

Problemas de Contagem: Os Teoremas de Burnside e Pólya

Teresa Cristina Firmo Guarani¹
Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni²

Resumo: Este trabalho tem como objetivo apresentar o Teorema de Burnside e o Teorema de Pólya que tem como foco determinar o número de órbitas da ação de um grupo de simetrias no conjunto das colorações de uma figura. Os teoremas demonstram como resolver problemas de contagem utilizando os conceitos de ação de grupos, coloração, órbita, estabilizador, índice de ciclos, peso e inventário padrão. Foi desenvolvida uma atividade com alunos do ensino médio afim de divulgar esse tema na educação básica.

Palavras-chave: Teoria de grupos, ação de grupos, órbitas, estabilizadores, coloração, Teorema de Burnside, peso, inventário padrão, Teorema de Pólya.

Abstract:

This paper aims to present the Burnside's Theorem and Polya's Theorem, which focuses on determining the number of orbits of the action of a symmetry group in all the colorations of a figure. The Theorems demonstrate how to solve counting problems utilizing the concepts of group actions, coloring, orbit, stabilizer, cycle index, weights and standard inventory. An activity has been developed with high school students in order to apply the theme in secondary school.

keywords: Group theories, group actions, orbits, stabilizers, coloring, Burnside's Theorem, weights, standard inventory, Pólya's Theorem.

¹Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2017
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: teresafirmo@yahoo.com.br

²Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ
E-mail: amandagso@ufsj.edu.br

1 Introdução

A necessidade de contar objetos e coisas aconteceu há mais de 30.000 anos, antes mesmo da ideia de números. Desde essa época perguntas como: “Quantos são...?” ou “De quantas maneiras...?” são feitas. E como resposta, habitualmente é feita a listagem de todos os objetos envolvidos. Porém, se o número de objetos envolvidos for muito grande, torna-se inviável, ou até mesmo impossível fazer essa representação. O estudo da análise combinatória desenvolve técnicas para facilitar vários problemas de contagem.

Os tópicos tratados neste trabalho são o Teorema de Burnside e o Teorema de Pólya. O primeiro, desenvolvido por William Burnside nos dá um processo para calcular o número de órbitas distintas da ação de um grupo em um conjunto de colorações. Já o segundo foi desenvolvido pelo matemático Húngaro George Pólya e utiliza o conceito de índice de ciclo, o que reduz satisfatoriamente a quantidade de cálculos necessários, além de permitir a resolução de problemas mais complexos, pois nos fornece uma função geradora capaz de determinar o número de padrões de diferentes colorações. Mais detalhes serão dados nos capítulos finais dessa dissertação.

Com a aplicação do Teorema de Burnside será possível responder a perguntas como: “de quantas maneiras diferentes podemos colorir, com m cores, os vértices de um triângulo equilátero?” Já com o Teorema de Pólya é possível saber quantas maneiras e quais são essas maneiras.

Neste trabalho, com a ajuda da teoria elementar de grupos serão apresentadas diversas ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema de Burnside e o Teorema de Pólya. Além disso serão ilustradas algumas aplicações desses teoremas, através da análise de alguns exemplos simples.

O texto foi estruturado em oito capítulos, sendo que no capítulo 2 serão apresentadas as permutações e duas formas de representá-las: por matrizes e por ciclos, sendo a segunda a mais utilizada nessa dissertação. Nos capítulos 3 e 4 serão estudados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do tema central deste trabalho. Será apresentada a teoria de grupos com alguns de seus principais resultados para, posteriormente, apresentar com maiores detalhes e diversos exemplos o grupo de simetrias. O capítulo 5 dedica-se ao estudo de ações de grupos, em particular a ações em conjuntos de colorações, tema este essencial para o enunciado e demonstração do Teorema de Burnside, abordado no capítulo 6. O capítulo 7 trata do Teorema de Pólya. Algumas definições e exemplos, imprescindíveis para a compreensão deste teorema, são dados nas seções iniciais do mesmo capítulo. Vários exemplos são dados ao longo do texto para uma melhor compreensão dos temas apresentados, em particular exemplos de vários problemas de contagem e a solução de tais problemas estão descritos nos capítulos 6 e 7, de forma a aplicar os teoremas de Burnside e Pólya.

2 Permutações

Neste capítulo será estudado o conjunto das permutações dos elementos de um conjunto X . Será dada uma ênfase para o caso de X finito, em particular, para o caso em que $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, pois apenas este último conjunto será utilizado na resolução dos problemas de contagem propostos nos capítulos finais desta dissertação.

Na seção 2.1 será mostrada uma forma de se representar permutações por meio de matrizes com 2 linhas. Na seção 2.2, uma forma mais sucinta e elegante de representação será utilizada, a representação por ciclos. Alguns exemplos serão apresentados para ilustrar ambas representações. Finalmente na seção 2.3, algumas propriedades fundamentais do conjunto

das permutações serão demonstradas. Estas propriedades fornecem a este conjunto uma estrutura algébrica bastante conhecida, chamada grupo, tema estudado no capítulo 3.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [2] e [8].

O conceito fundamental de permutação será de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho. Para todo $n \in \mathbb{N}$ será utilizado o símbolo $[n]$ para denotar o conjunto finito $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Definição 2.1 *Dado um número natural n , diz-se que um conjunto A tem n elementos, ou que A tem cardinalidade n , se podemos estabelecer uma bijeção entre A e o conjunto dos números $\{1, 2, \dots, n\}$. Denota-se por $|A| = n$ ou $\#A = n$. Em vez de dizer que A tem cardinalidade n também se diz, com o mesmo sentido, que A tem ordem n .*

Definição 2.2 *Dado um conjunto não vazio X , uma bijeção $f : X \rightarrow X$ é denominada uma permutação do conjunto X .*

Será utilizada a notação $S(X)$ para denotar o conjunto de todas as permutações do conjunto X .

Sendo X um conjunto finito, tal que $|X| = n$, ou seja, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, então existem $n!$ permutações do conjunto X . De fato, para obter uma permutação qualquer desses n elementos, com n maior ou igual a dois, tem-se n possibilidades para a primeira posição da sequência. Para escolher a segunda posição, há $n - 1$ possibilidades, pois um dos elementos já foi utilizado na primeira posição. Para a terceira posição, caso n seja maior que dois, há $n - 2$ possibilidades, pois dois dos n elementos já foram utilizados. Seguindo o raciocínio a última posição terá apenas um elemento disponível, pois $n - 1$ elemento já foram utilizados. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, permutações distintas, ou seja, $|S(X)| = n!$.

Como os principais casos estudados neste trabalho serão para $X = [n]$, denotaremos por S_n o conjunto das permutações $S(X)$.

Exemplo 2.1 *Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto de 4 livros colocados lado a lado em uma estante. Suponha que esses livros estão etiquetados em certa ordem, por exemplo, $(3, 2, 1, 4)$. Todas as possíveis ordens diferentes com todos os livros podem ser representadas por uma sequência dos símbolos 1, 2, 3, 4 reorganizados adequadamente. Como descrito acima, sabe-se que existem 24 possíveis permutações para os elementos de X . Cada uma dessas permutações determina uma função bijetiva $f : X \rightarrow X$. Por exemplo, a sequência $(3, 2, 1, 4)$ determina uma função bijetiva cuja a regra é $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$ e $f(4) = 4$, pois o primeiro termo da sequência é 3, o segundo termo é 2, o terceiro termo é 1 e o quarto termo é 4. Portanto a sequência $(3, 2, 1, 4)$ representa uma permutação de X .*

2.1 Representação de Permutação por Matrizes

A bijeção $\sigma \in S_n$ definida por:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \sigma(1) \\ 2 &\mapsto \sigma(2) \\ 3 &\mapsto \sigma(3) \\ &\vdots \\ n &\mapsto \sigma(n) \end{aligned}$$

pode ser representada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Considerando esta notação, o elemento neutro ou identidade de S_n é a bijeção $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Se $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ e $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$, então

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.2 *Sejam* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\text{Então, } \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Note que, em geral, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

2.2 Representação de Permutação por Ciclos

A notação por meio de ciclos é bastante interessante, pois através dela a permutação fica mais explícita e representada mais sucintamente.

Definição 2.3 *Sejam os números inteiros distintos* $a_1, a_2, \dots, a_r \in [n]$. *Se* $\alpha \in S_n$ *é uma permutação tal que:*

$$\alpha(a_1) = a_2$$

$$\alpha(a_2) = \alpha^2(a_1) = a_3$$

$$\vdots$$

$$\alpha(a_{r-1}) = \alpha^{r-1}(a_1) = a_r$$

$$\alpha^r(a_1) = a_1.$$

Então a permutação $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ chama-se ciclo de comprimento r de α e é

denotada por (a_1, a_2, \dots, a_r) .

Proposição 2.1 Se $\alpha \in S_n$, então para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe $l_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que:

$$\alpha^{l_j}(j) = \underbrace{(\alpha \circ (\alpha \circ (\dots \circ \alpha(j)) \dots))}_{l_j \text{ aplicações}} = j.$$

Demonstração. Se não existisse um l_j , então, depois de fazer n iterações, o valor resultante estaria fora do conjunto $[n]$, o que é um absurdo, já que α é uma bijeção definida em $[n]$. Portanto, há um ciclo de α de comprimento l_j determinado por $(j, \alpha(j), \alpha^2(j), \dots, \alpha^{l_j-1}(j))$. \square

Seguindo o raciocínio da demonstração acima, no ciclo $(j, \alpha(j), \alpha^2(j), \dots, \alpha^{l_j-1}(j))$ foram utilizados l_j elementos, restam outros $n - l_j$ elementos de $[n]$, dos quais há l_k elementos formando outro ciclo, disjunto do primeiro, de comprimento l_k determinado por $(k, \alpha(k), \alpha^2(k), \dots, \alpha^{l_k-1}(k))$. Seguindo esse padrão, todos os elementos de $[n]$ serão utilizados. Assim, obtém-se, por meio de ciclos disjuntos, uma representação da permutação de $[n]$.

Para simplificar, dada uma permutação α , chama-se um ciclo de tamanho r de α de um r -ciclo. Chama-se de ponto fixo de α um r -ciclo com $r = 1$. Já para $r = 2$ diz-se que o r -ciclo é uma transposição.

Exemplo 2.3 Analisando a permutação $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$ por diagramas de setas:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 1 \\ 4 &\rightarrow 7 \\ 5 &\rightarrow 5 \\ 6 &\rightarrow 4 \\ 7 &\rightarrow 6. \end{aligned}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \rightarrow 1 \\ 2 &\rightarrow 2 \\ 4 &\rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \\ 5 &\rightarrow 5. \end{aligned}$$

Os ciclos de α são: (13) , (2) , (476) e (5) . A permutação α pode ser representada como o produto de seus ciclos, da seguinte forma: $\alpha = (13)(2)(476)(5)$.

Exemplo 2.4 A permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ pode ser representada na notação cíclica por $(14523)(6)$, em que (14523) é um 5-ciclo e (6) é um ponto fixo da permutação.

É costume omitir da composição de permutações o símbolo \circ , e simplesmente justapor os operandos. Assim $\alpha \circ \tau$ será denotado por $\alpha\tau$.

2.3 Propriedades

Seja X um conjunto não vazio. Em diversos resultados nessa seção, X será considerado o conjunto $[n]$.

Lema 2.1 *O conjunto $S(X)$ é fechado por composição de permutações, isto é, $\alpha_1, \alpha_2 \in S(X) \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 \in S(X)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in S(X)$. Para que $\alpha_1\alpha_2$ pertença a $S(X)$ deve-se ter $\alpha_1\alpha_2$ bijetiva de X em X . Para tal, basta provar que $\alpha_1\alpha_2$ é bijetiva.

Injetividade: Considere $x, y \in X$, com $x \neq y$. Como α_2 é injetiva, tem-se que $\alpha_2(x) \neq \alpha_2(y)$. Como α_1 também é injetiva, então $\alpha_1(\alpha_2(x)) \neq \alpha_1(\alpha_2(y))$. Portanto, $\alpha_1\alpha_2$ é injetiva.

Sobrejetividade: Seja $z \in X$. Sabe-se que α_1 e α_2 são sobrejetivas. Logo, existe $y \in X$ com $\alpha_1(y) = z$. Além disso existe $x \in X$ com $\alpha_2(x) = y$. Assim, $\alpha_1(\alpha_2(x)) = z$, para todo $x \in X$. Portanto, $\alpha_1\alpha_2$ é sobrejetiva.

Como $\alpha_1\alpha_2$ é injetiva e sobrejetiva, então ela é bijetiva, logo conclui-se que $S(X)$ é fechado por composição de permutações. □

Lema 2.2 *A função $e : X \rightarrow X$ definida por $e(x) = x$ para todo $x \in X$ é uma bijeção e funciona como o elemento neutro de $S(X)$, isto é:*

$$\forall \alpha \in S(X) \text{ temos que } \alpha e = e \alpha = \alpha.$$

Além disso, dada qualquer permutação $\alpha \in S(X)$, existe uma permutação inversa $\alpha^{-1} \in S(X)$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Demonstração.

É imediato verificar que a função identidade e é uma permutação e que funciona como elemento neutro de $S(X)$. Como toda função bijetiva possui inversa, esta inversa também é bijetiva e, portanto, pertence a $S(X)$. □

Como a composição de funções é associativa, em particular a composição de permutações também é associativa. É o que diz o lema abaixo:

Lema 2.3 *Dadas as permutações α_1, α_2 e α_3 em $S(X)$, tem-se que $\alpha_1(\alpha_2\alpha_3) = (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3$.*

As propriedades descritas nesta seção fazem com que o conjunto das permutações $S(X)$ tenha uma estrutura algébrica muito conhecida, chamada de grupo. Esta estrutura algébrica e bem como algumas de suas propriedades e aplicações serão descritas no capítulo seguinte.

3 Grupos e Subgrupos

A noção de grupo deu início a partir de estudos realizados por Joseph Louis Lagrange, Paolo Ruffini e Evariste Galois sobre a resolubilidade de equações de grau maior ou igual a 5 por meios algébricos (por radicais).

