Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

LEONARDO SOARES GOMES

FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO BÁSICO: ONDE VOU USAR ISSO NA VIDA PROFESSOR?

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

NITERÓI
MARÇO/2020

LEONARDO SOARES GOMES

FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO BÁSICO:

ONDE VOU USAR ISSO NA VIDA PROFESSOR?

Dissertação apresentada por **Leonardo Soares Gomes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

Niterói
2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

G633f Gomes, Leonardo Soares
FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO BÁSICO: ONDE VOU USAR ISSO NA VIDA PROFESSOR? / Leonardo Soares Gomes ; Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende, orientador. Niterói, 2020.
90 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PROFMAT.2020.mp.05323660775

1. Funções polinomiais. 2. Aplicações. 3. Ensino médio. 4. Produção intelectual. I. Moura Rezende, Prof. Dr. Wanderley, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - 510

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

LEONARDO SOARES GOMES

FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO:

ONDE VOU USAR ISSO NA VIDA, PROFESSOR?

Dissertação apresentada por Leonardo Soares Gomes ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovada em 03 de março de 2020

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende

Orientador

Prof. Dr. Mitchael Afonso Plaza Martelo

Prof. Dra. Isabel Campos Barroso

A Deus, a minha família e a minha esposa Fernanda que sempre me apoiaram incondicionalmente nos mais árduos caminhos da vida.

Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido força e determinação para escrever esta dissertação.

A minha esposa Fernanda, por toda fé e apoio nos momentos mais difíceis.

A minha família, pelo suporte e compreensão durante toda esta caminhada.

A minha filha Lilandra, que me inspira o tempo todo a ser uma pessoa melhor.

Aos colegas de mestrado, por trilharmos juntos esta jornada.

Aos professores do PROFMAT-UFF, pela generosidade de compartilhar seus conhecimentos e pelo apoio nos momentos de dificuldades.

Ao professor Doutor Wanderley Rezende, pela paciência, orientação, dedicação e pela confiança no meu trabalho em todos os momentos desta dissertação.

A coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal e de Nível Superior-CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Lista de Símbolos

$-$	Subtração
$+$	Adição
$\div$	Divisão
$\times$	Multiplicação
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$\rightarrow$	Implicação
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou Igual
$\geq$	Maior ou igual
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\sum$	Somatória
$\prod$	Produtório
$\nexists$	Não existe
/	Tal que

Lista de Ilustrações

Resumo

Nós professores, em muitas ocasiões, temos que lidar com perguntas que os alunos nos fazem durante as aulas. Uma, em especial, é bastante recorrente, ao longo do ano no ensino da matemática: “Professor, onde usarei isso na minha vida?” O presente trabalho tem por objetivo principal responder a uma questão tão comum na prática da sala de aula de matemática: Pra que serve estudar funções polinomiais? Abordando alguns dos principais resultados sobre funções polinomiais, discutindo sua história, expandindo o horizonte de possibilidades de estudo e aplicações em diversas áreas de conhecimento, além da Matemática, como Economia, Biologia etc., esta dissertação pretende ampliar a análise, a compreensão e o interesse do professor sobre este tema. A pergunta é do aluno, mas o público alvo deste estudo são professores do ensino médio. Além disso, como produto final do trabalho, desenvolve-se um site com atividades e informações importantes para o ensino de funções polinomiais.

Palavras-chaves: funções polinomiais, aplicações, ensino médio.

Abstract

We teachers, on many occasions, have to deal with questions that students ask us during classes. One, in particular, is quite recurrent throughout the year in teaching mathematics: "Teacher, where will I use this in my life?" The main objective of this paper is to answer such a common question in the practice of the mathematics classroom: What is the use of studying polynomial functions? Addressing some of the main results on polynomial functions, discussing its history, expanding the horizon of possibilities for study and applications in various areas of knowledge, in addition to Mathematics, such as Economics, Biology etc., this dissertation aims to expand the analysis, understanding and teacher's interest in this topic. The question is from the student, but the target audience for this study is high school teachers. In addition, as a final product of the work, a website is developed with activities and important information for teaching polynomial functions.

Key-words: polynomial functions, applications, high school.

Sumário

Introdução

Nós professores, em muitas ocasiões, temos que lidar com perguntas que os alunos nos fazem durante as aulas, interrompendo-as, e que escapam totalmente ao assunto da matéria que estamos lecionando naquele momento da pergunta. São questões como “Que horas termina a aula?”, “O senhor é casado?”, “Quantos anos tem?” e uma especialmente em cada assunto abordado ao longo do ano no ensino da matemática: “Onde usarei isso na minha vida?” expressando de forma clara que – excetuando-se a aritmética – os alunos veem a matemática como um assunto estéril, imerso em elucubrações inúteis.

Essa visão descontextualizada do ensino traduz-se, para o aluno, em antipatia e entendimento de que a matemática é apenas para “escolhidos” ou “gênios”, dificultando a identificação com a matéria e, consequentemente, a aprendizagem. Ainda que o aluno pense em ser engenheiro ou arquiteto, essa antipatia o leva a desvincular a disciplina da profissão.

Um dos conceitos considerados mais importantes da matemática é o de função. Enquanto o ponto, a reta e o plano são os fundamentos da geometria euclidiana – matéria dominante dos gregos à era moderna – a noção de função constitui a base da análise matemática, em especial a função polinomial, presente nos bancos escolares em todos os anos de escolaridade de forma explícita ou implicitamente.

São inúmeras as aplicações das funções polinomiais em todos os ramos de conhecimentos, mas seu ensino é muitas vezes mecânico e descontextualizado. Segundo Tuane Mattos (2017, pág 16):

> “(...) o conteúdo funções, por inúmeras vezes, não é trabalhado de forma adequada por muitos docentes. Na maioria dos casos, esse conteúdo é aplicado de forma mecânica, fazendo com que

> os alunos não associem o assunto funções com a prática do seu cotidiano, assim como acontece no processo de ensino das funções polinomiais"

Estabelecer conexões e analogias, apontar para outros assuntos, ideias, é vital para a construção de significados e de identidades. Entretanto não apenas as funções polinomiais, mas todos os ramos da matemática, que desde sempre estão ligados a questões mais profundas do ser humano, foram deslocados, pela escola disciplinar, para uma fria obsessão aos simbolismos, como cita Oscar Abdounur (1999, pág 9)

> "Apesar dos movimentos epistemológicos mais abrangentes no que tange às ideias de inteligência e conhecimento, o cenário educacional ocidental ainda supervaloriza as habilidades lógico-matemáticas e linguísticas no leque de aptidões que compõem a faculdade intelectual. Na dinâmica de ensino/aprendizagem, o quadro mencionado evidencia-se em distintas circunstâncias, tais como resolução de problemas, estratégias de convencimento, processos de avaliação, atividades heurísticas e negociações didáticas em geral. A revalorização do pensamento analógico adquire ainda maior importância quando avaliamos as consequências ou os fatores concomitantes de uma formação destituída dessa forma de comparação de ideias na construção da identidade individual e coletiva."

A valorização excessiva atribuída ao pensamento lógico-matemático no cenário ocidental relaciona-se à importância adquirida pela Lógica Formal em tal âmbito, vinculada originalmente à Gramática e à Dialética. Estas, por sua vez, encontram raízes mais profundas nos trabalhos de Aristóteles que, fundamentado na organização da língua grega, sistematiza a lógica dedutiva (Abdounur, 1999).

Tais aspectos vinculam-se fortemente ao pouco reconhecimento da relevância de analogias na criação e no discurso científico, bem como na resolução de problemas. Moldando tacitamente a estrutura dinâmica de pensamento coletivo ocidental, esse fenômeno ressoa em distintos terrenos, emergindo particularmente de maneira significativa no âmbito de ensino/aprendizagem.

Dessa forma, este estudo busca contextualizar as funções polinomiais nos diferentes campos de saberes, dividindo seu estudo em história das funções polinomiais, teoria, aplicações e sugestões de atividades e considerações finais, a saber:

No primeiro capítulo, faz-se um breve histórico de funções reais procurando destacar, em particular, as funções polinomiais. Para isso usamos como referência principalmente Boyer (1999), Ponte (2012) e Rezende (2016).

No capítulo 2, apresenta-se de forma sistemática as características, as propriedades e os principais resultados relacionados às funções polinomiais: propriedades algébricas, como seus zeros, bem como propriedades analíticas como, por exemplo, continuidade e diferenciabilidade, valores máximos e mínimos, e os principais resultados, que fazem dessas uma família de funções especiais no reino das funções diferenciáveis.

No terceiro capítulo, apresentamos algumas das diversas aplicações das funções polinomiais, seja na física, um lugar natural, na economia, nas ciências biológicas e na tecnologia, nas artes e na própria matemática.

E por fim, no último capítulo, realizamos nossas considerações finais procurando entender a pergunta inicial do nosso aluno: Por que estudamos as funções polinomiais? Desde já anunciamos que nossa meta com este trabalho não é responder ao aluno, mas, sobretudo, ao professor, nosso colega, que assim como eu, procura uma possível resposta para essa pergunta.

Capítulo 1
Uma breve história do conceito de função

1.1 Noções Iniciais

Ao refletir sobre o processo histórico de evolução do conceito de função, é possível perceber que o caminho trilhado para se chegar ao entendimento e à definição adotados hoje sofreram influências das antigas formas de representar uma relação funcional.

O processo teve início com os babilônios, por volta de 2000 a.C., ao utilizarem tábuas com correspondências entre valores para compreender as efemeridades do Sol, da Lua a e dos planetas. Isso evidencia que, ainda que de forma implícita, as noções que evolvem o conceito de função estavam presentes nas atividades dos povos da antiguidade e eram registradas em tabelas que evidenciavam relações entre valores observados.

Ao examinar o desenvolvimento da Astronomia na antiguidade, por exemplo, pode-se observar o emprego de algumas noções de função, principalmente aquelas que modelam fenômenos periódicos. Segundo Boyer (1999), os antigos utilizavam teoremas de geometria para confeccionar tábua de cordas, como no *Almagest* do astrônomo Ptolomeu, cujos trabalhos com tábuas, determinava a posição do sol, da lua e planetas de forma contínua e periódica.

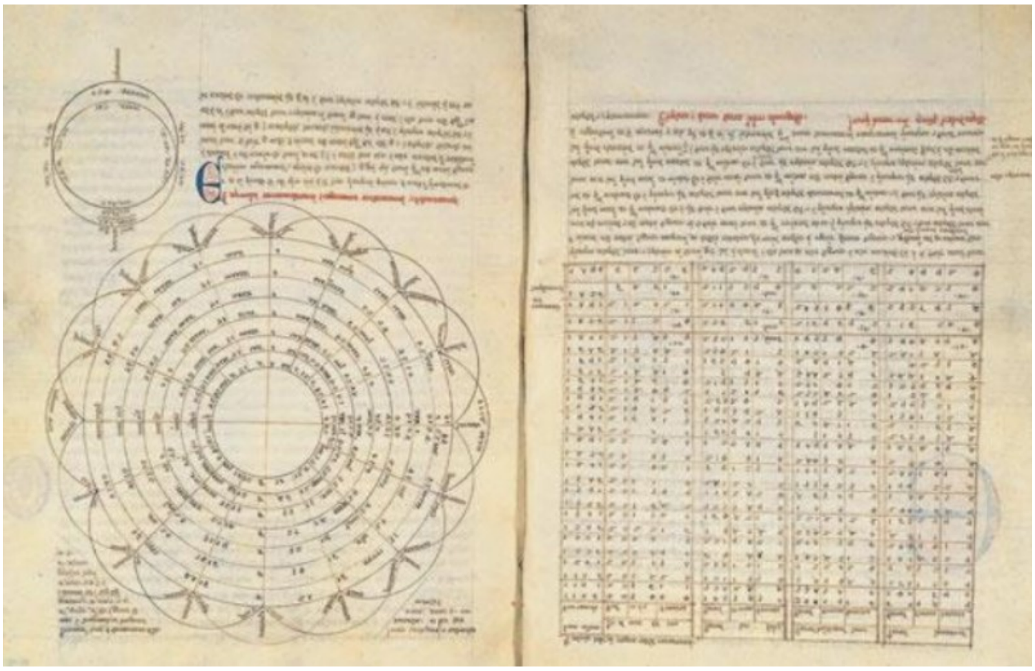


Figura 1- páginas do *Almagest* do astrônomo Ptolomeu

Fonte:http://www.astroyciencia.com/2011/11/24/el-almagesto-de-ptolomeo/

No entanto, de acordo com Ponte (1992), somente muito tempo depois, alguns matemáticos aproximaram-se de uma formulação moderna de função, com destaque para Oresme (1323 – 1382), que propõe a primeira representação geométrica da relação entre grandezas, o que permitiu traçar uma relação entre três formas distintas até então: tabelas, descrição verbal e a representação gráfica.

Oresme desenvolveu a teoria geométrica das latitudes, representando graus de intensidade e extensão e utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, ele marcou pontos representando instantes de tempo (longitudes) e, para cada instante, traçou perpendicularmente à reta das longitudes um segmento de reta (latitudes), em que o comprimento denotava a velocidade. A latitude de uma "quantidade" é interpretada como uma quantidade variável, dependendo da longitude, e a linha que representa o ápice é entendida como a representação gráfica de uma relação funcional contínua. Dessa maneira, uma função pode ser representada por meio de uma descrição verbal ou por meio de um gráfico.

Na linguagem matemática da atualidade, os termos latitude e longitude são equivalentes às ordenadas e abscissas, respectivamente. Segundo Rezende (2016):

> Oresme não foi o primeiro a usar a ideia de sistemas de coordenadas: os primeiros, conforme relata o historiador [Boyer, 1949], foram os geógrafos da Grécia Antiga. Mas o seu trabalho, no entanto, representa um marco no estudo da variação com a representação por coordenadas. A "doutrina de configuração" do pensador francês considera que a velocidade instantânea (intensão) e o tempo (extensão) caracterizam formas tais como o movimento. A quantidade de movimento é, então, a distância percorrida em um dado período de tempo. Movimento uniforme e o movimento uniformemente variado são distintos.

Esse pensamento é representado na figura #2, em que a distância "s" é dada pela área da figura geométrica que representa o movimento, onde a altura é dada pelo valor da velocidade final "v" e a base é dada pela medida do intervalo de tempo "t. Percebe-se como a função polinomial serviu de modelo para problemas de cinemática, ao considerar a média dos valores inicial u e final v da velocidade, $\frac{u+v}{2}$, como para calcular a área de um trapézio.

> Esta, talvez, tenha sido, como afirma Boyer (1949, p.84), a primeira vez que a área sob uma curva foi identificada como a medida de uma grandeza física. E, dessa forma, uma nova relação entre a física e a matemática se estabelece. A reticência à presença da ideia de movimento na matemática – como sugerira Aristóteles - estava com os seus dias contados. Os escolásticos permitiram de uma só vez a fusão do "qua" contínuo, da matemática, do "qua" movendo, da física, e do "qua" sendo, da filosofia, em uma doutrina admirável que irá, por certo, dar novos rumos à matemática e ao seu papel na construção do conhecimento científico. Foi dessa forma que o conceito de

função começou a ser "matematizado". E a função afim já aparece como modelo para os primeiros problemas da cinemática. (Rezende, 2016)

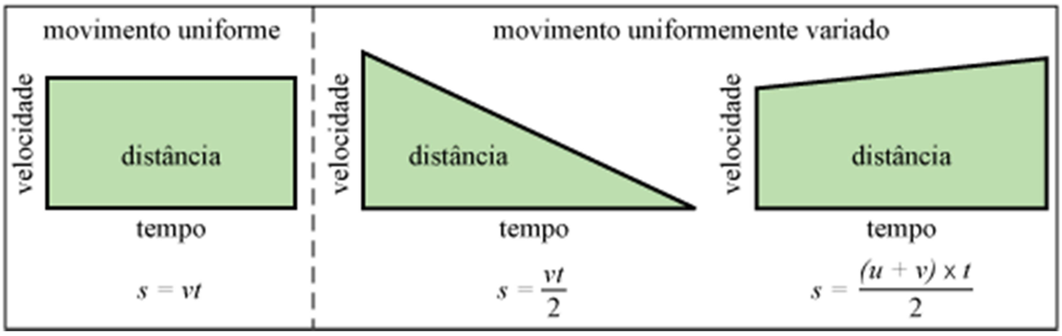


Figura 2: representação das ideias de Oresme relacionamdo a distância em função da velocidade e tempo.
Fonte: Rezende (2016)

Apesar do grande avanço que o conceito de função apresentou com a descoberta de Oresme, ainda não se falava em função no âmbito da Matemática. As noções referentes a esse conceito empregavam-se apenas na resolução de problemas e na interpretação de situações relacionadas a outras áreas do conhecimento. Assim, a noção de função era vista, até então, como ferramenta, tornando-se objeto de estudo da Matemática somente no final do século XVII.

1.2 A noção de função na era moderna

Segundo Rezende (2011b), Galileu (1564-1642), em sua última obra *Discursos Referentes a Duas Novas Ciências a Respeito da Mecânica e dos Movimentos Locais*, demonstrou, ao contrário da tradição aristotélica, que o peso de um corpo não exerce influência na velocidade da queda livre e enunciou a lei da queda dos corpos no vácuo: o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço. Portanto, utiliza-se da noção de função quadrática para relacionar distância e tempo.

De acordo com Rezende (2011b) não há documentos que provem, mas acredita-se que para chegar à lei acima, Galileu realizou um experimento fazendo uso de um instrumento similar ao da figura 3.

> O experimento consiste em liberar uma pequena bola da extremidade superior do plano, ao mesmo tempo em que um pêndulo suspenso é colocado em movimento. A cada movimento do pêndulo, a bola atinge um dos sinos pequenos colocados ao longo do plano inclinado. As distâncias entre os sinos (que expressam os deslocamentos da bolinha em cada unidade de tempo – metade do período do pêndulo) formam uma sequência de números ímpares.

