UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

Rafael Correia Fonseca

Construções Geométricas nos Anos Finais do Ensino Fundamental

São João del-Rei
Março de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI

Rafael Correia Fonseca

Construções Geométricas nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos

Banca Examinadora
APROVADA em 12 de Março de 2020.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos

Prof Dr. Francinildo Nobre Ferreira-UFSJ

Prof. Dr. Mário Henrique Andrade Claúdio-UFLA

São João del-Rei
Março de 2020

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo entendimento, sabedoria, calma e por tornar possível a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Fábio Alexandre de Matos meu orientador, pela orientação e confiança depositada na realização deste trabalho.

Aos professores Dr Francinildo e Dr Mário Henrique, por terem aceitado o convite para participar da banca e contribuir de forma significativa com meu trabalho.

Aos amigos do curso de mestrado, pelo apoio e amizade. Em especial à Fernanda, Guilherme, Bryan por todos os momentos de convivência, sempre presentes nessa jornada.

Aos meus amigos em geral, sempre presentes, me apoiando, incentivando e sendo o meu refúgio.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a execução desta dissertação, meu sincero agradecimento.

" Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda. "

— Paulo Freire

Resumo

A presente pesquisa, que se concentra na área de atuação de investigação em Ensino da Matem ática, teve por intento evidenciar que as Construções Geométricas atuam como uma relevante ferramenta prático-metodológica para o ensino da Geometria. Nesse sentido, foi feito um estudo como aporte teórico e além disso, para tanto, fez-se essencial discutir o seu ensino ao longo dos tempos até a contemporaneidade fundamentada na base normativa, que atualmente, vem norteando o ensino e aprendizagem na atualidade. Dessa forma, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo que define as aprendizagens a serem adquiridas ao longo do Ensino Básico, é a portadora das habilidades de Construções Geométricas que devem ser desenvolvidas, bem como consolidadas nos anos finais do Ensino Fundamental. Desse modo, a presente investigação justifica-se por discutir a essa pertinente e relevante questão. Ademais, para a realização do objetivo empreendido, foi proposta a produção de um material didático, com vistas a consultas e, tendo como público-alvo, os docentes do Ensino Básico com o intuito de aprofundamento de seus conhecimentos para o ensino de tais construções , principalmente nas salas de aulas.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Ensino Fundamental, Base Nacional Comum Curricular.

Abstract

The present research, which focuses on the area of research in Mathematics' teaching, had, as main goal, to show tha the Geometrical Constructions act as a relevant practical-methodologicol tool for teaching Geometry. In the context, a study was made as a theoretical contribution and, besides that, it was essential to discuss its teaching throughout the ages until contemporary times grounded on the normative base, which is currently guiding teaching and learning today. According to that, the Common National Curricular Base (BNCC), which is the normative document that defines the learnings that have to be acquired throughout Basic Education, and the carrier of skills of Geometric Constructions that must be developed, as well as consolidated in the final years of elementary school. Hence, the present investigation is justified for discussing this pertinent and relevant question. Likewise, for the realization of the undertaken goal, it was proposed to produce didactic material, aiming to consultations and, having as target audience, the teachers of Basic Education in order to deepen their knowledge for teaching such constructions, mainly in classrooms.

Keyword: Geometric Constructions, Elementary School, Common Core National Base.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática
CBC	Conteúdo Básico Comum
LDB	Lei das Diretrizes Básicas
PNE	Plano Nacional de Educação

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Geometria está presente em diversas formas e diferentes situações no nosso cotidiano, fazendo parte da vida do ser humano desde os tempos remotos, como por exemplo, na construção das pirâmides. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) ela desempenha um papel fundamental no currículo, possibilitando um tipo de pensamento para compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivemos. Destaca-se que as questões geométricas de forma espontânea desperta o interesse dos estudantes de modo natural e que é um campo fértil que favorece, através de situações-problema, o desenvolvimento da capacidade de argumentar e construir demonstrações.

Há cerca de 2300 anos, em Alexandria, um professor e estudioso denominado Euclides escreveu sobre o sistema axiomático mais famoso do mundo. Nesse sentido, o autor supracitado, postulou em sua presente obra, conceituações nas quais reunia, bem como discutia os principais conhecimentos matemáticos do mundo daquela época.

Desse modo, a relevante obra de Euclides, conhecida por:Elementos, que aborda de forma precipíua, a concepção das Construções Geométricas, no que tange ao livro I. Além disso, ainda aborda os principais instrumentos de construções que são a régua e o compasso.

É válido ressaltar que para o já mencionado estudioso, no que diz respeito ao traçado de construções com régua e compasso, eles podem ser visto, como um jogo, no qual se obedecem duas regras:

A priori, com a régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos, dados e a posteriori, com o compasso é, permitido traçar uma circunferência com centro em um dado ponto e assim, ir passando por um segundo outro ponto qualquer.

Diante das colocações, cabe ainda uma justificativa acerca da proposição e motivação para a pesquisa empreendida. Logo, o presente trabalho teve por objetivo, refletir acerca da relevância do ensino das construções geométricas nos anos finais do Ensino Fundamental, pois ao propiciar a utilização da régua e do compasso em sala de aula, isso pressupõe encaminhamentos para uma ferramenta que atua como prática-metodológica relevante que além disso, norteia, promove e consolida o desenvolvimento cognitivo dos discentes.

Em minha vida escolar do ensino básico não tive nenhum contato com as construções geométricas, fui ter no curso de licenciatura em matemática na disciplina de Geometria Plana e Desenho Geométrico. Depois de licenciado, por várias questões não lecionei esse conteúdo nas turmas do ensino fundamental. Mas depois de ter feito a disciplina de Geometria do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) fiquei motivado a escrever essa pesquisa, servindo de base para que professores possam ensinar construções geométricas em suas aulas de Geometria.

Para uma melhor organização da pesquisa, o presente estudo contemplou ser estruturado por capítulos, sendo estes dispostos da seguinte forma:

No presente capítulo II, fez-se uma breve alusão e contextualização histórica acerca do surgimento das Construções Geométricas, bem como a sua importância e finaliza-se com evidenciação da linha histórica sobre o seu ensino no currículo escolar brasileiro.

No capítulo III, apresentou-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo, norteador e vigente muito importante para os profissionais da educação, pois é ela que norteia as aprendizagens que os alunos devem desenvolver nas escolas da Educação Infantil até o Ensino Médio.

Ademais, no que tange ao capítulo IV, discutiu-se como elaborar os principais conceitos de Construções Geométricas com régua, compasso, transferidor e o par de esquadros. Nessa direção, mostrou-se como transportar segmentos e ângulos, assim como apresentamos os conceitos: de construtibilidade, de traçado retas paralelas e perpendiculares, das construções de triângulos, de mediatriz, de bissetriz e, por consequinte finalizou-se com a construção de polígonos regulares.

