &= 34 \\ 14 + 15 + 2 + 3 &= 34 \\ 12 + 9 + 8 + 5 &= 34 \\ 7 + 6 + 11 + 10 &= 34 \end{aligned}.$$

[4] Diagonais curtas de um quadrado mágico de ordem par, são as duas diagonais formadas por $\frac{n}{2}$ números cada.

O quadrado mágico simétrico ou associativo: É o quadrado mágico de ordem n com a propriedade adicional de que a soma dos pares de números simetricamente relativo ao centro do quadrado, ou diametralmente equidistantes é $n^2 + 1$, veja Figura 11.

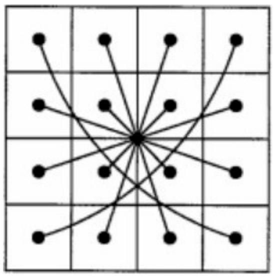

Figura 11 – Diagrama de conexão para o quadrado mágico simétrico ou associativo.

Exemplo 3.0.9 *Nota-se no quadrado mágico da Figura 12 que as somas dos elementos de cada linha, coluna e diagonal é* 34*:*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 12 – Quadrado mágico simétrico ou associativo.

- *A soma dos elementos da diagonal principal:* $16 + 10 + 7 + 1 = 34$.
- *A soma dos elementos da diagonal secundária:* $13 + 11 + 6 + 4 = 34$.
- *A soma dos elementos de cada linha:*

$$\begin{aligned} 16 + 3 + 2 + 13 &= 34 \\ 5 + 10 + 11 + 8 &= 34 \\ 9 + 6 + 7 + 12 &= 34 \\ 4 + 15 + 14 + 1 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos de cada coluna:*

$$\begin{aligned} 16 + 5 + 9 + 4 &= 34 \\ 3 + 10 + 6 + 15 &= 34 \\ 2 + 11 + 7 + 14 &= 34 \\ 13 + 8 + 12 + 1 &= 34 \end{aligned}.$$

- *A soma dos elementos dos pares, conforme o diagrama da Figura 11 é igual a* n^2+1 *que resulta* 17*, como pode-se observar:*

$$\begin{aligned} 16+1 &= 4^2+1 = & 17 \\ 3+14 &= 4^2+1 = & 17 \\ 2+15 &= 4^2+1 = & 17 \\ 13+4 &= 4^2+1 = & 17 \\ 5+12 &= 4^2+1 = & 17 \\ 10+7 &= 4^2+1 = & 17 \\ 11+6 &= 4^2+1 = & 17 \\ 8+9 &= 4^2+1 = & 17 \end{aligned}.$$

4 O QUADRADO MÁGICO TRADICIONAL, NORMAL OU PURO

Como mencionado anteriormente, o quadrado mágico tradicional é o quadrado mágico de ordem n, o qual é preenchido com os números naturais consecutivos a partir do número 1 até o número n^2. Se desejamos construir um quadrado mágico tradicional de ordem n, a primeira tarefa é determinar a sua constante mágica K, o que faremos a seguir. Seja S_n a soma de todas as entradas do quadrado mágico, então:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n^2 - 3) + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) + n^2, \tag{4.1}$$

a qual pode ser reescrita como:

$$S_n = n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) + (n^2 - 3) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1. \tag{4.2}$$

Somando as equações (4.1) e (4.2) vamos obter:

$$\begin{aligned} 2S_n &= [n^2 + 1] + [(n^2 - 1) + 2] + [(n^2 - 2) + 3] + \ldots + [(n^2 - 1) + 2] + [n^2 + 1] \\ &= \underbrace{(n^2 + 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + \ldots + (n^2 + 1) + (n^2 + 1).}_{n^2 \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Ou seja, $2S_n = (n^2 + 1)n^2$. Logo,

$$S_n = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}. \tag{4.3}$$

Como a constante mágica K é a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal, e como temos n linhas e n colunas, então: $S_n = Kn$. Logo, usando (4.3), temos que

$$K = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Também é possível escrever a constante mágica em termos da mediana [1] $\bar{x}$ do conjunto $1, 2, \ldots, n^2$. Então, $\bar{x} = \frac{n^2+1}{2}$, e a constante mágica K é igual a n vezes a mediana, isto é :

$$K = n\bar{x}.$$

Claramente, a soma dos elementos S_n, também pode ser calculada como $S_n = n^2\bar{x}$.

Como a soma dos elementos dos quatro cantos de um quadrado mágico é 4 vezes

[1]Mediana é o valor central de uma lista com quantidade ímpar de números colocados em ordem crescente e se esta quantidade de números for par, a mediana será a média aritmética dos dois números centrais

a mediana: $S_4 = 4(\frac{n^2+1}{2})$, ou também, pode ser encontrado dividindo a Soma dos termos S_n pelo número total de termos n^2 e multiplicado por 4, que são quatro termos: $S_n = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \times \frac{1}{n^2} \times 4$, temos então que:

$$S_4 = 2(n^2 + 1).$$

Para mostrar a construção dos quadrados mágicos, é necessário dividi-los em 3 categorias conforme a sua ordem, pois não há uma única maneira para construir todos os tipos de quadrados mágicos, são elas:

- ordem ímpar,
- ordem simplesmente par, múltiplo de 2, mas que não seja múltiplo de 4, por exemplo: $6 \times 6, 10 \times 10, 14 \times 14, \ldots,$
- ordem duplamente par, múltiplo de 4, por exemplo: 4×4, $8 \times 8, 12 \times 12, \ldots$.

4.1 QUADRADOS MÁGICOS DE ORDEM ÍMPAR

Para construir os quadrados mágicos de ordem ímpar existem vários métodos, conforme pode-se encontrar em (KRAITCHIK, 1935), (FULTS, 1974), (PICKOVER, 2002). Aqui utilizaremos o método Siamês ou método De La Loubère, (UKO; SINCLAIR., 2013), por ser um método prático e simples que serve não só para os quadrados mágicos tradicionais, mas também para todos os quadrados mágicos em que os elementos estejam em progressão aritmética. Este método foi trazido para a França em 1688 por Simon De La Loubère $(1642 - 1729)$, um diplomata, escritor, matemático e poeta, o qual liderou uma delegação francesa em Sião (atual Tailândia). Durante sua estadia de três meses em Sião, De La Loubère aprendeu as regras para a construção do quadrado mágico de ordem ímpar, e no seu retorno a França elas foram apresentadas no livro de sua autoria intitulado: "Uma nova relação histórica do reino de Sião" (Du Royaume de Siam, 1693) (LOUBÈRE; P, 1693; FILHO, 2017).

Regra prática (método Siamês) para construir quadrados mágicos de ordem ímpar.

O algoritmo[2] para preencher os quadrados mágicos de ordem ímpar usa os movimentos para cima e para a direita, como uma regra prática. Para exemplificar, toma-se

[2]sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas.

o menor quadrado mágico de ordem ímpar que é o de ordem 3, utilizando os algarismos $1, 2, 3, \ldots, 9$. Segue detalhadamente a construção deste quadrado mágico.

Considerando os números naturais em ordem crescente, o primeiro número se coloca no centro da primeira linha, Figura 13.

Figura 13 – O primeiro número preenche a casa central da primeira linha.

Para este algoritmo deve-se considerar casas que estejam fora do tabuleiro [3] a ser preenchido. Sempre que uma casa não existir escreve-se o número na casa mais distante, na mesma linha, coluna ou diagonal, veja Figura 14.

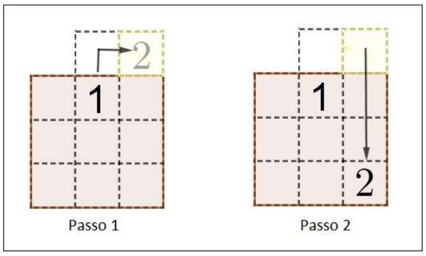

Figura 14 – Casa fora do quadrado, preenche a casa mais afastada da mesma linha/coluna/diagonal.

O movimento a ser feito é uma para cima e uma para a direita, isto poderá levar a uma casa que já está ocupada, neste caso volta-se o movimento e preenche-se o número na casa abaixo, Figura 15.

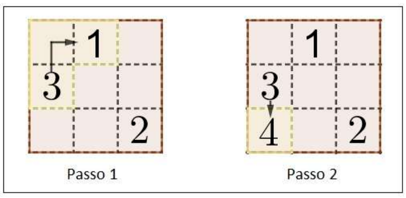

Figura 15 – Casa ocupada, volta e preenche abaixo da anterior.

Se o movimento te levar para uma casa fora do tabuleiro e a mais distante na mesma linha, coluna ou diagonal estiver ocupada, voltar o movimento e preencher a casa abaixo do número, Figura 16.

[3]tabuleiro se refere ao quadrado.

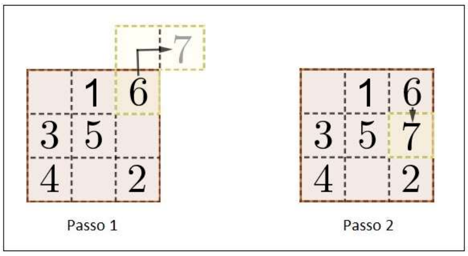

Figura 16 – Segue o preenchimento.

E com estes passos destacados acima, preenche-se o quadrado mágico de ordem 3, Figura 17.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 17 – Quadrado mágico preenchido.

Características do quadrado mágico de ordem ímpar

Após o estudo e a construção de vários quadrados mágicos de ordem ímpar, foi observada a existência de regularidades em algumas entradas dos quadrados mágicos e foi encontrada empiricamente uma fórmula para tais entradas. Para comprovar a veracidade das fórmulas, foi utilizada a fórmula do Método Siamês (Fórmula 4.4), a qual foi introduzida em (UKO; SINCLAIR., 2013), e pode ser usada para encontrar qualquer entrada de um quadrado mágico de ordem ímpar. Sua demonstração utiliza conceitos de aritmética modular, os quais fogem do escopo deste trabalho.