A teoria de grupos tem aplicações em diversas áreas, dentre elas podemos destacar na física quântica, química, estatística, criptografia e na análise combinatória.

Este capítulo dedica-se ao estudo dos grupos, uma estrutura algébrica definida por meio de três axiomas. Serão destacadas algumas proposições, exemplos e teoremas sobre a teoria de grupos, importantes para o desenvolvimento dessa dissertação.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [4], [5], [7], [11] e [13].

3.1 Grupos

Definição 3.1 *Seja $*$ uma operação no conjunto não vazio G , ou seja $\forall a, b \in G \implies a * b \in G$. Dizemos que $(G, *)$ é um grupo quando satisfaz os seguintes axiomas:*

- (i) $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$. (Associatividade)
- (ii) *Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$. (Existência de elemento neutro)*
- (iii) *Dado $a \in G$, existe $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$. (Existência de simétrico)*

Exemplo 3.1 *Os três lemas 2.1, 2.2 e 2.3 mostram que $S(X)$ é um grupo com a operação de composição de funções.*

Em particular, se $X = [n]$, então S_n é um grupo com a operação de composição, chamado de grupo de permutações.

Definição 3.2 *O grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo quando:*

- (iv) $a * b = b * a, \forall a, b \in G$.

Quando a operação do grupo G é a adição, ele é chamado de grupo aditivo e denotado por $(G, +)$. Analogamente, quando a operação do grupo G é a multiplicação, ele é chamado de grupo multiplicativo e é denotado por (G, \cdot) .

Geralmente o grupo $(G, *)$ é denotado simplesmente por G .

Observação 3.1 *Quando um grupo G tem como operação a adição é comum denotar o elemento neutro de G por 0 e o simétrico de a por $-a$ (chamado de **oposto** de a).*

Observação 3.2 *Quando um grupo G tem como operação a multiplicação é comum denotar o elemento neutro de G por 1 e o simétrico de a por a^{-1} (chamado de **inverso** de a).*

Exemplo 3.2

Considere o conjunto \mathbb{Z} com a operação usual de adição $(+)$. Certamente vale que $\forall a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$, agora vamos analisar se satisfaz as três propriedades da definição 3.1:

- i) Dados a, b e $c \in \mathbb{Z} \implies a + (b + c) = (a + b) + c$;
- ii) $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Z} \implies 0 + a = a + 0 = a$;
- iii) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Logo, $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo aditivo.

Exemplo 3.3 *Analogamente ao exemplo anterior, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos aditivos. Em todos os casos o elemento neutro é o 0 e o inverso de a é $-a$.*

Exemplo 3.4 *É possível mostrar que (\mathbb{Q}^*, \cdot) é um grupo multiplicativo. De fato $\forall a, b \in \mathbb{Q}^* \implies a \cdot b \in \mathbb{Q}^*$. Além disso:*

- i) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^* \implies a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- ii) $\exists 1 \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\forall a \in \mathbb{Q}^* \implies 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;
- iii) $\forall a \in \mathbb{Q}^*, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Logo (\mathbb{Q}^*, \cdot) é grupo.

Exemplo 3.5 Analogamente ao exemplo anterior, (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) são grupos multiplicativos. Ambos tem o 1 como elemento neutro e o inverso de a é $\frac{1}{a}$.

Proposição 3.1 Seja $(G, *)$ um grupo:

- (a) Existe um único elemento neutro em G .
- (b) Para cada $a \in G$ existe um único simétrico de a em G .
- (c) Se $a \in G$ e $a' \in G$ é o simétrico de a , então o simétrico de a' é a , isto é, $(a')' = a$.
- (d) Se $a, b \in G$ e $a', b' \in G$ são os simétricos de a e b , respectivamente, então o simétrico de $a * b$ é $b' * a'$.

Demonstração.

- (a) Suponha que e e \hat{e} sejam elementos neutros em G . Como e é elemento neutro, tem-se que $e * \hat{e} = \hat{e}$ e como \hat{e} também é elemento neutro, então $e * \hat{e} = e$.

Portanto $\hat{e} = e$.

- (b) Suponha que a' e \hat{a} sejam simétricos de a . Como a' é simétrico de a , temos que $a * a' = e$. Analogamente \hat{a} também é simétrico para a , portanto $\hat{a} * a = e$.

Logo, $\hat{a} = \hat{a} * e = \hat{a} * (a * a') = (\hat{a} * a) * a' = e * a' = a'$.

- (c) Como a' é o simétrico de a , temos $a' * a = a * a' = e$. Isso assegura que a é o simétrico de a' , ou seja, $(a')' = a$.

- (d) Note que:

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * e * a' = a * a' = e.$$

$$(b' * a') * (a * b) = b' * (a' * a) * b = b' * e * b = b' * b = e.$$

□

3.2 Subgrupos

Dado um grupo G , podem existir subconjuntos de G que também são grupos. Estes subconjuntos serão estudados nesta seção.

Definição 3.3 Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:

- i) $a, b \in H$, então $a * b \in H$;
- ii) $(H, *)$ também é grupo.

Notação: Para indicar que H é subgrupo de G , escrevemos $H \leq G$.

A definição acima diz que para $H \subset G$ ser um grupo de G , H tem que ser fechado com a operação de G , e que H também é grupo.

Proposição 3.2 Seja H um subconjunto não vazio do grupo G . São equivalentes:

i) $H \leq G$;

ii) $\forall a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H$.

Demonstração. (i) \implies (ii) Como H é grupo e $b \in H$, existe $b^{-1} \in H$. Agora temos $a, b^{-1} \in H$, então $a * b^{-1} \in H$.

(ii) \implies (i) Como $H \neq \emptyset$, existe $c \in H \subseteq G$, logo $e = cc^{-1} \in H$. Dado $b \in H$, como $e, b \in H$ temos que $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. Até aqui já provamos que o elemento neutro está em H e que o inverso de cada elemento de H está em H . Sejam $a, b \in H$, então $a, b^{-1} \in H$, como $a * b = a * (b^{-1})^{-1} \in H$, Segue que a operação de G é fechada em H . Como a propriedade associativa em H é herdada de G , concluímos que $H \leq G$. \square

Exemplo 3.6 *Todo grupo G tem no mínimo dois subgrupos: $H_1 = \{e\}$ e $H_2 = G$. Estes subgrupos são chamados subgrupos triviais.*

Exemplo 3.7 *Pela proposição 3.2 temos que:*

$$(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +);$$

$$(\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot);$$

$\{\pm 1\}$ é subgrupo multiplicativo de \mathbb{Q}^* .

3.3 Classes laterais

Definição 3.4 *Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Para cada $a \in G$, definimos a classe lateral aH como o conjunto $aH = \{a * h | h \in H\}$.*

Para simplificar, o símbolo $*$ será omitido do texto, ou seja, a notação ah será utilizada para indicar $a * h$.

Lema 3.1 *Se $a, b \in G$ e H é um subgrupo de G , então*

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H.$$

Demonstração.

(\implies) Suponha que $aH = bH$. Como o elemento neutro e pertence a H , tem-se

$$ae = a \in (aH) \Rightarrow a \in (bH).$$

Logo, existe $h \in H$ tal que $a = bh$, o que equivale a $b^{-1}a = h$. E como $h \in H$, então $b^{-1}a \in H$.

(\impliedby) Suponha que $(b^{-1}a) \in H$. Então existe $h \in H$, tal que $b^{-1}a = h$, ou seja, $a = bh$. Considere $x \in aH$, isto é, $x = ah_1$, para algum $h_1 \in H$. Temos que $x = ah_1 = (bh)h_1 = b(hh_1)$. Logo $x \in bH \Rightarrow aH \subseteq bH$. Por outro lado $ah^{-1} = b$. Então, se $y \in bH$, existe $h_2 \in H$ tal que $y = bh_2 = (ah^{-1})h_2 = a(h^{-1}h_2)$. Assim, $y \in aH$ e, portanto $bH \subseteq aH$.

Como $aH \subseteq bH$ e $bH \subseteq aH$, $aH = bH$. \square

Lema 3.2 *Se H é um subgrupo de G então quaisquer classes laterais de H são idênticas ou são disjuntas. Em outras palavras:*

$$\text{Dados } a, b \in G, \text{ então } aH = bH \text{ ou } aH \cap bH = \emptyset.$$

Demonstração.

Suponha que $aH \cap bH \neq \emptyset$ e seja $x \in aH \cap bH$. Então existem $h_1, h_2 \in H$ tais que $x = ah_1 = bh_2$. Temos que $ah_1 = bh_2 \Rightarrow b^{-1}(ah_1) = h_2 \Rightarrow (b^{-1}a)h_1 = h_2 \Rightarrow b^{-1}a = h_2h_1^{-1}$. Mas $h_2h_1^{-1} \in H$, pois H é um subgrupo de G , implicando que $b^{-1}a \in H$ e, pelo lema 3.1, temos que $aH = bH$. □

3.4 Teorema de Lagrange

Se o grupo G é finito, existe uma relação entre o número de elementos de G e o número de classes laterais distintas. Estes números, bem como uma relação entre eles, serão apresentados nesta seção.

Definição 3.5 *O número de elementos de um grupo finito G é chamado de ordem de G e é denotado por $|G|$.*

Definição 3.6 *Seja G um grupo e H um subgrupo de G . O índice de H em G é o número de classes laterais de H em G . É denotado por $|G : H|$. Ou seja,*

$$|G : H| = \#\{aH | a \in G\}.$$

Teorema 3.1 *Seja H um subgrupo de um grupo finito G . Então $|G : H| \times |H| = |G|$.*

Demonstração. A identidade e está em H , pois H é subgrupo de G . Assim, para um g qualquer pertencente a G , tem-se $g = ge \in gH$. Portanto, cada elemento de G está em alguma classe lateral de H em G . Considere $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_m\}$.

Para todo $g \in G$, $gh_i \neq gh_j$ para quaisquer $i \neq j$. Se fosse possível ter $gh_i = gh_j$, para $i \neq j$, poderia-se cancelar g a esquerda de cada lado da igualdade e obter $h_i = h_j$, o que é absurdo. Logo, conclui-se que para qualquer classe lateral gH , $|gH| = |H|$. De acordo com o Lema 3.2, tem-se que as diferentes classes laterais de H em G particionam G em $|G : H|$ conjuntos de cardinalidade $|H|$. □

O Teorema de Lagrange estabelece uma relação entre a ordem do grupo G e a ordem de um subgrupo $H \leq G$

Teorema 3.2 (Teorema de Lagrange)

Se H é subgrupo de um grupo finito G , então a ordem de H divide a ordem de G .

A demonstração segue diretamente do Teorema 3.1.

Exemplo 3.8 *O grupo S_3 tem 6 elementos. Seja H um subgrupo de S_3 , então pelo Teorema de Lagrange, $|H| \in \{1, 2, 3, 6\}$, que são os divisores de 6. Abaixo estão listados os subgrupos de S_3 :*

$$H_1 = \{(1)(2)(3)\}$$

$$H_2 = \{(1)(2)(3), (1)(23)\}$$

$$H_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3)\}$$

$$H_4 = \{(1)(2)(3), (13)(2)\}$$

$$H_5 = \{(1)(2)(3), (123), (132)\}$$

$$H_6 = \{(1)(2)(3), (123), (132), (1)(23), (13)(2), (12)(3)\}$$

4 Grupos de Simetria

Nesta seção será mostrado que o conjunto de todas as simetrias geométricas (planas ou espaciais) de uma figura é um grupo. Diversos exemplos de grupos ou subgrupos de simetrias serão explorados, mostrando uma conexão entre a álgebra da estrutura de grupos com a geometria de objetos simétricos.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [1], [2], [11] e [13].

Definição 4.1 *Uma figura é um conjunto F de pontos de \mathbb{R}_2 ou \mathbb{R}_3 .*

Definição 4.2 *Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre os pontos.*

Definição 4.3 *Dada uma figura F , uma simetria de F é uma aplicação $f : F \rightarrow F$ com as seguintes propriedades:*

- (i) f é uma isometria;
- (ii) f é sobrejetora.

Pela definição, uma simetria é uma aplicação que leva a figura nela mesma e que preserva as distâncias.

Exemplo 4.1 : *Simetrias do Cubo*

Existem 3 diferentes tipos de eixos de rotação para o cubo. Estes são indicados na figura abaixo:

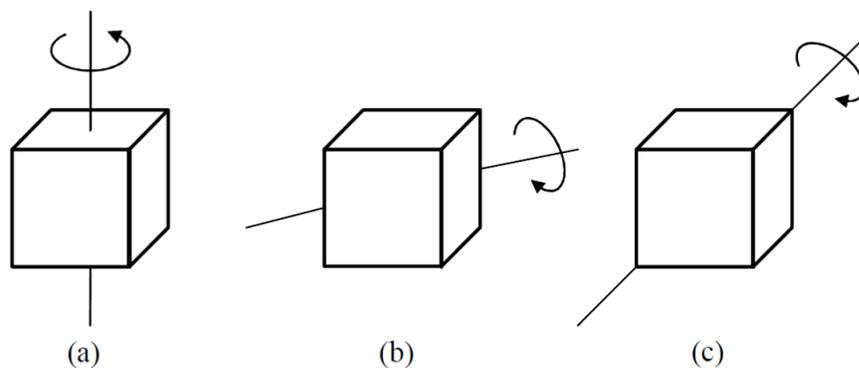


Figura 1: Eixos de simetrias do cubo.

Fonte: Eduardo Bovo (2005).