Já, no capítulo V, foi proposta uma sequência de atividades que contemplou as habilidades de construções geométricas de cada série dos anos finais do Ensino Fundamental. Sendo elas elencadas da seguinte maneira:

Para as turmas de 6^o anos, o objeto principal foi abordar a construção de retas paralelas e perpendiculares; acrescendo-se a isso, na abordagem adotada para as turmas de 7^o anos, a temática foi a construção de triângulos; bem como já para as turmas de 8^o anos, objetivo foi trabalhar com a construção de ângulos; e, por fim com as turmas de 9^o anos foi feita uma abordagem enfatizando o trabalho com o traçado de polígonos.

Capítulo 2

O Ensino de Construções Geométricas

No que tange às construções geométricas, elas se tratam da resolução gráfica de problemas que envolvem a geometria plana elementar. Nesse sentido, é na geometria grega do século V a. C., época dos pitagóricos, nas quais as construções geométricas apareceram e tiveram uma grande relevância no desenvolvimento da matemática grega.

Em tempos idos da Grécia antiga, a palavra número era primordialmente e, somente usada para evidenciar inteiros e, ao passo que, uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Assim, esses tais conceitos, naturalmente, causavam dificuldades nas medidas das grandezas.

Cabe mencionar que a noção de número real estava ainda muito distante de ser concebida, mas, na época de Euclides uma concepção inovadora despontou. A qual para o estudioso consistia em que as grandezas, no lugar de serem associadas a números, passaram a ser associadas a segmento de reta e nasce uma nova álgebra, completamente geométrica na qual, a palavra *resolver* era sinônimo de *construir*. (WAGNER, 2007)

Em face do exposto, é necessário considerar que por volta de 300 a.C., Euclides, reuniu em alguns volumes todo o conhecimento de Geometria existente até aquela época. Esses volumes faziam parte de uma coleção de 13 livros que se tornaram os mais lidos no Ocidente, perdendo em edições apenas para a Bíblia, sendo essa obra do referido autor denominada: *Elementos.*

Além disso, a tal obra intitulada: Elementos aborda 465 proposições da geometria plana e espacial, assim como a teoria dos números e álgebra geométrica grega. Nessa obra, em parte, fundamentam-se até a atualidade, os livros didáticos de Matemática. E, além disso, a teoria de Geometria vem acompanhada das Construções Geométricas.

Em relação a isso, e, ainda corroborando acerca dessa discussão, conforme (PUTNOKI, 1993), entre os gregos, não havia uma diferenciação entre Desenho Geométrico e Geometria, o primeiro aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria.

2.1 Justificativas para se ensinar as construções geométricas

No que diz respeito ao estudo de Construções Geométricas, é válido ressaltar que para uma aprendizagem proficiente de Geometria, o manuseio dos instrumentos clássicos nas construções, nos permitem explorar, assim como identificar, conjecturar e validar as propriedades das figuras.

Em conformidade a isso, (LIMA, 1991) pondera que os desenhos das figuras geométricas são partes importantíssimas para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Além disso, o referido teórico considera que é fundamental que o discente, por si só, desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, forçando o raciocínio e exercitando a mente.

Nessa direção, diante de tal colocação do autor desponta -se o seguinte questionamento: Mas afinal, para quê estudar as construções geométricas? Dessa forma, essa é uma indagação de muitos estudantes e professores de matemática.

No tocante à questão das Construções Geométricas, (PUTNOKI, 1993) discute essa questão formulando e respondendo a duas perguntas: Primeiramente: Para que serve o desenho geométrico? e, posteriormente: Para quem serve o desenho geométrico?

> Para que serve o desenho geométrico?
>
> O desenho geométrico é classificado como desenho resolutivo, pois através dele, determinam-se respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica. Assim o estudante tende a aperfeiçoar seu raciocínio lógico, a desenvolver sua criatividade e a aguçar seu senso de organização.
>
> Para quem serve o desenho geométrico?
>
> A resolução de um problema de construção geométrica, de um modo geral compreende duas etapas:
>
> . a pesquisa das propriedades e da sequência de operações que possibilitam realizar a construção.
>
> . a execução da construção pedida, servindo-se de instrumentos de desenho.
>
> No que se refere a primeira etapa, esta lida, de forma teórica, com os elementos da Geometria, exigindo-se do discente muito empenho. O estudo do desenho nessa fase, dará a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo, além de despertar a criatividade. Independente da área que vá se dedicar futuramente como profissional, o discente terá nela um elemento fundamental na sua formação.

No que se refere a segunda etapa, esta se aprimora quando manuseiam-se os instrumentos, desenvolve-se grandemente, o sentido de organização, com frequência, o discente então experimenta a sensação de realização ao ver se concretizarem, no papel, as ideias que possibilitaram a sua construção.

2.2 Construções Geométricas no currículo escolar

Para o teórico (ZUIN, 2001), em seus estudos, ele descreve o panorama da legislação escolar relativa ao ensino das construções geométricas no Brasil e que nos documentos oficiais aparecem como outros nomes: : *Desenho*, *Desenho Linear Geométrico*, *Desenho Linear* e *Desenho Geométrico*.

Dessa maneira, o ensino de matemática no Brasil inicia-se na época do Brasil-Império, quando são introduzidas disciplinas como: a Geometria, Álgebra e Aritmética, tais disciplinas estavam reservadas para a formação técnica do futuro engenheiro. Ademais, o desenho geométrico fazia parte do currículo da escola, com um propósito profissionalizante tendo uma abordagem mais prática do que teórica e, ainda era visto como um saber escolar para o desenvolvimento industrial.

Vale advertir que em 1931 uma portaria ministerial estabeleceu o programa do curso fundamental de ensino secundário e um decreto de instruções pedagógicas mostrava que o ensino de Desenho deveria habilitar o estudante a se utilizar da representação gráfica como meio de aquisição e de expressão da cultura. Além disso, outra portaria de 1936 mostrava uma diferenciação entre o desenho linear geométrico e o desenho geométrico, este último exclusivo para a área de exatas.

É preciso lembrar que a Portaria Ministerial número 555, de 14 de novembro de 1945, estabeleceu que os programas de Desenho, teriam mais de uma modalidade, como o desenho do Natural, Decorativo, Geométrico, Geométrico e projetivo e Noções sobre Perspectiva Linear e Traçado das sombras. Desse modo, pela primeira vez em 1951, há uma referência ao Desenho Geométrico como disciplina fundamental para aquisição dos conhecimentos dentro da área da Matemática.

Em face do exposto, é necessário considerar que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei 4.024, de 1961 propôs que o Desenho não era uma disciplina obrigatória e, nessa época surge sinais da desvalorização dessa área de conhecimento. Entretanto, já no ano de 1971, o currículo do Ensino Fundamental brasileiro sofre grandes mudanças com a implementação da lei nº 5692- Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Assim, havia um núcleo comum obrigatório e uma parte diversificada que poderia incluir disciplinas optativas conforme as necessidades locais das instituições de ensino.

Nessa perspectiva, por conseguinte o Desenho Geométrico não era mais exigido nos exames vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharias. Logo, passou a se configurar como uma disciplina optativa incluso na parte diversificada e, as escolas viram-se desobrigadas de manter esta disciplina.

