Universidade Federal de São João del-Rei
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Campus Santo Antônio

UMA NOVA TÉCNICA PARA O ENSINO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO

Jorge Luiz Barbosa

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio.

Orientador
Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila

2020

xxx Barbosa, Jorge Luiz
xxyy UMA NOVA TÉCNICA PARA O ENSINO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO/ Jorge Luiz Barbosa - Campus Santo Antônio: [s.n.], 2020.
99 f.:fig.

Orientador: Jorge Andrés Julca Avila

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Função. 2. Gráficos de funções. 3. Translação. 4. Fechamento. 5. Abertura. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da
UFSJ - Campus Santo Antônio

TERMO DE APROVAÇÃO

Jorge Luiz Barbosa

UMA NOVA TÉCNICA PARA O ENSINO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila **(Orientador)**
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar (*Avaliador Local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio (*Avaliador Externo*)
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

São João del-Rei, 05 de fevereiro de 2020

As minhas filhas, e aos colegas de turma que sempre me incentivaram!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu força e fé para continuar esse curso. Ao Professor Doutor Jorge Andrés Julca Avila por toda colaboração, paciência e orientação durante esse trabalho, pela compreensão perante minhas limitações e dificuldades. Aos professores do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFSJ Campus Dom Bosco. Aos colegas do PROFMAT – 2017, pelas contribuições, amizade, incentivos, companheirismo que juntos vivenciamos e a CAPES pelo suporte financeiro.

Tenha em mente que tudo que você aprende na escola é trabalho de muitas gerações. Receba essa herança, honre-a, acrescente a ela e, um dia, fielmente, deposite-a nas mãos de seus filhos.

Albert Einstein

Resumo

A experiência como Professor de Matemática do Ensino Médio e de cursinhos pré-vestibular e pré-enem permitira-me entender as dificuldades que muitos alunos possuem na construção de gráficos de funções. O objetivo principal deste trabalho é oferecer uma técnica que possibilite a construção de gráficos de funções com mais facilidade, que poderá ser utilizado como material complementar aos livros didáticos adotados pelos professores. Para tanto, será feito um estudo simples destes gráficos, partindo das definições de conjuntos até a definição de função real, apresentando também as definições de funções canônicas e dual canônicas. Para o esboço das funções apresentadas, serão analisadas as funções mais simples, transformando seus gráficos através de translações e fechamento ou abertura, até a confecção do esboço final dos gráficos. Como resultado, temos uma nova técnica para elaboração de gráfico de função.

Palavras-chave: Função, Gráficos de funções, Translação, Fechamento, Abertura.

Abstract

The experience as a High School and pre-university and pre-college courses Mathematics Teacher allows us to understand the difficulties that many students have in constructing function graphs. The main objective of this work is to offer a method that allows the construction of function graphs more easily, which can be used as complementary material to the textbooks commonly used by teachers. For this, a simple study of these graphs will be made, starting from the definitions of numerical sets to the definition of real function, also presenting the definitions of canonical and dual canonical functions. For the sketching of the presented functions, the simplest functions will be analyzed, transforming their graphs through translations, closing or opening, until the final sketch of the graphs is made. As a result, we have an effective technique for function graphing.

Keywords: function, function graphic, translation, closing, opening.

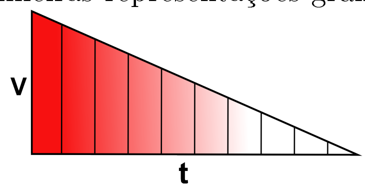
Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Concebido em meados do século XIV por filósofos da época, o conceito de função foi um marco que revolucionou o modo que se estudava fenômenos naturais onde se relacionam duas ou mais grandezas. Ainda, no século XIV, Nicole Oresme (França, 1323 - 1382) representou uma relação, mostrada na Figura 1.1, entre o tempo e velocidade, sendo esta representação gráfica uma das primeiras já feitas. Pouco a pouco, o conceito de uma relação funcional entre diversos elementos e fenômenos que ocorriam na natureza era introduzido.

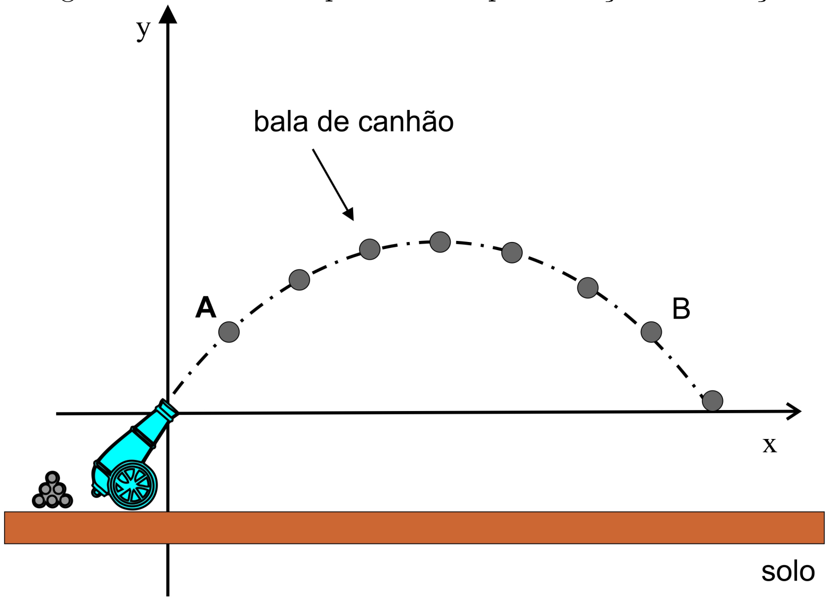
Figura 1.1: Uma das primeiras representações gráficas já feitas por Oresme.



Fonte: Revista Brasileira de História da Matemática − Vol. 14 no 28 − pág. 47−61
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Outro marco importante para a evolução dos estudos de funções foi graças a Galileu Galilei (Itália, 1564 - 1642), que demonstrou através da lei (função) de queda livre de um corpo no vácuo, que o peso do mesmo não influencia em sua velocidade de queda. Além disso, em seu estudo "Discurso Concernente a duas Ciências Novas" publicado em 1638, Galileu demonstrou a trajetória de uma bala de canhão descrita por uma parábola, função que foi e é largamente utilizada. A Figura 1.2 ilustra a trajetória da bala.

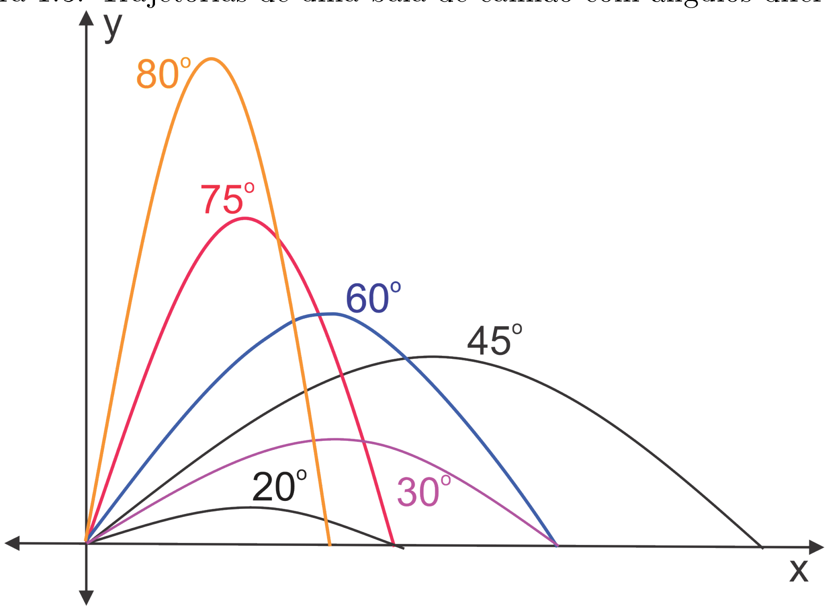
Figura 1.2: Uma das primeiras representações de função.



Fonte: O autor.

Uma situação bem elucidativa do conceito de função pode ser observada na Figura 1.3, onde a bala de um canhão descreve trajetórias com diferentes ângulos.

Figura 1.3: Trajetórias de uma bala de canhão com ângulos diferentes.



Fonte: O autor.

Hoje se considera imprescindível o uso de funções, seja nas situações mais simples do cotidiano, como o preço da gasolina em função da quantidade de litros, ou em grandes e complexos projetos, como os de engenharia. Na Figura 1.4 apresentamos uma foto de uma situação do cotidiano.

Figura 1.4: O preço da gasolina em função da quantidade de litros.

Fonte: https: //condutorinteligente.com.br/cuidado-abastecer−carro

Percebe-se a grande importância do estudo de funções, bem como da sua representação gráfica, uma vez que esta ilustra todos os pontos, raízes e características do comportamento daquela função, além de traduzir por imagem, a solução e compreensão de um problema.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e exibição de uma técnica para esboçar os gráficos de funções a partir de funções canônicas e dual canônicas. É comum ouvir entre professores de matemática que os alunos apresentam inúmeras dificuldades para assimilar o conteúdo durante a aprendizagem de funções e seus gráficos. Desta maneira, a motivação e justificativa deste estudo são baseadas na necessidade de uma melhora no ensino de funções, oferecendo um material que possibilita a construção de gráficos de funções com mais facilidade através de técnicas simples como são: translação, abertura e fechamento.

Esse trabalho busca, então, complementar o estudo de funções, uma vez que reúne essas técnicas fundamentais para criação de gráficos de maneira prática e, assim, possibilita a obtenção de um esboço de um gráfico conhecendo apenas a lei de formação básica de uma função.

Este trabalho foi dividido em sete capítulos, **no primeiro**, fazemos uma introdução ao tema, **no segundo**, utilizamos resultados preliminares que darão suporte aos outros, **no terceiro**, serão brevemente apresentados o conceito de funções, plotados os gráficos de funções de diversos tipos, **no quarto**, serão apresentados os gráficos das funções canônicas e dual canônicas seguido pela transformação dos mesmos através das técnicas de translação, abertura e fechamento, **no quinto**, apresentamos o desenvolvimento da técnica, **no sexto**, aplicaremos essa técnicas em algumas funções e por último, **no sétimo capítulo**, serão descritas as considerações finais.

Todos os gráficos utilizados no trabalho foram gerados através do software GeoGebra, criados pelo próprio autor da dissertação.

2 Resultados preliminares

2.1 Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos são todo conjunto cujos elementos são números. São exemplos destes conjuntos o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Nesta seção, faremos uma breve exposição dos principais conjuntos numéricos, apresentando suas definições e notações.

2.1.1 Conjuntos dos Números Naturais

Definição 2.1 (Conjunto dos Números Naturais).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\} \tag{2.1}$$

Notação 2.1.

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} \tag{2.2}$$

2.1.2 Conjunto dos Números Inteiros

Definição 2.2 (Conjunto dos Números Inteiros).

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{2.3}$$

Notação 2.2.

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{..., -5, -4, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{2.4}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{2.5}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -1, 0\} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} \tag{2.7}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, -5, ...\} \tag{2.8}$$

2.1.3 Conjunto dos Números Racionais

Definição 2.3 (Conjunto dos Números Racionais).

$$\mathbb{Q} = \left\{x : \; x = \frac{a}{b}, \; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

São exemplos de números racionais os números decimais. Os números decimais estão formados por uma parte inteira e, a outra, por casas decimais separados por uma vírgula. O número de casas decimais podem ser finito ou infinito. No caso de ser infinito eles seguem um padrão ou são periódicos.

2.1.4 Conjunto dos Números Irracionais

Definição 2.4 (Conjunto dos Números Irracionais)**.** O conjunto dos números irracionais está formado pelos números cujas casas decimais são infinitas e que a distribuição desses algarismos não obedecem um padrão.

No passado, sabe-se que os números racionais estavam relacionados com medidas e julgavam que era suficiente para essas medições. Notou-se com o passar do tempo que nem toda medida podia ser expressa por números racionais.

2.1.5 Conjunto dos Números Reais

Definição 2.5 (Corpo). Seja $K \neq \phi$ um conjunto munido de duas operações chamadas de adição, "+", e multiplicação, " $\cdot$ ". Dizemos que K é um corpo, se seus elementos satisfazem os seguintes axiomas:

- **Axiomas de corpo**

Para x, y e $z \in K$, temos:

(A_1) $x + y = y + x$

(A_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A_3) $\exists!\, 0 \in K$ tal que $x + 0 = x,\ \forall x \in K$

(A_4) $\forall x \in K,\ \exists!\, y \in K$ tal que $x + y = 0$

(A_5) $xy = yx$

(A_6) $(xy)\, z = x\,(yz)$

(A_7) $\exists!\, 1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x,\ \forall x \in K$

(A_8) $\exists!\, y \in K - \{0\},$ tal que $xy = 1,\ \forall x \in K$

(A_9) $x(y + z) = xy + xz$

Definição 2.6 (Corpo ordenado). Um corpo ordenado, K, é um conjunto ordenado, cujos elementos satisfazem os seguintes axiomas:

- **Axiomas de ordem**

Existe um conjunto $P \subset K$, chamado o *conjunto dos elementos positivos*, tal que

(B_1) $x,\ y\ \in\ P\ \Rightarrow\ x + y\ \in\ P$

(B_2) $x,\ y\ \in\ P\ \Rightarrow\ x\ \cdot\ y\ \in\ P$

(B_3) $\forall x \in K\ \Rightarrow$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$ ou $x \in P$

A seguir enunciaremos algumas definições consequências de um corpo ser ordenado.

Seja $(K, +, \cdot, <)$ um corpo ordenado. Considere $M \subset K$ e $s \in K$. Dizemos que:

- s **é limitante superior de** M se, para todo $x \in M$ temos $x \leq s$.
- s **é máximo de** M se s é um limitante superior de M e $s \in M$.
- s **é supremo de** M se s é o menor dos limitantes superiores de M.
- Dizemos, ainda, que $M \subset K$ **é limitado superiormente** se existe em K um limitante superior.

Definição 2.7 (**Axioma de Completitude**). Um corpo ordenado diz-se completo quando todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui supremo.

Definição 2.8 (**Conjunto dos Números Reais**). Dizemos que o conjunto de números reais é um corpo ordenado completo e o denotamos por $\mathbb{R}$.

Notação 2.3.

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} : \text{Números reais não nulos}$$
$$\mathbb{R}_+ : \text{Números reais não negativos}$$
$$\mathbb{R}_- : \text{Números reais não positivos}$$
$$\mathbb{R}_+^* : \text{Números reais positivos}$$
$$\mathbb{R}_-^* : \text{Números reais negativos}$$

Observação 2.1. A completude de $\mathbb{R}$ equivale á continuidade da reta real.

2.2 Produto Cartesiano

Definição 2.9. (**Produto Cartesiano**) Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B, denotado $A \times B$, o conjunto formados por todos pares ordenados (x, y), em que a primeira coordenada pertence a A e a segunda coordenada pertence a B, podemos escrever:

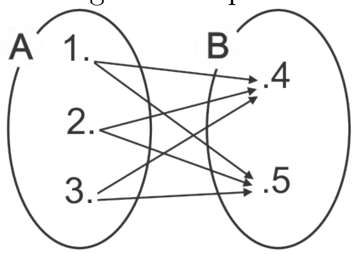
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\} \tag{2.9}$$

Exemplo 2.1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

Tal produto pode ser apresentado sob forma do diagrama abaixo, chamado de diagrama de flechas, conforme Figura 2.1.

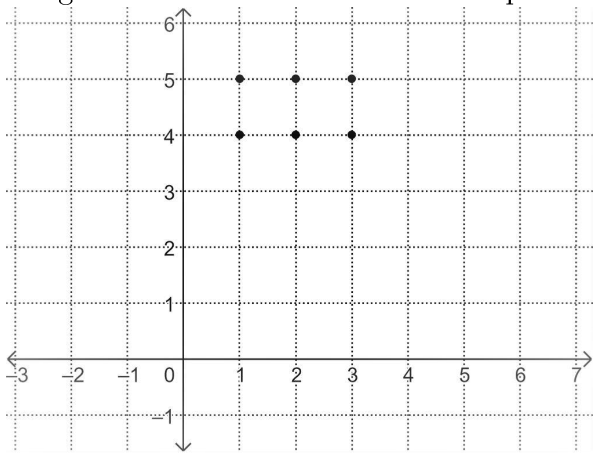
Figura 2.1: Diagrama do produto cartesiano



Fonte: O autor.

Pode-se representar o produto cartesiano no plano cartesiano. Os pares ordenados determinam um conjunto de pontos no produto cartesiano $A \times B$ e é chamado de gráfico cartesiano. Na Figura 2.2, os pontos do produto cartesiano do Exemplo 2.1 estão representados no plano cartesiano.

Figura 2.2: Produto cartesiano no plano



Fonte: O autor.

2.3 Relação

Dado um produto cartesiano $A \times B$, chama-se "relação de A em B" e denota-se por $\mathcal{R}$, todo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, assim

$$\mathcal{R} \subset A \times B$$

Observação 2.2. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, então podemos afirmar que x e y estão relacionados através da relação $\mathcal{R}$, isto é, $x\mathcal{R}y$.

Exemplo 2.2. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4)(2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}$

Segue exemplos de algumas relações $\mathcal{R}$ de A em B:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 3), (2, 5)\}$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(2,4),(2,5),(3,3)\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(1,3),(1,4),(1,5)\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,5)\}$

Observação 2.3. Algumas relações são muito especiais as quais serão chamadas de funções e serão abordadas no seguinte capítulo.

3 Funções

Em diversas situações do dia a dia deparamos com grandezas[1], que de certa forma se relacionam. Essas relações com o passar dos tempos passaram a ser chamadas de funções. Esse conceito é relativamente novo, pois seu desenvolvimento se deu nos séculos XVIII e XIX. Uma função pode ser definida pela relação de dois conjuntos, de tal modo que, a cada elemento do primeiro conjunto, associamos exatamente um único valor do segundo conjunto. Assim, a noção intuitiva de funções não se limita, somente, a cálculos usando números individuais, e nem mesmo a situações que envolvam números. É muito apropriado e eficaz a utilização de funções para expressar fenômenos físicos, sociais, biológicos, etc.

3.1 Definição de Função

Definição 3.1 (Função). Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função de A em B é a correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

Observação 3.1.

- Usamos a notação: $f\colon A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ para indicar que f é uma função de A em B.

- Denominamos o conjunto A de domínio da função e o conjunto B de contra-domínio. O domínio e contradomínio de f são denotados por $D(f)$ e $CD(f)$, respectivamente.

- Cada elemento y de B associado ao elemento x de A, denominamos imagem de x pela função f. Ao conjunto desses valores de y denominamos de imagem da função f, isto é,

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \ y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

- A função f transforma x de A em y de B e denotamos por

$$y = f(x) \ \ (l\hat{e} - se: \ y \text{ é igual a } f \text{ de } x)$$

.

[1] grandeza é tudo aquilo que pode ser medido e possibilita que tenhamos características baseadas em informações numéricas e/ou geométricas.

- O gráfico da função f é o conjunto de pares ordenados distribuídos no plano cartesiano como pontos. Mais, especificamente,

$$\mathrm{G}(f) = \{(x, y) \in A \times B : x \in D(f) \text{ e } y \in \mathrm{Im}(f)\}$$

  Os gráficos possibilitam visualizar a forma geométrica de uma função e as suas principais características.

Exemplo 3.1. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, e a função f que associa cada elemento x de A seu quadrado como um elemento y de B. Nesse caso, temos que a função $f(x) = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$, pode ser indicada pela lei de formação $y = x^2$ ou $f(x) = x^2$. O domínio da função f é $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. O contradomínio da função f é $CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. A imagem da função f é $\mathrm{Im}(f) = \{0, 1, 4\}$. Note que o gráfico de f é dado por $\mathrm{G}(f) = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.

3.2 Função sobrejetiva, injetiva e bijetiva

Definição 3.2 (**Função Sobrejetiva**)**.** Uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $\mathrm{Im}(f) = B$.

Definição 3.3 (**Função Injetiva**)**.** Uma função $f : A \to B$ é injetiva quando, para qualquer $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$, isto é, elementos diferentes do domínios, imagens diferentes.

Definição 3.4 (**Função Bijetiva**)**.** Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se for sobrejetiva e injetiva.

3.3 Função crescente, decrescente e constante

Definição 3.5 (**Função crescente**)**.** Uma função f é crescente em um intervalo do domínio se para quaisquer x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 3.6 (**Função decrescente**)**.** Uma função f é decrescente em um intervalo do domínio se para quaisquer x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 3.7 (**Função constante**)**.** Uma função f é denominada constante em um intervalo do domínio se para quaisquer x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2)$.

3.4 Função Par e Ímpar

Definição 3.8 (**Função Par**)**.** Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é par se

$$f(-x) \quad = \quad f(x), \quad \text{para todo } x \in D(f) \tag{3.1}$$

Definição 3.9 (**Função Ímpar**)**.** Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se

$$f(-x) \quad = \quad -f(x), \quad \text{para todo } x \in D(f) \tag{3.2}$$

Existem vários tipos de funções, a seguir, descreveremos as funções polinomiais.

3.5 Funções Polinomiais

Definição 3.10 (Polinômio de Grau n). Um polinômio de grau n é definido por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{3.3}$$

onde, $a_n \neq 0$.

Definição 3.11 (Função Polinomial). Uma função polinomial de $n-$ésimo grau, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é definida por

$$f(x) = p(x) \tag{3.4}$$

onde, $p(x)$ é um polinômio de grau n.

Exemplo 3.2.

- Uma função polinomial de 1º grau é a função real f definida por $f(x) = a_1 x + a_0$, ela é chamada, também, de função afim quando $a_0 \neq 0$.
- Uma função polinomial de 2º grau é a função real f definida por $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ela é chamada, também, de função quadrática.
- Uma função polinomial do 3º grau é a função real f definida por $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, ela é chamada, também, de função cúbica.

3.6 Funções canônicas e dual canônicas

Nesse trabalho, estamos interessados em esboçar gráficos de diferentes tipos de funções, para isto, introduziremos dois novos conceitos: funções canônicas e funções duais canônicas.

Definição 3.12 (Funções Canônicas). Chamaremos de funções canônicas às funções cuja regra de correspondência é a mais simples possível.

Definição 3.13 (Funções Dual Canônicas). Chamaremos de funções dual canônicas às negativas das funções canônicas.

4 Gráficos de funções canônicas e dual canônicas

Neste capítulo, apresentaremos os gráficos das funções canônicas e dual canônicas, principalmente, as funções estudadas no ensino básico.

4.1 Função Polinomial

4.1.1 Polinômio de Primeiro Grau

- Função Polinomial de Primeiro Grau: $F(x) = ax + b$ com $a \neq 0$
- **Função Canônica de primeiro grau:** $f(x) = x$
- Função Dual Canônica de primeiro grau: $g(x) = -x$

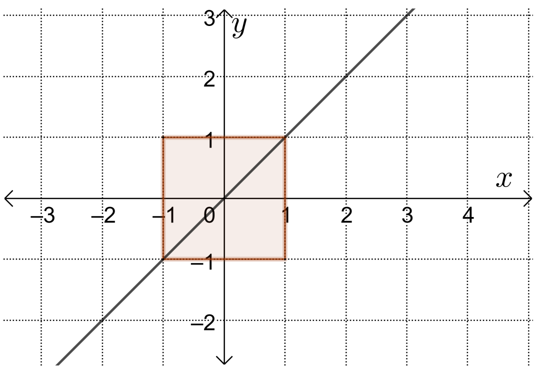
Observação 4.1.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

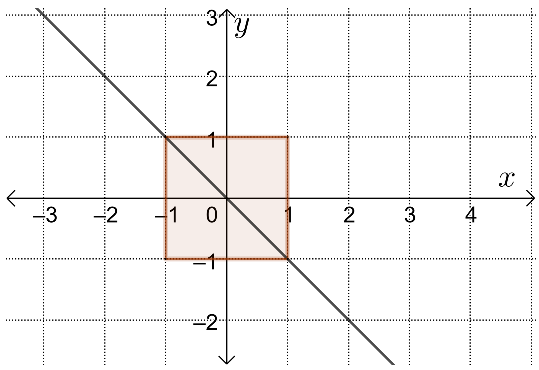
(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.1(a) e Figura 4.1(b), respectivamente.

Figura 4.1: Gráfico de $f(x) = x$ e $g(x) = -x$



(a) Função $y = x$



(b) Função $y = -x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.1.2 Polinômio de Segundo Grau

- Função Polinomial de Segundo Grau: $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$
- **Função Canônica de segundo grau:** $f(x) = x^2$
- Função Dual Canônica de segundo grau: $g(x) = -x^2$

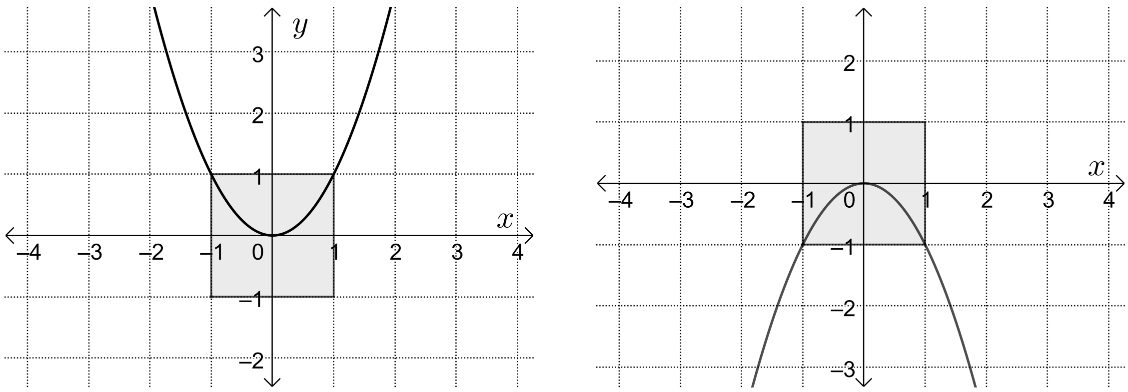
Observação 4.2.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}_-$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.2(a) e Figura 4.2(b), respectivamente.

Figura 4.2: Gráfico de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$



(a) Função $y = x^2$ (b) Função $y = -x^2$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.1.3 Polinômio de Terceiro Grau

- Função Polinomial de Terceiro Grau: $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$
- **Função Canônica de terceiro grau:** $f(x) = x^3$
- Função Dual Canônica de terceiro grau: $g(x) = -x^3$

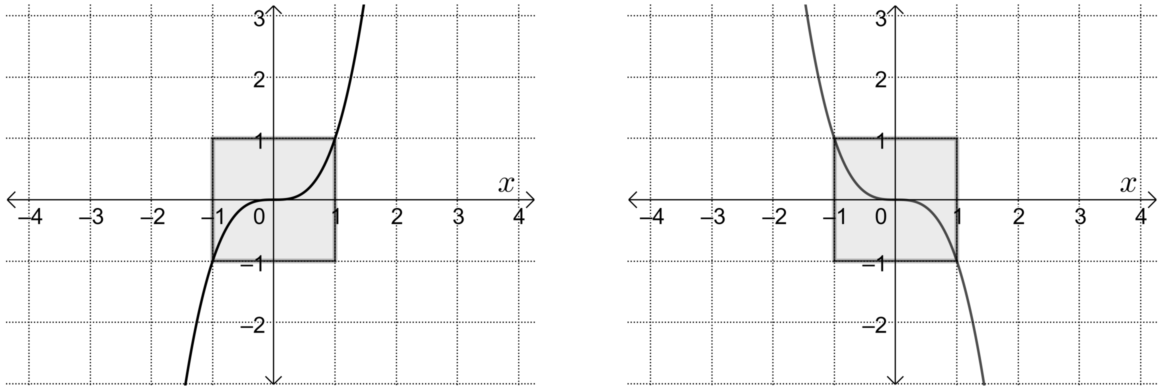
Observação 4.3.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.3(a) e Figura 4.3(b), respectivamente.

Figura 4.3: Gráfico de $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x^3$



(a) Função $y = x^3$ (b) Função $y = -x^3$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

4.1.4 Polinômio de Quarto Grau

- Função Polinomial de Quarto Grau: $F(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com $a_0 \neq 0$
- **Função Canônica de quarto grau:** $f(x) = x^4$
- Função Dual Canônica de quarto grau: $g(x) = -x^4$

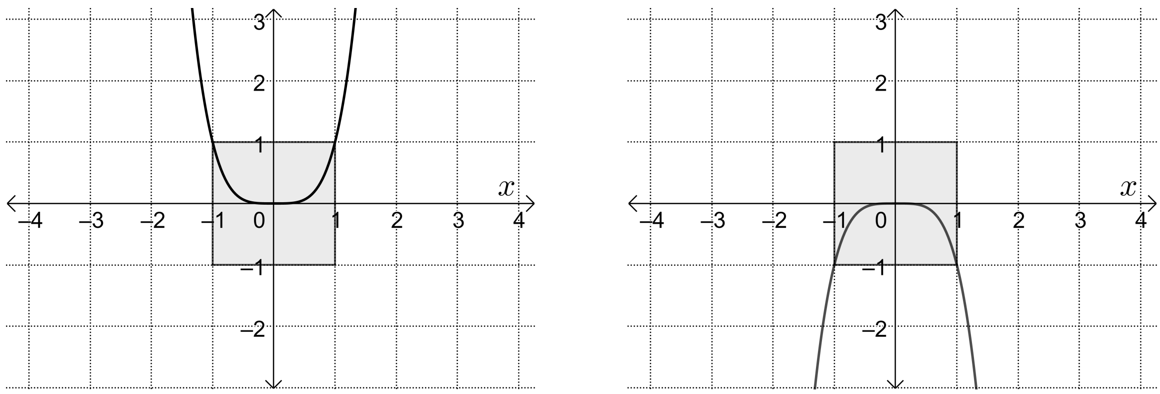
Observação 4.4.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.4(a) e Figura 4.4(b), respectivamente.

Figura 4.4: Função polinomial tipo $y = x^4$ e $y = -x^4$



(a) Função $y = x^4$ (b) Função $y = -x^4$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.2 Função Exponencial

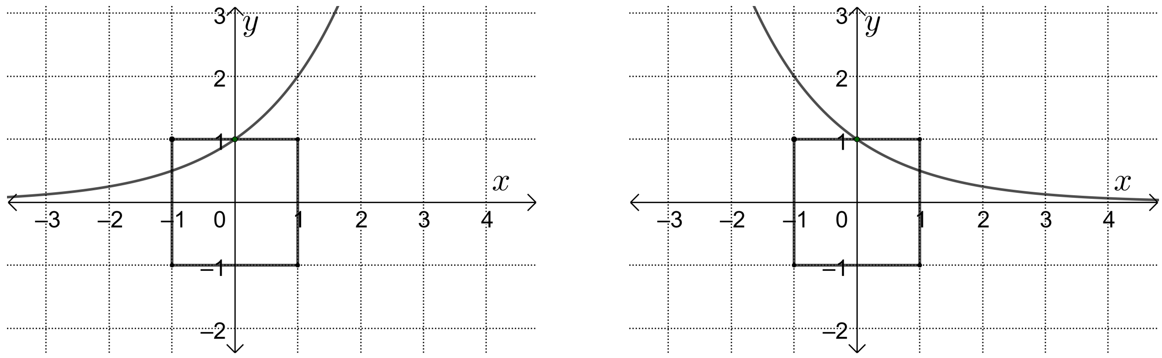
Definição 4.1 (Função exponencial). Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é dita exponencial, se está definida por $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 4.5.