Fórmula de La Loubère (UKO; SINCLAIR., 2013):

$$a_{ij} = 1 + \left[\left(2j + i - 2\right)\ mod\ n\right] + n\left[\left(j + i + \frac{n-3}{2}\right)\ mod\ n\right]. \tag{4.4}$$

onde: a_{ij} é o elemento do quadrado mágico que se encontra na linha i e na coluna j e n é a ordem do quadrado mágico.

Usando a fórmula 4.4, será mostrado a seguir que os elementos dos quatro cantos são determinados em função da ordem do quadrado mágico:

$$a_{nn} = \frac{n^2 - n - 2}{2},\ a_{n1} = \frac{n^2 - n + 2}{2},\ a_{1n} = \frac{n^2 + n}{2}\ \text{e}\ a_{11} = \frac{n^2 + n + 4}{2}.$$

Para um maior entendimento do leitor, a seguir serão detalhados os cálculos das expressões obtidas para a_{nn}, a_{n1}, a_{1n} e a_{11} empiricamente e se verifica com a fórmula 4.4.

Cálculo de $\boldsymbol{a_{nn} = \frac{n^2-n-2}{2}}$:

$$a_{nn} = 1 + \left[\left(2n + n - 2\right)\ mod\ n\right] + n\left[\left(n + n + \frac{n-3}{2}\right)\ mod\ n\right].$$

Usando os seguintes fatos:

- $(3n-2) \equiv n - 2\ mod\ n$, pois $(3n - 2 - (n-2)) = 2n$ e $n|2n$.
- $\frac{5n-3}{2} \equiv \frac{n-3}{2}\ mod\ n$, pois $\left(\frac{5n-3}{2} - \frac{n-3}{2}\right) = 2n$ e $n|2n$.

Tem-se que:

$$a_{nn} = 1 + \left(n-2\right) + n\left(\frac{n-3}{2}\right) = \frac{n^2-n-2}{2}.$$

Cálculo de $\boldsymbol{a_{11} = \frac{n^2+n+4}{2}}$:

$$a_{11} = 1 + \left[\left(2 \times 1 + 1 - 2\right)\ mod\ n\right] + n\left[1 + 1 + \frac{n-3}{2}\ mod\ n\right],$$

como $1 \equiv 1\ mod\ n$ e $\frac{1+n}{2} \equiv \frac{1+n}{2}\ mod\ n$, tem-se que

$$a_{11} = 1 + 1 + n\left(\frac{1+n}{2}\right) = \frac{n^2+n+4}{2}.$$

Observe que também é possível escrever a_{11} em termos de a_{nn}:

$$a_{11} = \frac{n^2+n+4}{2} = \frac{n^2-n-2+2n+6}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} + (n+3) = a_{nn} + (n+3).$$

Cálculo de $\boldsymbol{a_{1n} = \frac{n^2+n}{2}}$:

$$a_{1n} = 1 + \left[\left(2 \times n + 1 - 2\right)\ mod\ n\right] + n\left[\left(n + 1 + \frac{n-3}{2}\right)\ mod\ n\right],$$

mas,

- $(2n-1) \equiv (n-1)\ mod\ n$, pois $(2n - 1 - (n-1)) = n$ e $n|n$.
- $\left(\frac{3n-1}{2}\right) \equiv \left(\frac{n-1}{2}\right)\ mod\ n$, pois $\left(\frac{3n-1}{2}\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) = n$ e $n|n$.

Assim,

$$a_{1n} = 1 + (n-1) + n\left(\frac{n-1}{2}\right) = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Também tem-se que:

$$a_{1n} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n-2+2n+2}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} + (n+1) = a_{nn} + (n+1).$$

Cálculo de $\boldsymbol{a_{n1} = \frac{n^2-n+2}{2}}$:

$$a_{n1} = 1 + \left[\left(2\times 1 + n - 2\right)\ mod\ n\right] + n\left[\left(1 + n + \frac{n-3}{2}\right)\ mod\ n\right].$$

Usando que:

- $n \equiv 0\ mod\ n$, pois $n|n$.
- $\left(\frac{3n-1}{2}\right) \equiv \left(\frac{n-1}{2}\right) mod\ n$, pois $\frac{3n-1}{2} - \frac{n-1}{2} = n$ e $n|n$.

Obtem-se,

$$a_{n1} = 1 + 0 + n\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-n+2}{2}.$$

Também é possível escrever a_{n1} em termos de a_{nn}:

$$a_{n1} = \frac{n^2-n+2}{2} = \frac{n^2-n-2+4}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} + 2 = a_{nn} + 2.$$

Portanto,

$$a_{nn} = \frac{n^2-n-2}{2},\ a_{n1} = \frac{n^2-n+2}{2},\ a_{1n} = \frac{n^2+n}{2}\ \text{e}\ a_{11} = \frac{n^2+n+4}{2}.$$

Usando as expressões para a_{nn}, a_{n1}, a_{1n} e a_{11} acima, verifica-se que a soma, S_4, destes quatro elementos é:

$$\begin{aligned} S_4 &= a_{11} + a_{1n} + a_{n1} + a_{nn} \\ &= (a_{nn} + (n+3)) + (a_{nn} + (n+1)) + (a_{nn} + 2) + a_{nn} \\ &= 4a_{nn} + 2n + 6 \\ &= 4\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right) + 2n + 6 \\ &= 2(n^2+1) \end{aligned}$$

Esta soma S_4 também é igual à $\frac{4}{n}K$, como pode-se facilmente verificar.

Usando a fórmula 4.4, será mostrado a seguir que os quatro elementos mais afastados de um alinhamento que passa pelo centro, ou seja, os elementos centrais da primeira e última linha e da primeira e última coluna são determinados em função da ordem do quadrado mágico:

$$a_{1(\frac{n+1}{2})} = 1,\ a_{(\frac{n+1}{2})1} = 1 + \frac{1+n}{2},\ a_{(\frac{n+1}{2})n} = n^2 - \frac{1+n}{2}\ e\ a_{n(\frac{n+1}{2})} = n^2.$$

Para um maior entendimento do leitor, a seguir serão detalhados os cálculos das expressões obtidas para $a_{1(\frac{n+1}{2})}, a_{(\frac{n+1}{2})1}, a_{(\frac{n+1}{2})n}$ e $a_{n(\frac{n+1}{2})}$ empiricamente e se verifica com a fórmula 4.4.

Cálculo de $\boldsymbol{a_{1(\frac{n+1}{2})} = 1}$:

$$a_{1(\frac{n+1}{2})} = 1 + \left[\left(2 \times \frac{n+1}{2} + 1 - 2\right) mod\ n\right] + n\left[\left(\frac{n+1}{2} + 1 + \frac{n-3}{2}\right) mod\ n\right].$$

Usando o seguinte fato:

- $n \equiv 0\ mod\ n$, pois $n|n$.

Tem-se que,

$$a_{1(\frac{n+1}{2})} = 1 + [n\ mod\ n] + n[n\ mod\ n] = 1 + 0 + n \times 0 = 1.$$

Cálculo de $\boldsymbol{a_{(\frac{n+1}{2})1} = 1 + \frac{1+n}{2}}$:

$$a_{(\frac{n+1}{2})1} = 1 + \left[\left(2 \times 1 + \frac{n+1}{2} - 2\right) mod\ n\right] + n\left[\left(1 + \frac{n+1}{2} + \frac{n-3}{2}\right) mod\ n\right].$$

Usando o seguinte fato:

- $\frac{n+1}{2} \equiv \frac{n+1}{2}\ mod\ n$ e $n \equiv 0\ mod\ n = n^2 - \frac{1+n}{2}$.

Tem-se que,

$$a_{(\frac{n+1}{2})1} = 1 + \frac{n+1}{2} + n \times 0 = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Cálculo de $\boldsymbol{a_{(\frac{n+1}{2})n} = n^2 - \frac{1+n}{2}}$:

$$a_{(\frac{n+1}{2})n} = 1 + \left[\left(2 \times n + \frac{n+1}{2} - 2\right) mod\ n\right] + n\left[\left(n + \frac{n+1}{2} + \frac{n-3}{2}\right) mod\ n\right].$$

Usando os seguintes fatos:

- $\frac{5n-3}{2} \equiv \frac{n-3}{2}\ mod\ n$, pois $\frac{5n-3}{2} - \frac{n-3}{2} = \frac{4n}{2} = 2n$ e $n|2n$.
- $2n - 1 \equiv n - 1\ mod\ n$, pois $2n - 1 - (n-1) = n$ e $n|n$.

Tem-se que,

$$a_{(\frac{n+1}{2})n} = 1 + \frac{n-3}{2} + n(n-1) = n^2 - \frac{n+1}{2}.$$

Cálculo de $a_{n(\frac{n+1}{2})} = n^2$:

$$a_{n(\frac{n+1}{2})} = 1 + \left[\left(2 \times \frac{n+1}{2} + n - 2\right) \; mod \; n\right] + n\left[\left(\frac{n+1}{2} + n + \frac{n-3}{2}\right) \; mod \; n\right].$$

Usando o seguinte fato:

- $2n - 1 \equiv n - 1 \; mod \; n$, pois $2n - 1 - (n-1) = n$ e $n|n$.