Com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) no ano de 1998 para 5^a à 8^a série (atualmente 6^a ao 9^a ano) a Geometria e as Construções Geométricas são valorizadas, no conteúdo espaço e forma, pressupondo que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas Construções Geométricas com régua e compasso, essas que são ferramentas práticos-metodológicas atuando como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além de pressupor a construção de outras relações.

Nesse viés, o governo de Minas Gerais considera, fundamentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) estabelece as habilidades e competências a serem adquiridos pelos discentes na Educação Básica através dos Conteúdos Básicos Comuns (CBCs). Nessa direção, os CBCs não esgotam todos os conteúdos a serem abordados na escola, mas expressam os aspectos fundamentais de cada disciplina, e, que não podem deixar de serem ensinados e que o discente não pode deixar de aprender.

Esse documento ancora-se dentro do eixo temático: Espaço e forma, habilidades de Construções Geométricas que devem ser obrigatoriamente ensinadas aos discentes e, que além disso, preconizam e destacam que elas proporcionam uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades relacionadas com: a interpretação, a escrita, a organização e a formalização, além de propiciar o desenvolvimento da criatividade nos discentes.

No capítulo III do presente trabalho, foi enfatizado o documento normativo que define e regulamenta as aprendizagens essenciais que todos os discentes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). (MEC, 2017). Nesse documento, as Construções Geométricas são um objeto de conhecimento que deve ser ensinado obrigatoriamente, em todas as instituições de ensino, sejam elas públicas ou privadas, da Educação Básica.

Capítulo 3

A Base Nacional Comum Curricular

Na Constituição Federal de 1988, o artigo 210 traz que serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. Nesse sentido, as Leis das Diretrizes Básicas (LDB, 2017) aprovada em 1996 reforça a necessidade de uma base comum no inciso IV do seu artigo 9^o

> estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum

Assim, inserido nesse contexto surge as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), que são as normas orientadoras do planejamento curricular das escolas de Educação Básica e posteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), sendo esse um documento que compõe a grade curricular de uma instituição educativa. Nesse sentido, tais documentos vêm com a necessidade de compor um currículo comum às escolas iniciada na constituição. Ademais, em 2014 é homologado o Plano Nacional de Educação (PNE), com vigência de dez anos e com o intento de abranger a vinte metas para melhorar e qualidade de Educação Básica, sendo que quatro delas tratam-se da Base Nacional Comum Curricular.

É válido ressaltar que entre 19 e 23 de novembro de 2014 é realizada a segunda Conferência Nacional pela Educacão (Conae), organizada pelo Fórum Nacional de Educação (FNE) que resultou em um documento acerca das propostas e reflexões para a educação brasileira e, é um importante referencial para o processo de mobilização para a Base Nacional Comum Curricular.

Além disso, cabe ainda salientar que nos dias 17 a 19 de junho de 2016 acontece o primeiro Seminário Interinstitucional para elaboração da BNCC. Dessa maneira, esse referido evento foi um marco importante no processo de elaboração da BNCC, pois reuniu todos os assessores e especialistas envolvidos na elaboração da Base. Logo, a Portaria nº.

592, de 17 de junho de 2015, instituiu uma comissão de especialistas para a elaboração da Proposta da Base Nacional Comum Curricular.

Em face do exposto, é necessário ainda considerar que em 16 de Setembro do ano de 2015, a primeira versão da BNCC é disponibilizada. Acresce-se a isso, que de 2 a 15 de Dezembro de 2015 houve uma relevante mobilização por grande parte das escolas de todo o Brasil para que a discussão do documento preliminar da BNCC se concretizasse de forma profícua.

Posteriormente, ainda acerca dessas discussões nos dias de 23 de Junho a 10 de Agosto de 2016 aconteceram vinte e sete Seminários Estaduais com professores, gestores e especialistas para debater a segunda versão da BNCC. Tendo como agentes promotores no envolvimento a essas discussões o Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime).

Assim, em Abril de 2017, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) entregou a versão final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ao Conselho Nacional de Educação (CNE). Nessa direção, O CNE elaborou um parecer e projeto de resolução sobre a BNCC, que foram encaminhados ao MEC.

Portanto, a partir da homologação da BNCC começa o processo de formação e capacitação dos professores e o apoio aos sistemas de educação estaduais e municipais para a elaboração e adequação dos currículos escolares. Logo, em 20 de dezembro de 2017, a Base Nacional Comum Curricular foi homologada pelo ministro da educação: sendo esse, naquele contexto Mendonça Filho. Desse modo, a BNCC passou a tomar parte do currículo escolar, servindo como base e norte para a sua construção em nossa contemporaneidade.

3.1 A estrutura da BNCC

A BNCC desponta para guiar os currículos dos sistemas e redes de ensino, em todas as Unidades Federativas do nosso país, descrevendo os conhecimentos, competências e habilidades que os discentes devem desenvolver ao longo do Ensino Básico.

Na Base,

> competência é definida como: mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Para melhor entendimento, segue abaixo as dez competências propostas pela BNCC que contemplam e que devem ser desenvolvidas na Educação Básica:

COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários

As propostas pedagógicas das escolas devem orientar o desenvolvimento de tais competências. Nesse sentido a Base está estruturada de modo a determinar as competências que os estudantes devem desenvolver ao longo de cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.)

O Ensino Fundamental, Anos Iniciais (1^o ao 5^o ano) e Anos Finais (6^o ao 9^o ano) está organizado em cinco áreas do conhecimento, a saber, Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso e que por sua vez são divididas em componentes curriculares. Veja figura 3.1