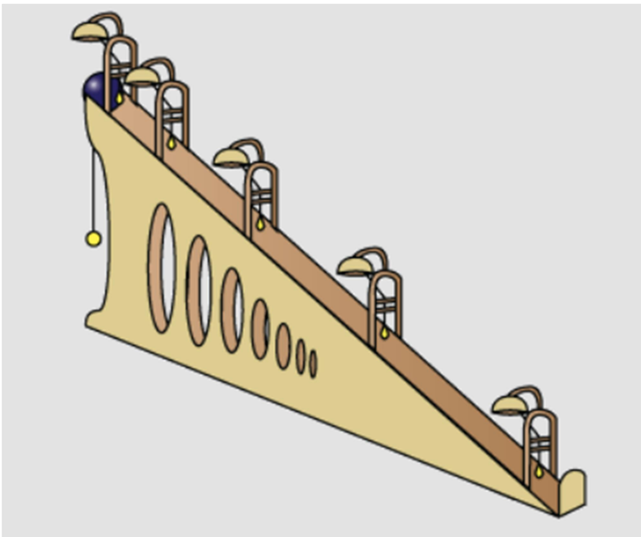


Figura 3: ilustração do instrumento exposto no
Instituto e Museu da História da Ciência, em Florença (Itália)
Fonte: Rezende (2011b)

Apesar disso, somente após a criação dos logaritmos é que o método analítico de introduzir as funções por meio de fórmula e equações começa a ganhar destaque na pesquisa teórica, por meio de trabalhos publicados por

Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) entre os séculos XVI e XVII. Foram eles que aplicaram a nova álgebra à geometria e apresentaram, cada um a sua maneira, o método analítico de introduzir funções, desbravando novos horizontes para a evolução da Matemática. Ao incluírem no rol das representações de função a representação analítica (expressões algébricas), proporcionaram grandes avanços na álgebra apoiada na geometria e impulsionaram os trabalhos de Newton e Leibniz – o primeiro a utilizar a palavra função para designar a dependência entre quantidades. Mesmo que de maneira ainda acanhada, a ideia de que expressões infinitas fosse uma função não era novidade, pois a progressão geométrica infinita decrescente já era conhecida na Idade Média com os estudos realizados por Oresme, mas foi somente depois da primeira metade do século XVII que as séries se tornaram o meio universal para a expressão analítica e os estudos de funções.

Newton, por sua vez, foi quem introduziu as noções básicas de função por meio da cinemática. Na verdade, o método das fluxões é desenvolvido para os fluentes expressos analiticamente, seja na forma finita, seja por meio de somas infinitas. Concomitantemente, segundo Boyer (1999), Leibniz também chega às noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral a partir da geometria das curvas. A palavra função apareceu pela primeira vez em um manuscrito de Leibniz, em 1673, para designar de maneira geral a dependência de quantidades geométricas como subtangentes e subnormais. Ele também introduziu os termos constante, variável e parâmetro.

O desenvolvimento do estudo do comportamento das curvas por métodos algébricos, a representação de quantidades que eram dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica, se fez cada vez mais necessária. Foi assim que as funções começaram a ser representadas por meio de expressões algébricas e, de acordo com Ponte (1992), essa nova maneira de representar apareceu em correspondências trocadas por Leibniz e Jean Bernoulli (1667-1748) entre 1694 e 1698.

1.3. Formalização do conceito de função.

Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que teve ampla divulgação, contendo a definição de uma função de uma variável. A definição apresentada nesse artigo, algum tempo mais tarde, ganhou uma contribuição essencial para sua evolução dada por Leonard Euler (1707 – 1783) discípulo de Bernoulli. Nesse sentido, Ponte (1992) revela que "*Bernoulli publicou um artigo, que teria ampla divulgação, contendo sua definição de uma função de uma variável como uma quantidade que é composta, de alguma forma a partir de variáveis e constantes*". Euler (1707-1793), um ex-aluno de Bernoulli, mais tarde, acrescentou a esta definição o termo expressão analítica, em vez da quantidade. Nesse sentido, destaca-se que, após a definição de função dada por Bernoulli, Euler foi responsável pelo posterior desenvolvimento desse conceito. Em verdade, Euler é o responsável direto por introduzir o conceito de função no núcleo semântico do Cálculo.

Partindo dessa perspectiva, entende-se que Euler seguiu os passos de seu mestre ao dar a sua definição de função, mas trocando a palavra "quantidade" por "expressão analítica". A contribuição dada por Euler para a evolução do conceito de função foi tão significativa que, de acordo com Boyer (1999, p. 305), "foi ele o construtor da notação mais bem-sucedida de todos os tempos. Deve-se a ele a notação f(x) para uma função em x".

Apesar da grande evolução que o conceito de função apresentou após a definição dada por Euler, algumas controvérsias surgiram e motivaram discussões a respeito desse conceito. As primeiras discussões ocorreram no século XVIII, e estavam relacionadas com o famoso problema da corda vibrante, com o que Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) exprime as condições desse problema por meio da equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, em que y é uma função que descreve o deslocamento da posição de equilíbrio, que depende de x e t, sendo que x representa a distância a partir da origem, e, t, o tempo.

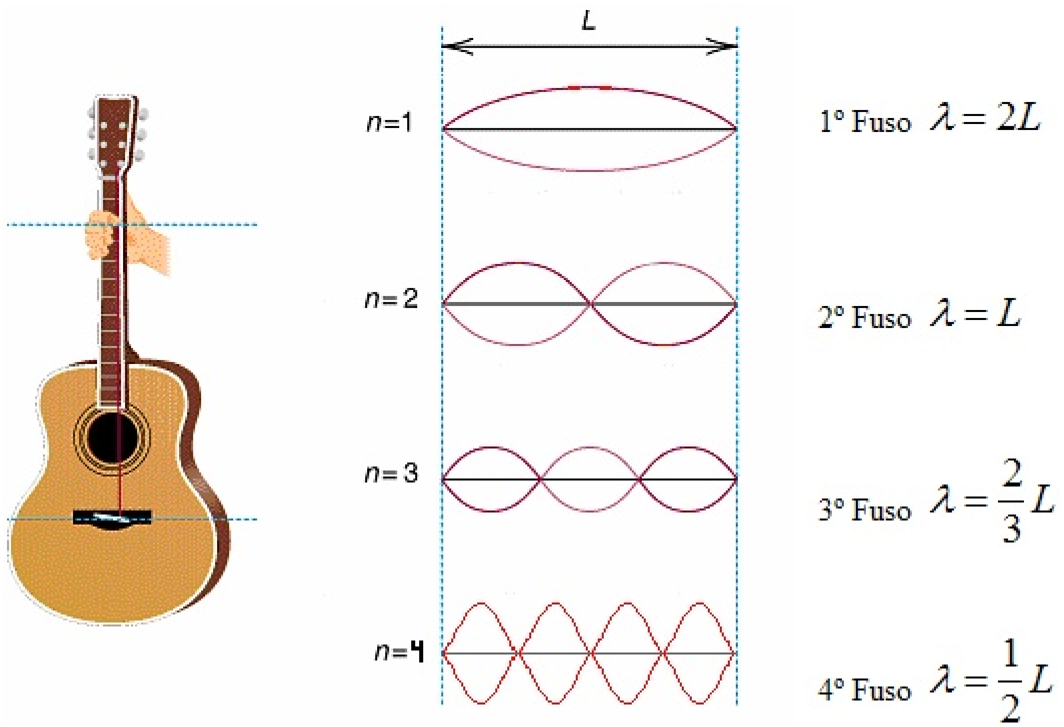


Figura 4: exemplo de corda vibrante em harmônica. Fonte: https://www.infoescola.com/fisica/harmonica/

A discussão envolveu Euler, Joseph Louis Lagrange (1176-1813), D'Alembert, Daniel Bernoulli (1751-1834), Gaspard Monge (1746-1818), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). A equação apresentada por D'Alembert motivou entre esses matemáticos grandes discussões que contribuíram para o progresso da física matemática e para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos da análise matemática. Segundo Rezende (2003, pág 251)

> Ao comparar o trabalho de Lagrange com o de Euler, Boyer (1949, p.253) afirma que o primeiro tem uma vantagem em relação ao último: tornar fundamental o formalismo da teoria das funções, mais do que as preconcepções em geometria, mecânica ou filosofia. Lagrange fez também do conceito de derivada o conceito central do Cálculo, dando a esta o seu nome de batismo (derivada/função derivada) e uma notação muito próxima da que usamos hoje: f'(x).

No entanto, apesar dos avanços que a representação algébrica proporcionou ao desenvolvimento do conceito de função, ela também contribuiu para a origem de um dos principais obstáculos epistemológicos intrínseco a esse conceito, na medida em que, por muito tempo, defendeu-se a ideia de que apenas relações que pudessem ser descritas por expressões analíticas poderiam ser chamadas de função. Esse obstáculo só foi superado no século XIX, quando Dirichilet (Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 1805-1859) separou o conceito de função da expressão analítica e definiu função como uma correspondência arbitrária entre variáveis que se encontram conjuntos numéricos. A definição apresentada por Dirichilet deu origem a definição de função utilizada nos dias de hoje.

Outra contribuição muito importante para o desenvolvimento do conceito de função foi dada por Fourier. Preocupado com o fluxo de calor nos corpos materiais, ele considerava a temperatura como função de duas variáveis, o tempo e o espaço, podendo ser representada por meio da equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ cuja resolução, a princípio, foi apresentada por D'Alembert no problema da corda vibrante. Ele conjecturou que seria possível obter o desenvolvimento de qualquer função em uma série trigonométrica em um intervalo adequado (a chamada série de Fourier).

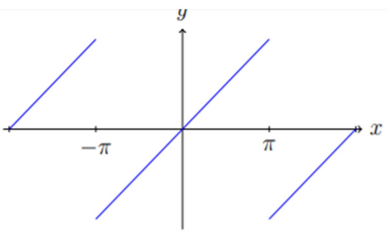


Figura 5.1: função f(t) = t *periodizada*

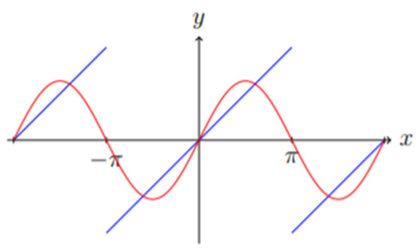


figura 5.2: primeira harmônica de f(t)

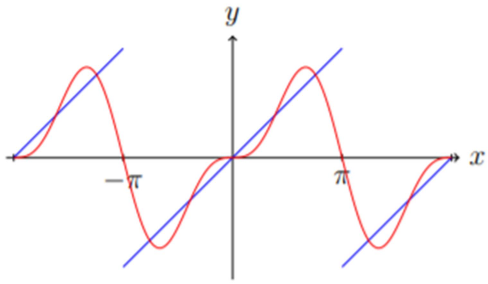


Figura 5.3: soma das duas primeiras harmônicas da função f(t)

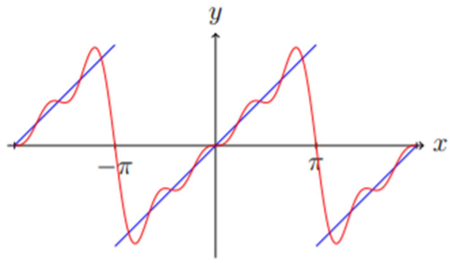


Figura 5.4: soma das quatro primeiras harmônicas da função f(t)

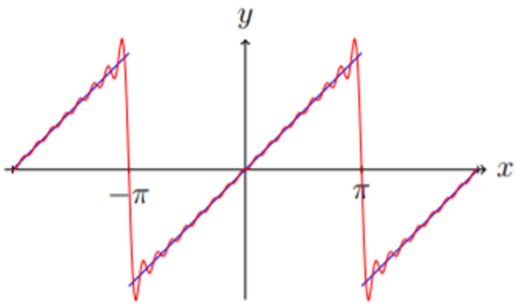


Figura 5.5: soma das dezesseis primeiras primeiras harmônicas da função f(t)

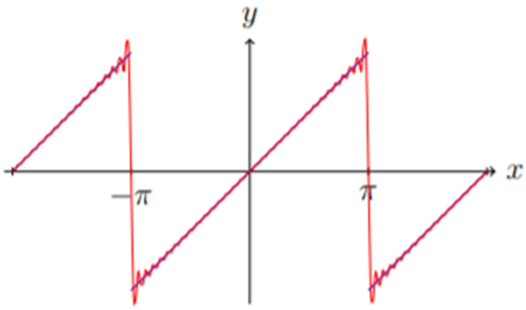


Figura 5.6: soma das trinta e duas harmônicas da função f(t)

Fonte: Pupin(2011)

Posteriormente, Dirichlet apresentou as condições suficientes para que uma função fosse representada por uma série de Fourier. Para isso, Dirichlet separou o conceito de função de sua representação analítica. Ele lançou a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre variáveis de conjuntos numéricos. Sendo assim, uma função então passou a ser entendida também como uma relação entre dois conjuntos, de modo que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente. Dirichlet contribuiu ainda com a evolução do conceito de função, dando o famoso exemplo de uma função descontínua em todos os pontos do domínio:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{se x é um número racional} \\ 0, \text{se x não é um número racional} \end{cases}$$

Foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em 1821, em seu trabalho "Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique", quem conseguiu criar a Teoria dos Limites com rigor matemático. Foi possível, então, fazer uma definição precisa para Continuidade, Diferenciabilidade e Integral definida em termos de conceito de Limite. A definição apresentada por Cauchy foi feita como segue:

> Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, chegando a diferir dele tão pouco quanto se deseje, este último é chamado Limite de todos os outros" (Boyer, 1999)

A matemática contemporânea não aceitou essa definição, pois não estava claro o significado de "aproximar-se indefinidamente" por diferenças tão pequena "quanto se deseje", mas foi suficiente para a época. Com algumas modificações mais cuidadosas, as definições de Limite usadas nos textos atuais de Cálculo são as de Cauchy. "O rigor que ele trabalhou foi motivação para outros pesquisadores da área se juntarem com o objetivo de tirar as falhas presentes na análise (Cálculo) de Cauchy, sejam vindas do formalismo ou do intuicionismo" (BOYER, 1999).

Cauchy também desenvolveu o "teste da raiz" e o "teste da razão", que são usados atualmente, assim como na época, para a análise de Convergência ou divergência em séries positivas. Os conceitos básicos de Limite e Continuidade usados hoje são atribuídos a Cauchy. Assim como a definição de Derivada de uma função de x usadas atualmente. Por outro lado, o matemático francês acreditava que uma função contínua f deixaria de ser diferenciável em apenas uma quantidade finita ou não enumerável de pontos do seu domínio. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$, que não é diferenciável apenas em um ponto, ou, por exemplo, outras funções periódicas como a função "onda triangular".

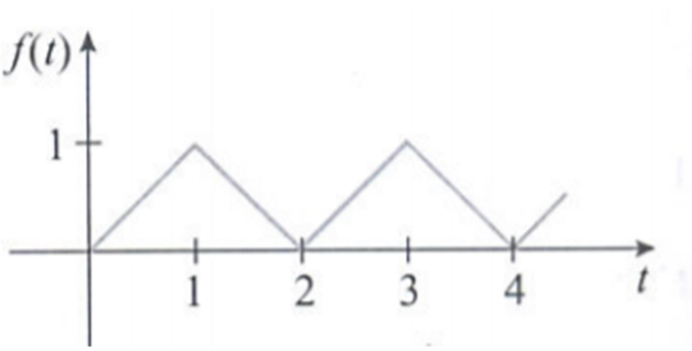


Figura 6: onda triangular. Fonte: Nós (2011)

Entretanto, no ano de 1874, Karl Weierstrass (1815-1897) publicou um exemplo de função a qual não era possível derivar (figura 5). Esta publicação causou questionamentos sobre a Teoria de Cauchy e motivou uma série de modificações rigorosas no Cálculo.

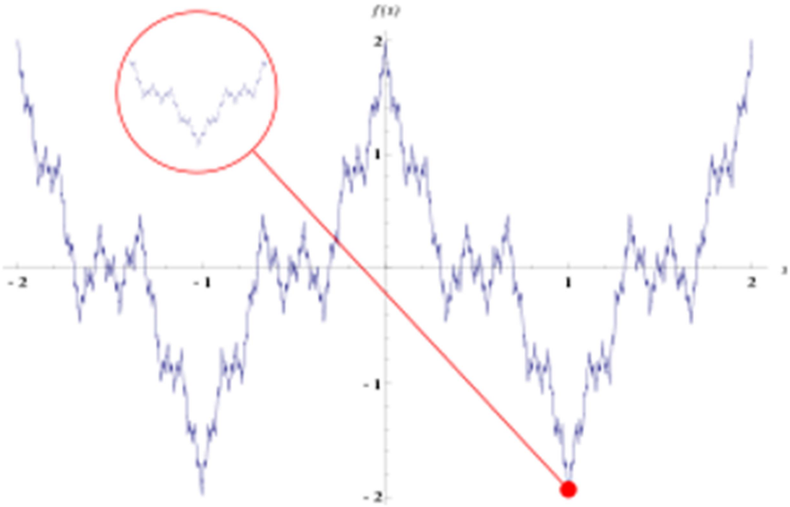


Figura 7: função não-diferenciável em infinitos pontos não-enumeráveis

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_de_Weierstrass

No século XIX e início do século XX, o conceito de função passou por alguns refinamentos e apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Nessa época, podemos destacar os trabalhos de Cantor (1845-1918), Richard

Dedekind (1831-1916), Hermann Hankel (1839-1873), René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941).

Considerando os refinamentos pelos quais o conceito de função passou entre o final do século XIX e início do século XX, o de aplicação entre dois conjuntos foi incorporado paulatinamente na Matemática até tornar-se dominante.

O conceito de função foi colocado na estrutura geral do conceito de aplicação de um conjunto X em outro conjunto numérico Y, tal como é encontrado em livros atuais. Mais tarde, Cantor introduz a noção de produto cartesiano E × F de dois conjuntos quaisquer, uma generalização das coordenadas cartesianas.

Dentre as contribuições para a evolução do conceito de função no início do século XX destaca-se a do grupo Bourbaki, que publicou o primeiro livro da coleção *Théorie dês Ensembles (fascicule de results)* em 1939. Organizado em 1935, o grupo formado por jovens matemáticos franceses - dentre eles Dieudonné, professor visitante na Universidade de São Paulo - pretendia organizar segundo o pensamento formal de Hilbert toda a Matemática conhecida até o momento.

Assim, foi desse modo, que o conceito de função passa da ideia de relação entre grandezas para relação entre conjuntos. Esta última, a definição mais geral. Mas é no campo semântico de função como relação entre grandezas que se estabelece esse nosso trabalho. Pois é essa ideia, com efeito, que revela a essência e a funcionalidade desse importante conceito da Matemática e suas aplicações na ciência e em outras áreas do conhecimento.