- (a) *Rotação em torno de um eixo que passa pelos centros de faces opostas;*
- (b) *Rotação em torno de um eixo que passa pelos pontos médios de arestas opostas;*
- (c) *Rotação em torno de um eixo que passa por vértices opostos.*

Assim, as 24 simetrias (rotacionais) de um cubo são divididas em:

- 1) *O elemento neutro e ;*

- 2) 3 rotações de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ pelo eixo indicado em (a);
 3) 3 rotações de um ângulo de π pelo eixo indicado em (a);
 4) 3 rotações de um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ pelo eixo indicado em (a);
 5) 6 rotações de um ângulo de π pelo eixo indicado em (b);
 6) 4 rotações de um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ pelo eixo indicado em (c) e
 7) 4 rotações de um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$ pelo eixo indicado em (c).
 Observe as 24 simetrias representadas por ciclos:

1) O elemento neutro:

$$e = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

2) As permutações correspondentes à rotação no eixo representado em (a):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1234)(5)(6) & \rho_2 &= (1432)(5)(6) & \rho_3 &= (13)(24)(5)(6) \\ \rho_4 &= (1536)(2)(4) & \rho_5 &= (1635)(2)(4) & \rho_6 &= (13)(2)(4)(56) \\ \rho_7 &= (1)(2546)(3) & \rho_8 &= (1)(2645)(3) & \rho_9 &= (1)(24)(3)(56). \end{aligned}$$

3) As permutações correspondentes à rotação no eixo representado em (b):

$$\begin{aligned} \rho_{10} &= (145)(263) & \rho_{11} &= (154)(236) \\ \rho_{12} &= (152)(364) & \rho_{13} &= (125)(346) \\ \rho_{14} &= (146)(253) & \rho_{15} &= (164)(235) \\ \rho_{16} &= (126)(345) & \rho_{17} &= (162)(354). \end{aligned}$$

4) As permutações correspondentes à rotação no eixo representado em (c):

$$\begin{aligned} \rho_{18} &= (14)(23)(56) & \rho_{19} &= (14)(26)(45) \\ \rho_{16} &= (12)(34)(56) & \rho_{21} &= (16)(24)(35) \\ \rho_{22} &= (13)(25)(46) & \rho_{23} &= (15)(24)(36). \end{aligned}$$

Exemplo 4.2 Simetrias no Tabuleiro 2×2 .

Considere o seguinte tabuleiro 2×2 , cujas casas estão numeradas de 1 a 4:

1	2
3	4

Figura 2: Tabuleiro 2×2 com casas numeradas de 1 a 4.

As simetrias do tabuleiro 2 são:

- 1) Rotação de um ângulo de 90^0 em torno do centro;
- 2) Rotação de um ângulo de 180^0 em torno do centro;
- 3) Rotação de um ângulo de 270^0 em torno do centro;
- 4) Rotação de um ângulo de 360^0 em torno do centro.

Será enunciado a seguir um importante Teorema, de grande utilidade para o tema central desta dissertação.

Teorema 4.1 *Seja F uma figura. Então o conjunto de todas as simetrias de F , com a operação de composição de funções, é um grupo, chamado de grupo de simetria da figura F .*

Demonstração. Seja G o conjunto de todas as simetrias de F .

A identidade $I_F : F \rightarrow F$ é obviamente uma simetria, e portanto G possui um elemento neutro.

Denotando por $d(x, y)$ a distância entre os pontos x e y e supondo que $f, g \in G$, temos que $f \circ g$ é uma isometria, pois $d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y))$, pois f é uma isometria, mas $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$, pois g é uma isometria. Além disso, $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$, segue então que $f \circ g$ é uma simetria e portanto está em G .

Toda simetria (isometria) f é injetora, e portanto possui uma inversa f^{-1} : Dados $z, w \in F$, como f é sobrejetiva também,

$$d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = d(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = d(z, w).$$

Assim f^{-1} é uma simetria e portanto pertence a G . A associatividade da composição de simetrias segue diretamente da associatividade de composição de funções. □

Segundo o Teorema 4.1, o conjunto das simetrias descritos nos exemplos 4.1 e 4.2 são grupos.

As seções 4.1 e 4.2 apresentam dois subgrupos de simetrias bastante conhecidos, o grupo de rotações e o grupo diedral. Alguns exemplos expostos nestas seções serão utilizados nos problemas de contagem introduzidos nos capítulos 6 e 7 deste texto.

4.1 Grupo de Rotações

Esta seção mostra que o conjunto de todas as rotações de um polígono regular é um subgrupo do grupo de simetrias deste polígono.

Seja $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$, o conjunto dos vértices de um polígono regular com n lados. Como todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, os vértices podem ser dispostos conforme a Figura 3

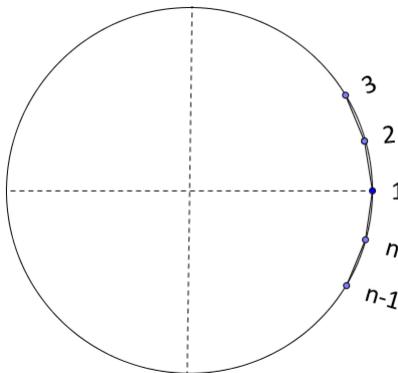


Figura 3: Conjunto dos vértices de um polígono de n lados inscrito em uma circunferência.

Cada uma das rotações de ângulo $k\frac{2\pi}{n}$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ mantém o polígono invariante (move apenas os vértices) e podem ser identificadas com alguns elementos de S_n .

Seja e a rotação de 0 radianos e ρ a rotação de $\frac{2\pi}{n}$ radianos no sentido anti-horário.

Estes elementos correspondem às funções de S_n :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = (1)(2)\dots(n-1)(n)$$

e

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} = (12\dots(n-1)n).$$

Considere $\rho^j = \rho \circ \rho \circ \dots \circ \rho$, j -vezes. Então:

$$\begin{aligned} \rho^2 \text{ é a rotação de ângulo } 2\frac{2\pi}{n}. \\ \vdots \\ \rho^{n-1} \text{ é a rotação de ângulo } (n-1)\frac{2\pi}{n}. \\ \rho^n = \rho^0 = e \text{ é a rotação de ângulo } 2\pi. \end{aligned}$$

Seja R_n o conjunto das rotações de ângulos $k\frac{2\pi}{n}$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, de um polígono regular de n lados. Ou seja:

$$R_n = \{e = \rho^0, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\} \subseteq S_n.$$

Note que, dados $\rho^i, \rho^j \in R_n$, vale que $\rho^i \circ \rho^j \in R_n$. De fato, dividindo $i + j$ por n obtem-se $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $i + j = nq + r$, com $0 \leq r < n$. Assim, $\rho^i \circ \rho^j = \rho^{i+j} = \rho^{nq+r} = (\rho^n)^q \circ \rho^r = e^q \circ \rho^r = \rho^r \in R_n$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \circ : R_n \times R_n &\rightarrow R_n \\ (\rho^i, \rho^j) &\mapsto \rho^{i+j} \end{aligned}$$

é uma operação em R_n .

Proposição 4.1 (R_n, \circ) é grupo abeliano com n elementos.

Demonstração.

Como os elementos de R_n são rotações que correspondem a elementos distintos de S_n , conclui-se que R_n tem exatamente n elementos.

É claro que $\rho^0 = e$ é o elemento neutro de R_n . A comutatividade segue das igualdades abaixo:

$$\rho^i \circ \rho^j = \rho^{i+j} = \rho^{j+i} = \rho^j \circ \rho^i.$$

A associatividade também é simples:

$$\rho^i \circ (\rho^j \circ \rho^k) = \rho^i \circ \rho^{j+k} = \rho^{i+(j+k)} = \rho^{(i+j)+k} = \rho^{i+j} \circ \rho^k = (\rho^i \circ \rho^j) \circ \rho^k.$$

Finalmente, observe que $\rho^i \circ \rho^{n-i} = \rho^0 = e, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Logo o simétrico de $\rho^i \in R_n$ é $\rho^{n-i} \in R_n$. □

Definição 4.4 O grupo R_n é chamado de grupo de rotações de um polígono regular de n lados.

Exemplo 4.3 $R_3 = \{e, \rho, \rho^2\}$ é o grupo de rotações de um triângulo equilátero de vértices 1, 2, 3.

O elemento neutro é $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)$, o elemento $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$ é a rotação de $\frac{2\pi}{3}$, e o elemento $\rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$ é a rotação de $\frac{4\pi}{3}$.

4.2 Grupo Diedral

Será estudado nesta seção o grupo diedral que pode ser obtido a partir de rotações ao redor do centro de gravidade e reflexões em torno dos eixos de simetrias do polígono regular. Serão destacados os exemplos dos grupos de simetria do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.

Definição 4.5 Eixo de simetria de uma figura é uma reta que divide a figura em duas partes simétricas que podem ser sobrepostas com exatidão.

Seja D_n o grupo das simetrias de um polígono regular de n lados com a operação composição. O grupo $(D_n; \circ)$, é conhecido como Grupo Diedral de ordem $2n$ e constitui-se por n rotações de $k \frac{2\pi}{n}$ em torno do centro de gravidade para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e por n reflexões em torno dos eixos de simetria do polígono.

Exemplo 4.4 *Simetria do Triângulo Equilátero.*

Considere os vértices de um triângulo equilátero T , numerados por 1, 2 e 3. O triângulo T está inscrito em uma circunferência de centro O , conforme a Figura 4.

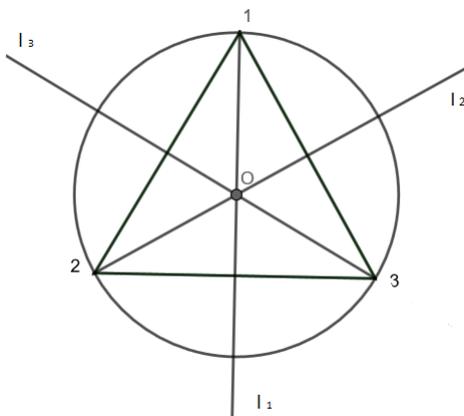


Figura 4: Eixos de simetrias reflexivas de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro O .

Seja l_i a reta que passa pelo vértice i e pelo ponto médio da aresta oposta a este vértice, com $i \in \{1, 2, 3\}$.

Seja τ_i a reflexão do triângulo T em torno da reta l_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$. É fácil notar que τ_1, τ_2 e τ_3 são simetrias do triângulo T .

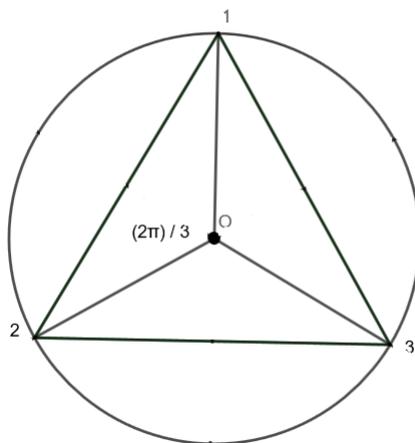


Figura 5: Ângulo que gera as simetrias rotacionais de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de centro O .

Seja ρ^i a rotação de T , em torno do ponto O , de um ângulo $\theta_i = i\frac{2\pi}{3}$, com $i \in \{1, 2, 3\}$. As rotações ρ^1, ρ^2 e ρ^3 também são simetrias do triângulo T .

É possível notar que todas as simetrias do triângulo T estão representadas abaixo por meio de ciclos:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (1)(23) & \tau_2 &= (13)(2) & \tau_3 &= (12)(3) \\ \rho^1 &= (123) & \rho^2 &= (132) & \rho^3 &= (1)(2)(3) = e. \end{aligned}$$

O conjunto $D_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ é o grupo diedral de ordem 6 das simetrias de um triângulo equilátero.

Exemplo 4.5 *Simetria no Quadrado.*

Considere os vértices do quadrado Q numerados por 1, 2, 3 e 4. O quadrado está inscrito em uma circunferência de centro O , conforme a figura a seguir.

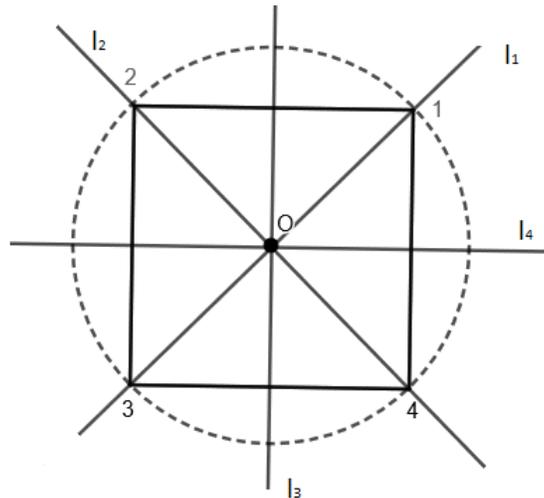


Figura 6: Eixos de simetrias reflexiva de um quadrado inscrito em uma circunferência de centro O .

Sejam l_1 a reta que passa pelos vértices, 1 e 3; l_2 a reta que passa pelos vértices 2 e 4; l_3 e l_4 as reta que passam pelo centro O e pelo ponto médio dos lados $\overline{12}$, $\overline{34}$ e $\overline{23}$, $\overline{14}$, respectivamente.

Seja τ_i a reflexão do quadrado Q em torno da reta l_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. É fácil notar que τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4 são simetrias do quadrado Q .

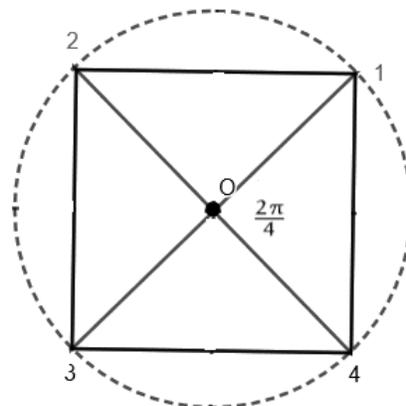


Figura 7: Ângulo gerador das simetrias rotacionais de um quadrado inscrito em uma circunferência de centro O .

Seja ρ^i a rotação de Q , em torno do ponto O , de um ângulo $\theta_i = i\frac{2\pi}{4}$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. As rotações ρ^1, ρ^2, ρ^3 e ρ^4 também são simetrias de Q .

Não é difícil observar que $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$ são todas as simetrias do quadrado Q . Elas estão representadas abaixo por meio de seus ciclos:

$$\tau_1 = (1)(24)(3)$$

$$\tau_2 = (13)(2)(4)$$

$$\tau_3 = (12)(34)$$

$$\tau_4 = (14)(23)$$

$$\rho^1 = (1234)$$

$$\rho^2 = (13)(24)$$

$$\rho^3 = (1432)$$

$$\rho^4 = (1)(2)(3)(4) = e.$$

O conjunto $D_4 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$ é o grupo diedral de ordem 8.