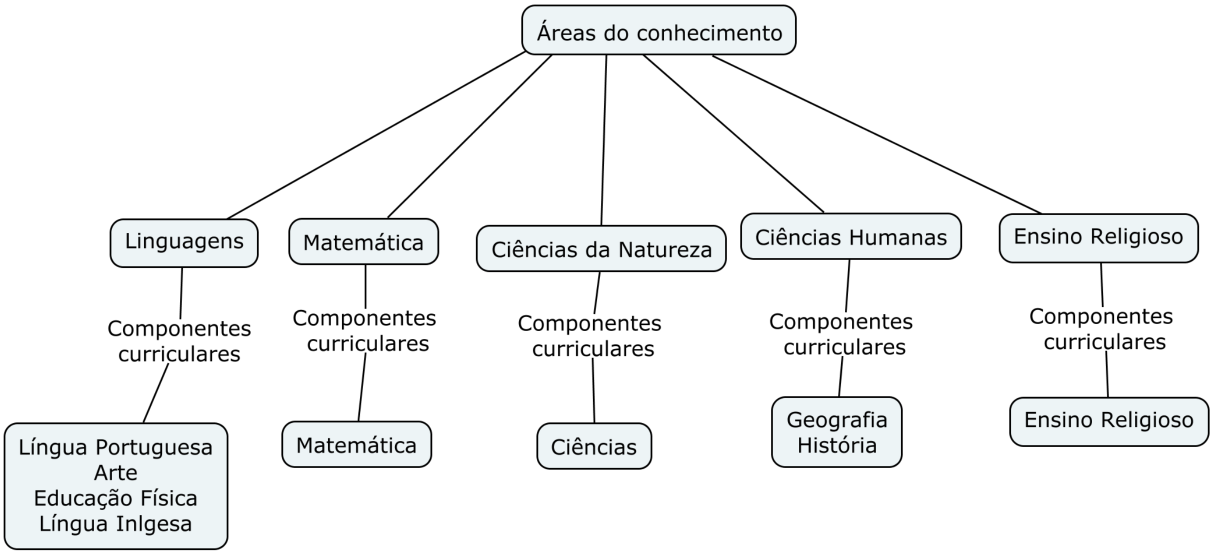


Figura 3.1: Áreas do conhecimento e Componentes curriculares

No que tange as áreas do conhecimento, cabe mencionar que nas áreas que abrigam mais de um componente curricular como: Linguagens e Ciências Humanas, também são definidas as competências específicas do componente (Língua Portuguesa, Arte, Educação Física, Língua Inglesa, Geografia e História).

Dessa forma, para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de **habilidades**, que estão relacionados a diferentes **objetos de conhecimento** que por sua vez, são organizados em **unidades temáticas**.

As unidades temáticas definem um arranjo de objetos de conhecimento, que por sua vez, se dividem em habilidades que expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares, conforme tabela 3.1.

No que se refere a cada uma das habilidades, elas são identificadas por código alfanumérico, por exemplo, no código ($EF01HI01$), o primeiro par de letras indica a etapa de

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Sequências Recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Tabela 3.1: Algumas habilidades de Matemática do 8^o ano do Ensino Fundamental

Ensino Fundamental, enquanto o primeiro par de números indica o ano (01 a 09) a que se refere a habilidade, o segundo par de letras indica o componente curricular: AR = Arte, CI = Ciências, EF = Educação Física, ER = Ensino Religioso, GE = Geografia, HI = História, LI = Língua Inglesa, LP = Língua Portuguesa e MA = Matemática e o último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial. Segundo esse critério, o código EF67EF01, por exemplo, refere-se à primeira habilidade proposta em Educação Física no bloco relativo ao 6º e 7º anos, enquanto o código EF04MA10 indica a décima habilidade do 4º ano de Matemática.

3.2 A área da Matemática

Para compreender como se deu a implementação da BNCC, faz-se de crucial relevância, enfatizar tal mudança, principalmente na área do complemento curricular de Matemática, pois esse é o eixo norteador da pesquisa empreendida.

Nessa perspectiva, discorrer sobre essa mudança faz-se crucial de modo a salientar como ela ocorreu no Ensino Fundamental, tendo como base esse tipo de ensino consolidado com nove anos de duração, com atendimento ao público-alvo estudantil compreendido entre 6 e 14 anos de idade, se dividindo a partir dos Anos Iniciais contemplando dos 1^o ao 5^o ano, bem como aos Anos Finais, partindo do 6^o ao 9^o ano.

Ademais, dentre as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental a BNCC destaca que ela deve ser reconhecida como uma ciência humana, pois "é fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, ainda é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos, com impactos no mundo do trabalho".

Assim, o discente necessita compreender e, ao mesmo tempo depreender que o conhecimento matemático é uma ferramenta significativa para atuar no mundo. Além disso, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, que norteará, ou melhor, orientará, os discentes nesse percurso rumo a aprendizagem e conhecimento, desenvolvendo a formulação de habilidades a serem adquiridas e consolidadas ao longo do Ensino Fundamental. Sendo assim, explicitadas como: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e Medidas** e **Probabilidade e Estatística**. É válido ressaltar que no decorrer de todo esse percurso rumo ao Ensino Fundamental, os conteúdos estão e são estruturados dentro de uma lógica, proporcionando que a cada unidade trabalhada, os conteúdos trarão certa nivelação que exige uma maior aptidão para que sejam compreendidos de forma que alcance toda a sua amplitude, portanto, em profundidade.

Para endossar o que foi exposto acima, vale mencionar (BIGODE, 2000), que enfatiza que: na unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, compreendendo os diferentes significados das operações matemática. Em relação aos cálculos o estudante precisa utilizar equilibradamente as suas várias formas, a ideia é que as competências de cálculo, divididas em 4 pilares:**cálculo escrito** (compreensão dos algoritmos e propriedades); **estimativa**; **cálculo mental**; e uso de instrumentos como a **calculadora**, devem ser trabalhadas balanceadamente em sala de aula.

Nesse sentido, no que se refere a questão das habilidades, o que esse aluno compreende e depreende fará com que ele domine os pilares mais importantes do complemento curricular matemático. Diante disso, cabe mencionar que um aluno bom em cálculo, precisa dominar os quatro pilares, não somente o cálculo escrito, que é tradicionalmente ensinado, na situação-problema por exemplo:

Em que uma loja oferece um desconto de trinta por cento em um produto que custar 49 reais, o vendedor disse que o preço após o desconto será de 37 reais. Que elementos ele trará da escola para checar se esse valor é viável para aquele desconto? Por meio do cálculo mental ele pode verificar rapidamente, basta arredondar o preço para 50 reais e calcular o desconto de 15 reais mentalmente. Com isso, ele pagaria 35 reais, levando a questionar o vendedor sobre o seu cálculo.

Logo, as competências de cálculo são evidenciadas em diversas habilidades, como exemplificado a seguir:

- (EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada,...
- (EF01MA03) Estimar e comparar quantidades...
- (EF02MA02) Fazer estimativas por meio de estratégias diversas...
- (EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.

- (EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito...
- (EF05MA06)..., utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora,...
- (EF05MA07) ...utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

No que diz respeito a Unidade temática: **Álgebra** que tradicionalmente aparecia no 7^o ano , agora, ela é iniciada desde o primeiro ano do Ensino Fundamental e, tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, assim como na representação e análise das relações entre grandezas. Nos Anos Iniciais, ela está presente nas ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.

No que tange a Unidade Temática: **Geometria**, envolve o estudo de conceitos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Nessa unidade o pensamento geométrico será desenvolvido com o estudo de posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais.

Desse modo, esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos. Uma das ideias fundamentais dessa temática é a construção. Além disso, vale ressaltar que o objetivo desse trabalho é a produção de atividades que contemplaram as habilidades de construções geométricas. No capítulo 5 terá uma discussão acerca do ensino das habilidades de Construções Geométricas, por ora, explicita-se abaixo.

Habilidades de construções geométricas de 6^o ao 9^o ano.

- 6^o ano.

  Objeto de conhecimento: Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*.

  Habilidades:

  (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

- 7^o ano.

  Objeto de conhecimento: Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.

  Habilidades:

  (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.

. 8^o ano.

Objeto de conhecimento: Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Habilidades:

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

. 9^o ano.

Objeto de conhecimento: Polígonos regulares

Habilidades: (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

No que se refere a Unidade sobre **Grandezas e medidas**, ela propõe o estudo das unidades de medidas, na qual o discente deve reconhecer que medir é comparar uma grandeza com unidades padronizadas ou não.

