Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística
Câmpus de Santo Antônio

Uma proposta de sequências didáticas para o ensino de vetores na escola básica

Maria Cláudia Neres Piazza

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ , Câmpus de Santo Antônio.

Orientadora
Profa. Dra. Andréia Malacarne

2020

Piazza. N, Maria Cláudia
Uma proposta de sequências didáticas para o ensino de vetores na escola básica/ Maria Cláudia Neres Piazza- Santo Antônio: [s.n.], 2020.
85 f.: fig., tab.

Orientadora: Andréia Malacarne

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ , Departamento de Matemática e Estatística.

1. Vetores. 2. Ensino Fundamental. 3. Ensino Médio. 4. Sequência Didática. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca do DEMAT
UFSJ - Câmpus de Santo Antônio

TERMO DE APROVAÇÃO

Maria Cláudia Neres Piazza

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE VETORES NA ESCOLA BÁSICA

Dissertação como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ , pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Andréia Malacarne
Orientadora

Profa. Dra. Andréa Cristiane dos Santos Delfino
Universidade Federal de São João del Rei

Prof. Dr. Francis Félix Córdova Puma
Universidade Federal de Santa Catarina

Santo Antônio, Março de 2020

Aos meus pais, Lígia e Jorge; irmãos Maria Clara e Matheus e marido Luiz Otávio.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por todas as benções.

Aos meus pais, Lígia e Jorge por toda compreensão e apoio.

Aos meus irmãos, Matheus e Maria Clara pela amizade.

Ao meu marido, Luiz Otávio pelo amor, paciência, cumplicidade e encorajamento.

Aos meus sogros, Alex e Jaqueline pela confiança.

Ás minhas cunhadas, Carol e Thayná pelo companheirismo.

A todos os educadores que fizeram parte da minha formação.

Aos meus colegas de curso, pelo carinho e ajuda.

A minha amiga Ana Paula, pela disponibilidade e incentivo.

Aos meus colegas de profissão, pelas críticas construtivas.

Aos meus amigos que se colocaram a disposição para me ajudar com o Latex, especialmente Ana Paula, Giordanni e Magno.

Aos meus amigos e familiares, pela compreensão das ausências.

À Universidade Federal de São João Del Rei (UFSJ) e ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela oportunidade.

À técnica administrativa, Kátia Milena Mendonça, pela ajuda durante todo o curso.

À coordenadora institucional do curso, Viviane Pardini Valério, pelo zelo com que exerce a sua função.

À professora Andreia Malacarne, pela persistência e ensino para que esse trabalho fosse realizado.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

René Descartes

Resumo

Vetor é um objeto matemático muito utilizado em diversas aplicações, principalmente para representar grandezas que possuem módulo, direção e sentido. Além disso, o conceito de vetor pode ser utilizados como ferramenta facilitadora para a resolução de diversos exercícios de geometria e para a dedução de fórmulas matemáticas. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo discutir a pertinência do estudo desse conteúdo no ensino básico. A fim de cumprir o objetivo supracitado, foram realizados um estudo da Base Nacional Curricular Comum, uma discussão a respeito da relevância da inserção dessa matéria para esse nível de ensino, além da elaboração de duas propostas de sequências didáticas, uma para o 9º ano do Ensino Fundamental e outra para 3º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Vetores, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Sequência Didática.

Abstract

Vector is a mathematical object widely used in several applications, mainly to represent size that have module, direction and sense. In addition, the vector concept can be used as a facilitating tool to solve several geometry exercises and to deduct mathematical formulas. Thus, this paper goal is to discuss the relevance of studying this content in basic education. In order to fulfill the aforementioned goal, a study of the Common National Curricular Base was carried out, a discussion regarding the relevance of the insertion of this subject for this level of education, in addition to the elaboration of two proposals of didactic sequences, one for the 9th year of elementary school and another for 3rd year of High School.

Keywords: Vector, basic education, High school, didactic sequence.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

É indiscutível a relevância do estudo de vetores na disciplina de Física da escola básica. Esse conceito é pré-requisito para o aprendizado de diversos conceitos físicos e se faz presente no currículo do Ensino Médio na disciplina de Física. Segundo Martins (2015), "os vetores são apresentados aos alunos do Ensino Médio como uma ferramenta usada para auxiliar a resolução de questões de Mecânica e Eletromagnetismo, por exemplo."Entretanto, cabe ressaltar que vetor não é utilizado somente para a resolução problemas físicos; ele é, também, um objeto matemático importante que associa Geometria e Álgebra e facilita muito a compreensão e resolução de diversos problemas matemáticos. Nesse sentido, a ausência desse conteúdo no currículo de Matemática do ensino básico é a motivação para o desenvolvimento desse trabalho.

Destacando a importância de um currículo escolar que trabalhe a interdisciplinaridade, desenvolvemos duas propostas de sequências didáticas para o ensino do conteúdo de vetores em disciplinas de Matemática na escola básica: a primeira para o 9º ano do Ensino Fundamental e a segunda para o 3º ano do Ensino Médio. A ideia da introdução do conceito de vetores já no Ensino Fundamental objetiva dar noções e familiaridade ao aluno sobre o conteúdo, de forma a dar condições para um melhor entendimento desse conteúdo nas disciplinas de Física e Matemática no Ensino Médio.

Para uma análise da pertinência da inserção do conteúdo de vetores na escola básica, foi feito um estudo da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), a fim de conhecer melhor o documento que servirá como base para a elaboração dos projetos políticos pedagógicos das escolas brasileiras. Com essa análise, foi possível perceber que o conteúdo está de acordo com os objetivos da BNCC.

É claro que a discussão a respeito da inserção de novos conteúdos no currículo matemático da escola básica vai muito além da realizada nesse trabalho. Enquanto professores, sabemos das dificuldades enfrentadas pelos educadores no ensino público no que diz respeito ao desequilíbrio entre quantidade de conteúdos a serem trabalhados e carga horária da disciplina, além de outros tipos de problemas enfrentados como, por exemplo, cargas de trabalho extenuantes, sala de aula superlotadas, falta de material didático adequado, entre outros. Entretanto, mesmo diante de situações adversas e não ideais, devemos manter um pensamento crítico quanto ao currículo escolar, discutindo e buscando ideias que possam contribuir para um ensino de qualidade. Nesse sentido, cabe destacar, que nossa intenção é levantar uma discussão sobre a pertinência da inserção desse conteúdo para esse nível escolar nas disciplinas de Matemática.

2 Objetivos

2.1 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho é discutir sobre a pertinência da inserção do conteúdo de vetores na disciplina de matemática nos Ensinos Fundamental II, 9º ano e Médio, 3º ano.

2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Analisar a relação do ensino de vetores com as competências/habilidades apresentadas na Base Nacional Comum Curricular.
- Discutir a possibilidade de introdução do conceito de vetores na escola básica.
- Apresentar uma proposta de sequência didática de ensino de vetores para o 9º ano do Ensino Fundamental.
- Apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino de vetores para o 3º ano do Ensino Médio.

3 O ensino de vetores e a BNCC

3.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo, homologado no ano de 2017 pelo então ministro da Educação, Rossieli Soares, que regulamenta as aprendizagens essenciais a todos os níveis de ensino da escola básica, a saber: Infantil, Fundamentais 1 e 2 e Médio.

Garantido pelo Art. 210 da Constituição de 1988, a elaboração e discussão em torno dessa necessidade já pôde ser observada em 1996, no Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), e reafirmada em diversos documentos consolidados posteriormente, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), o Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio (PNFEM) e o Plano Nacional de Educação (PNE).

Antes de chegar à fase de homologação, houve três versões da BNCC, disponibilizadas nos anos 2015, 2016 e 2017. Em sua última versão, encontram-se os conteúdos "que os estudantes devem aprender na Educação Básica, o que inclui tanto os saberes quanto a capacidade de mobilizá-los e aplicá-los."(BRASIL, BNCC, 2018, p.12). Esses saberes são tratados no documento como competências e a capacidade de mobilizá-los e aplicá-los como habilidades.

A necessidade de se criar um documento como esse está ligado, principalmente, à desigualdade educacional vivida no Brasil. Uma das justificativas para tal fato é a discrepância entre os currículos praticados em diferentes instituições. "O sistema escolar brasileiro abriga modelos diversos de educação escolar ao longo de sua história e geografia, hibridizados entre si"(PONCE, 2018, citado por PONCE, 2019).

A diferença do aproveitamento escolar entre regiões e entre as redes federal, privada, estadual e municipal fica ainda mais evidente ao analisarmos os resultados obtidos no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). O Pisa é uma avaliação em nível internacional que tem por objetivo comparar o nível educacional de jovens na faixa etária de 15 anos, idade em que se encerra a educação básica obrigatória na maioria dos países. Essa avaliação abrange as áreas de Leitura, Ciências e Matemática, e ocorre a cada três anos, sendo a última edição realizada em 2018. De acordo com a avaliação, a região Sul possui melhores notas, enquanto que a região Nordeste possui as piores. O desempenho da rede federal é melhor, seguido da rede privada, estadual e municipal.

> Em algumas regiões, ao fim do Ensino Médio, alunos de instituições privadas aprenderam o equivalente a quatro anos a mais de tempo escolar do que seus colegas do sistema público, mesmo tendo frequentado a escola pelo mesmo número de anos (MIZNE, D., 2019).

"Estudos mostram que a falta de clareza do que deve ser aprendido em cada ano escolar é uma das causas do baixo desempenho dos alunos brasileiros em avaliações nacionais e internacionais da educação"(ANDRADE, 2018).

> A escola do conhecimento para os ricos, a escola do acolhimento social para os pobres. Essa dualidade é resultado de um projeto de educação que, ao não ampliar o investimento público em educação pública, tem sido incapaz de criar as condições para que, de fato, seja oferecida igualdade de oportunidades para que os estudantes possam progredir, superando condições adversas. (LIBÂNEO, 2012 apud GIROTTO, E.D.)

> Em um país com mais de 5 mil redes de ensino e mais de 48 milhões de estudantes, é fundamental definir o que todo aluno tem direito a aprender. Apenas definindo isso será possível tornar viável uma estratégia que garanta Educação de qualidade a todos no Brasil, do contrário não há como as diferentes políticas federais, estaduais e municipais pela Educação terem coerência umas com as outras e caminharem juntas na mesma direção (BRASIL, 2019).

Diante desse cenário, fica ainda mais evidente a importância da criação e implementação da BNCC.

"Sob a narrativa da igualdade de oportunidades, caberia à escola o estabelecimento de hierarquias escolares e sociais "justas", considerando o trabalho, o talento e o mérito de cada indivíduo"(DUBET, 2008).

Baseada em 10 competências comuns a todas as áreas, a BNCC tem por objetivo garantir a aprendizagem de habilidades e conhecimentos específicos a todos os estudantes brasileiros, a fim de formar cidadãos mais ativos e competentes na sociedade.

> As competências gerais da Educação Básica inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB. (BRASIL, 2018)

Segundo Marini (2019), as competências e seus respectivos objetivos são:

1. Conhecimento - Entender e explicar a realidade, colaborar com a sociedade e continuar a aprender;

2. Pensamento científico, crítico e criativo - Investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções;

3. Repertório cultural - Fruir e participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural;

4. Comunicação - Expressar-se e partilhar informações, sentimentos, ideias, experiências e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;

5. Cultura digital - Comunicar-se, acessar e produzir informações e conhecimento, resolver problemas e exercer protagonismo de autoria;

6. Trabalho e projeto de vida - Entender o mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas à cidadania e ao seu projeto de vida com liberdade, autonomia, criticidade e responsabilidade;

7. Argumentação - Formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns com base em direitos humanos, consciência socioambiental, consumo responsável e ética;

8. Autoconhecimento e autocuidado - Cuidar da saúde física e emocional, reconhecendo suas emoções e a dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas;

9. Empatia e cooperação - Fazer-se respeitar e promover o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade, sem preconceito de qualquer natureza;

10. Responsabilidade e cidadania - Tomar decisões com princípios éticos, democráticos, inclusivos e sustentáveis.

Por ser a etapa mais longa da educação básica, o Ensino Fundamental está apresentado na BNCC como Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e Anos Finais (6º ao 9º ano). Essas duas etapas possuem muitas abordagens pedagógicas comuns, mas a principal diferença está em preparar os alunos do Fundamental Anos Finais para o Ensino Médio, fase em que eles são mais independentes e exercem a autonomia com mais frequência. De forma geral, o Ensino Fundamental apresenta-se estruturado em cinco áreas do conhecimento, são elas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso.

Já o Ensino Médio apresentado na BNCC busca dar continuidade as propostas já iniciadas nas fases anteriores. Estruturalmente, apresenta-se estruturado na BNCC em quatro áreas do conhecimento, a citar: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais e suas Tecnologias.

Destacamos que, para que de fato a implementação da BNCC seja satisfatória, algumas mudanças deverão acontecer nas escolas; as principais serão a reelaboração dos currículos e a revisão do projeto político pedagógico (PPP). Como consequência, ter-se-á também a necessidade de atualização do material didático e de se fornecer formação continuada aos profissionais.

3.2 A BNCC e a área de Matemática

Segundo D'Ambrósio (1995)

> Há dois aspectos igualmente importantes apontados como objetivos da Educação Matemática: ser parte da educação geral, preparando o indivíduo para a cidadania, e servir de base para uma carreira em ciência e tecnologia. Ambos são igualmente necessários e, obviamente, vinculados.

Para Santos e Matos (2017, p. 6), "O currículo deve ser dinâmico e deve principalmente, atender à realidade do aluno, deve dar total autonomia ao professor, para que este não sufoque sua criatividade em meio a um currículo congelado e engessado (...)".

Para Carvalho *et al.* (2006), a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático.

Portanto, se faz necessária a preocupação com um currículo que contemple a real necessidade dos alunos e que seja acessível ao professor. Assim deve-se considerar um diálogo entre o real e o abstrato, problematizando situações de interesse dos alunos para que se possibilite uma aprendizagem mais efetiva e natural.

Brasil (2002) enfatiza que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

No trecho abaixo, Jahn (2013) aponta para o que poderia delimitar no currículo das escolas uma boa formação em Educação Matemática para estudantes de Ensino Fundamental e Médio:

> Uma formação matemática integral na Educação Básica demanda que os saberes dos estudantes sejam valorizados nas suas próprias formas e expressão, e contrastados com os conhecimentos historicamente estabelecidos, garantindo a integração de suas vivências e experimentações com aquelas próprias à ciência. É fundamental situar a relação dos estudantes com a Matemática na perspectiva de um sujeito ativo e social que atua na produção e transformação das realidades e da sua própria existência. Neste sentido, torna-se essencial que os contextos de seus efetivos interesses sejam considerados na escola. A fim de estabelecer um diálogo permanente entre esses saberes e a prática educativa, particularmente em Matemática, é desejável buscar situações que possibilitem aos jovens perceber a presença de conhecimentos desta área em atividades diversas, sendo elas artísticas, esportivas, educacionais, de trabalho, ou outras.

Pautada nas 10 competências citadas na seção anterior, a Matemática é apresentada na BNCC dividida em 5 eixos temáticos, são eles: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Comparando a BNCC com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), entende-se como a área da Matemática evoluiu de um documento para o outro. Enquanto nos PCNs, uma das finalidades é levar o aluno a:

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 2002).

Na BNCC, é colocado como: "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo."(BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR, 2018)

Assim nota-se que as palavras "identificar" e "perceber", presentes nos PCNs, são substituídas por palavras como "desenvolver" e "compreender" na BNCC. Isso mostra a preocupação em não somente decorar e aplicar fórmulas, mas passar a entender o meio em que se vive, compreendendo e contextualizando o que se vê em sala de aula.