1.4 Considerações acerca da história da matemática

Esse breve traçado cronológico convida a uma reflexão. É consenso que o professor de Matemática deve ter conhecimento da disciplina e dos conteúdos contemplados por ela. Contudo, o exame da trajetória de um conceito, como o da função, sugere que conhecer a história que envolveu o processo de concepção e desenvolvimento do assunto que está em jogo pode lhe ajudar não somente na contextualização, mas também na compreensão das dificuldades envolvidas e, ainda, na proposta de soluções. Isso porque, se ao investigar essas dificuldades, nos debruçarmos sobre a relação entre a compreensão dos temas abordados pela Matemática e a sua história, perceberemos que, curiosamente, os obstáculos com os quais os indivíduos se deparam durante o processo de compreensão de um conceito matemático podem ser frutos de conceitos mal acomodados anteriormente e, até mesmo, fazerem parte do processo evolutivo de compreensão desse mesmo conceito ao longo da história.

De acordo com Rezende (2009):

> (...) Esta conexão entre a história de a epistemologia da matemática, por si só, já justificaria a importância de um estudo de história da matemática na formação do professor de matemática. Afinal, conhecer os obstáculos epistemológicos de determinado conceito matemático no seu processo de evolução histórica ajuda, certamente, o professor a compreender as dificuldades inerentes ao conceito a ser ensinado, contribuindo, dessa forma, e de modo decisivo, para que o professor possa compreender em outra escala as dificuldades de aprendizagem dos seus alunos.”

Assim, trilhar nos “pés” dos antepassados pode abrir horizontes e criar novos olhares para o esforço de ampliar trajetórias e relações, de forma a perceber-se que a matemática também está imersa no mundo das ciências e não algo que foi construído por “gênios” de uma hora para outra.

Capítulo 2
Aspectos teóricos

2.1 Definição de função polinomial

De acordo com Lima ([9], 2012) g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é uma *função polinomial* quando existem números reais a_0, a_1, ... ,a_n tais que

para todo x $\in$ $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\mathbf{g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0}$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que g tem grau n.

Essas funções têm diversas propriedades que as tornam simples de manejar e de aplicar às diversas situações do cotidiano.

> Em geometria, por exemplo, a área de um círculo é proporcional ao quadrado do comprimento do seu raio e a área do quadrado é igual ao quadrado do comprimento do seu lado. Na disciplina de Física, você já deve ter ouvido falar de equação horária de um corpo em queda livre, energia potencial elástica de uma mola, energia cinética, etc. A função polinomial do segundo grau é bastante útil nesses contextos! Outros exemplos, na área de economia, de biologia ou em áreas mais diversas do conhecimento, podem ser visualizados em textos de matemática

aplicada ou mesmo em um bom livro de Cálculo. (Rezende, 2016)

Além disso, seus valores numéricos necessitam apenas de aritmética básica para serem calculados, na medida que as funções polinomiais envolvem apenas multiplicações, somas ou subtrações.

Segundo Rezende (2016), outro aspecto interessante dessa família de funções diz respeito ao par Local/Global. Quer dizer, dada uma função polinomial de grau n, uma vez conhecidos n+1 de seus valores [valores locais], *podemos determinar* [globalmente] *o valor da função em quaisquer outros pontos do seu domínio*.

2.2 Determinação da função polinomial de grau n através de n+1 pontos

No caso de função polinomial de grau 1, dados dois elementos distintos x_1 e x_2 do domínio com seus respectivos valores y_1 e y_2, o sistema

$$y_1 = a_0x_1 + a_1 \quad \text{e} \quad y_2=a_0x_2 + a_1$$

tem como determinante $x_1 - x_2$, que é sempre diferente de zero, ou seja,

dois pontos determinam uma reta.

No caso de função polinomial de grau 2, e para os outros casos sem perda de generalidade,

dados x_1, x_2 e x_3 elementos do domínio, e seus respectivos valores y_1, y_2 e y_3.

O sistema formado por esses valores em $y = a_0x^2+a_1x+a_2$ é

$$\begin{cases} y_1 = a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 \\ y_2 = a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 \\ y_3 = a_0x_3^2 + a_1x_3 + a_2 \end{cases} \qquad (2.2\text{-}1)$$

Que tem como determinante o determinante de Vandermonde $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ que é sempre diferente de zero, ou seja,

Três pontos determinam a parábola

Para os demais casos, n>2, a demonstração se faz de modo análogo.

Exemplo 1: Como exemplo mais claro, em uma função de grau 3, dados os números x_1 = 1, x_2 = -1 , x_3 = 0 e x_4 = 2, com y_1 = 3, y_2 = 1, y_3= 2 e y_4=10 temos um sistema de equações $y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, análogo ao sistema (2.2-1) cujo resultado é a quádrupla $(a_0; a_1; a_2; a_3)$ = (1,0,0,2).

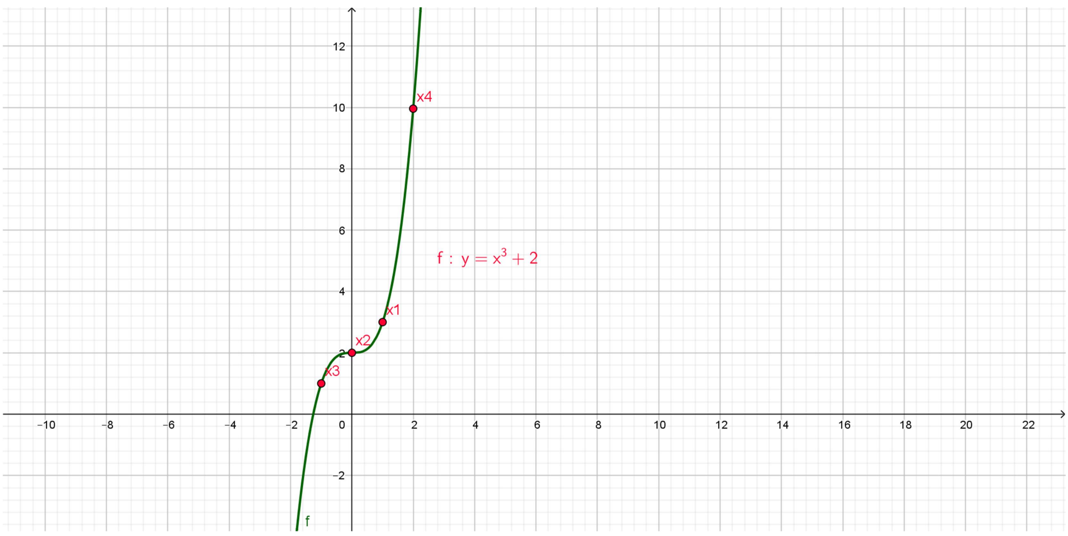


Figura 8: gráfico da função y = x³ + 2
Fonte: autor

2.3 Raízes

Dada f função polinomial, se $f(\alpha)=0$, então
α é dito ***raiz*** ou ***zero*** da função f

Uma propriedade interessante dessas funções é que *toda função polinomial de grau n tem, no máximo, n raízes.* Com efeito:

Dada f polinomial e $\beta \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(\beta) = a_n(x^n - \boldsymbol{\beta}^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ldots + a_1(x - \beta),$$

mas cada uma dessas parcelas é divisível por $(x - \beta)$, pois

$$(x - \beta) . (x^{n-1} + \boldsymbol{\beta} x^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{\beta}^{n-2} x + \beta^{n-1}) = x^n - \beta^n.$$

Logo, $f(x) - f(\beta) = (x - \beta)\, q(x)$,

em que q é uma função polinomial. Mas atenção, q tem grau n –1 apenas se f tem grau n.

Se β é uma raiz de f, então $f(x) = (x - \beta)q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, consequentemente

$\beta_1, \ldots, \beta_t$ são raízes de f se e somente se $f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_t)q(x)$

e q é uma função polinomial de grau n – t se f tem grau n.

2.3.1 Teorema Fundamental da Álgebra

A propriedade citada anteriormente tem sua forma mais geral enunciada no *teorema fundamental da álgebra*.

Teorema (D'Alembert-Gauss):
"***Todo polinômio com coeficientes complexos, com grau maior ou igual a 1, possui pelo menos uma raiz complexa***"

O Teorema Fundamental da Álgebra, por outras palavras, afirma que o Corpo dos Números Complexos é Algebricamente Fechado e, portanto, tal como com qualquer outro Corpo Algebricamente Fechado, a equação P(z)=0 tem n soluções não necessariamente distintas. Daí surge versões desse teorema mais populares e conhecidas pelos estudantes e professores de matemática, a saber:

(TFA): Todo Polinômio não constante, de grau n, com coeficientes complexos, possui n raízes complexas.

Esse resultado foi e é de suma importância em toda matemática e a história de suas provas é capítulo importante no desenvolvimento do cálculo, álgebra e análise atuais. Não provaremos esse teorema, pois não é o foco da dissertação, mas uma de suas provas pode ser encontrada em Dias (2016). Mas, por outro lado, revelaremos nos passos a seguir um pouco dessa importante passagem histórica com a finalidade de destacar o esforço empreendido para se alcançar a prova desse resultado.

J. D'Alembert - que, em 1789, também estava pesquisando um método para integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais usando o processo chamado, hoje, de Método das Frações Parciais - encontra uma demonstração difícil para o Teorema Fundamental da Álgebra. Essa demonstração continha um erro, corrigido em 1851 por Victor Puiseux, matemático francês (1820 – 1883).

O matemático italiano Joseph-Louis Lagrange, (1736 – 1813) corrigiu, em 1772, a prova de Euler na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, porém a sua demonstração também apresentava lacunas. Lagrange, em correspondências, já afirmava que os números imaginários se tornaram universalmente aceitos como parte da matemática.

Pierre Simon Laplace (1749 – 18270), matemático e astrônomo francês, apresentou, em 1795, uma nova demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, diferente da de Euler. Era uma demonstração mais elegante, todavia também incompleta.

Em 1798, o reverendo e matemático inglês James Wood (1760 – 1839) publicou também uma prova do teorema no artigo "*On the roots os equations*", na The Philosophical Transactions of The Royal Society - que. igualmente com falhas, foi recentemente reabilitada, durante os anos 2000.

Em 1799, em sua tese de doutorado, Gauss apresenta uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que, como todas as anteriores, também apresenta falhas - corrigidas por Alexander Ostrowski, matemático ucraniano (1893 – 1986). Em 1816 Gauss apresenta a sua segunda prova do teorema. Embora correta agora, essa prova utiliza um teorema que apenas depois seria provado , o Teorema do Anulamento: "Se f for contínua no intervalo fechado $[a,\ b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a,\ b]$ tal que $f(c)$ = 0". Ainda em 1816, Gauss apresenta sua terceira prova do teorema, usando dessa vez a Teoria da Integração. Em 1849, ele ainda apresentaria uma quarta demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, enunciado agora para polinômios com variável e coeficientes complexos.

Em 1806, o suíço Argand publicou o esboço de uma demonstração do teorema em um ensaio sobre a representação dos complexos e, em 1814, ele publica a primeira prova correta do teorema Fundamental da Álgebra, enunciado para polinômios com coeficientes complexos.

Alguns exemplos de funções polinomiais complexas serão apresentados na seção 2.8 deste trabalho.

2.3.2 Cálculo algébrico de raízes de funções polinomiais de grau 1.

De acordo com Moro (2000), o primeiro povo a lidar com as equações de grau 1 foram os egípcios. Encontra-se no Papiro de Ahmes, também conhecido por Papiro de Rhind, registros que se referiam a problemas concretos mas que já utilizavam incógnitas. O problema 24 do Papiro de Ahmes é um exemplo disso, em que pede o valor de *aha* se *aha* e um sétimo de *aha* tem como resultado 19. Traduzindo em notação atual:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Para calcularmos a raiz de uma função de grau 1 temos:

$$ax + b = 0 \text{ logo,}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-b}{a}$$

2.3.3 Cálculo algébrico de raízes de funções polinomiais de grau 2.

As equações polinomiais de grau 2 foram solucionadas pelos egípcios, posteriormente Euclides as solucionou geometricamente e os Hindus, algebricamente. O escritor árabe Al-Khowarism (825) sistematizou aritmeticamente as regras para o cálculo da incógnita da equação polinomial de grau 2, as quais demonstra por meios geométricos. O nome álgebra vem do nome desse escritor. Segundo Moro (2000):

> Os indianos trataram as quadráticas algebricamente. Shidara (1025) parece ter sido o primeiro a estabelecer o "método hindu" citado por Bhaskara (1150) na seguinte forma:
>
> "Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e adicione a eles um número igual ao quadrado da original [coeficiente da] quantidade incógnita [extraia a raiz]."

Pela simbologia moderna, temos o famoso *teorema de Bhaskara:*

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0,$ temos

$4a^2x^2 + 4a.b.x = -4a.c$ então

$4a^2x^2 + 4a.b.x + b^2 = -4a.c + b^2$

$2.a.x + b = \sqrt{b^2 - 4.a.c}$

Em que a raiz negativa era ignorada.

Hoje temos a versão completa da fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$ (2.3.3-1)

Exemplo 2: As raízes da função polinomial $g(x) = x^2 - x - 2$ são x_1= -1 e x_2= 2.

Com efeito, substituindo a= 1, b=-1 e c= -2 na equação 2.3.3-1, temos:

$$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

logo, x = -1 ou x=2.

2.3.4 Cálculo algébrico de raízes de funções polinomiais de grau 3

De acordo com Moro (2000), já antes de Cristo, Arquimedes manipulou problemas envolvendo cúbicas. Omar Khayyam, classificou 13 casos de cúbicas e as solucionou, mas apenas no começo do século XVI é que se sistematiza a solução de uma equação polinomial de grau 3. Ainda Moro (2000) nos conta uma história sobre essas soluções:

> "No começo do século XVI , o matemático Bolognês, Scipione Del Ferro, resolveu cúbicas da forma $x^3 + ax = b$. Ferro revela o segredo desse método de resolução a um estudante, chamado Antônio Maria Flor. Flor, vinte anos mais tarde, realiza um debate com outro italiano de nome Tartaglia. Cada um deles enviou 30 problemas ao outro e aquele que resolvesse o maior número de problemas em 50 dias vencia o duelo. Tartaglia direcionou seus esforços as cúbicas em que não continha o termo do primeiro grau. Resolvendo esse caso, quando faltava menos de duas semanas para o debate, Tartaglia descobre a solução da cúbica em que o termo do segundo grau não existia, assim, sabendo desses dois métodos, Tartaglia solucionou todos os problemas em menos de duas horas, derrotando seu oponente. Cardano pediu o esquema a Tartaglia, como conta o historiador Bell, em seu livro. Tartaglia, após muita insistência, fornece o esquema a Cardano sob promessa de manter segredo. Embora exista muita dúvida quanto a autoria dessa fórmula, Cardano sem dúvida contribuiu significativamente ao desenvolvimento da teoria das equações algébricas.

Dessa forma, temos a solução algébrica de uma cúbica:

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

Substituindo-se $x = y - \frac{b}{3a}$ (2.3.4-1), dividindo-se a equação f(x) = 0 por a e renomeando-se os coeficientes tem-se:

$$y^3 + py + q = 0$$

Usando a substituição de Viète $y = z - \frac{p}{3.z}$, temos:

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

O que reduza uma equação biquadrada, cujos resultados são

$$z_{1,2}{}^3 = \frac{-q \pm \sqrt{\frac{-D}{27}}}{2}, \text{ onde } D = -4p^3 - 27q^2 \quad (2.3.4\text{-}2)$$

Extraindo-se as raízes cúbicas e tomando $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}$, pois sabemos que se z é uma das raízes cúbicas complexas de γ ∈ C, então as três raízes cúbicas de γ são z, wz e $\overline{w}\cdot$z onde $\mathrm{w} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{2\pi}{3})} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{isen}\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cúbica da unidade , tem-se:

$$y_1 = z_1 + z_2 \text{ , } y_2 = wz_1 + w^2z_2 \text{ e } y_3 = w^2z_1 + wz_2$$

Obtendo-se, então as raízes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = y_1 - \frac{b}{3a}} \\ \boldsymbol{x_2 = y_2 - \frac{b}{3a}} \\ \boldsymbol{x_3 = y_3 - \frac{b}{3a}} \end{cases} \qquad (2.3.4\text{-}3)$$

Exemplo 3: Dada a função $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^3 - 6\mathrm{x}^2 + 11\mathrm{x} - 6$, suas raízes são x_1= 3, x_2 = 1 e x_3 = 2.

Com efeito, temos a= 1, b= -6, c= 11 e d=-6, substituindo-se

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} + 2 \qquad \text{(por 2.3.4-1)}$$

em f(x)=0 temos, $\mathrm{y}^3 - \mathrm{y} = 0$, então p = -1 e q = 0

$$\mathrm{D} = -4(-1)^3 - 27.0^2 = 4 \text{ por (2.3.4-2)}$$

então

$$z_{1,2}^{3} = \frac{-0 \pm \sqrt{\frac{-4}{27}}}{2} = \pm \frac{i}{\sqrt{27}} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{6}$$

mas, $y1 = z1 + z2 = 1$, $y_2 = wz_1 + w^2z_2 = -1$ e $y_3 = w^2z_1 + wz_2 = 0$

Como $y = x + 2$ (da equação 2.3.4-3), consequentemente

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$.

2.3.5 Cálculo algébrico de raízes de funções polinomiais de grau 4

Costa (2016) nos conta uma história sobre a quártica:

> Ludovico Ferrari (1522-1560) nasceu em Bologna. Foi o mais famoso dos discípulos de Cardano. De origem muito humilde foi trabalhar como servo na casa de Cardano quando tinha 15 anos. Sua inteligência foi logo reconhecida e logo ocupou o cargo de secretário. Seu gênio incontrolável gerava constantes atritos com Cardano, mas apesar disso, eram amigos e colaboradores. A partir dos 18 anos, Ferrari passou a ensinar por conta própria em Milão e sob a proteção do Cardeal de Mantôva, alcançou posições que lhe proporcionavam boa renda. Em 1540, Ferrari substituiu seu mestre, Cardano, num encontro com Tartaglia com o objetivo de defender Cardano das acusações feitas por Tartaglia. Nessa mesma época, um certo Zuanne de Tonini da Coi propôs, a Cardano, que resolvesse o seguinte desafio: Dividir 10 em 3 partes que formem uma proporção contínua, sendo o produto das duas primeiras iguais a 6.