E por fim, a incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade de **Probabilidade e estatística**, por meio do enfoque na pesquisa, coleta e comunicação de dados em tabelas, gráficos e quadros. Além disso, nos Anos Iniciais a incerteza é trabalhada com o desenvolvimento do conceito de aleatoriedade, pois os alunos compreendem que há eventos certos, impossíveis e, até mesmo prováveis. Assim, já nos Anos Finais os alunos devem por meio de atividades fazer experimentos aleatórios e calcular a probabilidade de um evento

Capítulo 4

Referencial Teórico

Para o referencial teórico assumiremos como conhecidos os conceitos e principais resultados elementares da geometria plana tais como: reta, ponto, ângulo, segmento entre outros. Mostraremos o uso dos principais instrumento de construções geométricas e apresentaremos os principais resultados que tangem as habilidades de construções para os anos finais do Ensino Fundamental.

4.1 Os principais instrumentos

Os instrumentos de construções geométricas, por excelência são a régua e o compasso. (PUTNOKI, 1993)

De acordo com (EVES, 2004) os postulados dos Elementos de Euclides restringem o uso da régua e do compasso, onde com a régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados e o compasso permite traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado. No trabalho (SCHUBRING; ROQUE, 2014) verificaram que uma das explicações mais convenientes para o uso da régua e do compasso, nos Elementos de Euclides é o caráter pedagógico. As construções com esses instrumentos seriam mais simples e não exigiriam nenhuma teoria adicional, assim, a restrição a esses instrumentos não seria consequência de uma proibição, mas de uma economia de argumentação.

Porém nesse trabalho, vamos utilizar além da régua e compasso, um par de esquadros e um transferidor, pois algumas habilidades da BNCC utilizam tais instrumentos.

A régua

A régua não é um instrumento de medida, mas apenas um instrumento que permite traçar linhas retas, e é nesse sentido que ela será utilizada nas construções. A escala da régua só deverá ser utilizada para colocar os dados do problema no papel ou para medir possíveis respostas procuradas.

O compasso

O compasso é o instrumento que permite traçar circunferências ou arcos de circunferências e também é utilizado para transportar segmentos de uma posição para outra. A ponta do grafite deve estar sempre muito bem apontada, para produzir traçados os mais finos possíveis, essa condição é essencial para conseguir figuras precisas.

Figura 4.1: Compasso

O transferidor

O transferidor é o instrumento de medida de ângulos. Assim como a escala da régua, o transferidor será exclusivamente usado para colocar dados do problema no papel ou para medir respostas. Existem dois tipos de transferidor o de 180^o e o de 360^o.

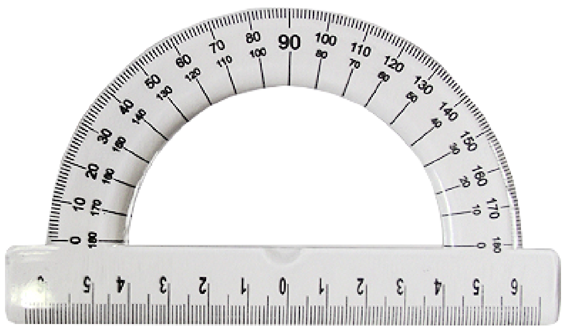


Figura 4.2: Transferidor de 180^o

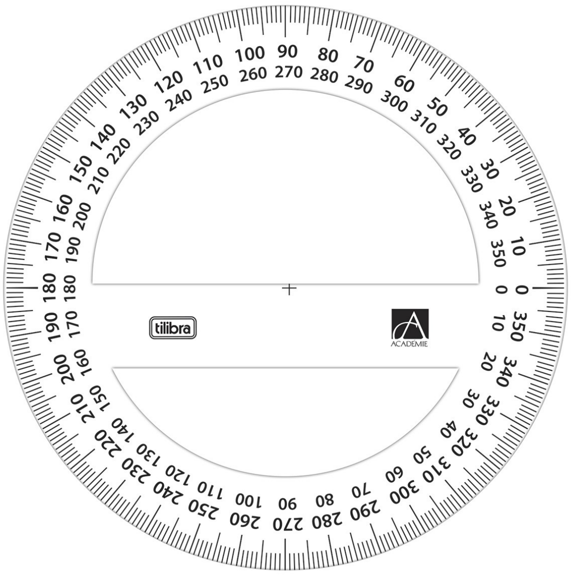


Figura 4.3: Transferidor de 360^o

Para medir um ângulo basta colocar o centro do semicírculo no vértice do ângulo a ser medido e fazer com que um dos lados passe pela marca 0^o, depois é só ler a medida do ângulo na graduação que está sobre o outro lado.

O par de esquadros

São dois tipos de esquadros o de 60^o e o de 45^o (Figura 4.4), esses instrumentos são utilizados para traçar retas perpendiculares ou paralelas a uma reta dada. Na impossibilidade de trabalhar com o par de esquadros, obtenha pelo menos um deles, substitua o outro pela régua, usando-a como guia. Nesse trabalho estudaremos processos que só utilizam a régua e o compasso para traçar paralelas e perpendiculares, o esquadro só poderá ser utilizado quando o processo por régua e compasso estiverem bem dominados.

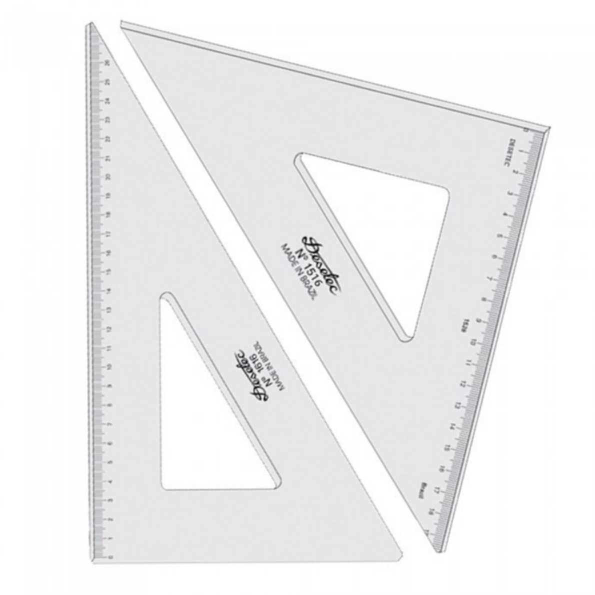


Figura 4.4: Par de esquadros

4.2 Construções Geométricas

Para abordar o problema de quais construções são possíveis com régua e compasso, (WAGNER, 2007) lembra que as construções permitidas são:

- . Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos.
- . Traçar uma circunferência conhecendo o seu centro e um ponto sobre ela.
- . É possível outras construções que serão combinações das anteriores.