Uma diretriz importante descrita pela BNCC é o letramento matemático. No documento, essa diretriz é definida como "competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente". Essa definição mostra o principal objetivo matemático presente na base. Não é de interesse estimular a aprendizagem da Matemática tecnicista, pautada somente em resultados corretos e raciocínio rápido; mas sim a Matemática construtiva, que leva o aluno a dialogar com o meio em que vive, discutir diferentes formas de se resolver o problema e aprimorar seu raciocínio a cada etapa.

3.3 Relação entre o ensino de vetores e as competências matemáticas

A BNCC define 8 competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental; dentre elas estão:

> Competência 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> Competência 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas e dados).

As competências acima dialogam diretamente com o conteúdo de vetores proposta nesse trabalho. O conteúdo de vetores relaciona-se à competência 3 por se tratar de um assunto que envolve os eixos temáticos Geometria e Álgebra e possui aplicação em outras áreas de conhecimento. Além disso, o conceito de vetor fornecerá ao aluno mais uma ferramenta que poderá ser utilizada na resolução de situações-problemas, como por exemplo, em problemas envolvendo grandezas vetorais, utilizando-se da linguagem vetorial, o que relaciona esse conteúdo à competência 6,

Para o Ensino Médio, a BNCC apresenta 5 competências específicas. Dentre elas, destacam-se duas que dialogam com o estudo de vetores nessa etapa.

> Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Ainda segundo a BNCC,

> A área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior.

Dessa forma, é imprescindível a comunicação entre o Ensino Fundamental e o Ensino Médio; o que seria atendido com a introdução do conteúdo de vetores no Ensino Fundamental, com a continuação do estudo desse conteúdo, de uma forma um pouco mais aprofunadada, no Ensino Médio.

4 Vetores na Escola Básica

4.1 Por que estudar?

Na Matemática e nas demais disciplinas da escola básica, é essencial que o conteúdo a ser ensinado abranja tópicos que permitam ao aluno fazer conexões com os demais conteúdos.

Segundo Brasil (?) é preciso desenvolver a interdisciplinaridade para que o aprendizado seja organizado.

[...] "para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática."(BRASIL, 2018)

> Por isso tudo, o aprendizado deve ser planejado desde uma perspectiva a um só tempo multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados desde uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada disciplina e no conjunto de disciplinas, em cada área e no conjunto das áreas. (BRASIL, ?)

Da mesma forma, também é essencial que essa conexão aconteça nos conteúdos de uma mesma disciplina, como Geometria e Álgebra na matemática. Essa é uma das motivações de se estudar, por exemplo, conceitos como os de Geometria Analítica e Álgebra Linear, que possibilitam ao aluno uma visão diferenciada de problemas geométricos.

"A junção de toda a estrutura do Ensino Fundamental I e II, envolvendo os conceitos geométricos, será utilizada na Geometria Analítica, onde o aluno tomará conhecimento de que todas as formas possuem fundamentos e estruturação matemática."(NOÉ, 2015)

Fazendo uma reflexão sobre o assunto, Avritzer afirma que, em sua obra *A geometria*, Descartes "observa que a geometria é "difícil", e a álgebra "fácil", e que seu método, nesse caso, se limitava a resolver os problemas difíceis que os gregos haviam proposto pela álgebra, mais clara e fácil de manipular."(AVRITZER, 2009)

Os assuntos de matrizes, determinantes e sistemas lineares são objetos de conhecimento presentes no currículo do Ensino Médio. Esses assuntos se enquadram no contexto de Álgebra Linear; "esta disciplina, que ocupa uma posição central na Matemática de hoje, abrange três aspectos: o geométrico, o algébrico e o numérico (ou computacional)."(LIMA, 2001)

Analisando o Currículo Referência do Ensino Fundamental de Minas Gerais, observa-se a presença do aspecto geométrico da disciplina de Álgebra Linear com maior relevância. Um dos objetos de conhecimento da Unidade Temática Geometria, presente no

9º ano do Ensino Fundamental, é a distância entre pontos no plano cartesiano. Esse conceito, por sua vez, poderia ser explorado para a introdução aos vetores.

O estudo de vetores possibilita uma intuição espacial que poderia ser aproveitada, também, em outras matérias de Matemática, como Geometria Plana e Espacial e, além disso, em outras disciplinas, como na Física.

O conceito de vetores já é trabalhado na escola básica no currículo atual, mas pelo professor de Física. A proposta desse trabalho é que ele seja abordado de uma maneira diferente e pelo professor de Matemática.

> O uso de vetores no Ensino Médio já ocorre em alguns tópicos da Física, entretanto este assunto não é abordado nas aulas de Matemática. Assim, este conteúdo fica sem uma apresentação mais didática e formal provinda da Geometria Analítica, parte da Matemática que se dedica ao estudo de conceitos geométricos euclidianos de forma algébrica e geométrica. (CHALEGA, 2018)

> Utilizado constantemente para a resolução de problemas físicos, os vetores são apresentados aos alunos do Ensino Médio como uma ferramenta usada para auxiliar a resolução de questões de Mecânica e Eletromagnetismo, por exemplo. Porém, suas propriedades são baseadas, em parte, na Geometria Euclidiana. (MARTINS, 2015)

Dessa maneira, o estudo de vetores se restringe a essas aplicações de forma assistemática e baseado em um conjunto de regras, perdendo-se a visão geométrica do conteúdo.

"[...]o estudo dos Vetores desde o primeiro ano do Ensino Médio na disciplina Física, é feito de modo desconexo e sem uma abordagem Matemática consistente."(COSTA, 2015)

> os alunos tem muita dificuldade em compreende-lo pois os vetores são apresentados de forma direta sem um conhecimento prévio de suas estruturas algébricas e geométricas, o que faz não perceberem a grande importância dessas estruturas matemáticas e que o conceito de vetor é puramente matemático. (UCHÔA, 2014)

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com coordenadas (soma e multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico de Matemática importante, mas que está presente no Ensino Médio somente nas aulas de Física (BRASIL, 2006).

"Assim, o conceito de vetor, que no Ensino Médio vem sendo explorado apenas na Física, deixaria de ser tão amarrado aos conceitos de força, velocidade e aceleração."(UFRGS, 2009)

É claro que a discussão vai muito além da motivação de se trabalhar esse conteúdo, outro grande problema enfrentado é falta desse material nos livros didáticos utilizados pelas escolas básicas atualmente.

No ano de 2001, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) publicou o livro: "Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio". Nessa obra, são feitas críticas e observações de algumas coleções de livros didáticos utilizados nas escolas brasileiras. A respeito do tema vetor, as principais críticas são exatamente a respeito da ausência do conteúdo.

"[...]Por alguma obscura razão, ou por nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor, [...], é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física". (LIMA, 2001)

"[...]um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para Ensino Médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática."(LIMA, 2001).

> Existe um provável equívoco na abordagem do ensino de vetores no Ensino Médio: Porque a referida matéria é abordada na maioria dos livros didáticos apenas nos livros de Física? Não seria os vetores objetos matemáticos que pelo seu próprio conteúdo, deveriam estar alocados nos currículos da própria Matemática? (SANTOS, 2014)

Da forma como vem sendo trabalhado atualmente, observa-se a "fragmentação do estudo da Geometria Analítica, priorizando na maioria das vezes os aspectos algébricos, sem conectá-los à Geometria, tirando todo o sentido do estudo desse conteúdo."(SILVA, 2013)

Ao pensarmos no estudo de vetores no ensino básico, é importante pensar em uma abordagem que faça sentido tanto para a Matemática, respeitando os níveis de rigor adequados a cada etapa, quanto para as demais disciplinas que necessitam desse conceito como instrumento de cálculo.

Analisando cada disciplina, vemos que o conteúdo de Física que depende dos conceitos de vetores está localizada na grade curricular do primeiro ano do Ensino Médio; já na Matemática, o conteúdo de Geometria Analítica só é visto no terceiro ano do Ensino Médio.

Portanto, neste trabalho, a proposta é que os alunos aprendam, de forma introdutória, o conceito de vetores já no nono ano do Ensino Fundamental. Além disso, uma vez que as aprendizagens essenciais da BNCC serão garantidas com ações como: "manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino"(BRASIL, 2018), para Ensino Médio, o principal objetivo proposto é formalizar e ampliar os conceitos vistos no Ensino Fundamental. Dessa forma, se garante o aproveitamento do potencial constituído pelo aluno no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior.

4.2 Alguns conceitos básicos

Nessa seção, serão introduzidos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de vetores. O texto desta seção teve como referências os livros: Vetores e Geometria

Analítica do autor WINTERLE, P., Geometria Analítica dos autores STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P., Geometria Analítica - Coleção PROFMAT de DELGADO, J., FRENSEL, K. e CRISSAF, L. Os conceitos e resultados serão apresentados de forma bastante sucinta. Para uma leitura mais detalhada e um estudo mais aprofundado dos conceitos e resultados, o leitor pode utilizar as referências descritas acima.

No que segue, dados dois pontos A e B, usaremos a notação AB para representar o segmento de reta determinado pelos pontos A e B, além disso, se os pontos forem distintos, usaremos a notação r_{AB} para denotar a reta que contém os pontos A e B.

Segmento de Reta Orientado

Definição 1. Chamamos de **segmento orientado de origem** A **e extremidade** B, e denotamos por $\overline{AB}$, o segmento de reta AB fixado o sentido de percurso de A para B.

Nesse caso, dizemos que o segmento orientado $\overline{BA}$ tem sentido de percurso oposto ao do segmento $\overline{AB}$. Além disso, o segmento orientado $\overline{AA}$ é chamado de segmento nulo.

O segmento orientado $\overline{AB}$ é representado geometricamente pelo segmento de reta AB acrescido de uma seta que caracteriza visualmente o sentido do percurso.

Comprimento

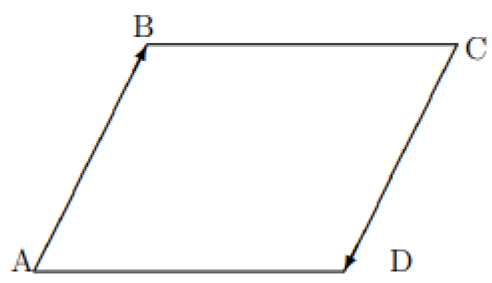
Definição 2. Fixada uma unidade de comprimento, definimos o **comprimento do segmento orientado** $\overline{AB}$ como a distância do ponto A até o ponto B.

Direção

Definição 3. Dados dois segmentos orientados não nulos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, diremos que eles possuem a mesma **direção** se as retas r_{AB} e r_{CD} forem paralelas ou coincidentes.

Exemplo: Um paralelogramo $ABCD$ determina, pelo menos, um par de segmentos orientados com mesma direção, que são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Figura 4.1: Par de segmentos paralelos



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Sentido

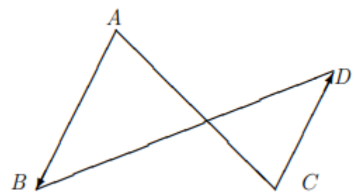
Definição 4. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos orientados distintos com mesma direção

a: Se as retas r_{AB} e r_{CD} forem distintas, diremos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o **mesmo sentido** quando os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tiverem interseção vazia. Caso contrário, ou seja, se os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não tiverem interseção vazia, diremos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem **sentidos opostos**.

Figura 4.2: Segmentos orientados com o mesmo sentido

Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Figura 4.3: Segmentos orientados com sentidos diferentes



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

b: Se as retas r_{AB} e r_{CD} forem coincidentes, tome um ponto A' $\notin r_{AB}$ e a única reta s que passa por A' e que é paralela à reta r_{AB}. Em seguida, tome um ponto B' $\in s$ de modo que os segmentos orientados $\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ possuam o mesmo sentido (conforme item **(a)**). Dizemos que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o **mesmo sentido** se os segmentos orientados $\overline{A'B'}$ e $\overline{CD}$ tiverem o mesmo sentido, caso contrário, dizemos que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem **sentidos opostos**.

Equipolência de segmentos orientados

Definição 5. Dizemos que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **equipolentes** quando ambos são nulos ou quando satisfazem às seguintes três propriedades:

- Possuem o mesmo comprimento;

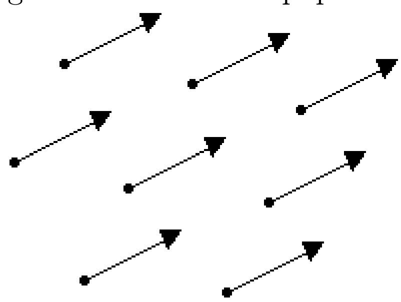
- Possuem mesma direção;
- Possuem mesmo sentido.

Vetores

Definição 6. Dados os pontos A e B, definimos o **vetor** determinado por $\overline{AB}$, denotado por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, como o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$. Cada segmento orientado equipolente a $\overline{AB}$ é **um representante** do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Observe que segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor, assim, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam, respectivamente. Além disso, dizemos que dois vetores são **não-colineares** quando não possuem a mesma direção. Já a representação geométrica de um vetor é dada pela representação geométrica de qualquer um dos seus representantes.

Figura 4.4: Vetores Equipolentes



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Na figura 4.4, temos 8 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se $\overline{AB}$ é um segmento orientado nulo, então chamamos $\overrightarrow{AB}$ de **vetor nulo** e podemos denotá-lo por $\overrightarrow{0}$.

Soma de Vetores

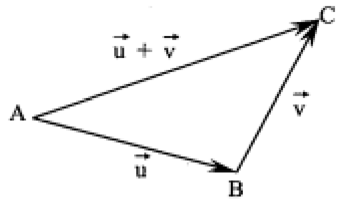
Considere dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. A soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, denotada $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, é definida da seguintes forma: tome um ponto A qualquer, e com origem nele considere o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representante do vetor $\overrightarrow{u}$. Agora, considere o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ representante de $\overrightarrow{v}$. Então, definimos

$$u + v = \overrightarrow{AC}.$$

Observe que a última igualdade pode ser reescrita como

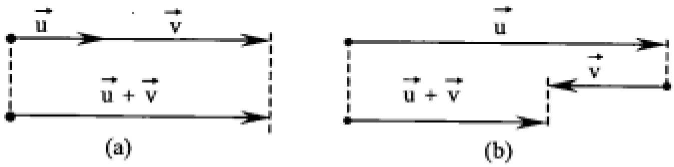
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$

Figura 4.5: Vetor soma



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Figura 4.6: Soma de vetores com mesma direção

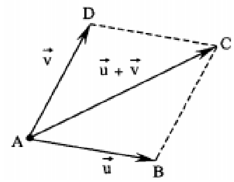


Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

No caso dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não possírem mesma direção, há uma outra maneira de se encontrar o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Representam-se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A. Completa-se o paralelogramo $ABCD$ e o segmento orientado de origem A que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, isto é,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Figura 4.7: Regra do paralelogramo



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Multiplicação de um número real por um vetor

Considere um vetor $\overrightarrow{v}$ e um número real $\alpha \neq 0$. Definimos o produto do número real α pelo vetor $\overrightarrow{v}$, denotado $\alpha\overrightarrow{v}$, da seguinte forma:

(a) Se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\alpha = 0$, então $\alpha\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

(b) Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e $\alpha \neq 0$, então $\alpha\overrightarrow{v}$ é definido pelo comprimento, direção e sentido descritos a seguir:

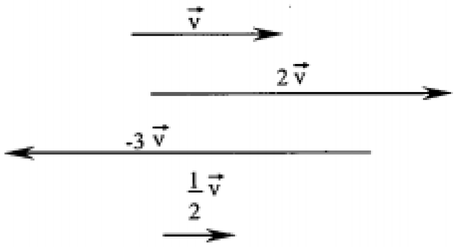
- o comprimento de $\alpha\overrightarrow{v}$ é igual ao comprimento de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;

- $\alpha\overrightarrow{v}$ possui mesma direção de $\overrightarrow{v}$;

- $\alpha\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$, e sentidos contrários se $\alpha < 0$.