- Se $0 < a < 1$ então $f(x)$ é uma função exponencial decrescente.
- Se $a > 1$ então $f(x)$ é uma função exponencial crescente.

Nas figuras 4.5(a) e 4.5(b) colocamos um exemplo de uma função exponencial crescente e decrescente para o caso quando $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Figura 4.5: Função exponencial do tipo $y = 2^x$ e $y = \frac{1}{2}^x$.



(a) Função $y = 2^x$

(b) Função $y = \frac{1}{2}^x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

- Função exponencial: $F(x) = a^x$
- **Função Canônica exponencial:** $f(x) = a^x$
- Função Dual Canônica exponencial: $g(x) = -a^x$

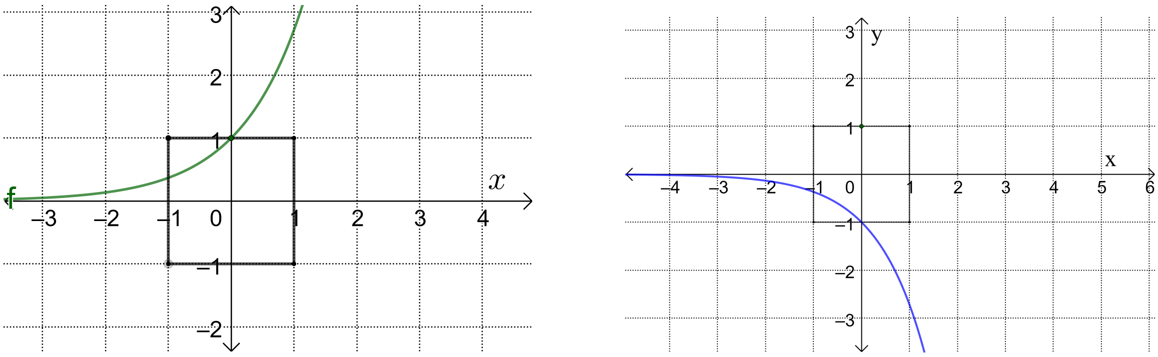
Observação 4.6.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}_-^*$

(iii) Gráfico: Seja $e = 2,718281828459...$ a constante de Euler. $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.6(a) e Figura 4.6(b) para o caso particular de $a = e$, respectivamente.

Figura 4.6: Função exponencial do tipo $y = e^x$ e $y = -e^x$.



(a) Função $y = e^x$ (b) Função $y = -e^x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.3 Função Logarítmica

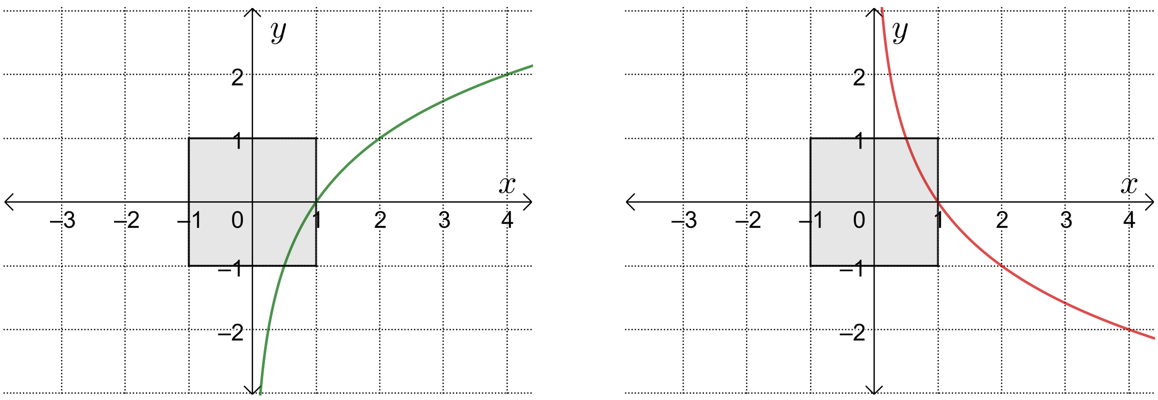
Definição 4.2 (Função logarítmica). Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Uma função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é dita logarítmica, se está definida por $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Observação 4.7.

- a é chamada de base da função logarítmica.
- Se $0 < a < 1$ então $f(x)$ é uma função logarítmica decrescente.
- Se $a > 1$ então $f(x)$ é uma função logarítmica crescente.
- Se $a = e$, o logaritmo é chamado de *natural* e é denotado por $y = \ln x$ ou $y = \log x$.

Nas figuras 4.7(a) e 4.7(b) colocamos um exemplo de uma função logarítmica crescente e decrescente quando a base é $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Figura 4.7: Função logarítmica do tipo $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



(a) Função $y = \log_2 x$ (b) Função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

- Função logarítmica: $F(x) = \log_a x$

- **Função Canônica logarítmica:** $f(x) = \log_a x$
- Função Dual Canônica logarítmica: $g(x) = -\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$

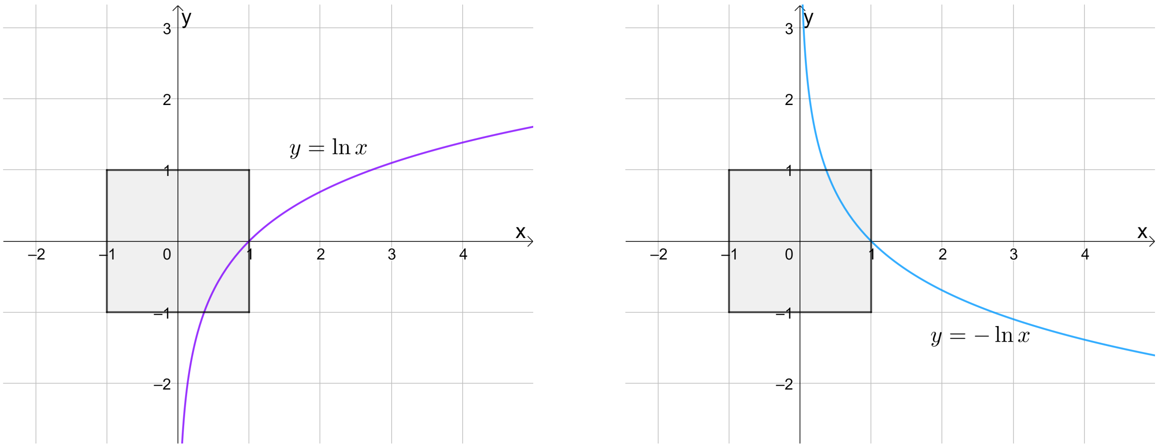
Observação 4.8.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}_+^*$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.8(a) e Figura 4.8(b) para o caso particular onde a base é $a = e$, respectivamente.

Figura 4.8: Função logarítmica do tipo $y = \ln x$ e $y = -\ln x$.



(a) Função $y = \ln x$ (b) Função $y = -\ln x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.4 Função Modular

Definição 4.3 (Função Modular). A função modular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x|$ onde,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é o módulo ou valor absoluto de x.

(i)	Função Modular: $F(x) = \|x\|$
(ii)	**Função Canônica modular:** $f(x) = \|x\|$
(iii)	Função Dual Canônica modular: $g(x) = -\|x\|$

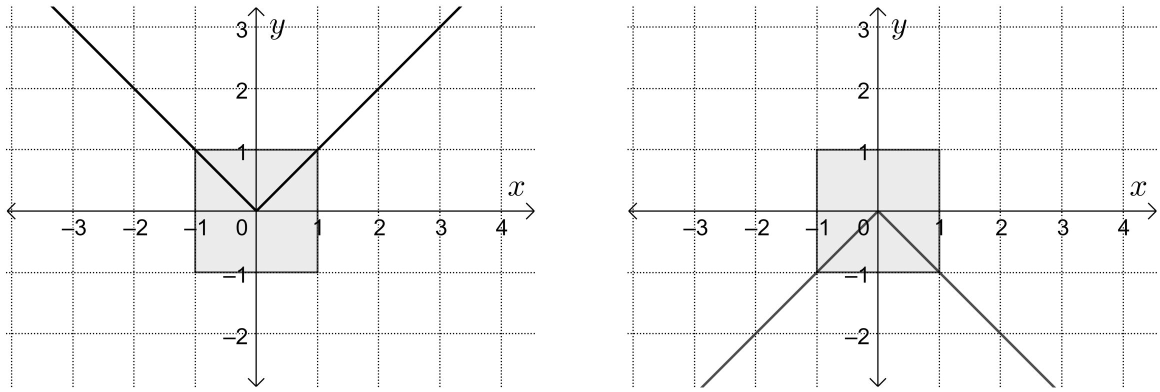
Observação 4.9.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^-$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.9(a) e Figura 4.9(b), respectivamente.

Figura 4.9: Função modular do tipo $y = |x|$ e $y = -|x|$.



(a) Função $y = |x|$ (b) Função $y = -|x|$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.5 Funções Trigonométricas

Funções desse tipo são funções angulares que estão relacionadas com o arco trigonométrico e assumem o mesmo comportamento periódico.

Definição 4.4 (**Função Seno**). A função seno, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(i)	Função Seno: $F(x) = \operatorname{sen} x$
(ii)	**Função Canônica seno:** $f(x) = \operatorname{sen} x$
(iii)	Função Dual Canônica seno: $g(x) = -\operatorname{sen} x$

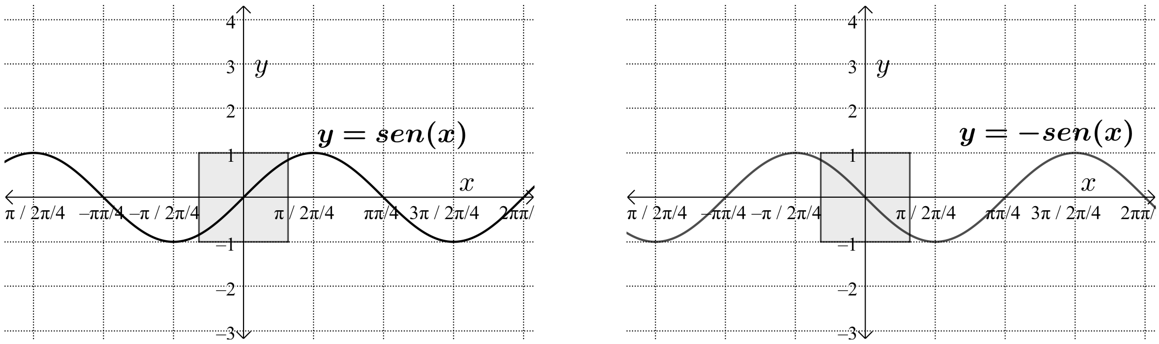
Observação 4.10.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(g) = [-1, 1]$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.10(a) e Figura 4.10(b), respectivamente.

Figura 4.10: Função seno do tipo $y = \text{sen}\, x$ e $y = -\text{sen}\, x$.



(a) Função $y = \text{sen}\,(x)$ (b) Função $y = -\text{sen}\,(x)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Definição 4.5 (Função Cosseno). A função cosseno, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \cos x$.

(i)	Função Cosseno: $F(x) = \cos x$
(ii)	**Função Canônica cosseno:** $f(x) = \cos x$
(iii)	Função Dual Canônica cosseno: $g(x) = -\cos x$

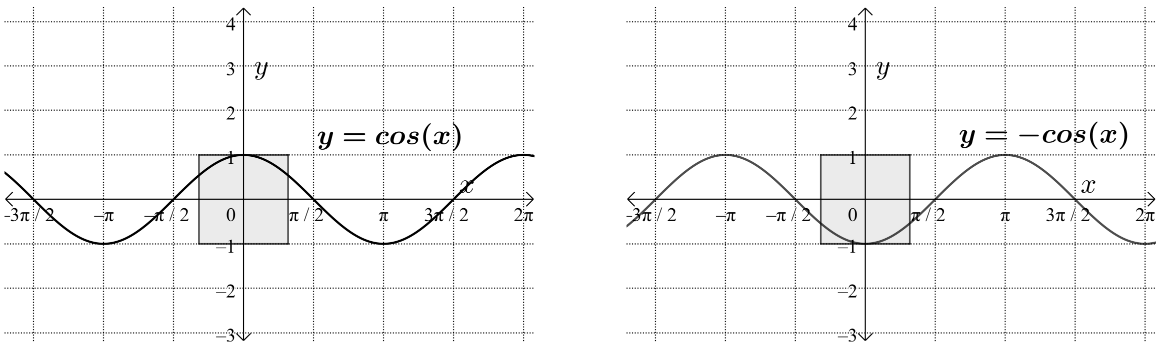
Observação 4.11.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(g) = [-1, 1]$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.11(a) e Figura 4.11(b), respectivamente.

Figura 4.11: Função cosseno do tipo $y = \cos x$ e $y = -\cos x$.



(a) Função $y = \cos x$ (b) Função $y = -\cos x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Definição 4.6 (Função Tangente). A função tangente, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \text{tg}\, x$.

(i)	Função Tangente: $F(x) = \operatorname{tg} x$
(ii)	**Função Canônica tangente:** $f(x) = \operatorname{tg} x$
(iii)	Função Dual Canônica tangente: $g(x) = -\operatorname{tg} x$

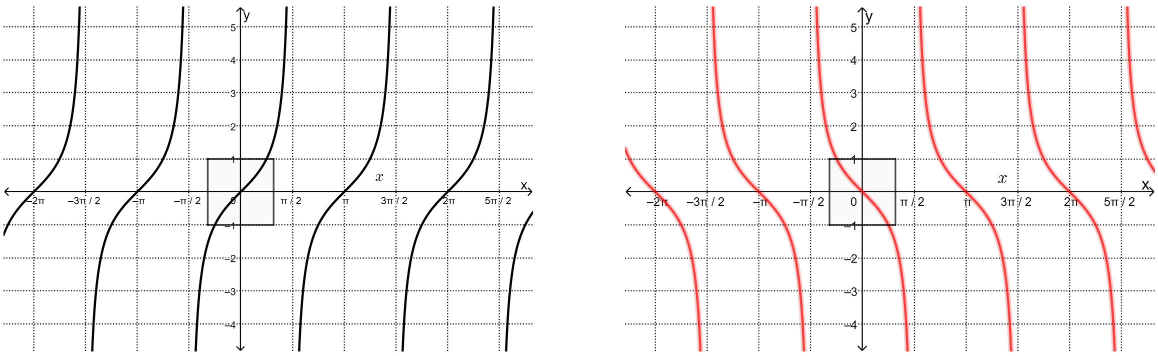
Observação 4.12.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.12(a) e Figura 4.12(b), respectivamente.

Figura 4.12: Função tangente do tipo $y = \operatorname{tg} x$ e $y = -\operatorname{tg} x$.



(a) Função $y = \operatorname{tg} x$ (b) Função $y = -\operatorname{tg} x$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

4.6 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são análogas às funções trigonométricas. A primeira, relaciona-se com as hipérboles e, a outra, com o círculo.

Definição 4.7 (Função Seno Hiperbólico). A função seno hiperbólico é definida por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{4.1}$$

(i)	Função Seno Hiperbólico: $F(x) = \operatorname{senh}(x)$
(ii)	**Função Canônica seno hiperbólico:** $f(x) = \operatorname{senh}(x)$
(iii)	Função Dual Canônica seno hiperbólico: $g(x) = -\operatorname{senh}(x)$

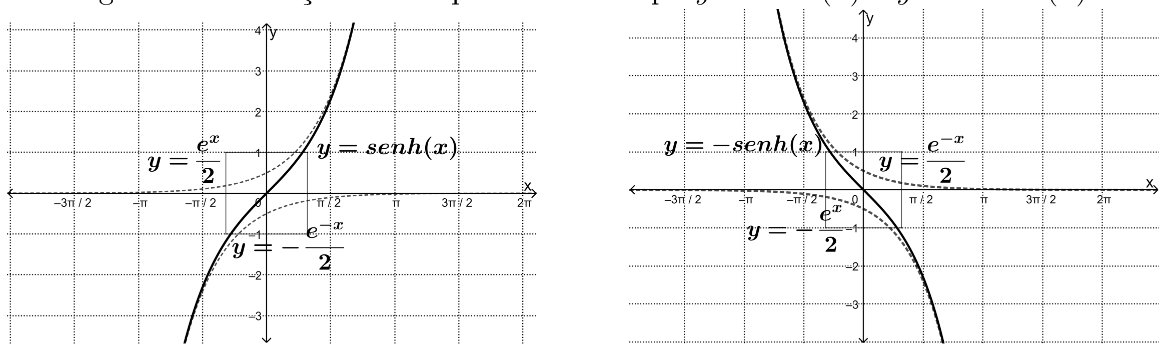
Observação 4.13.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

(ii) Imagem: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$

(iii) Gráfico: G(f) e G(g) estão na Figura 4.13(a) e Figura 4.13(b), respectivamente.

Figura 4.13: Função seno hiperbólico do tipo $y = \text{senh}\,(x)$ e $y = -\text{senh}\,(x)$.



(a) Função $y = \text{senh}\,(x)$ (b) Função $y = -\text{senh}\,(x)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Definição 4.8 (**Função Cosseno Hiperbólico**)**.** A função cosseno hiperbólico é definida por

$$\cosh\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4.2}$$

(i)	Função Cosseno Hiperbólico: $F(x) = \cosh\,(x)$
(ii)	**Função Canônica cosseno hiperbólico:** $f(x) = \cosh\,(x)$
(iii)	Função Dual Canônica cosseno hiperbólico: $g(x) = -\cosh\,(x)$

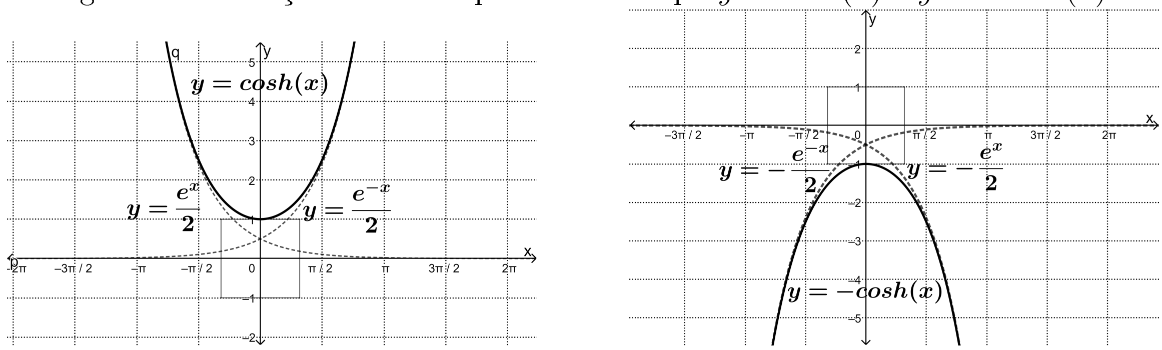
Observação 4.14.

(i) Domínio: D(f) $= \mathbb{R}$ e D(g) $= \mathbb{R}$

(ii) Imagem: Im(f) $= [1, \infty)$ e Im(g) $= (-\infty, -1]$

(iii) Gráfico: G(f) e G(g) estão na Figura 4.14(a) e Figura 4.14(b), respectivamente.

Figura 4.14: Função cosseno hiperbólico do tipo $y = \cosh\,(x)$ e $y = -\cosh\,(x)$.



(a) Função $y = \cosh\,(x)$ (b) Função $y = -\cosh\,(x)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Definição 4.9 (Função Tangente Hiperbólica). A função tangente hiperbólica é definida por

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{4.3}$$

(i)	Função Tangente Hiperbólica: $F(x) = \operatorname{tgh}(x)$
(ii)	**Função Canônica tangente hiperbólica:** $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$
(iii)	Função Dual Canônica tangente hiperbólica: $g(x) = -\operatorname{tgh}(x)$

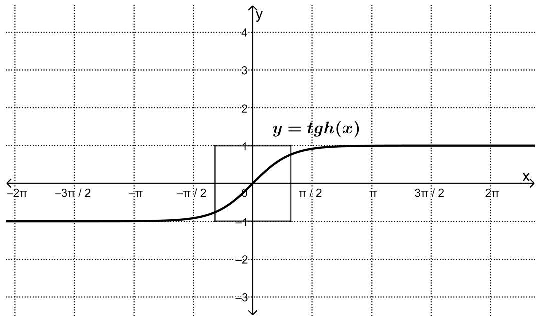
Observação 4.15.

(i) Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}(g) = \mathbb{R}$

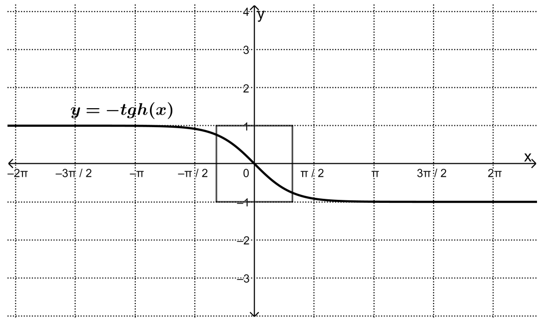
(ii) Imagem: $\operatorname{Im}(f) = (-1, 1)$ e $\operatorname{Im}(g) = (-1, 1)$

(iii) Gráfico: $\mathrm{G}(f)$ e $\mathrm{G}(g)$ estão na Figura 4.15(a) e Figura 4.15(b), respectivamente.

Figura 4.15: Função tangente hiperbólica do tipo $y = \operatorname{tgh}(x)$ e $y = -\operatorname{tgh}(x)$.



(a) Função $y = \operatorname{tgh}(x)$



(b) Função $y = -\operatorname{tgh}(x)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

5 Técnica para a Construção de Gráficos de Funções

Entendemos por gráfico, uma figura com o objetivo de transmitir uma informação qualquer. Uma das representações gráficas mais comuns e importantes em matemática é o gráfico de uma função.

Apresentamos quatro técnicas que lhes ajudarão na construção de gráficos de funções a partir dos gráficos de funções canônicas. Estas técnicas são:

- Quadrado Mágico
- Simetria
- Translação
- Aberto e Fechado

5.1 Quadrado Mágico

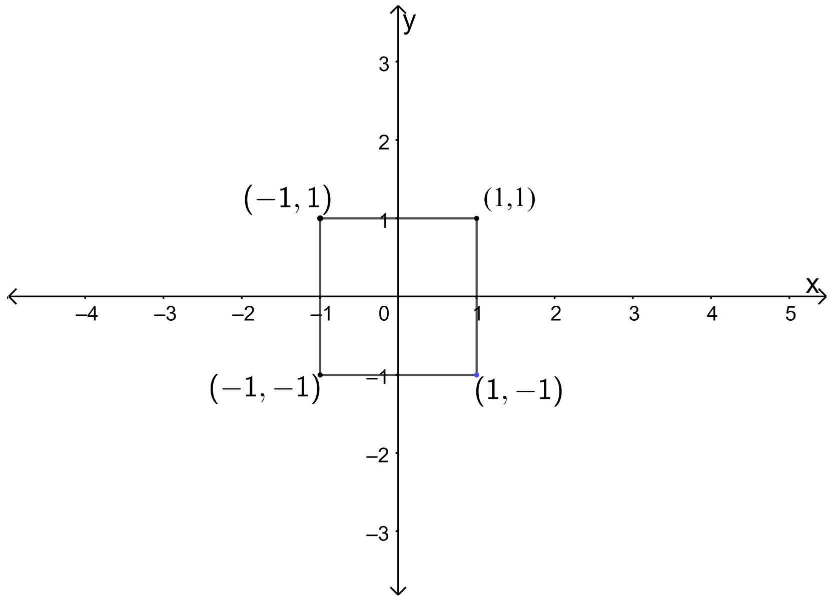
Com a única finalidade de facilitar o esboço do gráfico de funções temos considerado a construção de um "quadrado mágico" . Os gráficos abordados nesse trabalho interceptam o quadrado mágico em pelo menos um ponto.

Definição 5.1 (**Quadrado Mágico**). Definimos o quadrado mágico como um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ cujos vértices são os pares ordenados:

$$(1,1),(-1,1),(-1,-1) \text{ e } (1,-1)$$

Na figura 5.1 mostramos o quadrado mágico centrado na origem do plano cartesiano.

Figura 5.1: Quadrado mágico no plano.



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

O quadrado mágico, Figura 5.1, apresenta as seguintes características:

1) O quadrado mágico possui lado com duas unidades de medida.

2) Está centrado na origem dos eixos do plano cartesiano.

3) Sua intersecção com os eixos coordenados x e y são os pontos $(1, 0), (-1, 0)$ e $(0, 1), (0, -1)$, respectivamente.

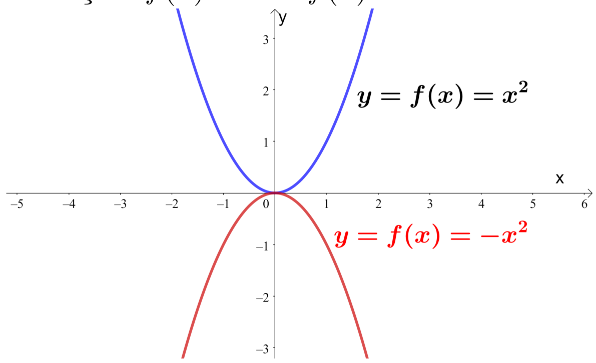
5.2 Simetria

Simetria é o espelhamento do gráfico em relação aos eixos x e y. Vamos considerar também a simetria em relação a origem e em relação a bissetriz dos quadrantes pares ou ímpares.

5.2.1 Simetria em relação a origem

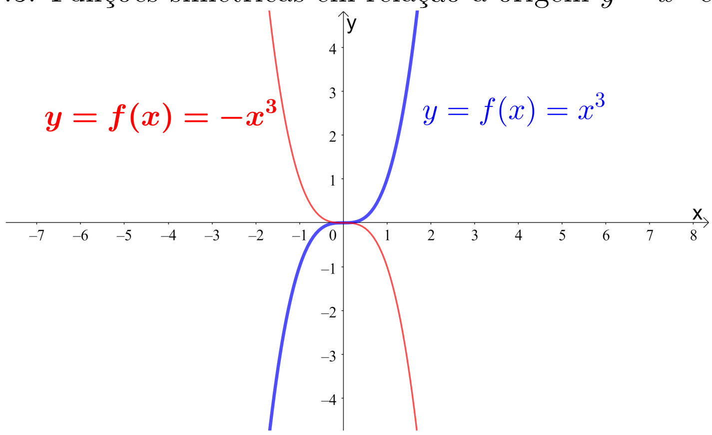
O gráfico da Figura 5.2 mostra um espelhamento em relação a origem $(0, 0)$, isto é, as funções canônica $f(x) = x^2$ e dual canônica $f(x) = -x^2$ são simétricas em relação a origem.

Figura 5.2: Gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$ simétricas em relação a origem.



O gráfico da figura 5.3 refere-se também a uma simetria tanto no eixo das abcissas como o da ordenada.

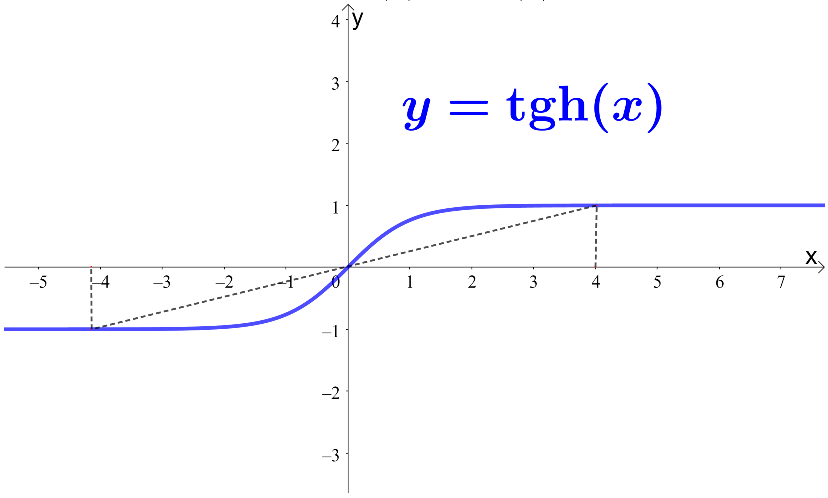
Figura 5.3: Funções simétricas em relação a origem $y = x^3$ e $y = -x^3$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Uma só função pode ser também simétrica em relação a origem, por exemplo a função canônica tangente hiperbólica $y = \text{tgh}\,(x)$ mostrado na Figura 5.4. Existe simetria em relação a origem, entre os intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$, isso acontece quando $f(-x) = -f(x)$, dizemos que a função é impar.

Figura 5.4: Gráfico das funções $y = f(x) = \text{tgh}(x)$ simétricas em relação a origem

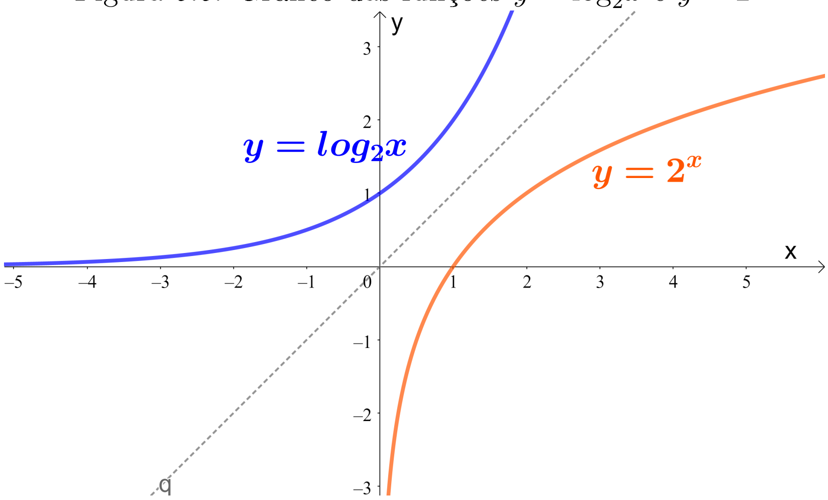


Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

5.2.2 Simetria em relação as bissetrizes ímpares

Os gráficos da figura 5.5 são espelhados, isto é, simétricos em relação as bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes.

