Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Centro de Ensino Superior do Seridó
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Edson de Souza Soares Neto

CAICÓ - RN
2013

Edson de Souza Soares Neto

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL E A LÓGICA DA DIVISÃO DE INTEIROS

Dissertação apresentada à Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requesito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

CAICÓ - RN
2013

Edson de Souza Soares Neto

SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL E A LÓGICA DA DIVISÃO DE INTEIROS

Dissertação apresentada à Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requesito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Prof^a. Dr^a. Viviane Simioli Medeiros Campos - Examinador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino - Examinador
Universidade de Brasília - UnB

Agradecimentos

À minha Princesa, por seus incessantes incentivos e seu apoio incondicional. Sem eles eu não chegaria até aqui.

Aos meus filhos, por me incentivarem mesmo sem saberem disso.

Aos meus pais, por terem me ensinado o que é o amor.

Ao professor e amigo Marcelo, pela sua orientação, sua compreensão e seu incentivo.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo dispensado durante toda a nossa jornada até aqui. Em especial ao amigo Clésio por suas palavras de incentivo constantes!

Aos professores Thiago Bernardino e André Gustavo por suas aulas enriquecedoras.

À coordenadora Viviane, por sua disponibilidade e presteza.

Resumo

Dentre as quatro operações fundamentais, a divisão merece certo lugar de destaque. Diferentemente das operações de soma, subtração e multiplicação no conjunto dos inteiros, a divisão não é uma operação fechada neste conjunto. Este fato pode se apresentar como uma das primeiras dificuldades dos alunos tanto na interpretação dos resultados obtidos como na compreensão do algoritmo como um todo. Neste trabalho buscamos mostrar que para se compreender o processo da divisão de números inteiros, sob seu aspecto estrutural, faz-se necessário que se compreenda previamente o nosso sistema de numeração. Mais precisamente, que se compreenda a dinâmcia de um sistema de numeração posicional, tal como o que utilizamos para representar os números.

Palavras chave: Números, Sistema de Numeração, Divisão de Inteiros.

Abstract

Among the four fundamental operations, the division deserves some prominent place. Unlike operations of addition, subtraction and multiplication in the set of integers, the division is not a closed operation under this set. This may present itself as one of the first students' difficulties both in interpretation of results as in the understanding of the algorithm as a whole. This paper aims to show that to the comprehension process of the whole numbers division, considering the structural aspects, it is necessary to understand previously our number system. Being more precise, it is necessary to understand how the positional numeration system works, as it is used to represent numbers.

Keywords: Numbers, Number Sistem, Division of Integers

Sumário

Introdução

Para Pitágoras[1], os números eram o princípio e a causa de todas as coisas. Para Kronecker[2], Deus fizera os números inteiros e tudo o mais seria obra dos homens. Bem, se assim o fosse, em um determinado ponto da história da humanidade, os homens não teriam inventado os números. Teriam, simplesmente, os descoberto! Elocubrações filosóficas a parte, o fato é que, em um certo momento da história, a mente do ser humano tornou-se capaz de fazer associações entre objetos como uma forma de classificar tudo o que o rodeava. O desenvolvimento do cérebro humano permitiu que o homem, além de classificar, pudesse estabelecer um tipo de comparação específica entre poucos objetos em grupos distintos: a comparação de quantidades. É neste momento em que se estabelece a noção primitiva de número. A contagem aparece como uma operação abstrata da mente humana intimamente relacionada ao ato de comparar. Contar, nesta etapa, ainda não significa obter um número como resultado. Configura-se apenas como uma forma de equiparar os elementos de dois conjuntos e estabelecer as noções de mais e de menos, de grupo maior e de grupo menor. A esta altura, o homem era capaz de olhar para dois grupos de objetos e saber discernir em qual deles existia mais

[1]Pitágoras de Samos nasceu por volta de 571 e 570 a.C., na cidade de Samos. Filósofo e matemático grego, estabeleceu-se em Crotona, na Magna Grécia, onde fundou a Escola Pitagórica. Seu pensamento contribuiu muito para o desenvolvimento da Matemática e da Filosofia ocidental.

[2]Leopold Kronecker foi um matemático alemão. Estudou em Berlim e obteve o grau de doutor em 1845 com uma tese sobre Teoria dos Números. Ele foi o maior opositor das idéias de infinito de Cantor e dos trabalhos realizados por ele.

objetos, mas não de dizer quantos eram.

Milhares de anos se passaram até que o homem encontrasse uma maneira de armazenar a informação da quantidade. Inicialmente, guardavam pedras em bolsas de argila. Uma pedra para cada objeto. Posteriormente, passaram a contar objetos através de símbolos. É neste momento que o homem mostra a maior expressão da sua capacidade de abstração. Devlin [3] em seu livro *O Gene da Matemática* afirma que o pensamento matemático e o talento para lidar com números origina-se no mesmo terreno da mente humana responsável pelo desenvolvimento da linguagem. O aperfeiçoamento dos símbolos e das formas de organizá-los deram origem aos chamados Sistemas de Numeração.