A figura 4.8 mostra $\overrightarrow{v}$ e alguns de seus múltiplos.

Figura 4.8: Multiplicação de número real por um vetor



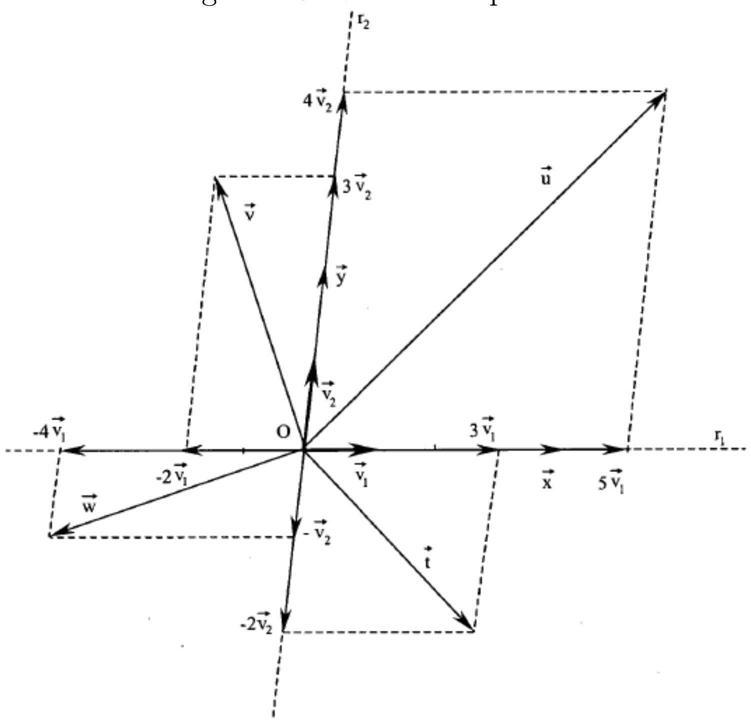
Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

4.2.1 O tratamento algébrico

Vetores no Plano

Considere dois vetores não nulos $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que não possuem mesma direção, representados com a origem no mesmo ponto O e sejam r_1 e r_2 retas contendo estes representantes, respectivamente.

Figura 4.9: Vetores no plano



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Observe que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$, representados na figura 4.9, são expressos em função de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ por

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{5v_1} + \overrightarrow{4v_2}$

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{-2v_1} + \overrightarrow{3v_2}$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{-4v_1}$ - $\overrightarrow{v_2}$

$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{3v_1}$ - $\overrightarrow{2v_2}$

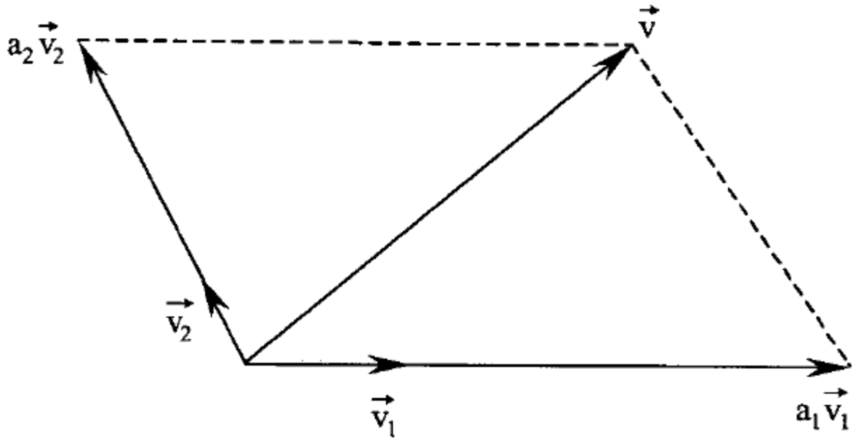
$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{4v_1} + \overrightarrow{0v_2}$

$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0v_1} + \overrightarrow{2v_2}$

De modo geral, dados dois vetores não nulos $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não-colineares, qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ *coplanar* com $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ (ou seja, qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ possuem representantes pertencentes a um mesmo plano), existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 que satisfaz

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a_1v_1} + \overrightarrow{a_2v_2}. \tag{4.1}$$

Figura 4.10: Combinação linear de vetores no plano



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Quando o vetor $\overrightarrow{v}$ é expresso como em (4.1), diz-se que $\overrightarrow{v}$ é uma combinação linear de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. O conjunto $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é chamado de **base** do plano. Aliás, qualquer conjunto de dois vetores não nulos e não-colineares constitui uma base no plano determinado por eles. Embora estejamos simbolizando a base como um conjunto, nós a pensamos como um conjunto ordenado. Então, dada uma base qualquer no plano, todo o vetor desse plano é combinação linear dos vetores dessa base, de modo único. Os números a_1 e a_2 da equação (4.1) são chamados **componentes** de $\overrightarrow{v}$ na base B (a_1 é a primeira componente e a_2 é a segunda componente).

Agora, considere fixado um sistema de eixos cartesianos xOy num plano. Dentre todas as bases no plano xOy, uma se destaca: trata-se da base formada pelos vetores representados pelos segmentos orientados com origem em O e com extremidade nos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$. Esses vetores são usualmente denotados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, respectivamente. Além disso, a base $\{\vec{i}\,,\vec{j}\}$ é chamada de **base canônica** do plano xOy.

Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ qualquer do plano xOy, existe uma só dupla de números x e y tal que

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}. \tag{4.2}$$

Dessa forma, a cada vetor $\vec{v}$ no plano xOy pode-se associar um par de números reais (x,y), que são suas componentes nas base canônica. Por essa razão, escreve-se

$$\vec{v} = (x,y). \tag{4.3}$$

A igualdade (4.3) é chamada *expressão analítica* do vetor $\overrightarrow{v}$.

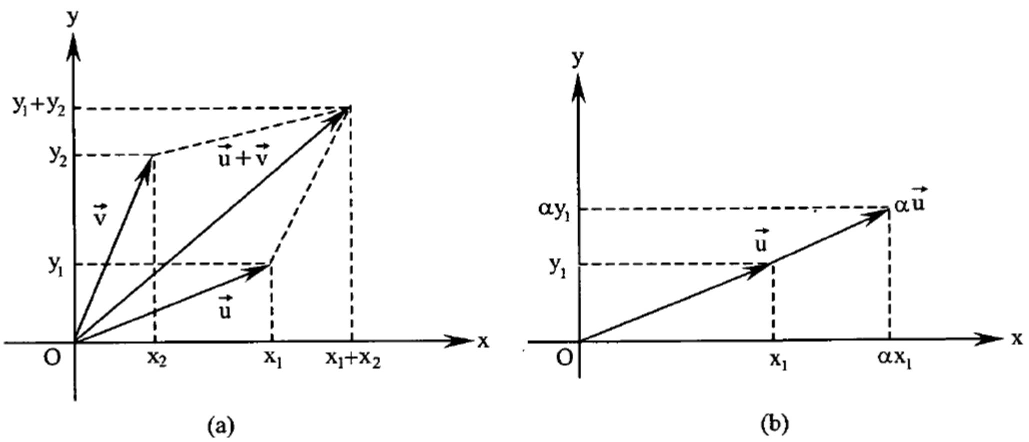
Igualdade de Vetores Dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ num plano xOy são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Neste caso, escrevendo-se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Operações com Vetores Sejam os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ no plano xOy e $\alpha \in \mathbb{R}$. Em relação às componentes, as operações de soma de vetores e produto de um números real por um vetor são expressas por:

1) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2) $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Figura 4.11: Operações com vetores



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Vetor Definido por Dois Pontos

Considere o vetor $\overrightarrow{AB} = (x, y)$ no plano xOy, com origem no ponto $A = (x_1, y_1)$ e extremidade em $B = (x_2, y_2)$.

De acordo com o que foi visto em 4.3, os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ tem expressões analíticas: $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$.

Por outro lado, observando triângulo OAB, obtemos que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

donde

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + [(-1)\overrightarrow{OA}],$$

o que implica

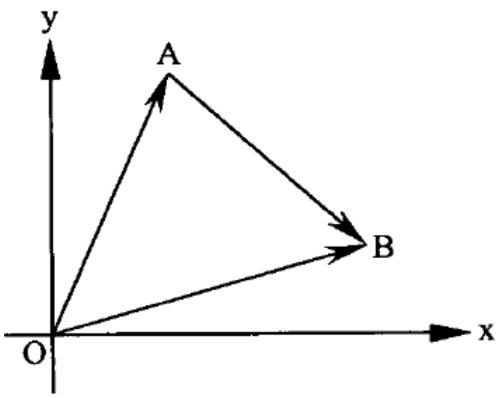
$$x = x_2 - x_1 \text{ e } y = y_2 - y_1.$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Isto é, as componentes de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Figura 4.12: Vetor definido por dois pontos



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Ponto Médio

Considere o segmento de reta de extremos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Seja $M = (x, y)$ o ponto médio de AB. Então, podemos expressar essa situação de forma vetorial como

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB},$$

que é reescrita em relação às componentes como

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y),$$

que implica

$$x - x_1 = x_2 - x \text{ e } y - y_1 = y_2 - y.$$

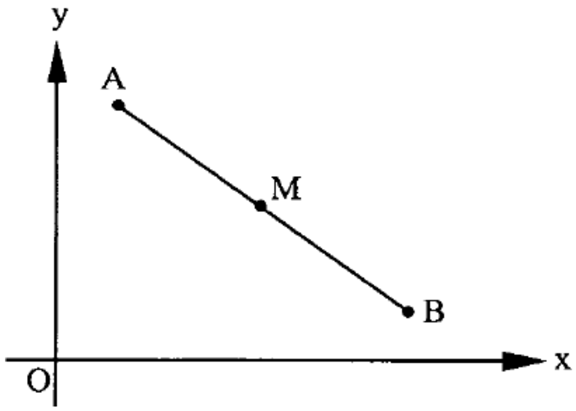
Resolvendo em relação a x e y, obtemos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Portanto,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Figura 4.13: Ponto médio de um vetor



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Paralelismo de dois vetores

Dois vetores não nulos $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são ditos **paralelos**, quando existe um número real α tal que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, y_1) = (\alpha\ x_2, \alpha\ y_2),$$

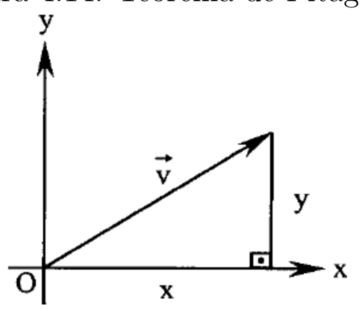
o que resulta em $x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$, ou seja, dois vetores não nulos são *paralelos quando suas componentes forem proporcionais.*

Módulo de um vetor

Seja $\overrightarrow{v} = (x, y)$. Então, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento do vetor $\vec{v}$, também conhecido como **norma**de $\vec{v}$ e denotado $|\vec{v}|$, é dado por

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Figura 4.14: Teorema de Pitágoras

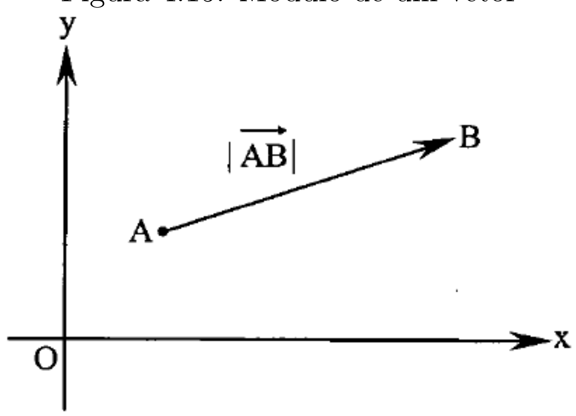


Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Observe que, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, em que $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, então

$$|\overrightarrow{v}| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Figura 4.15: Módulo de um vetor



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

5 Propostas de Sequências Didáticas

5.1 O que é uma proposta de sequência didática?

Uma sequência didática é um conjunto ordenado de conceitos e atividades sistematizados de forma a desenvolver habilidades referentes a uma competência.

> Essas sequências são compostas por situações didáticas, que refletem a intencionalidade do professor em fazer com que os alunos se apropriem de um determinado conhecimento matemático. Tal intencionalidade se efetiva na forma de atividades organizadas e orientadas de acordo com a análise a priori. (BORGES, P. et.al, 2008)

O grande benefício em se trabalhar com a sequência didática é a organização do trabalho de forma gradativa. Assim, a escolha em se trabalhar com essa frente se deu pela possibilidade de se adotar diferentes metodologias em cada etapa do conteúdo.

> Sequências com situações de pesquisa bibliográfica e aulas expositivas podem levar ao aprendizado do mesmo conceito obtido com sequências compostas por situações didáticas que usam materiais concretos, experimentos e aquisição de conceitos via seminários, ou por aquelas que utilizam estudo dirigido, desenvolvendo diferentes habilidades lógicas e atitudes diante das dificuldades inerentes ao aprendizado. (BORGES, P et.al, 2008)

Dessa forma, apresentaremos, nas seções seguintes, duas propostas de sequências didáticas para o ensino do conteúdo de vetores no ensino básico, uma destinada ao Ensino Fundamental e outra destinada ao Ensino Médio.

Por meio das sequências didáticas apresentadas a seguir, espera-se:

- Relembrar conceitos previamente estudados que serão usados para a construção do conteúdo a ser ensinado,
- Instigar questionamentos e suposições a respeito do novo tema,
- Processar novos ensinamentos de forma a fazer conexões com o que já foi visto,
- Problematizar situações para que se possa aplicar a síntese e organização dos conteúdos,
- Avaliar a aprendizagem dos alunos.

5.2 Uma proposta de sequência didática para o Ensino Fundamental

A sequência didática proposta neste trabalho para o Ensino Fundamental é composta de 4 aulas. Seu objetivo é introduzir o conceito de vetores a alunos do Ensino Fundamental de forma mais intuitiva e sem rigor excessivo, procurando desenvolver a base do pensamento geométrico necessária para se compreender aplicações em situações-problemas.

Para o desenvolvimento dessa sequência, é necessário que o aluno já tenha estudado as noções básicas da Geometria Plana (conceitos de ponto, reta e plano), coordenadas de um ponto no plano cartesiano, Teorema de Pitágoras e distância entre dois pontos.

Aula 01

- **Conteúdo a ser desenvolvido:** Grandezas vetoriais.
- **Objetivos:**

  Mostrar a necessidade de se trabalhar com as grandezas vetoriais;

  Identificar as diferenças entre grandezas escalares e vetoriais;

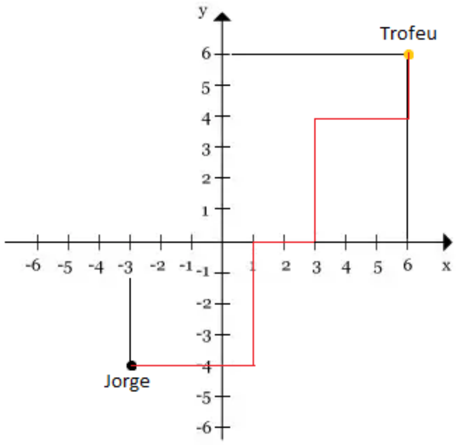
  Compreender a notação vetorial.
- **Metodologia:** Resolução de problemas.
- **Descrição:** Para essa primeira aula, espera-se que os alunos possam intuir a respeito dos conceitos que se deseja formalizar. A aula é composta por 3 exercícios que deverão ser resolvidos pelos alunos na sala de aula. Sugere-se que o professor entregue as atividades uma a uma e que, após a solução apresentada pelos alunos de cada atividade, o professor conduza uma breve discussão, para saber se o objetivo da atividade foi alcançado. Nessa aula, a interação entre os alunos também é muito válida, assim dividir a turma em grupos pode facilitar esse dinamismo.