Exemplo 4.6 Simetrias do Hexágono Regular.

Considere os vértices de um hexágono regular H numerados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O hexágono está inscrito em uma circunferência de centro O , conforme a figura a seguir.

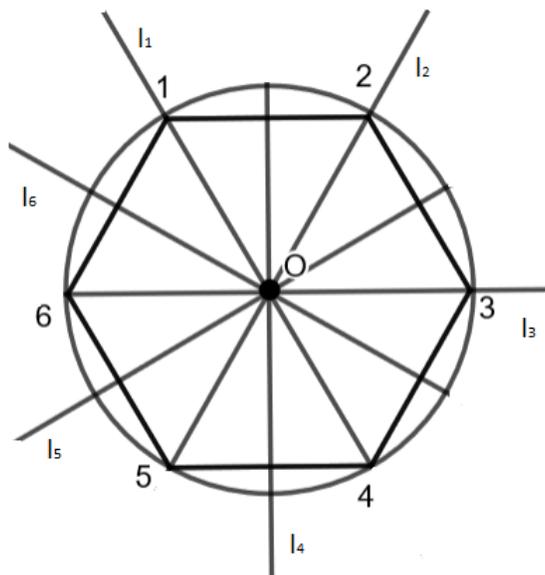


Figura 8: Eixos de simetrias reflexivas de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de centro O .

Seja l_1 a reta que passa pelos vértices, 1 e 4, l_2 a reta que passa pelos vértices 2 e 5, l_3 a reta que passa pelos vértices 3 e 6 e l_4, l_5 e l_6 as retas que passam pelo centro O e pelo ponto médio dos lados $\overline{12}$ e $\overline{45}$, $\overline{23}$ e $\overline{56}$ e $\overline{16}$ e $\overline{34}$, respectivamente.

Seja τ_i a reflexão do hexágono H em torno da reta l_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. É possível verificar que $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ e τ_6 são simetrias do hexágono H .

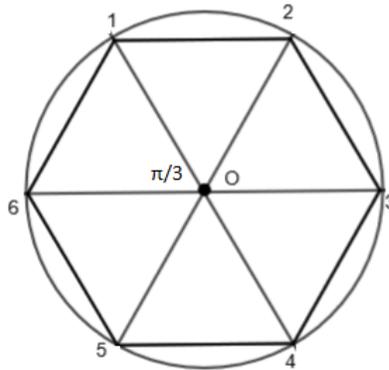


Figura 9: Ângulo que gera as simetrias rotacionais de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de centro O .

Seja ρ^i a rotação de H , em torno do ponto O , de um ângulo $\theta_i = i\frac{\pi}{3}$, com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. As rotações $\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5$ e $\rho^6 = e$ também são simetrias de H .

$\rho^i, i = 1, 2, \dots, 6$ e $\tau_j, j = 1, 2, \dots, 6$ correspondem a todas as simetrias do hexágono H . Elas estão representadas abaixo por meio de seus ciclos:

$$\begin{aligned}
 e &= (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \rho &= (165432) \\
 \rho^2 &= (153)(264) & \rho^3 &= (14)(25)(36) \\
 \rho^4 &= (135)(246) & \rho^5 &= (123456) \\
 \tau_1 &= (12)(36)(45) & \tau_2 &= (16)(25)(34) \\
 \tau_3 &= (14)(23)(56) & \tau_4 &= (1)(4)(26)(35) \\
 \tau_5 &= (3)(6)(24)(15) & \tau_6 &= (2)(5)(13)(46).
 \end{aligned}$$

O conjunto $D_6 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, e\}$ é o grupo diedral de ordem 12.

5 Ação de Grupos e Colorações

Neste capítulo será estabelecida inicialmente a definição de ação de um grupo num conjunto, bem como algumas de suas propriedades. O Teorema de Burnside, descrito no próximo capítulo, é usado para obter o número de diferentes órbitas de uma ação de grupos. Para a apresentação deste teorema faz-se necessário a apresentação e compreensão dos termos descritos nas seções 5.2, 5.3 e 5.4. No decorrer deste capítulo serão desenvolvidos diversos exemplos cujos resultados serão utilizados para resolver os problemas de contagem propostos nos capítulos 6 e 7 deste trabalho.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [2], [3] e [9].

Definição 5.1 *Seja G um grupo e X um conjunto não-vazio. Diz-se que G age em X se, para todo $g \in G$ e para todo $x \in X$, existir uma função $\varphi : G \times X \rightarrow X$, com $\varphi((g, x)) = g.x$ satisfazendo aos seguintes axiomas:*

(A1) *Para todo $x \in X$, $e.x = x$, onde e é a identidade de G .*

(A2) Para todo $g, h \in G, x \in X$, temos:

$$g.(h.x) = (gh).x.$$

O axioma A1 significa que a ação do elemento identidade de G é sempre trivial, ou seja, fixa todo elemento de X .

O axioma A2 relaciona a ação do grupo à sua operação.

Sempre que um grupo age em um conjunto, tem-se uma ação de grupos. Como as combinações são entre elementos de um grupo e de um conjunto, não deve-se omitir o símbolo \cdot que representa a ação de grupos.

Exemplo 5.1 Seja G um grupo e $X = G$. Definimos uma ação de G sobre X da seguinte forma: se $g \in G$ e $x \in X$ (ou seja, $x \in G$), considere a função definida por $(g, x) \rightarrow gx$. Ou seja, gx é o produto de g e x em G . A associatividade da multiplicação e as propriedades do elemento neutro mostram que essa função é uma ação de G sobre X .

Lema 5.1 Seja G um grupo que age no conjunto X . Então para todo $g \in G, x, y \in X$, ocorre:

$$g.x = y \Leftrightarrow g^{-1}.y = x.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha $g.x = y$. Então:

$$\begin{aligned} g^{-1}.y &= g^{-1}.(g.x) \\ &= (g^{-1}.g).x \\ &= e.x \\ &= x. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Suponha $g^{-1}.y = x$. Então:

$$\begin{aligned} g.x &= g.(g^{-1}.y) \\ &= (gg^{-1}).y \\ &= e.y \\ &= y. \end{aligned}$$

□

5.1 Coloração

Definição 5.2 Sejam C e D dois conjuntos não-vazios, e $X = F(D, C)$, o conjunto de todas as funções com domínio D e contradomínio C . Então dizemos que qualquer função $f \in X$ é uma coloração de D .

No caso de C e D finitos e supondo que $|D| = n$ e $|C| = m$, existem um total de m^n colorações de D diferentes, isto é $|X| = m^n$.

Exemplo 5.2 Considere as maneiras distintas de pintar os vértices de um triângulo equilátero com as cores preto e branco. Neste exemplo $D = \{1, 2, 3\}$ são os vértices do triângulo e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$ é o conjunto das cores.

Existem $2^3 = 8$ colorações de D , utilizando as cores em C , como mostra a figura a seguir:

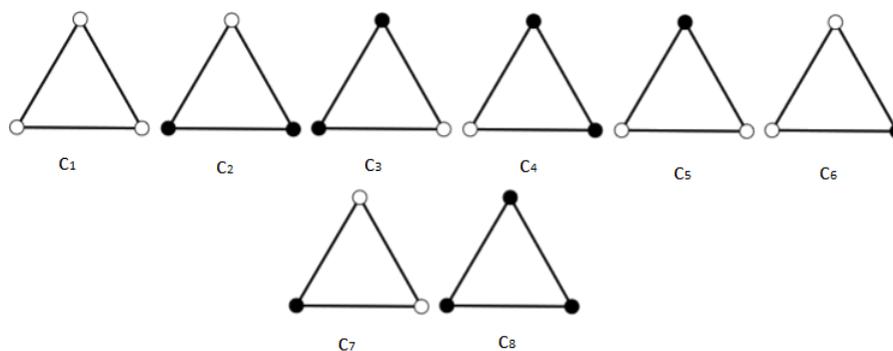


Figura 10: Todas as maneiras possíveis de pintar os vértices de um triângulo equilátero com as cores preto e branco.

Pode-se considerar uma coloração $f \in X = F(D, C)$ como uma aplicação do conjunto dos vértices D no conjunto das cores C , ou seja:

$$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{\text{preto}, \text{branco}\}.$$

As 8 colorações diferentes correspondem então às 8 aplicações diferentes com o domínio e contradomínio definidos acima.

A coloração representada na figura 11, por exemplo, é determinada por:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(3) = \text{preto}; \\ f(2) &= \text{branco}. \end{aligned}$$

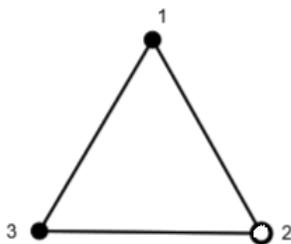


Figura 11: Uma coloração qualquer de um triângulo equilátero com vértices pintados com as cores branco e preto.

Exemplo 5.3 Considere um tabuleiro 2×2 . Temos um total de $2^4 = 16$ colorações deste tabuleiro utilizando 2 cores (preto e branco), como representados na figura a seguir:

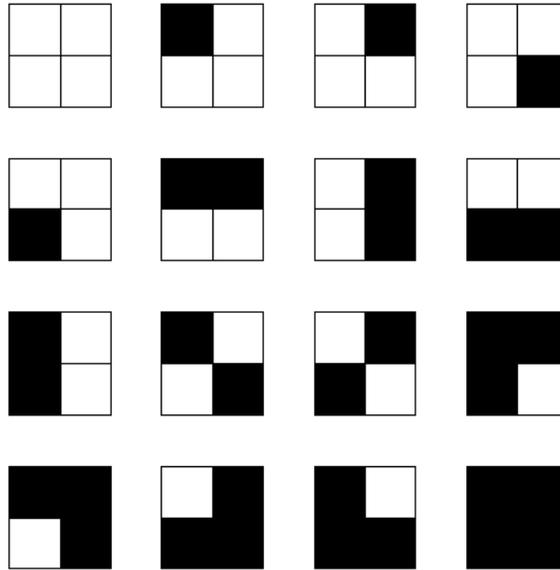


Figura 12: Colorações de um tabuleiro 2×2 pintado com as cores preto e branco.

Considere, agora, o tabuleiro 2×2 com as casas numeradas de 1 a 4, como na figura a seguir:

1	2
3	4

Figura 13: Tabuleiro 2×2 com as casas numeradas de 1 a 4.

Uma coloração f é uma aplicação do conjunto dos quadrados 1,2,3 e 4 no conjunto das cores preto e branco, ou seja:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{\text{preto}, \text{branco}\}.$$

As 16 colorações diferentes correspondem as 16 aplicações diferentes com os domínios e contradomínios definidos acima. Por exemplo, a coloração representada pela Figura 14 corresponde à aplicação:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(3) = \text{branco}; \\ f(2) &= f(4) = \text{preto}. \end{aligned}$$

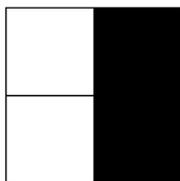


Figura 14: Uma coloração qualquer do tabuleiro de xadrez 2×2 pintado com as cores preto e branco.

Exemplo 5.4 *Considere todas as maneiras distintas de se pintar os vértices de um hexágono com as cores preto e branco.*

Como existem 6 vértices e 2 cores, há $2^6 = 64$ maneiras de se pintar os vértices do hexágono com as cores preto e branco. Estas colorações estão representadas na Figura 15:

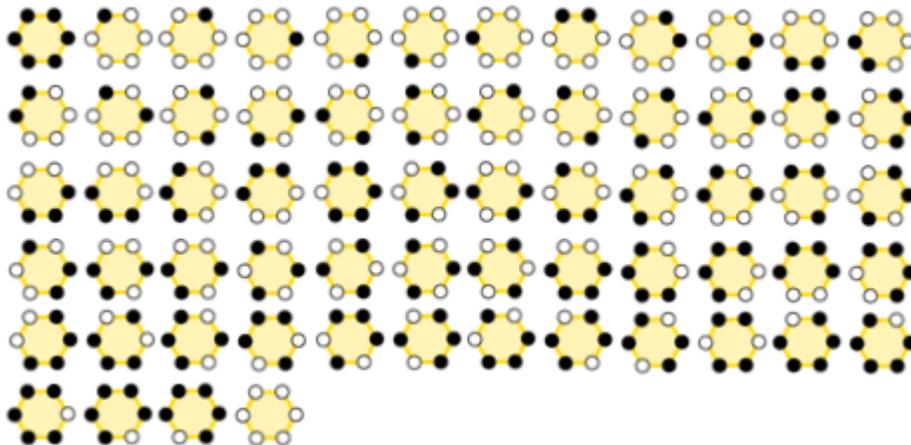


Figura 15: Todas as maneiras possíveis de se pintar os vértices de um hexágono regular com as cores preto e branco.

A coloração:

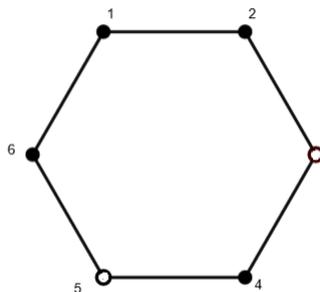


Figura 16: Uma coloração qualquer de um hexágono regular com os vértices pintados com as cores preto e branco.

corresponde à aplicação $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{p, b\}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(3) &= f(5) = \text{branco}; \\ f(1) &= f(2) = f(4) = f(6) = \text{preto}. \end{aligned}$$

Os resultados a seguir mostram, em particular, que existe uma ação de grupo de permutações dos vértices de um polígono regular no conjunto das colorações destes vértices.

Definição 5.3 *Seja G um grupo de permutações de símbolos de D , isto é, G é um subgrupo de $S(D)$. Defini-se uma ação de G no conjunto das colorações $X = F(D, C)$, por:*

$$\forall \sigma \in G, \forall f \in X \Rightarrow \sigma.f = f \circ \sigma^{-1}. \quad (*)$$

Teorema 5.1 *A fórmula da definição (*) define uma ação de grupo.*

Demonstração.