Figura 5.5: Gráfico das funções $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$

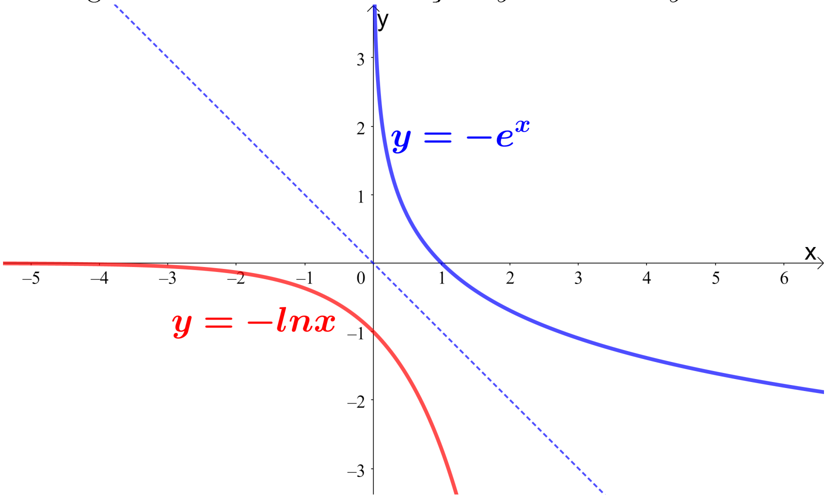


Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

5.2.3 Simetria em relação as bissetrizes pares

Os gráficos da Figura 5.6 são espelhados, isto é, simétricos em relação as bissetrizes do segundo e quarto quadrantes.

Figura 5.6: Gráfico das funções $y = -\ln x$ e $y = -e^x$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

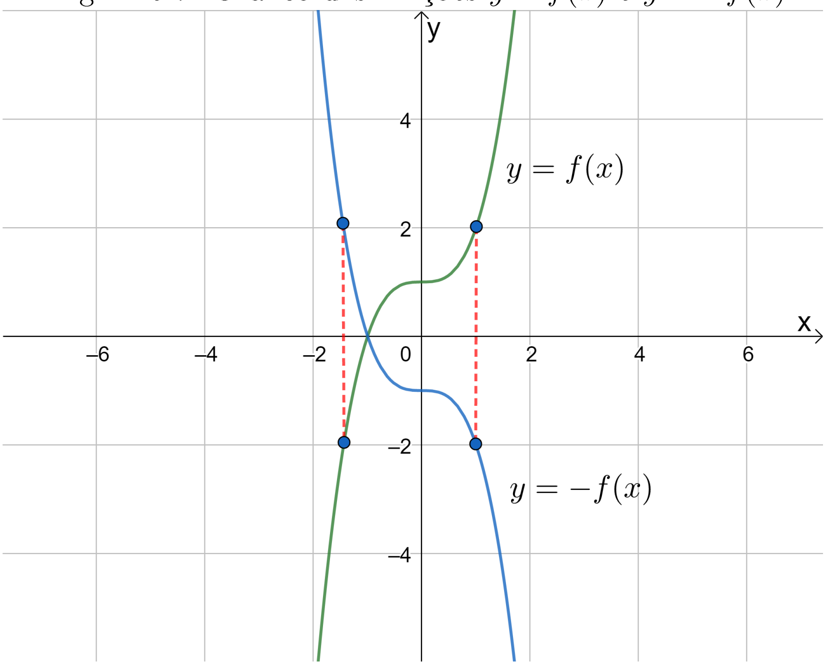
5.2.4 Simetria em relação ao eixo das abcissas

A simetria, com relação ao eixo x, do gráfico de uma função é o espelhamento dele com relação ao eixo x.

(i)	**Função:** $y = f(x)$
(ii)	**Função simétrica com relação ao eixo x:** $y = -f(x)$

O gráfico destas funções são mostradas na Figura 5.7.

Figura 5.7: Gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = -f(x)$



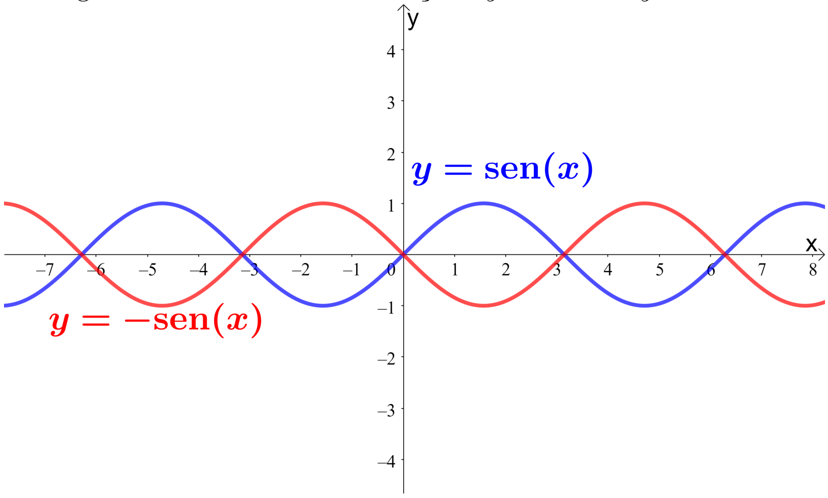
Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Exemplo 5.1.

(1) Na Figura 5.8 apresentamos os gráficos da função $y = \operatorname{sen} x$ e sua simétrica com relação ao eixo x.

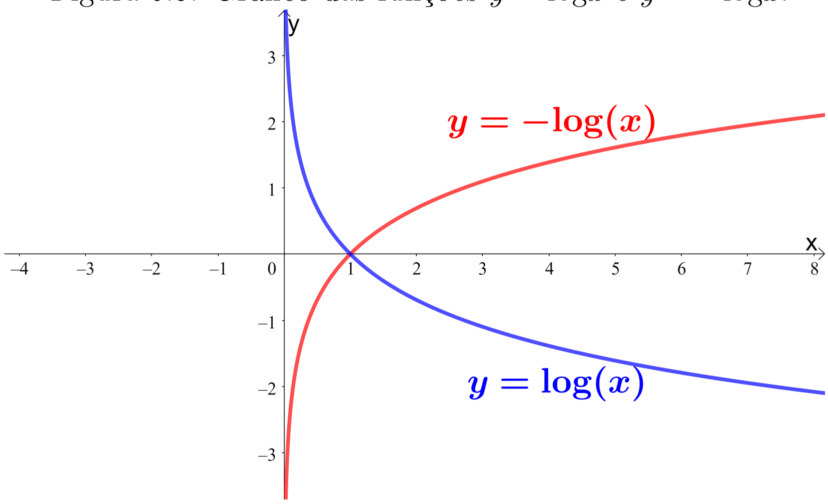
(2) Na Figura 5.9 apresentamos os gráficos da função $y = \log x$ e sua simétrica com relação ao eixo x.

Figura 5.8: Gráfico das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\operatorname{sen} x$.



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Figura 5.9: Gráfico das funções $y = \log x$ e $y = -\log x$.



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

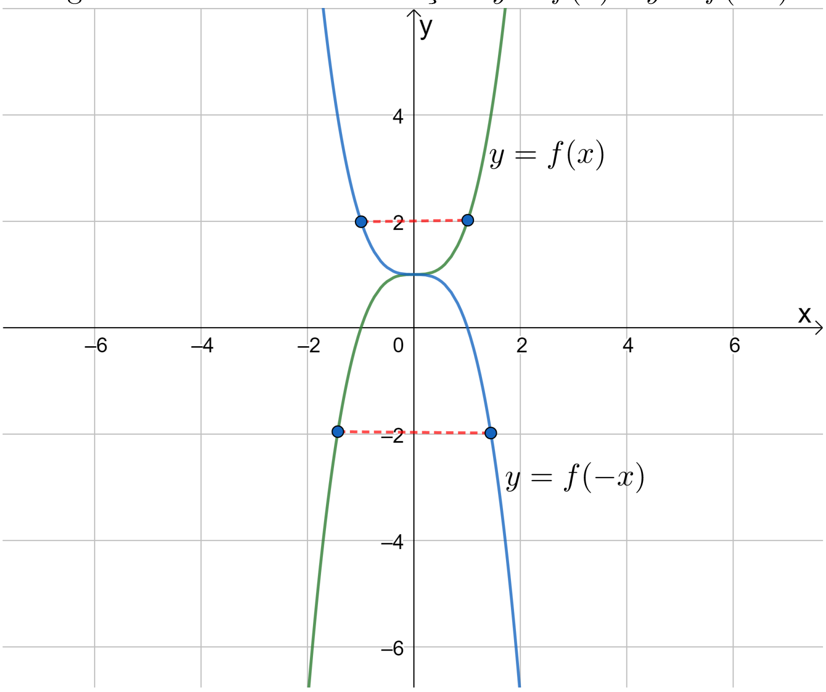
5.2.5 Simetria em relação ao eixo das ordenadas

A simetria, com relação ao eixo y, do gráfico de uma função é o espelhamento dele com relação ao eixo y.

(i)	**Função:** $y = f(x)$
(ii)	**Função simétrica com relação ao eixo y:** $y = f(-x)$

O gráfico destas funções são mostradas na Figura 5.10.

Figura 5.10: Gráfico das funções $y = f(x)$ e $y = f(-x)$.



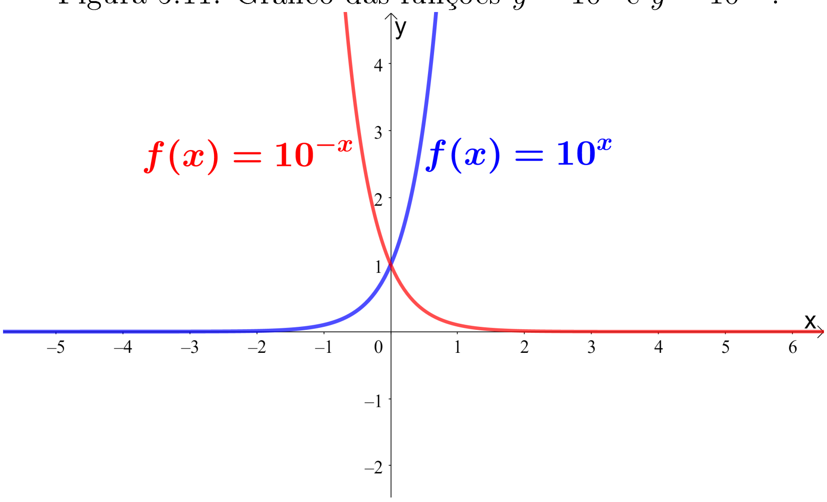
Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Exemplo 5.2.

(1) Na Figura 5.11 apresentamos os gráficos da função $y = 10^x$ e sua simétrica com relação ao eixo y.

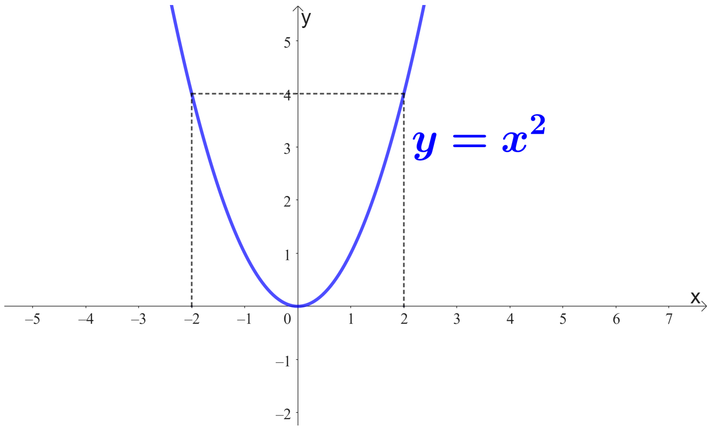
(2) Na Figura 5.12 apresentamos os gráficos da função $y = x^2$ e sua simétrica com relação ao eixo y.

Figura 5.11: Gráfico das funções $y = 10^x$ e $y = 10^{-x}$.



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Figura 5.12: Gráfico da função $y = x^2$ a qual coincide com sua simétrica $y = (-x)^2 = x^2$.



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

Observação 5.1. *Uma só função pode ser também simétrica em relação ao eixo das ordenadas, por exemplo a função canônica tangente hiperbólica $y = x^2$ mostrado na figura 5.12. Existe simetria em relação a origem, entre os intervalos $[0, +\infty]$ e $[-\infty, 0]$, isso acontece quando $f(x) = -f(x)$, dizemos que a função é par.*

5.3 Translação

Definição 5.2 (Translação). A translação do gráfico de uma função $y = f(x)$ é o deslocamento do gráfico na direção do eixos coordenados do plano cartesiano.

Observação 5.2. *A translação do gráfico de uma função pode ser no sentido horizontal, onde o gráfico move-se para direita ou esquerda do eixo e/ou no sentido vertical para baixo ou para cima.*

Dada uma função canônica $f(x)$ é possível prever como será o esboço do gráfico da seguinte função:

$$y = kf(ax + b) + m = kf\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right] + m \tag{5.1}$$

1) Horizontalmente para direita sobre o eixo x, em valores absolutos, em $\left|\frac{b}{a}\right|$ unidades, se $\frac{b}{a} < 0$.

2) Horizontalmente para esquerda sobre o eixo x, em valores absolutos, em $\left|\frac{b}{a}\right|$ unidades, se $\frac{b}{a} > 0$.

3) Verticalmente para cima sobre o eixo y, em valores absolutos, em $|m|$ unidades, se $m > 0$.

4) Verticalmente para baixo sobre o eixo y, em valores absolutos, em $|m|$ unidades, se $m < 0$.

Observação 5.3. As constantes m e k alteram a imagem da função $f(x)$.

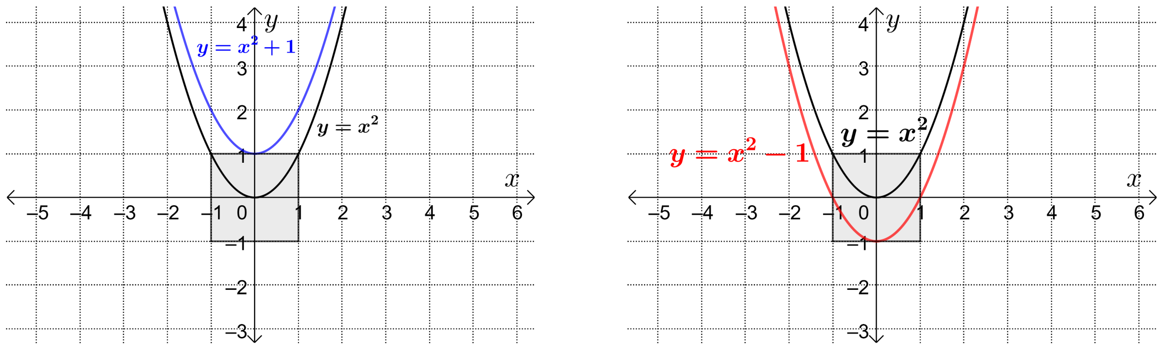
- Translação vertical e horizontal do gráfico tipo $y = x^2$ e $y = -x^2$

Os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2$ nos possibilitam construir gráficos do tipo $y = x^2 + b$ e $y = x^2 - b$ semelhantes ao primeiro, porém transladados:

O gráfico da figura 5.14(a) $b = 1 > 0$ representa a função $y = k(x+b)^2 + c$, para $k = c = 1$ e $b = 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para cima, isto é, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (1).

Já o gráfico da figura 5.14(b), que representa a função $y = k(x+b)^2 + c$ para $k = 1$, $b = 0$ e $c = -1$, sofreu um deslocamento em uma unidade para baixo, ou seja, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (−1).

Figura 5.13: Translação do gráfico $y = x^2$



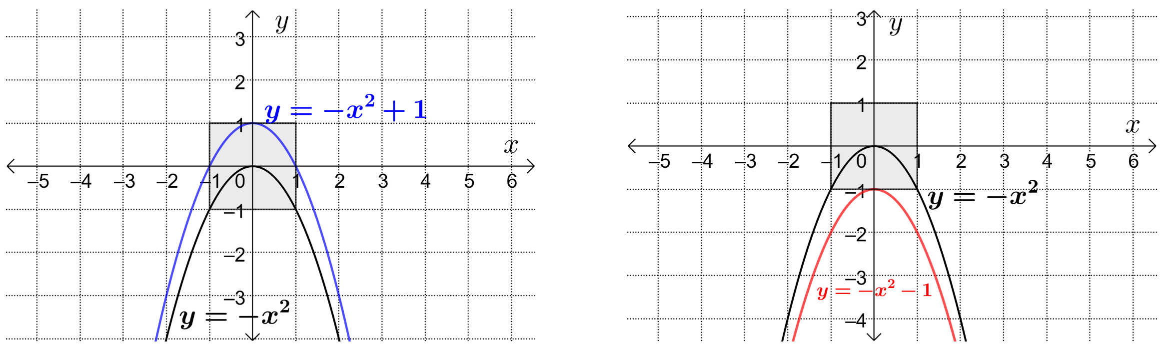
(a) Função $y = x^2 + 1$ (b) Função $y = x^2 - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 5.15(a) $b = 1 > 0$ representa a função $y = k(x+b)^2 + c$, para $k = -1$, $c = 1$ e $b = 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para cima, isto é, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (1).

Já o gráfico da figura 5.15(b), que representa a função $y = k(x+b)^2 + c$ para $k = -1$, $b = 0$ e $c = -1$, sofreu um deslocamento em uma unidade para baixo, ou seja, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (−1).

Figura 5.14: Translação do gráfico $y = -x^2$



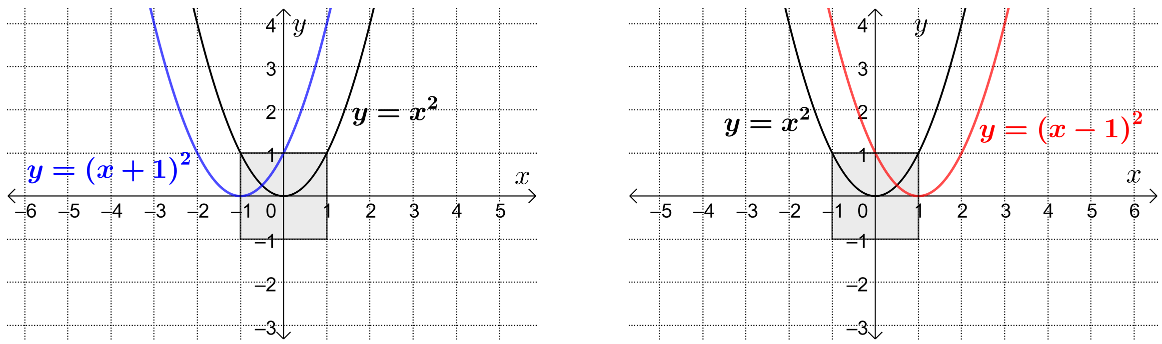
(a) Função $y = -x^2 + 1$ (b) Função $y = -x^2 - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 5.16(a) $b = 1 > 0$ representa a função $y = k(x+b)^2 + c$, para $k = b = 1$ e $c = 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para cima, isto é, interceptava y no ponto de ordenada zero (0), passou a interceptar no ponto um (1).

Já o gráfico da figura 5.16(b), que representa a função $y = k(x+b)^2 + c$ para $k = 1$, $b = -1$ e $c = 0$, sofreu um deslocamento em uma unidade para baixo, ou seja, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (-1).

Figura 5.15: Deslocamento horizontal do gráfico $y = x^2$



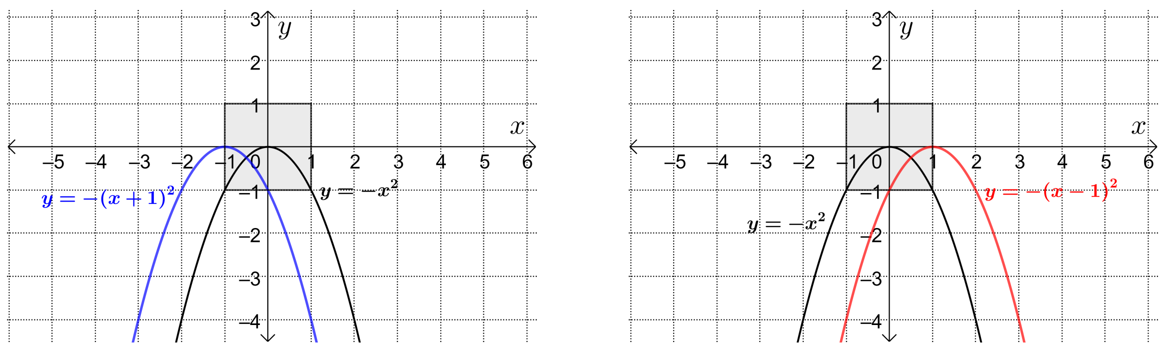
(a) Função $y = (x+1)^2$ (b) Função $y = (x-1)^2$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 5.17(a) $b = 1 > 0$ representa a função $y = k(x+b)^2 + c$, para $k = -1$, $b = 1$ e $c = 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para cima, isto é, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (1).

Já o gráfico da figura 5.17(b), que representa a função $y = k(x+b)^2 + c$ para $k = b = -1$ e $c = 0$, o gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para baixo, ou seja, interceptava y no ponto de ordenada zero (0) e passou a interceptar no ponto um (-1).

Figura 5.16: Deslocamento horizontal do gráfico $y = -x^2$



(a) Função $y = -(x+1)^2$ (b) Função $y = -(x-1)^2$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- Translação vertical e horizontal do gráfico tipo $y = \text{sen}\,(x)$ e $y = -\text{sen}\,(x)$

Uma função trigonométrica $f(x) = cosx$, nos permite a prever como será o esboço do gráfico de uma função do tipo $f(x) = k.cos\,(ax+b) + m = k.cos\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right] + m$, com as seguintes alterações:

1) Translada horizontalmente para direita sobre o eixo x, em valores absolutos, em $\left|\frac{b}{a}\right|$ unidades, se $\frac{b}{a} < 0$.

2) Translada horizontalmente para esquerda sobre o eixo x, em valores absolutos, em $\left|\frac{b}{a}\right|$ unidades, se $\frac{b}{a} > 0$.

3) Translada verticalmente para cima sobre o eixo y, em valores absolutos, em $|m|$ unidades, se $m > 0$.

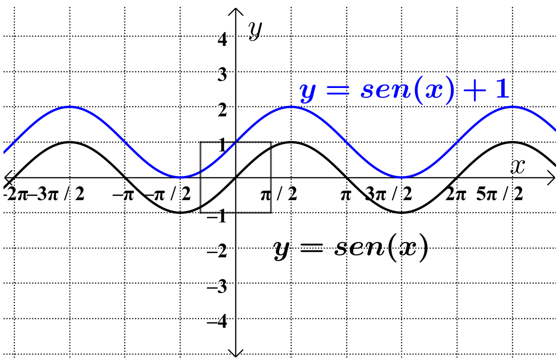
4) Translada verticalmente para baixo sobre o eixo y, em valores absolutos, em $|m|$ unidades, se $m < 0$.

Os gráficos das funções $y = \text{sen}\,(x)$ e $y = -\text{sen}\,(x)$ nos possibilitam construir gráficos do tipo $y = \text{sen}\,(x) + m$ e $y = \text{sen}\,(x) - m$ semelhantes ao primeiro, porém transladados em m unidades para cima para $m > 0$ ou para baixo para $m < 0$.

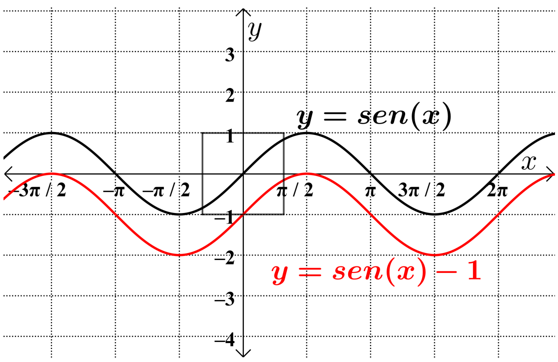
O gráfico da figura 5.18(a) representa a função $y = \text{sen}\,(x) + 1$ para $m = 1 > 0$, . Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para cima, isto é, interceptava y no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(0, 1)$.

Já o gráfico da figura 5.18(b), que representa a função $y = \text{sen}\,(x) - 1$ para $m = -1 < 0$, sofreu um deslocamento em uma unidade para baixo, ou seja, interceptava y no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(0, -1)$.

Figura 5.17: Deslocamento vertical do gráfico $y = \text{sen}\,(x)$



(a) Função $y = \text{sen}\,(x) + 1$



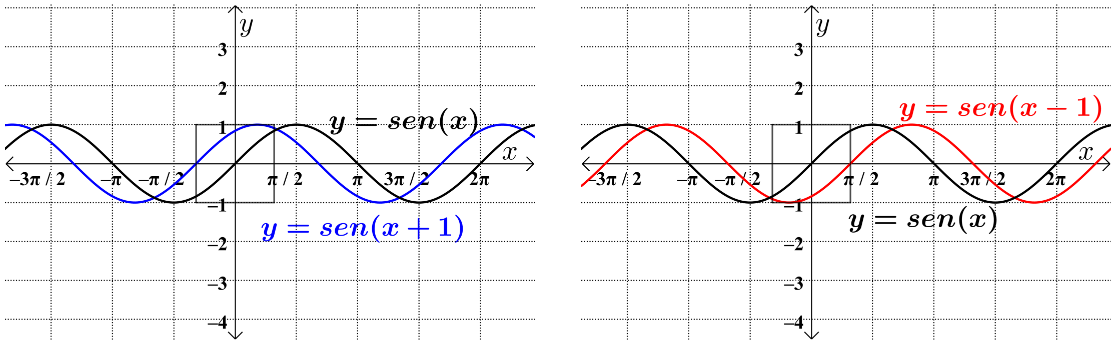
(b) Função $y = \text{sen}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Os gráficos das funções $y = \text{sen}\,(x)$ e $y = -\text{sen}\,(x)$ nos possibilitam construir gráficos do tipo $y = \text{sen}\left(x + \frac{b}{a}\right)$ e $y = \text{sen}\left(x - \frac{b}{a}\right)$ semelhantes ao primeiro, porém transladados em $\frac{b}{a}$ unidades para esquerda para $\frac{b}{a} > 0$ ou para direita para $\frac{b}{a} < 0$.

O gráfico da figura 5.19(a) representa a função $y = \text{sen}\left(x + \frac{b}{a}\right)$ para $\frac{b}{a} = 1 > 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para esquerda, isto é, interceptava x no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(-1, 0)$. Já o gráfico da figura 5.19(b), que representa a função $y = \text{sen}\left(x - \frac{b}{a}\right)$ para $\frac{b}{a} = -1 < 0$, sofreu um deslocamento em uma unidade para direita, isto é, interceptava x no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(1, 0)$.

Figura 5.18: Translação horizontal do gráfico $y = \text{sen}\,(x)$

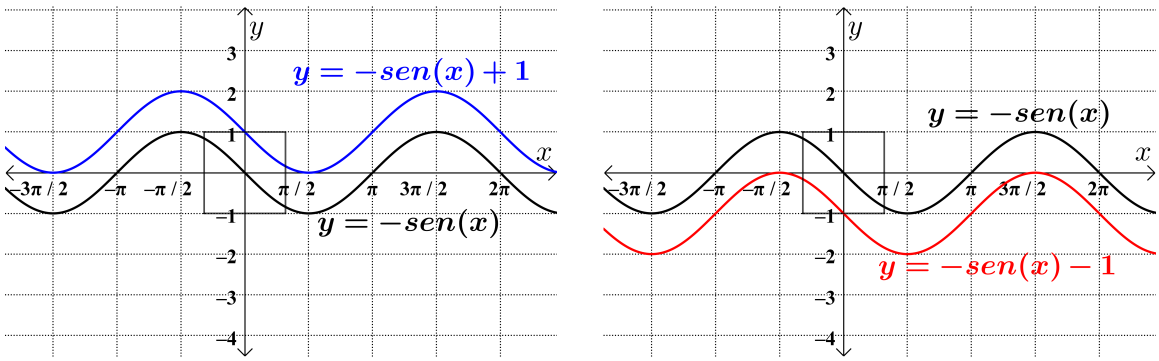


(a) Função $y = \text{sen}\,(x) + 1$ (b) Função $y = \text{sen}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 5.20(a) representa a função $y = \text{sen}\,(x) + m$ para $m = 1 > 0$. Este gráfico sofreu um deslocamento de uma unidade para cima, isto é, interceptava y no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto de interseção do quadrado mágico com o eixo das ordenadas em $(0, 1)$. Já o gráfico da figura 5.20(b), que representa a função $y = -\text{sen}\,(x) + m$ para $m = -1 < 0$, sofreu um deslocamento de uma unidade para baixo, isto é, interceptava y no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto de interseção do quadrado mágico com o eixo das ordenadas em $(0, -1)$.

Figura 5.19: Translação vertical do gráfico $y = -\text{sen}\,(x)$

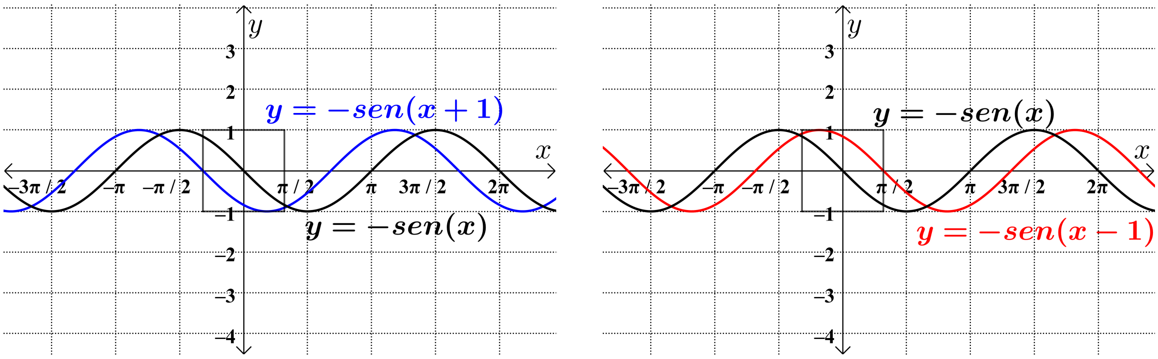


(a) Função $y = -\text{sen}\,(x) + 1$ (b) Função $y = -\text{sen}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 5.21(a) representa a função $y = -\text{sen}\left(x + \frac{b}{a}\right)$ para $\frac{b}{a} = 1 > 0$, o gráfico sofreu um deslocamento em uma unidade para esquerda, isto é, interceptava x no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(-1, 0)$. Já o gráfico da figura 5.21(b), que representa a função $y = -\text{sen}\left(x - \frac{b}{a}\right)$ para $\frac{b}{a} = -1 < 0$, sofreu um deslocamento em uma unidade para direita, ou seja, interceptava x no centro do quadrado mágico $(0, 0)$ e passou a interceptar no ponto $(1, 0)$.