Neste trabalho pretendemos mostrar como o domínio da dinâmica do sistema de numeração posicional pode contribuir para uma aprendizagem significativa do processo da divisão de números inteiros.

Capítulo 1

Contar para agrupar. Agrupar para registrar.

A capacidade do ser humano de abstrair quantidades o levou, num decurso de milênios, ao aperfeiçoamento tanto da maneira de se registrarem estas quantidades como do modo de se efetuarem as mais elementares operações aritméticas. As primeiras formas de contagem foram realizadas através da correspondência um a um por meio do uso de objetos facilmente manuseáveis como pedras ou através de riscos feitos em osso ou madeira. Mas, com o passar do tempo, as quantidades a serem contadas foram aumentando, inviabilizando esta forma de se fazer seu registro. Assim, em algum momento do desenvolvimento da capacidade de abstração humana, surge uma maneira revolucionária para se registrar grandes quantidades: a formação de agrupamentos. Grandes quantidades poderiam agora serem registradas de maneira rápida e econômica, bastando para isso que se criassem símbolos que caracterizassem tais agrupamentos. Povos como os babilônios, os maias, os egípcios, dentre outros, aprimoraram, cada povo à sua maneira, a forma de se registrarem os números, dando-se assim origem aos chamados Sistemas de Numeração. Todos esses sistemas se utilizavam da idéia de agrupamento na escrita dos números, cada um deles variando, eventualmente, o que chamamos de base do sistema de numeração. Os babilônios agrupavam de 60 em 60, os maias de 20 em 20, os egípcios de 10 em 10, entre vários outros povos que se utilizavam de diversas outras formas de agrupamento.

> "Embora historicamente contar pelos dedos, ou o uso de contar por cinco e dez pareça ter surgido mais tarde que a contagem por dois e três, os sistemas quinário e decimal quase invariavelmente ganharam do binário e do ternário. Um estudo de várias centenas de tribos entre os índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava a base decimal e aproximadamente outro terço usava um sistema quinário ou quinário-decimal, menos de um terço tinha um esquama binário, e os que usavam um sistema ternário formavam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base vinte, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos."[2]

Quando falamos aqui em número, estamos, neste momento, nos referindo apenas à representação de uma quantidade ou de uma medida. É mesmo uma tarefa difícil tentar imaginar como o homem contava objetos a mais de 20.000 anos sem sequer ter a noção de número. Parece até paradoxal, já que usamos os números para obter o resultado de uma contagem. Na verdade, contar é uma ação que prescinde do conceito formal de número. Acontece que este conceito apareceu muito recentemente na história da humanidade quando comparado ao ato de contar. Na realidade, a definição de número é uma questão puramente filosófica, da qual se ocuparam matemáticos e filósofos por mais de dois mil anos.

Foi somente com o advento da Matemática Moderna e com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos de Cantor[1] que finalmente tornou-se possível não só encontrar uma definição satisfatória para o conceito de número, mas também criar uma linguagem universal sob a qual toda a Matemática estaria com seus fundamentos, a partir de então, alicerçados.

> "As conquistas obtidas a partir da teoria de Cantor parecem ser vistas por Bourbaki[a] como um grande diferencial na ciência matemática praticada antes e depois dessa teoria; e a conquista da definição de número natural como propriedade comum de conjuntos entre os quais é possível estabelecer correspondência biunívoca, possibilitou entre outros progressos na matemática, o de prescindir do uso de intuição geométrica e da utilização de grandezas para definir os números reais, como era feito até parte do século XIX". [6]
>
> [a]Bourbaki é apenas um personagem inventado por um grupo de matemáticos franceses, cuja ocupação era estudar e desenvolver teorias matemáticas. O nome dos criadores de Bourbaki são Henri Cartan, Elie Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsart, Jean Dieu.

Em seu livro *Introdução à Filosofia Matemática*, Bertrand Russell, já dispondo do "*paraíso criado por Cantor*",[2] traz a seguinte definição de número:

[1]George Ferdinand Ludwing Phillip Cantor nasceu em 1845, na cidade de Saint-Petersburg, Rússia, mas viveu a maior parte da sua vida na Alemanhã. É considerado o matemático mais influente na história sobre o pensamento do infinito. Suas pesquisas sobre séries trigonométricas o levaram a desenvolver a sua Teoria dos Conjuntos, teoria que surge para tornar-se parte dos próprios fundamentos da Matemática.

[2]O reconhecimento pelas realizações de Cantor mereceram do influente matemático Hilbert a célebre exclamação: Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós!

"Um número será um conjunto de classes tais que quaiquer duas são equipotentes entre si e nenhuma fora do conjunto é equipotente a qualquer uma de dentro do conjunto."

É claro que a definição de número de Russell[3] necessita de toda a preparação por ele elaborada no Capítulo 2 daquele livro. Esta preparação consiste em esclarecer primeiramente o que ele mesmo intitula como "a gramática da nossa indagação". Termos como pluralidade, coleções, classes, equipotência, dentre outros, precisam ser previamente e minunciosamente bem definidos, como o autor bem o faz, para que a definição de número por ele dada não pareça circular ou mesmo paradoxal.