Exercício 1 - 1ª Opção - Situação-problema

Lígia e Jorge estão treinando para uma competição de casais. Para vencerem a prova, precisam garantir que nenhum passo seja dado fora da rota pré-estabelecida. Jorge está com os olhos vendados e Lígia deve guiá-lo até o troféu que garantirá a vitória. A rota está demarcada de vermelho e suas localizações são as apresentadas no plano cartesiano.

Considerando que Jorge só poderá andar na horizontal ou na vertical e que seu passo corresponde a uma unidade de comprimento, responda:
A) Para alcançar o objetivo bastaria a orientação: Dê 15 passos? Por quê?
B) Existe mais de um caminho? Se sim, cite pelo menos dois.
C) Para o êxito da tarefa, o que todas as falas de Lígia deve ter em comum?
D) Considere a posição inicial de Jorge como J e do troféu T, faça um único caminho retilíneo ligando esses dois pontos.

Figura 5.1: Rota da vitória



Fonte:Autora

Com esse exercício, espera-se que os alunos concluam que, para qualquer movimentação, é necessário explicitar não somente a quantidade de passos (módulo), mas também se os passos serão dados na vertical ou horizontal (direção), para a esquerda ou direita, para cima ou para baixo (sentido). Introduzindo-se, assim, o entendimento de que determinadas grandezas não dependem apenas de um número (módulo), mas podem depender também de direção e sentido.

Exercício 1 - Opção 2 - Jogo

A essência do exercício anterior também pode ser apresentada em forma de um jogo, como será descrito a seguir.

- Desenhe uma tabela com 7 linhas e 7 colunas no chão da sala, de modo que em cada célula caiba os pés de um aluno;
- Divida a sala em duplas;
- Um integrante da dupla fica com os olhos vendados e é colocado pelo professor em qualquer posição na tabela; o outro deve guiá-lo até a célula pré-estabelecida pelo professor somente com orientações verbais;
- Ganha o jogo a dupla que conseguir chegar ao "destino"com o menor número de passos.

Obs.: As duplas não precisam competir ao mesmo tempo. Basta que o professor anote no quadro o número de passos contabilizados por cada dupla.

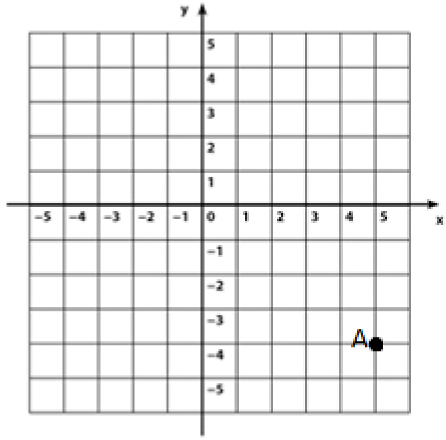
Se feita em forma de jogo, as alternativas descritas na 1ª opção devem ser adaptadas e discutidas posteriormente com os alunos.

Exercício 2 - Diferença entre grandezas escalares e grandezas vetoriais

Observe as duas situações a seguir:

(I) Sabendo que o ponto A deslocou-se 4 unidades de comprimento, qual é sua nova localização?

Figura 5.2: Grandezas escalares X Grandezas vetoriais



Fonte:Autora

(II) A aula de Matemática na escola de Luiz tem início as 13:00 e término as 14:40. Já se passaram 45 min de aula. Que horas são?

A) É possível resolver as duas situações propostas com as informações dadas?
B) Qual é a grande diferença entre elas?
Ao comparar as duas situações propostas, o objetivo é que se perceba a diferença dessas duas grandezas. Na primeira situação, várias possibilidades para a resposta somente com essas informações, ou seja, não dá para determinar precisamente a nova posição do ponto A. Já na segunda situção, temos uma única solução com a informação que foi passada.

Exercício 3 - Notação vetorial

Na situação **(I)** da atividade anterior, suponha que o ponto A se deslocou 5 unidades de comprimento horizontalmente para a esquerda e 3 unidades de comprimento verticalmente para cima; chame esse ponto de A'.
A) Represente o ponto A' no plano.
B) Ligue A e A' com um segmento de reta.

Uma vez que o aluno já concluiu com as atividades 1 e 2 que certas grandezas exigem "três orientações"(direção, módulo e sentido), essa atividade fecha a primeira etapa do reconhecimento das grandezas vetoriais e escalares e introduz a notação de vetores a partir do conhecimento de segmento de reta ligando dois pontos. Esse último exercício tem a finalidade de introduzir a próxima aula.

Aula 02

- **Conteúdo a ser desenvolvido:**

  Definição de módulo, direção e sentido de segmentos orientados;

  Definição de segmentos equipolentes;

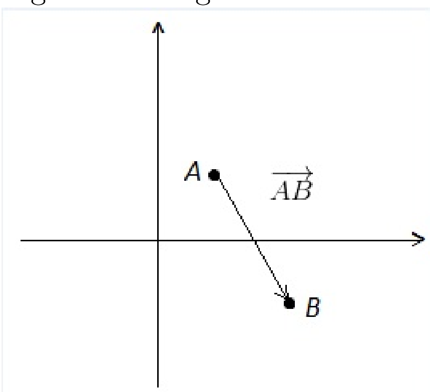
Definição de vetores.

- **Objetivos:** Formalizar os conceitos vistos na aula anterior.
- **Metodologia:** Aula expositiva.
- **Descrição:** O principal objetivo dessa aula é formalizar os conceitos da aula anterior e acrescentar algumas definições com uma linguagem adequada e acessível a faixa etária. Desse modo, sugere-se que as definições sejam escritas no quadro e uma breve explicação seja dada, relembrando as conclusões da aula anterior, e acrescentando exemplos e desenhos, caso seja necessário. Assim os alunos estarão preparados para, em seguida fazer, os exercícios propostos. A resolução das atividades na sala e em grupo é sempre muito proveitosa quando os alunos aderem a proposta do professor, por isso a sugestão é que seja feito dessa forma. Enquanto os alunos fazem os exercícios, é de suma importância que o professor os acompanhe nas carteiras para ter o retorno do que ficou claro ou não, a fim de que no momento de correção se garanta que todas as dúvidas surgidas na resolução sejam discutidas e sanadas.

Definição 7. Um segmento de reta orientado é um segmento de reta AB no qual se fixou um sentido de percurso: o segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$ é o segmento de reta AB com sentido de percurso de A para B, nesse caso, dizemos que A é a origem e B é a extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Da mesma forma, o segmento de reta orientado $\overrightarrow{BA}$ é o segmento de reta AB com sentido de percurso de B para A, nesse caso, B é a origem e A é a extremidade do segmento orientado.

Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é representado geometricamente pelo segmento de reta AB acrescido de uma seta na extremidade B, que caracteriza visualmente o sentido do percurso "de A para B", pode ser verificado por meio da figura 5.3.

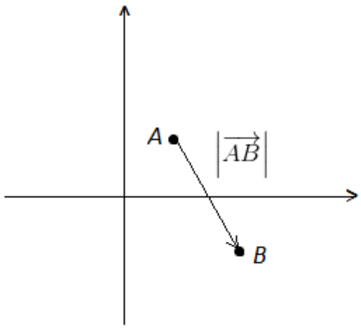
Figura 5.3: Segmento orientado



Fonte:Autora

Definição 8. O módulo de um segmento orientado ($\overrightarrow{AB}$), figura 5.4, é dado pela distância entre os pontos A e B e o representamos da forma $|\overrightarrow{AB}|$.

Figura 5.4: Módulo de um segmento orientado



Fonte:Autora

Exemplo

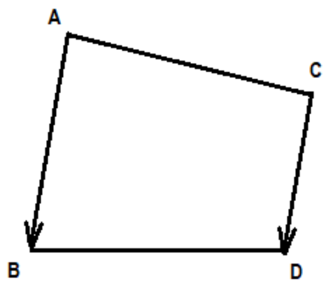
Seja A=(0,2) e B=(3,1). Vamos determinar o **módulo** do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Pelo definição, temos que
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A,B) = \sqrt{(3-0)^2+(1-2)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.

Definição 9. Dizemos que dois segmentos orientados têm a **mesma direção** quando são paralelos ou coincidentes.

Definição 10. Considere dois segmentos orientados distintos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ que possuem mesma direção. Considere a reta $\overline{AB}$, que contém os pontos A e B, e a reta $\overline{CD}$, que contém os pontos C e D.

a: Se as retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ forem distintas, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o **mesmo sentido** quando os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tiverem interseção vazia. Caso contrário, ou seja, se os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não tiverem interseção vazia, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem **sentidos opostos**.

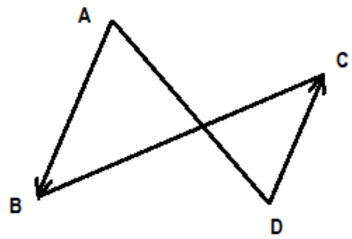
Figura 5.5: Segmentos orientados com o mesmo sentido



Fonte:Autora

b: Se as retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ forem coincidentes, tome um ponto A' $\notin \overline{AB}$ e a única reta s que passa por A' e que é paralela à reta $\overline{AB}$. Em seguida, tome um ponto B' $\in s$ de modo que os segmentos orientados $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{AB}$ possuam o mesmo sentido (conforme item **(a)**). Dizemos que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o **mesmo sentido** se os segmentos orientados $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o mesmo sentido, caso contrário, dizemos que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem **sentidos opostos**.

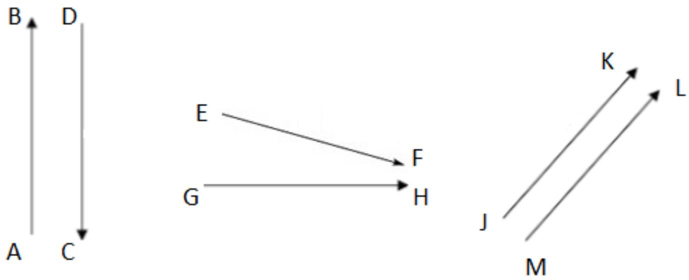
Figura 5.6: Segmentos orientados com sentidos diferentes



Fonte: Autora

Exemplo:

Figura 5.7: Direção e sentido de segmentos orientados



Fonte:Autora

Na figura 5.7,

- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm mesma direção e sentidos diferentes;
- $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$ não possuem mesma direção;
- $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{ML}$ possuem mesma direção e mesmo sentido.

Agora que já sabemos o que é modulo, direção e sentido, podemos definir as grandezas que vimos na aula passada.

Definição 11. Grandezas vetoriais são aquelas que possuem módulo, direção e sentido.

Obs.: Neste momento, relacionar as grandezas vetoriais com as atividades da aula anterior. O professor pode citar, inclusive, mais exemplos de grandezas vetoriais.

Definição 12. Dois ou mais segmentos são equipolentes quando possuem o mesmo módulo, direção e sentido.

Exemplo

Observe, novamente, a figura 5.7. Repare que $\overrightarrow{JK}$ e $\overrightarrow{ML}$ são equipolentes, uma vez que possuem mesmo módulo, direção e sentido.

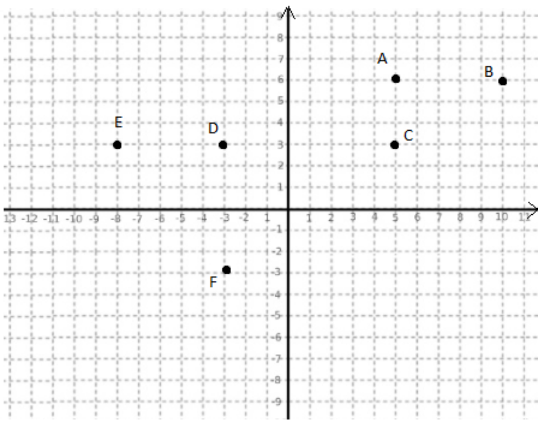
Definição 13. Quando os segmentos de reta orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes, dizemos que eles representam o mesmo **vetor**. Assim, o **vetor** determinado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ e representamos da forma $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Exercícios Propostos

1) O que é necessário fornecer às grandezas vetoriais para que elas fiquem perfeitamente caracterizadas? Qual é diferença entre as grandezas escalares e vetoriais?

2) No plano cartesiano abaixo, temos alguns pontos representados. Em cada alternativa, indique a notação do segmento orientado determinado pelos pontos dados, sua direção, módulo e sentido, conforme o exemplo.

Figura 5.8: Pontos no plano cartesiano



Fonte:Autora

Exemplo: Origem D e extremidade F

- Notação de segmento orientado: $\overrightarrow{DF}$.
- Direção: Vertical

- Módulo: $|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{(-3+3)^2 + (-3-3)^2} = 6$ u.c.

- Sentido: $\overrightarrow{DF}$ - De cima para baixo.

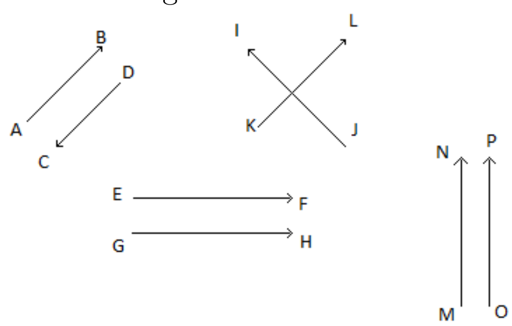
A) Origem A e extremidade B
B) Origem A e extremidade C
C) Origem C e extremidade D
D) Origem C e extremidade E
E) Origem D e extremidade E

3) Responda as questões abaixo:

(a) O que um conjunto de segmentos orientados devem ter em comum para representarem o mesmo vetor?

(b) Quais dos segmentos abaixo representam um mesmo vetor? Justifique a sua resposta.

Figura 5.9: Vetores



Fonte:Autora

Comentários e soluções: Os exercícios propostos nessa aula são um pouco menos intuitivos e mais formais dos que os vistos na aula 01. Com a evolução da sequência, aspira-se conseguir um pouco mais de formalização e desenvolvimento algébrico.
1) Com esse exercício, presume-se que o aluno saiba reconhecer uma grandeza vetorial e diferenciá-la de uma grandeza escalar a partir da definição formal apresentada nessa aula.

R.: Módulo, direção e sentido. A diferença é que as grandezas escalares são perfeitamente caracterizadas por um número, enquanto as vetoriais não.

2) O reconhecimento da existência de segmentos orientados a partir de dois pontos no plano, assim como abstração em reconhecer um segmento que não está traçado, mas que possui módulo, direção e sentido, são as principais características dessa questão. Com ela, o aluno vai utilizar as definições de segmento orientado, módulo, direção e sentido.

R.: A) $\overrightarrow{AB}$; Horizontal; 5 u.c; esquerda para a direita. B) $\overrightarrow{AC}$; Vertical; 3u.c; cima para baixo. C) $\overrightarrow{CD}$; Horizontal; 8u.c; direita para a esquerda. D) $\overrightarrow{CE}$; Horizontal;

13u.c; direita para a esquerda. E) $\overrightarrow{DE}$; Horizontal; 6u.c; direita para a esquerda.

3) Esse exercício tem a função de introduzir a ideia de vetores como um conjunto de segmentos orientados. Mesmo não sendo tão exigente, ele trabalha os conceitos e a parte geométrica para que seja possível uma consolidação melhor a partir do visual.