Esse problema recai em uma quártica, pois dados os três números reais x, y e z procurados:

$$\begin{cases} \mathrm{y+x+z=10} \\ \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}} \to z = \frac{36}{x^3} \\ \mathrm{y.x = 6 \to y} = \frac{6}{x} \end{cases}$$

Logo,

$$\mathrm{x} + \frac{6}{x} + \frac{36}{x^3} = 10 \to x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 36 = 0$$

Ainda Costa (2016) termina a história:

> (...) Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão a Ferrari, que surpreendentemente superou seu mestre e encontrou um método geral para a solução das equações do 4o grau. Cardano teve o prazer de publicar também essa solução em sua Ars Magna. Aos 38 anos tornou-se professor de matemática na Universidade de Bologna e em seguida veio a falecer, provavelmente envenenado pela própria irmã.

O cálculo para a extração das raízes de uma função de grau 4 se dá a partir da diminuição do grau da equação, para uma de grau 3.

Substituindo-se $\mathrm{x = y} - \frac{b}{4a}$, reduz-se a equação quártica

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ para $y^4 + \mathrm{py}^2 + \mathrm{qy} + \mathrm{r} = 0$

Tomando-se $\mathrm{y = u + v + w}$, com $u \neq 0, v \neq 0\ e\ w \neq 0$ obtém-se

$$\mathrm{y}^2 - (\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2)\mathrm{y}^2 = 2(\mathrm{uv + uw + vw}),$$

e comparando-se à equação reduzida temos o sistema:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2} \\ u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \frac{p^2-4r}{16} \end{cases} \qquad (2.3.5\text{-}1)$$

De tal forma que u², v² e w² são as raízes cúbicas de

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2-4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0$$

Substituindo-se $u^2 = \vartheta\ , v^2 = \kappa\ e\ w^2 = \ \rho$ e resolvendo-se a equação cúbida acima temos a solução da equação reduzida:

$$\begin{aligned} \sqrt{\vartheta} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho} &= y_1 \\ \sqrt{\vartheta} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho} &= y_2 \\ -\sqrt{\vartheta} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho} &= y_3 \\ -\sqrt{\vartheta} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho} &= y_4 \end{aligned} \qquad (2.3.5\text{-}2)$$

Exemplo 4: Dada $f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$, a = 1, b = -10, c = 35, d= -50 e e = 24.

Substituindo-se $x = y - \frac{b}{4a} = y + \frac{5}{2}$ em P(x) = 0, tem-se

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} = 0$$

Então, p =- $\frac{5}{2}$, q = 0 e r = $\frac{9}{16}$, logo substituindo-se no sistema (2.3.5-1):

$$\begin{cases} \vartheta + \kappa + \rho = \dfrac{5}{4} \\ \vartheta\kappa\rho = 0 \\ \vartheta\kappa + \vartheta\rho + \kappa\rho = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Que tem como solução $\vartheta = 0,\ \kappa = \frac{1}{4}\ e\ \rho = 1$, substituindo-se em 2.3.5-2, tem-se:

$$y_1 = -\frac{3}{2}, y_2 = -\frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{2}\ e\ y_4 = \frac{3}{2}$$

2.3.6 Método Newton-Raphson.

Niels Henrik Abel nasceu em 5 de agosto de 1802 na pequena cidade de Finnöy, na Noruega. Aos 21 anos, ele provou que, exceto em casos particulares, é impossível resolver uma equação de grau 5 utilizando-se apenas um número finito de operações algébricas como soma, multiplicação, subtração, divisão e extração de raízes. (Carneiro, 2017)

Évariste Galois (1811-1832) desenvolveu uma teoria, a chamada Teoria de Galois, e utilizou esta teoria para demonstrar o teorema de Abel, bem como para especificar em quais casos em grau maior ou igual a cinco as equações algébricas possuem solução por meio de radicais. Foi Galois que, em seus estudos, deu origem à Teoria dos Grupos, estabelecendo conexões entre grupos e solubilidade de equações algébricas (Carneiro, 2017). Novas formas de se calcular aproximações de raízes tornaram-se necessárias.

Os métodos numéricos empregam-se quando não existe uma solução clássica para o problema. Por exemplo, nem sempre (na verdade, na maioria das vezes) não conseguimos determinar com precisão as raízes de uma função. Nesses casos, procedimentos numéricos e interativos se tornam eficientes. São, normalmente, métodos iterativos - em que a determinação de um novo valor é dependente do valor anterior - e se repetem em ciclo (denominado iteração). Como, inicialmente, é preciso supor um número qualquer como ponto de partida para determinar os demais resultados, o resultado final não é exato, pois a imprecisão embutida gera um resultado aproximado. Mas, as medidas "na vida" também não são exatas, são passíveis de erros. Nesse sentido, no caso específico de resolução de equações polinomiais, por exemplo, o método de Newton-Raphson se apresenta de forma eficiente.

O Método de Newton-Raphson é uma particularização do Método do Ponto Fixo, que consiste em transformar a equação P(x) = 0 em uma equação equivalente f(x) = x, onde P(x) é uma função contínua no intervalo [a,b] que contém pelo menos uma raiz do polinômio P. Assim, através de uma aproximação inicial x_0, é gerada uma sequência $\{x_k\}$ de termos que se aproximam da raiz r, por meio da relação $x_{k+1} = f(x_k)$. A função f é tal que P(r) = 0 se, e somente se, f(r) = r quando há convergência (a figura a seguir ilustra esse processo).

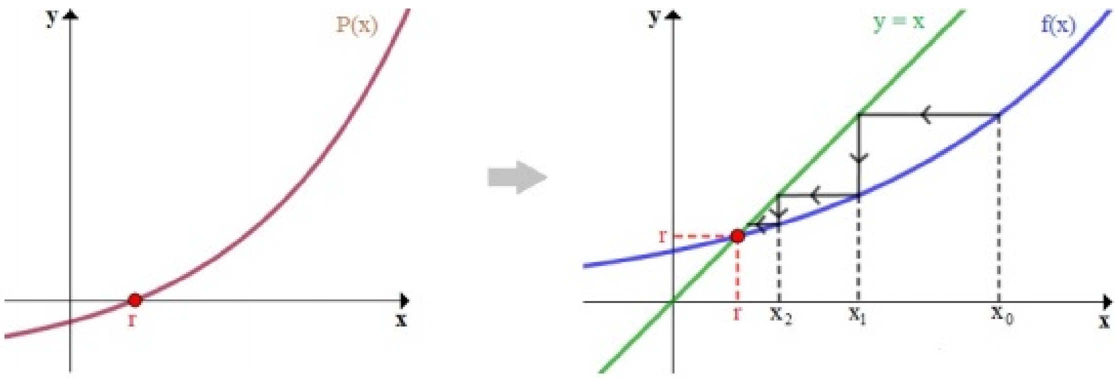


figura 9: gráficos representando o método do ponto fixo. Fonte: Silva (2018)

Portanto, transforma-se o problema de determinar a raiz do polinômio P, em um problema de encontrar um ponto fixo dado pelo par ordenado (r,r), encontrado por meio da função de iteração f, que satisfaz as condições anteriores. Essa função tem a forma geral conforme a Equação abaixo, mas, A(r) ≠ 0 para r ser ponto fixo,

$$\mathrm{f(x)} \;=\; \mathrm{x} + \mathrm{A(x)P(x)} \qquad (2.3.6\text{-}1)$$

O Método de Newton-Raphson utiliza a função de interação f, tal que f´(r) = 0 - em que f´ é a função derivada de f - satisfazendo a condição de convergência |f ´(x)| < 1. Assim, encontra-se A(x) da Equação 2.3.6-1 partindo de f(x) com a exigência de f ´(r) = 0.

$$\boldsymbol{f(x) = x + A(x)P(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 1 + A'(x)P(x) + A(x)P'(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(r) = 1 + A(r)P'(r)}$$

$$\boldsymbol{A(r) = -\frac{1}{P'(r)}}$$

Primeiramente, utilizou-se a Equação 2.3.6-1; em seguida, aplicou-se a derivada em relação a variável x em ambos os membros da equação - utilizando a derivada do produto; depois, substituiu-se na equação o valor r; por último, utilizou-se o fato de P(r) = 0, já que r é uma raiz de P; e depois, por exigência do método, utiliza-se f(r)= 0 e isola-se A(r). Assim, a expressão da função A que satisfaz o resultado encontrado, pode ser representada conforme a Equação 2.3.6-2:

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{-1}{P'(x)}}$$

A referida função é válida para P'(r) ≠ 0. Substituindo a Equação 2.3.6-2 na Equação 2.8-1, tem-se a função de iteração para o Método de Newton:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} - \frac{\mathrm{P(x)}}{P\prime(x)}$$

Assim, para aplicar o método, escolhe-se x_0 adequadamente e determina-se a sequência $\{x_k\}$, para k = 0,1, 2,... por meio da Equação:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} \qquad (2.3.6\text{-}3)$$

Geometricamente, selecionando-se um ponto inicial x_0 do domínio da função polinomial, obtendo a equação da reta, $r_0(x)$, tangente à curva do polinômio P no ponto $(x_0,P(x_0))$, gera-se uma sequência de pontos x_0, x_1, .., x_k no eixo x.

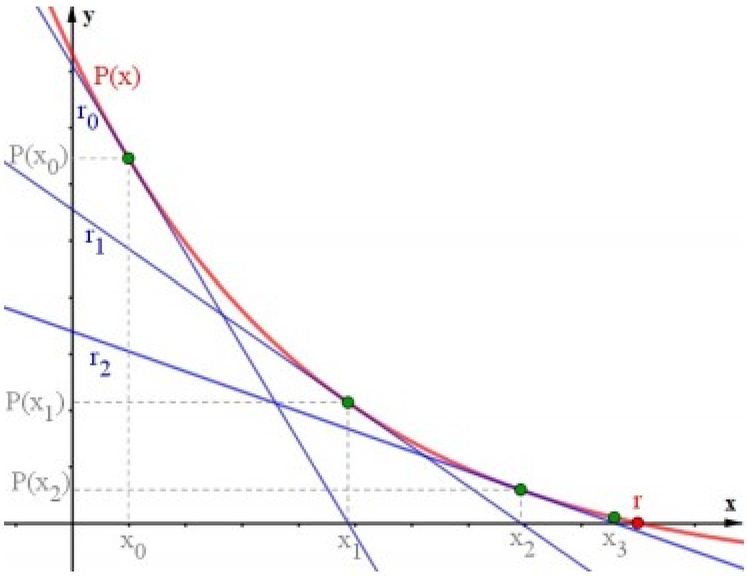


Figura 10: gráfico mostrando três interações do método de Newton-Raphson

Fonte: Silva (2018)

Temos o k-ésimo termo da sequência $\{x_k\}$ de valores aproximados para a raiz do polinômio.

Exemplo 4: Seja $f(x) = x^2 - x - 4$, vamos encontrar uma raiz utilizando o método Newton-Raphson.

Tem-se que f(2) = -2 e f(3) = 2, logo f(2).f(3) = -4 < 0

Toda função polinomial é contínua, então, pelo Teorema de Bolzano, obtém-se que, no intervalo [2;3], existe pelo menos uma raiz.

Assim, pela equação 2.3.6-3 temos:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2+4}{2x_k-1}$$

Para k=0 e x_0=2 tem-se $x_1 = \frac{2^2+4}{2.2-1} \approx$ 2,66

Para k=2 e x_1= 2,66 tem-se $x_2 \approx$ 2,56

Para k=3 e x_2= 2,56 tem-se $x_3 \approx$ 2,561

Ou seja, claramente a raiz da função se aproxima de 2,56 pelo método.

Pelo Geogebra:

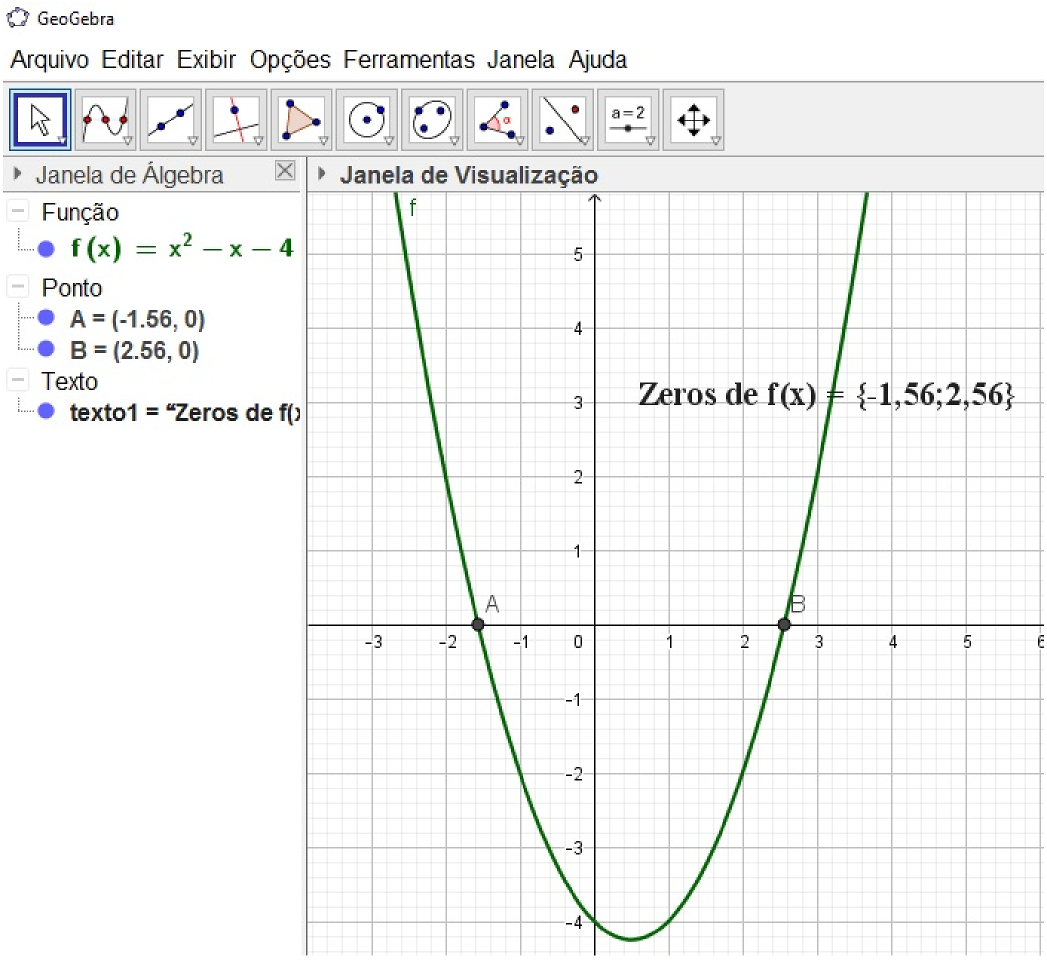


Figura 11: cálculo das raízes de $f(x) = x^2 - x - 4$ utilizando o geogebra

Fonte: Autor

Um bom exemplo de software para verificar o método está em:

https://www.geogebra.org/m/k3hyCWsk

Além de exemplos em:

https://www.geogebra.org/m/hepx2wta

2.4 Funções contínuas e deriváveis

Outra propriedade que torna as funções polinomiais de fácil aplicação é de que toda função diferenciável pode ser aproximada localmente por valores de uma função polinomial de grau 1 (ou por uma função afim[1]). Segundo Rezende (2016):

> "O gráfico de uma função diferenciável pode, localmente, ser aproximado por uma reta. Observe que ao ampliarmos o gráfico de uma função diferenciável uma sequência de vezes, este fica similar a uma reta (...). Tal fato equivale a dizer que podemos aproximar localmente uma função diferenciável por uma função polinomial de grau um. Assim, poderemos calcular valores aproximados de uma função diferenciável em uma vizinhança de um ponto do seu domínio por meio de uma função polinomial de grau um."

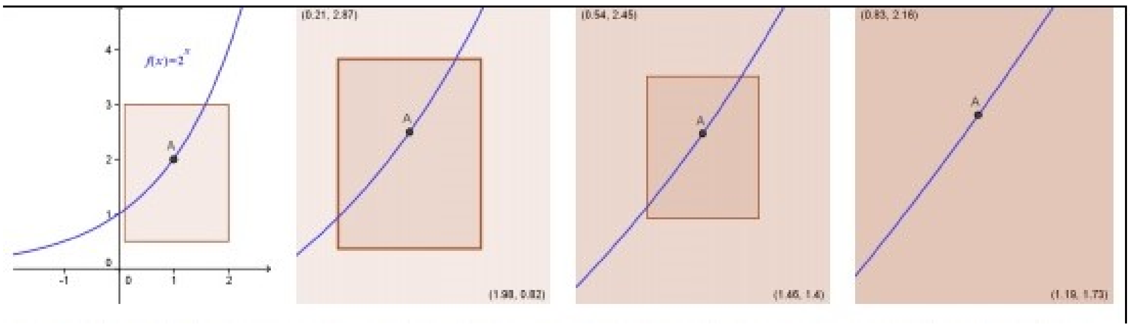


figura 12: sequência de zoom de uma função diferenciável realizado com geogebra. Fonte: Rezende (2016)

[1] No caso da derivada ser igual a zero, a aproximação se dá por uma por uma função afim constante.

Em verdade, dependendo do grau de diferenciabilidade da função podemos fazer aproximações *melhores* aumentando o grau da função polinomial que irá aproximar a função localmente. Um resultado que garante essa afirmação é o teorema de Taylor.

2.5 Fórmula de Taylor

O Teorema de Taylor permite aproximar uma função derivável na vizinhança reduzida em torno de um ponto x_0 mediante um polinômio cujos coeficientes dependem das derivadas da função nesse ponto. Este teorema recebe esse nome em homenagem ao matemático britânico Brook Taylor, que o enunciou em 1712.

Seja uma função f, n vezes derivável em um intervalo aberto I, e $x_0 \in I$. Queremos determinar um polinômio P_n de ordem n, que aproxime os valores da função f, quando tomamos valores de x próximos de x_0. Logo, devemos ter:

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P_n'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$$

Portanto o polinômio deve ser da forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

Substituindo o valor de x_0 na equação acima, obtemos $f(x_0) = a_0$.