Seja e a identidade de G . Então e é a aplicação identidade $e : D \rightarrow D$ e para toda $f \in X$,

$$e.f = f \circ e^{-1} = f \circ e = f.$$

Assim, a propriedade A1 da definição 5.1 se verifica.

Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ e $f \in X$. Então, pela definição ??:

$$\begin{aligned} \sigma_2.(\sigma_1.f) &= \sigma_2.(f \circ \sigma_1^{-1}) \\ &= (f \circ \sigma_1^{-1}) \circ \sigma_2^{-1} \\ &= f \circ (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}) \\ &= f \circ (\sigma_2 \sigma_1)^{-1} \\ &= (\sigma_2 \sigma_1).f \end{aligned}$$

e portanto A2 da definição 5.1 também é válido. □

Definição 5.4 *Seja G um grupo de permutações de D que age em um conjunto $X = F(D, C)$ das colorações de D , duas colorações, $c_1, c_2 \in X$, são equivalentes $c_1 \sim c_2$ se $\exists g \in G$ tal que $c_1 = gc_2$.*

Exemplo 5.5 *De quantas maneiras diferentes pode-se colorir os vértices de um triângulo usando as cores preto e branco?*

O exemplo 5.2 exhibe as 8 colorações possíveis, mas será que essas colorações são realmente todas diferentes?

Observe que algumas dessas colorações são equivalentes por meio da ação do grupo D_3 . Por exemplo, $c_2 \sim c_3$, pois ao rotacionar a coloração c_2 por um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$ no sentido horário, obtém-se a coloração c_3 .

Na verdade, existem apenas quatro padrões diferentes entre essas colorações, isto é, podemos colocar as colorações nos quatro conjuntos representados na Figura 17 em que todas as colorações equivalentes pertencem ao mesmo conjunto.

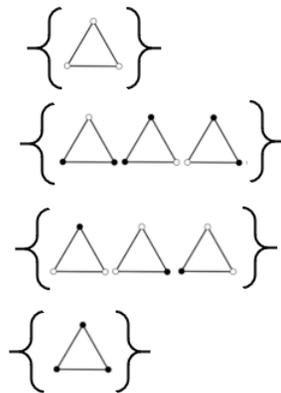


Figura 17: Triângulos equiláteros com os vértices pintados de preto e branco, separados por colorações equivalentes.

Exemplo 5.6 *De quantas maneiras diferentes um tabuleiro 2×2 pode ser colorido usando as cores preto e branco?*

Considere a ação do grupo R_4 (rotações de um quadrado) no conjunto das colorações das casas de um tabuleiro 2×2 com as cores preto e branco. Na Figura 18, duas colorações pertencem ao mesmo conjunto se são equivalentes, ou seja, se pode ser obtida por meio da aplicação de uma simetria do quadrado.

Dessa forma, existem 6 conjuntos de colorações equivalentes, representados na Figura 18:

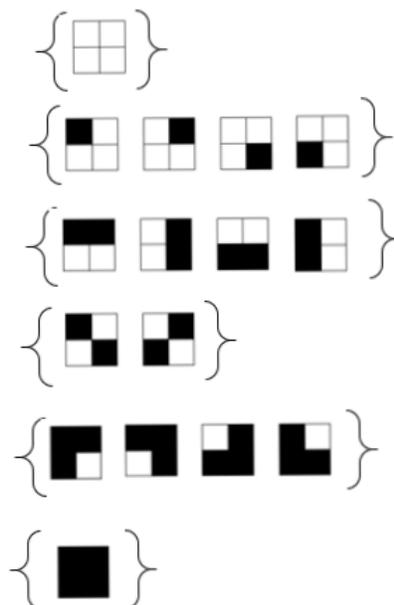


Figura 18: Tabuleiros 2×2 pintados de preto e branco, separados por colorações equivalentes.

Exemplo 5.7 *Seja D_6 o grupo diedral de um hexágono regular, como descrito na seção 4.2, e suponha que D_6 age no conjunto das colorações dos vértices deste hexágono (ilustradas no exemplo 5.4). As colorações equivalentes estão ilustradas na Figura 19:*

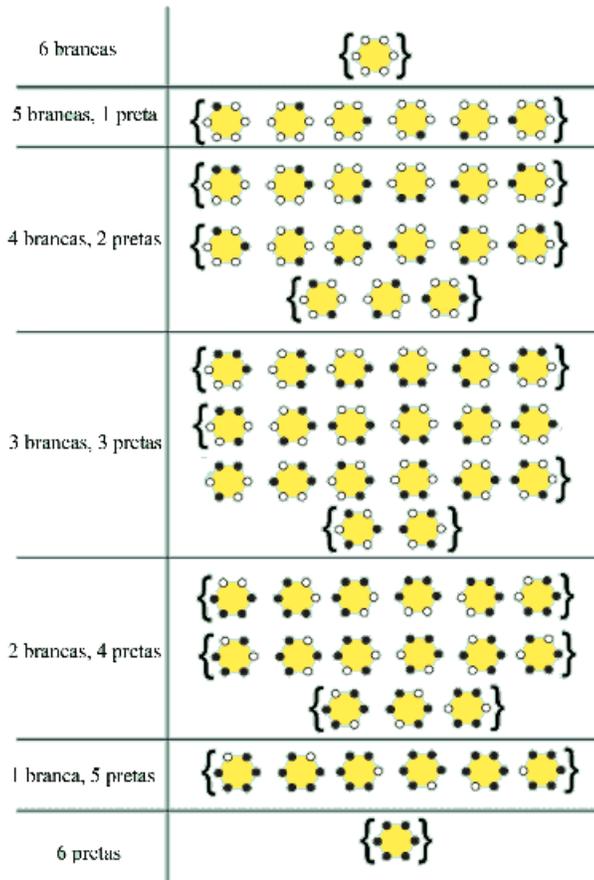


Figura 19: Hexágonos com os vértices pintados com as cores preto e branco, separados em 13 colorações equivalentes.

5.2 Órbita

Definição 5.5 *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X . Definimos uma relação \sim_G em X da seguinte maneira: para todos $x, y \in X$, $x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $g.x = y$.*

Lema 5.2 *A relação \sim_G no conjunto X é uma relação de equivalência.*

Demonstração.

- i) Sejam $x, y, z \in X$. Seja $e \in G$ o elemento neutro de G , então $e.x = x$ e, portanto, $x \sim_G x$. Logo \sim_G é reflexiva.
- ii) Suponha que $x \sim_G y$, então existe $g \in G$ com $g.x = y$. Como G é grupo, existe o inverso g^{-1} e $g^{-1}.y = x$, portanto $y \sim_G x$. Assim \sim_G é simétrica.
- iii) Suponha agora que $x \sim_G y$ e $y \sim_G z$. Então existem $g, h \in G$ tais que $g.x = y$ e $h.y = z$. Como G é grupo, temos que $hg \in G$ e,

$$(hg).x = h.(g.x) = h.y = z,$$

o que implica em $x \sim_G z$. Isto mostra que \sim_G é transitiva.

□

Em geral, as classes de equivalência da relação \sim_G são chamadas de órbitas da ação de grupo. A órbita à qual o elemento x pertence é denotada por O_x . Assim:

$$O_x = O_y \iff x \sim_G y$$

e como $x \sim_G y \iff y = g.x$ para algum $g \in G$, então:

$$O_x = \{g.x : g \in G\}.$$

Ou seja, a órbita de x consiste em todos os elementos de X que obtemos de x deixando que cada elemento de G atue em x . Como as órbitas são classes de equivalência, elas particionam o conjunto X em conjuntos disjuntos. Assim, os exemplos 5.5, 5.6 e 5.7 de encontrar o número de padrões distintos de colorações podem ser interpretados como o problema de encontrar o número de órbitas diferentes, existentes pela ação do grupo G no conjunto das colorações, como mostram os exemplos a seguir:

Exemplo 5.8 *Considere novamente o grupo diedral D_3 agindo no conjunto das colorações X dos vértices de um triângulo equilátero, coloridos com as cores preto e branco. O exemplo 5.5 pode ser interpretado como encontrar o número de órbitas distintas da ação de D_3 em X . A Figura 17 mostra que existem quatro órbitas.*

Exemplo 5.9 *Seja X o conjunto das colorações das casas de um tabuleiro 2×2 com as cores preto e branco. Ao considerar o grupo das rotações do quadrado, R_4 , agindo em X , o problema proposto no exemplo 5.6 pode ser reinterpretado como o problema de se encontrar o número de órbitas distintas da ação de R_4 em X .*

A Figura 18 mostra os elementos de X separados em órbitas diferentes. A mesma figura apresenta as seis diferentes órbitas desta ação.

Exemplo 5.10 *Analogamente aos exemplos 5.8 e 5.9, o exemplo 5.7 trata de contabilizar as diferentes órbitas da ação do grupo diedral D_6 no conjunto das colorações dos vértices de um hexágono regular, usando as cores preto e branco. A Figura 19 apresenta as colorações divididas nas órbitas da ação de grupo, além disso mostra que existem 13 órbitas distintas.*

5.3 Estabilizador

Definição 5.6 *Seja G um grupo que age em X . Dado $x \in X$, chamamos de estabilizador de x , o conjunto S_x dos elementos de G que fixam x . Ou seja:*

$$S_x = \{g \in G : g.x = x\}.$$

Lema 5.3 *Seja G um grupo que age em X . Então, para todo $x \in X$, o estabilizador de x , $S(x)$ é subgrupo de G .*

Demonstração.

Suponha $g, h \in S_x$. Então $g.x = x$ e $h.x = x$, pelo axioma (A2) na seção 5.1 temos que

$$(gh).x = g.(h.x) = g.x = x,$$

logo $gh \in S_x$, o que mostra que S_x é fechado, considerando a operação de G .

Por (A1) na seção 5.1, $e.x = x$ e assim S_x contém a identidade de G .

Novamente, se $g \in S_x$ temos que $g.x = x$ então $g^{-1}.x = x$, o que mostra que g^{-1} também está em S_x . Portanto S_x é um subgrupo de G . \square

Exemplo 5.11 *Considere o grupo diedral D_3 , como descrito no exemplo 5.2, e suponha que D_3 age no conjunto das colorações dos vértices do triângulo equilátero com as cores preto e branco (colorações descritas no Exemplo 5.2).*

A tabela abaixo lista todas as órbitas e estabilizadores de cada coloração:

Elemento de X	Estabilizador	Órbita
C_1	$\{e, \rho^1, \rho^2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$	$\{C_1\}$
C_2	$\{e, \tau_1\}$	$\{C_2, C_3, C_4\}$
C_3	$\{e, \tau_3\}$	$\{C_2, C_3, C_4\}$
C_4	$\{e, \tau_2\}$	$\{C_2, C_3, C_4\}$
C_5	$\{e, \tau_1\}$	$\{C_5, C_6, C_7\}$
C_6	$\{e, \tau_3\}$	$\{C_5, C_6, C_7\}$
C_7	$\{e, \tau_2\}$	$\{C_5, C_6, C_7\}$
C_8	$\{e, \rho^1, \rho^2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$	$\{C_8\}$

Tabela 1: Órbitas e estabilizadores de cada coloração dos vértices de um triângulo equilátero, considerando a ação do grupo diedral D_3 .

Note na tabela 1 que quanto maior a órbita, menor o estabilizador e em cada caso $|O_x| \times |S_x| = 6 = |D_3|$. Isto não é coincidência, mas um resultado que é verdadeiro em todos os casos de uma ação de grupos como mostra o Teorema a seguir.

Teorema 5.2 (*Teorema Órbita-Estabilizador*)

Seja G um grupo finito que age em X . Então para cada $x \in X$

$$|O_x| \times |S_x| = |G|.$$

Demonstração.

Pelo lema 5.3, temos que S_x é um subgrupo de G , e pelo Teorema de Lagrange segue que

$$|G : S_x| \times |S_x| = |G|.$$

Assim é necessário mostrar que

$$|O_x| = |G : S_x|.$$

Os elementos de O_x possuem a forma $g.x$, para $g \in G$ e as classes laterais de S_x possuem a forma gS_x para $g \in G$. Podemos provar a equação acima mostrando que a correspondência $g.x \longleftrightarrow gS_x$ é uma correspondência biunívoca entre os elementos de O_x e as classes laterais de S_x em G . Por isso, basta mostrar que, para todo $g, h \in G$

$$gS_x = hS_x \iff g.x = h.x.$$

Sejam $g, h \in G$. Então:

$$\begin{aligned} gS_x = hS_x &\iff h^{-1}g \in S_x \\ &\iff (h^{-1}g).x = x \\ &\iff h^{-1}.(g.x) = x \\ &\iff g.x = h.x. \end{aligned}$$

□

Corolário 5.1 *Seja G um grupo finito que age no conjunto X . Então o número de elementos de X em cada órbita é um divisor da ordem de G .*

Demonstração.

Imediata a partir da equação multiplicativa do Teorema Órbita-Estabilizador 5.2.

□

Teorema 5.3 *Seja G um grupo finito agindo em X . Então o número de órbitas distintas é dado por:*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x|$$

Demonstração.