> "Ao buscarmos uma definição de número, a primeira coisa a esclarecer é aquilo que podemos chamar a gramática da nossa indagação. Muitos filósofos ao tentarem definir número, dedicam-se, na realidade, ao trabalho de definir pluralidade, que é coisa muito diferente. *Número* é o que é característico dos números, como *Homem* é o que é característico dos homens. Uma pluralidade não é um exemplo de número, mas de algum número determinado. Um trio de homens, por exemplo, é um exemplo do número 3, e o número 3 é um exemplo de número; mas o trio não é um exemplo de número. Este ponto poderá parecer elementar e dificilmente digno de ser mencionado; no entanto provou ser excessivamente sutil para os filósofos, com poucas excessões". [5]

[3]Bertrand Arthur William Russell foi um dos mais influentes matemáticos, filósofos e lógicos que viveram no século XX. Pacifista, de vida politicamente ativa e idéias firmes, Russell escreve Introdução à Filosofia Matemática durante os seis meses em que esteve na prisão por recusar-se ao alistameno no período da Primeira Guerra Mundial.

Nos próximos capítulos daremos ênfase não mais ao conceito, mas ao desenvolvimento das formas de se representarem os números, bem como de se realizarem operações entre os mesmos.

Capítulo 2

Sistema de Numeração Egípcio

Dentre as civilizações antigas, uma das que mais contribuíram para o desenvolvimento da matemática foi a civilização egípcia. Registros matemáticos que sobreviveram por milênios, como o Papiro de Rhinde,[1] que traz a solução de diversos problemas de aritmética e principalmente de geometria, mostram o grau de desenvolvimento matemático deste povo. Os egípcios, assim como os mesopotâmios e os babilônios, tinham seu próprio sistema de numeração e sua maneira própria de organizar o registro das quantidades, ou seja, de escrever os números. Os egípcios registravam quantidades agrupando-as de dez em dez. Assim, cada potência de dez era representada por um símbolo diferente. Além de quantidades, os símbolos revelavam também um pouco da cultura da civilização egípcia. Na Figura 2.1 observamos que, na medida em que as potências de dez aumentavam, os símbolos se tornavam representações de seres ou objetos cultuados pelos egípcios. No caso do número 1.000.000

[1] Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, divisões proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria, e geometria. É um dos mais famosos antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, juntamente com o Papiro de Moscou. O papiro foi adquirido por Alexander Henry Rhind em Luxor no Egito no ano de 1858. O museu britânico incorporou-o ao seu patrimônio em 1865, permanecendo em seu acervo até os dias atuais.

acredita-se que o símbolo seja possivelmente a figura de um escravo egípcio num sinal de reverência ao faraó.

Figura 2.1: Símbolos da Numeração Egípcia

É interessante notar que para escrever o número 1.000.000 os egípcios usavam um único símbolo. Porém, se um escriba egípcio tivesse que escrever 999.999, este teria simplesmente que desenhar nove traços verticais, nove ossos de calcanhar invertido, nove laços, e assim por diante, num total de 54 símbolos.

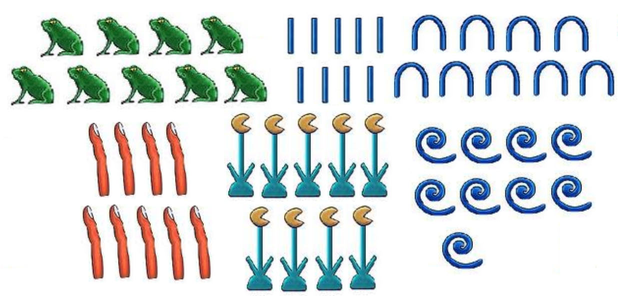

Figura 2.2: 999.999 na numeração egípcia.

Embora os egípcios fossem hábeis calculistas e tenham deixado grandes contribuições para a História da Matemática, o desenvolvimento da Matemática no antigo Egito era mais fortemente movido pela necessidade de se resolverem problemas de natureza concreta. Os egípcios efetuavam as operações elementares de soma e subtração apenas justapondo, decompondo e eliminando símbolos convenientemente. Já para efetuarem multiplicações de números inteiros eles usavam um algoritmo bastante engenhoso que pode ser facilmente compreendido à luz de um sistema de numeração posicional de base dois, como veremos na próxima seção. O esquema abaixo ilustra como os egípcios procediam à multiplicação de números inteiros. Tomemos como exemplo a multiplicação de 43 por 21.

1	21
2	42
4	84
8	168
16	336
32	672

Figura 2.3: Algoritmo da multiplicação egípcia.

Os números 1 e 21 são escritos em duas colunas separadamente. Em seguida, estes números são duplicados e os resultados duplicados novamente, num processo sucessivo, até que seja possível escrever o outro número, no caso o 43, como a soma de números da coluna iniciada pela unidade. A soma dos valores correspondentes a estes números na outra coluna é o resultado da multiplicação requerida. Note que 43 = 1 + 2 + 8 + 32 e que o resultado de 43 x 21 é dado pela soma das parcelas correspondentes na segunda coluna, ou seja, 903 = 21+ 42 + 168 + 672.