Derivando $P_n(x)$ e substituindo o valor de x_0 na equação obtida, obtemos:

$$f'(x_0) = a_1$$

Derivando $P_n(x)$ duas vezes, e substituindo o valor de x_0 na equação obtida, obtemos:

$$\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2$$

E assim sucessivamente, ao derivarmos P_n n vezes, obtemos:

$$P_n^{(n)}(x_0) = n.(n-1).(n-2)\dots 2.1.a_n$$

Como $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$, obtemos

$$f^{(n)}(x_0) = n.(n-1)\dots 2.1.a_n = n!\,a_n$$

portanto,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

O erro que se obtém ao aproximarmos a função f(x) pelo valor de $P_n(x)$ é dado por $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Teorema: Seja f: I → ℝ n vezes diferenciável no ponto $x = x_0$ ∈ I. Então $\lim_{x\to x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0, onde\ E_n(x) = f(x) - P_n(x).$

Demonstraçao:

Seja

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}, como\ \lim_{x\to x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} ,$$

como o segundo termo desse limite não depende de x, basta provar então que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Com efeito, como f é n vezes diferenciável em x_0 e como g é um polinômio, podemos aplicar L'Hospital (n-1) vezes nesse limite e obtemos:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

A expressão $E_n(x)$ é conhecida como Resto de Lagrange em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange.

Exemplo 5: Vamos visualizar graficamente algumas aproximações polinomiais da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ e obter um valor aproximado de e com erro menor do que 10^{-8}.

Observe que $f^{(n)}(x) = e^x \; para \; todo \; x \in \mathbb{R} \; e \; f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Assim substituindo na fórmula de Taylor obtemos:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Podemos observar na figura 7, alguns desses polinômios:

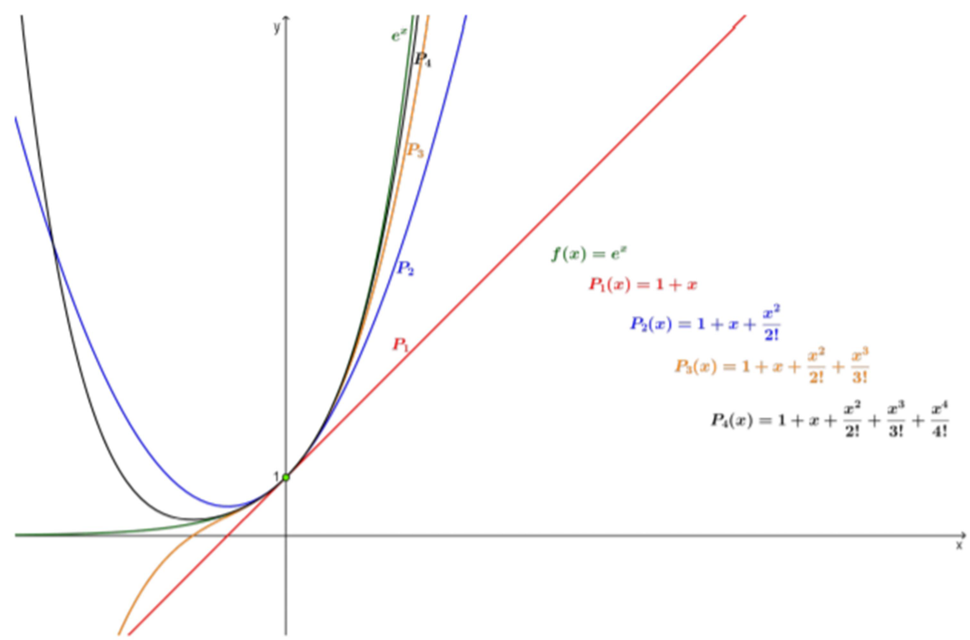


Figura 13: gráfico de $f(x) = e^x$ e de seus polinômios aproximadores até a ordem 4.

Fonte: Santos (2017).

Como $f(1) = e$, podemos obter aproximações para e utilizando o polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x_0 = 0$. Para isso, basta fazer x=1

$$P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \approx e$$

E seu erro, para algum $c \in]0,1[$ é

$$E_n(1) = \frac{e^{(c)}}{(n+1)!}$$

Com $1 = e^0 < e^c < e < 3$

logo,

$$|E_n(1)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Como desejamos o erro menor do que 10^{-8}, temos que (n+1)! > 300000000, logo o menor valor de n para que isso seja possível é n=11 (11! = 39916800).

Logo, $2{,}718281826$ é uma boa aproximação para o número de Euler.

$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} = 2{,}718281826\ldots$[2]

2.6 Valores de máximo e mínimo das funções polinomiais

O estudo de máximos e mínimos (extremos de uma função) tem frequentemente aparecido em muitas situações concretas. Aparece, por exemplo, sempre que um novo produto é comercializado. Afinal é de interesse comercial saber qual é o menor custo do produto, como torná-lo mais lucrativo, como obter lucro máximo etc.

[2] A calculadora científica do Windows 10 fornece o valor aproximado **2,71828182**84590452353602874713527 para o número de Euler.

Historicamente, problemas de máximo e mínimo também se constituíram com um dos problemas essenciais do desenvolvimento do cálculo infinitesimal. O problema isoperimétrico no plano está entre os mais antigos problemas de máximos e mínimos do mundo e consiste no seguinte enunciado: "Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área." (Alves, 2018). Ainda Alves (2018) nos conta uma história sobre esse problema:

> O épico "Eneida" do poeta romano Virgílio(70-19 a.C.), ilustra esse problema na famosa Lenda de Dido: No século IX a.C., na cidade de Tiro, onde hoje é localizado o Líbano, existia uma princesa fenícia chamada Dido (ou Elisa). Com objetivo de subtrair seus tesouros, seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas. Com um grande número de seguidores, para se proteger, Dido fugiu em um navio disposta a fundar uma nova cidade, Cartago. No local escolhido para ser Cartago (onde hoje é a Tunísia), Dido tentou se estabelecer comprando as terras do rei local. Na negociação ficou definido que só teria em terras o que pudesse cercar com a pele de um boi. A princesa e seus seguidores decidirão então cortar a pele em tiras muito finas e abrangeram uma área na beira do mar em formato de semicírculo.

Definição: Seja I um intervalo, uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui máximo local f(c) (respectivamente, mínimo local f(c)) em um ponto (c,f(c)) se existe um intervalo aberto J, onde $J \subset I$ e contém c, tal que $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente $f(c) \leq f(x)$) seja verdadeira para todo x em J. (Munem, 2008)

Definição: Seja $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja c um valor no intervalo I. Se $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente $f(c) \leq f(x)$) vale para todos os valores de x em I, então a função f possui valor máximo absoluto f(c) (respectivamente, valor mínimo absoluto f(c)) no ponto c. (Munem, 2008)

Exemplo 6: Dado a função cujo gráfico é representado na figura a seguir, com I =]1;7,8[.

Temos um máximo local em B(2;4) e um máximo absoluto em D(6;6)

pois f(6) ≥ f(x) para todo x ∈ I.

Observe que f não tem mínimo absoluto, apenas mínimo relativo em c = 3,7.

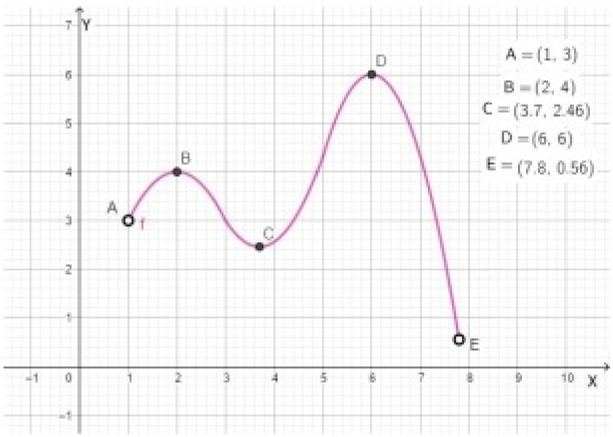


Figura 14: gráfico com os pontos B, C e D expressos.

Os valores de máximo e mínimo são conteúdos recorrentes no ensino médio, tratando-se de funções polinomiais de grau 2, cujo valor é dado pelo vértice da parábola associada à função quadrática. Temos, como exemplo, a seguinte questão do Enem:

Exemplo 7: (Questão 136 - 2° dia - caderno 5 – amarelo -Enem 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O plano é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para isso, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descreverá uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico da Figura 15 mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

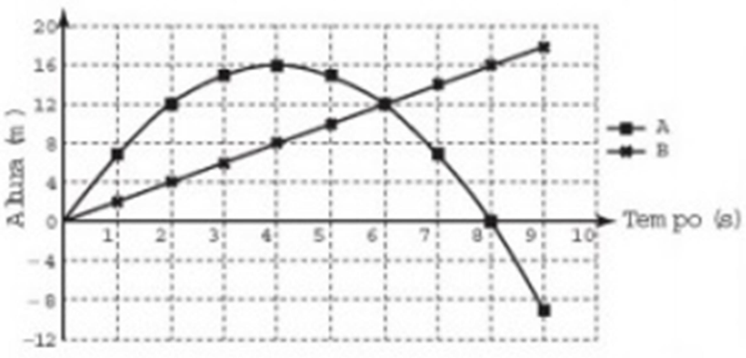


Figura 15: figura da questão 136 Enem 2016.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/

Observa-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

A altura alcançada pelo projétil A em função do tempo é uma função quadrática e seu máximo ocorre no vértice da parábola que é o gráfico da função, isto é, em V = (4, 16).

A altura alcançada pelo projétil B em função do tempo é uma função afim. Seu gráfico passa pelos pontos A = (0, 0) e B = (6, 12), isto é, sua representação gráfica é uma reta com coeficiente angular $a_1 = \frac{12-}{6-0} = 2$.

Logo, a nova trajetória do projétil B deve ser uma função afim onde seu gráfico é uma reta que passa por A = (0, 0) e V = (4, 16) e com coeficiente angular $a_2 = \frac{16-4}{4-0} = 4$.

Temos então que para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá aumentar em 2 .

A seguir apresentamos uma atividade elaborada com geogebra, proposta em Silva, B. (2016)

Exemplo 8: “Na janela de visualização (figura 16) esquerda observa-se um quadrado ALJK de lado medindo 4 centímetros e AEIH um outro quadrado interno a este com um vértice em comum e lado medindo centímetros. Na janela de visualização 2, observa-se o gráfico da área do polígono ELJKHI em função da variável. Sabe-se que a área S do polígono ELJKHI varia de acordo com o valor de   escolhido.

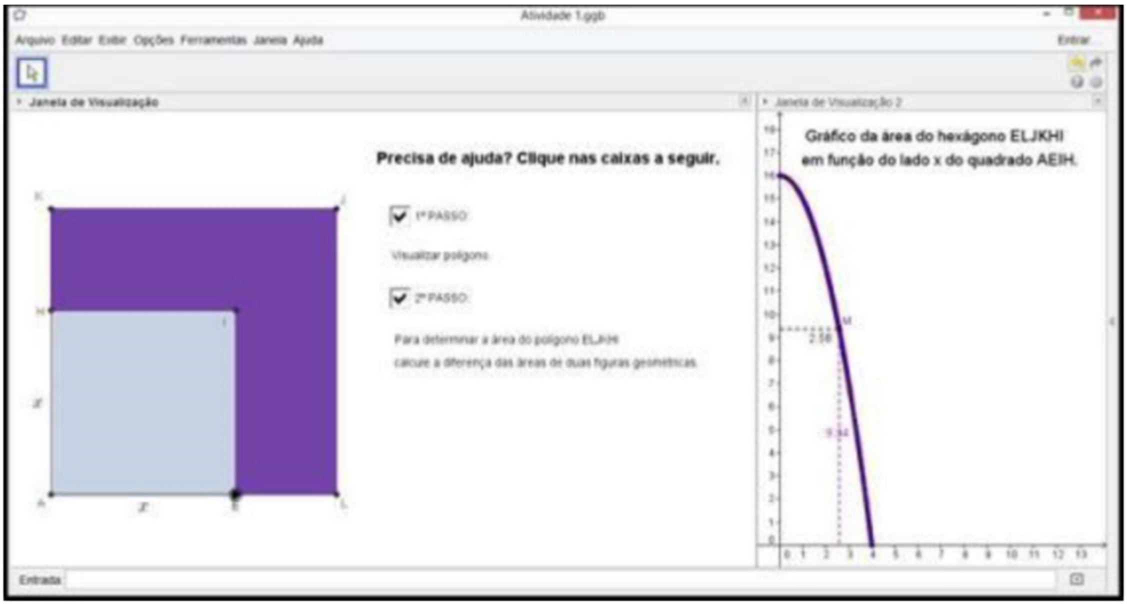


Figura 16: Ilustração do applet da versão interativa da atividade Fonte: Silva,B. (2016)

Esta atividade pede para que o aluno determine a expressão analítica da área do polígono ELJKHI em função de x (medida do lado do quadrado ALJK), estudar o domínio e determinar os pontos ótimos da função. Esta situação problema recai em uma restrição da função quadrática e trabalha com conteúdos simples de geometria como, por exemplo, área de quadrado. O interessante aqui é que o aluno pode estudar domínio, imagem, a existência de máximo e mínimo, antes mesmo de encontrar a expressão analítica da função. Aliás, ela também é objeto de investigação.

Além disso, vários bons exemplos de problemas de otimização de funções reais a uma variável podem ser encontrados em

http://www.cdme.im-uff.mat.br/pot/pot-html/pot-br.html

Em seguida apresentamos um procedimento histórico para resolver problemas de otimização antes mesmo que o cálculo diferencial fosse “inventado”. O método deve-se a Fermat. O que o matemático observou é na vizinhança de um ponto ótimo x, o valor da função f(x+h) é muito próximo ao valor da função no ponto; quer dizer: f(x+h) ~ f(x) para valores de infinitamente pequenos. Vejamos uma aplicação do tal método.

Exemplo 9: Dada $f(x) = x^3 - x$ vamos utilizar a versão do teorema de Fermat para calcular possíveis extremos de f.

$$f(x+h) = f(x), \text{então } (x+h)^3 - (x+h) = x^3 - x, \text{ logo}$$

$$x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h = x^3 - x$$

então $3x^2h + 3xh^2 - h = 0$, e $3x^2 - 1 = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Que são máximo e mínimo relativo da função. Geometricamente:

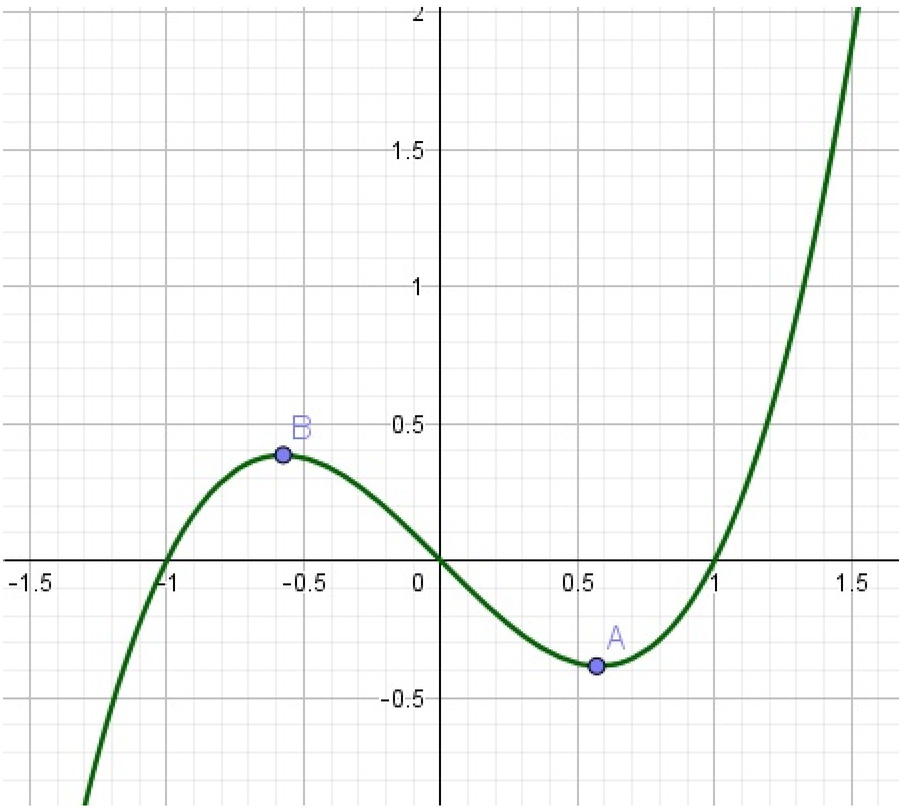


Figura 17: gráfico da função f(x) = x³ - x Fonte: autor

Este método, com o desenvolvimento do conceito e derivada ganha novo formato e é enunciado em diversos livros de Cálculo com o nome de Teorema de Fermat.

Teorema de Fermat: Se uma função f possui um ponto de máximo e/ou mínimo relativo em x=c e a função possui derivada, então ela é nula, isto é $f'(c)= 0$. Munem (2008).

Observação: Como se relaciona o teorema atribuído a Fermat e o seu método histórico de resolução de problemas de otimização? Ora, se f é diferenciável em uma vizinhança do ponto c, temos que

$f(c+h) \approx f(c) + f'(c).h$ para h suficientemente pequeno.

Assim, para $f'(c) = 0$, $f(c+h) \approx f(c)$, como sugere o método de Fermat utilizado no exemplo 9.

2.7 Progressões Aritméticas e funções polinomiais.

As progressões aritméticas e as funções polinomiais estão intimamente ligadas. Mesmo assim estuda-se função polinomial completamente a parte das progressões - e muitas vezes nem mesmo citam-se progressões de ordem maior que 1 - como se ambas fossem coisas distintas, o que é um contrassenso.

Entretanto, nos livros didáticos do Ensino Médio normalmente usa-se, de forma negligente, sem qualquer referência explícita, nos capítulos de funções afim e quadráticas, exemplos de funções em que os valores da variável independente pertencem a um domínio discreto para caracterizar essas funções, ou seja, constrói-se primeiro o gráfico da progressão aritmética – de ordem 1 e 2 nesses casos – para definir e trabalhar com essas funções com domínio em IR.

Uma função polinomial de grau 1, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, leva, por exemplo, a progressão 1, 2, 3, 4… na progressão a+b , 2a+b, 3a+b, 4a+b, … ou seja em uma PA de razão a e isso não é coincidência. Em verdade, toda função polinomial de grau n *leva* uma progressão aritmética de pontos do seu domínio em uma progressão aritmética de ordem n.