Tem-se que,

$$a_{n(\frac{n+1}{2})} = 1 + n - 1 + n^2 - n = n^2.$$

Usando as expressões para $a_{1(\frac{n+1}{2})}, a_{(\frac{n+1}{2})1}, a_{(\frac{n+1}{2})n}$ e $a_{n(\frac{n+1}{2})}$ acima, verifica-se que a soma, S_{4e}, destes quatro elementos é:

$$\begin{aligned} S_{4e} &= a_{1(\frac{n+1}{2})} + a_{(\frac{n+1}{2})1} + a_{(\frac{n+1}{2})n} + a_{n(\frac{n+1}{2})} \\ &= (1) + (1 + \tfrac{1+n}{2}) + (n^2 - \tfrac{1+n}{2}) + (n^2) \\ &= 2 + 2n^2 \\ &= 2(n^2+1) \end{aligned}$$

A soma dos quatros elementos do centro de cada alinhamento periférico S_{4p}, ou seja, são os elementos centrais de uma linha ou mais anterior e posterior e os elementos centrais de uma coluna ou mais anterior e posterior do elemento central $\left(a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}\right)$ é igual a S_4, ou seja:

$$S_{4p} = S_4 = 2(n^2+1).$$

Os dois elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro S_{2c}, ou seja, são os elementos centrais da primeira e última linha e os elementos centrais da primeira e última coluna. $\left(a_{(\frac{n+1}{2})1} = 1 + \frac{n+1}{2} = \frac{n+3}{2}\right)$ e $\left(a_{(\frac{n+1}{2})n} = n^2 - \frac{n+1}{2} = \frac{2n^2-n-1}{2}\right)$ ou $a_{1(\frac{n+1}{2})} = 1$ e $a_{n(\frac{n+1}{2})} = n^2$. A soma destes elementos S_2 igual a,

$$S_2 = a_{(\frac{n+1}{2})1} + a_{(\frac{n+1}{2})n} = \frac{n+3}{2} + \frac{2n^2-n-1}{2} \text{ ou } S_{2c} = a_{1(\frac{n+1}{2})} + a_{n(\frac{n+1}{2})} = 1 + n^2,$$

que segue:

$$S_{2c} = n^2 + 1.$$

Ou também, a soma destes elementos S_{2c} é igual ao dobro da mediana $\bar{x}$, então, $2 \times \frac{n^2+1}{2}$, o que resulta:

$$S_{2c} = n^2 + 1.$$

A soma dos dois elementos do centro de cada alinhamento periférico S_{2p}, ou seja, são os elementos centrais de uma linha ou mais anterior e posterior ou os elementos centrais de uma coluna ou mais anterior e posterior do elemento central $\left(a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}\right)$, é igual a S_{2c}, ou seja:

$$S_{2p} = S_{2c} = n^2 + 1.$$

4.1.1 Ordem 3

Para exemplificar as propriedades descritas na subseção anterior, vamos utilizar o menor quadrado mágico existente, o de ordem 3, o qual já foi preenchido anteriormente para exemplificar o método Siamês.

1. A constante mágica K é dada por $K = \frac{3(3^2+1)}{2} = 15$.

2. A soma S_n de todos os elementos do quadrado mágico é $S_n = \frac{(3^2+1)\times 3^2}{2} = 45$ ou $S_n = 3^2 \times 5 = 45$.

3. A soma dos elementos dos quatro cantos S_4 $(2, 4, 6, 8)$ é $S_4 = 4 \times 5 = 20$ ou $S_4 = 2(3^2 + 1) = 20$ ou ainda $S_4 = \frac{4}{3} \times 15 = 20$.

4. A soma dos quatro elementos extremos S_{4e} $(1, 3, 7, 9)$ de um alinhamento que passa pelo centro é $S_{4e} = 4 \times 5 = 20$, ou $S_{4e} = 2(3^2 + 1) = 20$.

5. A soma dos quatro elementos do centro de cada alinhamento periférico S_{4cp} é igual à soma dos quatro elementos extremos S_{4e}, que é 20. No caso do quadrado mágico de ordem 3, estes elementos são os mesmos $(1, 3, 7, 9)$.

6. A soma dos dois elementos extremos S_2 $(1, 9)$ e $(3, 7)$ de um alinhamento que passa pelo centro é $S_2 = 2 \times 5 = 10$, ou $S_2 = 3^2 + 1 = 10$.

7. A soma dos dois elementos do centro de cada alinhamento periférico S_{2cp} é igual à soma dos dois elementos extremos S_{2e}, que é 10. No caso do quadrado mágico de ordem 3, estes elementos são os mesmos $(1, 9)$ e $(3, 7)$.

A título de curiosidade, a quem possa se interessar segue no Apêndice A, a construção dos quadrados mágicos de ordens 5, 7 e 9, utilizando a regra prática (método siâmes), o qual não será mostrado detalhadamente o passo a passo das suas construções, como efetuado no de ordem 3.

4.2 QUADRADO MÁGICO DE ORDEM SIMPLESMENTE PAR

São os quadrados mágicos de ordem par que não são múltiplos de 4, ou seja, $6, 10, 14, \ldots$. Assim, como os quadrados mágicos de ordem ímpar, existem vários métodos para a construção dos quadrados mágicos de ordem simplesmente par, como pode-se encontrar em (PICKOVER, 2002), (KRAITCHIK, 1935), (FULTS, 1974). Aqui, também se utiliza o método elaborado por Simon de la Loubère, por ser um método prático e fácil de construir.

Regra prática criada por Simon de La Loubère para construir quadrados mágicos de ordem par simples.

O menor quadrado mágico simplesmente par é o de ordem 6 e para preenchê-lo será utilizado como exemplo a sequência dos números naturais $1, 2, 3, \ldots, 36$. Divide-se este quadrado mágico em quatro quadrados iguais de ordem ímpar, cada um com 9 elementos, e essas regiões são chamadas de superior esquerda SE, superior direita SD, inferior esquerda IE e inferior direita ID, conforme Figura 18.

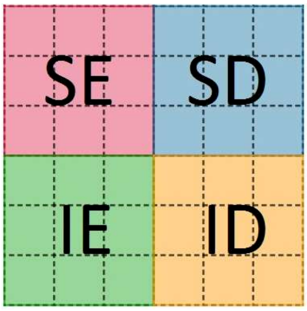

Figura 18 – Regiões do quadrado mágico de ordem 6.

Começando a preencher a região superior esquerda SE com os números $1, 2, 3, \ldots, 9$, utiliza-se a mesma regra dos quadrados de ordem ímpar. Observe na Figura 19 que o mesmo algoritmo é utilizado nas regiões inferior direita ID na qual preenche-se com os números $10, 11, 12, \ldots, 18$, superior direita SD com os números $19, 20, 21, \ldots, 27$ e inferior esquerda IE com os números $28, 29, 30, \ldots, 36$.

Percebe-se que neste quadrado a soma dos números que estão dispostos nas linhas e nas diagonais não equivalem a constante mágica, desta forma deve-se trocar a posição de alguns números, entre os quadrantes superiores e inferiores, à esquerda e/ou à direita, para completar corretamente o quadrado mágico. Na região superior esquerda, os dois

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

Figura 19 – Elementos do quadrado mágico de ordem 6.

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

Figura 20 – Quadrado mágico de ordem 6.

elementos do canto a esquerda e o elemento central, devem ser trocados simetricamente[4], pelos elementos da região inferior esquerda que ocupam a mesma posição, como mostra Figura20.

Este método de resolução é válido para todo quadrado mágico par simples. Ao dividir o quadrado em quatro regiões de ordem ímpar, terá sempre $\frac{n^2}{4}$ elementos em cada uma delas, no caso do quadrado mágico de ordem 6, terá 9 elementos cada região. Na região superior esquerda, escreve-se os números 1 até $\frac{n^2}{4}$ (1 a 9). Na região inferior a direita, escreve-se os números $\frac{n^2}{4}+1$ até $\frac{n^2}{2}$ (10 a 18), na região superior direita escreve-se de $\frac{n^2}{2}+1$ até $\frac{3n^2}{4}$ (19 a 27) e na região inferior esquerda de $\frac{3n^2}{4}+1$ até n^2 (28 a 36). A troca na posição de alguns elementos segue uma certa regra que pode ser observada nos quadrados das Figuras 19 e 20, onde destaca-se as casas que terão os elementos trocados.

Características do quadrado mágico de ordem simplesmente par

Além das propriedades dos quadrados mágicos tradicionais, possui algumas características específicas deste grupo:

1. A soma dos elementos dos quatros cantos S_4 é igual aos $\frac{4}{n}K$:

[4]identicamente ou igualmente, de modo que haja correspondência de posição

$$S_4 = \left(\frac{4}{n}\right)\left(\frac{1}{2}n(n^2+1)\right) = 2(n^2+1).$$

2. A soma dos quatro elementos centrais S_{4c}, ou seja, são os elementos que pertencem as entradas: $a_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$, $a_{\frac{n}{2}(\frac{n+2}{2})}$, $a_{(\frac{n+2}{2})\frac{n}{2}}$ e $a_{(\frac{n+2}{2})(\frac{n+2}{2})}$ é igual à soma dos elementos dos quatro cantos:
$$S_{4c} = S_4 = 2(n^2+1).$$

3. A soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro S_{4ec}, ou seja, são os dois elementos centrais da primeira e última linha $\big(a_{1(\frac{n}{2})}$, $a_{1(\frac{n+2}{2})}$, $a_{n(\frac{n}{2})}$ e $a_{n(\frac{n+2}{2})}\big)$ ou os dois elementos da primeira e última coluna $\big(a_{(\frac{n}{2})1}$, $a_{(\frac{n+2}{2})1}$, $a_{(\frac{n}{2})n}$ e $a_{(\frac{n+2}{2})n}\big)$, é igual à soma dos elementos dos quatro cantos.
$$S_{4ec} = S_4 = 2(n^2+1).$$

4.2.1 Ordem 6

Para exemplificar as propriedades descritas na subseção anterior se utiliza o menor quadrado de ordem par simples que é o de ordem 6, que já foi construído para exemplificação da regra de Simon de La Loubère para quadrados mágicos de ordem simplesmente par. A seguir destaca-se as suas características e na próxima subseção, se mostra de forma simplificada o quadrado mágico simplesmente par de ordem 10.