Mas o que garante que este algoritmo funciona para multiplicar dois números quaisquer? Para que o algoritmo funcione precisamos da garantia de que qualquer número inteiro possa ser escrito como a soma dos números obtidos na coluna iniciada pela unidade. Os egípcios certamente acreditavam neste fato, embora não tivessem uma demonstração matemática que o justificasse. Veremos mais adiante que qualquer número inteiro pode ser obtido pela soma de números da coluna iniciada pela unidade.

Capítulo 3

Sistema de Numeração Posicional

Certa vez um aluno me perguntou se o nosso sistema de numeração era dito decimal pelo fato de usarmos dez símbolos para escrevermos um número qualquer. Expliquei a ele que não, mas que existe relação entre uma coisa e outra. O que faz nosso sistema receber o nome decimal é o fato de agruparmos de dez em dez. Isto, aliado ao fato do sistema ser posicional, é o que faz com que usemos apenas dez símbolos para escrever um qualquer número. Usar dez símbolos não é causa, é consequência de o sistema ser decimal e posicional. O sistema de numeração egípcio era também decimal, pois eles agrupavam de dez em dez. Porém, eles tinham sempre que criar um novo símbolo para cada potência de dez que se quisesse registrar. Isto se deve ao fato de que os egípcios não se utilizavam de um sistema posicional. No sistema posicional, as ordens são infinitas, enquanto que a quantidade de símbolos é limitada e determinada pela base do sistema.

A base de um sistema de numeração nada mais é do que um número inteiro maior do que 1 que serve de parâmetro na formação dos agrupamentos, ou seja, no caso do sistema posicional, na formação de unidades de ordem superior, numa sucessão hierarquizada. Como vimos, no sistema de numeração egípcio a quantidade de símbolos necessária para que se pudessem registrar os números era ilimitada. Com a criação do sistema de numeração posicional, a quantidade de símbolos fica limitada pela base escolhida para o referido sistema, e é dada ênfase agora não só ao símbolo mas também à posição (ordem) que ele ocupa no registro da quantidade.

Uma descrição mais formal de um sistema posicional é dada a seguir:

Teorema 3.0.1 [1] *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, ..., c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que:*

$$a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + ... + c_n b^n. \tag{3.1}$$

Para demonstrar o teorema usaremos a segunda forma do Princípio de Indução sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais $n^{'}$ e $d_0, d_1, ..., d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n^{'}}.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + ... + d_{n'} b^{n^{'}}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n^{'} + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, ..., n$.

A expressão (3.1) é chamada de expansão do número a na base b. A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os

[1] Este teorema, bem como sua demonstração, constam em [4]

números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos

$$S = \{s_0, s_1, ..., s_{b-1}\},$$

com $s_0 = 0$ para representar os números de 0 a $b - 1$. Um número natural a na base b se escreve da forma

$$x_n x_{n-1} ... x_1 x_0,$$

com $x_0, ..., x_n \in S$ e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + ... + x_n b^n.$$

Note que o teorema nos fornece ainda uma forma de se obter cada x_i. Considerando as divisões sucessivas:

$$\begin{array}{ccccc} a & = & bq_0 & + & r_0 \\ q_0 & = & bq_1 & + & r_1 \\ q_1 & = & bq_2 & + & r_2 \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots \\ q_{n+1} & = & bq_n & + & r_n \end{array}$$

Como $q_0 > q_1 > \ldots$, teremos $q_n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, basta tomarmos $x_i = r_i$. Note que, como cada $r_i < b$ temos que $r_i \in S$.

Este teorema garante também o método da multiplicação egípcia. De fato, se quisermos escrever um número n qualquer na base 2, devemos escolher um conjunto S com dois símbolos que representem os números zero e um. Sendo os próprios algarismos 0 e 1 as escolhas mais naturais, seja $S = \{0, 1\}$. Assim, $n = x_0 + x_1 \cdot 2^1 + ... + x_p \cdot 2^p$, para algum $p \in \mathbb{N}$ e, como $x_0, ..., x_p \in S$, temos que n se trata de uma soma de potências de 2, ou seja, que n se escreve como uma soma de números que aparecem na coluna iniciada pela unidade na tabela de multiplicação egípcia mostrada na seção anterior.

Usamos a notação $(x_n x_{n-1} ... x_1 x_0)_b$ para indicar que b é a base considerada na escrita do número $x_n x_{n-1} ... x_1 x_0$, ou seja, $(x_n x_{n-1} ... x_1 x_0)_b = x_0 + x_1 b + ... + x_n b^n$. Quando $b = 10$, omitimos o índice b e os parênteses. Observe, na tabela abaixo, a sequência dos 20 primeiros números naturais escritos num sistema posicional de base três:

zero	$\to$	$(0)_3$	sete	$\to$	$(21)_3$	quatorze	$\to$	$(112)_3$
um	$\to$	$(1)_3$	oito	$\to$	$(22)_3$	quinze	$\to$	$(120)_3$
dois	$\to$	$(2)_3$	nove	$\to$	$(100)_3$	dezesseis	$\to$	$(121)_3$
três	$\to$	$(10)_3$	dez	$\to$	$(101)_3$	dezessete	$\to$	$(122)_3$
quatro	$\to$	$(11)_3$	onze	$\to$	$(102)3$	dezoito	$\to$	$(200)_3$
cinco	$\to$	$(12)_3$	doze	$\to$	$(110)_3$	dezenove	$\to$	$(201)_3$
seis	$\to$	$(20)_3$	treze	$\to$	$(111)_3$	vinte	$\to$	$(202)_3$

Tabela 3.1: Representação dos 20 primeiros números naturais no sistema posicional de base três.