Suponha que existam m órbitas O_{x_1}, \dots, O_{x_m} . Para cada $1 \leq j \leq m$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| &= \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{|G|}{|O_x|}, \text{ pelo Teorema Órbita-Estabilizador} \\ &= |G| \sum_{x \in O_{x_j}} \frac{1}{|O_{x_j}|}, \text{ pois } O_x = O_{x_j} \text{ para todo } x \in O_{x_j} \\ &= \frac{|G|}{|O_{x_j}|} \sum_{x \in O_{x_j}} 1 \\ &= |G|. \end{aligned}$$

Assim, somando para todas as órbitas obtém-se,

$$\sum_{x \in X} |S_x| = \sum_{j=1}^m \sum_{x \in O_{x_j}} |S_x| = \sum_{j=1}^m |G| = m|G| \Rightarrow m = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x|.$$

□

Exemplo 5.12 *Considere novamente o grupo D_3 agindo nas colorações dos vértices do triângulo, coloridos com as cores preto e branco. O exemplo 5.8 mostra que existem 4 órbitas desta ação. Este valor também pode ser encontrado ao aplicar o Teorema 5.3. De fato, ao observar a tabela 1 do exemplo 5.3, e aplicar o Teorema 5.3, o número de órbitas distintas é:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D_3|} \sum_{c_i \in X} |S_{c_i}| &= \frac{1}{6} (|S_{c_1}| + |S_{c_2}| + \dots + |S_{c_8}|) \\ &= \frac{1}{6} (6 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 24 = 4 \end{aligned}$$

5.4 Ponto Fixo

Definição 5.7 *Seja G um grupo que age em X . Dado um elemento $g \in G$, define-se o conjunto dos pontos fixos de g , denotado por $Fix(g)$, por:*

$$Fix(g) = \{x \in X; g.x = x\}.$$

Exemplo 5.13 *Considere o problema de se calcular o número de órbitas distintas da ação do grupo $G = D_6$ no conjunto das colorações X dos vértices de um hexágono regular, cujos vértices estão coloridos apenas com duas cores, branco e preto. Deseja-se calcular o conjunto dos pontos fixos, $Fix(g)$, de cada $g \in G = D_6$, e, para isso, convém reescrever a representação dos elementos de D_6 , como permutações dos vértices do hexágono, e ainda as correspondentes decomposições num produto de ciclos disjuntos:*

$$\begin{aligned} e &= (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \rho &= (165432) \\ \rho^2 &= (153)(264) & \rho^3 &= (14)(25)(36) \\ \rho^4 &= (135)(246) & \rho^5 &= (123456) \\ \tau_1 &= (12)(36)(45) & \tau_2 &= (16)(25)(34) \\ \tau_3 &= (14)(23)(56) & \tau_4 &= (1)(4)(26)(35) \\ \tau_5 &= (3)(6)(24)(15) & \tau_6 &= (2)(5)(13)(46). \end{aligned}$$

Para o cálculo de $Fix(\rho^2)$, por exemplo, observa-se que $\rho^2 = (135)(246)$ e, portanto, qualquer coloração $c \in X$ que fique fixa por ρ^2 , tem que ter os vértices 1, 3 e 5 da mesma cor. Analogamente os vértices 2, 4 e 6 têm que ter também a mesma cor. Portanto $|Fix(\rho^2)| = 2^2 = 4$, onde o 2 da base refere-se ao número de cores (apenas duas neste caso) e o expoente ao número de ciclos de ρ^2 - dois.

A seguir estão representadas as cardinalidades dos conjuntos dos pontos fixos de D_6 :

$$\begin{aligned} |Fix(e)| &= 2^6 = 32 & |Fix(\rho)| &= 2^1 = 2 \\ |Fix(\rho^2)| &= 2^2 = 4 & |Fix(\rho^3)| &= 2^3 = 8 \\ |Fix(\rho^4)| &= 2^2 = 4 & |Fix(\rho^5)| &= 2^1 = 2 \\ |Fix(\tau_1)| &= 2^3 = 8 & |Fix(\tau_2)| &= 2^3 = 8 \\ |Fix(\tau_3)| &= 2^3 = 8 & |Fix(\tau_4)| &= 2^4 = 16 \\ |Fix(\tau_5)| &= 2^4 = 16 & |Fix(\tau_6)| &= 2^4 = 16. \end{aligned}$$

Exemplo 5.14 *Pelo exemplo 4.4, a decomposição em produtos de ciclos disjuntos das permutações do grupo D_3 é:*

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (1)(23) & \tau_2 &= (13)(2) & \tau_3 &= (12)(3) \\ \rho_1 &= (123) & \rho_2 &= (132) & \rho_3 &= (1)(2)(3) = e. \end{aligned}$$

Com isso tem-se que:

$$\begin{aligned}
|Fix(\tau_1)| &= 2^2 = 4 & |Fix(\tau_2)| &= 2^2 = 4 & |Fix(\tau_3)| &= 2^2 = 4 \\
|Fix(\rho_1)| &= 2^1 = 2 & |Fix(\rho_2)| &= 2^1 = 2 & |Fix(e)| &= 2^3 = 8.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.15 *Sabe-se pelo exemplo 4.5 que o grupo D_4 , das simetrias de um quadrado constitui-se das seguintes permutações:*

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (1)(24)(3) & \tau_2 &= (13)(2)(4) \\
\tau_3 &= (12)(34) & \tau_4 &= (14)(23) \\
\rho_1 &= (1234) & \rho_2 &= (13)(24) \\
\rho_3 &= (1432) & \rho_4 &= (1)(2)(3)(4) = e.
\end{aligned}$$

Ao considerar o exemplo 5.3 do tabuleiro 2×2 , em que $D = \{1, 2, 3, 4\}$ são as casas do tabuleiro e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$. Se o grupo D_4 age no conjunto X das colorações $f : D \rightarrow C$, então:

$$\begin{aligned}
|Fix(\tau_1)| &= 2^3 = 8 & |Fix(\tau_2)| &= 2^3 = 8 \\
|Fix(\tau_3)| &= 2^2 = 4 & |Fix(\tau_4)| &= 2^2 = 4 \\
|Fix(\rho_1)| &= 2^1 = 2 & |Fix(\rho_2)| &= 2^2 = 4 \\
|Fix(\rho_3)| &= 2^1 = 2 & |Fix(e)| &= 2^4 = 16
\end{aligned}$$

O lema a seguir estabelece uma relação entre a cardinalidade dos conjuntos $Fix(g)$ e S_x . Essa relação é um ponto fundamental para a obtenção do resultado apresentado no Teorema de Burnside, um dos temas centrais desse trabalho.

Lema 5.4 *Dado um grupo G finito agindo em X ,*

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

Demonstração.

Seja

$$A = \{(x, g) \in X \times G : g.x = x\}.$$

Pode-se contar os elementos de A de duas maneiras distintas:

- i) fixando a primeira coordenada e variando a segunda;
- ii) fixando a segunda coordenada e variando a primeira.

Em *i*), para cada $x \in X$ fixo, o número de elementos $g \in G$ que fixam x é a cardinalidade do conjunto $S_x = \{g \in G : g.x = x\}$. Portanto,

$$|A| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

Em *ii*) para cada $g \in G$ fixo, o número de elementos $x \in X$ que são fixados por g é a cardinalidade do conjunto $Fix(g) = \{x \in X : g.x = x\}$. Assim,

$$|A| = \sum_{x \in X} |Fix(g)|$$

Logo:

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in X} |S_x|.$$

□

6 Teorema de Burnside

Apesar do teorema (também chamado de lema) a seguir ter sido associado à William Burnside, ele foi primeiramente provado por Georg Frobenius em 1887. William Burnside atribuiu o resultado para Frobenius na primeira edição de seu livro *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897, mas o nome de Frobenius foi acidentalmente deixado de fora da segunda edição, mais lida em 1911. Georg Ferdinand Frobenius nasceu em Berlim em 26 de outubro de 1849. Foi o primeiro a formular o conceito abstrato de um grupo. Ele se tornou professor de matemática em Zurique em 1875 e voltou a Berlim como professor de matemática na universidade em 1892. Ele morreu em Charlottenberg em 3 de agosto de 1917.

O Teorema de Burnside consiste em apresentar uma fórmula para se contabilizar o número de órbitas de uma ação de grupos, em termos da cardinalidade dos conjuntos $|Fix(g)|$ para cada $g \in G$.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [6], [10] e [12].

Teorema 6.1 *Se G é um grupo finito agindo em um conjunto X , então o número de órbitas distintas é dado por:*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

Demonstração.

A demonstração é consequência imediata do Teorema 5.3 e do Lema 5.4. □

Exemplo 6.1 *Dadas m cores cada vértice de um triângulo equilátero é colorido com uma das cores. Encontre o número de diferentes padrões de colorações dos vértices deste triângulo.*

Note que cada vértice pode ser colorido de m maneiras, dessa forma o número total de colorações é m^3 .

Para resolver este problema, considere o grupo G das simetrias do triângulo descrito no exemplo 4.4. G é o grupo diedral $D_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \rho, \rho^2, e\}$.

Considere ainda a ação do grupo D_3 no conjunto das colorações dos vértices do triângulo usando m cores dadas. O problema consiste em encontrar o número de órbitas distintas desta ação de grupo.

Considerando os vértices desse triângulo numerados de 1 a 3, a representação cíclica das simetrias em D_3 , como mostrado no Exemplo 4.4, é:

$$\tau_1 = (1)(23) \quad \tau_2 = (13)(2) \quad \tau_3 = (12)(3)$$

$$\rho = (123) \quad \rho^2 = (132) \quad e = (1)(2)(3).$$

Como são m cores tem-se que

$$|Fix(\tau_1)| = m^2 \quad |Fix(\tau_2)| = m^2 \quad |Fix(\tau_3)| = m^2$$

$$|Fix(\rho^1)| = m^1 \quad |Fix(\rho^2)| = m^1 \quad |Fix(e)| = m^3.$$

Aplicando o Teorema de Burnside, o número de diferentes padrões de coloração (número de órbitas distintas) é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| \\ & \frac{1}{6} (|Fix(\tau_1)| + |Fix(\tau_2)| + |Fix(\tau_3)| + |Fix(\rho^1)| + |Fix(\rho^2)| + |Fix(e)|) \\ & \frac{1}{6} (m^2 + m^2 + m^2 + m + m + m^3) \\ & \frac{1}{6} (m^3 + 3m^2 + 2m). \end{aligned}$$

Para o caso particular de $m = 2$, o número de diferentes colorações é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} (2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) \\ & \frac{1}{6} (8 + 12 + 4) \\ & \frac{1}{6} (24) = 4. \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser observado na figura 17, do exemplo 5.5.

Exemplo 6.2 Quantos padrões de colares existem com 6 pérolas, se as pérolas podem ser brancas ou pretas?

O problema consiste em calcular $|Fix(g)|$ para cada $g \in D_6$ para, posteriormente, aplicar o Teorema de Burnside no cálculo do número de padrões de colares com 6 pérolas brancas e pretas, ou seja o número de órbitas distintas da ação de D_6 no conjunto das colorações dos vértices de um hexágono regular pintados com as cores preto e branco.

Como $Fix(g)$ já foi encontrado no exemplo 5.13, o número de diferentes colares é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| \\ & \frac{1}{|D_6|} (1 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1) \\ & \frac{156}{12} = 13. \end{aligned}$$

Existem pois 13 padrões de colares distintos com 6 pérolas brancas e pretas. É possível conferir esse resultado observando a figura 19.

Exemplo 6.3 Encontre o número de diferentes padrões de colorações das casas de um tabuleiro 2×2 , coloridos com m cores dadas.

Cada quadrado do tabuleiro pode ser colorido de m maneiras, o número total de colorações é, portanto, m^4 . O grupo G das simetrias de um quadrado, de acordo com o Exemplo 4.5 é $D_4 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$, o grupo diedral de ordem 8.

Considerando os quadrados desse tabuleiro numerados de 1 a 4, de acordo com o exemplo 4.5, a representação cíclica das simetrias é:

$$\tau_1 = (1)(24)(3) \quad \tau_2 = (13)(2)(4) \quad \tau_3 = (12)(34) \quad \tau_4 = (14)(23)$$

$$\rho^1 = (1234) \quad \rho^2 = (13)(24) \quad \rho^3 = (1432) \quad \rho^4 = (1)(2)(3)(4) = e.$$

Como são m cores tem-se que

$$\begin{aligned} |Fix(\tau_1)| &= m^3 & |Fix(\tau_2)| &= m^3 & |Fix(\tau_3)| &= m^2 & |Fix(\tau_4)| &= m^2 \\ |Fix(\rho^1)| &= m^1 & |Fix(\rho^2)| &= m^2 & |Fix(\rho^3)| &= m^1 & |Fix(e)| &= m^4. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Burnside, o número de diferentes padrões de coloração é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| \\ & \frac{1}{8} (|Fix(\tau_1)| + |Fix(\tau_2)| + |Fix(\tau_3)| + |Fix(\tau_4)| + |Fix(\rho^1)| + |Fix(\rho^2)| + |Fix(\rho^3)| + |Fix(e)|) \\ & \frac{1}{8} (m^3 + m^3 + m^2 + m^2 + m + m^2 + m + m^4) \\ & \frac{1}{8} (m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m). \end{aligned}$$

Para o caso particular de colorir o tabuleiro com duas cores, preto e branco (basta substituir no polinômio acima $m = 2$), o número de colorações distintas é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} (2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) \\ & \frac{1}{8} (16 + 16 + 12 + 4) \\ & \frac{1}{8} (48) = 6. \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser observado na figura 18 do exemplo 5.6.

7 Teorema de Pólya

O teorema de enumeração Pólya, também conhecido como o teorema Redfield-Pólya foi publicado pela primeira vez por John Howard Redfield em 1927. Em 1937 ele foi independentemente redescoberto por George Pólya, que então popularizou muito seu resultado, aplicando-a muitos problemas de contagem, em particular, em problemas de enumeração de compostos químicos.

Para enunciar o Teorema de Pólya é necessário, antes, algumas definições. Estas definições, bem como alguns exemplos ilustrativos estão expostos nas seções 7.1, 7.2 e 7.3. A seção 7.4 trata do Teorema de Pólya e de alguns problemas de contagem que são resolvidos por meio desse teorema.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [2], [6] e [10].

7.1 Índice de Ciclos

Definição 7.1 Dada uma permutação $g \in S(X)$ seja k_j número de ciclos de comprimento j na decomposição de g em ciclos disjuntos. A essa permutação é associado o seguinte monômio nas variáveis X_1, X_2, \dots, X_n :

$$X_1^{k_1}, X_2^{k_2}, \dots, X_n^{k_n}.$$

O índice de ciclos de um grupo de permutações G é um polinômio definido por:

$$Z(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$$

Exemplo 7.1 Índice de ciclos do grupo de diedral D_3 das simetrias do triângulo equilátero é:

Elemento	Decomposição em ciclo	Monômio
e	(1)(2)(3)	X_1^3
ρ^1	(123)	X_3^1
ρ^2	(132)	X_3^1
τ_1	(1)(23)	$X_1^1 X_2^1$
τ_2	(13)(2)	$X_1^1 X_2^1$
τ_3	(12)(3)	$X_1^1 X_2^1$

Tabela 2: Decomposição em ciclos e monômios associados a cada permutação do grupo de diedral D_3 .