1. A constante mágica K é $K = 6 \times \frac{1+6^2}{2} = 111$.

2. A soma dos elementos S_n, é $S_n = 6\times\frac{1}{2}\times 6\times(6^2+1) = 666$ ou $S_n = 6^2\times(\frac{6^2+1}{2}) = 666$.

3. A soma dos elementos dos quatro cantos S_4 $(4, 11, 24, 35)$ é $S_4 = 4\times(\frac{6^2+1}{2}) = 74$ ou $S_4 = \frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\times 6\times(6^2+1) = 74$.

4. A soma dos quatro elementos centrais S_{4c} $(2, 17, 22, 33)$ é igual à soma dos elementos dos quatro cantos, que é 74.

5. A soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro S_{4ec} $(6, 13, 26, 29)$ e $(8, 15, 20, 31)$ é igual à soma dos elementos dos quatro cantos que é 74.

4.2.2 Ordem 10

Utilizando os números na sequência $1, 2, 3, \ldots, 100$, preenche-se a região superior esquerda com os números de 1 a 25, a região inferior direita com os números de 26 a 50, a região superior direita com os números de 51 a 75 e a região inferior esquerda com os números de 76 a 100. A mediana é $\frac{50+51}{2}$ que é igual a $\frac{101}{2}$. A constante mágica é igual a 10 vezes a mediana, logo $10 \times \frac{101}{2}$ que é igual a 505. A soma dos elementos é igual a 10 vezes a constante mágica, logo $10 \times 505 = 5050$ ou também 10^2 vezes a mediana, $10^2 \times \frac{101}{2} = 5050$. A soma dos elementos dos quatro cantos $(17, 34, 65, 86)$ é igual a 4 vezes a mediana $(4 \times \frac{101}{2})$ ou quatro décimos da constante mágica, que é igual a 202. A soma dos quatro elementos centrais $(9, 42, 61, 90)$ é igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $(15, 36, 67, 84)$ ou $(11, 40, 59, 92)$, que é igual à soma dos elementos dos quatro cantos 202. Figuras 21 e 22.

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Figura 21 – Elementos do quadrado mágico de ordem 10.

4.3 QUADRADO MÁGICO DE ORDEM DUPLAMENTE PAR

São os quadrados mágicos de ordem par que devem ser múltiplos, também de 4, ou seja, $4, 8, 12, \ldots$ e como os quadrados mágicos de ordem ímpar e os de ordem simplesmente par, existem vários métodos para construir um quadrado mágico duplamente par, como pode-se encontrar (FULTS, 1974), (PICKOVER, 2002), aqui se apresenta um método fácil conforme o matemático russo Abu Hatim Muzaffar Asfizari (SESIANO, 2019).

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Figura 22 – Elementos do quadrado mágico de ordem 10.

Regra prática para resolver quadrados de ordem duplamente par

O menor quadrado mágico duplamente par é o de ordem 4 e para preenchê-lo será utilizado como exemplo a sequência dos números naturais $1, 2, 3, \ldots, 16$. Podendo preencher este quadrado escrevendo o número 1 na primeira linha e coluna e completar as demais casas conforme a Figura 23 à esquerda. Outra forma seria escrever o número 1 na quarta linha e na quarta coluna e completar as demais casas conforme a Figura 23 à direita.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Figura 23 – Escrevendo os números de 1 até 16 no quadrado mágico.

Destacam-se cinco quadrados menores: quatro de ordem igual a 1, situados nos cantos, e um quadrado central de ordem 2, conforme a Figura 24. Para resolver este quadrado mágico deve-se considerar os números que estão nas casas destacadas, conforme o primeiro preenchimento, e descartar os demais números. As demais casas vazias serão completadas pelos números dispostos conforme o segundo preenchimento.

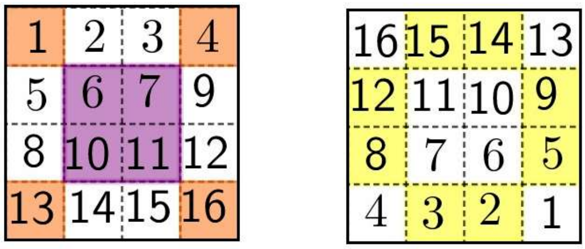

Figura 24 – Destacando as casas a serem utilizadas.

Após esses passos, é possível chegar ao quadrado mágico de ordem 4 da Figura 25.

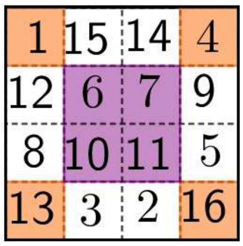

Figura 25 – Quadrado mágico de ordem 4.

De modo geral, para resolver um quadrado mágico par duplo de ordem $n = 4k$, será usado este mesmo algoritmo. Destacam-se quadrados menores de ordem $\frac{n}{4}$ em cada canto e outro central de ordem $\frac{n}{2}$. Nas casas que foram destacadas escreve-se os números marcando 1 na primeira linha e primeira coluna e os demais da esquerda para direita, completando as linhas, conforme o exemplo da Figura 23 à esquerda. As casas que não foram preenchidas nesta primeira etapa, irão completar conforme a Figura 23 à direita.

Características do quadrado mágico de ordem duplamente par

Após o estudo e a construção de vários quadrados mágicos de ordem duplamente par, observa-se que existem regularidades em algumas entradas, o qual busquei empiricamente por inspeção encontrar uma fórmula para as mesmas, e também se destaca em algumas propriedades específicas deste grupo:

1. Os quatro elementos dos cantos são: $a_{11} = 1$, $a_{1n} = n$, $a_{n1} = n^2 - n + 1$ e $a_{nn} = n^2$. A soma S_4 destes elementos é:

$$S_4 = (1) + (n) + (n^2 - n + 1) + (n^2) = 2(n^2 + 1)$$

ou como sendo 4 vezes a mediana $\bar{x}$,

$$S_4 = 4 \times \frac{n^2+1}{2} = 2(n^2+1)$$

ou ainda, $\frac{4}{n}$ da constante mágica K, que é igual a:

$$S_4 = \frac{4}{n} \times \frac{n(n^2+1)}{2} = 2(n^2+1).$$

2. A soma dos quatro elementos centrais S_{4c}, ou seja, são os elementos que pertencem as entradas: $a_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$, $a_{\frac{n}{2}(\frac{n+2}{2})}$, $a_{(\frac{n+2}{2})\frac{n}{2}}$ e $a_{(\frac{n+2}{2})(\frac{n+2}{2})}$ é igual à soma dos elementos dos quatro cantos:
$$S_{4c} = S_4 = 2(n^2+1).$$

3. A soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro S_{4ec}, ou seja, são os dois elementos centrais da primeira e última linha $\big(a_{1(\frac{n}{2})}$, $a_{1(\frac{n+2}{2})}$, $a_{n(\frac{n}{2})}$ e $a_{n(\frac{n+2}{2})}\big)$ ou os dois elementos da primeira e última coluna $\big(a_{(\frac{n}{2})1}$, $a_{(\frac{n+2}{2})1}$, $a_{(\frac{n}{2})n}$ e $a_{(\frac{n+2}{2})n}\big)$, que é igual à soma dos elementos dos quatro cantos.

$$S_{4ec} = S_4 = 2(n^2+1).$$

4. A soma dos quadrados dos elementos da primeira linha é igual à soma dos quadrados dos elementos da última linha, assim como a soma dos quadrados dos elementos da segunda linha é igual à soma dos quadrados dos elementos da penúltima linha e assim sucessivamente, dependendo do número de linhas que o quadrado possuir.

5. A soma dos quadrados das linhas ímpares é igual à soma dos quadrados das linhas pares.

6. É possível relacionar os elementos dos 4 cantos $a_{11} = 1$, $a_{1n} = n$, $a_{1n} = n^2 - n + 1$ e $a_{nn} = n^2$, com a diferença entre os números dispostos nos dois cantos da primeira linha $a_{1n} - a_{11}$, somada ao primeiro elemento à esquerda da última linha $(a_{1n} - a_{11}) + a_{1n}$ que resulta no valor do elemento da última linha à direita a_{nn}, então:

$$(n-1) + n^2 - n + 1 = a_{nn} = n^2.$$

4.3.1 Ordem 4

Para exemplificar as propriedades de um quadrado mágico de ordem duplamente par, será utilizado um quadrado mágico de ordem 4, onde será apresentado com detalhes, o qual já foi construído na exemplificação da regra prática para a construção dos quadrados mágicos par duplo e, na sequência de maneira sucinta, segue o quadrado mágico de ordem 8 e o de ordem 12:

1. A constante mágica K é $K = 4 \times \frac{1+4^2}{2} = 34$.

2. A soma dos elementos S_n, é $S_n = 4 \times \frac{1}{2} \times 4(4^2+1) = 136$ ou $S_n = 4^2 \times (\frac{4^2+1}{2}) = 136$.

3. A soma dos elementos dos quatro cantos S_4 $(1, 4, 13, 16)$ é $S_4 = 4 \times (\frac{4^2+1}{2}) = 34$.

4. A constante mágica K, pode ser notada na soma de seus quatro cantos $K = S_4 = 34$.

5. A soma dos quatro elementos centrais S_{4c} $(6, 7, 10, 11)$ é $S_{4c} = S_n = 34$.

6. A soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro S_{4ec} $(2, 3, 14, 15)$ ou $(5, 8, 9, 12)$ é $S_{4ec} = S_n = 34$.