Em geral, quando a base é menor do que ou igual a dez, usamos os símbolos do nosso sistema de numeração na representação dos números. Caso a base seja maior que dez, costuma-se acrescentar, ao conjunto de símbolos, letras maiúsculas do nosso alfabeto. Por exemplo, para escrever os números usando um sistema de numeração de base dezesseis, também chamado de sistema hexagesimal[2], usam-se normalmente os símbolos do conjunto
$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

Na Tabela 3.2 podemos ver a representação dos 20 primeiros números naturais num sistema hexagesimal.

3.1 Utilizando o ábaco

Um instrumento que pode ser usado como um recurso didático auxiliar para proporcionar uma melhor compreensão, por parte dos alunos, da

[2]Este sistema de numeração é largamente utilizado na linguagem de máquina, juntamente aos sistemas binário e octal, em aplicações de computadores e microprocessadores.

zero	$\to$	$(0)_{16}$	sete	$\to$	$(7)_{16}$	quatorze	$\to$	$(E)_{16}$
um	$\to$	$(1)_{16}$	oito	$\to$	$(8)_{16}$	quinze	$\to$	$(F)_{16}$
dois	$\to$	$(2)_{16}$	nove	$\to$	$(9)_{16}$	dezesseis	$\to$	$(10)_{16}$
três	$\to$	$(3)_{16}$	dez	$\to$	$(A)_{16}$	dezessete	$\to$	$(11)_{16}$
quatro	$\to$	$(4)_{16}$	onze	$\to$	$(B)_{16}$	dezoito	$\to$	$(12)_{16}$
cinco	$\to$	$(5)_{16}$	doze	$\to$	$(C)_{16}$	dezenove	$\to$	$(13)_{16}$
seis	$\to$	$(6)_{16}$	treze	$\to$	$(D)_{16}$	vinte	$\to$	$(14)_{16}$

Tabela 3.2: Representação dos 20 primeiros números naturais no sistema posicional hexagesimal.

dinâmica do sistema de numeração posicional, é o ábaco. Utilizando um ábaco aberto, o professor pode elaborar atividades que podem contribuir bastante para que os alunos se apropriem dos conceitos apresentados no Teorema 3.0.1.

> "Estudos mostram que o material concreto tem possibilitado que os estudantes estabeleçam relações entre as situações experienciadas na manipulação de tais materiais e a abstração dos conceitos estudados. O uso do material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito."PAIS (2006)

A seguir, sugerimos um roteiro para a realização de uma destas possíveis atividades. Para um melhor aproveitamento, sugerimos que a atividade seja realizada em duplas, com um grupo de, no máximo, 30 alunos.

Roteiro de Atividade

1. O professor deve entregar, a cada dupla, um ábaco com 10 contas.

2. A seguir, o professor deve fixar uma base para o sistema posicional. Por exemplo, base 3.

3. Fixada a base do sistema, o professor orienta para que os alunos interpretem o valor de cada uma das ordens, da direita para a esquerda, e registrem os valores abaixo de cada haste. Só se deve passar para a próxima etapa quando os alunos compreenderem que as ordens são, da direita para a esquerda, neste caso, potências crescentes de base 3.

4. Usando a base escolhida, o professor pede para que os alunos representem, no ábaco, a sequência dos números naturais de 0 a 20, registrando a representação de cada número numa folha de papel.

Note que as representações dos números naturais que os alunos devem obter são, precisamente, aquelas que constam na Tabela 3.1.

A representação da sequência dos números naturais no ábaco, de acordo com o disposto no roteiro, pode contribuir para que os alunos percebam, dentre outras propriedades presentes na dinâmica do sistema posicional, alguns resultados contidos no teorema. Um deles é o de que, em nenhum momento da representação da sequência de números proposta, eles ultrapassaram o número de 2 contas em cada haste, ou seja, não precisaram usar outros símbolos além de 0, 1 e 2 para representarem todos os resultados obtidos.

Capítulo 4

Analisando o processo da divisão

Nosso objetivo nesta seção é o de abordar a divisão de números inteiros sob seu aspecto estrutural. Muitos alunos ingressam e egressam do Ensino Médio sem o conhecimento adequado da lógica que está por trás do processo da divisão de números inteiros, processo este que está intimamente relacionado, bem como todos os outros processos que permeiam as operações de soma, subtração e multiplicação, ao funcionamento do sistema posicional. O fato de a divisão de números inteiros poder produzir resultados não inteiros, coisa que não acontece com as outras operações, pode apresentar-se como um dos primeiros obstáculos na aquisição do domínio desta operação.