Figura 5.20: Deslocamento horizontal do gráfico $y = -\text{sen}\,(x)$



(a) Função $y = -\text{sen}\,(x+1)$ (b) Função $y = -\text{sen}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Observação 5.4. 1) Essa regra citada acima é válida para as outras funções trigonométricas.

2) As demais funções Canônicas e dual canônicas tem comportamento semelhante as funções citadas nas subseções **??** e **??**

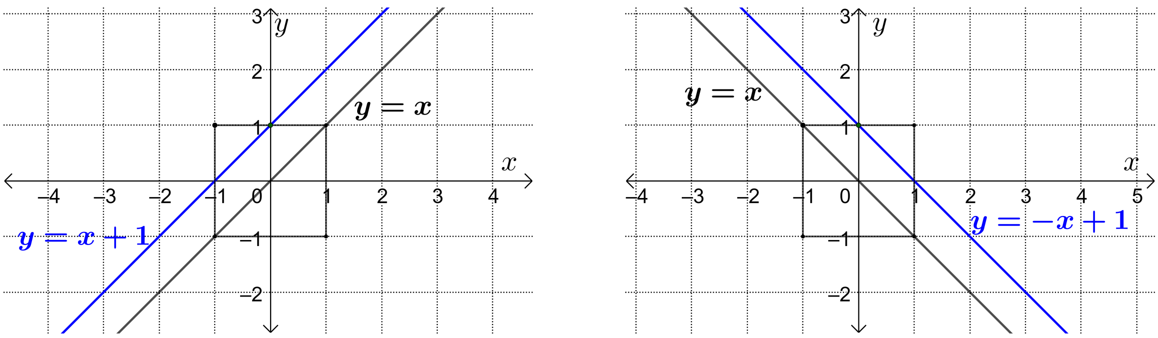
Abaixo foram colocados os outros gráficos das funções canônicas e dual canônicas citadas no capítulo 4. Para simplificar os cálculos adotaremos nas funções o valor de $m = 1$.

5.3.1 Translação vertical

Nesse sessão será mostrado as translações verticais dos gráficos das funções canônicas e dual canônicas.

- **Translação do gráfico das funções** $y = x$ **e** $y = -x$

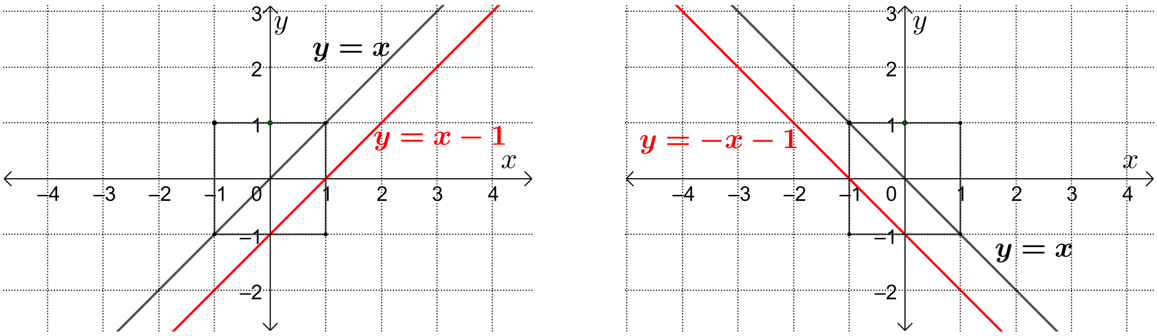
Figura 5.21: Translação do gráfico das funções $y = x$ e $y = -x$ para cima



(a) Função $y = x + 1$ (b) Função $y = -x + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.22: Translação do gráfico das funções $y = x$ e $y = -x$ para baixo

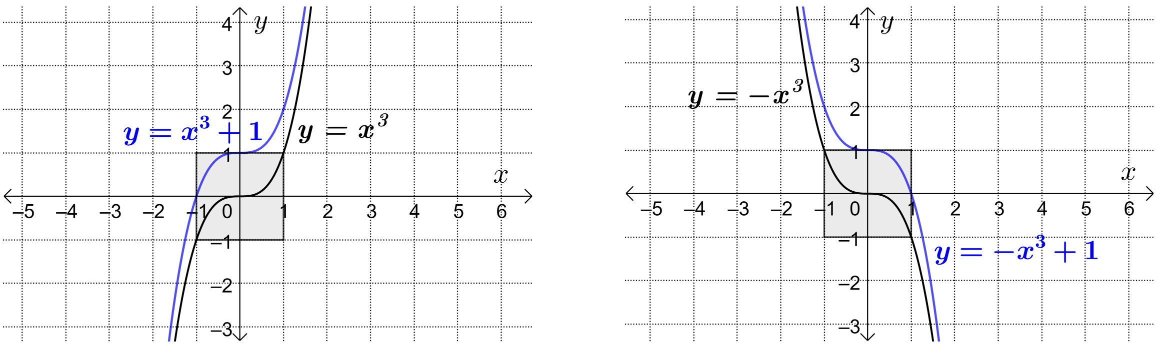


(a) Função $y = x - 1$ (b) Função $y = -x - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor.

- **Translação vertical do gráfico tipo** $y = x^3$ **e** $y = -x^3$

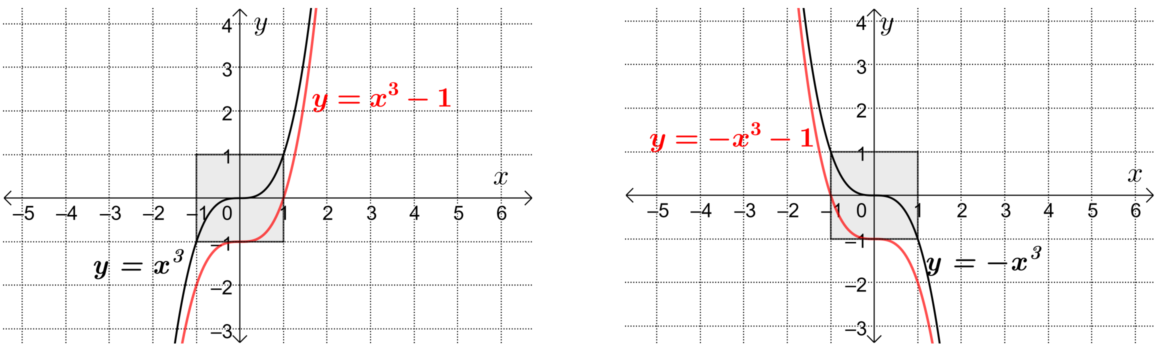
Figura 5.23: Translação do gráfico $y = x^3$ e $y = -x^3$ para cima



(a) Função $y = x^3 + 1$ (b) Função $y = -x^3 + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.24: Translação do gráfico $y = x^3$ e $y = -x^3$ para baixo

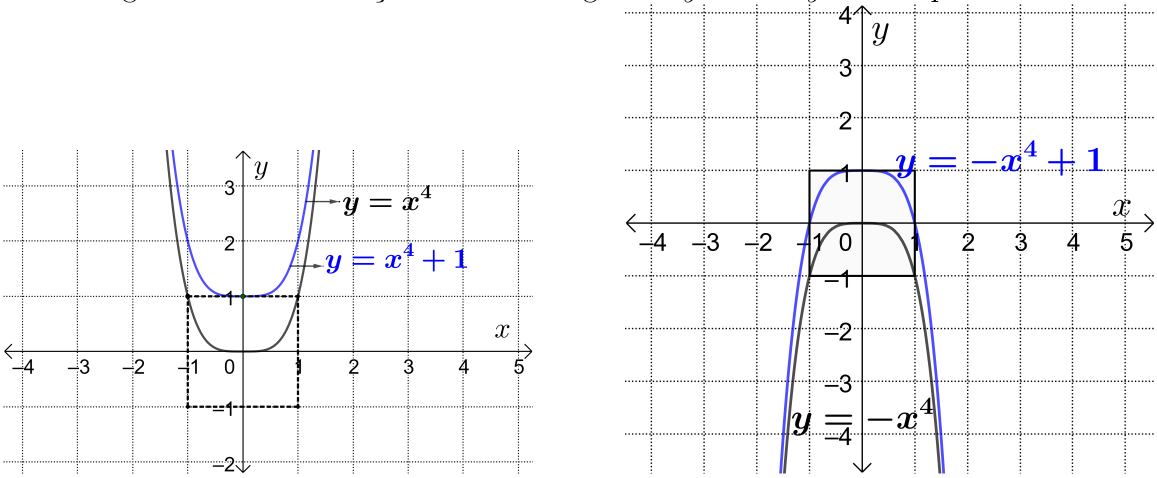


(a) Função $y = x^3 - 1$ (b) Função $y = -x^3 - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação vertical do gráfico tipo** $y = x^4$ **e** $y = -x^4$

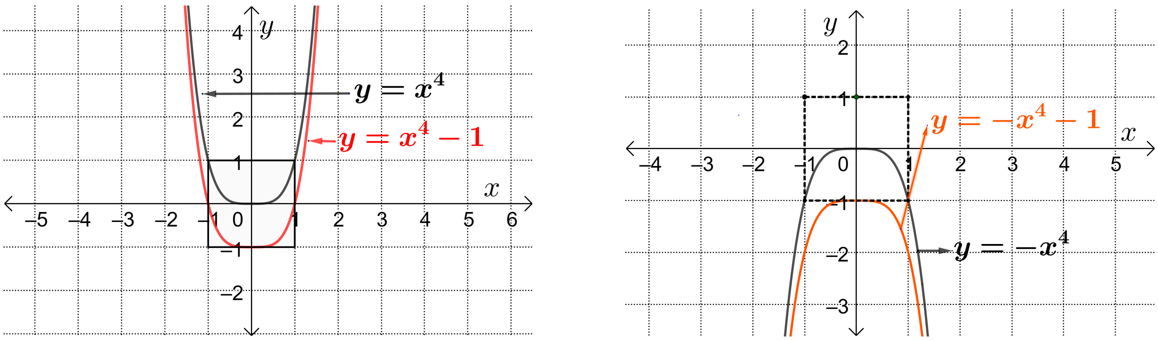
Figura 5.25: Translação vertical do gráfico $y = x^4$ e $y = -x^4$ para cima



(a) Função $y = x^4 + 1$ (b) Função $y = -x^4 + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.26: Deslocamento vertical do gráfico $y = x^4$ e $y = -x^4$ para baixo

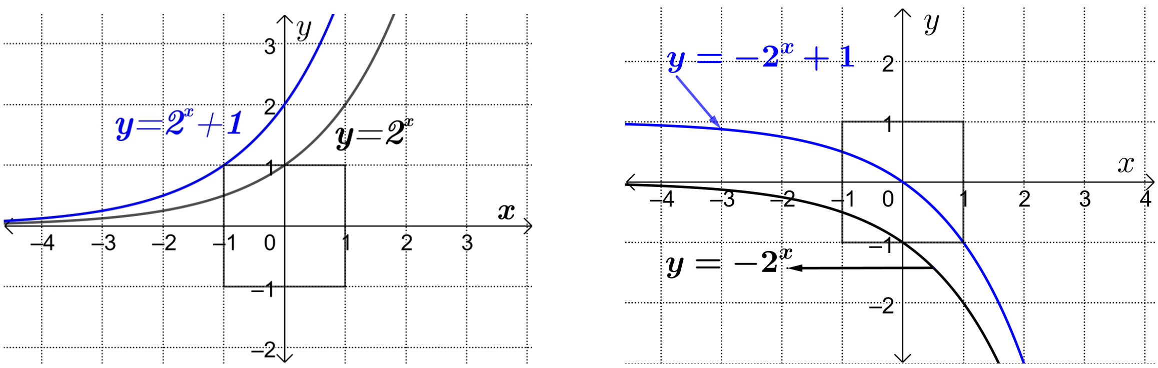


(a) Função $y = x^4 - 1$ (b) Função $y = -x^4 - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- Translação vertical do gráfico tipo $y = 2^x$ e $y = -2^x$

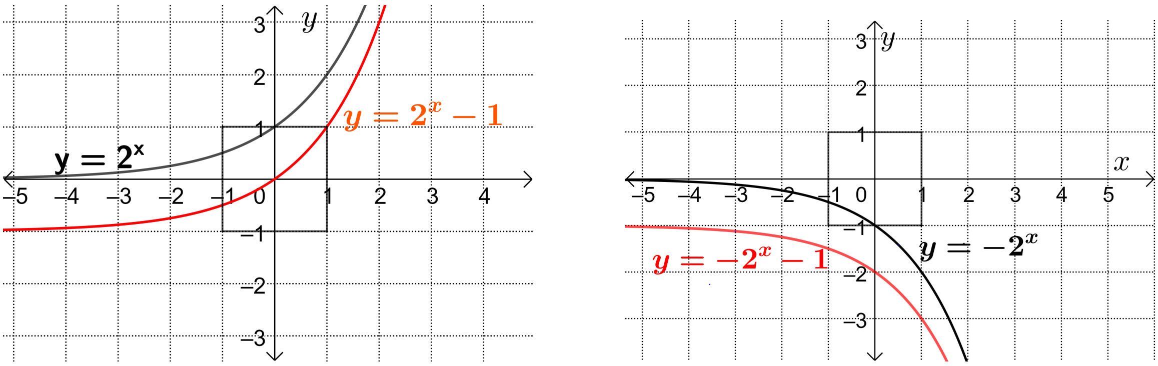
Figura 5.27: Translação vertical do gráfico $y = 2^x$ e $y = -2^x$ para cima



(a) Função $y = 2^x + 1$ (b) Função $y = -2^x + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

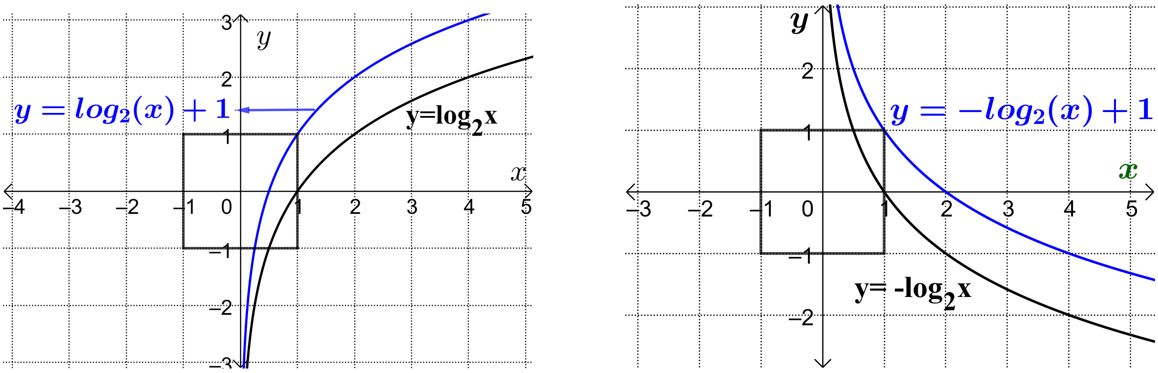
Figura 5.28: Deslocamento vertical do gráfico $y = 2^x$ e $y = -2^x$ para baixo



(a) Função $y = 2^x - 1$ (b) Função $y = -2^x - 1$

- **Translação do gráfico tipo** $y = \log_2 x$ **e** $y = -\log_2 x$

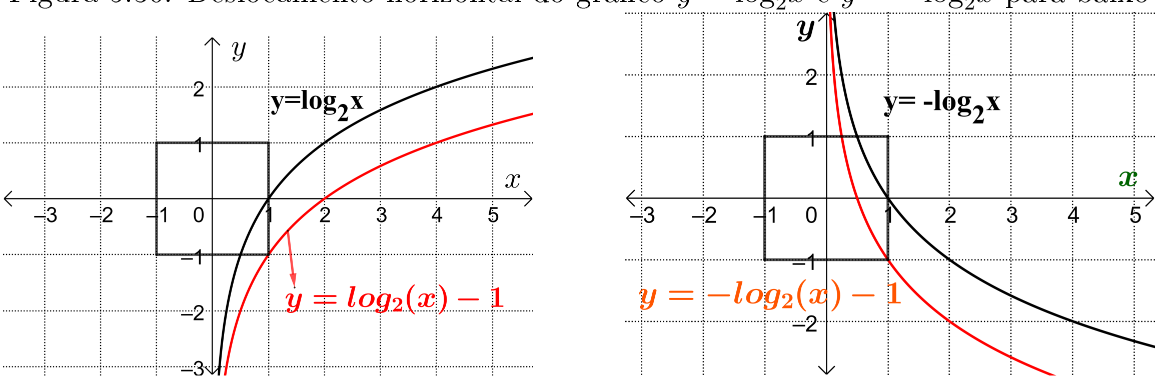
Figura 5.29: Deslocamento vertical do gráfico $y = \log_2 x$ e $y = -\log_2 x$ para cima



(a) Função $y = \log_2(x) + 1$ (b) Função $y = -\log_2(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.30: Deslocamento horizontal do gráfico $y = \log_2 x$ e $y = -\log_2 x$ para baixo

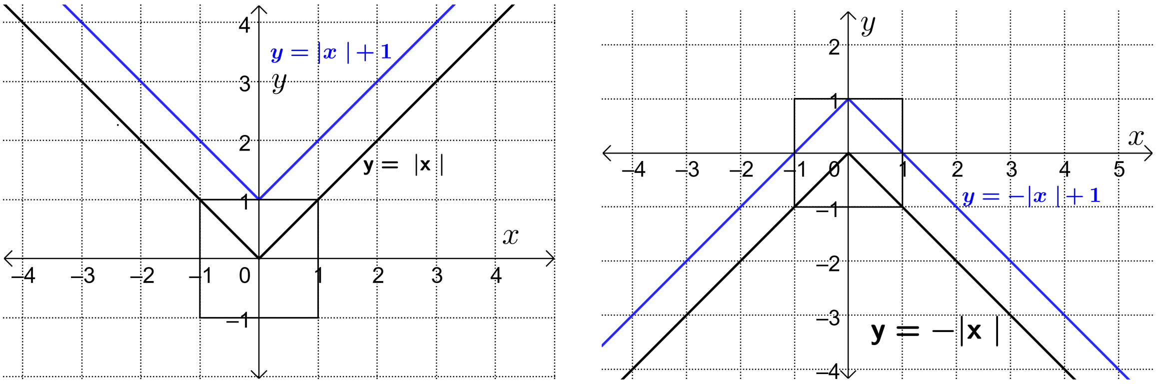


(a) Função $y = \log_2(x) - 1$ (b) Função $y = -\log_2(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = |x|$ **e** $y = -|x|$

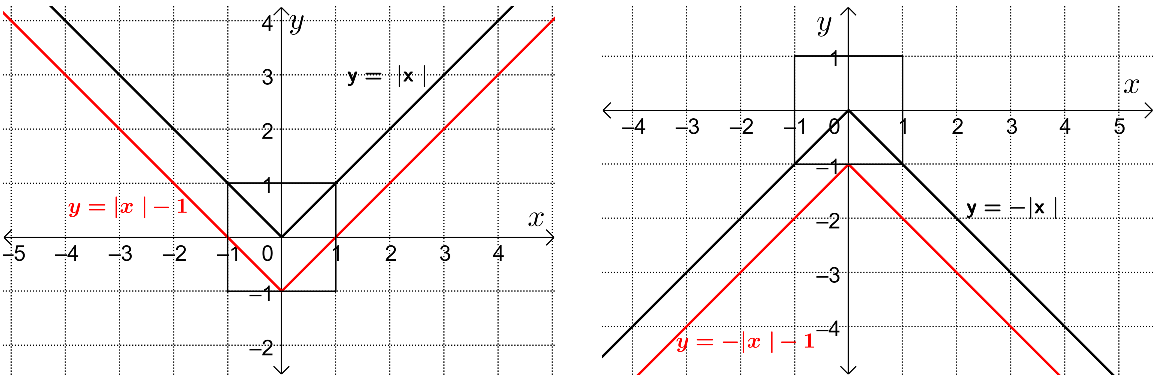
Figura 5.31: Deslocamento vertical do gráfico $y = |x|$ e $y = -|x|$ para cima



(a) Função $y = |x| + 1$ e $y = |x| - 1$ (b) Função $y = -|x| + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.32: Translação vertical do gráfico $y = |x|$ e $y = -|x|$ para baixo

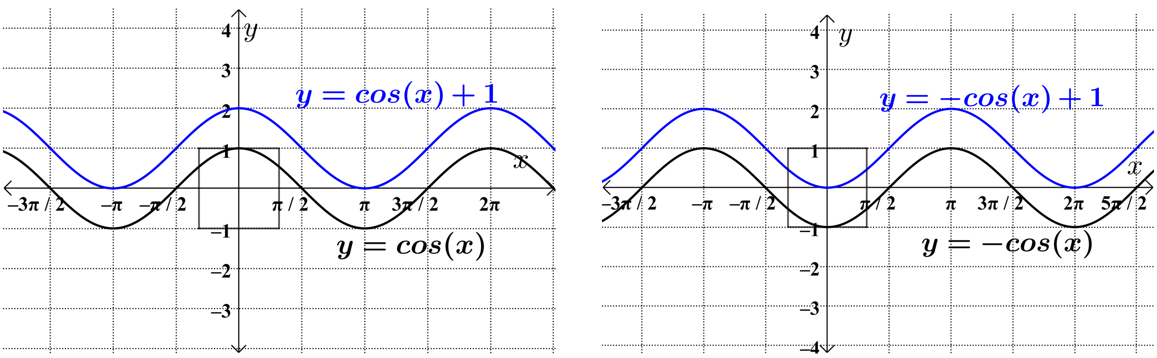


(a) Função $y = |x| + b$, para $b = \{-2, -1, 1, 2\}$ (b) Função $y = -|x| - b$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \cos(x)$ **e** $y = -\cos(x)$

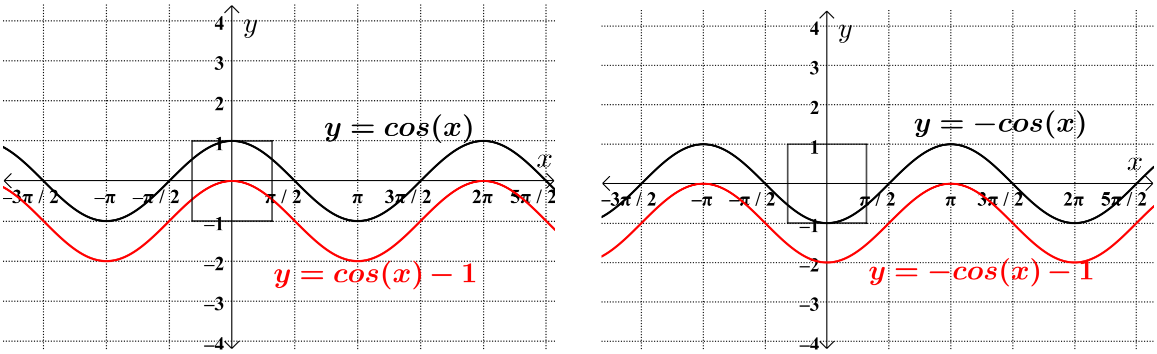
Figura 5.33: Deslocamento vertical do gráfico $y = \cos(x)$ e $y = -\cos(x)$ para cima



(a) Função $y = \cos(x) + 1$ (b) Função $y = -\cos(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.34: Translação vertical do gráfico $y = \cos(x)$ e $y = -\cos(x)$ para baixo

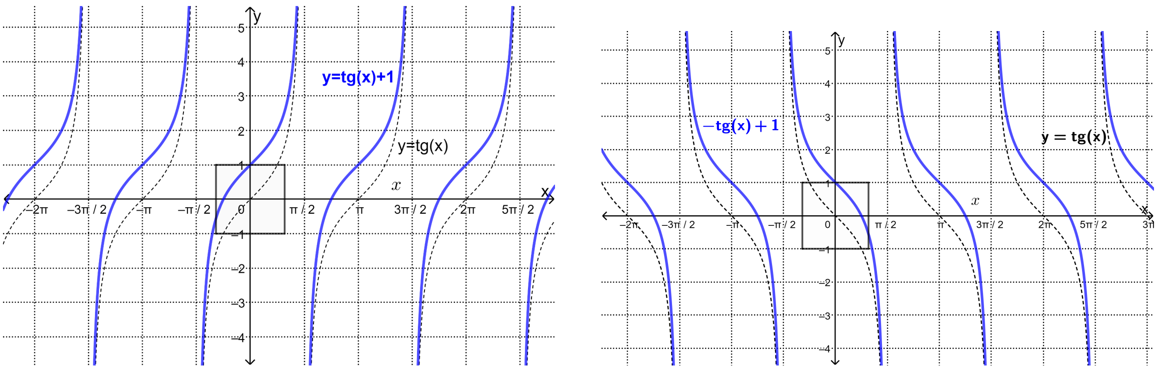


(a) Função $y = \cos(x) - 1$ (b) Função $y = -\cos(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \mathrm{tg}(x)$ **e** $y = -\mathrm{tg}(x)$

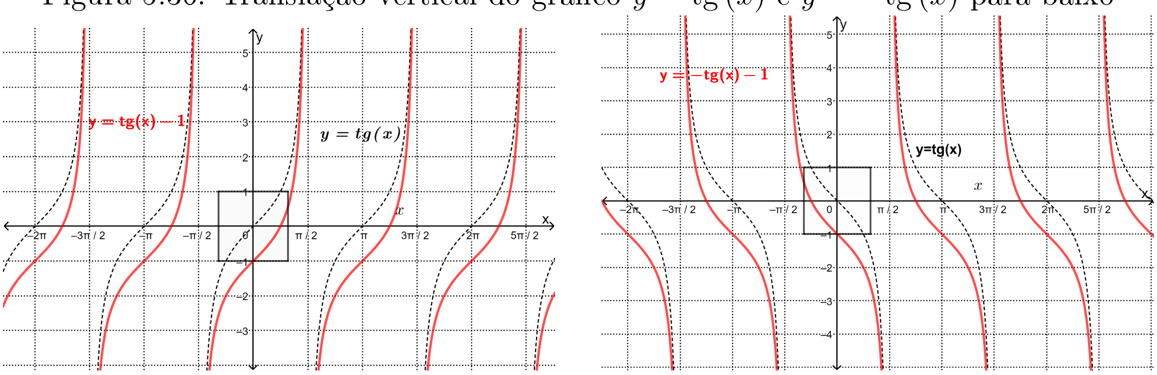
Figura 5.35: Deslocamento vertical do gráfico $y = \mathrm{tg}(x)$ e $y = -\mathrm{tg}(x)$ para cima



(a) Função $y = \mathrm{tg}(x) + 1$ (b) Função $y = -\mathrm{tg}(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.36: Translação vertical do gráfico $y = \mathrm{tg}(x)$ e $y = -\mathrm{tg}(x)$ para baixo

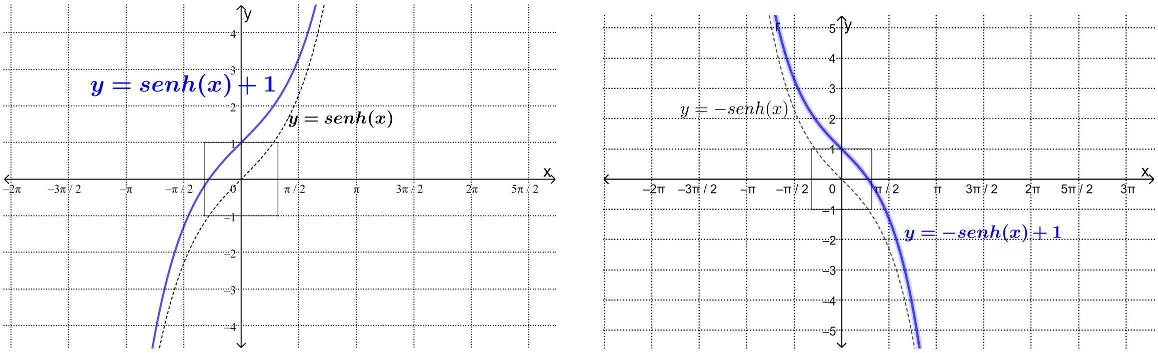


(a) Função $y = \mathrm{tg}(x) - 1$ (b) Função $y = -\mathrm{tg}(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- Translação do gráfico tipo $y = \mathrm{senh}(x)$ e $y = -\mathrm{senh}(x)$

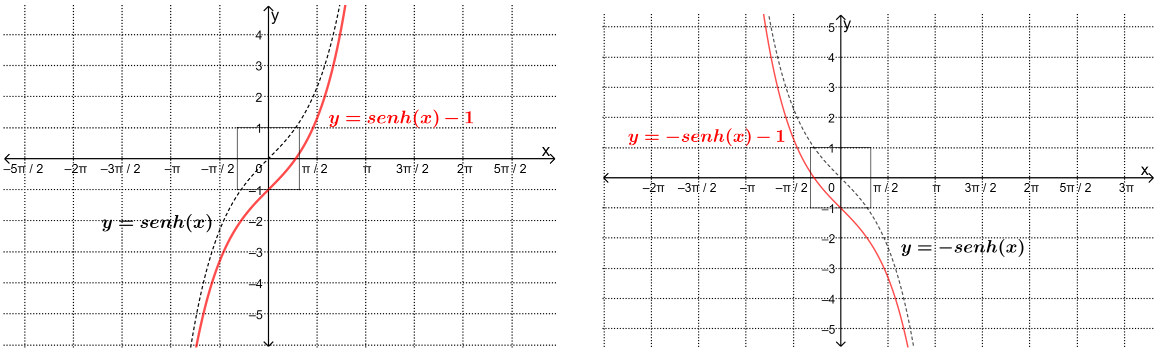
Figura 5.37: Traslação vertical do gráfico $y = \text{senh}\,(x)$ e $y = -\text{senh}\,(x)$ para cima



(a) Função $y = \text{senh}\,(x) + 1$ (b) Função $y = -\text{senh}\,(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.38: Translação vertical do gráfico $y = \text{senh}\,(x)$ e $y = -\text{senh}\,(x)$ para baixo

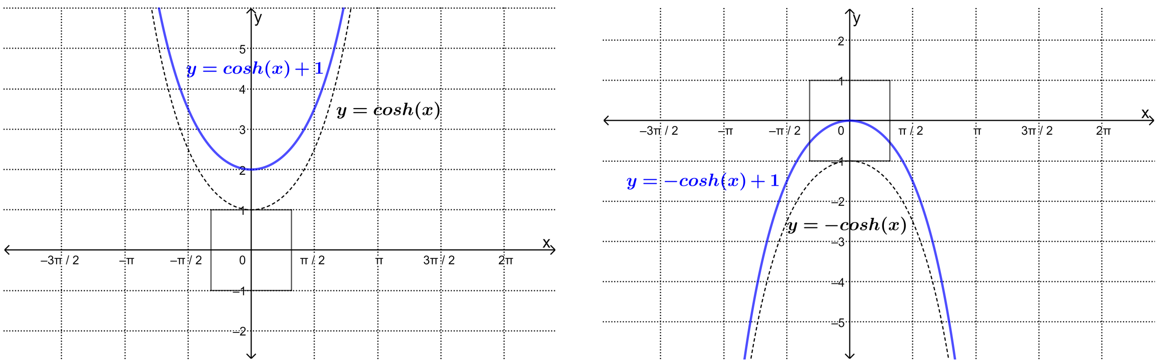


(a) Função $y = \text{senh}\,(x) - 1$ (b) Função $y = \text{senh}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- Translação do gráfico tipo $y = \cosh\,(x)$ e $y = -\cosh\,(x)$