R.: (a) Esses segmentos devem ser equipolentes, ou seja, devem ter o mesmo módulo, direção e sentido. (b) Os pares que representam os mesmos vetores são $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{OP}$. Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ não representam um mesmo vetor porque não possuem o mesmo módulo nem o mesmo sentido, assim como os segmentos $\overrightarrow{JL}$ e $\overrightarrow{LK}$ que não possuem a mesma direção.

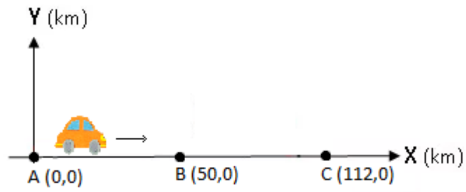
Aula 03

- **Conteúdo a ser desenvolvido:** Operações com vetores (Soma e multiplicação por um escalar).
- **Objetivos:** Introduzir as operações de soma de vetores e o produto de um número por um vetor com a mesma direção.
- **Metodologia:** Resolução de problemas.
- **Descrição:** Essa aula é composta de 4 problemas que devem ser distribuídos pelo professor no início da aula, para que os alunos tentem resolver em grupos buscando usar os conceitos vistos nas aulas anteriores e procurando concluir novos resultados que serão formalizados posteriormente com a correção.

Exercício 01 - Vetores com direção horizontal

Matheus está fazendo uma viagem da cidade A para a cidade C. A fim de garantir que não vai ficar sem gasolina no caminho, Matheus decidiu abastecer na cidade B. A situação está representada na figura 5.10.

Figura 5.10: Percurso de Matheus



Fonte:Autora

A) Como podemos indicar o deslocamento de Matheus da cidade A à cidade B por meio de vetor? Qual é o módulo desse vetor?

B) E da cidade B à cidade C? Qual é o módulo desse vetor?

C) E da cidade A à cidade C? Qual é o módulo desse vetor?

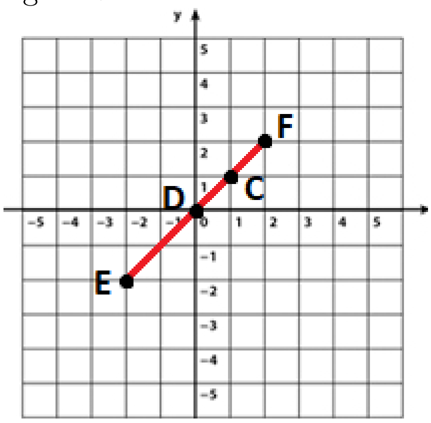
D) Qual a relação entre os módulos desses vetores?

O objetivo dessa atividade é que o aluno conclua, a partir da distância entre dois pontos, que $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Exercício 02 - Vetores com a mesma direção

Maria pretende fazer um percurso de bicicleta que está dividido em três etapas. No primeiro dia, ela saíra do ponto E e seguirá até o ponto D. No segundo dia, Maria continuará a prova do ponto D até o ponto C e, no último dia, irá do ponto C ao ponto F, onde finalizará a trajetória. Veja a figura 5.11.

Figura 5.11: Percurso de Maria



Fonte:Autora

A) Qual é o módulo dos vetores $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CF}$ e $\overrightarrow{EF}$?

B) Qual é a relação entre os módulos desses vetores?

C) Suponha que Maria já chegou ao ponto C. Quanto do percurso ainda falta para se percorrer? É possível representar quanto falta do percurso para ela percorrer usando diferença dos módulos de alguns vetores? Como ficaria essa relação?

R.: A) $|\overrightarrow{ED}| = 2\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{DC}| = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{CF}| = \sqrt{2}$ e $|\overrightarrow{EF}| = 4\sqrt{2}$. B) Tem-se que $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{ED}| + |\overrightarrow{DC}| + |\overrightarrow{CF}|$. C) Faltam $|\overrightarrow{CF}| = \sqrt{2}$ u.m. para se percorrer. $|\overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{EF}|$ - $|\overrightarrow{ED}|$ - $|\overrightarrow{DC}|$.

Obs.: Neste exercício, o professor pode explicar que, se representarmos o deslocamento por um caminho retilíneo de um ponto A para um ponto B pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, então o deslocamento total de Maria pode ser representado na forma: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$.

Exercício 03 - Multiplicação de vetores por um número natural

Imagine que no exercício 01 Matheus tenha errado o caminho e andou, na direção e sentido corretos, o dobro do que deveria, chegando ao ponto E.

A) Faça o esboço dessa situação, representando o ponto E no plano cartesiano.

B) Quantos quilômetros ele percorreu ao todo?

C) É possível representar o quanto ele andou em função do vetor $\overrightarrow{AC}$? Como seria?

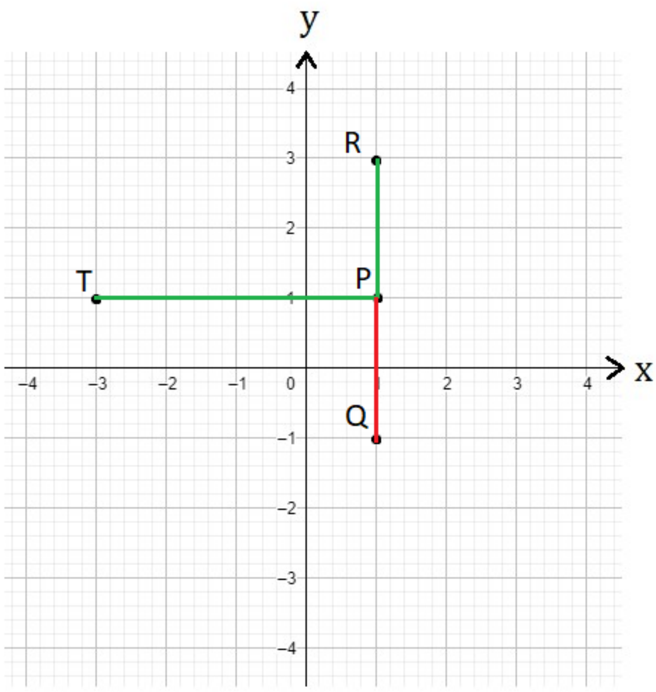
Mesmo não tendo escrito o ponto E na atividade 1, acredita-se que, a partir das aulas anteriores, o aluno já saiba representar esse ponto com as informações dadas. Portanto, que ele abstraia e desenhe a situação como ficaria. A palavra dobrar sugere que o aluno pense na multiplicação por pelo número natural 2 ou como a soma do comprimento de dois segmentos de mesmo tamanho.

Respostas: A) E=(124,0); B) $112 \cdot 2 = 124km$; C) $|\overrightarrow{AE}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AB}|$

Exercício 04 - Vetores com sentido opostos

Carol está saindo da cidade T onde mora para visitar sua tia, que se encontra na cidade R. Para percorrer esse caminho, ela terá que passar pela cidade P, local em que fará uma parada para lanchar. Infelizmente, seu GPS parou de funcionar em P e ela foi para a cidade Q, que apesar de ficar à mesma distância de P, está no sentido contrário do que ela pretendia ir, conforme figura 5.12.

Figura 5.12: Situação de Carol



Fonte:Autora

Obs.: Aqui, novamente, cabe uma observação do professor: representando o deslocamento total que Carol deveria fazer da cidade T a cidade R pelo vetor $\overrightarrow{TR}$, ao incluir a parada na cidade P, teríamos: $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PR}$.

A) Qual é a diferença entre os vetores $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{RP}$? Eles possuem a mesma direção, módulo e sentido?

B) Complete o ( ) para representar de fato a rota que ela realizou.

$\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{TP} + (\quad)$.

R.: A) Os vetores $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{RP}$ possuem mesmo módulo, mesma direção, mas estão em sentidos opostos. (O professor pode introduzir a notação $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$). B) $\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PQ}$.

Exercício 05 - Multiplicação de vetores por um número racional

No exercício 02, suponha que, na última etapa, Maria tenha conseguido percorrer um terço do caminho de C a F.

A) A qual distância ela ficou da chegada?

B) Quanto do caminho da terceira etapa ela percorreu?

C) Você seria capaz de descrever o quanto ela percorreu ao todo (desde o ponto E), usando os vetores $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$? Como ficaria?

A partir desse exercício, que exige um pouco mais de abstração, a intenção é estender o conceito de multiplicação de vetores por um escalar racional. É claro que não se espera que o aluno tire dos exercícios todas as conclusões sozinho. Por isso, é crucial a orientação do professor em todas as questões.

R.: A) Ela ficou a uma distância de $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ da chegada. B) Ela percorreu um terço da terceira etapa, ou seja, ela percorreu $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ u.m. da terceira etapa. C) Ela percorreu ao todo $|\overrightarrow{ED}| + |\overrightarrow{DC}| + \dfrac{1}{3}|\overrightarrow{CF}|$.

Definição 14. Considere um vetor $\overrightarrow{v}$ e um número real $\alpha \neq 0$. Definimos o produto do número real α pelo vetor $\overrightarrow{v}$, denotado $\alpha\overrightarrow{v}$, da seguinte forma:

(a) Se $\overrightarrow{v}$ é nulo ou $\alpha = 0$, então $\alpha\overrightarrow{v}$ é nulo.

(b) Se $\overrightarrow{v}$ não é nulo e $\alpha \neq 0$, então $\alpha\overrightarrow{v}$ é definido pelo comprimento, direção e sentido descritos a seguir:

- o comprimento de $\alpha\overrightarrow{v}$ é igual ao comprimento de $\overrightarrow{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;
- $\alpha\overrightarrow{v}$ possui mesma direção de $\overrightarrow{v}$;
- $\alpha\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$, e sentidos opostos se $\alpha < 0$.

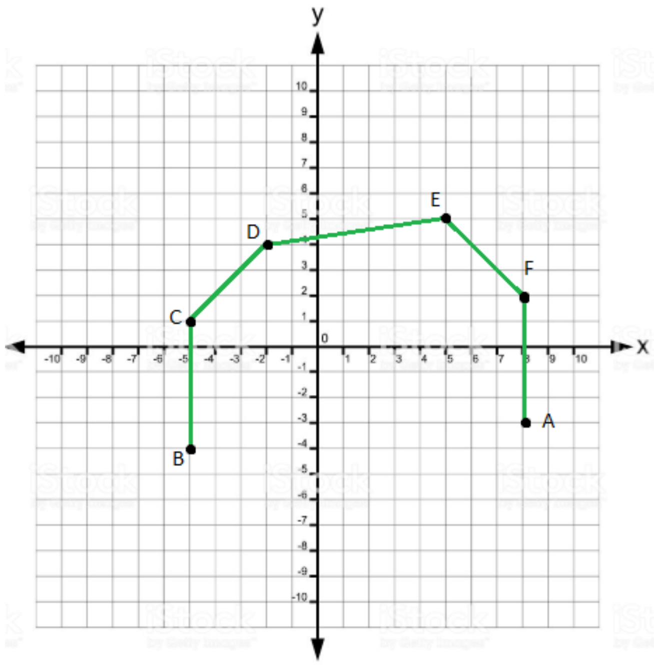
Aula 04

- **Conteúdo a ser desenvolvido:** Soma de vetores.
- **Objetivos:** Entender a soma de vetores pelas regras do polígono e paralelogramo.
- **Metodologia:** Aula expositiva e resolução de exercícios.
- **Descrição:** Essa aula será dividida em dois momentos. No primeiro momento, o professor entregará o exercício 1 aos alunos, que deverão resolvê-las em grupo. No segundo momento, o professor fará a correção e discussão das questões, para, então, formalizar os conceitos com as definições, que serão passadas no quadro e registradas nos cadernos. Após a explicação e anotação dos alunos, o professor resolverá o exercício 2 no quadro, junto com os alunos. Ao final da aula, o professor entregará uma atividade com exercícios que deverão ser resolvidos individualmente e em casa, a fim de dar um tempo para a assimilação de todo o conteúdo visto.

Exercício 1 - Soma de vetores

Cissa está caminhando em uma trilha, descrita na figura 5.13 do ponto B ao ponto A, com seus amigos. Luís e João estão bem adiantados e já se encontram no ponto E, enquanto ela está com um grupo maior no ponto C. Como não tem muita experiência em trilhas, João acabou caindo e torcendo o pé no ponto E. Luís não conseguiu carregar o amigo até o fim do trajeto e ficou esperando a equipe de apoio chegar. Como está de moto no ponto C e está preocupada em socorrer João, a equipe de apoio escolheu fazer o caminho mais curto para chegar a João, em menos tempo.

Figura 5.13: Soma de vetores



Fonte:Autora

A) Lembrando que a equipe sairá do ponto C e deseja chegar ao ponto E, qual é o caminho mais curto? Faça o esboço no desenho.

B) Por esse caminho, qual é a distância percorrida?

C) Qual foi a distância percorrida por João e Luís do ponto C ao ponto E? Foi a mesma percorrida pela equipe de apoio?

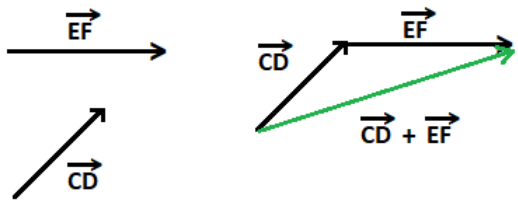
D) Está correto escrever $|\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{CE}|$?

Na aula anterior, os alunos viram soma de módulos de vetores com a mesma direção. Esse exercício tem a finalidade de desconstruir que o resultado visto na aula anterior se estende para vetores com diferentes direções.

Respostas: A) O caminho mais curto é o segmento de reta que liga C a E. B) $|\overrightarrow{CE}| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$. C) $|\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ D) Não, já que por B) e C) tem-se $|\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DE}| = 8\sqrt{2} \neq |\overrightarrow{CE}| = 2\sqrt{29}$

Definição 15. (Regra do polígono) Dados dois vetores não nulos no plano $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$, o vetor soma $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ é determinado da seguinte forma: desenhamos um segmento orientado com mesmo módulo, direção e sentido de $\overrightarrow{CD}$ (ou seja, desenhamos um representante de $\overrightarrow{CD}$) cuja extremidade coincide com a origem do vetor $\overrightarrow{EF}$. O vetor soma $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ é determinado pelo segmento de reta orientado que liga a origem desse representante de $\overrightarrow{CD}$ com a extremidade de $\overrightarrow{EF}$, nesse sentido de percurso.

Figura 5.14: Soma de vetores - Regra do polígono

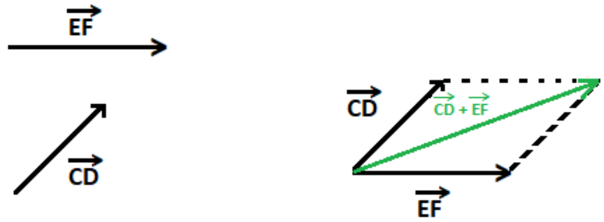


Fonte:Autora

Definição 16. (Regra do paralelogramo)

Dados dois vetores não nulos no plano $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$, também podemos determinar o vetor soma $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ usando a chamada *Regra do paralelogramo*: desenhamos um representante do vetor $\overrightarrow{CD}$ cuja origem coincide com a origem do vetor $\overrightarrow{EF}$. O vetor soma $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ será determinado pela diagonal do paralelogramo formado partindo da origem de $\overrightarrow{EF}$.