Provaremos isso para o caso da função polinomial de grau 2 e admitiremos o resultado, sem perda de generalidade, para os outros casos por similaridade.

Definição (operador diferença): Dada uma sequência $\mathbf{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, define-se o *operador diferença* $(\Delta^1 a_n)\ n \in \mathbb{N} = (a_{n+1} - a_n)\ n \in \mathbb{N}$, que é uma nova sequência.

Obs: Como $\Delta^1 a_n$ é uma sequência, $\Delta^1\Delta^1 a_n = \Delta^2 a_n$ e assim sucessivamente, $(\Delta^k a_n)$ $n \in \mathbb{N}$, para $k > 2$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definição (ordem da PA): Uma sequência (a_n), $n \in \mathbb{N}$, será uma PA de ordem k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante.

Dessa forma, uma progressão aritmética será de ordem 1 se o operador diferença for uma PA constante, de ordem 2 se o operador diferença Δ^2 for uma PA constante e assim sucessivamente, ou ainda, uma progressão aritmética será de ordem 2 se Δ^1 for uma PA de primeira ordem; será de ordem 3 se Δ^2 for uma PA de primeira ordem, e assim por diante.

Exemplo 10: A sequência (b_n), $n \in \mathbb{N}$, definida pela lista (2, 8, 20, 40, 70,…) é uma PA de ordem 3 pois $\Delta^1 b_n$ = (6,12, 20, 30,…), $\Delta^2 b_n$= (6, 8,10,…) e $\Delta^3 b_n$ = (2, 2, 2, …).

Teorema: Toda função polinomial de grau n leva uma PA em uma PA de ordem n

Como vimos no caso da função de grau 1, a função leva a PA de valores $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ em $(y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b \ldots y_k = ax_k + b, \ldots)$ que é uma PA de ordem 1,

pois $\Delta^1 y_n = (a(x_2 - x_1), a(x_3 - x_2), \ldots, a(x_{k+1} - x_k), \ldots)$,

como x_n é uma PA, então $x_{k+1} - x_k = r$ constante para $k \in \mathbb{N}$

No caso da função de grau 2, $y = ax^2 + bx + c$, leva a PA de valores $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ em $(y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \ldots, y_k = ax_k^2 + bx_k + c, \ldots)$

que é uma PA de ordem 2 pois

$$\Delta^1 y_n = (a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1), a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2), \ldots, a(x_{k+1}^2 - x_k^2) + b(x_k - x_k), \ldots),$$

logo como $x_{k+1} - x_k = r$, $\Delta^2 y_n = (a.r(x_3 - x_1), a.r(x_4 - x_2), \ldots, a.r(x_{k+2} - x_k), \ldots)$

e como na PA $x_{k+2} - x_k = 2r$, então $\Delta^2 y_n = (2ar^2, 2ar^2, \ldots)$ é uma PA constante.

Termo geral de uma PA de ordem superior:

Toda PA de ordem superior pode ser expressa por um polinômio, que mostraremos abaixo. A demonstração pode ser conferida em Nobre [16].

Dada a_n , PA de primeira ordem de razão r, temos que $a_n = a_1 + (n-1)r$, então

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} r$$

Dada a_n PA de segunda ordem e $\Delta^1 a_n = (b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ e $\Delta^2 b_n = (r, \ldots, r, \ldots)$ logo

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} r$$

então, de forma geral temos:

Se a_n é uma PA de ordem k e $\Delta^1 a_n$, $\Delta^2 a_n, \ldots, \Delta^k a_n$ sequências com $\Delta^k a_n$ é uma PA constante então:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \cdots + \binom{n-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{n-1}{k} r \qquad (2.7\text{-}1)$$

Exemplo 11: Utilizando a sequência (b_n), n $\in \mathbb{N}$, definida pela lista (2, 8 ,20 ,40, 70,…) do exemplo 10 citado anteriormente temos que o termo geral dessa PA de ordem 3 é:

$$b_n = \binom{n-1}{0} 2 + \binom{n-1}{1} 6 + \binom{n-1}{2} 6 + \binom{n-1}{3} 2$$

$$= \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} 2 + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} 6 + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} 6 + \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} 2$$

$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n)$$

Exemplo 12: (Castelo de cartas). A Figura 18 mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?

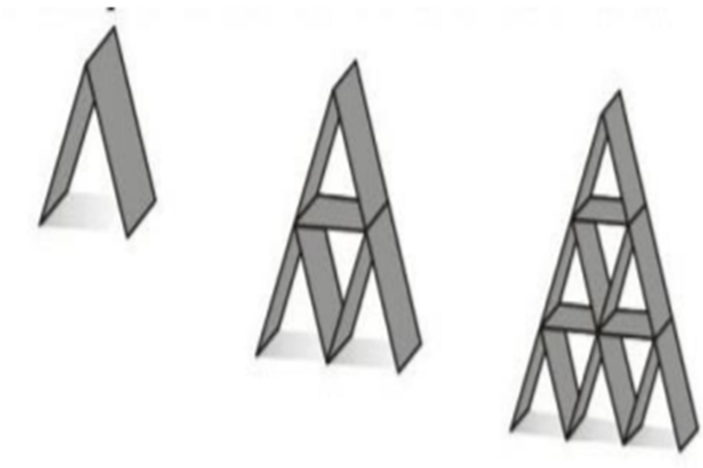


Figura 18: Castelo de cartas. Fonte: OBMEP 2009

Solução: Seguindo a lógica da Figura 3, tem-se que o n-ésimo termo da sequência (an) n $\in \mathbb{N}$, onde $a_1 = 2$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 3n + 2$, isto é, (a_n) n $\in \mathbb{N}$ = (2, 7, 15, 26, 40, ...), representa a quantidade mínima de cartas para construir um castelo de n andares. Veja que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta^1 a_n = 3n + 2$ e $\Delta^2 a_n \equiv 3$, isto é, $(\Delta^1 a_n)$ n $\in \mathbb{N}$ = (5, 8, 11, 14, ...) e $(\Delta^2 a_n)$ n $\in \mathbb{N}$ = (3, 3, 3, 3, ...). Logo, $(a_n)_{n \in N}$ é uma PA de segunda ordem. Assim, por (2.7-1):

$$a_n = \binom{n-1}{0}2 + \binom{n-1}{1}5 + \binom{n-1}{2}3$$

$$= \frac{1}{2}(3n^2 + n)$$

Logo, $a_{10} = \frac{1}{2}(3.10^2 + 10) = 155$ é o número mínimo de cartas para construir um castelo de 10 andares, logo necessita de, no mínimo, 3 baralhos para construir esse castelo.

2.8 Funções Polinomiais em $\mathbb{C}$.

Definição: Seja D um subconjunto de $\mathbb{C}$. Tem-se que f é uma função de variável complexa quando faz corresponder, a cada elemento $z \in D$, um único número complexo $w = f(z)$. Diz-se portanto, que f é uma função complexa com domínio D. Denomina-se o conjunto I dos valores $w = f(z)$ por imagem de D, z por variável independente e w por variável dependente.

Considerando $w = u + iv$, é conveniente expressar a função $f : D \to \mathbb{C}$ em termos de parte real e parte imaginária, ou seja, $f = u + iv$. Sendo $z = x + iy$ tem-se: $u(z) = u(x, y) = \text{Re}\,(f(z))$ e $v(z) = v(x, y) = \text{Im}\,(f(z))$. Nota-se que u e v são funções reais em D.

Por exemplo, $f(z) = z^2$, com $z = x + iy$, então:
$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

Portanto, as partes real e imaginária são respectivamente, $u(z) = x^2 - y^2$ e $v(z) = 2xy$.

2.8.1 Funções elementares

Definição: A função complexa f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ da forma $f(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n$ é uma função complexa polinomial. Se $a_n \neq 0$, então f é uma função polinomial de grau n.

Algumas funções complexas elementares importantes são: ·

- Função Constante: $f(z) = c$, onde $c \in \mathbb{C}$. Se $c = 0$, então f é a função nula. Translação: $f(z) = z + b$, onde $b \in \mathbb{C}$. Se $b = 0$, então f é a função identidade. ·
- Rotação: $f(z) = az$, onde $a \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$. ·
- Homotetia: $f(z) = az$, onde a é uma constante real não nula. Se $a > 1$ dizemos que f é uma dilatação e se $0 < a < 1$ dizemos que f é uma contração.
- Função n-ésima potência: $f(z) = z^n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$

Exemplo 13: Transformação pelas funções $f(z) = z + 2$, $g(z) = 2z$ e $h(z) = iz$ e $t(z) = z^2$.

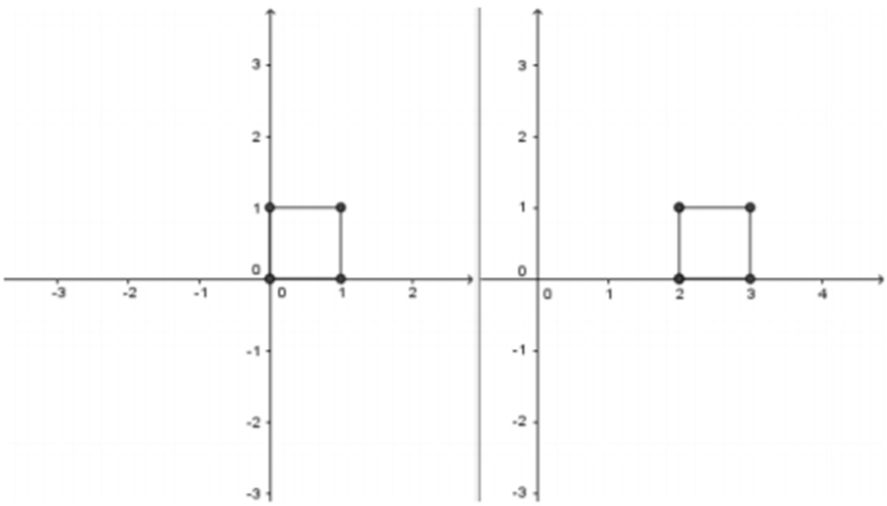


Figura 19.1: Transformação por meio da função $f(z) = z$ +2.Fonte: Pereira (2017)

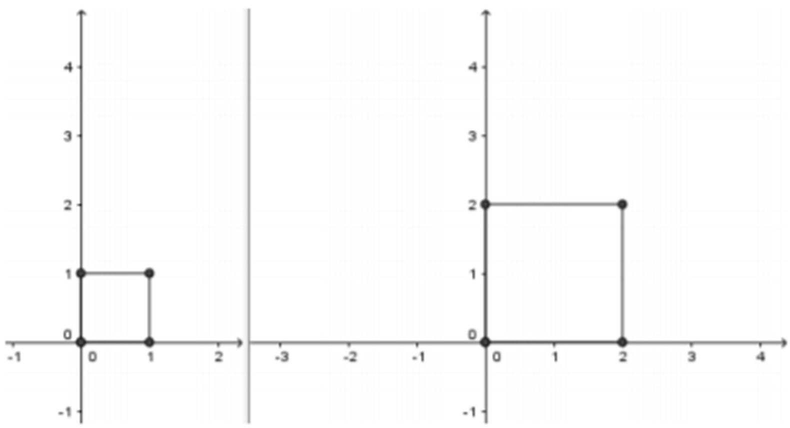


Figura 19.2: Transformação por meio da função $g(z) = 2\,z$. Fonte: Pereira (2017)

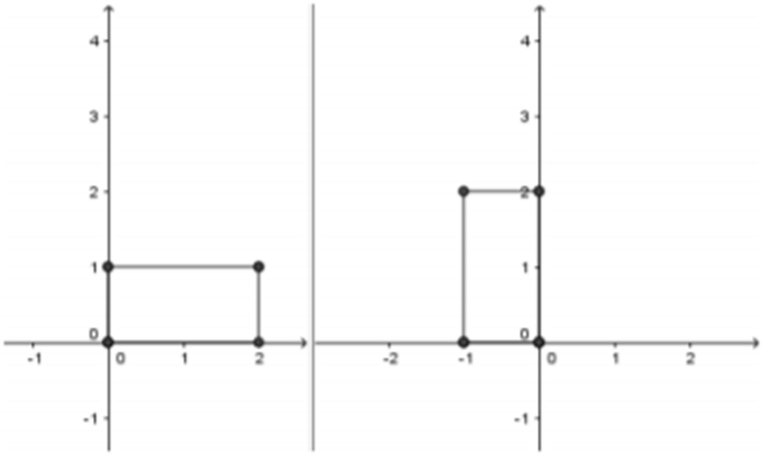


Figura 19.3: Transformação por meio da função $\mathrm{h}(z) = i\ z$. Fonte: Pereira (2017)

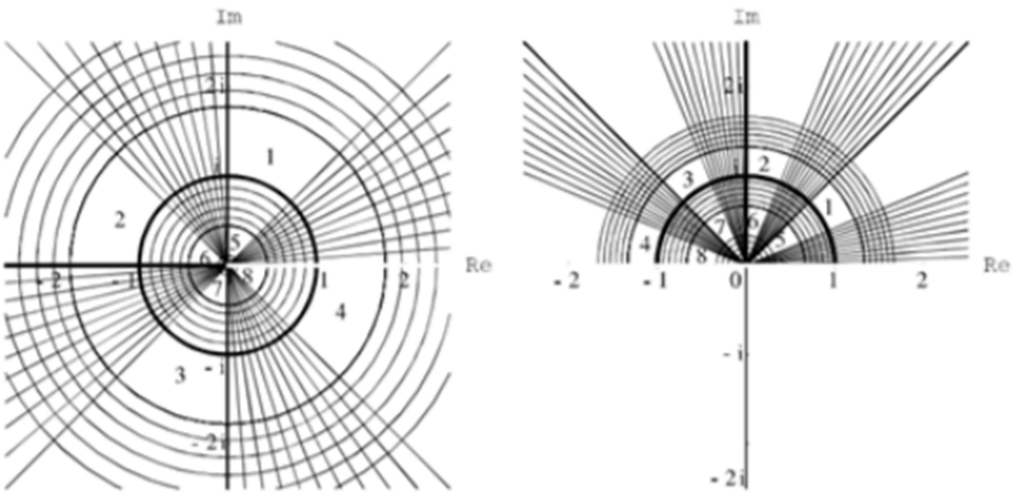


Figura 19.4: Transformação por meio da função $t(z) = z^2$. Fonte: Pinho (2011)

2.9 Observações finais

Essas relações teóricas encontram sentido em sala de aula se dialogadas com outras tanto no cotidiano, na história, nas ciências, na vida do trabalho, enfim quando conectadas na vida real. E, apesar do escasso material que há sobre essas conexões, D'Ambrosio (1993) já alertava para a tendência integradora da matemática com todas as ciências:

> Tem se procurado dar às ciências o mesmo caráter de universalidade, sobretudo devido ao seu crescente estilo matemático. Mas as dificuldades têm sido enormes. O TIMS está procurando fazer face a essa dificuldade, e o que se almeja é a elaboração de instrumentos únicos de avaliação, integrando a Matemática às ciências. Há dificuldades enormes, mas a integração parece ser a tendência. Em outros termos, é possível que vejamos a Matemática desaparecendo como disciplina autônoma nas avaliações globais. E, conseqüentemente, nas avaliações em geral.

Dessa forma, o próximo capítulo mostra algumas questões e atividades, buscando aplicações e contextualizações das funções polinomiais, seja nas ciências, nas provas do ENEM, nas contas, nas artes, enfim na vida.

Capítulo 3
Propostas de Aplicações

3.1 Justificativa

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018), a Matemática e suas Tecnologias devem ampliar e aprofundar os conhecimentos matemático aprendidos na etapa do ensino fundamental, de forma integrada e contextualizada. Enquanto que no ensino fundamental as habilidades em Matemática estão divididas em: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, as habilidades no ensino médio estão construídas em pares de ideias fundamentais: variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição e relações e inter-relações. Essa organização tem como objetivo mostrar a articulação da Matemática com as outras áreas do conhecimento, principalmente com as Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

> Ao se denominar a área como sendo não só de Ciências e Matemática, mas também de suas Tecnologias, sinaliza-se claramente que, em cada uma de suas disciplinas, pretende-se promover 46 competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos. Isto significa, por exemplo, o entendimento de equipamentos e de procedimentos técnicos, a obtenção e análise de informações, a avaliação de riscos e benefícios em processos tecnológicos, de um significado amplo para a cidadania e também para a vida profissional. (BRASIL, 1997, p.6)

Dessa forma, é urgente novas ideias contextualizadoras no sentido de ampliar o conhecimento, estabelecer parâmetros e promover novas interações entre a matemática e a vida e o trabalho. Como exemplos escolhemos várias questões e atividades relacionadas às funções polinomiais na economia, no ENEM, etc. para serem usadas como base para um pensamento integrador da Matemática com outros saberes. Para a redação deste capítulo, selecionamos alguns tópicos relacionados às Ciências Médicas e Biológicas, Física, Economia e Artes. No portfólio virtual que construímos em https://guattari.wixsite.com/matematica, apresentamos mais exemplos.

3.2 Aplicações das funções polinomiais em ciências médicas e biológicas

Uma antiga anedota diz que um grupo de matemáticos se propôs a estudar e a oferecer sua contribuição na solução de um problema de Biologia. Ao cabo de dez anos de intensos estudos, o presidente da comissão, em uma reunião com a sala repleta de biólogos, médicos dedicados no assunto e diletantes, começou sua preleção sobre os avanços que o grupo havia obtido durante a década, com o anúncio do seguinte teorema: “Suponhamos um elefante esférico...”.

Atualmente, as técnicas e métodos para a compreensão e análise acurada da variabilidade biológica estão ao alcance da Estatística e, com a ajuda de computadores, é possível analisarem-se quantidades enormes de dados e variáveis, estabelecendo-se ainda possíveis relações. É neste estágio que modelos estocásticos e determinísticos podem ser elaborados, propostos, testados e simulados. Tais modelos serão cada vez mais úteis, à medida que os conhecimentos avançam e não podem mais ser abordados com eficiência pelo emprego somente da linguagem verbal.