Figura 4.5: Reta passando por dois pontos dados

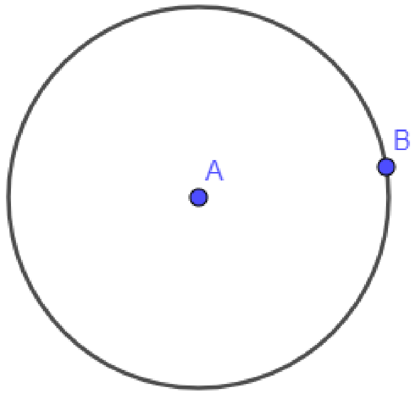


Figura 4.6: Circunferência dados o centro e um ponto sobre ela

Assim não são permitidas: traçar uma circunferência de raio ou centro arbitrário, usar uma graduação da régua ou do compasso, deslizar a régua até uma certa posição, entre outras.

4.2.1 Transporte de segmentos e ângulos

O transporte de segmentos e ângulos fazem parte basicamente da resolução de quase todos os problemas de construções, por isso abaixo mostraremos como transportá-los.

Exemplo 4.1. *Transporte o segmento AB para a semirreta OX.*

Figura 4.7: Segmento AB e semirreta OX

Descrição dos passos.

1. Centre o compasso em A e fixe a outra extremidade em B.

2. Mantendo a abertura calibrada no item 1, centre o compasso em O e marque, com a outra extremidade do mesmo, um ponto E sobre a semirreta OX, tal que $\overline{OE} = \overline{AB}$. (Figura 4.8)

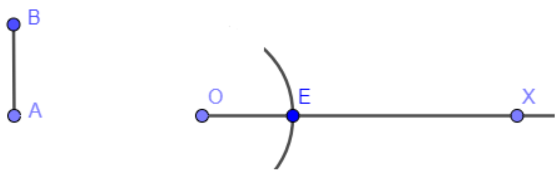


Figura 4.8: Transporte do segmento AB

Exemplo 4.2. *Transporte o ângulo $X\hat{O}Y$ para a semirreta $O'A$*

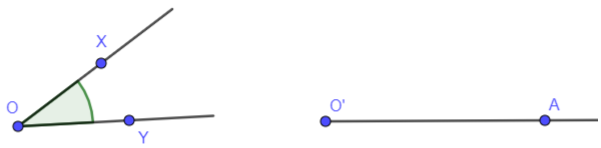


Figura 4.9: Ângulo e semirreta

Descrição dos passos.

1. Trace um arco de circunferência de raio R arbitrário, centrado no vértice O dado, marcando pontos D e E sobre os lados do ângulo. (Figura 4.10)

2. Trace outra circunferência de raio R, centrado em O', marcando Y' como um dos pontos de interseção do mesmo com a semirreta O'A.

3. De centro Y', trace outra circunferência de raio DE e marque o ponto X' de interseção da circunferência de centro O' com a de centro Y'.

4. O ângulo transportado é $X'\hat{O}'Y'$.

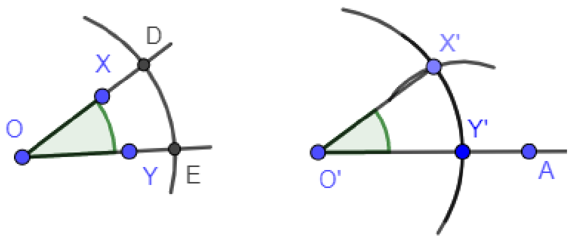


Figura 4.10: Ângulo e semirreta

Os passos acima podem ser justificados usando o caso LLL de congruência de triângulos. (NETO, 2013)

Diremos que um ângulo é $A\hat{O}B$ é **agudo** quando $0^o < A\hat{O}B < 90^o$, **reto** quando $A\hat{O}B = 90^o$ e **obtuso** quando $90^o < A\hat{O}B < 180^o$.

Um resultado sobre a igualdade de ângulos é descrito com a definição e a proposição abaixo.

Definição 4.3. *Dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são **opostos pelo vértice** (OPV) se seus lados forem semirretas opostas.*

Na figura 4.11 a seguir os ângulos α e β são opostos pelo vértice.

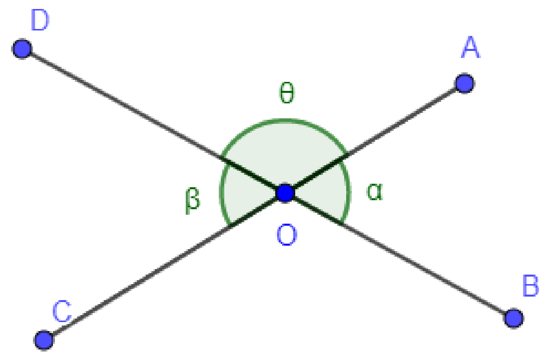


Figura 4.11: Ângulos opostos pelo vértice

Proposição 4.4. *Dois ângulos OPV são iguais.*

Demonstração

Na figura 4.11, OB e OD são semirretas opostas, segue que $\alpha + \theta = 180^o$. Analogamente, $\beta + \theta = 180^o$. Portanto,

$$\alpha = 180^o - \theta = \beta$$

□

4.2.2 Paralelas e perpendiculares

Aplicando as possíveis construções permitidas e descritas por (WAGNER, 2007) o traçado de paralelas e perpendiculares são os primeiros problemas que precisamos resolver, para isso defini-se. Dadas duas retas distintas no plano, temos somente duas possibilidades: **concorrentes** quando possuem um ponto em comum ou **paralelas** quando não têm nenhum ponto em comum. No caso em que possuem um ponto em comum, quando formam ângulos de 90^o nesse ponto, dizemos que as retas são **perpendiculares**.

A existência de retas paralelas é uma consequência do quinto postulado, ou postulado das paralelas, em seu livro Elementos, Euclides impôs a unicidade da reta paralela, como enunciado abaixo. (NETO, 2013)

Postulado 4.5. *Quinto postulado*
Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.

A maioria dos matemáticos que estudaram a obra de Euclides, mostrava que tal postulado parecia muito mais complexo que os quatro anteriores, (NETO, 2013)

Postulado 4.6. *Primeiro postulado*
Por dois pontos quaisquer podemos traçar um única reta.

Postulado 4.7. *Segundo postulado*
Todo segmento de reta pode ser prolongado em uma reta.

Postulado 4.8. *Terceiro postulado*
Existe um círculo que tem como centro no ponto dado e raio igual ao segmento dado.

Postulado 4.9. *Quarto postulado*
Todos os ângulos retos são iguais.

pois acreditavam que fosse possível deduzi-lo como um teorema, a partir dos postulados anteriores. Mas foram insucessos as tentativas de demonstração.

Abaixo mostraremos um método para construir uma reta paralela a outra dada.

Exemplo 4.10. *Construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.*

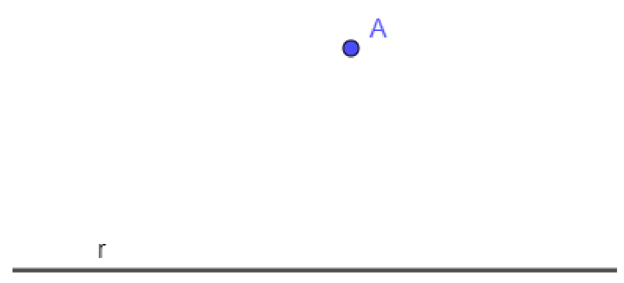


Figura 4.12: Reta e ponto

Descrição dos passos.