7. A soma dos quadrados dos elementos da primeira linha S_{1l} é igual à soma dos quadrados dos elementos da última linha, assim como a soma dos quadrados dos elementos da segunda linha S_{2l} é igual à soma dos quadrados dos elementos da penúltima linha e assim sucessivamente, dependendo do número de linhas que o quadrado possuir, então,

   Soma da primeira linha S_{1l}:

   $S_{1l} = 1^2 + 15^2 + 14^2 + 4^2 = 438$.

   Soma da segunda linha S_{2l}: $S_{2l} = 12^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 310$.

   Soma da terceira linha S_{3l}:

   $S_{3l} = 8^2 + 10^2 + 11^2 + 5^2 = 310$.

   Soma da terceira linha S_{4l}:

   $S_{4l} = 13^2 + 3^2 + 2^2 + 16^2 = 438$.

8. A soma dos quadrados das linhas ímpares é igual à soma dos quadrados das linhas pares:

   Soma da primeira com a terceira linha:

   $S_{1l} + S_{3l} = 438 + 310 = 748$

   Soma da segunda com a quarta linha:

   $S_{2l} + S_{4l} = 310 + 438 = 748$

9. A diferença entre os números dispostos nos dois cantos da primeira linha $(4-1=3)$, somada ao primeiro elemento à esquerda da última linha $(3+13=16)$ resulta no valor do elemento da última linha à direita que é igual a 16.

Observe estas propriedades também nos próximos quadrados mágicos duplamente par das Figuras 26 e 27, que serão apresentados de forma simplificada.

4.3.2 Ordem 8

Utilizando os números na sequência $1, 2, \ldots, 64$, terá cinco quadrados menores, sendo 4 de ordem 2 $(\frac{8}{4})$ e um outro central de ordem 4 $(\frac{8}{2})$. A mediana é $\frac{32+33}{2}$ que é igual a $\frac{65}{2}$. A constante mágica é igual a 8 vezes a mediana, logo $8 \times \frac{65}{2}$ é igual a 260. A soma dos elementos é igual a 8 vezes a constante mágica (8×260) ou também 8^2 vezes a mediana $(8^2 \times \frac{65}{2})$ que é igual a 2080. A soma dos elementos dos quatro cantos $(1, 8, 57, 64)$ é igual à soma dos quatro elementos centrais $(28, 29, 36, 37)$, que é igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $(25, 32, 33, 40)$ ou $(4, 5, 60, 61)$, que é igual 4 vezes a mediana $(4 \times \frac{65}{2})$ ou quatro oitavos da constante mágica $(\frac{4}{8} \times 260)$, que é igual a 130. Figura 26.

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

Figura 26 – Quadrado mágico de ordem 8.

4.4 ORDEM 12

Utilizando os números na sequência $1, 2, 3, \ldots, 144$, terá cinco quadrados menores, sendo 4 de ordem 3 $(\frac{12}{4})$ e um outro central de ordem 6 $(\frac{12}{2})$. A mediana é $\frac{72+73}{2}$ que é igual a $\frac{145}{2}$. A constante mágica é igual a 12 vezes a mediana $(12 \times \frac{145}{2})$ que é igual a 870. A soma dos elementos é igual a 12 vezes a constante mágica (12×870) ou também 12^2 vezes a mediana $(12^2 \times \frac{145}{2})$ que é igual a 10440. A soma dos elementos dos quatro cantos $(1, 12, 133, 144)$ é igual à soma dos quatro elementos centrais $(66, 67, 78, 79)$, sendo igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $(61, 72, 73, 84)$ ou $(6, 7, 138, 139)$, que é igual 4 vezes a mediana $(4 \times \frac{145}{2})$, ou quatro doze avos da constante mágica $(\frac{4}{12} \times 870)$ que é igual a 290. Figura 27.

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12
13	14	15	129	128	127	126	125	124	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	113	112	34	35	36
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37
109	110	111	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	131	132
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144

Figura 27 – Quadrado mágico de ordem 12.

5 ATIVIDADES PARA O PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentam-se atividades que podem ser usadas em sala de aula, pelo professor de matemática, para desenvolver o raciocínio lógico do aluno de uma maneira interessante e descontraída, utilizando quadrados mágicos tradicionais e os passatempos sudoku, também questões olímpicas da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP), bem como as questões do banco de questões que servem para a preparação das Olimpíadas de Matemática.

5.1 QUADRADOS MÁGICOS

Os quadrados mágicos, servem como um desafio interessante e divertido para os alunos despertarem o interesse em aprender a disciplina de matemática, considerada difícil por muitos estudantes. Portanto, podem ser aplicados, para alunos das séries finais do ensino fundamental, começando com o quadrado mágico tradicional, o Lo Shu, utilizando os números naturais consecutivos. E a partir do sétimo ano, utilizando o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números racionais servindo como uma ferramenta interessante ao professor de matemática, para fazê-los aprender esta disciplina de uma maneira descontraída e desafiadora.

Atividade 1: Completar um quadrado mágico 3×3 utilizando números pares de 2 a 18, de modo a obter uma constante na soma das linhas, colunas e diagonais, chamada constante mágica.
Dica: Encontrar o valor da mediana (elemento central) e o valor da constante mágica.

Solução: Os números pares de 2 a 18 são: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ e 18, então o elemento central é o 10, logo este elemento preencherá a casa central do quadrado mágico, que pertence a segunda linha e a segunda coluna. A constante mágica será a soma dos elementos $(2 + 4 + \ldots + 18 = 90)$ que dividido por 3 resulta em 30. Segue abaixo na Figura 28 o quadrado 3×3, preenchido.

16	2	12
6	10	14
8	18	4

Figura 28 – Quadrado mágico, atividade 1.

- A soma dos elementos da diagonal principal satisfaz: $16 + 10 + 4 = 30$.

- A soma dos elementos da diagonal secundária satisfaz: $12 + 10 + 8 = 30$.

- A soma dos elementos de cada linha satisfaz:

$$\begin{array}{rcl} 16 + 2 + 12 & = & 30 \\ 6 + 10 + 14 & = & 30 \\ 8 + 18 + 4 & = & 30 \end{array}.$$

- A soma dos elementos de cada coluna satisfaz:

$$\begin{array}{rcl} 16 + 6 + 8 & = & 30 \\ 2 + 10 + 18 & = & 30 \\ 12 + 14 + 4 & = & 30 \end{array}.$$

Atividade 2: Completar o quadrado 3×3 utilizando números inteiros de -2 a 6, de modo obter uma constante na soma das linhas, colunas e diagonais.
Dica: Encontrar o valor da mediana (elemento central) e o valor da constante mágica.

Solução: Os números inteiros de -2 a 6 são: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6, então o elemento central é o 2, logo este elemento preencherá a casa central do quadrado mágico, que pertence a segunda linha e a segunda coluna. A constante mágica será a soma dos elementos $(-2 + (-1) + \ldots + 6 = 18)$ que dividido por 3 resulta em 6. Segue abaixo na Figura 29 o quadrado 3×3, preenchido.

5	-2	3
0	2	4
1	6	-1

Figura 29 – Quadrado mágico, atividade 2.

- A soma dos elementos da diagonal principal satisfaz: $5 + 2 + (-1) = 6$.

- A soma dos elementos da diagonal secundária satisfaz: $3 + 2 + 1 = 6$.

- A soma dos elementos de cada linha satisfaz:

$$\begin{array}{rcl} 5 + (-2) + 3 & = & 6 \\ 0 + 2 + 4 & = & 6 \\ 1 + 6 + (-1) & = & 6 \end{array}.$$

- A soma dos elementos de cada coluna satisfaz:

$$\begin{aligned} 5+0+1 &= 6 \\ (-2)+2+6 &= 6 \ . \\ 3+4+(-1) &= 6 \end{aligned}$$

Atividade 3: Completar o quadrado 5×5 utilizando os primeiros números naturais ímpares, de modo a obter uma constante na soma das linhas, colunas e diagonais.
Dica: Encontrar o valor da mediana (elemento central), o valor da constante mágica e utilizar a regra prática de quadrado mágico tradicional de ordem ímpar.

Solução: O quadrado mágico 5×5, tem 25 elementos, logo os primeiros 25 números naturais ímpares são: $1, 3, 5, \ldots$ até 49, o elemento central é o 25, logo este elemento preencherá a casa central do quadrado mágico, que pertence a terceira linha e a terceira coluna. A constante mágica será a soma dos elementos $(1 + 3 + \ldots + 49 = 625)$ que dividido por 5 resulta em 125. Segue abaixo na Figura 30 o quadrado 5×5, preenchido.

33	47	1	15	29
45	9	13	27	31
7	11	25	39	43
19	23	37	41	5
21	35	49	3	17

Figura 30 – Quadrado mágico, atividade 3.

- A soma dos elementos da diagonal principal satisfaz: $33 + 9 + 25 + 41 + 17 = 125$.

- A soma dos elementos da diagonal secundária satisfaz: $29+27+25+23+21 = 125$.

- A soma dos elementos de cada linha satisfaz:

$$\begin{aligned} 33+47+1+15+29 &= 125 \\ 45+9+13+27+31 &= 125 \\ 7+11+25+39+43 &= 125 \ . \\ 19+23+37+41+5 &= 125 \\ 21+35+49+3+17 &= 125 \end{aligned}$$

- A soma dos elementos de cada coluna satisfaz:

$$\begin{aligned} 33+45+7+19+21 &= 125 \\ 47+9+11+23+35 &= 125 \\ 1+13+25+37+49 &= 125\ . \\ 15+27+39+41+3 &= 125 \\ 29+31+43+5+17 &= 125 \end{aligned}$$

Atividade 4: Encontre os valores de A, B e C, da Figura 31, sabendo que a soma dos 9 elementos pertencentes ao quadrado mágico é igual a 162.
Dica: Encontrar o valor da constante mágica.