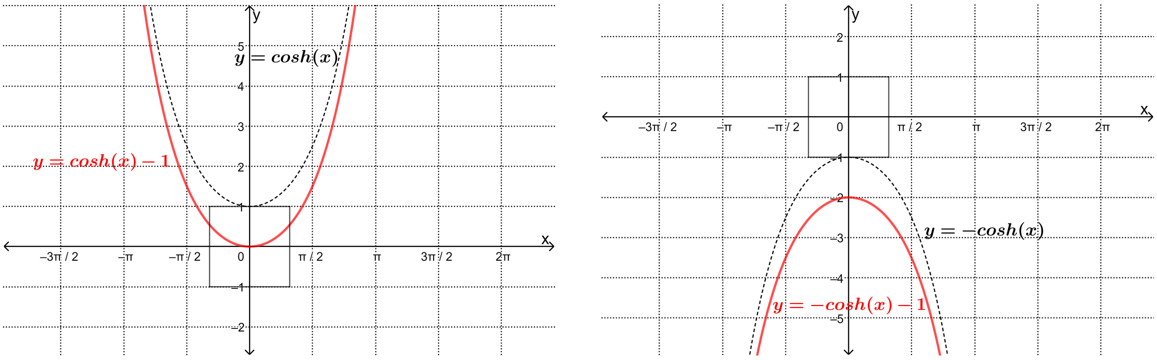
Figura 5.39: Translação vertical do gráfico $y = \cosh\,(x)$ e $y = -\cosh\,(x)$ para cima



(a) Função $y = \cosh\,(x) + 1$ (b) Função $y = -\cosh\,(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.40: Translação vertical do gráfico $y = \cosh(x)$ e $y = -\cosh(x)$ para baixo

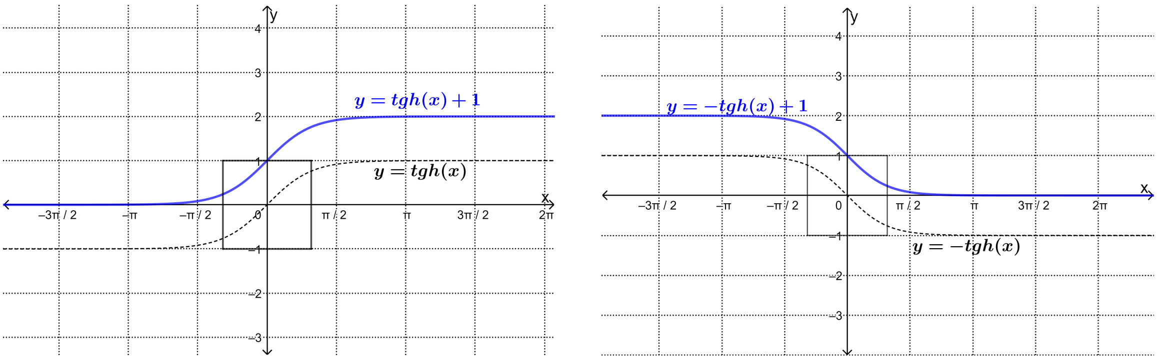


(a) Função $y = \cosh(x) - 1$ (b) Função $y = -\cosh(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \text{tgh}(x)$ **e** $y = -\text{tgh}(x)$

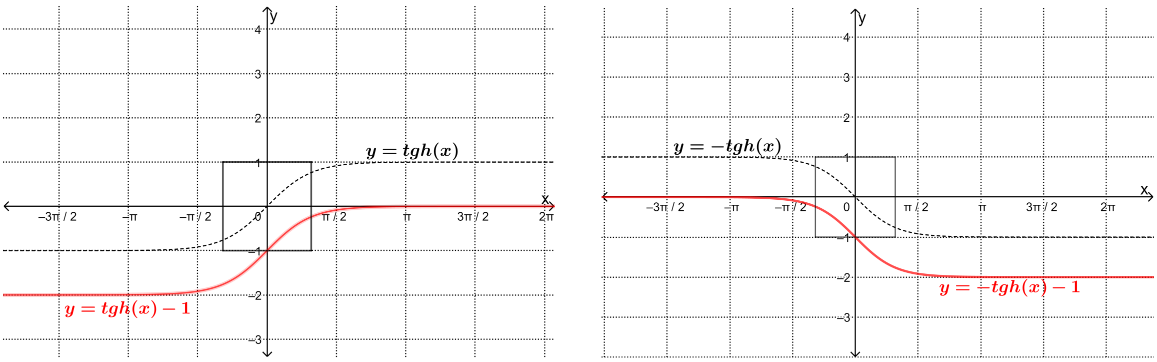
Figura 5.41: Translação vertical do gráfico $y = \text{tgh}(x)$ e $y = -\text{tgh}(x)$ para cima



(a) Função $y = \text{tgh}(x) + 1$ (b) Função $y = -\text{tgh}(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.42: Translação vertical do gráfico $y = \text{tgh}(x)$ e $y = -\text{tgh}(x)$ para baixo

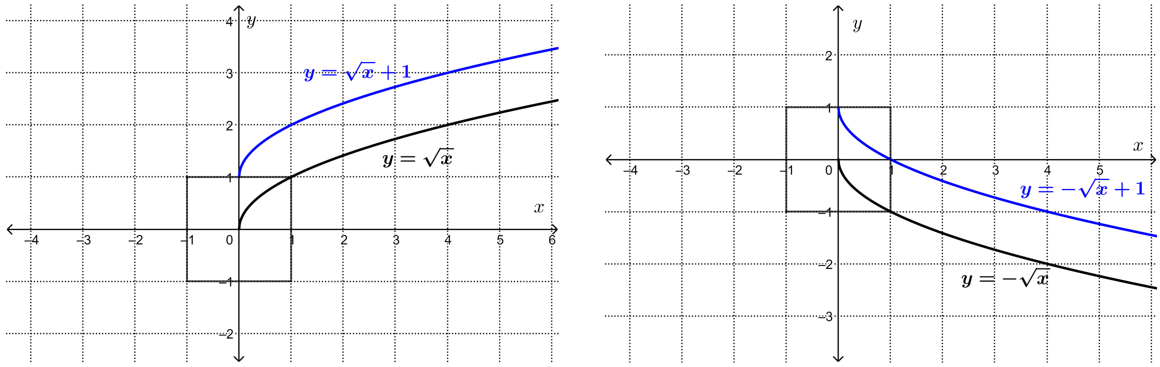


(a) Função $y = \text{tgh}(x) - 1$ (b) Função $y = -\text{tgh}(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \sqrt{x}$ **e** $y = -\sqrt{x}$

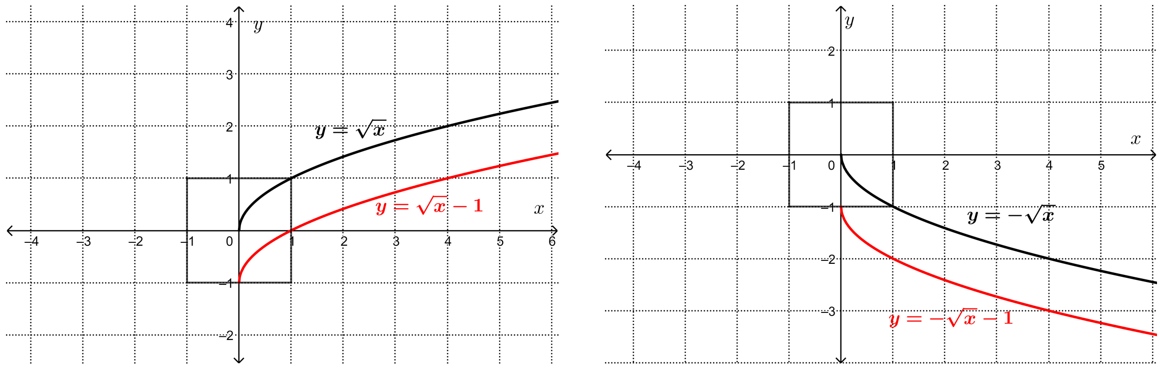
Figura 5.43: Translação vertical do gráfico $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ para cima



(a) Função $y = \sqrt{x} + 1$ (b) Função $y = -\sqrt{x} + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.44: Translação vertical do gráfico $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ para baixo



(a) Função $y = \sqrt{x}$-1 (b) Função $y = -\sqrt{x} - 1$

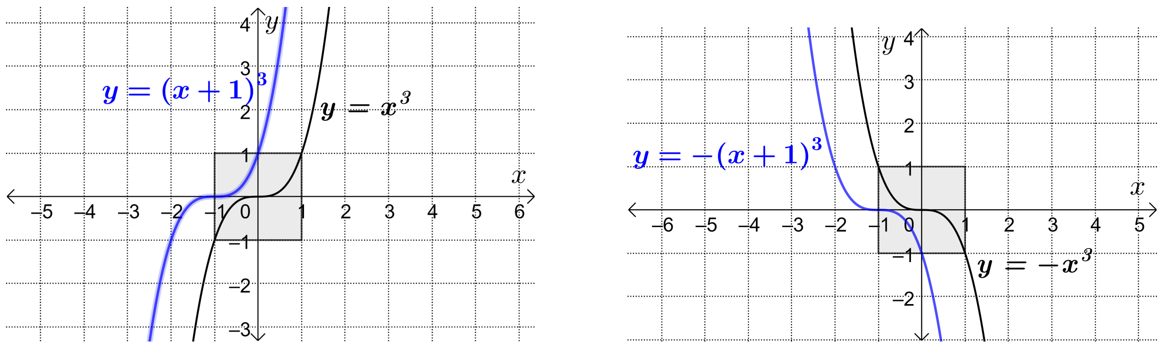
Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

5.3.2 Translação horizontal

Nesse sessão será mostrado as translações horizontais dos gráficos das funções canônicas e dual canônicas.

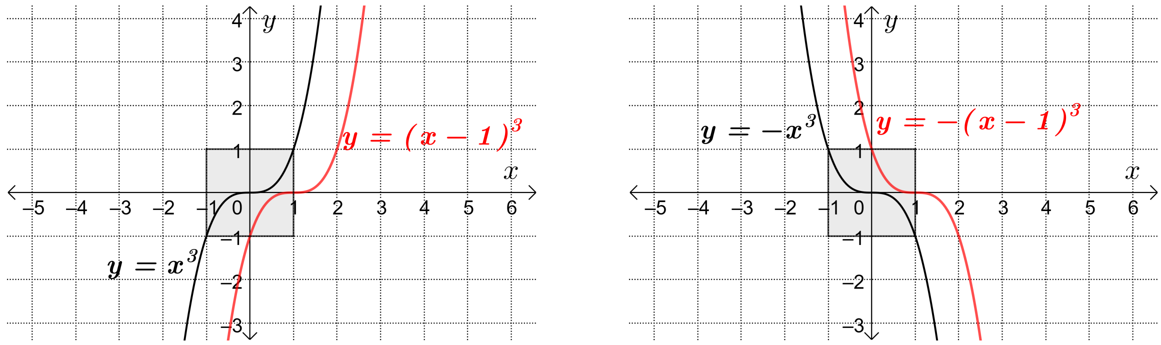
- **Translação do gráfico tipo $y = x^3$ e $y = -x^3$**

Figura 5.45: Deslocamento horizontal do gráfico $y = x^3$ e $y = -x^3$ para esquerda



(a) Função $y = (x + 1)^3$ (b) Função $y = -(x + 1)^3$

Figura 5.46: Deslocamento horizontal do gráfico $y = x^3$ e $y = -x^3$ para direita

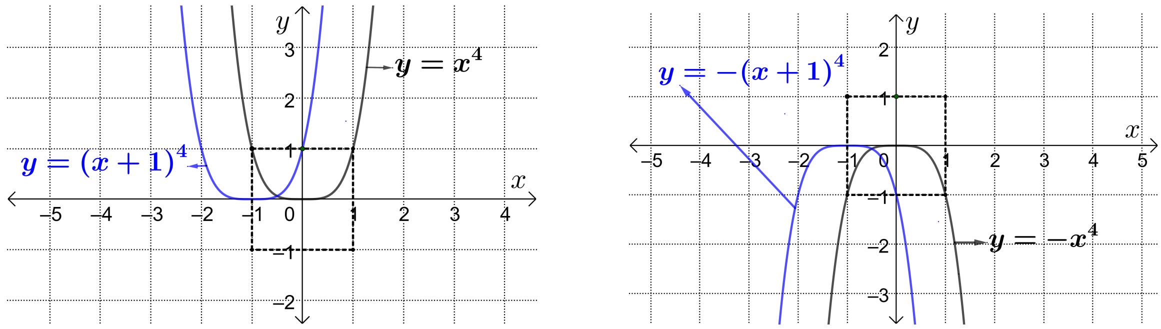


(a) Função $y = (x-1)^3$ (b) Função $y = -(x-1)^3$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

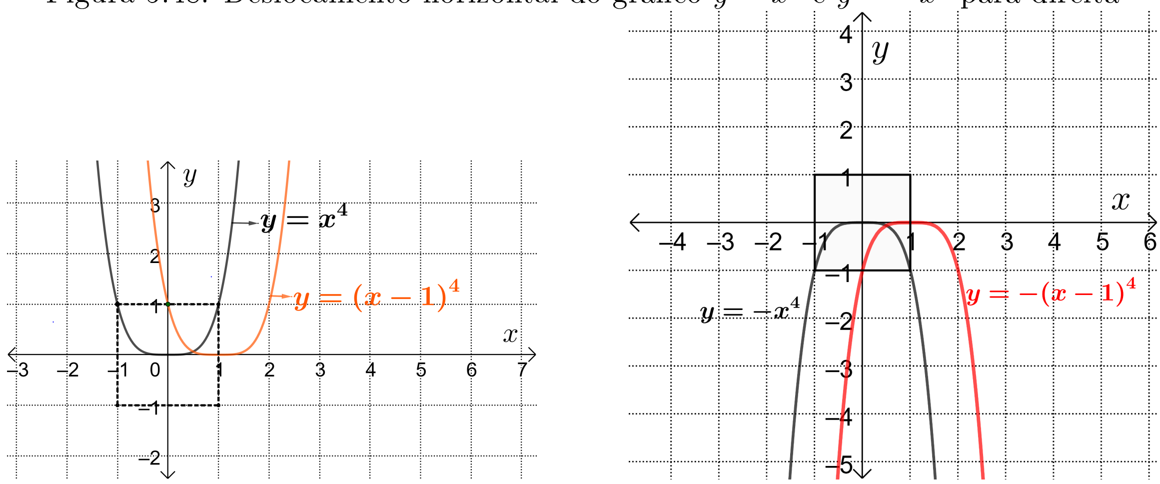
- **Translação do gráfico tipo $y = x^4$ e $y = -x^4$**

Figura 5.47: Translação do gráfico $y = x^4$ e $y = -x^4$ para esquerda



(a) Função $y = (x+1)^4$ (b) Função $y = -(x+1)^4$

Figura 5.48: Deslocamento horizontal do gráfico $y = x^4$ e $y = -x^4$ para direita

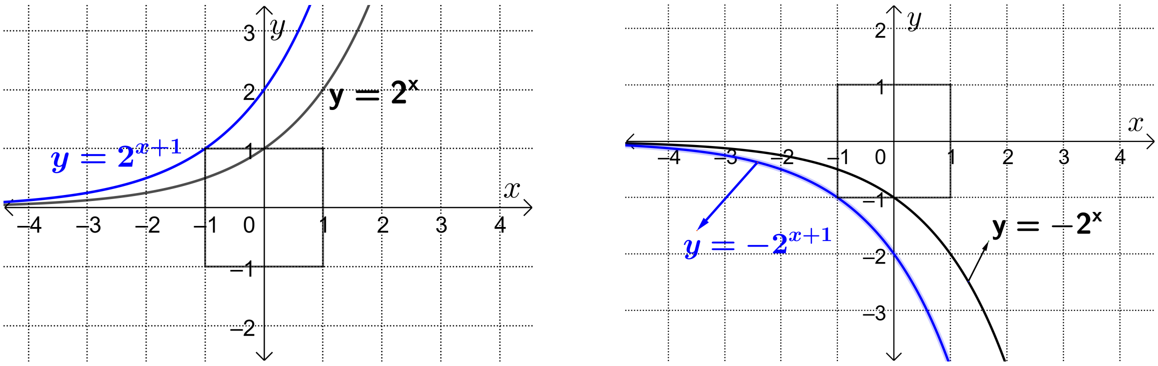


(a) Função $y = (x-1)^4$ (b) Função $y = -(x-1)^4$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo $y = 2^x$ e $y = -2^x$**

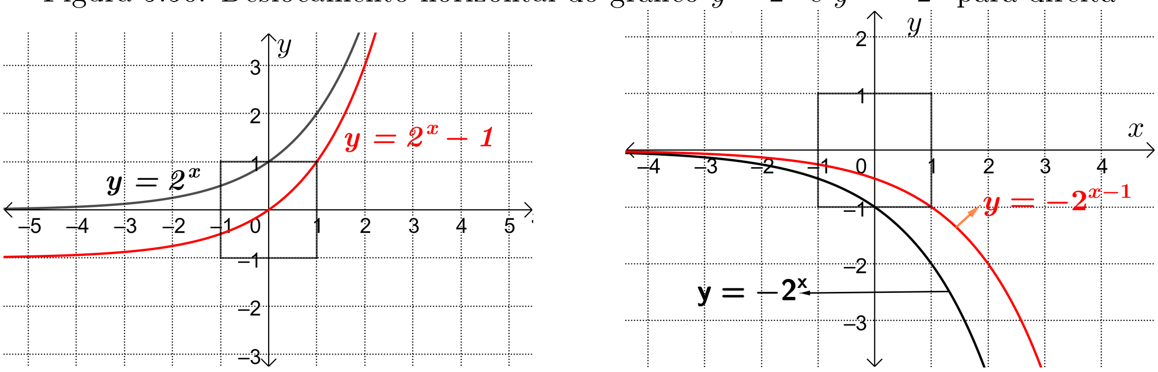
Figura 5.49: Deslocamento horizontal do gráfico $y = 2^x$ e $y = -2^x$ para esquerda



(a) Função $y = 2^{x+1}$ (b) Função $y = -2^{x+1}$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.50: Deslocamento horizontal do gráfico $y = 2^x$ e $y = -2^x$ para direita

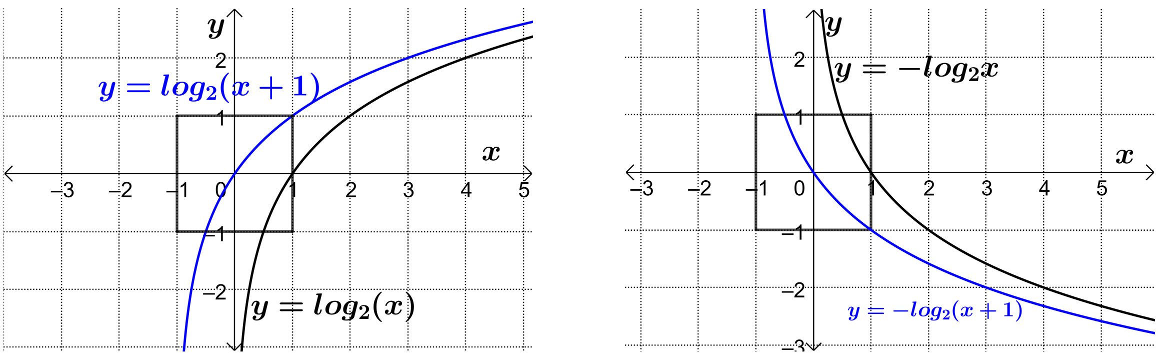


(a) Função $y = 2^{x-1}$ (b) Função $y = -2^{x-1}$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \log_2 x$ **e** $y = -\log_2 x$

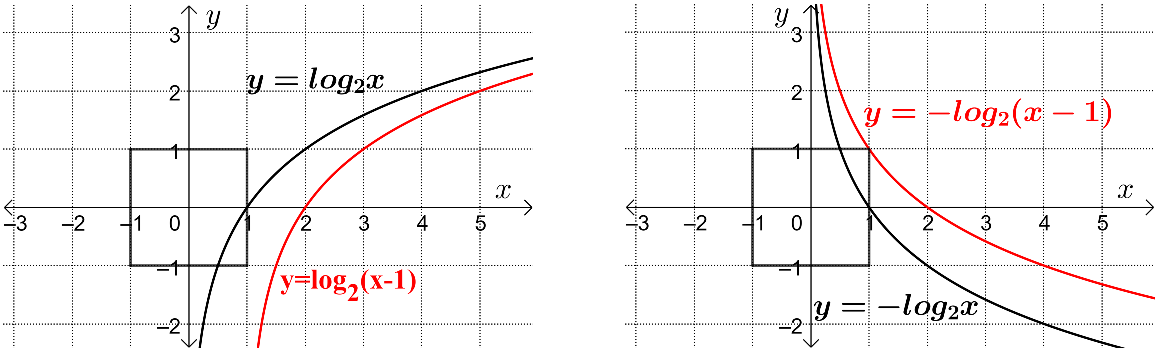
Figura 5.51: Translação horizontal do gráfico $y = \log_2 x$ e $y = -\log_2 x$ para esquerda



(a) Função $y = \log_2(x+1)$ (b) Função $y = \log_2(x+1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.52: Translação horizontal do gráfico $y = \log_2 x$ e $y = -\log_2 x$ para direita

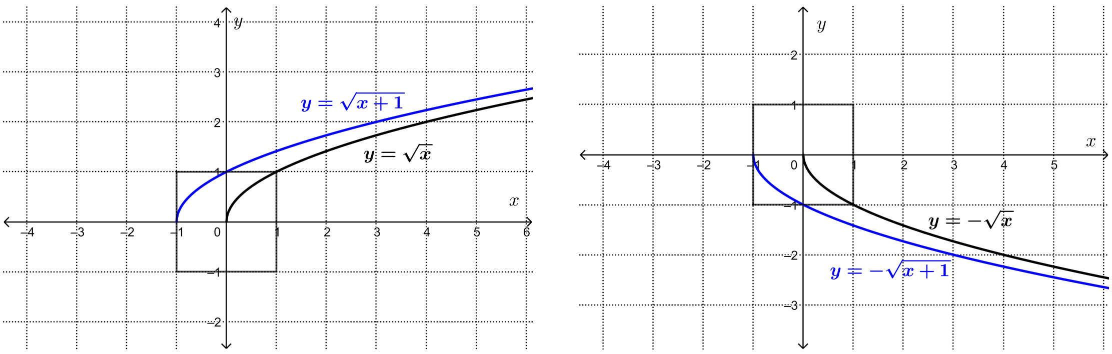


(a) Função $y = \log_2(x-1)$ (b) Função $y = \log_2(x-1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \sqrt{x}$ **e** $y = -\sqrt{x}$

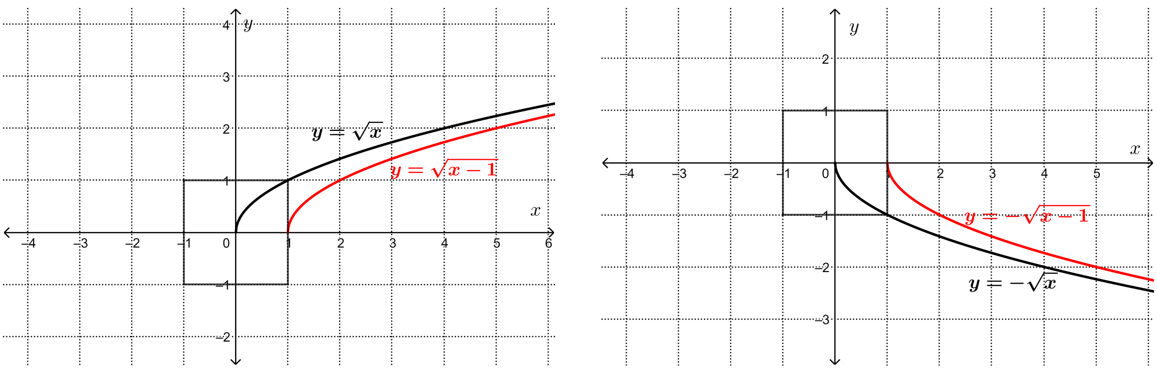
Figura 5.53: Translação do gráfico $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ para esquerda



(a) Função $y = \sqrt{x+1}$ (b) Função $y = -\sqrt{x+1}$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.54: Deslocamento horizontal do gráfico $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ para direita

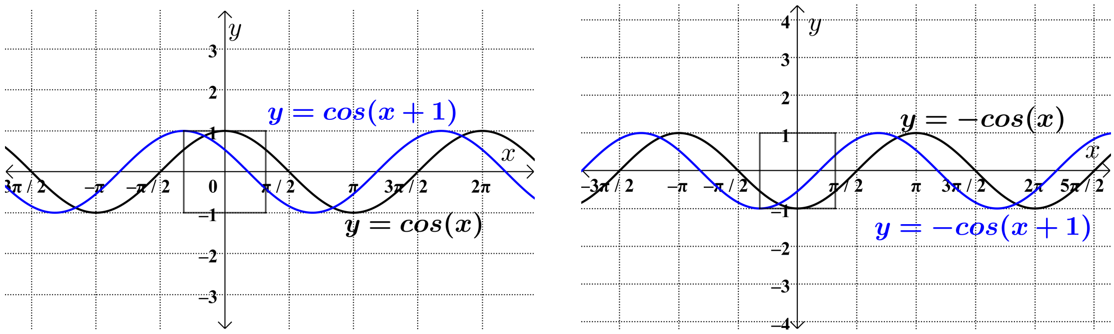


(a) Função $y = \sqrt{x-1}$ (b) Função $y = -\sqrt{x-1}$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \cos(x)$ **e** $y = -\cos(x)$

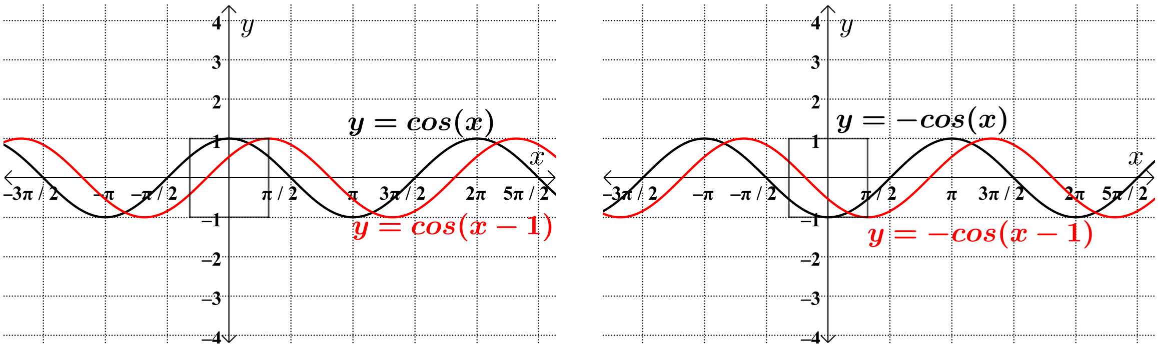
Figura 5.55: Translação horizontal do gráfico $y = \cos(x)$ para esquerda



(a) Função $y = \cos(x) + 1$ (b) Função $y = -\cos(x) + 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.56: Deslocamento horizontal do gráfico $y = -\cos(x)$ para direita

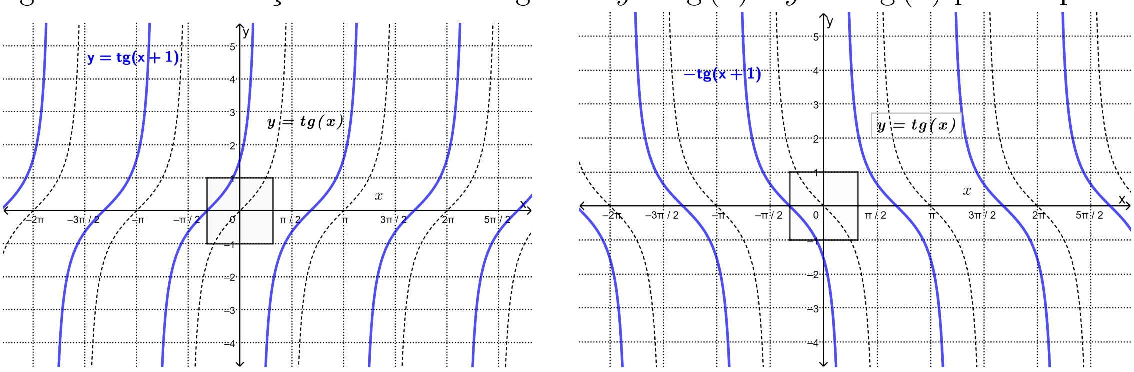


(a) Função $y = \cos(x - 1)$ (b) Função $y = -\cos(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo $y = \text{tg}(x)$ e $y = -\text{tg}(x)$**

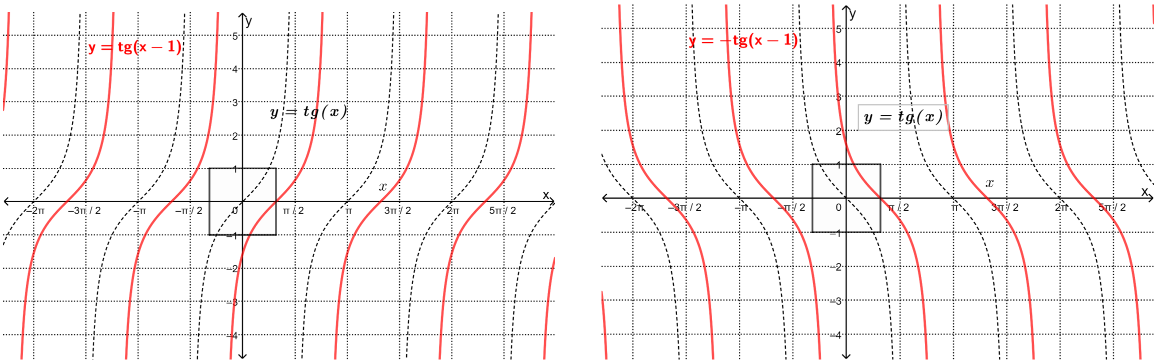
Figura 5.57: Translação horizontal do gráfico $y = \text{tg}(x)$ e $y = -\text{tg}(x)$ para esquerda