Figura 5.15: Soma de vetores - Regra do paralelogramo

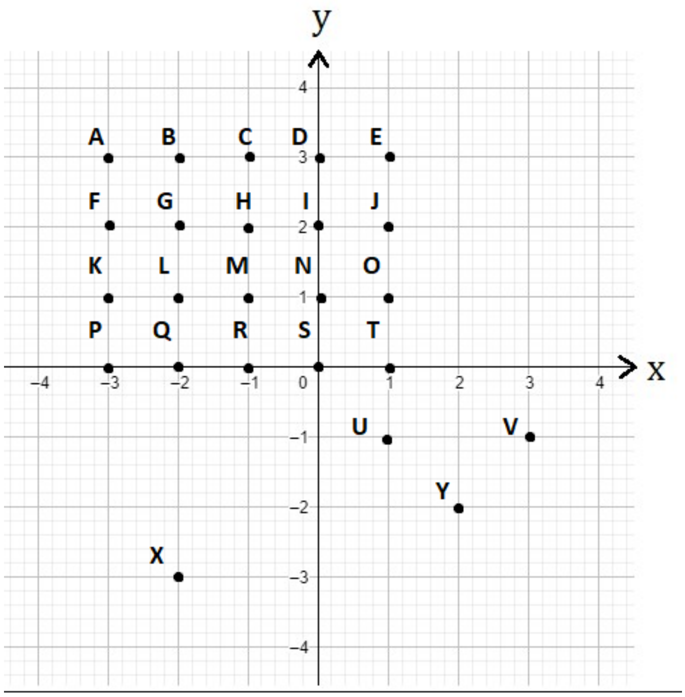


Fonte:Autora

Exercício - Representação geométrica da soma de vetores no plano

1) Observe a figura 5.15. Represente geometricamente no plano a soma de vetores e calcule seu módulo em cada caso.

Figura 5.16: Soma de vetores - Exercício



Fonte:Autora

A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AK}$

B) $\overrightarrow{EU} + \overrightarrow{EA}$

C) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{GJ}$

D) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}$

E) $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{UY}$

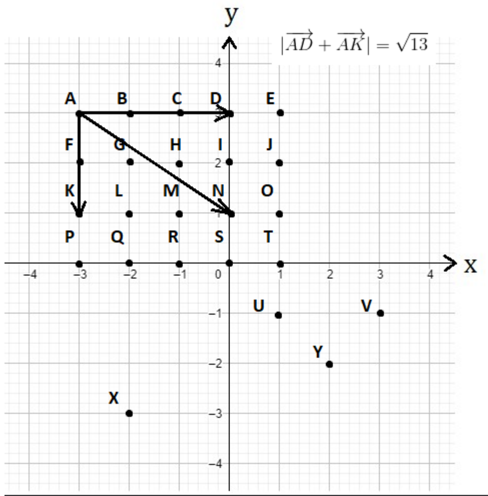
F) $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{MO}$

G) $\overrightarrow{XT} + \overrightarrow{SU}$

Respostas:

A)

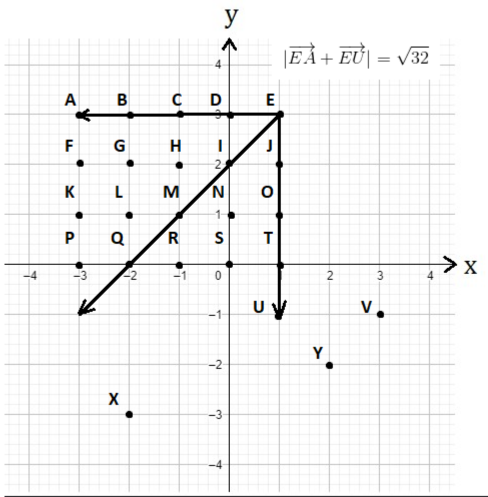
Figura 5.17: Soma de vetores - Item A



Fonte:Autora

B)

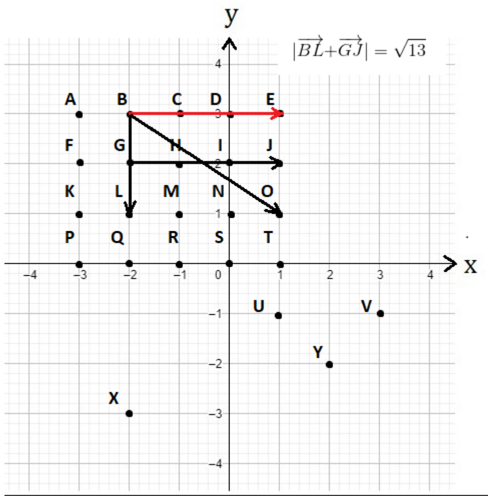
Figura 5.18: Soma de vetores - Item B



Fonte:Autora

C)

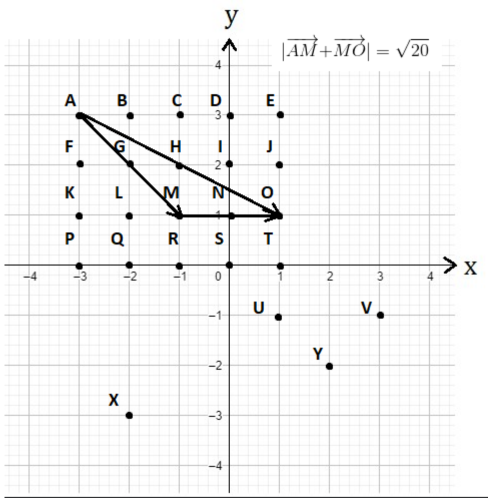
Figura 5.19: Soma de vetores - Item C



Fonte:Autora

D)

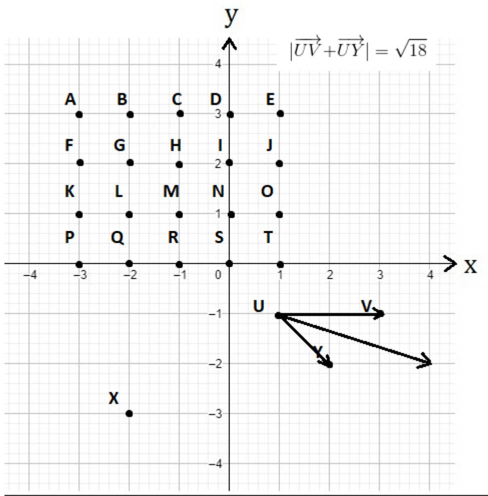
Figura 5.20: Soma de vetores - Item D



Fonte:Autora

E)

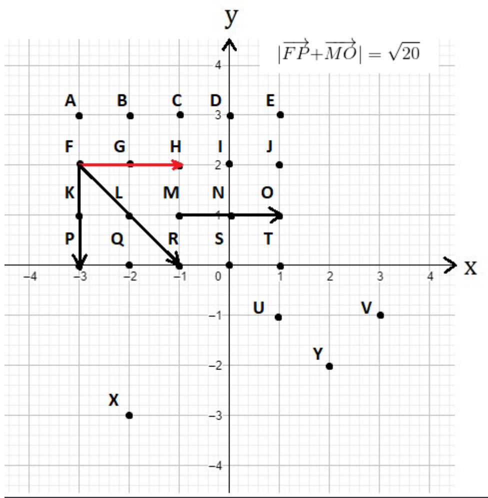
Figura 5.21: Soma de vetores - Item E



Fonte:Autora

F)

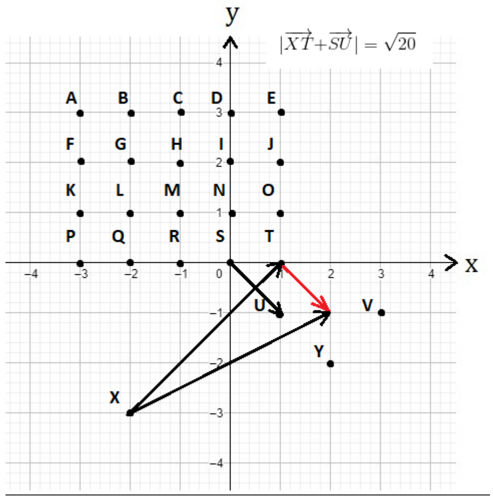
Figura 5.22: Soma de vetores - Item F



Fonte:Autora

G)

Figura 5.23: Soma de vetores - Item G

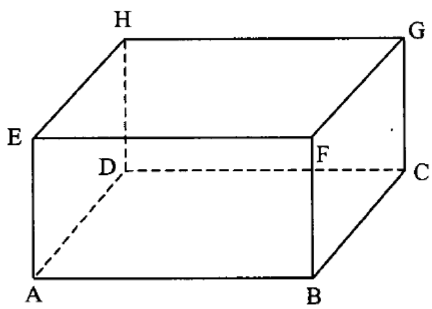


Fonte:Autora

Atividade para casa

1) A figura 5.24, representa um paralelepípedo retângulo. Decida se cada uma das alternativas são verdadeira ou falsa. Não esqueça de justificar suas respostas.

Figura 5.24: Atividade final 1



Fonte WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**

A) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ B) $|\overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{BA}|$ C) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}$

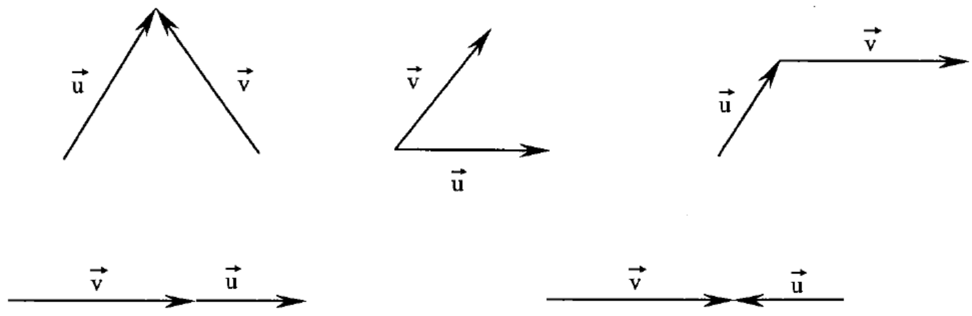
D) $|\overrightarrow{HF}| = |\overrightarrow{AC}|$ E) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ F) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

G) $|\overrightarrow{GF}| = |\overrightarrow{AD}|$ H) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$ I) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$

2) Apresente graficamente o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ em cada situação a seguir.

3) (UNESP) No ensino médio, as grandezas físicas costumam ser classificadas em duas categorias. Na primeira categoria, estão as grandezas definidas apenas por um número e uma unidade de medida; as grandezas da segunda categoria requerem, além disso, o conhecimento de sua direção e de seu sentido. Como são denominadas as duas

Figura 5.25: Atividade final 2

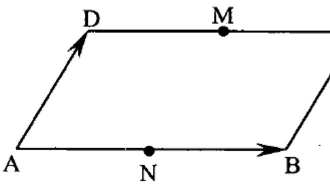


Fonte WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica** (adaptada)

categorias, na sequência apresentada?

4) Considere o paralelogramo ABCD na figura abaixo. Sejam M e N os pontos médios de $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AB}$, respectivamente. Determine:

Figura 5.26: Atividade final 4



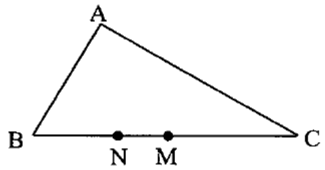
Fonte WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**

A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ C) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

D) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}$ E) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ F) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

5) No triângulo ABC, tem-se que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Expresse $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{AN}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Figura 5.27: Atividade final 5



Fonte WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**

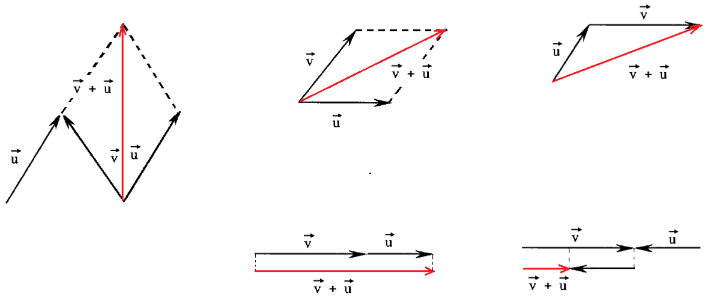
Respostas:

1) A) F. Não tem o mesmo módulo, direção e sentido.

B) F. O paralelepípedo é retângulo, logo os lados não são todos congruentes.
C) F. Não possuem a mesma direção.
D) V. Ambos são hipotenusas de triângulos congruentes.
E) V. Possuem o mesmo módulo, direção e sentido.
F) V. Possuem o mesmo módulo, direção e sentido.
G) V. Propriedade do paralelepípedo.
H) V. Possuem o mesmo módulo, direção e sentido.
I) V. Possuem o mesmo módulo, direção e sentido.

2)

Figura 5.28: Atividade final - solução 2



Fonte Autora

3) Escalares e vetoriais.
4) A) $\overrightarrow{AC}$ B) $\overrightarrow{AC}$ C) $\overrightarrow{DB}$ D) $\overrightarrow{DN}$ E) $\overrightarrow{MN}$ F) $\overrightarrow{BC}$
5) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

5.3 Uma proposta de sequência didática no Ensino Médio

Na proposta de sequência didática para o Ensino Médio, a dinâmica das aulas é diferente da apresentada para o Ensino Fundamental. Para esse nível escolar, o objetivo é formalizar e aprofundar os conceitos geométricos vistos na etapa anterior, trabalhando algumas demonstrações que já foram aplicadas no estudo de geometria plana, por exemplo.

Nessa sequência, considera-se que o conteúdo de vetores seja abordado depois de Geometria Analítica, portanto, espera-se que os alunos dominem esse conteúdo para que se possam ter um aproveitamento melhor e seja possível a comparação dos métodos na resolução de problemas.

As 3 aulas que compõem essa sequência didática são compostas de definições, exemplos e exercícios propostos, que poderão ser resolvidos pelos alunos em grupo. Na primeira aula, o professor deve, inicialmente, revisar, junto com os alunos, os conceitos relacionados ao segmentos de reta orientados, apresentados na propostas para o Ensino Fundamental, a fim de contextualizar e relembrar aos alunos os conceitos já estudados. Ao final da terceira aula, é apresentada uma atividade que deverá ser resolvida pelo aluno em casa.

Aula 01

- **Conteúdo a ser desenvolvido:**

  Vetores no plano;

  Introdução ao tratamento algébrico de vetores no plano;

  Operações de soma e produto por escalar.

- **Objetivos:**

  Definir as componentes de um vetor no plano;

  Estabelecer igualdade entre vetores em relação às componentes;

  Apresentar as operações com vetores (soma e multiplicação por escalar) em relação às componentes;

  Reconhecer que um vetor é combinação linear de outros dois.

- **Metodologia:** Aula expositiva e Resolução de problemas.

Vetores no plano

O conceito de vetor está relacionado aos conceitos de módulo, direção e sentido. Esses conceitos já foram estudados (segundo a proposta deste trabalho) no Ensino Fundamental, e estava relacionado aos conceitos de segmentos de reta orientados e grandezas vetoriais.

Conceitos a serem revisados na primeira parte da aula:

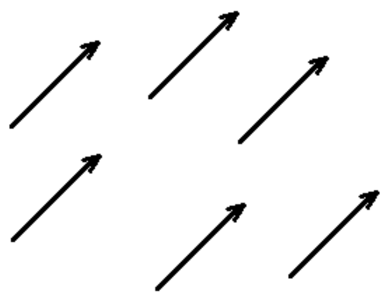
- Grandezas vetoriais;
- Segmento de reta orientado e sua representação gráfica;
- Módulo, direção e sentido de um segmento de reta orientado;
- Segmentos de reta orientados equipolentes.