A	6	21
12	B	24
15	30	C

Figura 31 – Quadrado mágico, atividade 4.

Solução: Para encontrar a constante mágica divide-se o valor da soma dos elementos pelo número de linhas/colunas, ou seja, 162 dividido por 3, resulta em 54, logo a constante mágica é 54. Para encontrar os valores correspondentes a A, B e C, basta fazer a diferença entre a constante mágica e a soma dos elementos que aparecem em cada linha, como segue:

- $A = 54 - (6 + 21)$, logo $A = 27$
- $B = 54 - (12 + 24)$, logo $B = 18$
- $C = 54 - (15 + 30)$, logo $C = 9$

5.2 SUDOKU

O Sudoku tradicional é um tipo particular de quadrado mágico de ordem 9, ou seja, possui 9 linhas e 9 colunas, totalizando 81 casas, e são preenchidos com os algarismos $1, 2, 3, \ldots, 9$ em cada linha e, em cada coluna, sendo que a soma de cada linha e de cada coluna é sempre uma constante igual a 45.

Utilizado como um passatempo, que vem com algumas casas preenchidas, usando apenas números de 1 a 9 em todas as suas 81 casas. E que cada número aparece em 9 casas diferentes, sendo que cada número deve aparecer em uma casa de cada subquadrado de ordem 3, uma única vez em cada linha e, também em cada coluna. Este tipo de quadrado mágico foi criado em 1979 pelo arquiteto norte-americano de quebra-cabeça Howard Garns e publicado na revista norte-americana Math Puzzles and Logic Problems, da editora Dell Magazines, especializada em desafios e quebra-cabeças, somente em 1984, chegou ao Japão pela revista Nikoli (revista de raciocínio lógico oriental), onde recebeu o nome de Sudoku (que significa em Japonês: os dígitos devem permanecer únicos). Mas, esse passatempo conquistou um espaço em vários jornais e ficou conhecido mundialmente a partir de 2005, inclusive a partir de 08 de dezembro deste mesmo ano inicia a publicação pelo jornal "Folha de São Paulo"(BEGUOCI, 2005). Atualmente, existem vários níveis de dificuldade para resolver: fácil, médio, difícil e muito difícil, e este passatempo é utilizado inclusive nas escolas, como, forma de o aluno desenvolver o seu raciocínio lógico.

Atividade 5: Preencha as lacunas vazias da Figura 32 com algarismos de 1 a 9, de modo que o mesmo algarismo não se repita nem na linha e nem na coluna.

					4			
7					6	3		
		6			9		7	
8					7			9
	3			2		4		
				9		2		
				5			8	4
3						7		
	8	7				1	6	

Figura 32 – Sudoku, Atividade 5.

Solução: Estratégia do jogo é analisar onde pode ser colocado cada número em cada linha, a começar pelo número 1 e indo até o número 9, haverá um ou mais número que só poderá ser colocado em uma única casa, feito isso, se analisa as colunas com a maior quantidade de casas preenchidas, e na sequência se analisa os quadrados menores, começando pelos que possuem o maior número de casas já preenchidas. E vai se repetindo o processo até o preenchimento total das 81 casas. Lembrando que para cada casa vazia há apenas uma possibilidade de preenchimento. Segue abaixo na Figura 33 o quadrado 9×9, preenchido.

Atividade 6: Preencha as lacunas vazias da Figura 34 com algarismos de 1 a 9, de modo que o mesmo algarismo não se repita nem na linha e nem na coluna.

Solução: Para o preenchimento, se utiliza as estratégias mencionadas na atividade

1	5	3	2	7	4	8	9	6
7	9	8	5	1	6	3	4	2
4	2	6	3	8	9	5	7	1
8	1	2	4	3	7	6	5	9
9	3	5	6	2	8	4	1	7
6	7	4	1	9	5	2	3	8
2	6	1	7	5	3	9	8	4
3	4	9	8	6	1	7	2	5
5	8	7	9	4	2	1	6	3

Figura 33 – Resposta, Sudoku, Atividade 5.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura 34 – Sudoku, Atividade 6.

anterior. Segue abaixo na Figura 35 o quadrado 9×9, preenchido.

5.3 QUESTÕES OLÍMPICAS - OBMEP

A Olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas tem como objetivo principal, estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que despertem o interesse e a curiosidade de professores e estudantes, não envolvendo cálculos gigantescos e sim raciocínio lógico. (IMPA, 2006, 2014, 2016).

Atividade 7 (OBMEP - 2014, 2ªfase, número 4, Nível 1): O quadrado da figura 36 possui o número mágico 44, pois, se você escolher quatro números de modo que quaisquer dois deles não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna, a soma desses quatro números é sempre 44. Por exemplo, os números nas casas vermelhas somam 44; isso também ocorre com os números nas casas azuis.

a) O quadrado da Figura 37 tem um número mágico. Qual é este número?

b) Complete o quadrado da Figura 38, colocando em cada casa a soma dos números

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Figura 35 – Resposta, Sudoku, Atividade 6.

6	7	11	9
10	11	15	13
11	12	16	14
8	9	13	11

Figura 36 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4.

que estão fora do quadrado, indicados na linha e coluna correspondentes. Esse quadrado possui um número mágico. Qual é esse número?

c) Complete o quadrado da Figura 39 de modo que ele possua um número mágico.

d) Explique por que o procedimento usado no item b) sempre irá produzir um quadrado que possui um número mágico, quaisquer que sejam os números fora do quadrado, indicados nas linhas e nas colunas.

Solução: **a)** Pode-se somar os elementos da diagonal principal $19+28+14+9 = 70$, logo o número mágico é 70.

b) Segue o quadrado preenchido da Figura 40, e utilizando a soma dos 4 elementos da diagonal principal, temos: $2 + 3 + 4 + 5 = 14$. Logo o número mágico é 14.

c) Vamos calcular o número mágico, escolhendo quatro elementos que não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna, ou seja, $8 + 8 + 9 + 16 = 41$, logo o número mágico é 41.

- Canto superior esquerdo satisfaz: $41 - (12 + 9 + 16) = 4$.
- Canto superior direito satisfaz: $41 - (17 + 5 + 11) = 8$.
- Canto inferior esquerdo satisfaz: $41 - (9 + 17 + 8) = 7$.
- Canto inferior direito satisfaz: $41 - (4 + 12 + 14) = 11$.

19	26	28	21
21	28	30	23
5	12	14	7
7	14	16	9

Figura 37 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4, letra (a).

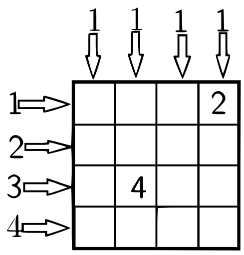

Figura 38 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4, letra (b).

E o quadrado fica preenchido, conforme a Figura 41

d) O procedimento usado no item b) sempre produzirá um quadrado cujo número mágico é igual à soma de todos os oito números indicados fora do quadrado, pois ao somarmos números de modo que quaisquer dois deles não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna, estaremos somando os oito números indicados fora do quadrado. Dependendo da escolha dos números, as parcelas desta soma podem aparecer em diferentes ordens, mas são sempre os mesmos oito números que são somados. Cabe observar que todo quadrado que possui um número mágico é proveniente do processo de soma de números indicados fora dele, como apresentado acima.

Atividade 8 (OBMEP - 2006, 2ªfase, número 6, Nível 2): O quadrado da Figura 42 é chamado especial porque:

- ele está dividido em 16 quadrados iguais;
- em cada linha e em cada coluna aparecem os algarismos $1, 2, 3$ e 4;
- em cada um dos quadrados A, B, C e D (como na Figura 43) aparecem os algarismos 1, 2, 3 e 4.

a) Complete o quadrado da Figura 44 de modo que ele se torne especial.

	8	13	
8	12	17	12
5	9	14	9
	11	16	

Figura 39 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4, letra (c).

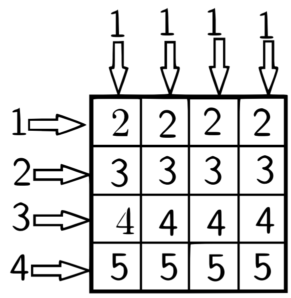

Figura 40 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4, letra (b), solução.

b) É possível completar o quadrado da Figura 45 de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

c) Exiba todas as maneiras de completar o quadrado da Figura 46 de modo a obter um quadrado especial.

d) Quantos quadrados especiais existem?

Solução: **a)** O quadrado da Figura 47 está preenchido e é um quadrado especial.

b) Não. Pois o quadradinho (lacuna) que fica na segunda linha e na quarta coluna não pode ser preenchido nem com o número 3 e nem com o número 4, pois nesta linha já contém esses números. Por outro lado, também não podemos colocar o número 1 e o número 2, pois já contém nesta coluna.

c) Temos 3 maneiras para preencher, conforme a Figura 48.

d) Para preencher o quadrado A, da Figura 43:

- podemos colocar o número 1 em quatro posições;
- podemos colocar o número 2 em três posições;
- podemos colocar o número 3 em duas posições;
- podemos colocar o número 4 em uma posição.

Logo, o quadrado A da Figura 43 pode ser preenchido de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras. Preenchido o quadrado A, vamos preencher o quadrado D:

4	8	13	8
8	12	17	12
5	9	14	9
7	11	16	11

Figura 41 – OBMEP/2014, 2ªfase, Nível 1, questão 4, letra (c), solução.

4	2	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	3	1

Figura 42 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, Figura I.

- podemos colocar o número 1 em qualquer uma das quatro posições;
- já colocado o número 1, temos mais três maneiras de completar o quadrado, conforme no item c).

Logo existem $24 \times 4 \times 3 = 288$ maneiras de preencher os quadrados A e D. Estando os quadrados A e D preenchidos, resta apenas uma maneira de preencher os quadrados B e C.