1. Trace três circunferências, sempre com o mesmo raio. A primeira com centro em A, determinando um ponto B na reta r. (Figura 4.13)

2. A segunda de centro em B, determinando um ponto C na mesma reta.

3. E a terceira com centro em C, determinando um ponto Q sobre a primeira circunferência.

4. A reta AQ é paralela à reta r.

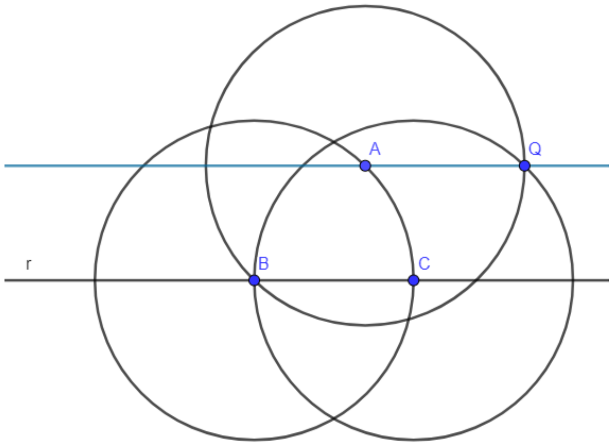


Figura 4.13: Traçado por A uma reta paralela a r.

De forma como foi feita a construção , $ABCQ$ é um losango (Figura 4.14) e portanto seus lados BC e AQ são paralelos. (WAGNER, 2007)

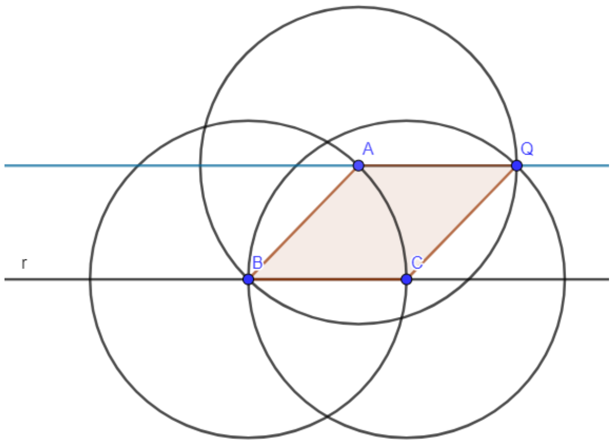


Figura 4.14: Losango $ABCQ$

Assim, (OLIVEIRA, 2015) nos mostra que podemos ensinar aos estudantes, depois de um certa prática com régua e compasso, que não é necessário traçar a circunferência toda, pode-se desenhar apenas um pequeno arco, desde que as interseções sejam feitas no lugar certo, assim a construção fica mais limpa. (Figura 4.15)

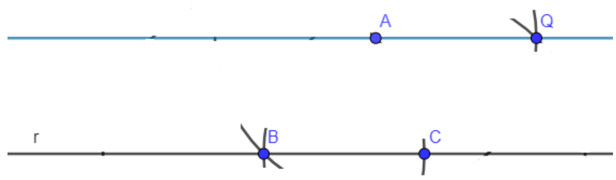


Figura 4.15: Traçado por A uma reta paralela a r.

Exemplo 4.11. *Construa com régua e compasso uma reta s, perpendicular à reta r e passando pelo ponto A.*

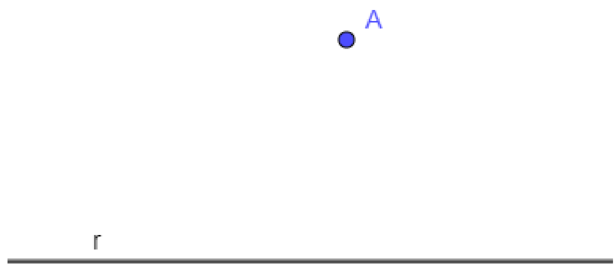


Figura 4.16: Reta e ponto

Descrição dos passos.

1. Trace uma circunferência de centro A cortando a reta r em B e C. (Figura 4.17)

2. Trace duas circunferências de mesmo raio com centros em A e B, obtendo Q, um dos pontos de interseção.

3. A reta AQ é perpendicular a reta r

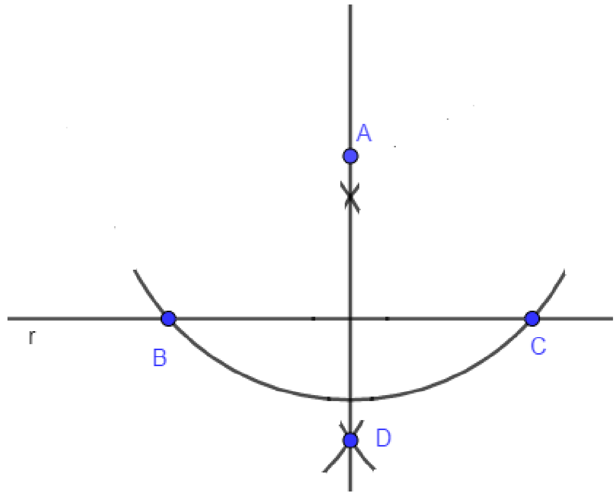


Figura 4.17: Traçado por A uma reta perpendicular a r.

A justificativa é fácil, como $DB = DC$ e $AB = AC$, a reta AD é mediatriz de BC e portanto perpendicular a BC.

Sobre o uso do par de esquadros no traçado de paralelas e perpendiculares (WAGNER, 2007) diz que na prática esse instrumentos tornam mais rápido o traçado, mas adverte que eles vão apenas simplificar as construções, já (PUTNOKI, 1993), diz que eles poderão ser usados, quando os processos por régua e compasso estiverem bem dominados. Nos próximos exemplos mostraremos o uso dos esquadros com a régua no traçado de retas perpendiculares e paralelas. A ideia é utilizar os esquadros em conjunto, ficando um sempre fixo, enquanto o outro irá se movimentar sobre ele.

A descrição dos passos de tais construções podem ser encontradas em (OLIVEIRA, 2015).

Exemplo 4.12. *Utilizando o par de esquadros trace uma reta perpendicular a r passando pelo ponto P.*

Descrição dos passos.

1. Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 4.18 (desenho da esquerda).

2. Fixe bem a régua e deslize o esquadro afastando-o da reta r para um melhor traçado da perpendicular (desenho do meio).