Definição 17. Dados os pontos A e B no plano xOy, definimos o **vetor** determinado pelo segmento orientado $\overline{AB}$, denotado por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, como o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a $\overline{AB}$. Cada segmento orientado equipolente a $\overline{AB}$ é chamado de **um representante** do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Observe que segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo (comprimento) representam o mesmo vetor. Portanto, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. A direção, o sentido e o módulo do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o módulo de qualquer um dos segmentos orientados representantes, respectivamente.

A representação gráfica de um vetor $\vec{v}$ é dada pela representação geométrica de qualquer um dos seus representantes.

Figura 5.29: Representantes de um vetor



Fonte: Autora

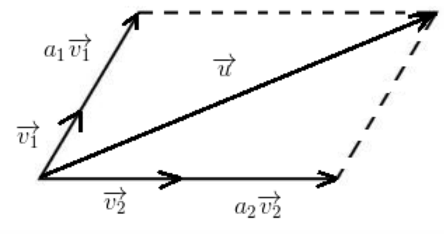
Na figura 5.29, observe que temos 6 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

O vetor determinado pelo segmento de reta orientado nulo é chamado de **vetor nulo**, e é usualmente denotado por $\vec{v} = \vec{0}$.

Dois vetores não nulos são ditos **colineares** quando possuem a mesma direção.

Dados dois vetores não nulos $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e não colineares no plano xOy, então qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ (pertencente ao plano) poderá ser decomposto segundo as direções $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$:

Figura 5.30: Combinação linear de vetores



Fonte:Autora

Nesse caso, escreve-se $\overrightarrow{u} = a_1\ \overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$ e se diz que $\overrightarrow{u}$ é uma **combinação linear** de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, onde a_1 e a_2 são números reais e o conjunto B=$\{v_1, v_2\}$ é chamado de **base do plano**.

Os números a_1 e a_2 são chamados **componentes** ou **coordenadas** de $\overrightarrow{u}$. Nesse caso, o vetor $\overrightarrow{u}$ pode ser representado analiticamente por

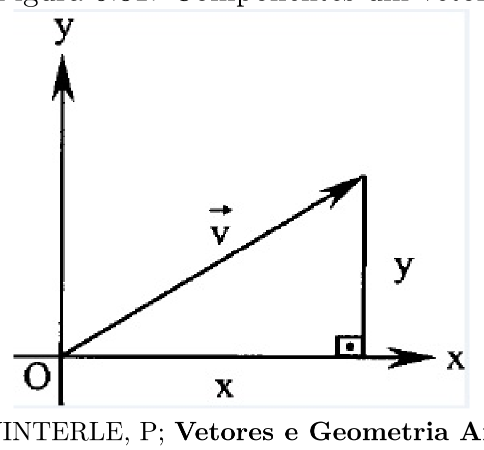
$$\vec{u} = (a_1, a_2).$$

Na prática, dentre todas as bases possíveis, a mais utilizada é a formada pelos vetores $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OQ}$ e $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OR}$, em que $O = (0,0)$, $Q = (1,0)$ e $R = (0,1)$. Essa base é chamada de **base canônica** do plano xOy.

No que segue, essa será a única base considerada. Assim, ao escrevermos $\vec{v} = (x, y)$, estaremos escrevendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Observe que, as componentes x e y do vetor $v = (x, y)$ coincidem com as coordenadas do ponto final do representante de $\vec{v}$ que tem ponto inicial na origem.

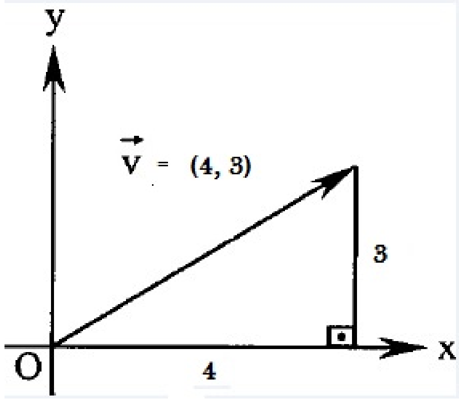
Figura 5.31: Componentes um vetor



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

Exemplo: Dado o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ no plano xOy, em que $P = (4, 3)$, então temos que $\vec{v} = (4, 3)$, ou seja, (4,3) são as componentes do vetor $\vec{v}$ na base canônica.

Figura 5.32: Exemplo de componentes de um vetor



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica** (adaptada)

Operações com vetores no plano

Igualdade de Vetores

Definição 18. Dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo: Os vetores $\overrightarrow{u} = (x + 4, 1)$ e $\overrightarrow{y} = (5, y - 3)$ são iguais se $x + 4 = 5$ e $1 = y - 3$. Assim, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então $x = 1$ e $y = 4$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = (5, 1)$.

Soma de vetores e multiplicação de vetores por um escalar

Definição 19. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, definimos a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, e o produto de α e $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}$, por:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

Obs.: Usa-se a notação $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{v}$ para denotar a soma $\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. E diz-se que $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{v}$ é a **diferença** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.
Exemplo: Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (5, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 10)$.

Então, temos que:

(a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (5 + 1, -3 + 10) = (6,\ 7)$

(b) $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{v} = (5 - 1, -3 - 10) = (4, -13)$

(c) $-2\overrightarrow{u} = (-2 \cdot 5, -2 \cdot (-3)) =$ (-10, 6)

Exercícios Propostos

1) Determine m e $n \in \mathbb{R}$ para que as igualdades sejam verdadeiras.

A) (5+m,-2n) = (3m, n-7)

B) (m-4n,8) = (n+5, m-1)

C) $(m^2 - 3, n + 9) = (n^2 + n - 4, m^2 + 1)$

2) **Dados $\overrightarrow{u}$= (2 ,1), $\overrightarrow{v}$=(-1, 0) e $\overrightarrow{w}$=(3,4), calcule:**

A) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

B) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$

C) $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$

D) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$

E) $3\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}$

F) $\frac{2}{3}\overrightarrow{v} - \frac{2}{3}\overrightarrow{w}$

R.:1) A) $m = \frac{5}{2}$ e $n = \frac{7}{3}$
B) $m = 9$ e $n = \frac{4}{5}$
C) $n = 3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{11}$ e $n = -3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}$
2) A) (1, 1) B) (5, 5) C) (-4, -4) D) (-2, -3) E) (4, -5) F) (-$\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}$)

Aula 02

- **Conteúdo a ser desenvolvido:**
  Vetor determinado por dois pontos;
  Paralelismo de dois vetores.
- **Objetivos:**
  Determinar as componentes de um vetor a partir de dois pontos;
  Identificar quando dois vetores são paralelos.
- **Metodologia:** Aula expositiva e Resolução de problemas.

Vetor determinado por dois pontos no $\mathbb{R}^2$

Definição 20. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano xOy. Considere o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Queremos determinar as componentes do vetor $\vec{v}$. Se $\vec{v} = (x, y)$, então x e y são as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ no plano que é a extremidade do representante de $\vec{v}$ que parte da origem $O = (0, 0)$. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OP}$ são representantes de um mesmo vetor (ou seja, possuem mesmo comprimento, sentido e direção). Isso implica que os segmentos de reta AP e BO possuem o mesmo ponto médio, ou seja, vale a igualdade

$$\left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right) = \left(\frac{x_2 + 0}{2}, \frac{y_2 + 0}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x}{2} = \frac{x_2 + 0}{2} \text{ e } \frac{y_1 + y}{2} = \frac{y_2 + 0}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = x_2 - x_1 \text{ e } y = y_2 - y_1.$$

Logo, concluímos que, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Também podemos denotar esse resultado por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = B - A$.

Sabe-se que o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem infinitos representantes, dentre eles um dos mais utilizados é, justamente, aquele que possui origem no ponto $O = (0, 0)$ e extremidade em $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Por isso, o representante $\overline{OP}$ é chamado de **vetor posição** de $\overrightarrow{AB}$.

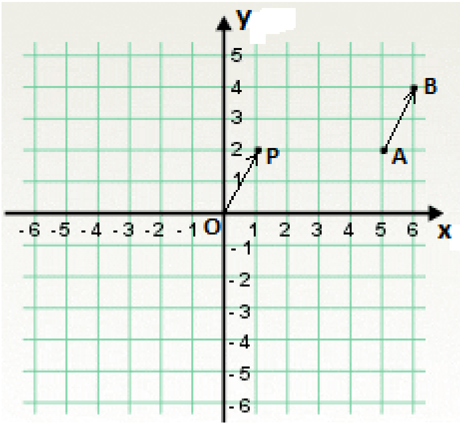
Exemplo: Considere os pontos $A = (5, 2)$ e $B = (6, 4)$. Então, tem-se que $\overrightarrow{AB} =$ (6-5,4-2)= (1,2) e $\overrightarrow{OP} =$ (1,2) representado com origem em $O = (0, 0)$ é o vetor posição de $\overrightarrow{AB}$.

Paralelismo de dois vetores

Definição 21. Dois vetores não nulos $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são **paralelos** se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v}$, ou seja,

$x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \alpha$ e $\frac{y_1}{y_2} = \alpha$.

Figura 5.33: Vetor Posição



Fonte:Autora

Assim dois vetores são paralelos quando suas correspondentes forem proporcionais.

Exemplo: Os vetores $\overrightarrow{u} = (-6, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (9, -3)$ são paralelos, porque $-6 = \dfrac{-2}{3}(9)$ e $2 = \dfrac{-2}{3}(-3)$.

Já os vetores $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (4, 6)$ não são paralelos, já que $\frac{-1}{4} \neq \frac{2}{6}$.

Exercícios Propostos

1) Considere os pontos $A = (5, 2)$, $B = (4, -3)$, $C = (-1, 0)$ e $O = (0, 0)$. Determine as componentes do vetores abaixo:

A) $\overrightarrow{AB}$

B) $\overrightarrow{AC}$

C) $\overrightarrow{BC}$

D) $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AC}$

E) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$

F) $\overrightarrow{OB}$ - 2 $\overrightarrow{OC}$

2) Nas alternativas A, B e C calcule o ponto médio de cada segmento.

3) Determine a e b de modo que os vetores $\overrightarrow{u}$=(4,2) e $\overrightarrow{v}$=(10, a) e $\overrightarrow{w} = (b, 4)$ sejam dois a dois paralelos.

R.: 1) A) (-1, -5) B) (-6, -2) C) (-5, 3) D) (5, -3) E) (0, 5) F) (6, -3)
2) A)($\frac{9}{2}$, $\frac{-1}{2}$) B) (2,1) C) ($\frac{3}{2}$, $\frac{-3}{2}$)
3) a=5, b=8

Aula 03

- **Conteúdo a ser desenvolvido:**
  Produto escalar de dois vetores;
  Módulo de um vetor;
  Ângulo entre dois vetores.
- **Objetivos:**
  Definir o produto escalar de dois vetores no $\mathbb{R}^2$;
  Definir módulo de um vetor;
  Determinar o ângulo entre dois vetores a partir de suas componentes.
- **Metodologia:** Aula expositiva e Resolução de problemas.

Definição 22. Chama-se **produto escalar** ou **produto interno** de dois vetores $\overrightarrow{u}=(x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v}=(x_2, y_2)$, representado por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, o número real $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x_1x_2+y_1y_2$.

O produto escalar de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ também pode ser escrito como $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$ e lê-se $\overrightarrow{u}$ escalar $\overrightarrow{v}$.

Exemplo: Considere os vetores $\overrightarrow{u}=(5, 3)$ e $\overrightarrow{v}=(9, -4)$. Então

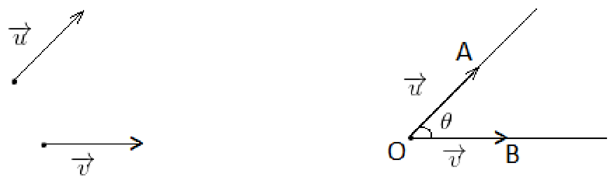
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5(9) + 3(-4) = 45 - 12 = 33.$$

Definição 23. Norma de $\overrightarrow{u} =(x, y)$, denotado por $|\overrightarrow{u}|$ é o número real não negativo $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a norma de $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer um de seus representantes.

Exemplo: Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, em que $A = (2, 5)$ e $B = (8, 3) \Rightarrow$. Assim, temo que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (8 - 2, 3 - 5) = (6, -2)$. Portanto, $|\overrightarrow{u}|=\sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$.

Definição 24. O **ângulo** entre dois vetores não nulos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, em que $O = (0, 0)$, é o ângulo θ formado pelas duas semirretas de mesma origem em O e que contém os segmento de reta OA e OB, respectivamente.

Figura 5.34: Ângulo entre dois vetores



Fonte:Autora

Repare, na figura 5.34, que $\overrightarrow{AB}$ é igual a $\overrightarrow{v}$ - $\overrightarrow{u}$. Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OAB, temos:

$$|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u}|^2 - 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|cos(\theta).$$

Por outro lado, usando a definição de produto escalar e desenvolvendo $|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}|^2$, obtemos:

$$|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u}|^2 - 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$$

,

então

$$|\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u}|^2 - 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|cos(\theta) = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{u}|^2 - 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|cos(\theta), \qquad \text{para } 0 \leq \theta \leq 180°.$$

A partir do resultado acima, podemos concluir que, se $\theta = 90°$, então $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = 0$. Portanto, dizemos que dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ são **ortogonais** quando $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$=0.

Exemplo: Considere $\overrightarrow{v}$= (1,10) e $\overrightarrow{u}$= (-5,6). Vamos determinar o ângulo entre eles.

Pelo resultado acima, tem-se que

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos(\theta).$$

Como

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = -5(1) + 6(10) = -5 + 60 = 55$$

e

$$|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|cos(\theta) = \sqrt{1^2+10^2}\sqrt{(-5)^2+6^2}\cos(\theta) = \sqrt{101}\sqrt{61}\cos(\theta) \simeq 78,49\cos(\theta),$$

temos que

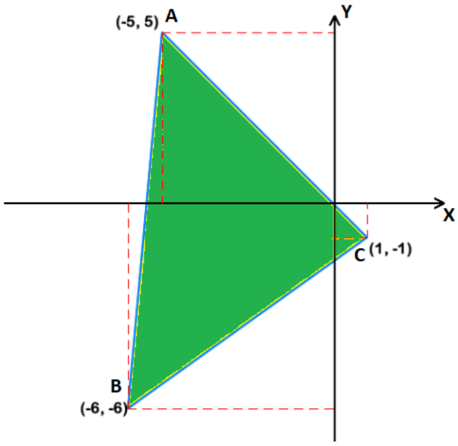
$$55 = 78,49\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) \quad \simeq \quad \frac{55}{78,49} \quad \Rightarrow \quad \theta = arco\ cosseno\ 0,7$$

.

Exercícios propostos

1) Na figura abaixo está representado o triângulo ABC.

Figura 5.35: Triângulo ABC



Fonte:Autora

Determine:

A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
C)$|\overrightarrow{AB}|$
D) $|\overrightarrow{BC}|$
E) $|\overrightarrow{AC}|$
F) O ângulo θ entre $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AC}$
G) O ângulo α entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$
H) O ângulo γ entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$

Respostas:

1) A) 60 B) -62 C) $\sqrt{122}$ D) $\sqrt{74}$ E) 6 $\sqrt{2}$ F) $\theta \cong arcos\frac{5}{\sqrt{61}}$
G) $\alpha \cong arcos\frac{62}{\sqrt{122}\sqrt{74}}$ H) $\gamma \cong arcos\frac{12}{\sqrt{72}\sqrt{74}}$

Atividade para casa

O objetivo dessa atividade é dar ao aluno uma oportunidade de aplicar os conceitos estudados para a resolução de problemas geométricos, fazendo uma comparação com outros métodos de resolução. Assim, pode-se mostrar ao aluno que a Matemática dispõe de diferentes ferramentas para a resolução de problemas.