Atividade 9 (OBMEP - 2016, 2ªfase, número 1, Nível 3): Um quadriculado 3×3 preenchido com números inteiros é chamado de medimágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois, veja Figura 49.

a) Preencha o quadriculado da Figura 50 para que ele seja medimágico.

b) O quadriculado medimágico da Figura 51, tem os números $7, 9$ e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

Solução: **a)** Se o termo do meio é a média aritmética, então:

- O elemento da primeira linha e segunda coluna, é $3 + 19 = 22 : 2 = 11$;
- O elemento da terceira linha e primeira coluna é $8 \times 2 = 16 - 3 = 13$;
- O elemento central (segunda linha e segunda coluna) é $13 + 19 = 32 : 2 = 16$;
- O elemento da segunda linha e terceira coluna é $16 \times 2 = 32 : -8 = 24$;

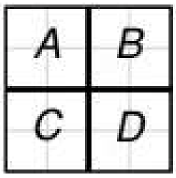

Figura 43 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, Figura II.

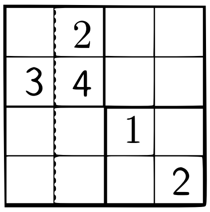

Figura 44 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, letra (a).

- O elemento da terceira linha e terceira coluna é $24 \times 2 = 48 - 19 = 29$;
- O elemento da terceira linha e segunda coluna é $13 + 29 = 42 : 2 = 21$.

Quadriculado preenchido conforme, Figura 52

b) Para uma melhor visualização se coloca letras nas casas vazias, conforme Figura 53

- Se $a + c = 2 \times 7$, então $c = 14 - a$, se $a = 2x - 20$, logo $c = 34 - 2x$;
- Se $9 + d = 2 \times x$, então $d = 2x - 9$;
- Se $a + 20 = 2 \times x$, então $a = 2x - 20$;
- Se $a + b = 2 \times 9$, então $b = 18 - a$, se $a = 2x - 20$, logo $b = 38 - 2x$;
- Se $7 + e = 2 \times x$, então $e = 2x - 7$; O quadrado medimágico fica em função de x conforme a Figura 54
- Utilizando os valores da terceira linha, temos então o valor de x:

$$\begin{array}{rcl} 38 - 2x + 20 & = & 2 \times (2x - 7) \\ 19 - x + 10 & = & 2x - 7 \\ 19 + 10 + 7 & = & 3x \\ 36 : 3 & = & x \\ x & = & 12 \end{array} .$$

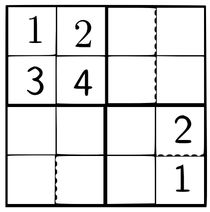

Figura 45 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, letra (b).

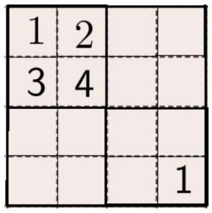

Figura 46 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, letra (c).

Logo o valor de x é igual a 12.

c) Considerando um quadrado medimágico qualquer, como o da Figura 55.

$$\begin{aligned} a+i &= 2e \\ b+h &= 2e \\ d+f &= 2e \\ c+g &= 2e \end{aligned}.$$

Então $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 2e+2e+2e+2e+e = 9e$. Como o número representado pela letra **e** é um número inteiro, a soma de todos é múltiplo de 9, ou seja, em qualquer quadrado medimágico a soma de todos os seus números é igual a 9 vezes o termo central.

5.4 BANCO DE QUESTÕES

São questões preparadas pela equipe da Olimpíada de matemática das escolas públicas (OBMEP), para a utilização no preparo dos alunos para essas Olimpíadas, (BRIETZKE; DOERING, 2010), (BELTRÁN et al., 2013), (ASSIS et al., 2015).

Atividade 10 (BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP - 2013, Questão 1, Nível 3): Um quadrado mágico é uma tabela quadrada na qual a soma dos números em qualquer linha ou coluna é constante. Por exemplo a Figura 56 é um quadrado mágico, o qual usa os números de 1 a 9. Como o leitor pode verificar, a soma em qualquer linha ou coluna é sempre igual a 15.

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

Figura 47 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, letra (a), solução.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Figura 48 – OBMEP/2006, 2ªfase, Nível 2, questão 6, letra (c), solução.

a) O quadrado da Figura 57 é parte de um quadrado mágico que usa os números ímpares entre o 1 e 17. Descubra qual número X deve ser.

b) Um quadrado mágico é dito hipermágico quando a soma em qualquer linha, coluna, ou diagonal, é constante. Escreva os números de 1 a 9 no quadrado 3×3 de modo que ele se torne hipermágico.

Solução: **a)** Os números ímpares de 1 a 17 são $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ e a soma destes números é 81 e como o quadrado é 3×3, logo 81 dividido por 3 é 27, ou seja o número mágico é 27. Logo:

- O elemento da primeira linha e terceira coluna é $27 - (13 + 3) = 11$;
- O elemento da primeira linha e da primeira coluna é $27 - (1 + 11) = 15$;
- $X = 27 - (15 + 5) = 7$

O número x é igual a 7.

Assim o quadrado mágico fica conforme a Figura 58.

b) Uma possível solução é o quadrado da Figura 59.

Atividade 11 (BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP - 2010, Questão 30, Nível 1): Complete as casas em branco da tabela da Figura 60 com frações, de tal

12	15	18
7	10	13
2	5	8

Figura 49 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1.

3		19
8		

Figura 50 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (a).

modo que a soma dos três números de qualquer linha, qualquer coluna e das diagonais seja sempre a mesma.

Solução:

- A soma da diagonal principal é $\frac{4}{10}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{15}{10}$ ou $\frac{3}{2}$.
- Casa da primeira linha e segunda coluna é $\frac{15}{10}-(\frac{1}{2}+\frac{5}{10})=\frac{1}{2}$
- Casa da primeira linha e primeira coluna é $\frac{15}{10}-(\frac{1}{2}+\frac{3}{5})=\frac{2}{5}$
- Casa da segunda linha e primeira coluna é $\frac{15}{10}-(\frac{2}{5}+\frac{4}{10})=\frac{7}{10}$
- Casa da segunda linha e terceira coluna é $\frac{15}{10}-(\frac{7}{10}+\frac{1}{2})=\frac{3}{10}$
- Casa da terceira linha e terceira coluna é $\frac{15}{10}-(\frac{3}{5}+\frac{3}{10})=\frac{3}{5}$

Como pode-se observar o quadrado preenchido na Figura 61.

Atividade 12 (BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP - 2010, Questão 20, Nível 2): Dizemos que o quadrado abaixo é um quadrado mágico porque a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre a mesma. No caso do quadrado mágico da Figura 62 essa soma é 15.

Complete os cinco números que faltam no quadrado da Figura 63 para que ele seja um quadrado mágico.

Solução:

	7	
9	x	
		20

Figura 51 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (b).

3	11	19
8	16	24
13	21	29

Figura 52 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (a), solução.

- A soma dos números da diagonal principal é $-4 + 0 + 4 = 0$
- O número da terceira linha e terceira coluna é $0 - (-12 + 0) = 12$
- O número da primeira linha e segunda coluna é $0 - (-12 + (-4)) = 16$
- O número da segunda linha e primeira coluna é $0 - (-12 + 4) = 8$
- O número da terceira linha e segunda coluna é $0 - (16 + 0) = -16$
- O número da segunda linha e terceira coluna é $0 - (-4 + 12) = -8$

Segue na Figura 64, o quadrado mágico preenchido.

Atividade 13 (BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP - 2010, Questão 51, Nível 2): Num quadrado mágico, a soma dos três números de cada linha, coluna

a	7	c
9	x	d
b	e	20

Figura 53 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (b), solução.

$2x-20$	7	$34-2x$
9	x	$2x-9$
$38-2x$	$2x-7$	20

Figura 54 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (b), solução.

ou diagonal é sempre a mesma. Dado o quadrado mágico da Figura 65, parcialmente preenchido, qual deve ser o valor de x?

(a) 20 (b) 22 (c) 23 (d) 25 (e) 27

Solução: Considerando que o número que se encontra na primeira linha e terceira coluna seja y, então temos que a soma da diagonal secundária seja igual à soma da terceira coluna, como se verifica: $26 + 14 + y = y + x + 13$, logo $x = 26 + 14 - 13$, donde $x = 27$. A opção correta é (e).

Atividade 14 (BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP - 2015, Questão 27, Nível 1): Quadrados mágicos

a) João descobriu uma maneira de arranjar os números $1, 2, 3, \ldots, 16$ em um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre as mesmas. Uma das possibilidades está no exemplo da Figura 66.

Encontre outro exemplo de distribuição desses 16 números satisfazendo as mesmas condições.

b) Verifique que em qualquer distribuição possível, sempre a soma dos números de cada linha e coluna é 34.

c) João fez agora um novo tipo de tabuleiro com outros números positivos, conforme a Figura 67. O produto dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal são sempre os mesmos. Quanto vale o número $4H$?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Figura 55 – OBMEP/2016, Nível 3, questão 1, letra (c), solução.

1	5	9
8	3	4
6	7	2

Figura 56 – Banco de Questões/OBMEP/2013, Nível 3, questão 1.

Solução: **a)** Uma possível distribuição é a Figura 68.

b) Se somarmos os números $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)$, esta soma é 136, como estes números são distribuídos no quadrado em quatro linhas, logo a soma 136 fica dividido por 4, que é igual a 34. O mesmo argumento pode ser aplicado para as colunas.

c) Como o produto de cada linha é igual ao produto de cada coluna, então:

- O produto da primeira coluna é igual ao produto da segunda linha,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\times C\times 4\times F &= C\times 2\times 8\times 2 \\ 2\times C\times F &= 32\times C \\ F &= 16 \end{aligned}$$

- O produto da segunda coluna é igual ao produto da quarta linha,

$$\begin{aligned} 32\times 2\times 1\times G &= F\times G\times H\times 16 \\ 64\times G &= 256\times H\times G \\ 64 &= 256\times H \\ 4H &= 1 \end{aligned}$$

	1	
5		13
x		3

Figura 57 – Banco de Questões/OBMEP/2013, Nível 3, questão 1, letra (a).