Dessa forma, muitos modelos de aproximações de números e gráficos de funções polinomiais são necessários em estudos de eletrocardiogramas, massa hepática (em que o treinamento físico de um indivíduo, na dependência da qualidade e da quantidade de esforço realizado, provoca a longo termo aumento do peso do fígado e do volume do coração, existindo uma relação linear entre massa hepática e volume cardíaco, relação expressa, conforme dados experimentais, aproximadamente por y(x) = 0,95x – 585 veja figura 20 – em que os pares de valores experimentais- dados por meio de pontinhos (.) não estão exatamente sobre a reta, mas que dado o erro experimental é possível fazer aferições e estimativas, temperatura e volume sanguíneo em que Mellerrowicz (1979) verificou que a temperatura ambiente t também exerce influência sobre a frequência cardíaca.

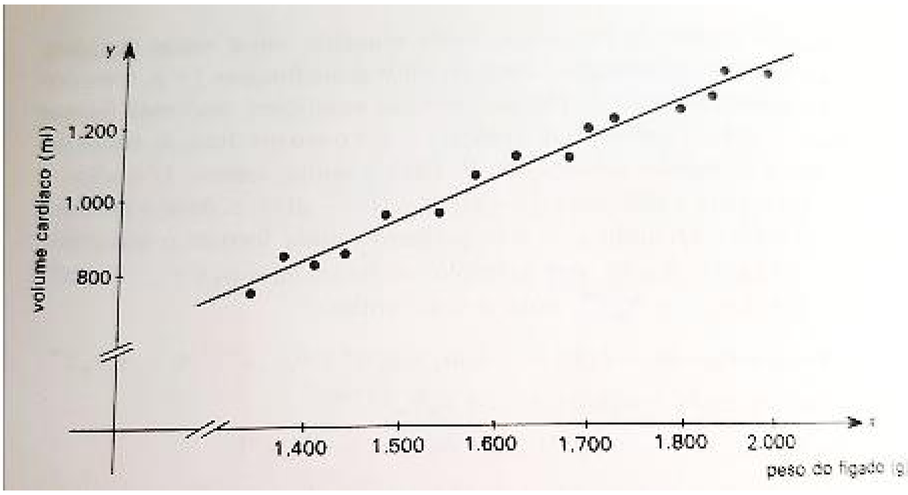


Figura 20: função massa hepática X volume cardíaco. Fonte: Aguiar (1988)

Na figura 21 em que o volume sanguíneo de um indivíduo em repouso é dado em função da temperatura ambiente pela função polinomial de grau 3, y = f(t) = 0,0004t³ + 0,0208t² + 0,2881t + 1,5781. Observe que o domínio da função está compreendido entre 6 e 50, em graus centígrados.

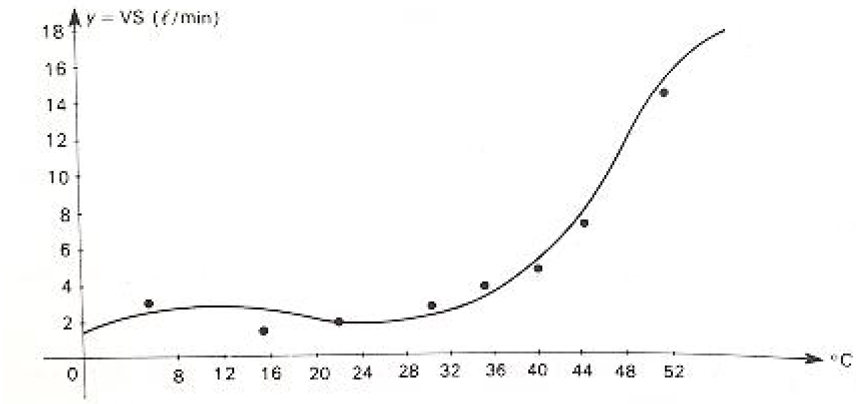


Figura 21: volume sanguíneo em função da temperatura ambiente. Fonte: Aguiar (1988)

E muitos outros exemplos poderiam ser destacados aqui como fluxo laminar, áreas de superfície corporal, etc. Dessa forma, é vasta a aplicação de funções polinomiais para as ciências biomédicas, em que não cabem mais “elefantes esféricos”, e inclusive o ENEM tem exemplos em abundância.

Exemplo 14: (Enem 2015 questão 151)

QUESTÃO 151

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

Solução: Suponha que q seja a quantidade de meninas do público-alvo e x a porcentagem que precisa ser vacinada.

A quantidade de meninas que desenvolvam a doença deve ser de no máximo 5,9% da população, ou seja, 5,9%q.

Temos que o HPV acomete 50% das pessoas não vacinadas, precisamos considerar ainda os 2% nas pessoas de ineficácia da vacina, e a quantidade de pessoas que não vão tomar a vacina (1-x). Assim, temos a seguinte equação:

$50\%.2\%.x.p + 50\%.(1-x).p = 5,9\%p$

$0,5.0,2.x + 0,5(1 – x) = 0,59$

$0,5.(0,2x + 1 – x) = 0,59$

$1 – 0,98x = 0,59/0,5$

$x = 0,882/0,98 = 0,9 = 90\%$

3.3 Aplicações das Funções Polinomiais em Economia

A Economia perpassa muitos níveis da vida humana: em suas relações monetárias, nas políticas de compra e venda, nas relações de troca, de construção, etc. Assim, ela não se restringe a apenas teorias e modelos da Economia, mas também da sociologia (em que se estudam taxas de suicídio, estatísticas políticas, etc.), da História (estruturas econômicas de época, sistemas de capital e escambo, etc.), da Administração (com cálculos de fluxo de caixa, previsões de lucro, equilíbrio fiscal, etc.) e a muitos outros ramos das ciências modernas.

Em especial, a matemática financeira é de vital importância nessas aplicações e seu estudo deveria ser mais aprofundado no ensino médio, na medida que em muitas situações da vida cotidiana encontramos exemplos de casos envolvendo empréstimos, parcelamentos, juros, etc.

Ter conhecimento sobre a família de funções polinomiais não só é importante para cálculos matemáticos como também para o exercício pleno da cidadania, na medida que permite prever e calcular verdades por trás de mentiras comerciais, como termos “sem juros” ou taxas embutidas.

Suas fórmulas envolvendo montante, capital, juros simples e compostos muitas vezes são funções polinomiais e, no caso do juros i como incógnita temos no juros simples uma função polinomial de grau 1, M = C(1+in), e, no caso do juros compostos, $M = C\ (1+i)^n$ uma função exponencial, fixando M o montante, C o capital e n o número de parcelas, com i a taxa de juros como um parâmetro dado ou a ser descoberto. Um exercício interessante em problemas de juros composto é aquele em que se dão duas opções para a compra de um produto: pagamento à vista "com desconto" ou a compra parcela em N prestações iguais "sem juros". O problema interessante aqui é o de determinar a taxa de juros embutida no parcelamento enganos de N-vezes "sem juros". A solução desse problema envolve conhecer aproximações para raízes de funções polinomiais de grau superior a 1 ou dois como costumam ser cobrados em livros didáticos. Voltaremos a esse assunto na atividade do exemplo 15.

Antes porém, apresentemos alguns problemas de resolução mais simples.

Exemplo-Atividade 15 (Antunes, 2018): Uma malharia especializada em uniformes escolares possui custos fixos e variáveis para a produção de uma camiseta de poliviscose, básica, manga curta, branca, conforme dispostos na Tabela 2.

Resolva:

(a) Organize os dados de custos da Tabela 2 referentes à confecção de camisetas, classificando-os em custos fixos e custos variáveis. Observe como cada dado influencia o produto produzido.

(b) Considere que a empresa produza e venda 2.000 peças mensalmente a R$ 18,72 por peça, calcule o custo variável e o custo total nesta situação.

(c) Com os valores obtidos nos itens anteriores é possível traçar o gráfico da função custo total? Em caso afirmativo, trace o gráfico no plano cartesiano, considerando x o número de unidades produzidas.

(d) Utilizando seu conhecimento de funções matemáticas e os dados fornecidos na Tabela 2 escreva o custo total em função de x.

Exemplo 16: (ENEM, 2009, questão 146)

Tabela 2 – Custos envolvidos na confecção da camiseta branca

Descrição	R$
Tarifa Fixa Banco	49,90
Malha (R$ 7,25 m x 0,80)	6,36
Ribana	0,20
Telefone	70,00
Linhas e agulhas	0,15
Aluguel Loja	1.250,00
Corte	0,50
Fechamento	2,00
Etiquetas e sacolas	0,15
Aluguel fábrica	350,00
Luz	300,00
Água	50,00
Contador	240,00

Fonte: Próprio Autor

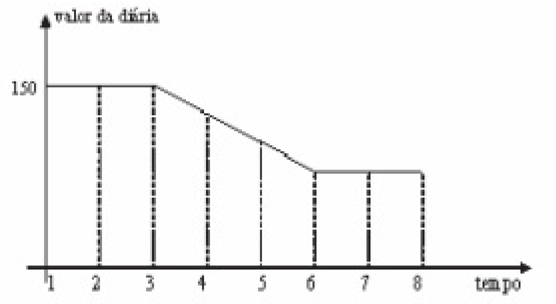
A Tabela 3 contém as informações complementares para a resolução da atividade.

Tabela 3 – Informações Complementares

Quantidade Produzida	2.000
Média de Vendas - Mensal (peças)	1.000
Preço de Venda	20,50

Fonte: Próprio Autor

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

A) R$ 90,00. B) R$ 110,00. C) R$ 130,00. D) R$ 150,00. E) R$ 170,00.

Solução: Seja x o valor da diária e y a economia dos 8 dias de estadia.

Logo, $y = 7x - (3x + (x - 20) + (x - 40) + (x - 60) + 2(x - 60)$

Então $y = 7x - 8x + 240$ como $x = 150$, temos $y = 90$ letra A

Exemplo 17: Uma loja vende uma TV de R$1500,00 em 10 vezes iguais "sem juros" ou com 10% de desconto à vista. Calcule o juros embutido na compra a prazo.

Solução:

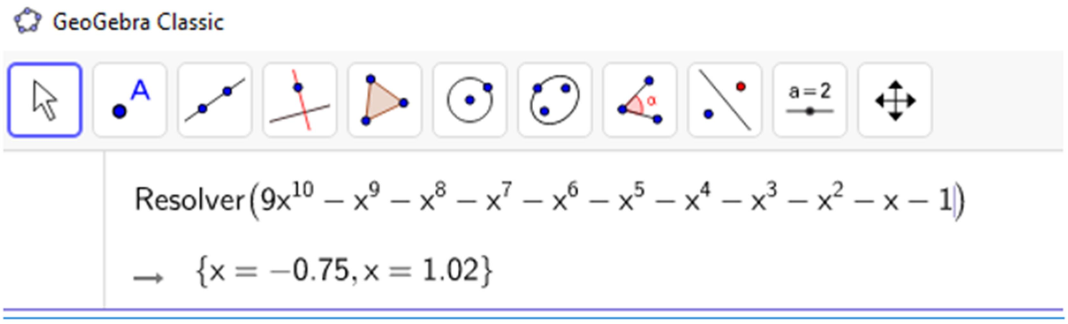
1500 = 10 x 150 e x a taxa de juros

1350 = $\frac{150}{x} + \frac{150}{x^2} + ... + \frac{150}{x^{10}}$ e logo 9 = $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^{10}}$

Então, $9x^{10} - x^9 - \cdots - 1 = 0$

Que reduz-se a achar as raízes de uma função polinomial de grau 10.

Calculando no Geogebra tem-se:



Logo o juros embutido será de 2% ao mês.

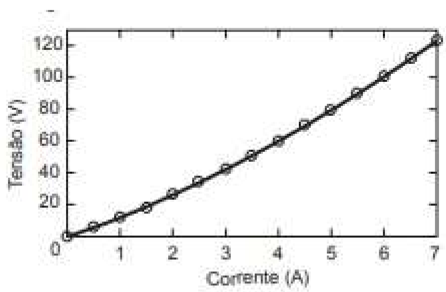
3.4 Aplicações das Funções Polinomiais em Física

É notória a importância da matemática nos modelos físicos. Em especial, as funções polinomiais estão na cinemática (as equações de velocidade, respectivamente de graus 1 e 2, entendendo t a variável, com s espaço, s_0 espaço inicial e v velocidade: $s = s_0 + vt$ e $S = S_0 + V_0 t + (at^2)/2$) na eletricidade (como no exemplo 18 a seguir) e em praticamente todos os ramos da física. No Ensino médio encontramos em velocidade, aceleração, calorimetria, etc.

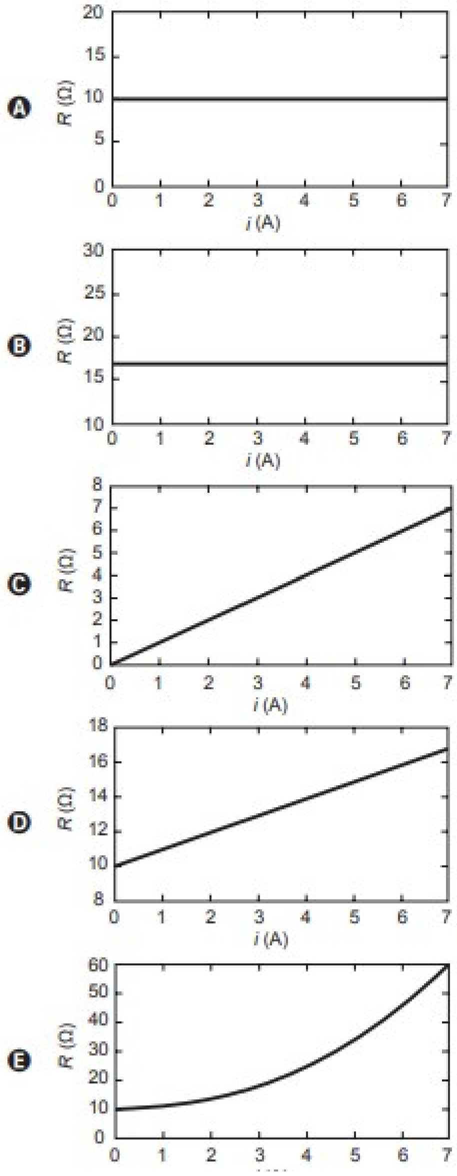
Os cálculos de trajetória e velocidade abrem espaço para vários experimentos que se pode fazer em sala. Citamos na atividade 19 um exemplo dado em sala do cálculo de trajetória de um foguete construído por alunos, em que se utiliza função de polinômio de grau 2 para traçar o caminho do foguete em especial seu alcance e altura máxima.

Exemplo 18: (ENEM 2018, questão 108)

Ao pesquisar um resistor feito de um novo tipo de material, um cientista observou o comportamento mostrado no gráfico tensão versus corrente.



Após a análise do gráfico ele concluiu que a tensão em função da corrente é dada pela equação V = 10i + i². O gráfico da resistência elétrica ® do resistor em função da corrente
(i) é:



Substituindo a equação da tensão dada na equação da 1ª Lei de Ohm, temos:

$$R = \frac{V}{i} = \frac{10i + i^2}{i}$$

Logo $R = 10 + i$

Portanto, o gráfico que representa a resistência elétrica do resistor deve ser uma reta inclinada positivamente e que intercepta o eixo vertical no valor de 10Ω sendo correta a alternativa [D].

Exemplo-Atividade 19: Foguete/Aeromodelo

Utilizando-se apenas materiais recicláveis e de fácil acesso, propõe-se a construção e lançamento de um aeromodelo no formato de um foguete feito com garrafa PET; e a elaboração de um relatório onde o estudo de sua trajetória é realizado detalhadamente.

É uma atividade que necessita de outros temas estudados no ensino médio, e estimula o aluno a revisar assuntos como trigonometria, polinômios, funções, etc.

A construção do aeromodelo é simples e pode ser vista tanto no YouTube (https://www.youtube.com/watch?v=JNFAAksbO08) quanto no site da Oimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica, OBA (https://www.oba.org.br) . Os materiais utilizados são também acessíveis: garrafas PET, tubos e conexões de PVC, válvula de pneu de bicicleta, bexigas, presilhas de náilon, etc.

Uma das metas é a de determinar qual é função polinomial do segundo grau que modela a trajetória do foguete, assumindo aqui as leis da física, com algumas simplificações como, por exemplo, desconsiderar o atrito do ar. Procuramos assim a função polinomial que nos fornece a altura em que ele se encontra quando se desloca horizontalmente a uma determinada distância. E, por fim, fazemos uma análise dos dados coletados no desenvolvimento dessa atividade.

Para calcular o alcance máximo: Vamos considerar o nosso aeromodelo como apenas um ponto (o seu centro de massa), assim podemos analisar sua trajetória como a de um projétil. Além disso consideraremos sua trajetória em duas dimensões, ou seja, o caminho que o foguete percorre está contido em um plano vertical. Consideremos v o vetor velocidade, que indica a velocidade inicial de nosso projétil. Esse vetor tem uma componente horizontal e outra vertical. Então escreveremos

$$v = (v_x, v_y)$$

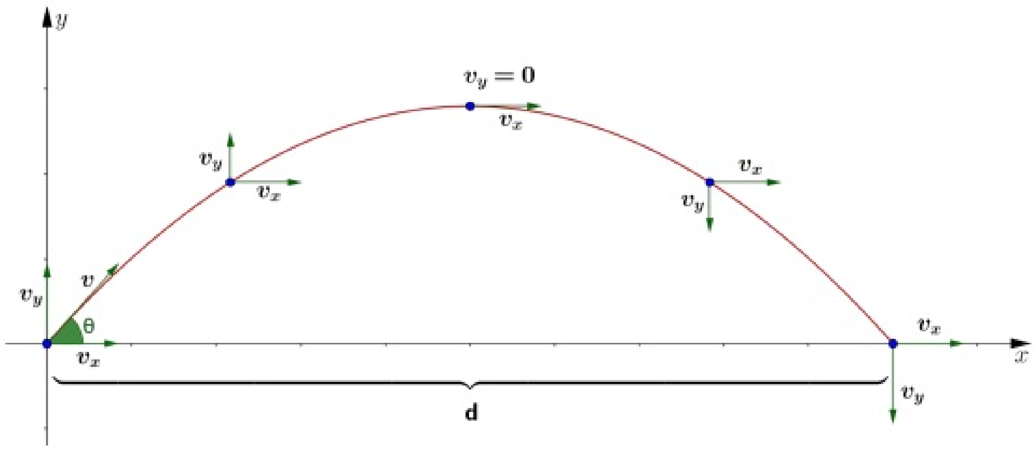


Figura 22: trajetória do aeromodelo. Fonte: Daniel (2016)

Na sua componente horizontal o movimento é uniforme já que não sofre aceleração (velocidade constante). Já na sua componente vertical temos a ação da gravidade g ≈ 9, 81m.s^{-2}.