(a) Função $y = \text{tg}(x + 1)$ (b) Função $y = -\text{tg}(x + 1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.58: Deslocamento horizontal do gráfico $y = \text{tg}\,(x)$ e $y = -\text{tg}\,(x)$ para direita

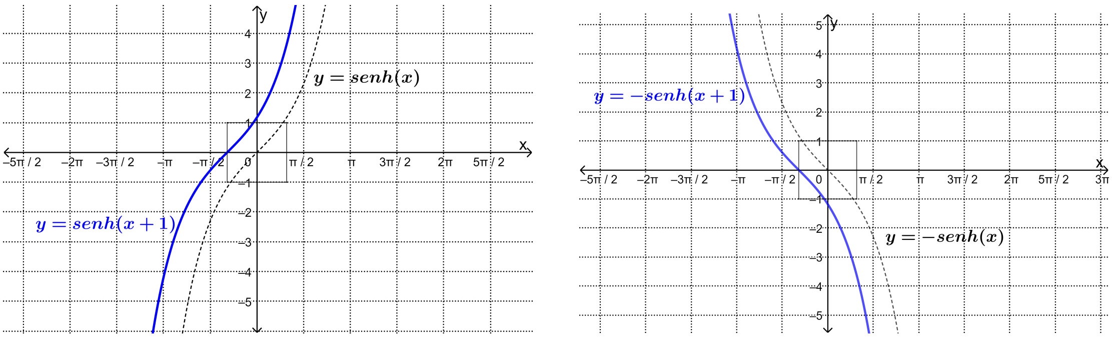


(a) Função $y = \text{tg}\,(x-1)$ (b) Função $y = -\text{tg}\,(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \text{senh}\,(x)$ **e** $y = -\text{senh}\,(x)$

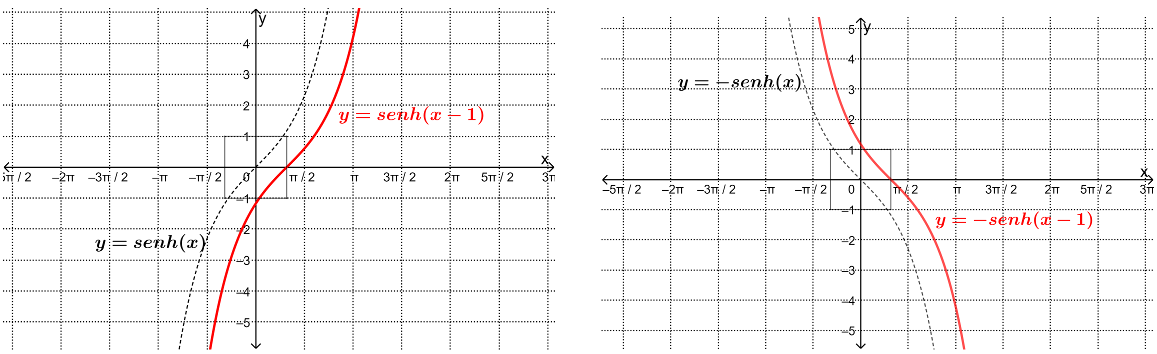
Figura 5.59: Translação horizontal do gráfico $y = \text{senh}\,(x)$ e $y = -\text{senh}\,(x)$ para esquerda



(a) Função $y = \text{senh}\,(x+1)$ (b) Função $y = -\text{senh}\,(x+1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.60: Traslação horizontal do gráfico $y = \text{senh}\,(x)$ e $y = -\text{senh}\,(x)$ para direita

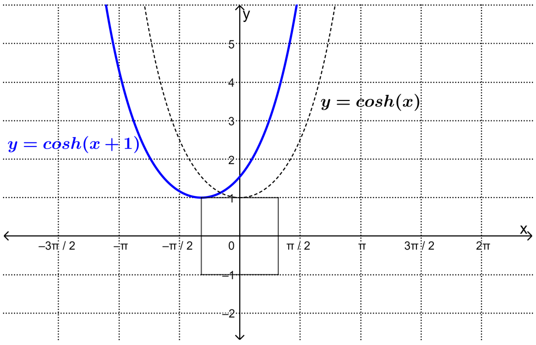


(a) Função $y = \text{senh}\,(x-1)$ (b) Função $y = -\text{senh}\,(x-1)$

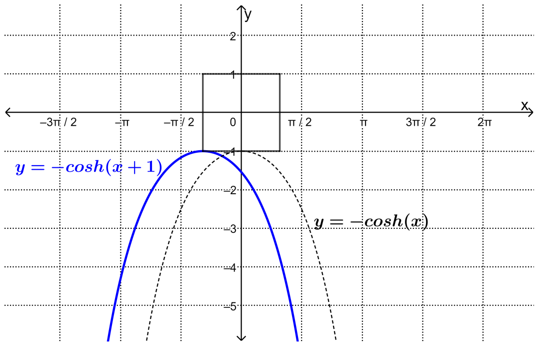
Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \cosh\,(x)$ **e** $y = -\cosh\,(x)$

Figura 5.61: Translação horizontal do gráfico $y = \cosh(x)$ e $y = -\cosh(x)$ para esquerda



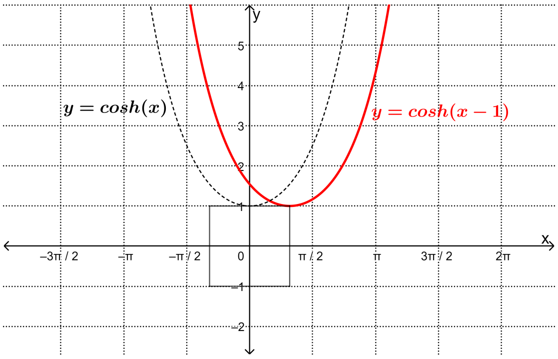
(a) Função $y = \cosh(x+1)$



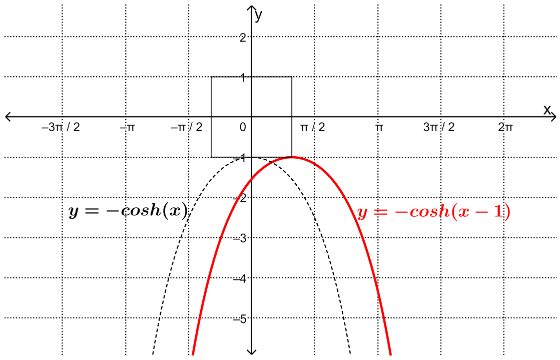
(b) Função $y = -\cosh(x+1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.62: Deslocamento horizontal do gráfico $y = \cosh(x)$ e $y = -\cosh(x)$ para direita



(a) Função $y = \cosh(x-1)$

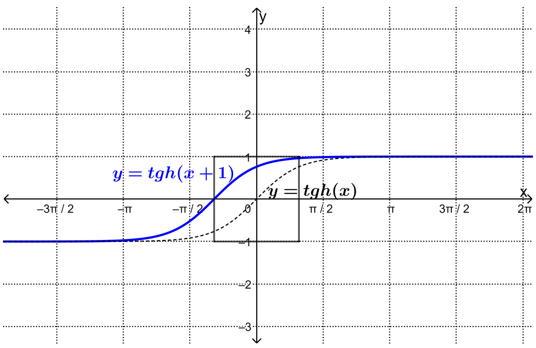


(b) Função $y = -\cosh(x-1)$

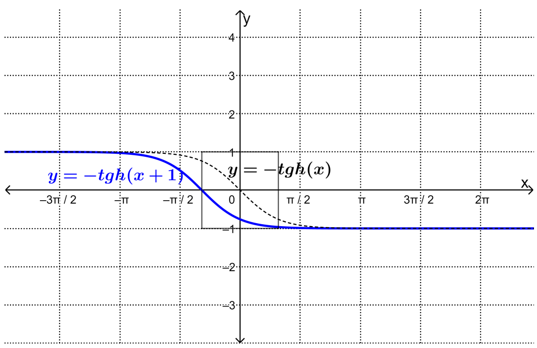
Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

- **Translação do gráfico tipo** $y = \text{tgh}(x)$ **e** $y = -\text{tgh}(x)$

Figura 5.63: Translação horizontal do gráfico $y = \text{tgh}(x)$ e $y = -\text{tgh}(x)$ para esquerda



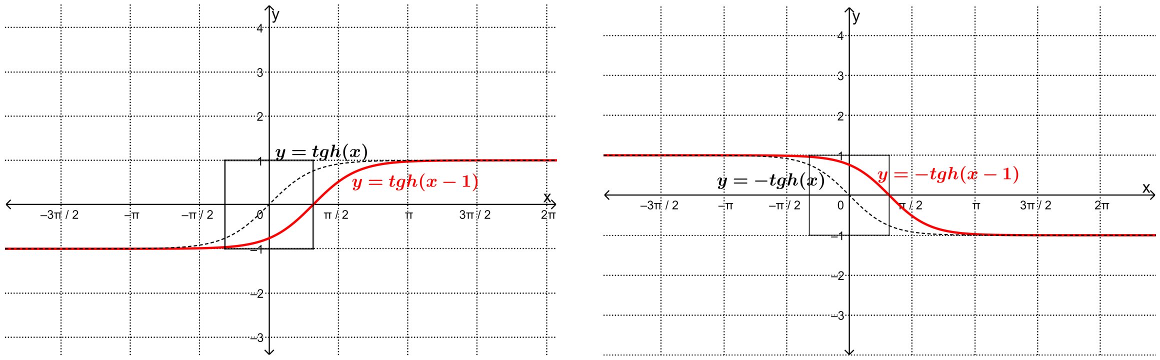
(a) Função $y = \text{tgh}(x+1) + 1$



(b) Função $y = -\text{tgh}(x+1)$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.64: Deslocamento horizontal do gráfico $y = \operatorname{tgh}(x)$ e $y = -\operatorname{tgh}(x)$ para direita



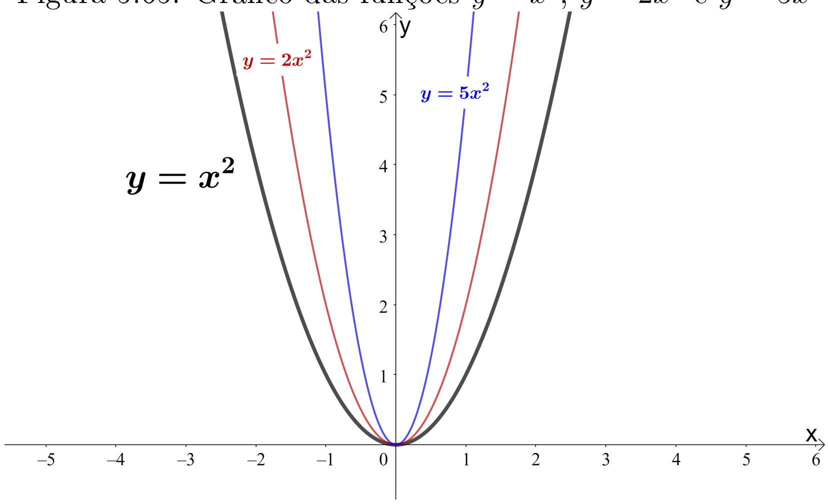
(a) Função $y = \operatorname{tgh}(x-1)$ (b) Função $y = -\operatorname{tgh}(x) - 1$

Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

5.4 Abertura e fechamento

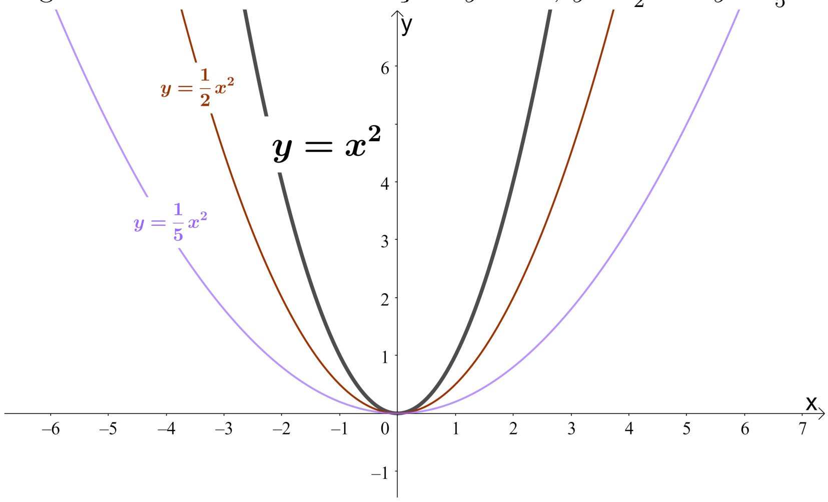
Denominaremos de abertura uma expansão e fechamento uma compressão de um gráfico. Numa função do tipo $y = m + k.f\,(ax+b) = m + k.f\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$, o grafico da função sofre fechamento para $|k| > 0$ e sofre abertura para $0 < |k| < 0$.
Na figura 5.65 que mostra a função $f(x) = kx^2$, temos que para $|k| > 1$, o gráfico sofre fechamento na curva, se aproximando do eixo y e quanto maior for o valor de $|k|$, mais fechada é a curva. Na figura 5.66 que mostra a função $f(x) = kx^2$, temos que para $0 < |k| < 1$, o gráfico sofre expansão horizontal, isto é, uma abertura da curva, se afastando do eixo y e quanto mais próximo de zero for o valor de $|k|$, mais aberta é a curva.

Figura 5.65: Gráfico das funções $y = x^2$, $y = 2x^2$ e $y = 5x^2$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

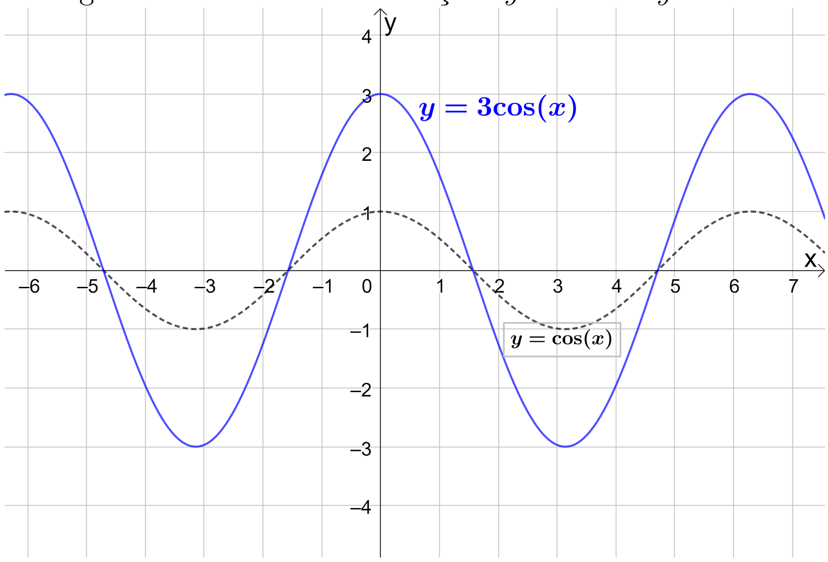
Figura 5.66: Gráfico das funções $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{1}{5}x^2$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

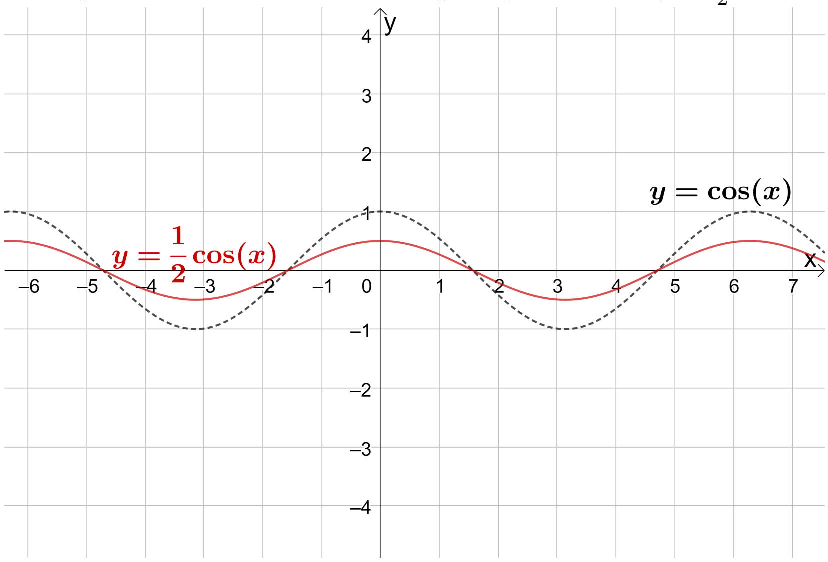
Na figura 5.67 que mostra a função $f(x) = k\text{sen}x$, temos que para $|k| > 1$, no caso $k = 2$ e $k = 5$ o gráfico sofre fechamento na curva, se aproximando do eixo y e quanto maior for o valor de $|k|$, mais fechada é a curva. Na figura 5.68 que mostra a mesma função $f(x) = k\text{sen}x$, temos que para $0 < |k| < 1$, no caso para $k = \frac{1}{2}$ e $k = \frac{1}{5}$ o gráfico sofre expansão horizontal, isto é, uma abertura da curva, se afastando do eixo y e quanto mais próximo de zero for o valor de $|k|$, mais aberta é a curva.

Figura 5.67: Gráfico das funções $y = \cos x$ e $y = 3\cos x$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

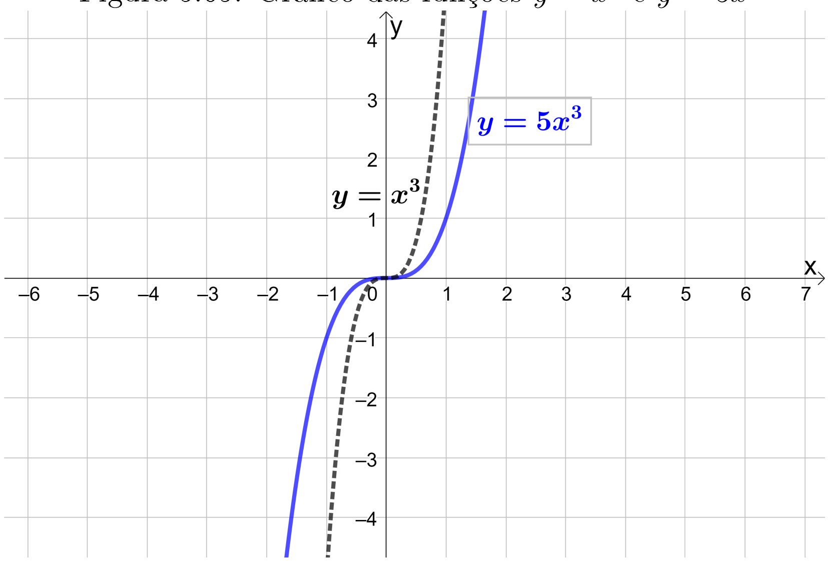
Figura 5.68: Gráfico das funções $y = \cos x$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

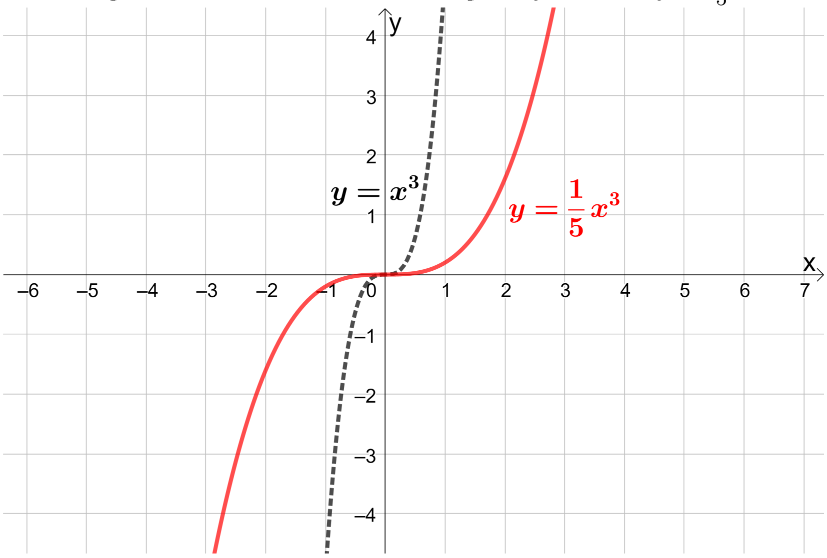
Na figura 5.69 que mostra a função $f(x) = kx^3$, temos que para $|k| > 1$, no caso $k = 2$ e $k = 5$ o gráfico sofre fechamento na curva, se aproximando do eixo y e quanto maior for o valor de $|k|$, mais fechada é a curva. Na figura 5.70 que mostra a função $f(x) = kx^3$, temos que para $0 < |k| < 1$, no caso para $k = \frac{1}{2}$ e $k = \frac{1}{5}$ o gráfico sofre expansão horizontal, isto é, uma abertura da curva, se afastando do eixo y e quanto mais próximo de zero for o valor de $|k|$, mais aberta é a curva.

Figura 5.69: Gráfico das funções $y = x^3$ e $y = 5x^3$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Figura 5.70: Gráfico das funções $y = x^3$ e $y = \frac{1}{5}x^3$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6 Aplicação das técnicas

As plotagens dos gráficos serão iniciadas através das funções canônicos e dual canônicas, que são mais simples e sobre eles serão feitas as translações, fechamento ou abertura necessárias para o esboço final dos gráficos.

6.1 Tipo $y = bx + c$

Em $y = bx + c = b\left(x + \frac{c}{b}\right)$, c é o valor da translação vertical sofrida pelo gráfico da função $y = x$, para cima ou para baixo, isto é, o gráfico terá para cada abcissa x uma ordenada aumentada ou diminuída em c unidades, de acordo com o sinal de c. O gráfico sofrerá translação horizontal de $\left|\frac{c}{b}\right|$ unidades para esquerda se $\frac{c}{b} > 0$ ou direita se $\frac{c}{b} < 0$ dependendo do sinal de $\frac{c}{b}$. O coeficiente b é responsável pela abertura para $0 < |b| < 1$ ou fechamento para $|b| > 1$ do gráfico.
Veja os exemplos:

6.2 Tipo $y = bx + c$

Em $y = bx + c = b\left(x + \frac{c}{b}\right)$, c é o valor da translação vertical sofrida pelo gráfico da função $y = x$, para cima ou para baixo, isto é, o gráfico terá para cada abcissa x uma ordenada aumentada ou diminuída em c unidades, de acordo com o sinal de c. O gráfico sofrerá translação horizontal de $\left|\frac{c}{b}\right|$ unidades para esquerda se $\frac{c}{b} > 0$ ou direita se $\frac{c}{b} < 0$ dependendo do sinal de $\frac{c}{b}$. O coeficiente b é responsável pela abertura para $0 < |b| < 1$ ou fechamento para $|b| > 1$ do gráfico.
Veja os exemplos:

Exemplo 6.1. Seja a função $y = 2x - 1$

Partindo da função canônica $y = x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, através de translação vertical e rotação tendo como centro o ponto $(0, c)$ da função. A reta interceptava os eixos em $(0, 0)$ e passou a interceptar x $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Verifica-se que nesse tipo de função chamada usualmente de função afim, podemos primeiro efetuar a rotação e depois a translação e obteremos o mesmo gráfico.

Podemos construir o gráfico da função $y = 2x - 1$ assim:

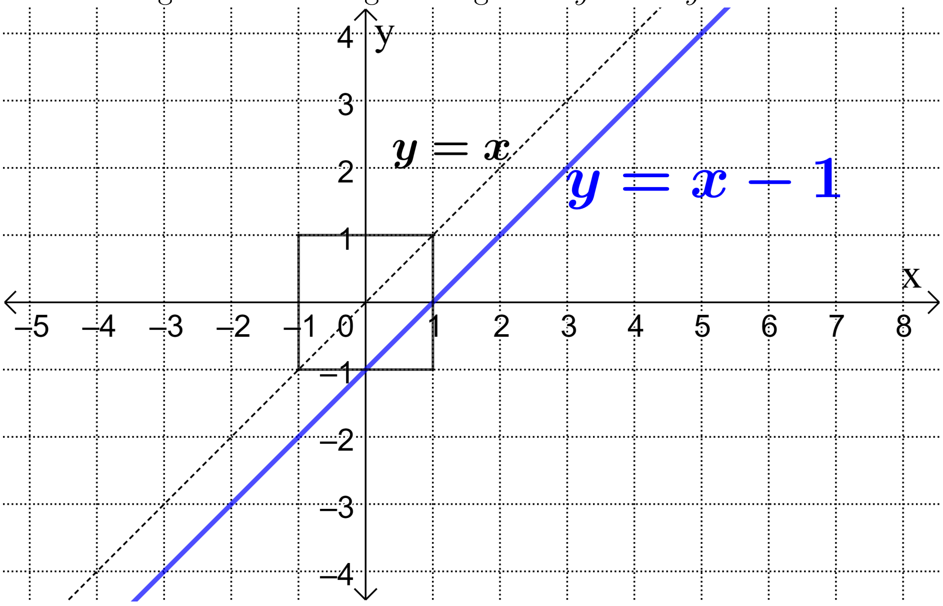
(1) construir o gráfico $y = x$.

(2) translade c unidades para cima ou para baixo, no caso $c = -1$ para baixo em uma unidade, ele passará pelo ponto $(0, -1)$ interceptando y em -1.

(3) girando para esquerda, porque $b > 1$, e tendo como centro o ponto $(0, -1)$, temos o gráfico final da função desejada.

O gráfico da figura 6.1 mostra que a reta sofre uma translação vertical de uma unidade para baixo.

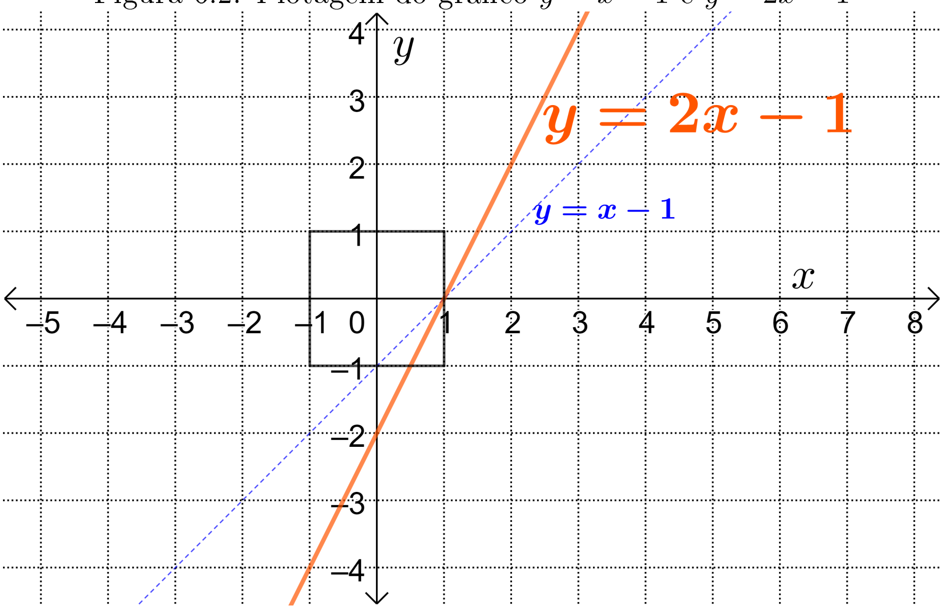
Figura 6.1: Plotagem do gráfico $y = x$ e $y = x - 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Já no gráfico da figura 6.2, a reta gira em torno do ponto $(1, 0)$ havendo assim um fechamento em que os pontos da reta ficam mais próximos de y.

Figura 6.2: Plotagem do gráfico $y = x - 1$ e $y = 2x - 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Exemplo 6.2. Seja a função $y = -3x + 2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)$ em que o gráfico interceptava x em zero e y em zero e passou a interceptar x em $\frac{2}{3}$ e y em -1.

Podemos construir o gráfico da função $y = -3x + 2$ assim:

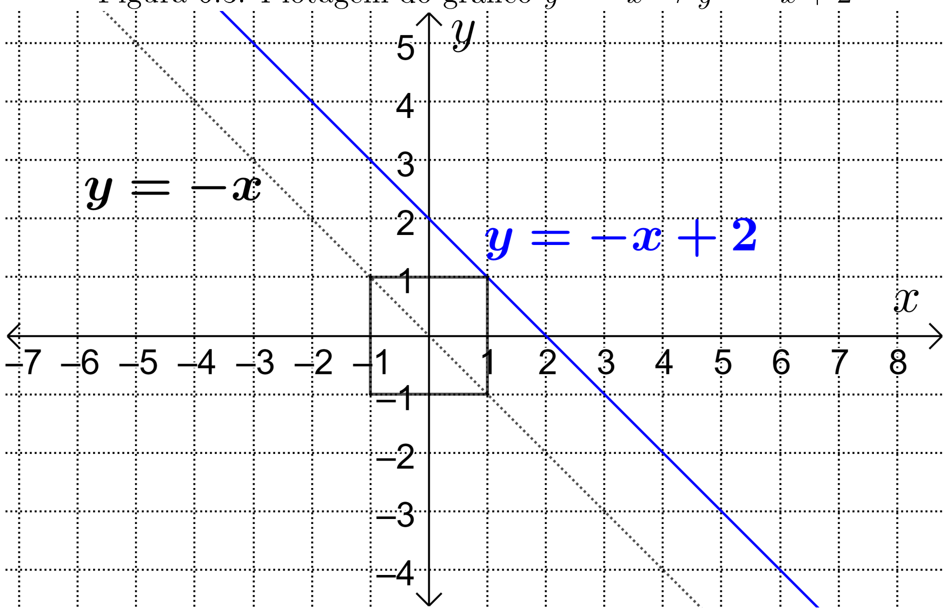
(1) construir o gráfico $y = x$.

(2) translade c unidades para cima ou para baixo. No caso de $c = 2$, translade para cima em duas unidades. Assim, o gráfico passará pelo ponto $(0, 2)$ interceptando y em 2.

(3) girando para direita, porque $b < -1$, e tendo como centro o ponto $(0, 2)$, temos o gráfico final da função desejada.

O gráfico da figura 6.3 mostra que a reta sofre uma translação vertical de duas unidades para cima.