15	1	11
5	9	13
7	17	3

Figura 58 – Banco de Questões/OBMEP/2013, Nível 3, questão 1, letra (a), solução.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 59 – Banco de Questões/OBMEP/2013, Nível 3, questão 1, letra (b), solução.

		$3/5$
	$1/2$	
$0,4$	$0,5$	

Figura 60 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 1, questão 30.

2/5	1/2	3/5
7/10	1/2	3/10
0, 4	0, 5	3/5

Figura 61 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 1, questão 30, solução.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 62 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 2, questão 20.

-12		-4
	0	
4		

Figura 63 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 2, questão 20.

-12	16	-4
8	0	-8
4	-16	12

Figura 64 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 2, questão 20, letra (b)

1	14	x
26		13

Figura 65 – Banco de Questões/OBMEP/2010, Nível 2, questão 51.

4	6	9	15
13	11	8	2
16	10	5	3
1	7	12	14

Figura 66 – Banco de Questões/OBMEP/2015, Nível 1, questão 27, letra (a)

1/2	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

Figura 67 – Banco de Questões/OBMEP/2015, Nível 1, questão 27, letra (c)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Figura 68 – Quadrado mágico 4×4

6 CONCLUSÃO

Busquei um tema para a minha dissertação que fosse ligado ao meu dia a dia. Desde 2012 venho trabalhando, preparando os meus alunos da educação básica para as Olimpíadas de matemática e os quadrados mágicos estão presentes nesta caminhada, bem como o sudoku que é o meu passatempo preferido das minhas horas vagas.

Quanto a pesquisa sobre como construir os quadrados mágicos, encontrei algumas regras práticas para serem utilizadas na sua construção, gostei tanto que fiz todos os quadrados mágicos do 3×3 até o 30×30, foi uma experiência fascinante. E nestas construções, observei que algumas entradas possuem certas regularidades, onde busquei encontrar de forma empírica uma fórmula para estas entradas e que foi comprovado pela Fórmula já existente de La Louberé, (UKO; SINCLAIR., 2013).

O objetivo desta dissertação foi encontrar e mostrar regras práticas, de fácil compreensão para construir quadrados mágicos, o qual não foi possível obter uma única regra para todos os tipos de quadrados mágicos, e sim 3 métodos diferentes de construção, conforme o número de linhas/colunas, ou seja, uma para os de ordem ímpar, outra para os de ordem simplesmente par e uma outra para os de ordem duplamente par, mas todos de fácil entendimento.

Sem dúvida, o conhecimento básico para a construção de um quadrado mágico é saber identificar suas principais propriedades, como: a mediana, a constante mágica e a soma de seus elementos, além das suas correlações, sendo essencial para o professor de matemática da Educação Básica que visa estimular o seu aluno com o raciocínio lógico.

Espera-se que este trabalho seja útil aos professores de matemática para utilizarem em sala de aula, esta ferramenta chamada "quadrados mágicos", pois além da construção em si, tem-se questões Olímpicas da OBMEP, do Banco de Questões, entre outras que possam ser utilizadas para os alunos da Educação Básica para despertar o interesse pela matemática.

REFERÊNCIAS

ASSIS, C. et al. *Banco de Questões 2015*. 1. ed. Estrada Dona Castorina, 110 - Horto, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, 2015. 174 p. ISBN 9788524403972.

BEGUOCI, L. *Raciocínio Lógico*. equilibrio, 2005. Acessado em 08/12/2005.

BELTRÁN, J. et al. *Banco de Questões 2013*. 1. ed. Estrada Dona Castorina, 110 - Horto, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, 2013. 184 p. ISBN 9788524403484.

BRIETZKE, E.; DOERING, C. *Banco de Questões 2010*. 1. ed. Estrada Dona Castorina, 110 - Horto, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, 2010. 352 p.

FILHO, R. F. *Engenharia dos Quadrados Mágicos de ordem ímpar, Matemática Recreativa*. primeira. [S.l.]: Florianópolis, 2017. 413 p. ISBN 9788592320706.

FULTS, J. L. *Magic Squares*. Illinois, Estados Unidos da América: Open Court Publishing Co, 1974.

GADOTTI, A. C. et al. *Quadrados mágicos*. 2013. 5 p. <`http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2187_1954_ID.pdf`>. Acessado em 18 a 21/07.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. *Introdução à Álgebra Linear*. 2. ed. Estrada Dona Castorina, 110 - Horto, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, 2016. 271 p. ISBN 9788583370871.

IMPA, I. d. M. P. e. A. *Provas e Soluções*. 2006, 2014, 2016. <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acessado em 20/10/2019.

KRAITCHIK, M. *Mathematical Recreations*. primeira. [S.l.]: Dover Publications, 1935. 330 p. ISBN 0486201635.

LOUBÈRE, S. de L.; P, A. *A New Historical Relation of the Kingdom of Siam*. F.L., 1693. <https://books.google.com.br/books?id=RvpBAQAAMAAJ>.

MACHADO, J. S. *Quadrados mágicos com aplicações*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, 2013.

MORAN, J. *The wonders of magic squares*. [S.l.]: Vintage Books, 1982. 227 p.

PICKOVER, C. A. *The Zen of magic squares, circles, and stars*. Princeton, Nova Jersey, Estados Unidos da América: Princeton University Press, 2002.

SANTINHO, M. S.; MACHADO., R. M. *Os Fascinantes quadrados mágicos*. 2006. 16 p. <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf>. Acessado em 11/11/2019.

SESIANO, J. *Magic Squares: Their History and Construction from Ancient Times to AD 1600*. 5. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019. 313 p. ISBN 978-3-030-17993-9.

UKO, L. U.; SINCLAIR., J. L. *A simple formula for de la loubère's magic squares method*. 2013. 6 p.

APÊNDICE A – Quadrados Mágicos de ordens 5, 7 e 9.

Ordem 5

Utilizando os números na sequência de **1** a **25**, a mediana é **13**. A constante mágica é **5** vezes a mediana, sendo igual a **65**. A soma dos elementos é igual a **5** vezes a constante mágica ou $\mathbf{5^2}$ vezes a mediana, sendo igual a **325**. A soma dos elementos dos quatro cantos $\mathbf{(9, 11, 15, 17)}$ é igual a soma dos quatro elementos do centro de cada alinhamento periférico $\mathbf{(6, 7, 19, 20)}$, que é igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 4, 22, 25)}$, sendo igual a **4** vezes a mediana ou quatro quintos da constante mágica, sendo igual a **52**. A soma dos dois elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 25)}$ e $\mathbf{(4, 22)}$ é igual à soma dos dois elementos do centro de cada alinhamento periférico $\mathbf{(7, 19)}$ e $\mathbf{(6, 20)}$ sendo igual ao dobro da mediana, sendo igual a **26**. Veja Figura 69.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Figura 69 – Quadrado mágico de ordem 5.

Ordem 7

Utilizando os números na sequência de **1** a **49**, a mediana é **25**. A constante mágica é **7** vezes a mediana, sendo igual a **175**. A soma dos elementos é igual a **7** vezes a constante mágica ou $\mathbf{7^2}$ vezes a mediana, sendo igual a **1225**. A soma dos elementos dos quatro cantos $\mathbf{(20, 22, 28, 30)}$ é igual à soma dos quatro elementos do centro de cada alinhamento periférico $\mathbf{(16, 17, 33, 34)}$ ou $\mathbf{(9, 14, 36, 41)}$, que é igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 5, 45, 49)}$ é igual a **4** vezes a mediana ou quatro sétimos da constante mágica, sendo igual a **100**. A soma dos dois elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 49}$ ou $\mathbf{5, 45)}$ é igual a soma dos dois elementos do centro de cada alinhamento periférico $\mathbf{(17, 33}$ ou $\mathbf{16, 34)}$ e $\mathbf{(9, 41}$ ou $\mathbf{14, 36)}$ é igual ao dobro da mediana, sendo igual a **50**. Figura 70.

Ordem 9

Utilizando os números na sequência de **1** a **81**, a mediana é **41**. A constante mágica é **9** vezes a mediana, sendo igual a **369**. A soma dos elementos é igual a **9** vezes a constante mágica ou $\mathbf{9^2}$ vezes a mediana, sendo igual a **3321**. A soma dos elementos dos quatro cantos $\mathbf{(35, 37, 45, 47)}$ é igual à soma dos quatro elementos do centro de cada alinhamento periférico $\mathbf{(30, 31, 51, 52)}$, $\mathbf{(19, 21, 61, 63)}$ ou $\mathbf{(11, 17, 65, 71)}$, que é igual à soma dos quatro elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 6, 76, 81)}$, sendo igual a **4** vezes a mediana ou quatro nonos da constante mágica, sendo igual a **164**. A soma dos dois elementos extremos de um alinhamento que passa pelo centro $\mathbf{(1, 81)}$ e $\mathbf{(6, 76)}$ é igual a soma dos dois elementos do centro de cada alinhamento

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Figura 70 – Quadrado mágico de ordem 7.

periférico $\mathbf{(31, 51}$ e $\mathbf{30, 52)}$ ou $\mathbf{(21, 61}$ e $\mathbf{19, 63)}$ ou $\mathbf{(11, 71}$ e $\mathbf{17, 65)}$ é igual ao dobro da mediana, sendo igual a **82**. Figura 71.

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

Figura 71 – Quadrado mágico de ordem 9