Analisemos a divisão de 2814 por 7. Reforçamos que aqui não nos interessa o resultado da divisão em si, mas como interpretar cada passo dado durante o processo, quando consideramos a divisão do dividendo pelo divisor, ordem a ordem. Ressalto ainda que sugeri a divisão destes dois números em particular simplesmente por ter esta divisão aparecido durante uma de minhas aulas na resolução de problemas do primeiro grau em que os alunos faziam suas atividades individualmente. Em não muitos raros casos encontrei 42 como resultado desta divisão. Podemos ver na figura abaixo o desenvolvimento feito por um dos alunos que obteve 42 como resposta:

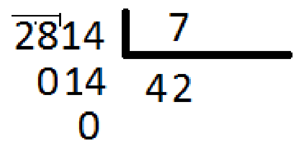

Figura 4.1: *divisão incorreta*

Este procedimento mostra que o aluno não sabe muito bem o que, de fato, esteja fazendo em cada etapa do processo da divisão. Os números que "descem" do dividendo para formar uma nova quantidade a ser dividida não são bem interpretados, nem tão pouco a nova quantidade formada. Neste momento, vemos que, o conhecimento da dinâmica do sistema posicional é de fundamental importância para a clareza do que se sucede em cada uma das etapas do processo da divisão. Analisando esta divisão, percebemos que, ao separar 28 para efetuar a primeira divisão por 7, o aluno não percebe que está dividindo 28 centenas. Ora, dividindo 28 centenas por 7, obtemos 4 centenas e resto zero. Depois o aluno "desce" o número 1. Certamente movido pela mesma lógica que o fez tomar 28 para iniciar a divisão, e não apenas o 2, imediatamente "desce" o 4 e efetua a divisão de 14 por 7, obtendo 2 como resposta. Tendo dividido 28 centenas e 14 unidades por 7, a resposta deveria ser 4 centenas e 2 unidades, ou seja, 402.

Uma alternativa que poderia facilitar a compreensão deste processo pelos alunos seria tentar, primeiramente, interpretar as quantidades obtidas quando separamos as ordens de um número. Ao iniciar a divisão de 2814 por 7 podemos tomar simplesmente a ordem das milhares como mostra a Figura 4.2.

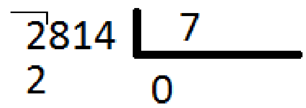

Figura 4.2: *efetuamos a divisão de* 2 *milhares por* 7*, obtendo* 0 *milhares no quociente e* 2 *milhares no resto.*

Neste momento, é fundamental deixar claro que, ao juntar o número da próxima ordem ao resto obtido, estamos “transformando” 2 milhares em 20 centenas, que junto com as 8 centenas, formam 28 centenas. Assim, 28 centenas divididas por 7 resultam em 4 centenas e resto zero.

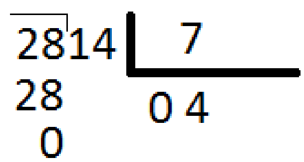

Figura 4.3: *dividindo-se* 28 *centenas por* 7*, obtemos* 4 *centenas e resto zero.*

Continuando o processo, descemos o algarismo 1 da ordem das dezenas. Dividindo-se uma dezena por 7 obtemos 0 dezenas no quociente e resto igual a 1 dezena.

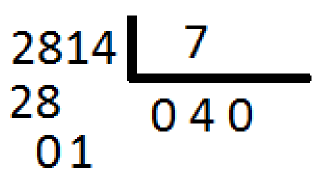

Figura 4.4: *dividindo-se* 1 *dezena por* 7*, obtemos* 0 *dezenas no quociente e* 1 *dezena no resto.*

Ao juntar o número da próxima ordem ao resto obtido, estamos “transformando” 1 dezena em 10 unidades, que junto com as quatro unidades, formam 14 unidades. Assim, 14 unidades divididas por 7 resultam em 2 unidades e resto zero.

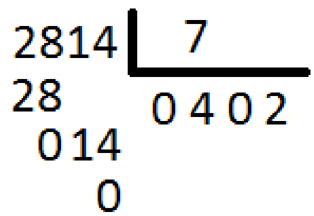

Figura 4.5: *dividindo-se* 14 *unidades por* 7*, obtemos* 2 *unidades e resto zero.*

Mas e o que dizer das divisões em que precisamos colocar uma vírgula no quociente e acrescentar um zero ao resto final para continuarmos o processo? Qual o significado desta ação dentro do processo da divisão e o que pretendemos obter com isto?

De acordo com [1], as respostas a estas perguntas começam a surgir em 1582, nos trabalhos do engenheiro e matemático belga Simon Stevin, em que, pela primeira vez de forma sistemática, aparecem o uso de frações decimais. Stevin elabora uma maneira eficiente de se efetuarem cálculos que envolviam frações, e que eram de uso corrente na astronomia, de forma mais precisa. Frações passariam a ser identificadas como o resultado da divisão de dois inteiros. Para isto, cria-se uma extensão de ordens à direita da ordem das unidades no sistema posicional. Preservando-se a lógica de um sistema posicional de base b em que, cada ordem possui um valor b vezes maior que a ordem imediatamente inferior, segue-se que a primeira ordem à direita da ordem das unidades vale b^{-1}, a próxima b^{-2}, e assim sussecivamente, cada uma destas ordens representando frações do inteiro.