Consideraremos o eixo vertical com sentido positivo para cima, portanto a aceleração da gravidade será negativa, uma vez que ela puxa o objeto para baixo. Portanto a sua posição, vertical e horizontal (x, y), supondo que o aeromodelo partirá da origem do plano cartesiano, será dada pelas leis físicas:

Posição horizontal (em metros) no movimento retilíneo uniforme em função do tempo (s):

$$\mathrm{x} = v_x t \qquad (1)$$

Posição vertical (em metros) no movimento uniformemente variado em função do tempo (s):

$$y = v_y t - \frac{g}{2}t^2 \quad (2)$$

Supondo $v_x \neq 0$ (caso contrário teríamos um lançamento vertical que não é a proposta deste trabalho), na equação 1 temos:

$$t = \frac{v}{v_x}$$

Substituindo na equação 2 temos:

$$y = v_y\left(\frac{x}{v_x}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$

$$y = v_y\left(\frac{x}{v_x}\right) - \frac{g}{2}\frac{x^2}{{v_x}^2}$$

$$y = x\left(\frac{v_y}{v_x} - \frac{g}{2}\frac{x}{v_x^2}\right)$$

Como temos um produto neste polinômio do segundo grau, sabemos que suas raízes acontecem quando um das duas parcelas é zero, logo temos

$$x = 0 \quad ou \quad x = \frac{v_y}{v_x} - \frac{gx}{2v_x^2} = 0$$

Podemos descartar a primeira opção pois x = 0 indica a posição de lançamento do projétil, estamos interessados na posição de chegada.

Portanto, consideramos a segunda opção, logo:

$$x = \frac{2v_x v_y}{g}$$

Logo, a posição que o projétil pode atingir depende apenas das componentes vertical e horizontal do vetor velocidade.

3.5 Aplicações das funções polinomiais nas artes.

A matemática e a arte sempre foram aliadas: na composição de figuras – muitas vezes utilizando-se figuras geométricas como objeto artístico, outras em cálculos de proporções faciais, corporais, construções arquitetônica, nos cálculos de estrutura, de séries harmônicas na música – em que é possível encontrar sequências de P.A. e P.G. –, e em muitas outras expressões artísticas não apenas como suporte, mas também como o próprio objeto artístico. Segundo Fainguelernt (2006):

> A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas. Essas duas áreas sempre estiveram intimamente ligadas, desde as civilizações mais antigas, e são inúmeros os exemplos de suas interações. Muitos povos utilizaram exemplos matemáticos na confecção de suas obras: os egípcios com suas monumentais pirâmides e gigantescas estátuas, os gregos com o famoso Parthenon e com seus

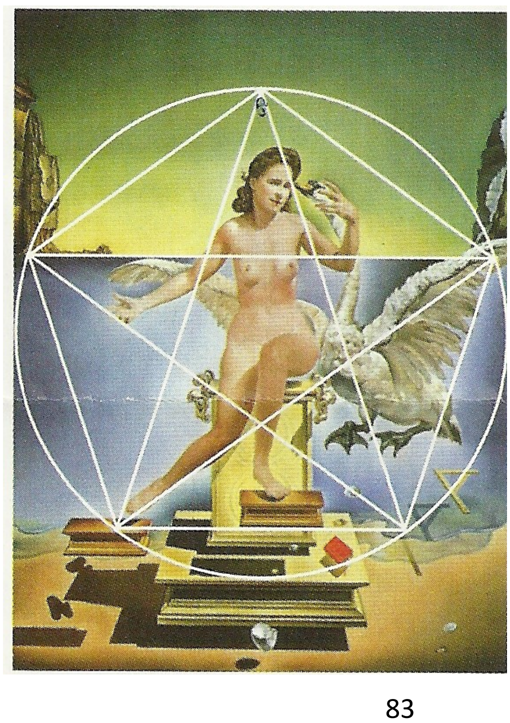
belíssimos mosaicos; os romanos com suas inúmeras construções com formas circulares, entre elas o Coliseu.

As funções polinomiais não estariam fora disso: sua importância é enorme para cálculo de estrutura, para o estudo da perspectiva e afins. Daremos o exemplo de cálculo de diagonais de um polígono por uma função polinomial do segundo grau e também de um exemplo de fractais na atividade-exemplo 21 na qual a figura é gerada por um processo interativo com função polinomial de variáveis complexas $f(z) = z^8 - 1$.

Na atividade 20 o número de ouro é um exemplo de número algébrico que figura como solução de equações polinomiais específicas.

Exemplo-Atividade 20: O quadro Leda Atômica foi pintado por Salvador Dalí em 1949 e utiliza-se da proporção de ouro, muito utilizada pelos gregos para determinar medidas com grande valor harmônico.

O número de ouro é a razão entre o comprimento e a largura do retângulo áureo, construído a partir do quadrado. Esse número irracional é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou aproximadamente 1,618033988749895[3].



[3] Windows 10.

Figuras 23 e 24: Quadro Leda Atômica e estudo sobre o pentagrama.

Fonte: Fainguelernt (2006)

Ainda Fainguelernt (2006):

> O número de ouro figura em muitas obras de arte, não só na pintura, como também na natureza, no próprio corpo humano, na escultura e na arquitetura, como por exemplo no Pathernon, grande monumento construído na Grécia, no século V a.c.
>
> Hoje sabemos que o número de ouro regula também a espiral que aparece na natureza, como na margarida, no girassol, na concha do molusco náutilo, etc.

O número de ouro, também denominado por φ é um número irracional, mas que faz parte de uma família especial de números irracionais: os números algébricos.

Em verdade, o conjunto dos números algébricos transcende o universo dos números reais.

Definição: Um ***número algébrico*** é qualquer **número** real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Em um sentido mais amplo, diz-se que um **número** é **algébrico** sobre um corpo quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes neste corpo.

Desse modo,

a) $\sqrt{2}$ é um número algébrico

pois é solução da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$

b) $4/3$ é um número algébrico

pois é solução da equação polinomial $3x - 4 = 0$

c) 1 é um número algébrico

pois é solução da equação polinomial $x - 1 = 0$

d) i é um número algébrico

pois é solução da equação polinomial $x^2 + 1 = 0$

e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número algébrico

pois é solução da equação polinomial $x^2 - x - 1 = 0$

Mas o número de Euler ***e***, $2^{\sqrt{2}}$ e o π não são números algébricos, são denominados por números transcendentes.

Assim, usando as equações polinomiais podemos classificar os números reais em algébricos e transcendentes. A não-enumerabilidade do conjunto dos números reais deve-se a existência dos números transcendentes. O conjunto dos números algébricos é enumerável. Desse modo, o número de ouro φ pertence a uma classe enumerável de números irracionais.

Vemos nesse por meio desse exemplo uma aplicação intradisciplinar das equações polinomiais na própria matemática. O número de ouro é a raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Este número é o resultado da divisão áurea que foi estudada pelos gregos antes de Euclides e é conhecida desde Pitágoras. Ao que tudo indica, essa divisão que existe no pentágono regular talvez tenha sido o motivo que levou os pitagóricos a adotarem o pentagrama como símbolo de sua sociedade secreta. Este número sempre teve associado ao padrão de beleza, da Grécia antiga ao Renascimento.

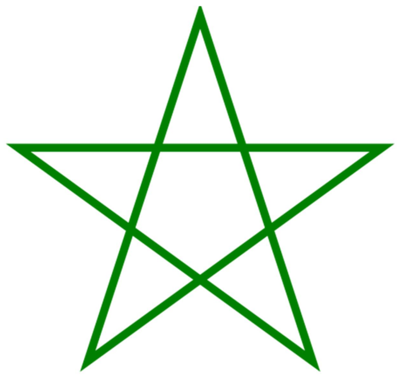


Figura 25: imagem do pentagrama, símbolo da Escola Pitagórica

Fonte:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Escola_pitag%C3%B3rica#/media/Ficheiro:Pentagram_green.svg

A próxima atividade que apresenta uma aplicação de uma função polinomial complexa utiliza a ideia de fractal.

Definição: *Um fractal é um objeto geométrico que, quando dividido em partes quaisquer, cada uma delas exibe semelhanças ao objeto original. E medidas geométricas, como comprimento e área de partes de um fractal, crescem ou decrescem com potências fracionárias. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes e podem ser gerados por um padrão repetido como nessa espiral infinita num processo recorrente.*

Exemplo-Atividade 21: Uma classe de fractais surge nos procedimentos de encontrar raízes de polinômios. Por exemplo, a figura abaixo foi gerada no procedimento de encontrar as raízes de um polinômio de grau 8 $f(z) = z^8 - 1$. Essas raízes estão no plano complexo. É claro que 1, -1, i, -i são raízes, pois para esses casos $f(z) = 0$. O computador começa com um ponto qualquer no plano com o seguinte algoritmo:

0. Começa com algum ponto w;

1. Calcula f(w);

2. Se f(w) ≠ 0, tenta um novo ponto dado por $w' = \frac{7w+w^{-7}}{8}$, construído a partir do método Newton-Raphson,

e volta ao passo 1 com w = w';

3.Se f(w) = 0, nos limites computacionais, então w é uma raiz, e começa outro ponto à procura de mais raízes no passo 0.

A arte está em atribuir cores distintas para as raízes distintas e para a quantidade de tentativas entre os passos 1 e 2 que o método computacional precisou para encontrar a raiz.

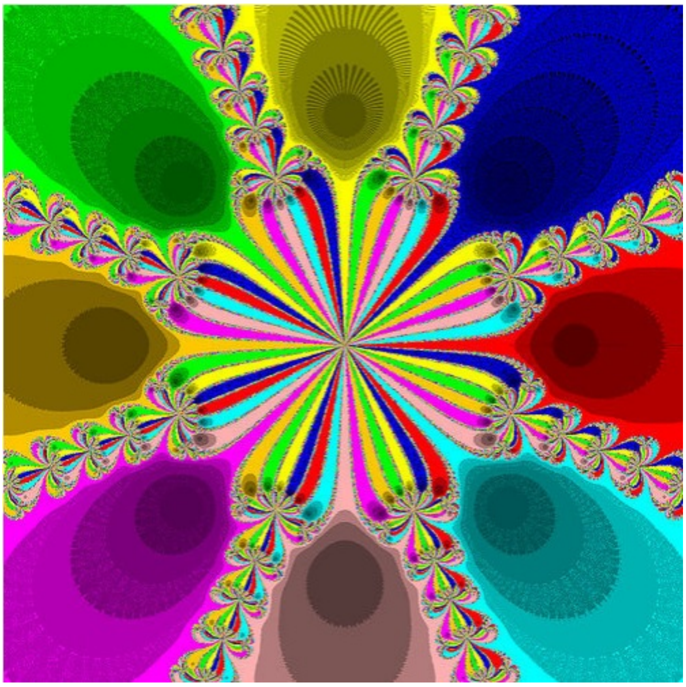


Figura 26: figura gerada pelas raízes da função $f(z) = z^8 - 1$

Capítulo 4
Considerações Finais

Após mais de 20 anos de magistério em escola pública, pude perceber as recorrentes indagações dos alunos quanto ao sentido da matemática para além dos números.

É comum não apenas a pergunta que motiva este estudo – onde vou usar isso na vida? – mas também outras tantas que expressam a angústia de encontrar sentido no que estuda: “Pra que estudar isso?”, “Serve pra quê?” e outras tantas.

Responder a essas indagações é papel do professor, mas o material disponível para auxiliá-lo é escasso. Os livros contam uma historinha, mas no final voltam a apenas falar da matemática pela matemática. Muitas vezes o aluno sente-se surpreso até mesmo ao entrar na universidade e perceber que há, sim, muita matemática na profissão que ele escolheu.

Ao escolher este tema focal: função polinomial, busca-se um ponto de partida para o universo ainda pouco explorado da integração da Matemática com outras ciências e tecnologias, ou mesmo com a própria Matemática. O tema é central não apenas pelo contato que os estudantes tem com ele desde muito cedo, mas também pela simplicidade de suas representações e pela abundância de casos em que ele se aplica em todas as áreas do conhecimento.

Espera-se que este trabalho seja motivador de outros tantos que busquem conectar a matemática com o universo de diversos saberes e realmente responder, globalmente, à ansiosa pergunta: Onde vou usar isso, professor?

Desde a revisão histórica que fizemos - destacando alguns pontos importantes da teoria das funções polinomiais (capítulo 1), procurando resgatar elementos teóricos pouco utilizados ou esquecidos (capítulo 2) e analisando as diversas aplicações dessa família de funções em problemas da ciência ou em questões úteis e importantes para o exercício da cidadania no mundo contemporâneo (capítulo 3) - fizemos de tudo um pouco, com o objetivo de instigar o professor da educação básica a buscar e construir uma resposta para a seguinte pergunta: Para que estudar funções polinomiais? Fizemos, inclusive, um site que é, na verdade, um repositório de textos, links, vídeos, exercícios e atividades, um espaço virtual permanente que se pretende constantemente atualizado. Aliás, neste sentido se constitui o projeto futuro: a sua manutenção e ampliação.

Assim, esta dissertação é a minha resposta. Não é, porém, definitiva, na medida em que já prevê sua ampliação, graças às esperadas contribuições de trabalhos futuros.

Bibliografia

ABDOUNUR, OSCAR JOÃO *Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados.* SP: Escrituras Editora, 1999.

AGUIAR, ALBERTO FLÁVIO ALVES. *Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas*, Editora Harbra,1988.

ALVES, ÉRIKA FIGUERÊDO. *Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade*. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2018.

ANTUNES, DANIELE MENDES CALDAS. *Análise de estratégias de ensino de função polinomial do 1° grau para cursos de Ciências Sociais Aplicadas.* in: Ciência e Natura. Universidade Federal do Rio Grande. RS, 2018. Acessado em 16/02/2020 às 18:00. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/421d/0e27fcd80d6018a3807026892bd6061f4ceb.pdf>

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomides. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BRASIL. Base Nacional Curricular: Matemática. Brasilia: MEC, 1997.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC, 2000.

CARNEIRO, RENATO. *Equações algébricas: estudos e sala de aula*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de PósGraduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.

CHIANG, ALPHA C. *Matemática para Economistas*; tradutor Roberto Campos Moraes – SP, McGraw-Hill do Brasil: Ed. da Universidade de SP, 1982

CHURCHILL, RUEL VANCE. *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*. São Paulo Mcgraw-Hill do Brasil e Editora universidade de São Paulo, 1975

COSTA, LUÍS CARLOS DA. *A Evolução na Resolução das Equações Algébricas.* Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

D'AMBROSIO, UBIRATAN. *Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte*. Unicamp. SP, 1993. Acessado em 16/02/2010 às 11:00. Disponível em <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1754/10-artigos-ambrosiou.pdf>

DANIEL, DOUGLAS. Modelagem por Polinômios no Ensino Médio. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP, 2016.

DIAS, FÁBIO CAMPOS. *O teorema fundamental da álgebra.* Dissertação (mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT). Macapá, 2016.

FAINGUELERNT, ESTELA KAUFMAN. *Fazendo Arte com Matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2006

LIMA, ELON LAGES et al. *A Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. v.1

MATTOS, TUANE GOMES DE OLIVEIRA FULY DE. *O Estudo das Funções Polinomiais no Ensino Médio.* Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2017.

MELLERROWICZ, H. *Bases Fisiológicas do Treinamento Físico.* EPU-Springer-EDUSP. SP, 1979.

MORO, MARCELO DE OLIVEIRA. *Um estudo sobre polinômio*. TCC (graduação) -- Universidade de Santa Catarina. SC, 2000.

MUNEM, M. A; FOULIS, D. J. *Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2008

NOBRE, J. F. F. *Progressões Aritméticas: abordando as ordens superiores.* Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins, Campus Universitário de Palmas. Palmas, 2018.

NÓS, RUDIMAR LUIZ. *Séries - Transformadas Notas De Aula*. UTFPR– Universidade Tecnológica Federal do Paraná. PR, 2011. Acessado em 16/02/2020 às 15:00. Disponível em <http://paginapessoal.utfpr.edu.br/vpetry/rudimarnos/calculo-4/calculo-4/series_transformadas.pdf>

PEREIRA, GABRIELA GIMENES. *Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica*. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2017.

PINHO, DIOGO DA SILVA GOMES DE. *Representação Gráfica De Funções Com Variáveis Complexas Através Do Domínio De Cores.*Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura). Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras – FAFIUV. União Da Vitória, 2011.

PONTE, J. P. *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications.* The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, p. 3-8, 1992.

PUPIN, JOSIANA ROVATTI*. Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens* . Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura) -- Universidade Federal de São Carlos. Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia Departamento de Matemática. São Carlos, 2011.

REZENDE, WANDERLEY MOURA *Os Escolásticos e os Movimentos Uniformes e Uniformemente Variados.* 2011a. Acessado no dia 16/02/2020 às 9:00. Disponível em <http://www.cdme.im-uff.mat.br/afim/afim-html/info-br.html>.

REZENDE, WANDERLEY MOURA. *Galileu (1564-1642) e o Movimento de um Corpo em Queda Livre.* 2011b. Acessado no dia 16/02/2020 às 9:00. Disponível em < http://www.cdme.im-uff.mat.br/quadratica/quadratica-html/info-br.html>

REZENDE, WANDERLEY MOURA. *O ensino de cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de doutorado -- Universidade de São Paulo Faculdade de Educação. São Paulo, SP. 2003.

REZENDE, WANDERLEY MOURA. *Funções Polinomiais e o Mundo Digital*. Universidade Federal Fluminense. Niterói, RJ. 2016. Acessado no dia 16/02/2020 às 9:00. Disponível em <http://klein.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/17/2016/02/Func%CC%A7o%CC%83es-Polinomiais-e-o-mundo-digital2.pdf>

REZENDE, WANDERLEY MOURA et al. *A etnomatemática, a matemática e a história na formação do professor de matemática*. In: Movimento – revista da faculdade de educação da universidade federal fluminense. Niterói: eduff, 2009

SANTOS, EDUARDO ISIDORO DOS. *O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações.* Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

SILVA, RENATO DE SOUSA E. *Raiz de Função Polinomial pelo Método de Newton-Raphson*. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018.

SILVA, BIANCA DO REGO. *Atividades interativas para uma abordagem dinâmica de funções reais na educação básica: um estudo de caso.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense. Niterói, RJ, 2016.