Segundo a Tabela 2 o índice de ciclos do grupo diedral D_3 é o polinômio:

$$Z(D_3) = \frac{1}{6}(X_1^3 + 2X_3^1 + 3X_1^1 X_2^1).$$

Exemplo 7.2 Índice de ciclos do grupo de rotação R_6 do hexágono regular.

Segundo a Tabela 3 o índice de ciclos do grupo R_6 é:

$$Z(R_6) = \frac{1}{6}(X_1^6 + X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6^1)$$

Elemento	Decomposição em ciclo	Monômio
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	X_1^6
ρ^1	(123456)	X_6^1
ρ^2	(135)(246)	X_3^2
ρ^3	(14)(25)(36)	X_2^3
ρ^4	(153)(264)	X_3^2
ρ^5	(165432)	X_6^1

Tabela 3: Decomposição em ciclos e monômios associados a cada permutação do grupo de rotações R_6 .

Exemplo 7.3 *Índice de ciclos do grupo diedral D_6 :*

Elemento	Decomposição em ciclo	Monômio
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	X_1^6
ρ^1	(165432)	X_6^1
ρ^2	(153)(264)	X_3^2
ρ^3	(14)(25)(36)	X_2^3
ρ^4	(135)(246)	X_3^2
ρ^5	(123456)	X_6^1
τ_1	(12)(36)(45)	X_2^3
τ_2	(16)(25)(34)	X_2^3
τ_3	(14)(23)(56)	X_2^3
τ_4	(1)(4)(26)(35)	$X_1^2 X_2^2$
τ_5	(3)(6)(24)(15)	$X_1^2 X_2^2$
τ_6	(2)(5)(13)(46)	$X_1^2 X_2^2$

Tabela 4: Decomposição em ciclos e monômios associados ao grupo diedral D_6 .

Segundo a tabela 4 o índice de ciclos do grupo diedral D_6 é o polinômio:

$$Z(D_6) = \frac{1}{12}(X_1^6 + 3X_1^2 X_2^2 + 4X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6).$$

Exemplo 7.4 *Índice de ciclos do grupo diedral D_4 :*

Elemento	Decomposição em ciclo	Monômio
e	(1)(2)(3)(4)	X_1^4
ρ^1	(1324)	X_4^1
ρ^2	(13)(24)	X_2^2
ρ^3	(1234)	X_4^1
τ_1	(14)(23)	X_2^2
τ_2	(1)(24)(3)	$X_1^2 X_2^1$
τ_3	(13)(2)(4)	$X_1^2 X_2^1$
τ_4	(12)(34)	X_2^2

Tabela 5: Decomposição em ciclos e monômios associados ao grupo diedral D_4 .

Segundo a tabela 5 o índice de ciclos do grupo diedral D_4 é o polinômio:

$$Z(D_4) = \frac{1}{8}(X_1^4 + 3X_2^2 + 2X_1^2 X_2^1 + 2X_4^1).$$

Exemplo 7.5 *Índice de ciclos do grupo de simetrias do cubo:*

Elemento	Decomposição em ciclo	Monômio
e	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	X_1^6
ρ^1	(1234)(5)(6)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^2	(1432)(5)(6)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^3	(13)(24)(5)(6)	$X_1^2 X_2^2$
ρ^4	(1536)(2)(4)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^5	(1635)(2)(4)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^6	(13)(2)(4)(56)	$X_1^2 X_2^2$
ρ^7	(1)(2546)(3)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^8	(1)(2645)(3)	$X_4^1 X_1^2$
ρ^9	(1)(24)(3)(56)	$X_1^2 X_2^2$
ρ^{10}	(145)(263)	X_3^2
ρ^{11}	(154)(236)	X_3^2
ρ^{12}	(152)(364)	X_3^2
ρ^{13}	(125)(346)	X_3^2
ρ^{14}	(146)(253)	X_3^2
ρ^{15}	(164)(235)	X_3^2
ρ^{16}	(126)(345)	X_3^2
ρ^{17}	(162)(354)	X_3^2
ρ^{18}	(14)(23)(56)	X_2^3
ρ^{19}	(14)(26)(45)	X_2^3
ρ^{20}	(12)(34)(56)	X_2^3
ρ^{21}	(16)(24)(35)	X_2^3
ρ^{22}	(13)(25)(46)	X_2^3
ρ^{23}	(15)(24)(36)	X_2^3

Tabela 6: Decomposição em ciclos e monômios associados ao grupo de simetrias do cubo.

Segundo a tabela 6 o índice de ciclos do grupo de simetrias do cubo é o polinômio:

$$Z(G) = \frac{1}{24}(X_1^6 + 6X_1^2 X_4^1 + 3X_1^2 X_2^2 + 6X_2^3 + 8X_3^2).$$

7.2 Pesos e Inventário

Definição 7.2 *Seja $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações do conjunto D , uma função peso no conjunto C é uma função ω que associa a cada $c \in C$, um símbolo algébrico ou um número, denotado por $\omega(c)$, denominado peso de c .*

Definição 7.3 Seja $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações do conjunto D , o enumerador de estoque de C por peso ω é definido como sendo a soma

$$\sum_{c \in C} \omega(c)$$

Isto é, o enumerador de estoque representa de maneira algébrica todos os valores que os elementos do conjunto D podem receber através das colorações de D em C .

Definição 7.4 Seja $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações do conjunto D , para cada coloração $f \in X$, definimos seu peso $W(f)$ pela equação:

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d));$$

isto é, $W(f)$ é o produto de símbolos algébricos correspondentes as cores que f atribui aos elementos de D .

Definição 7.5 Seja $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações do conjunto D , se Y é um subconjunto de X o inventário de Y é a expressão:

$$\sum_{f \in Y} W(f).$$

A seguir serão dados alguns exemplos que objetivam ilustrar as definições 7.2 a 7.5 para alguns exemplos já abordados neste texto.

Exemplo 7.6 Considere o problema proposto pelo exemplo 5.4 de se determinar todas as possíveis colorações existentes ao se colorir os vértices de um hexágono regular com as cores preto e branco.

Neste exemplo $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o conjunto dos vértices do hexágono regular numerados e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$ é o conjunto de cores.

A função peso no conjunto C é dada por:

$$\begin{aligned} \omega(\text{preto}) &= p \\ \omega(\text{branco}) &= b. \end{aligned}$$

Dessa forma, o enumerador de estoque de C é dado por:

$$\omega(\text{preto}) + \omega(\text{branco}) = p + b.$$

Considere agora a coloração f representada na figura 16 onde:

$$\begin{aligned} f(3) &= f(5) = \text{branco} \\ f(1) &= f(2) = f(4) = f(6) = \text{preto} \end{aligned}$$

O peso da coloração f é:

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \omega(f(1))\omega(f(2))\omega(f(3))\omega(f(4))\omega(f(5))\omega(f(6))$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(\text{preto})\omega(\text{preto})\omega(\text{branco})\omega(\text{preto})\omega(\text{branco})\omega(\text{preto}) \\
&= \text{ppbpbp} = p^4b^2
\end{aligned}$$

Finalmente, como pode ser conferido pela figura 15, o inventário do conjunto $X = F(D, C)$ é dado por:

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^6 + 6p^5b + 15p^4b^2 + 20p^3b^3 + 15p^2b^4 + 6pb^5 + b^6 = (p + b)^6.$$

Exemplo 7.7 Considere agora o problema proposto no exemplo 5.3 de se determinar todas as possíveis maneiras de se pintar de preto e branco as casas de um tabuleiro 2×2 .

Neste exemplo $D = \{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto das casas do tabuleiro 2×2 e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$ é o conjunto das cores.

A função peso no conjunto C é dada por:

$$\begin{aligned}
\omega(\text{preto}) &= p \\
\omega(\text{branco}) &= b.
\end{aligned}$$

Logo, o enumerador de estoque de C é dado por:

$$\omega(\text{preto}) + \omega(\text{branco}) = p + b.$$

Considere a coloração representada na figura 14, do exemplo 5.3.

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(3) = \text{branco} \\
f(2) &= f(4) = \text{preto}
\end{aligned}$$

Então, o peso da coloração f é:

$$\begin{aligned}
W(f) &= \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \omega(f(1))\omega(f(2))\omega(f(3))\omega(f(4)) \\
&= \omega(\text{branco})\omega(\text{preto})\omega(\text{branco})\omega(\text{preto}) \\
&= \text{bpbp} = p^2b^2
\end{aligned}$$

E o inventário do conjunto $X = F(D, C)$, como pode ser observado na figura 12 é dado por:

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^4 + 4p^3b + 6p^2b^2 + 4pb^3 + b^4.$$

Exemplo 7.8 No exemplo 5.2 tem-se $D = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{\text{preto}, \text{branco}\}$, então: a função peso e o enumerador de estoque são os mesmos dos exemplos 7.6 e 7.7. Considerando a coloração representada na figura 11, em que

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(3) = \text{preto} \\
f(2) &= \text{branco}
\end{aligned}$$

O peso dessa coloração é:

$$\begin{aligned}
W(f) &= \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \omega(f(1))\omega(f(2))\omega(f(3)) \\
&= \omega(\text{preto})\omega(\text{branco})\omega(\text{preto}) \\
&= \text{pbp} = p^2b.
\end{aligned}$$

Observando a figura 10, pode-se concluir que o inventário do conjunto X é dado por:

$$\sum_{f \in X} W(f) = p^3 + 3p^2b + 3pb^2 + b^3.$$

7.3 Inventário Padrão

Definição 7.6 *Seja $X = F(D, C)$ o conjunto das colorações do conjunto D , se Y é um subconjunto de X que contém exatamente uma coloração de cada órbita, então o inventário de Y é chamado de inventário padrão ou função geradora e é denotado por F_G .*

Exemplo 7.9 *Para determinar o inventário padrão do exemplo 7.6, é necessário conhecer todas as órbitas das colorações dos vértices do hexágono com as cores preto e branco. Mas isso foi feito no exemplo 5.7. Estas órbitas estão apresentadas na figura 19. Logo:*

$$F_G = p^6 + p^5b + 3p^4b^2 + 3p^3b^3 + 3p^2b^4 + pb^5 + b^6.$$

Exemplo 7.10 *Analogamente ao exemplo anterior, para determinar o inventário padrão do exemplo 7.7 é preciso observar as órbitas das colorações do tabuleiro 2×2 com as cores preto e branco. Estas órbitas estão expostas na figura 18 do exemplo 5.6. Portanto:*

$$F_G = p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4.$$

Observação 7.1 *Ao fazer $b=p=1$ no inventário padrão dos exemplos 7.9 e 7.10, obtemos o número de diferentes padrões de coloração.*

7.4 Teorema de Pólya

O inventário padrão é uma ferramenta poderosa pois por meio dele é possível se determinar, além do número de diferentes padrões de coloração, quantas colorações distintas existem com o número de cada coloração dado previamente. Entretanto, encontrá-lo é uma tarefa complicada pois é necessário dividir todas as colorações em órbitas. O teorema de Pólya, apresentado nesta seção, será utilizado para simplificar este processo. Ele apresenta uma maneira mais simples de se obter o inventário padrão.

Teorema 7.1 *(Teorema de Enumeração de Pólya) Seja $X = F(D, C)$ o conjunto de todas as colorações do conjunto D e seja ω uma função peso em C . Seja G grupo de permutações de D que age em X . Se o índice de ciclos de G é*

$$Z(G; x_1; x_2; x_3; \dots),$$

então o inventário padrão (função geradora) F_G é dado por

$$F_G = Z \left(G; \sum_{c \in C} \omega(c), \sum_{c \in C} \omega(c)^2, \sum_{c \in C} \omega(c)^3 \dots \right).$$

Demonstração.

Ver referência [2].

□

Exemplo 7.11 *Obtenha a função geradora (inventário padrão) para o número de colorações de um tabuleiro 2×2 nas cores preto e branco.*

O índice de ciclos do grupo diedral D_4 foi calculado no exemplo 7.4 e é dado por:

$$Z(G) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2).$$

Segundo o pelo Teorema de Pólya, para obter a função geradora deve-se fazer as seguintes substituições no índice de ciclos:

$$x_1 = b + p, x_2 = b^2 + p^2 \text{ e } x_4 = b^4 + p^4.$$

Logo:

$$\begin{aligned} F(G) &= \frac{1}{8}((b + p)^4 + 2(b^4 + p^4) + 3(b^2 + p^2)^2 + 2(b + p)^2(b^2 + p^2)). \\ &= p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4 \end{aligned}$$

A função geradora, $F(G)$, transmite as seguintes informações:

- Existe 1 padrão de coloração com 4 casas pretas.
- Existe 1 padrão de coloração com 3 casas pretas e 1 casa branca.
- Existem 2 padrões de coloração com 2 casas pretas e 2 casas brancas.
- Existe 1 padrão de coloração com 1 casa preta e 3 casas brancas.
- Existe 1 padrão com 4 casas brancas.

Observe que, além de fornecer o número de órbitas distintas (basta fazer todas as variáveis iguais a um na função geradora), o Teorema de Pólya informa quantas colorações existem com o número de cada cor pré-estabelecido. Dessa forma, o Teorema de Pólya é mais geral que o Teorema de Burnside.

Exemplo 7.12 *Suponha que um colar de 6 pérolas possa ter pérolas pretas, brancas e cinzas. Suponha ainda que possamos fazer apenas movimentos de rotações neste colar. Quantos colares diferentes existem com 1 pérola branca, 4 pérolas cinzas e 1 pérola preta?*

Sejam $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{\text{branco, preto, cinza}\}$ com pesos dados por $\omega(\text{branco}) = B, \omega(\text{preto}) = P, \omega(\text{cinza}) = C$.