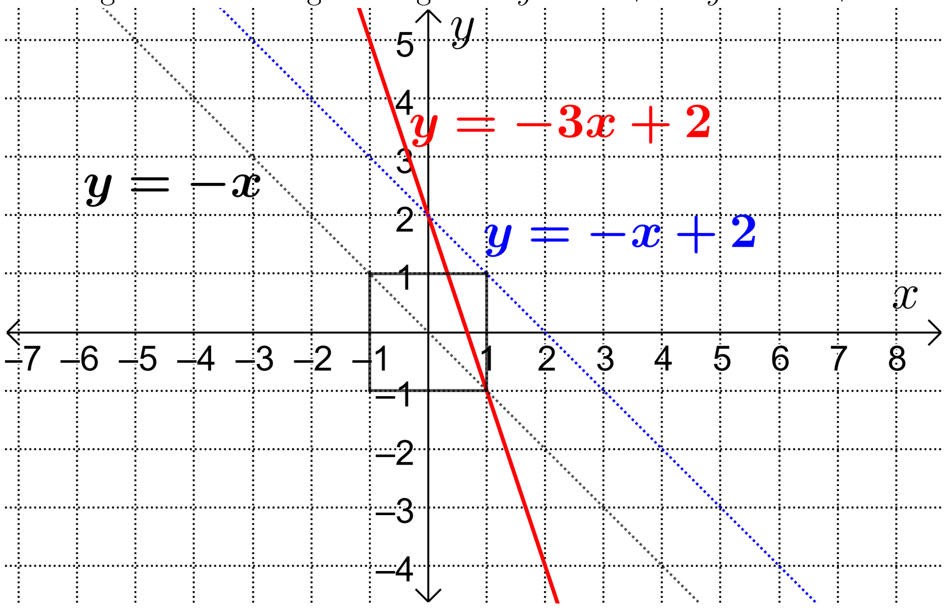
Figura 6.3: Plotagem do gráfico $y = -x \rightarrow y = -x + 2$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

No gráfico da figura 6.4, logo após a reta, a curva gira em torno do ponto $(0,)$ havendo assim um fechamento em que os pontos da reta ficam mais próximos de y.

Figura 6.4: Plotagem do gráfico $y = -x + 2$ e $y = -3x + 2$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6.3 Tipo $y = ax^2 + bx + c$

Funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$ podem ser expressas de forma fatorada:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4ac} \tag{6.1}$$

Adotando-se $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4ac}$, vem:

$$y = a\,(x - h) + k \tag{6.2}$$

Onde k é a translação vertical e h é a translação horizontal e a é responsável pelo fechamento ou abertura do gráfico.

Exemplo 6.3. Podemos construir o gráfico da função quadrática $y = 3x^2 - 2x - 2$ como veremos a seguir:

$$y = 3x^2 - 2x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 2 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$$

. Aplicação das técnicas:

(1) construir o gráfico denominada de parábola $y = x^2$, cujo vértice está sobre a origem $(0, 0)$.

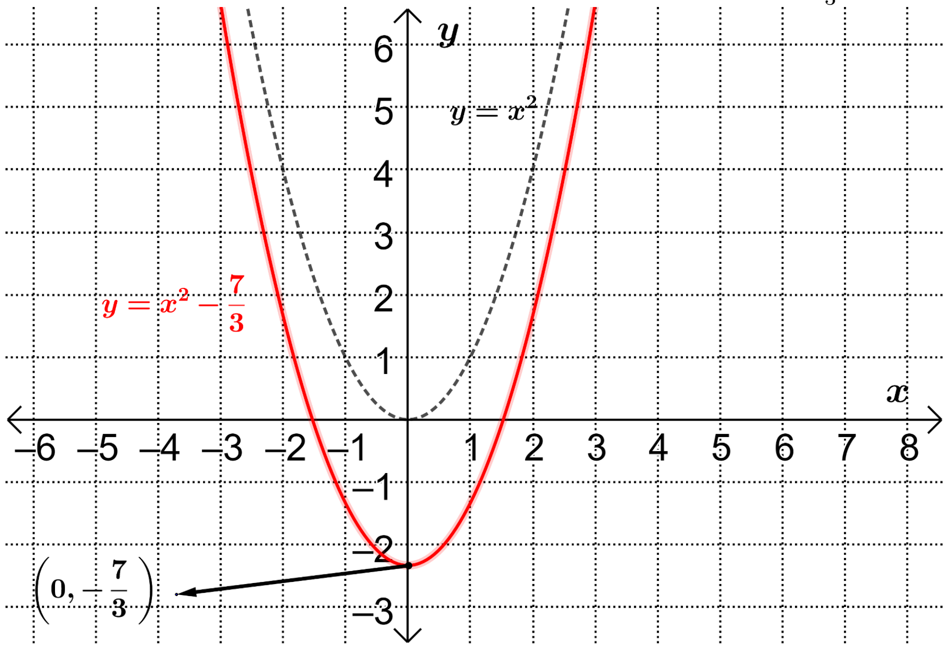
(2) translade c unidades para cima ou para baixo, no caso $c = -2$ para baixo em duas unidades, ele passará pelo ponto $(0, -2)$ interceptando y em -2.

(3) translade $\frac{1}{3}$ para direita, a nova parábola terá vértice no ponto $\left(-\frac{1}{3}, -2\right)$

(4) Finalmente basta agora fechar a curva e obtemos a parábola desejada.

O gráfico da figura 6.5 mostra a translação vertical de duas unidades para baixo, pois $b = -2$.

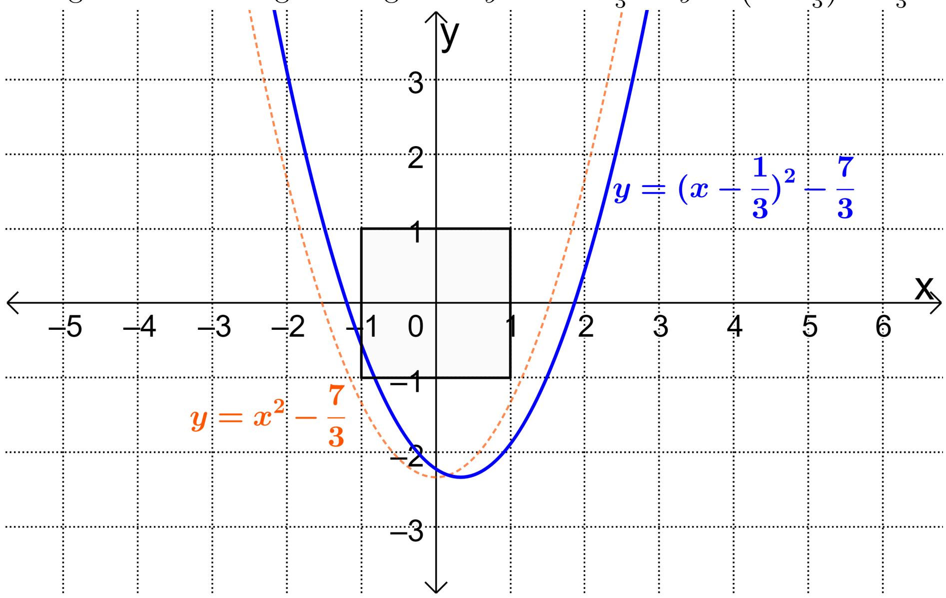
Figura 6.5: Plotagem do gráfico $y = x^2 \rightarrow y = x^2 - \frac{7}{3}$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

No gráfico da figura 6.6, a parábola sofre translação horizontal para direita de $\frac{1}{3}$.

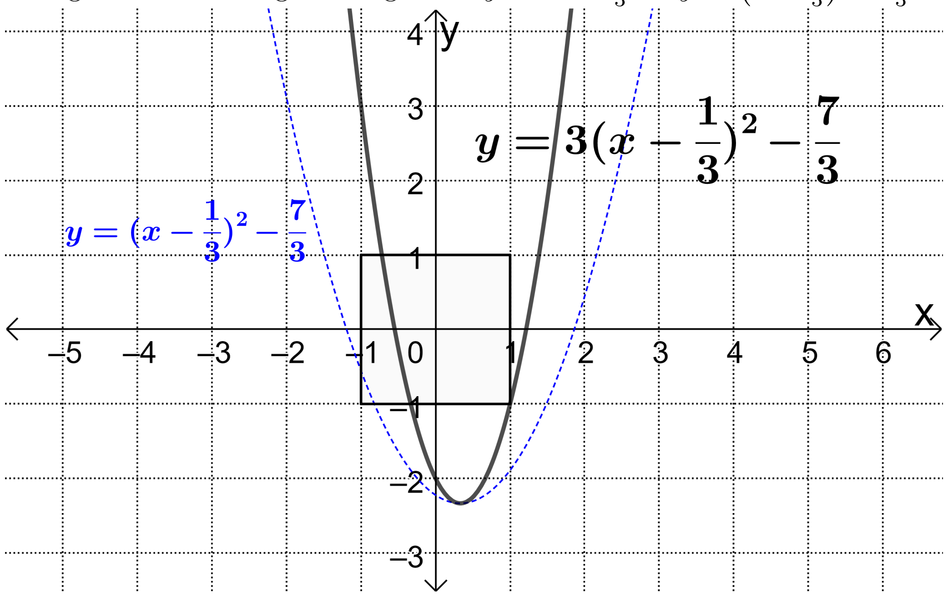
Figura 6.6: Plotagem do gráfico $y = x^2 - \frac{7}{3} \rightarrow y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 6.7 mostra que a reta sofre uma contração horizontal, como consequência um fechamento da curva.

Figura 6.7: Plotagem do gráfico $y = x^2 - \frac{7}{3} \to y = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6.4 Tipo $y = a + b\,\mathrm{sen}\,(cx + d)$

Em $y = a + b\,\mathrm{sen}\,(cx + d)$, para $a \neq 0$ e $c \neq 0$ o gráfico da função $y = \mathrm{sen} x$ sofrerá as seguintes transformações:

(1) translação horizontal para esquerda quando $d > 0$ e para direita quando $d < 0$

(2) translação vertical para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

(3) dilatação horizontal para $|b| > 1$ e compressão para $|0 < b < 1|$

(4) dilatação vertical para $|c| < 1$ e compressão para $|b| > 1$.

Exemplo 6.4. Seja a função $y = 2 + 3\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Partindo da função canônica $y = \mathrm{sen} x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = a + b\mathrm{sen}\,(cx + d)$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 2 + 3\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = \mathrm{sen} x$.

(2) translade a unidades para cima ou para baixo. No caso $a = 2$, para cima em duas unidades.

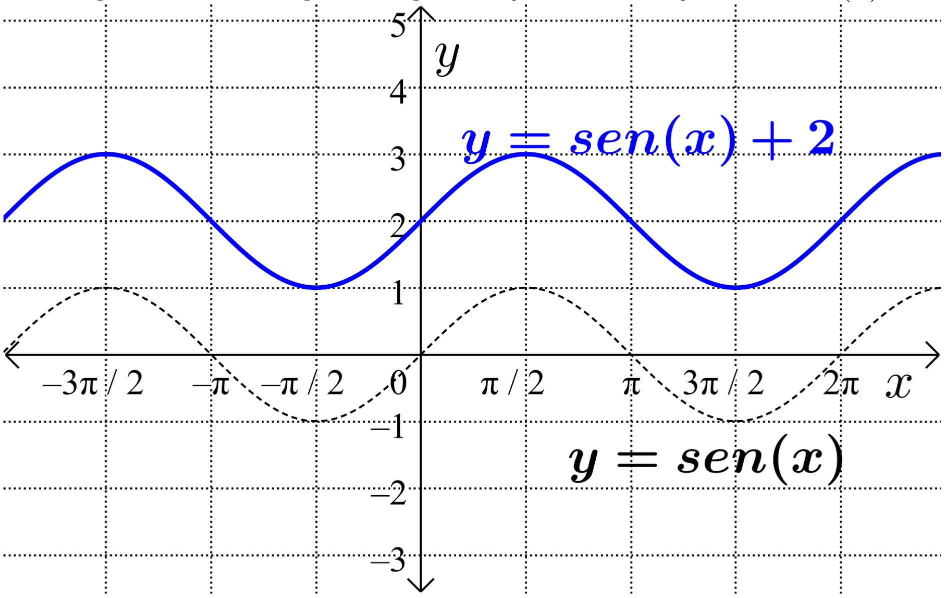
(3) como $c = 2$, o período do gráfico será π, pois o período P é dado por $\left|\frac{2\pi}{c}\right| = \left|\frac{2\pi}{2}\right| = \pi$, isto é, o grafico sofrerá uma compressão horizontal.

(4) o gráfico sofrerá também uma translação horizontal para direita de $\frac{\pi}{4}$.

(5) por último o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $b = 3 > 0$

O gráfico da figura 6.8 mostra que o gráfico denominado de senoide sofre uma translação horizontal de duas unidades para cima.

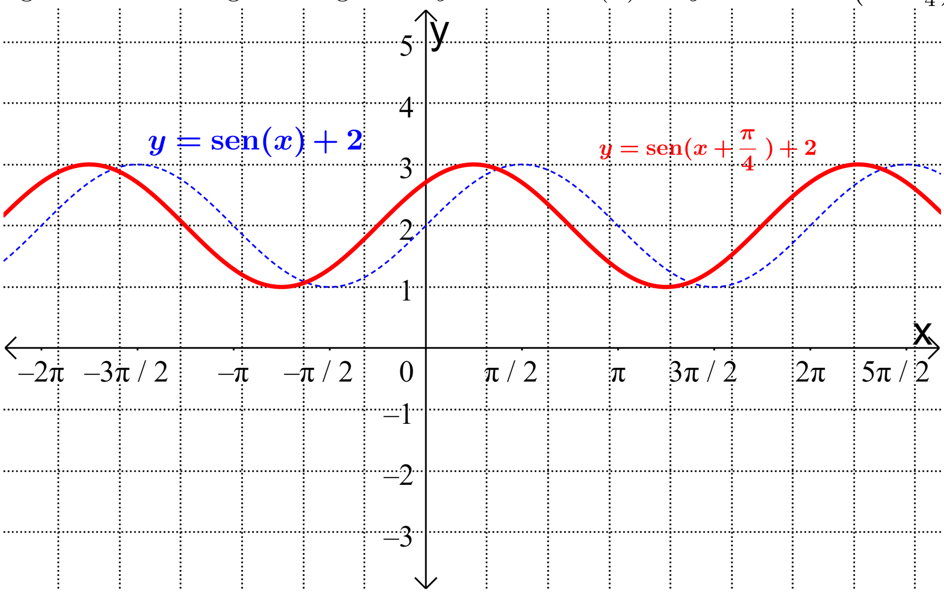
Figura 6.8: Plotagem do gráfico $y = \text{sen}x \to y = 2 + \text{sen}\,(x)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Já no gráfico da figura 6.9, a senoide se desloca para direita em $\frac{pi}{4}$.

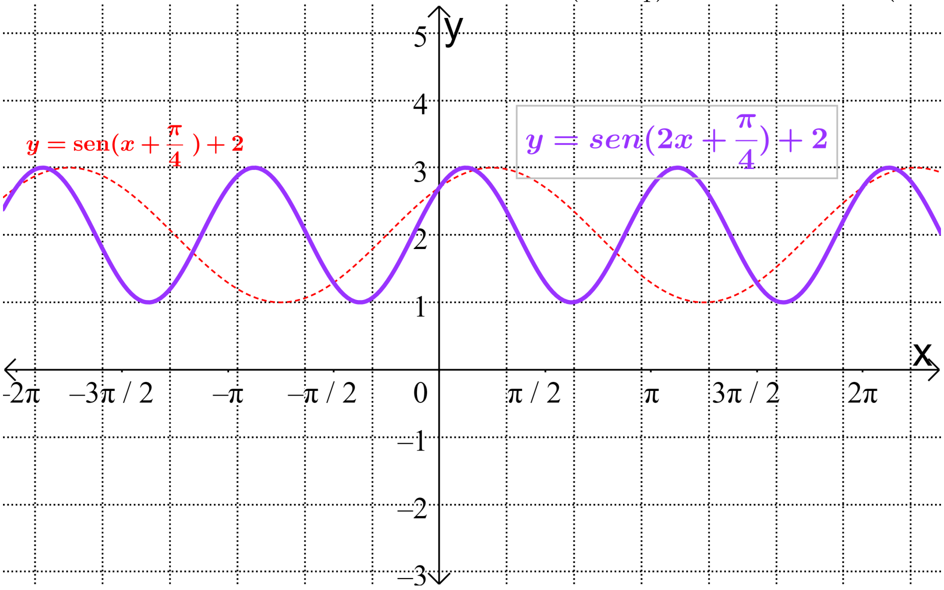
Figura 6.9: Plotagem do gráfico $y = 2 + \text{sen}\,(x) \to y = 2 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

No gráfico da figura 6.10 a senoide sofre uma contração horizontal

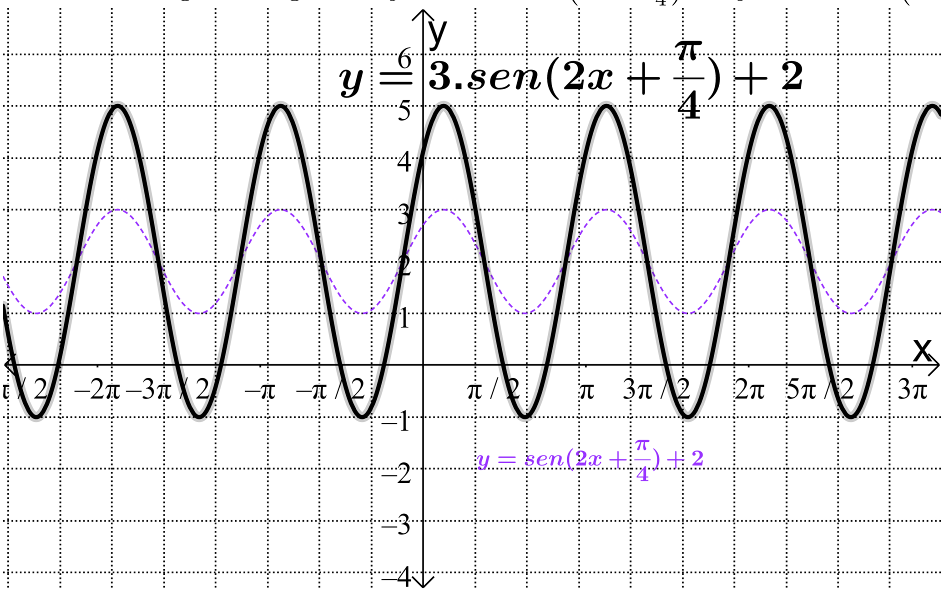
Figura 6.10: Plotagem do gráfico $y = 2 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = 2 + \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Já no gráfico da figura 6.11, a senoide sofre uma dilatação vertical.

Figura 6.11: Plotagem do gráfico $y = 2 + 3\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y = 2 + \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6.5 Tipo $y = a + b\cos(cx + d)$

Em $y = a + b\cos(cx + d)$, para $a \neq 0$ e $c \neq 0$ o gráfico da função $y = \cos x$ sofrerá as seguintes transformações:

(1) translação horizontal em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para esquerda, quando $d > 0$ e para direita quando $d < 0$.

(2) translação vertical para cima, quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

(3) dilatação horizontal para $|b| > 1$ e compressão para $0 < |b| < 1$.

(4) dilatação vertical para $|c| < 1$ e compressão para $|c| > 1$.

Exemplo 6.5. Seja a função $y = 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

Partindo da função canônica $y = \cos x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = 1 + \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = \cos x$.

(2) translade a unidades para cima ou para baixo. No caso $a = 1$, para cima em uma unidade.

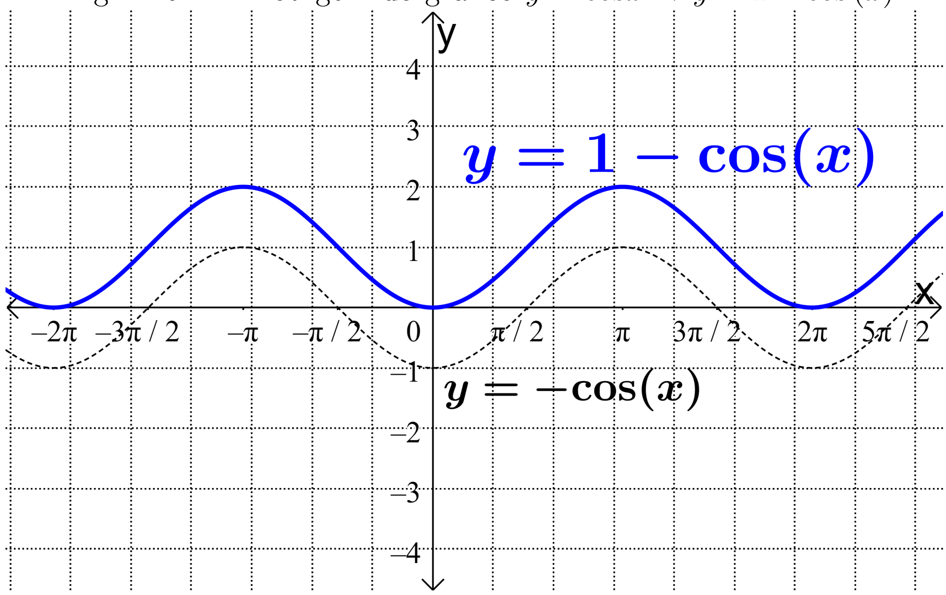
(3) como $c = \frac{1}{2}$, o período do gráfico será $P = \left|\frac{2\pi}{c}\right| = \left|\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\right| = 4\pi$, isto é, o gráfico sofrerá uma dilatação horizontal.

(4) o gráfico sofrerá também uma translação horizontal para direita de π.

(5) por último, o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $|b| = 2$.

A figura 6.12 mostra que o gráfico denominado cossenoide sofre uma translação horizontal de uma unidade para cima.

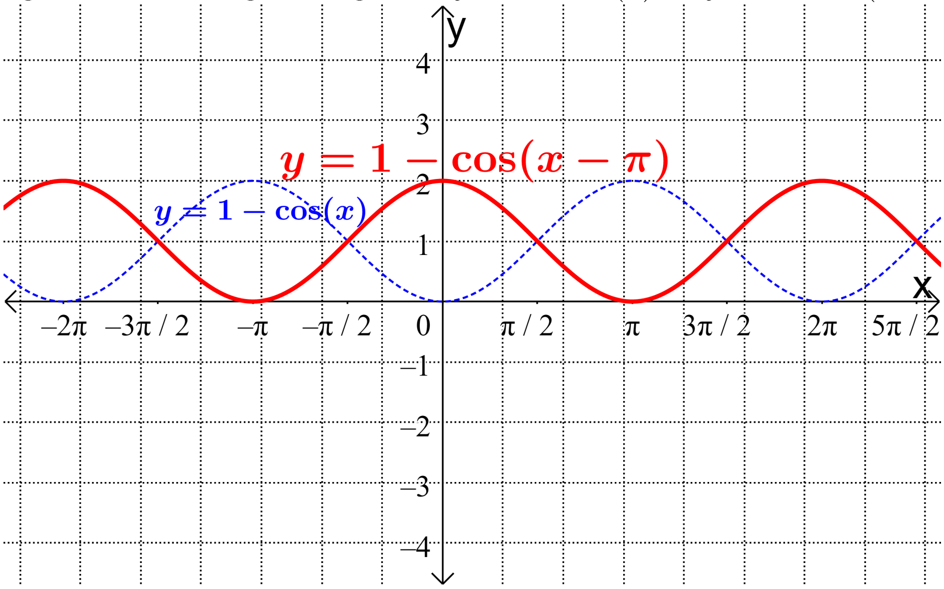
Figura 6.12: Plotagem do gráfico $y = \cos x \to y = 1 - \cos(x)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

No gráfico da figura 6.13, a cossenoide se desloca para direita π unidades.

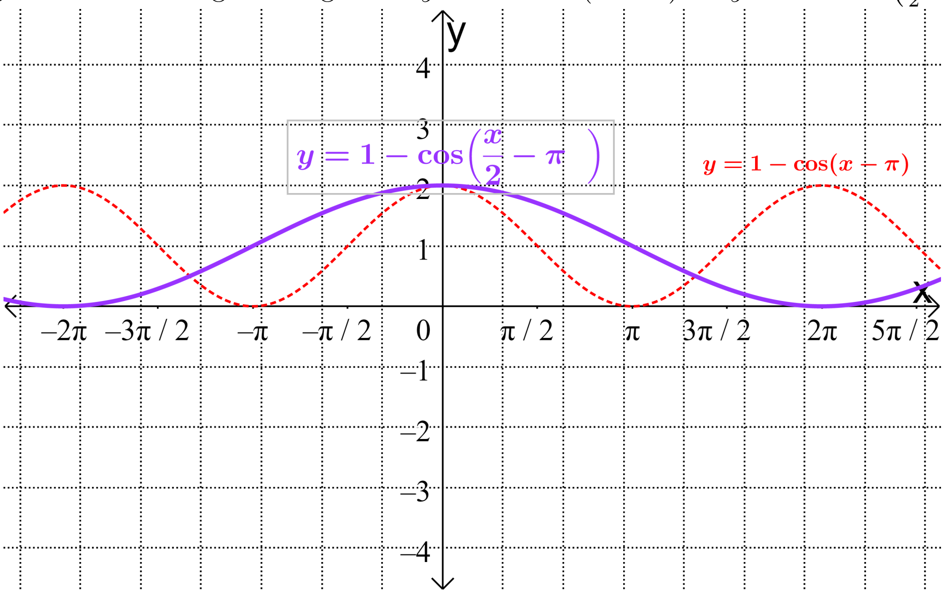
Figura 6.13: Plotagem do gráfico $y = 1 - \cos(x) \rightarrow y = 1 - \cos(x - \pi)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.14, o gráfico sofre uma contração horizontal.

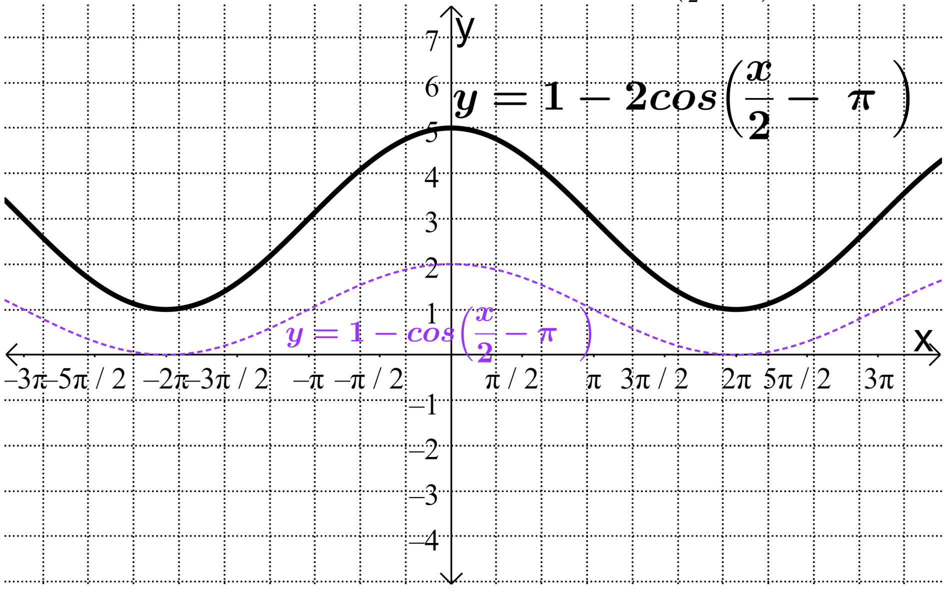
Figura 6.14: Plotagem do gráfico $y = 1 - \cos(x - \pi) \rightarrow y = 1 - \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

No gráfico da figura 6.15, a cossenoide sofre uma dilatação vertical.

Figura 6.15: Plotagem do gráfico $y = 1 - \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) \to y = 1 - 2\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6.6 Tipo $y = a + b\ \log_k (cx + d)$

Em $y = a + b\ \log_k (cx + d) = a + b\ \log_k \left[c\left(x + \frac{d}{c}\right)\right]$, para $1 \neq k > 0$ e $cx + d > 0$ o gráfico da função $y = a + blog_k (cx + d)$ sofrerá as seguintes transformações:

(1) translação horizontal para esquerda de $\left|\frac{d}{c}\right|$ para $\left|\frac{d}{c}\right| > 1$ unidades ou translação para direita de $\left|\frac{d}{c}\right|$ para $|c| < 1$.

(2) translação vertical para cima, quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

(3) dilatação vertical, isto é, fechamento da curva para $|b| > 1$ ou compressão vertical, isto é, abertura da curva para $0 < |b| < 1$.

(4) dilatação vertical, isto é, fechamento da curva para $|c| > 1$ ou compressão vertical, isto é, abertura da curva para $0 < |c| < 1$.

Exemplo 6.6. Seja a função $y = 2\log_2 (2x + 3) - 1$

Partindo da função canônica $y = \log_2 x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = 2\log_2 (2x + 3) - 1 = 2\log_2 \left[2\left(x + \frac{3}{2}\right)\right] - 1$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 2\log_2 (2x + 3) - 1$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = \log_2 x$.

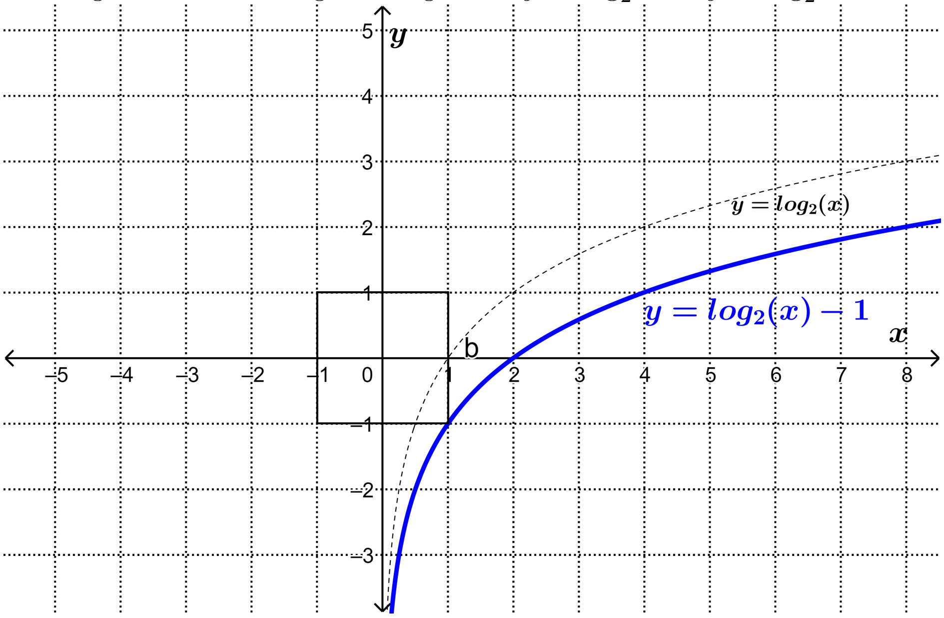
(2) translade a unidades para cima ou para baixo. No caso $a = -1$, para baixo em uma unidade.

(3) translade $\left|\frac{d}{c}\right| = \frac{3}{2}$ para esquerda, pois $d > 0$

(4) por último, o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $|b| = 2$, e como consequência um fechamento da curva.

A figura 6.16 mostra que o gráfico sofre uma translação horizontal de uma unidade para baixo.