Realize as atividades a seguir de duas maneiras distintas, uma usando vetores e outra não.

1) Dados os pontos A=(4,3) e B=(5,-1), calcule a distância entre esses dois pontos.

2) Determine as coordenadas do ponto médio M de $\overline{AB}$.

3) Prove que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

4) Considere o paralelogramo ABCD, tais que A=(2,5), B=(-3,1) e C=(4,-4). Determine as coordenadas do vértice D.

5) Demonstre que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual a sua metade.

Respostas:

1) **Método Algébrico**

$d(A,B) = \sqrt{(5-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

Método Vetorial

$\overrightarrow{AB} = (1,-4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

2) Seja A=(4,3), B=(5,-1) e M=(x,y) ponto médio de $\overrightarrow{AB}$

Método Algébrico

Então d(A,M)=d(B,M)

Sabendo que o coeficiente angular da reta que passa por A e B é $\frac{4}{-1} = -4$ a equação dessa reta é

$$y + 1 = -4(x-5) \Rightarrow y = -4x + 19 \Rightarrow M = (x, -4x + 19) \tag{5.1}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (-4x + 19 - 3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (-4x + 19 + 1)^2} \tag{5.2}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (-4x + 19 - 3)^2 = (x-5)^2 + (-4x + 19 + 1)^2 \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + 16x - 128x + 256 = x^2 - 10x + 25 + 16x - 160x + 400 \tag{5.4}$$

$$\Rightarrow -8x + 16 - 128x + 256 = -10x + 25 - 160x + 400 \tag{5.5}$$

$$\Rightarrow -136x + 272 = -170x + 425 \tag{5.6}$$

$$\Rightarrow 34x = 153 \Rightarrow x = 4,5 \tag{5.7}$$

$$y = -4x + 19 \Rightarrow y = -4 \cdot 4,5 + 19 \Rightarrow y = 1 \tag{5.8}$$

Logo M=(4,5;1)

Método Vetorial

Como M é o ponto médio de $\overrightarrow{AB}$, então

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \tag{5.9}$$

$$\Rightarrow M - A = B - M \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow 2M = B + A \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow M = \frac{B + A}{2} \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow M = \frac{(5 + 4, -1 + 3)}{2} \tag{5.13}$$

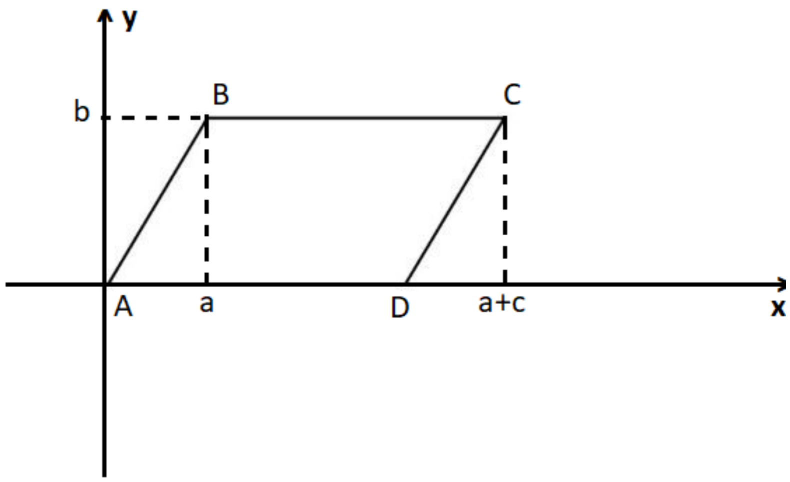
$$\Rightarrow M = (\frac{9}{2}, \frac{2}{2}) \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow M = (4,5; 1) \tag{5.15}$$

3) **Método Algébrico**

Considere o paralelogramo ABCD da figura 5.36.

Figura 5.36: Paralelogramo



Fonte: Autora

A partir do desenho sabe-se que A(0,0), B(a,b), C(a+c,b) e D(c,0). Usando o resultado encontrado na alternativa B, temos:

O ponto médio de $\overline{AC}$ M_1 tem coordenadas:

$M_1(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$

e o ponto médio de $\overline{BD}$ M_2 tem coordenadas:

$M_2(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$

$\Rightarrow M_1 = M_2$

Método Vetorial

Considere o paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD e seja M o ponto médio de AC, equivale dizer que $AM = MC$. Vamos provar que M é também ponto médio de BD. Pela figura, tem-se

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$ (definição de soma)

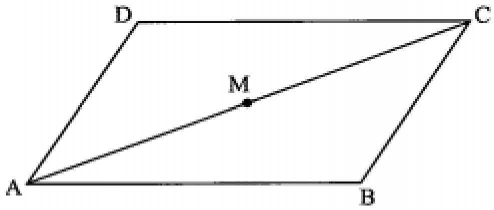
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA}$ (igualdade de vetores)

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$ (propriedade comutativa)

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$ (definição de soma)

Ora, como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, conclui-se que M é o ponto médio de $\overrightarrow{BD}$.

Figura 5.37: Ponto médio das diagonais de um paralelogramo



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

4) Sejam D= (x_D, y_D) e M=(x_M, y_M) ponto médio de $\overline{AC}$.
Método Algébrico

Sabe-se que as coordenadas de M são dadas por
$x_M = \frac{2+4}{2} = 3$ e $y_M = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M = (3, \frac{1}{2})$.
Conforme provado na questão 4, M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Assim,

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-3 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 9 \qquad (5.16)$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 0 \qquad (5.17)$$

Logo, D=(9,0).

Método Vetorial

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow B - A = C - D \qquad (5.18)$$

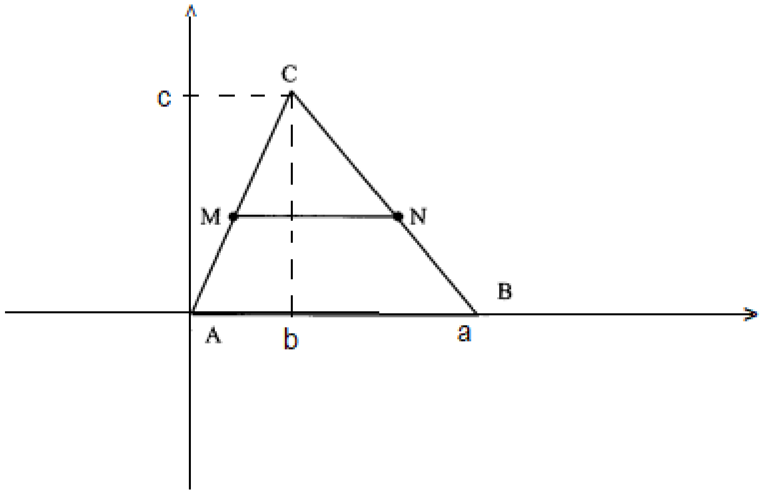
$$\Rightarrow D = C - B + A \qquad (5.19)$$

$$\Rightarrow D = (4, -4) - (-3, 1) + (2, 5) \qquad (5.20)$$

$$\Rightarrow D = (4 + 3 + 2, -4 - 1 + 5) = (9, 0) \qquad (5.21)$$

5) **Método Algébrico**

Figura 5.38: Base média do triângulo



Fonte:Autora

Considerando a figura acima, temos: A(0,0), B(a,0) e C(b,c). Com o resultado do exercício 4 sabe-se que

O ponto médio M de $\overline{AC}$ é dado por:

M $= (\frac{a}{2}, \frac{c}{2})$

Da mesma forma,

N $= (\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$.

Seja r, a reta que contém $\overline{MN}$ e s, a reta que contém $\overline{AB}$, então os coeficientes angulares de r e s são respectivamente

$\frac{0}{a} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}} = 0 \Rightarrow r \parallel s.$

Por outro lado,

$d(M,N) = \sqrt{(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2})^2 + 0^2} = \frac{a}{2}.$

$d(A,B) = a$

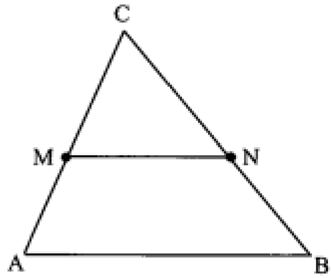
$\Rightarrow d(M,N) = \frac{1}{2}\, d(A,C).$

Método Vetorial

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente.

Pela figura 5.39, tem-se

Figura 5.39: Base média do triângulo



Fonte:WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Portanto, $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

6 Considerações finais

Nesse trabalho, foram apresentadas uma discussão e propostas para inserção do conceito de vetores na disciplina de Matemática na escola básica. Para isso, foram feitos um estudo da BNCC, documento que servirá como base para elaboração dos projetos políticos pedagógicos a partir do ano de 2020, uma análise de como esse conteúdo é lecionado atualmente e quais serão os benefícios com sua introdução já no Ensino Fundamental, com continuidade no Ensino Médio.

Atualmente, o conteúdo de vetores é estudado no Ensino Médio somente na disciplina de Física. Acreditamos que, por ser um conceito matemático rico e importante, seria interessante que os professores da disciplina de Matemática abordassem essa matéria, assim ela não seria vista apenas como ferramenta para se resolver problemas físicos.

Ao analisarmos a BNCC, percebemos que o conceito de vetores relaciona-se às competência e habilidade requeridas no documento. Além disso, acreditamos que a introdução desse conceito pode ser feita já no Ensino Fundamental, de forma mais intuitiva e geométrica, usando-se metodologias adequadas a este nível escolar, para que, no Ensino Médio, o conteúdo possa ser formalizado e aprofundado.

Na sequência didática do Ensino Fundamental, foram usados problemas simples e que se enquadram na realidade dos alunos, para que essa introdução seja natural e os incentive a abstrair alguns conceitos de forma intuitiva e sem muitas formalidades. Já a sequência apresentada para o Ensino Médio é voltada para formalização dos conceitos e tem a intenção de provocar nos alunos uma comparação entre diferentes modos de se resolver problemas, usando Geometria Analítica e vetores.

Esse trabalho não foi aplicado em sala de aula pela inviabilidade de fazer a proposta continuada no 9º Ano do Fundamental e 3º Ano do Médio. Mas acreditamos que essa proposta é viável e pode contribuir para uma discussão sobre o atual currículo de Matemática no ensino básico e seu aprimoramento.

7 Referências

ANDRADE, M.H.G. **BNCC: Desafios e oportunidades na Educação Básica**.2018. Disponível em; <https://conexiaeducacao.com.br/wp/blog/bncc/>. Acesso em 15 nov.2019.

AVRITZER, D; **Geometria analítica e álgebra linear:** uma visão geométrica.1.ed. Minas Gerais: UFMG, 2009.

BEZERRA, L.H; SILVA, I.P.C, Geometria Analítica.**Universidade Federal de Santa Catarina**. Florianópolis, 2010.

BEZERRA, L.H; SILVA, I.P.C. Geometria Analítica: 2.ed. Florianópolis:Editora UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.170p.

BORGES, P et.al, Modelagem Matemática e Seqüências Didáticas: uma relação de complementaridade. **Boletim de Educação Matemática**, v.21, n.30, 2008. Disponível em:<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2912/291221878008>. Acesso em: 25 jan. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: homologada em 14 de Dezembro de 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 06 nov. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**.2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 7 nov.2019.

BRASIL. **Efetivação da base nacional comum curricular (bncc) em todas as redes de ensino**. Disponível em <https://todospelaeducacao.org.br/pag/educacaoja-bncc>. Acesso em 15 nov. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**.2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ bookvolume02internet.pdf> Acesso em: 17 dez.2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciên-**

cias da natureza, matemática e suas tecnologias.?. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 24 jan.2020.

CARVALHO, P.C.P, *et. al.* Conhecimentos de matemática. **Orientações curriculares para o ensino médio** Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.p.70

CHALEGO, J.F; Estudo de vetores no ensino médio para resolução de problemas. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**. Jun. 2018.

COSTA, P.T; Vetores: uma abordagem para o ensino médio. **Universidade federal do maranhão centro de ciências exatas e tecnologia departamento de matemática mestrado profissional em matemática - PROFMAT**. Set. 2015.

D'Ambrosio. U.**ensina matemática?**. 1995.

DUBET, F. Democratização escolar e justiça da escola. **Revista Santa Maria**, v. 33, n. 3, p. 381-394, set./dez. 2008.

GIROTTO, E.D. Pode a política pública mentir? A base nacional comum curricular e a disputa da qualidade educacional.**Edu. Soc**, vol.40 Campinas 2019 Epub 23-Set-2019.

JAHN, A. P.**Secretaria de Educação Básica. Formação de professores do ensino médio**. 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/307882336Formacaodeprofessoresdo ensinomedioEtapaII-CadernoIVLinguagens.>

LEMOS, M.B.C, Vetores no Ensino Fundamental: Uma sequência didática para o 9o ano. **Mestrado Profissional em Matem´atica em Rede Nacional - PROFMAT/SBM** Mar. 2014.

LIMA, E.L. Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio.**Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro 2001.

MARINI, E. Entenda as 10 competências gerais da BNCC. **Educação**, out. 2019.

MARTINS, R.L; O ensino de vetores e a interdisciplinaridade. **Universidade estadual da paraíba programa de pós-graduação em matemática mestrado profissional - PROFMAT/CCT/UEPB**. Set. 2015.

MIZNE, D. Pobreza, desigualdade e o potencial das escolas públicas. **Fundação Lemann**. mar.2019. Disponível em: <https://fundacaolemann.org.br/noticias/pobreza-desigualdade-e-o-potencial-das-escolas-publicas>. Acesso em 02 nov.2019.

NOÉ, M. **A importância da geometria nas séries iniciais**.Brasilescola.com [S.I.][2015?]. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-

ensino/a-importancia-geometria-nas-series-iniciais.htm> Acesso em: 20 dez. 2019.

PONCE, B.J. A justiça curricular em tempos de implementação da BNCC e de desprezo pelo PNE (2014-2024). **Programa de Pós Graduação em Educação: Currículo**v.17, n.3, p. 1o45-1074 jul./set. 2019.

SANTOS, M.J.C., MATOS, F. C. C. A insubordinação criativa na formação contínua do pedagogo para o ensino da matemática: os subalternos falam? REnCiMa, v. 8, n.4, p. 11-30, 2017. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/issue/view/59.> Acesso em nov. 2019.

SANTOS, J.S; Notas de aula, ALGEBRA LINEAR - Vetores Geométricos **FFCLRP-Universidade de São Paulo**.

SANTOS, R.J; Matrizes, vetores e geometria analítica. **Departamento de Matemática-ICEx- Universidade Federal de Minas Gerais**. Mar. 2010 SANTOS, L.S; Vetores: um conceito matemático. **Universidade federal do rio de janeiro mestrado profissional em matemática em rede nacional- PROFMAT**. Dez. 2014.

SILVA, R.V; Geometria analítica no ensino médio: Uma proposta com tratamento Vetorial. **Universidade federal do Espirito Santo programa de pós-graduação em matemática em rede nacional mestrado profissional - PROFMAT**. Abr. 2013.

SILVA, L.E. Educação matemática e a base nacional comum curricular (bncc): um desafio para a educação básica. **Revista Humanidades e Inovação** v.6, n.6, mai. 2019.

UCHÔA, C.B; Utilizando vetores na resolução de problemas de geometria plana nas turmas olímpicas do ensino básico. **Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará** Jun. 2014.

UFRGS. **Como adaptar a proposta ao programa do Ensino Médio**. 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novosconteudos/ 2009/moduloIII/conteudos3e.htm> Acesso em: 17 dez. 2019.

WINTERLE, P; **Vetores e Geometria Analítica**.2.ed. São Paulo: Pearson Mackon Books, 2000.