O índice de ciclos de R_6 foi dado no exemplo 7.2:

$$Z(R_6) = \frac{1}{6}(X_1^6 + X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6).$$

Pelo Teorema de Pólya, a função geradora é:

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{1}{6}((B + P + C)^6 + (B^2 + P^2 + C^2)^3 + 2(B^3 + P^3 + C^3)^2 + 2(B^6 + P^6 + C^6)) \\ &= P^6 + P^5C + 3P^4C^2 + 4P^3C^3 + 3P^2C^4 + PC^5 + C^6 + P^5B + 5P^4CB + 10P^3C^2B + \\ &10P^2C^3B + 5PC^4B + C^5B + 3P^4B^2 + 10P^3CB^2 + 16P^2C^2B^2 + 10PC^3B^2 + 3C^4B^2 + 4P^3B^3 + \\ &10P^2CB^3 + 10PC^2B^3 + 4C^3B^3 + 3P^2B^4 + 5PCB^4 + 3C^2B^4 + PB^5 + CB^5 + B^6. \end{aligned}$$

Então o número de colares diferentes com 1 pérola branca, 4 pérolas cinzas e 1 pérola preta é o coeficiente de PC^4B , que é 5.

Exemplo 7.13 *Suponha agora que no exemplo 7.12, além das rotações, também as reflexões são permitidas. Neste caso, o grupo a agir no conjunto das colorações é o grupo diedral D_6 . O índice de ciclos de D_6 é dado no exemplo 7.3:*

$$Z(D_6) = \frac{1}{12}(X_1^6 + 3X_1^2X_2^2 + 4X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6).$$

Pelo Teorema de Pólya, a função geradora é dada por:

$$F_G = \frac{1}{12}[(B + P + C)^6 + 3(B + P + C)^2(B^2 + P^2 + C^2)^2 + 4(B^2 + P^2 + C^2)^3 + 2(B^3 + P^3 + C^3)^2 + 2(B^6 + P^6 + C^6)].$$

$$= P^6 + P^5C + 3P^4C^2 + 3P^3C^3 + 3P^2C^4 + PC^5 + C^6 + P^5B + 3P^4CB + 6P^3C^2B + 6P^2C^3B + 3PC^4B + C^5B + 3P^4B^2 + 6P^3CB^2 + 11P^2C^2B^2 + 6PC^3B^2 + 3C^4B^2 + 3P^3B^3 + 6P^2CB^3 + 6PC^2B^3 + 3C^3B^3 + 3P^2B^4 + 3PCB^4 + 3C^2B^4 + PB^5 + CB^5 + B^6.$$

Então, neste caso, o número de colares com 1 pérola branca, 4 pérolas cinzas e 1 pérola preta é o coeficiente de PC^4B , que é 3.

Exemplo 7.14 De quantas maneiras podemos colorir as faces de um cubo utilizando as cores vermelho, amarelo, preto e branco, de maneira que em cada pintura tenhamos exatamente 2 faces amarelas e 2 vermelhas? E a quantidade de pinturas contendo exatamente 1 face amarela?

Seja $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto das faces do cubo e $C = \{\text{vermelho, amarelo, branco, preto}\}$. No exemplo 4.1 foram apresentadas as 24 simetrias rotacionais do cubo. Assim,

$$G = \{e, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{23}\}.$$

De acordo com 7.5 o índice de ciclos de G é dado por:

$$Z(G) = \frac{1}{24}(X_1^6 + 6X_1^2X_4^1 + 3X_1^2X_2^2 + 6X_2^3 + 8X_3^2).$$

O peso de cada cor é:

$$\omega(\text{amarelo}) = a$$

$$\omega(\text{vermelho}) = v$$

$$\omega(\text{branco}) = b$$

$$\omega(\text{preto}) = p$$

Então, pelo Teorema de Pólya o inventário padrão é dado por:

$$F_G = \frac{1}{24}((a + v + b + m)^6 + 3(a + v + b + m)^2(a^2 + v^2 + b^2 + m^2)^2 + 6(a + v + b + m)^2(a^4 + v^4 + b^4 + m^4) + 6(a^2 + v^2 + b^2 + m^2)^3 + 8(a^3 + v^3 + b^3 + m^3)^2).$$

$$F_G = \frac{1}{24}(24a^6 + 24a^5b + 24a^5p + 24a^5v + 48a^4b^2 + 48a^4bp + 48a^4bv + 48a^4p^2 + 48a^4pv + 48a^4v^2 + 48a^3b^3 + 72a^3b^2p + 72a^3b^2v + 72a^3bp^2 + 120a^3bpv + 72a^3bv^2 + 48a^3p^3 + 72a^3p^2v + 72a^3pv^2 + 48a^3v^3 + 48a^2b^4 + 72a^2b^3p + 72a^2b^3v + 144a^2b^2p^2 + 192a^2b^2pv + 144a^2b^2v^2 + 72a^2bp^3 + 192a^2bp^2v + 192a^2b^2pv^2 + 72a^2bv^3 + 48a^2p^4 + 72a^2p^3v + 144a^2p^2v^2 + 72a^2pv^3 + 48a^2v^4 + 24ab^5 + 48ab^4p + 48ab^4v + 72ab^3p^2 + 120ab^3pv + 72ab^3v^2 + 72ab^2p^3 + 192ab^2p^2v + 192ab^2pv^2 + 72ab^2v^3 + 48abp^4 + 120abp^3v + 192abp^2v^2 + 120abpv^3 + 48abv^4 + 24ap^5 + 48ap^4v + 72ap^3v^2 + 72ap^2v^3 + 48apv^4 + 24av^5 + 24b^6 + 24b^5p + 24b^5v + 48b^4p^2 + 48b^4pv + 48b^4v^2 + 48b^3p^3 + 72b^3p^2v + 72b^3pv^2 + 48b^3v^3 + 48b^2p^4 + 72b^2p^3v + 144b^2p^2v^2 + 72b^2pv^3 + 48b^2v^4 + 24bp^5 + 48bp^4v + 72bp^3v^2 + 72bp^2v^3 + 48bpv^4 + 24bv^5 + 24p^6 + 24p^5v + 48p^4v^2 + 48p^3v^3 + 48p^2v^4 + 24pv^5 + 24v^6).$$

Para responder a primeira parte do problema, deve-se considerar todos os termos que possuem a^2b^2 :

$$144a^2b^2p^2 + 192a^2b^2pv + 144a^2b^2v^2$$

totalizando 480 maneiras distintas.

Para a segunda pergunta, deve-se considerar todos os termos que contém a^1 :

$$192ab^2p^2v + 192ab^2pv^2 + 72ab^2v^3 + 48abp^4 + 120abp^3v + 192abp^2v^2 + 120abpv^3 + 48abv^4 + 24ap^5 + 48ap^4v + 72ap^3v^2 + 72ap^2v^3 + 48apv^4 + 24av^5$$

totalizando 1272 maneiras distintas.

8 Aplicação em Sala de Aula

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os alunos devem resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo à estratégias diversas. Dessa forma o Teorema de Burnside pode ser apresentado aos estudantes da educação básica, pois pode auxiliar em simples problemas de contagem.

Os resultados e definições apresentadas foram baseados em [8].

8.1 Aplicação Desenvolvida

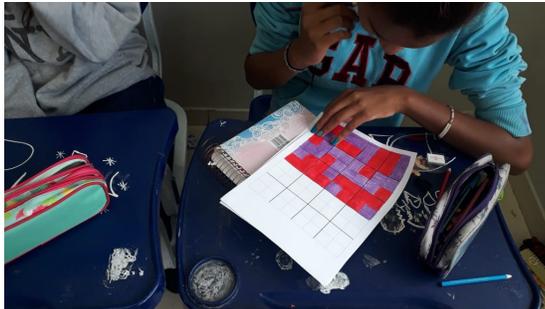
Foi proposto aos alunos um exercício que consistia em encontrar de quantas maneiras diferentes pode-se pintar um tabuleiro 2×2 com duas cores diferentes.

Para realizar a atividade a turma foi dividida em grupos de 4 pessoas. Cada equipe recebeu a mesma quantidade de tabuleiros e seu desafio era pintar os tabuleiros e organizá-los de todas as formas possíveis.



A atividade foi extremamente visual e possibilitou que os educandos fossem além da teoria.

Os alunos chegaram a conclusão que seriam necessários $2^4 = 16$ tabuleiros. Logo após começaram a colorir as diferentes possibilidades dos 16 tabuleiros. Cada grupo inconscientemente desenvolveu uma estratégia para a realização da atividade.



Após todos terem conseguido as 16 colorações diferentes, alguns alunos chegaram a conclusão que certas colorações eram semelhantes às outras, precisando apenas fazer rotações de 90^0 , 180^0 ou 270^0 no sentido horário ou anti-horário.



Assim foi proposto aos grupos um novo desafio que consistia em separar os tabuleiros que possuíam colorações semelhantes e logo após divulgado que existem teoremas que auxiliam a resolver este tipo de problemas e um destes teoremas é o Teorema de Burnside.

A dinâmica teve participação ativa de todos os alunos.

8.2 Sugestão de aplicação

Recursos:

- Folhas de papel com um desenho de um triângulo equilátero com os vértices identificados;
- Modelos de cartolina de um triângulo idêntico ao desenhado no papel com os vértices identificados em frente e verso;
- Um modelo de cartolina de um triângulo equilátero com seus vértices identificados em frente e verso em tamanho grande;

- Quadro negro e giz.

Metodologia:

- Primeiro momento:
 - Solicitar aos alunos que listem todas as permutações do conjunto $X = \{A, B, C\}$;
 - Pedir aos alunos que posicionem o modelo de cartolina sobre a folha com o desenho do triângulo de modo a fazer corresponder os mesmos vértices do triângulo da folha com os do modelo de cartolina;
 - Solicitar que façam movimentos com o modelo de cartolina do triângulo de modo a sobrepô-lo ao triângulo desenhado na folha e que comparem a posição original com a posição obtida a cada movimento. Deve-se voltar à posição original após cada movimento. O professor pode auxiliar nesse passo utilizando o modelo em tamanho grande;
 - Comparar a quantidade simetrias encontradas com a de permutações dos elementos de X ;
 - Fazer o aluno perceber que toda simetria foi associada a uma permutação de X .
 - Fazer uma associação matemática usando a representação matricial de simetria.
- Segundo momento:
 - Perguntar aos alunos se os movimentos feitos com o triângulo podem ser desfeitos de modo a retornar o triângulo à sua posição original;
 - Perguntar aos alunos se algum dos movimentos deixa as posições dos vértices do triângulo inalterada;
 - Solicitar aos alunos que componham alguns movimentos se o resultado obtido pode ser obtido por apenas um movimento;
 - Escolher três das simetrias do triângulo e fazer com que os alunos percebam que esta a operação de composição de simetrias é associativa;
- Terceiro momento:
 - Perguntar aos alunos de quantos modos diferentes podemos pintar os vértices de um triângulo equilátero com duas cores distintas;
 - Caso não percebam, mostrar aos alunos que fazendo alguns movimentos com o triângulo a posição das cores fica inalterada
 - Pedir aos alunos que separem os triângulos com padrões de coloração semelhantes;

9 Conclusão

Nessa dissertação foram apresentados conceitos necessários para entendimento e uso do Teorema de Burnside e do Teorema de Pólya. Para tal, foram dadas algumas definições básicas. Em seguida foram discutidos alguns resultados importantes sobre Permutações, Teoria dos Grupos e suas propriedades. Foram introduzidos conjuntos importantes como o fixador, estabilizador e órbita. Para confirmar a aplicabilidade do Teorema no ensino básico, foi feita uma atividade com alunos da educação básica.

10 Agradecimentos

A caminho desta conquista tive muitas experiências, ampliei minha visão e conhecimento. Aprendi a conviver, a não desistir de lutar, a tentar novamente, a superar e a surpreender.

Sem dúvidas o Mestrado é uma grande conquista em minha vida. O amor e apoio de pessoas especiais permitiram o sucesso dessa caminhada, tornando-a extremamente prazerosa.

Agradeço a Deus todos os dias por me iluminar, por me conceder saúde e por ter me dado uma família tão maravilhosa.

Agradeço a minha família e amigos por compartilharem comigo momentos de ansiedade, estresse, alegria, sempre torcendo pelo meu sucesso.

Aos meus amigos da Escola Estadual Bernardo Valadares de Vasconcellos que sempre me incentivaram a continuar.

Aos colegas de sala que, comigo enfrentaram esse grande desafio, agradeço pelos momentos de descontração e companheirismo.

Aos professores sou grata pelos ensinamentos valiosos, principalmente à minha orientadora, Professora Doutora Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni, por toda a paciência, cuidado, respeito e empenho com que sempre me instruiu na construção desse trabalho.

Referências

- [1] ANDRETTI, C. M. V. Ações de Grupos e Contagem: Teorema de Burnside. Monografia. Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- [2] BOVO, E. e José P. O. Santos. O Teorema de Burnside e Aplicações. 2004.
- [3] CASSIMIRO, Débora V. Ramos Barbosa Teoria enumerativa de Pólya. Monografia. Universidade Federal de Pernambuco, 2017.
- [4] DOMINGUES, Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi. Álgebra Moderna, 2003.
- [5] GARCIA, Arnaldo e Lequain Yves. Elementos de Álgebra. Rio de Janeiro, IMPA, 2013.
- [6] GONÇALVES, Pricila Maria Cleaver. Aplicações do Teorema de Pólya, 2000.
- [7] JANESCH, Oscar Ricardo. Algebra II. Florianópolis, 2008.
- [8] MARQUES D. S. Teorema de Burnside e Algumas Aplicações à Contagem. Minas Gerais, 2019.
- [9] NAGPAUL S. R. e Jain S. K. Topics in applied abstract. Thomson Brooks/Cole, 2005.
- [10] SLOMSON, Alan e R.B.J.T. Allenby. How to count an introduction to combinatorics, 2011.
- [11] SOUZA, Rodrigo Luiz de. Uma breve introdução a teoria de grupos. Florianópolis, 2014.
- [12] TAVARES, João Nuno. O Teorema enumerativo de Pólya. URL: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/matpolya/index.html>
- [13] VILLELA, Maria Lúcia Torres. Grupo, 2008.