$\cdots$	b^3	b^2	b^1	b^0	b^{-1}	b^{-2}	$\cdots$

Tabela 4.1: Ordens de um sistema posicional de base b.

Olhemos mais de perto o significado de “coloque uma vírgula no quociente e acrescente um zero ao resto”. Inicialmente tomemos como exemplo a divisão de 2017 por 4.

Como anteriormente, façamos a divisão ordem a ordem:

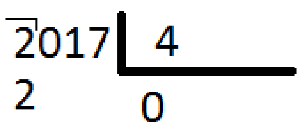

Figura 4.6: divisão da ordem das milhares.

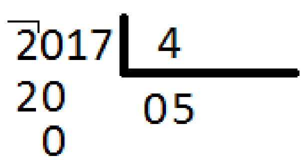

Figura 4.7: divisão da ordem das centanas.

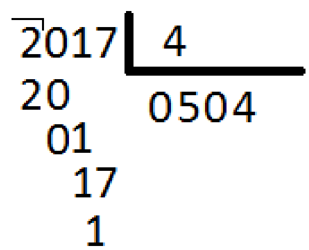

Figura 4.8: divisão das ordens das dezenas e das unidades, restando 1 unidade.

A resposta para esta divisão, antes do advento dos números decimais, era simplesmente $504\frac{1}{4}$. Porém, com o surgimento dos decimais, a fração $\frac{1}{4}$ poderia agora ser representada por números inteiros na extensão criada à direita das unidades no sistema posicional. Para isto, basta prosseguir com a idéia de “quebrar”o resto que obtivemos, neste caso 1 unidade, em dez partes iguais, transformando assim 1 unidade em 10 unidades de ordem 10^{-1}, ou seja, em 10 décimos. Daí o porquê de acrescentarmos um zero ao resto final da divisão. Quanto à colocação da vírgula, estamos apenas indicando que começamos a registrar no sistema posicional a divisão de frações do inteiro.

Assim, prosseguindo a divisão, temos:

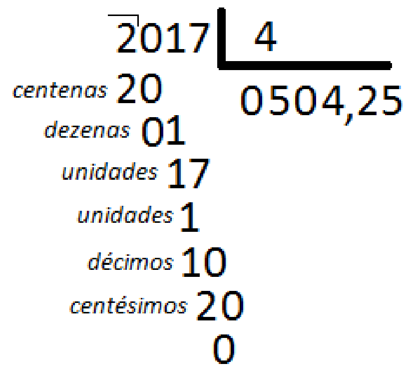

Figura 4.9: *dividindo as frações decimais.*

Contudo, o resultado de algumas divisões de inteiros, produzem ainda resultados que carecem de uma abordagem ainda mais cuidadosa por parte dos professores. São as divisões cujo resto zero nunca aparece dentre os restos das divisões sucessivas. Tais divisões produzem como resultado números denominados *dízimas periódicas*, os quais não abordaremos no corpo deste texto.

Capítulo 5

Jogos de Nim - Uma curiosa aplicação do sistema binário.

Este é um antigo jogo de palitos, ao qual atribui-se origem chinesa, jogado por duas pessoas. Há várias versões deste jogo e para cada uma delas existe uma estratégia que leva à vitória o jogador que procede a um determinado algoritmo para a retirada de palitos. Dentre algumas de suas variantes, analisaremos uma que traz uma curiosa estratégia de vitória envolvendo o sistema binário.

Sobre uma mesa separam-se 15 palitos em três grupos, de 3, 5 e 7 palitos, respectivamente (pode-se generalizar o jogo com três grupos com número arbitrário, porém distinto, de palitos).

Cada jogador, na sua vez, deve retirar um número qualquer de palitos de um, e de apenas um, dos grupos. Os jogadores se alternam e quem retirar o último palito ganha o jogo.

Vamos estabelecer uma estratégia de tal modo que, quem iniciar a partida fazendo uma boa abertura e seguindo certas regras, sempre vencerá, desde que a configuração inicial dos palitos seja favorável a quem inicia o jogo, como no nosso exemplo. O significado do que seja esta configuração favorável veremos mais adiante.

Para isto, a cada jogada, escreve-se o número de palitos na base 2, colocando-os um em cada linha, de modo que os algarismos das unidades se correspondam. Por exemplo, no início da partida tem-se

$$\begin{array}{lcr} \textit{Grupo} & 1 & 11 \\ \textit{Grupo} & 2 & 101 \\ \textit{Grupo} & 3 & 111 \end{array}$$

Somando os três números acima como se fosse na base 10, obtemos o número 223, que chamaremos, a cada etapa, de chave do jogo. O primeiro jogador poderá, então, com uma jogada, tornar todos os algarismo da chave pares. Por exemplo, poderá retirar um palito do grupo 3, obtendo

$$\begin{array}{lcr} \textit{Grupo} & 1 & 11 \\ \textit{Grupo} & 2 & 101 \\ \textit{Grupo} & 3 & 110 \\ \hline & & 222 \end{array}$$

Agora, qualquer jogada que o segundo jogador efetue transformará a chave 222 numa chave com, pelo menos, um algarismo ímpar, o que, mediante uma jogada conveniente, poderá ser recolocado na situação de ter todos os algarismos pares.