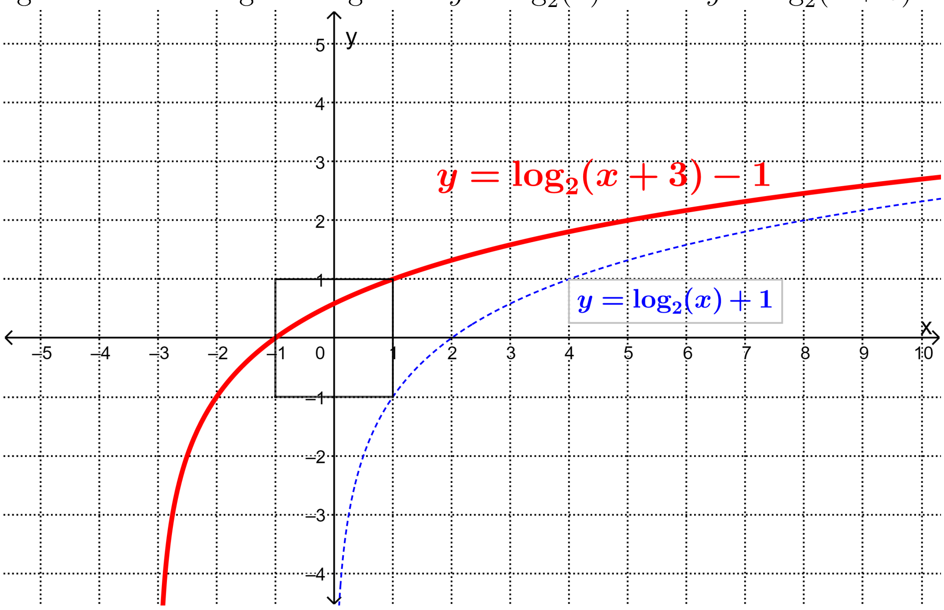
Figura 6.16: Plotagem do gráfico $y = \log_2 x \rightarrow y = \log_2 x - 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.17 o gráfico se desloca três unidades para esquerda.

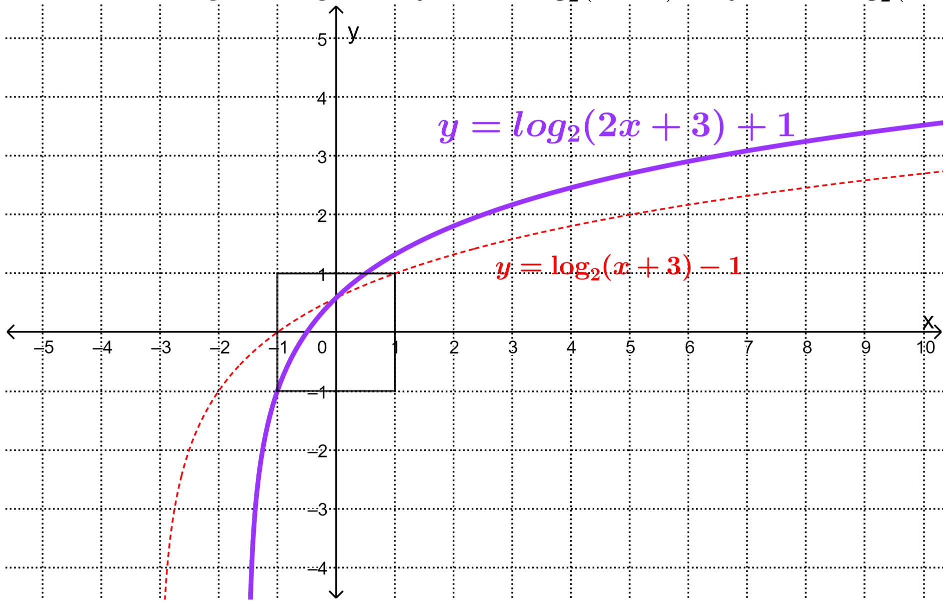
Figura 6.17: Plotagem do gráfico $y = \log_2(x) - 1 \rightarrow y = \log_2(x+3) - 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.18, o gráfico sofre uma contração horizontal e também um fechamento da curva, isto é, se aproximando do eixo$y$.

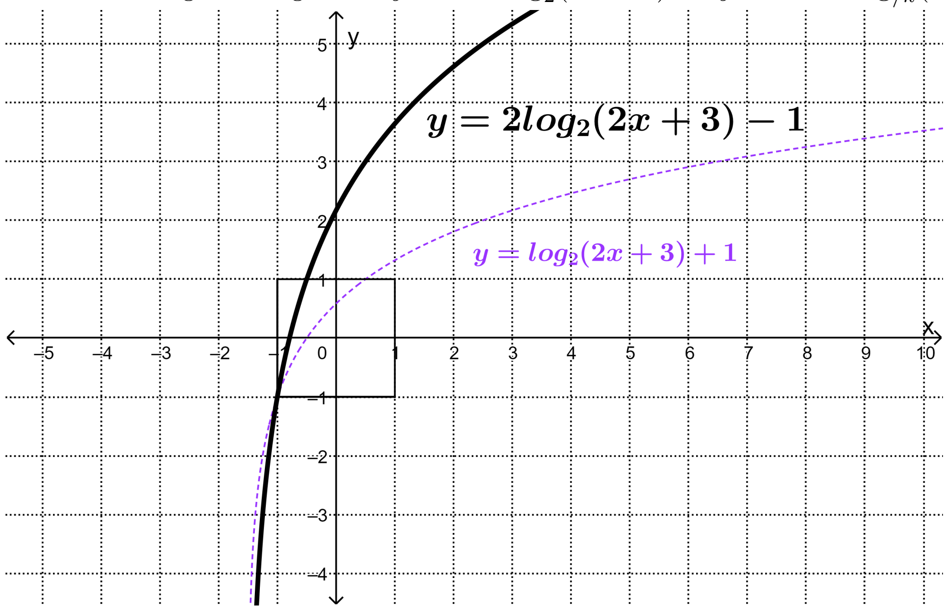
Figura 6.18: Plotagem do gráfico $y = 2 - \log_2(x-1) \rightarrow y = 2 - \log_2(2x-1)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.19, o gráfico sofre um fechamento da curva, isto é, se aproximando do eixo$y$

Figura 6.19: Plotagem do gráfico $y = 2 - \log_2(2x-1) \rightarrow y = 2 - 2\log_{/k}(2x-1)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Exemplo 6.7. Seja a função $y = 2 - 2\log_2(2x-1)$

Partindo da função canônica $y = -\log_2 x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = 2 - 2\log_2(2x-1) = 2 - 2\log_2\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 2 - 2\log_2(2x-1)$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = -\log_2 x$.

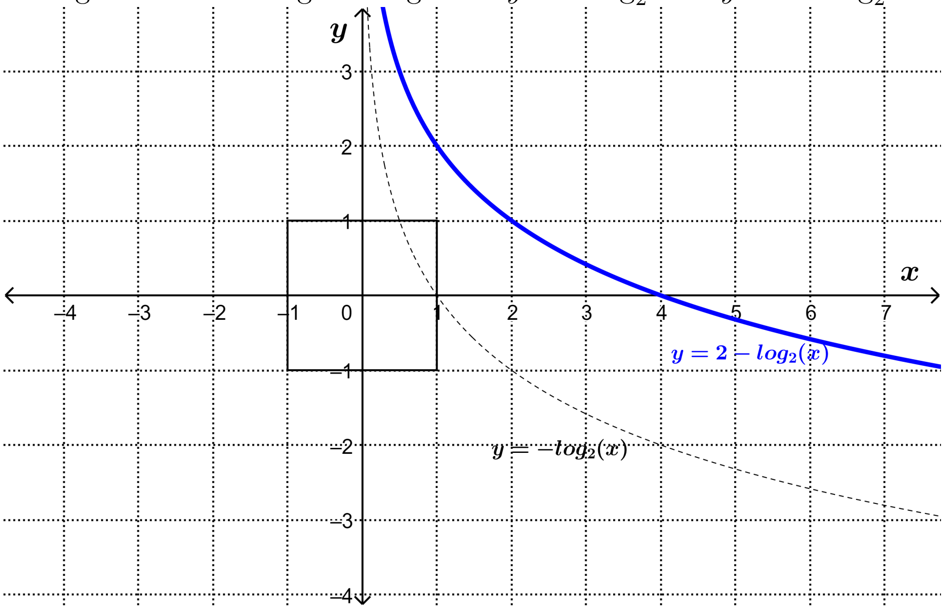
(2) translade a unidades para cima ou para baixo, no caso $a = -1$ para baixo em uma unidade.

(3) translade $\left|\frac{d}{c}\right| = \frac{1}{2}$ para esquerda, pois $d > 0$

(4) por último, o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $|b| = 2$, e como consequência um fechamento da curva.

A figura 6.20 mostra que o gráfico sofre uma translação horizontal de uma unidade para cima.

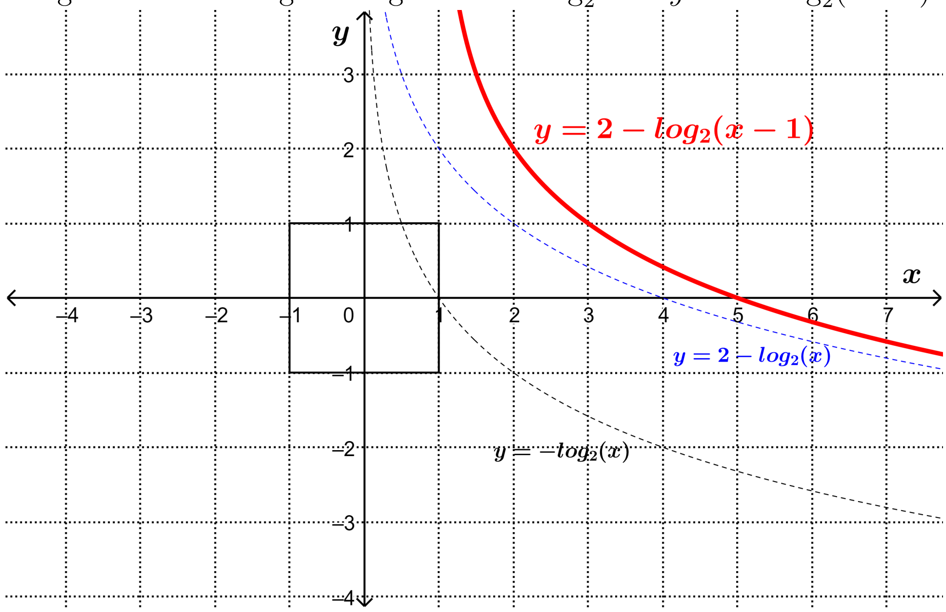
Figura 6.20: Plotagem do gráfico $y = -\log_2 x \to y = 2 - \log_2 x$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.21, o gráfico se desloca para direita 2π unidades.

Figura 6.21: Plotagem do gráfico $2 - \log_2 x \to y = 2 - \log_2(x - 1)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Exemplo 6.8. Seja a função $y = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}}(2x - 2)$

Partindo da função canônica $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}}(2x - 2) = y = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}}[2(x - 1)]$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}}(2x - 2)$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

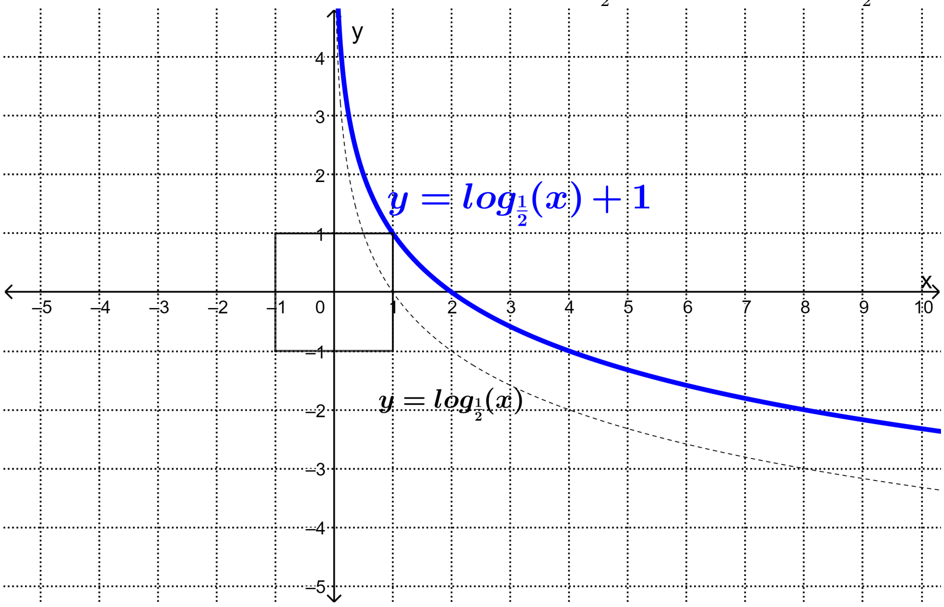
(2) translade a unidades para cima ou para baixo, no caso $a = 1$ para cima em uma unidade.

(3) translade $\left|\frac{d}{c}\right| = 1$ para direita, pois $d < 0$

(4) por último, o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $|b| = 2$, e também sofrerá outra dilatação vertical, pois $|c| = 2$ e como consequência um fechamento da curva.

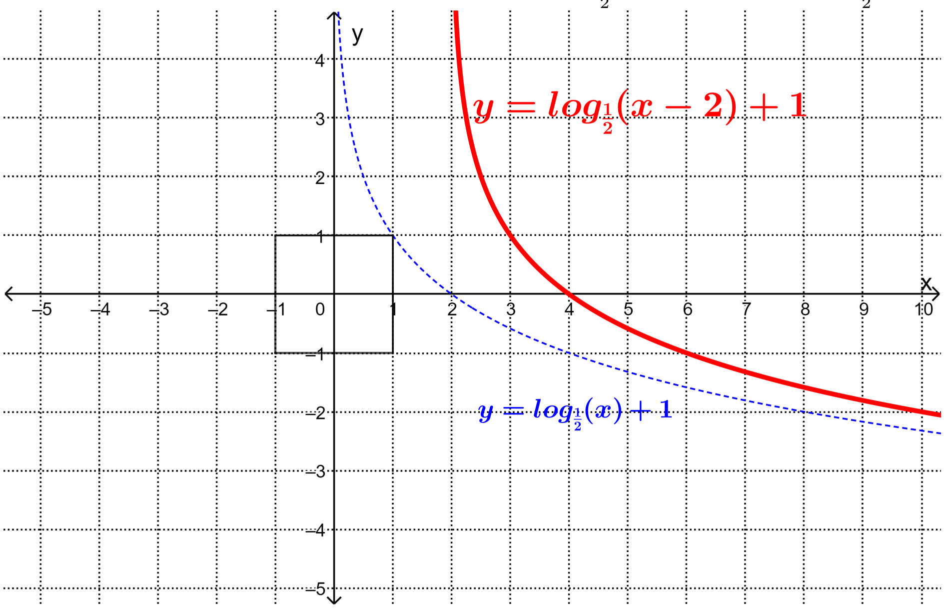
A figura 6.22 mostra que o gráfico sofre uma translação horizontal de uma unidade para cima. Na figura 6.23, o gráfico se desloca para direita 2π unidades.

Figura 6.22: Plotagem do gráfico $y = \log_{\frac{1}{2}}(x) \to y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

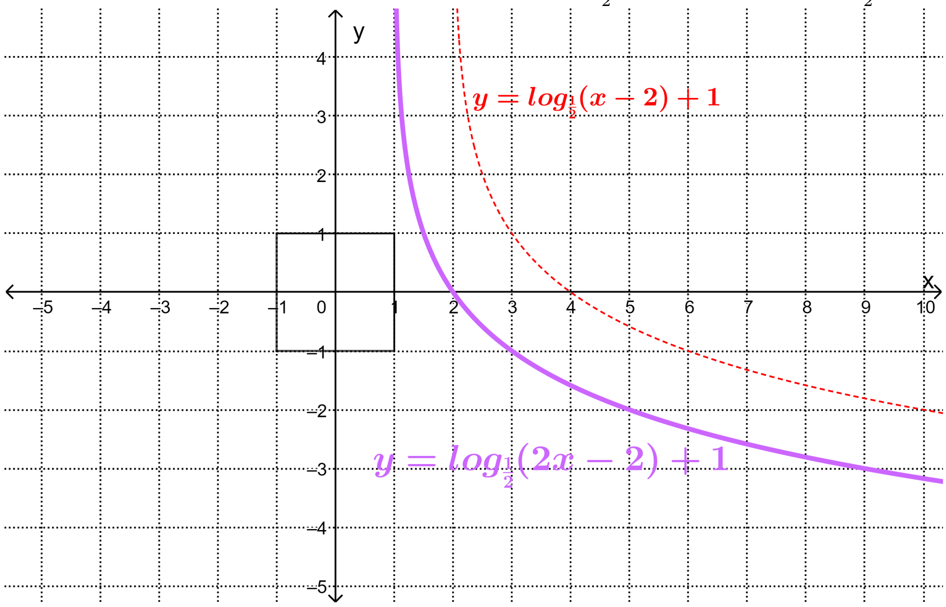
Figura 6.23: Plotagem do gráfico $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x) \to y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.24, o gráfico sofre uma contração horizontal.

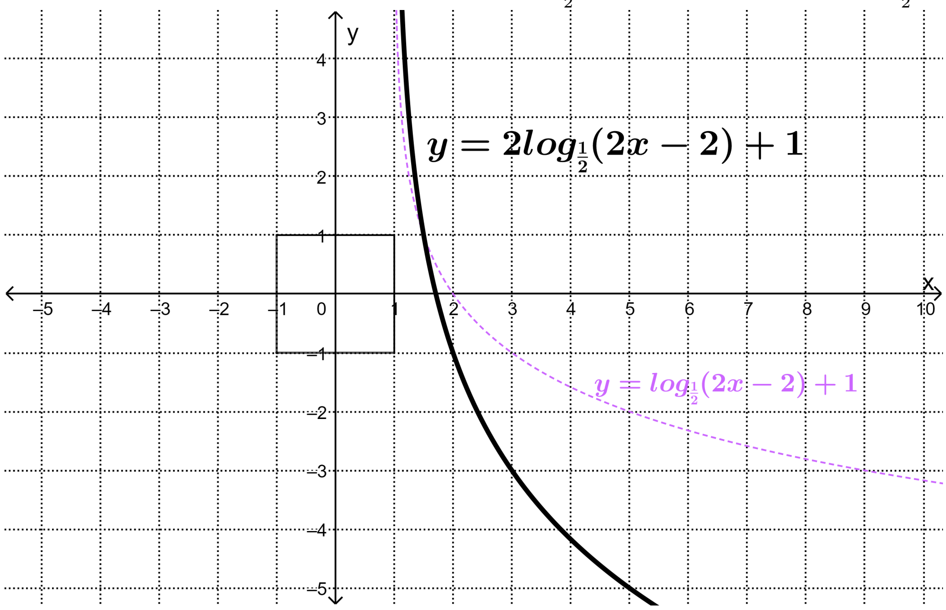
Figura 6.24: Plotagem do gráfico $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x) \to y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

O gráfico da figura 6.25 sofre uma compressão se aproximando do eixo y no terceiro quadrante.

Figura 6.25: Plotagem do gráfico $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \to y = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

6.7 Tipo $y = ka^{(bx+c)} + m$

Exemplo 6.9. Seja a função $y = ka^{(bx+c)} + m = ka^{b\left[\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]} + m$

Partindo da função canônica $y = a^x$, podemos construir facilmente o gráfico da função $y = ka^{(bx+c)} + m = ka^{\left[b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right]} + m$, através de translação vertical ou horizontal, além de dilatação ou compressão vertical e horizontal.

Podemos construir o gráfico da função $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} + 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right]} + 1$ da seguinte maneira:

(1) construir o gráfico $y = 2^x$.

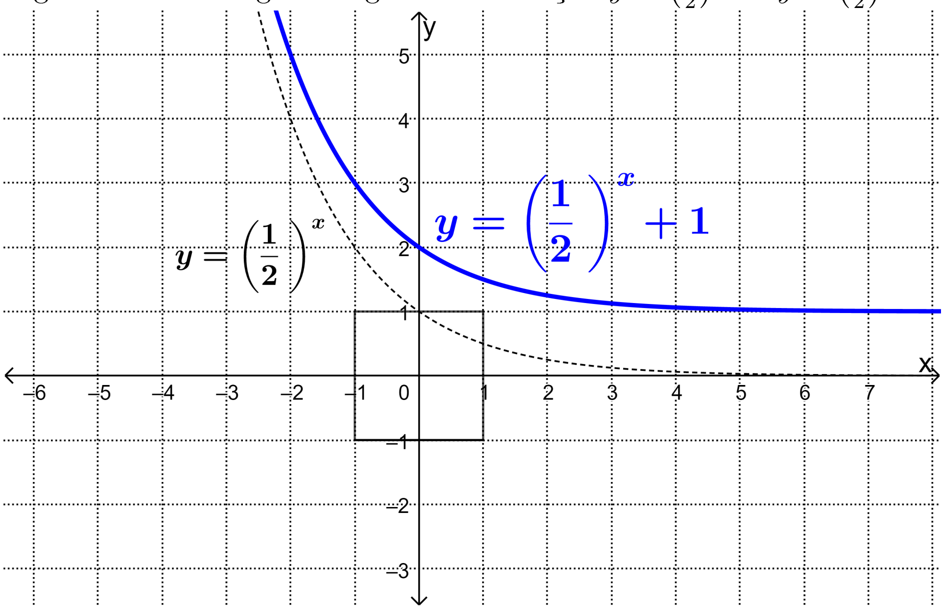
(2) translade a unidades para cima ou para baixo. No caso $a = 1$, para cima em uma unidade.

(3) translade $\left|\frac{d}{c}\right| = 1$ para direita, pois $d < 0$

(4) por último, o gráfico sofrerá uma dilatação vertical, pois $|b| = 2$, e também sofrerá outra dilatação vertical, pois $|c| = 2$ e como consequência um fechamento da curva.

A figura 6.26 mostra que o gráfico sofre uma translação horizontal de uma unidade para cima.

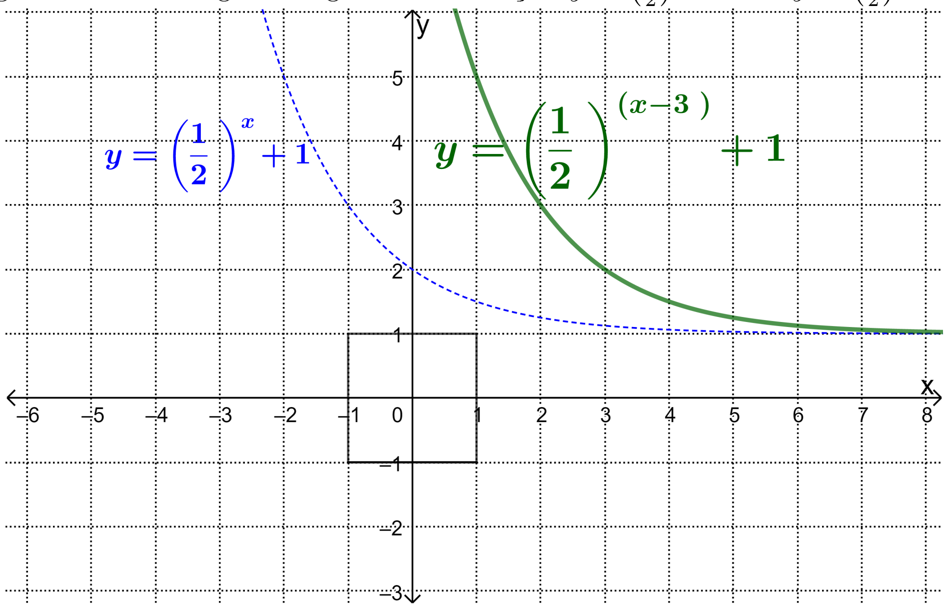
Figura 6.26: Plotagem do gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.27, o gráfico se desloca para direita duas unidades.

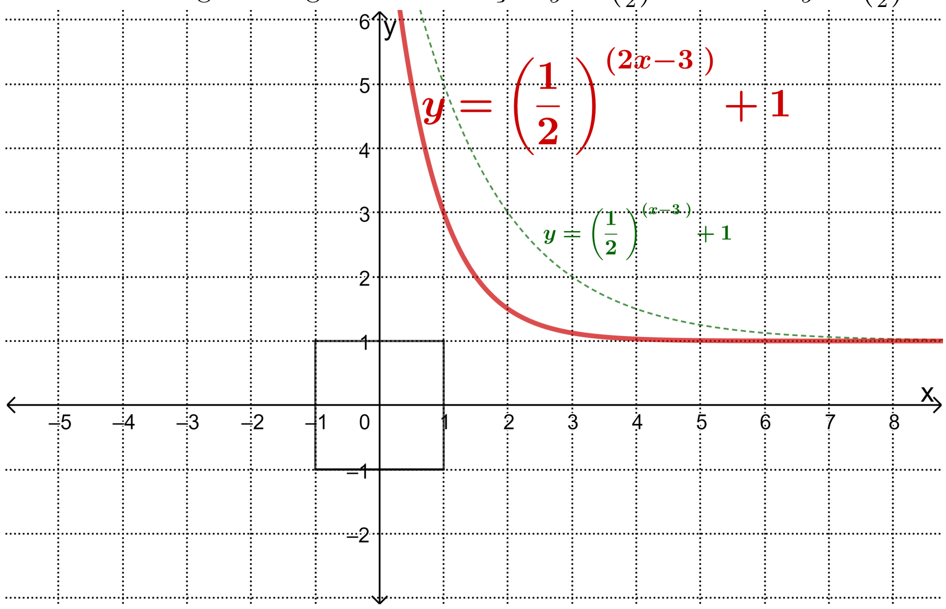
Figura 6.27: Plotagem do gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Na figura 6.28, o gráfico sofre uma contração horizontal.

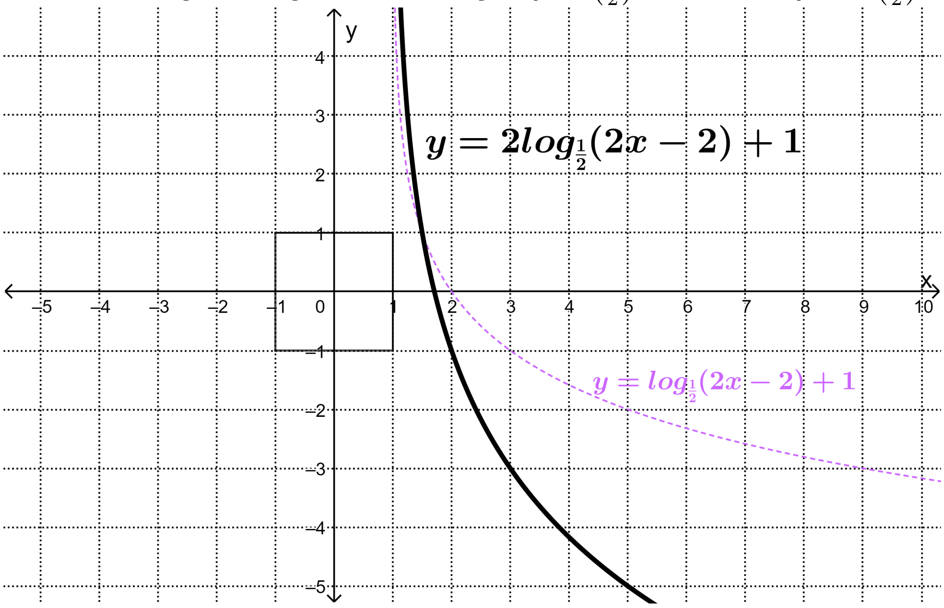
Figura 6.28: Plotagem do gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 1 \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} + 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Já na figura 6.29, o gráfico sofre uma contração.

Figura 6.29: Plotagem do gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} + 1 \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} + 1$



Fonte: Gráfico plotado no GeoGebra pelo autor

Desse modo temos estudado a técnica através de exemplos.

7 Considerações finais

O presente trabalho propôs um método de construção de gráfico de funções, destinado aos professores de matemática do Ensino Médio. Para tanto, foram apresentados os conceitos de conjuntos, funções, funções canônicas e dual canônicas, quadrado mágico e plotados os gráficos destas funções, que foram transformados através de translações, fechamento ou abertura dos mesmos.

Conforme apresentado na Introdução, a motivação deste estudo se deu através da percepção de que os alunos de Ensino Básico possuem uma enorme dificuldade na aprendizagem do conceito de funções e no esboço de seus gráficos. Devido à escassez de tempo e à abrangência do assunto, as escolas tendem a abordar a criação de gráficos de função de uma maneira muito apressada. Esse ritmo de ensino não proporciona ao aluno e ao professor a oportunidade de trabalhar o assunto de uma forma mais aprofundada. Além disso, os livros didáticos oferecidos nas escolas utilizam a construção gráfica por meio de tabelas, método não utilizado nesse trabalho.

Dessa forma, mesmo que o tema já tenha sido abordado outras vezes, esse trabalho complementa os outros, uma vez que ele reúne várias técnicas fundamentais para criação de gráficos de maneira prática. Assim, é possível obter-se um esboço de um gráfico conhecendo apenas sua lei de formação.

Vale ressaltar que este trabalho não foi desenvolvido para abranger todo universo de funções, uma vez que este universo é enorme. O principal intuito do estudo, foi possibilitar uma noção básica de gráfico de funções a quem está lendo. Sendo assim, há a possibilidade de que outros pesquisadores deem continuidade ao estudo, principalmente em tópicos mais complexos como abertura e fechamento de gráfico.

Espero tenha tido uma boa leitura e que esta técnica possa ser aplicada, principalmente, no ensino básico e nos primeiro anos do ensino superior.

Referências

[1] LIMA, E.Lages. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 3. ed. São Paulo: EDITORA ÁTICA, 1976.

[2] LIMA, E. LAGES. *Cálculo: Análise real*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[3] RIBEIRO, J. *Metemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*. 1. ed. São Paulo: EDITORA SCIPIONE, 2019.

[4] AVILA, J.A.J. e FREITAS, M. T. M. *Introdução ao Cálculo:Cálculo*. São João Del Rei: IMPA, 2006.

[5] WIKIPÉDIA. *Wikipédia: A enciclopédia livre*. Verbetes diversos, acessada Jan. 2020. Disponível em: <https://pt.Wikipédia.org/wiki/>.

[6] CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. *Matemática: Quadrante*. 1. ed. V1. São Paulo: Editora F.T.D, 2016.

[7] SOUZA, Joamir; Garcia, jacqueline *Matemática: Contato*. 1. ed. V1. São Paulo: Editora S.M, 2016.

[8] ROQUE, Tatiana *Matemática: História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2016.

[9] DANTE, L. Roberto *Matemática: Contexto & Aplicações*. 3. ed. São Paulo: Editora Ática , 2017.