Uma situação em que todos os algarismos da chave são pares será chamada de posição segura, enquanto que, quando pelo menos um dos algarismos da chave é ímpar, será uma posição insegura.

Mostraremos que, de uma posição segura, qualquer que seja a jogada, só se pode chegar a uma posição insegura e que, de uma posição insegura, pode-se, com uma jogada conveniente, sempre retornar a uma posição segura. Como 000 é uma posição segura, ganhará o jogo quem, após sua retirada, sempre mantiver o jogo em uma posição segura.

Teorema 5.0.1 *Se um jogador deixa uma posição segura na mesa, então o outro jogador não conseguirá deixar uma posição segura na sua vez de jogar.*

Para fixar as idéias, seja A o primeiro e B o segundo jogador. Se A deixa uma posição segura na mesa, então B, antes de escolher qualquer das linhas para fazer sua retirada, recebe o jogo com uma chave que contém todos os algarismos pares. Mas isto significa que os algarismos da chave são apenas 0 e 2, o que nos garante que os três dígitos somados em cada uma das ordens são ou 3 dígitos zero ou 1 dígito zero e 2 dígitos um. Logo, quando B fizer qualquer retirada de palitos em uma das linhas, o número binário que representa a quantidade de palitos desta linha terá pelo menos um de seus dígitos alterados, o que produzirá em todo caso, o acréscimo ou o decréscimo de uma unidade na soma final de todos os dígitos desta ordem. Ora, mas se as somas eram todas pares, acrescentando ou subtraindo uma unidade em qualquer uma delas, teremos um número ímpar na nova chave gerada pela jogada de B, obtendo-se portanto uma posição insegura.

Teorema 5.0.2 *Se um jogador deixa uma posição insegura na mesa, então o outro jogador sempre poderá, com uma jogada conveniente, deixar uma posição segura na sua vez de jogar.*

Continuemos com nossos jogadores A e B. Vimos que qualquer que fosse a jogada de B, este deixaria na mesa uma posição insegura. Vejamos como A pode, com sua retirada de palitos, retornar o jogo a uma posição segura. Para tanto, nos será util o seguinte

Lema 5.0.1 *Dados dois números em notação binária que resultem numa posição insegura, podemos determinar univocamente um terceiro que, com estes, produza uma posição segura.*

De fato, sejam $M = a_r...a_2a_1a_0$ com $a_i \in \{0, 1\}$ e $N = b_s...b_2b_1b_0$ com $b_j \in \{0, 1\}$ onde $0 \leq i \leq r$ e $0 \leq j \leq s$ binários que resultam numa posição insegura. Suponha, sem perda de generalidade, $r \geq s$. Para construir um binário P tal que o terno MNP resulte numa posição segura basta considerar

$P = c_r ... c_3 c_2 c_1 c_0$ tal que

$$c_k = \begin{cases} 0, \text{ se } \mathrm{a}_i + b_j \in \{0,2\}, \text{ com } 0 \leq i = j \leq s \text{ ou se } a_i = 0, \text{ com } s+1 \leq i \leq r. \\ 1, \text{ se } \mathrm{a}_i + b_j = 1, \text{ com } 0 \leq i = j \leq s \text{ ou se } a_i = 1, \text{ com } s+1 \leq i \leq r. \end{cases}$$

Assim, o jogador A pode conseguir uma posição segura fixando duas linhas e verificando qual o binário que, com os das linhas fixadas, gera uma posição segura.

Considerações Finais

É fundamental que o professor de Matemática perceba as implicações de um conhecimento adequado da dinâmica do sistema posicional na assimilação e no domínio, por parte dos alunos, dos algoritmos que envolvem as quatro operações fundamentais. Neste trabalho, defendemos o quanto este conhecimento pode ser extremamente útil para uma aprendizagem significativa do algoritmo da divisão de números inteiros. Acreditamos que o professor deva dispensar certa autonomia aos seus alunos, de modo a permitir que estes participem ativamente da construção dos seus próprios métodos de assimilação deste algoritmo. O uso de material concreto, por meio de atividades bem elaboradas e estratégias bem definidas, pode ser um bom começo para se alcançar este objetivo.

Referências Bibliográficas

[1] AIRES, A. *SIMON STEVIN E A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NÃO INTEIROS*. Disponível em http://www.educonufs.com.br, 2010.

[2] BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

[3] DEVLIN, K. *O Gene da Matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[4] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM - Coleção do Professor de Matemática, 2011.

[5] RUSSELL, B. A. W. *Introdução à Filosofia Matemática*. Ed. Zahar São Paulo: Moderna, 2007.

[6] SOARES, E. T. P. *Movimento da Matemática Moderna e o Conceito de Número Natural*. Disponível em http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/trabalhos$_8$.*html*, 2009.