3. Posicione o segundo esquadro sobre o primeiro e trace por P uma reta perpendicular a r (desenho da direita).

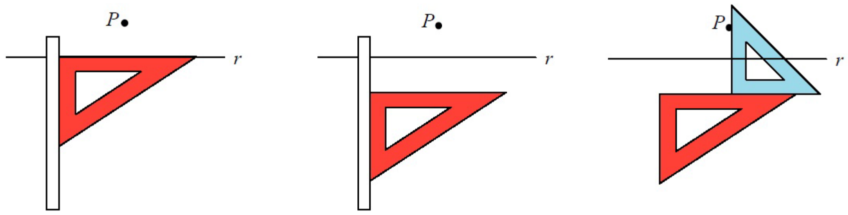


Figura 4.18: Traçado por P uma reta perpendicular a r com o par de esquadros.

Uma outra solução para este problema é a seguinte:

1. Posicione a régua e o esquadro de 45^o como mostra a figura 4.19. (desenho a esquerda).

2. Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que o outro cateto passe por ponto P.

3. Fixe o esquadro e trace por P uma perpendicular a r e o problema estará resolvido (desenho a direita).

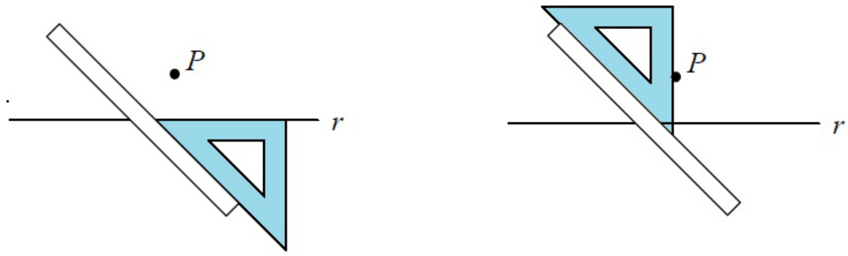


Figura 4.19: Perpendicular com o esquadro de 45^o .

Exemplo 4.13. *Dado uma reta r e um ponto P pertencente a essa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por P.*

Descrição dos passos.

1. Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 4.20 (desenho da esquerda).

2. Fixe bem a régua remova o esquadro e trace uma reta perpendicular a r passando por P e o problema estará resolvido (desenho da direita).

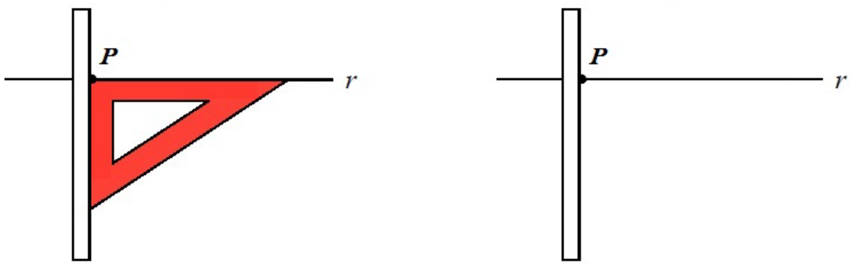


Figura 4.20: Perpendicular com um esquadro.

Exemplo 4.14. *Dado uma reta r e um ponto P fora dessa reta, trace uma reta paralela a r que passe por P.*

Descrição dos passos.

1. Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 4.21 (desenho a esquerda).

2. Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que sua extremidade encoste no ponto P.

3. Fixe o esquadro e trace uma reta paralela a r e o problema está resolvido (desenho a direita).

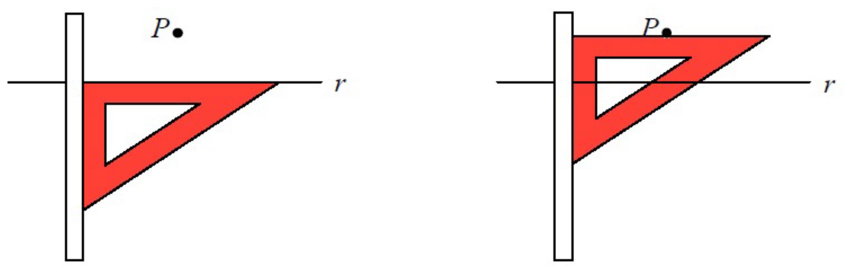


Figura 4.21: Paralela com esquadro.

4.2.3 Construção de números

Um segmento é construtível se pode ser obtido a partir de um número finito de construções das seguintes regras:

. Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos.

. Traçar uma circunferência conhecendo o seu centro e um ponto sobre ela.

. É possível outras construções que serão combinações das anteriores.

Se dois números reais a e b são construtíveis mostraremos que a soma, subtração, produto e a divisão também são construtíveis. Para essa demonstração assumiremos inicialmente que os segmentos iniciais são construtíveis, no próxima seção veremos o critério para saber se um número qualquer pode ser construído a partir das regras básicas de construções geométricas.

Proposição 4.15. *Sejam a e b números construtíveis, então $a + b$, $a - b$, $a.b$ e $\frac{b}{a}$ são construtíveis.*

Demonstração

Para o caso da soma e subtração, tomemos dois segmentos tais que $AB = a$ e $CD = b$. Trace uma circunferência de centro B e raio b, obtendo assim o ponto E e F como na figura 4.22.

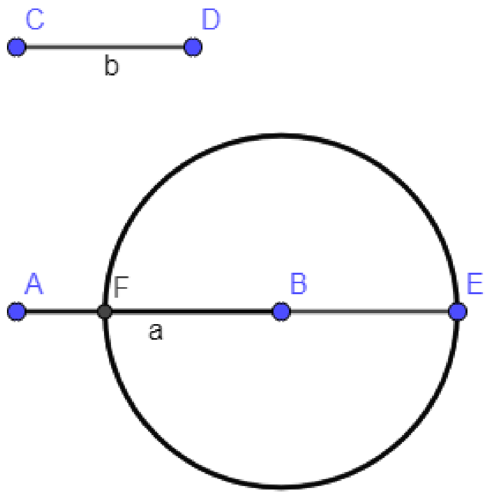


Figura 4.22: Construção $a + b$ e $a - b$

Na figura 4.22 temos que $AE = a + b$ e $AF = a - b$.

Para a multiplicação e a divisão utilizamos o Teorema de Tales, na primeira trace duas retas concorrentes em um ponto A. Transporte os segmentos de medidas 1, a e b marcando os segmentos $AB = 1$, $BC = a$ e $AD = b$ como na figura 4.23

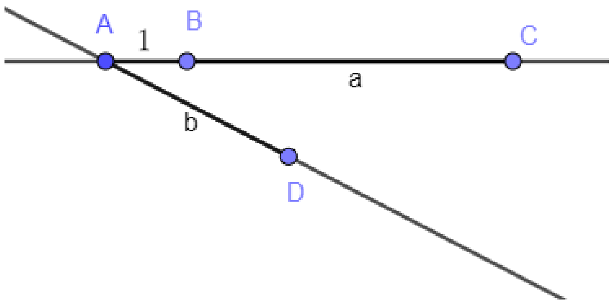


Figura 4.23: Transporte dos segmentos.

Na figura 4.23 trace a reta BD e, passando por C, trace CE paralela a BD. Concluímos que o segmento DE terá medida $x = a.b$, já que $BD \parallel BC$ e pelo Teorema de Tales, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$. (Figura 4.24).

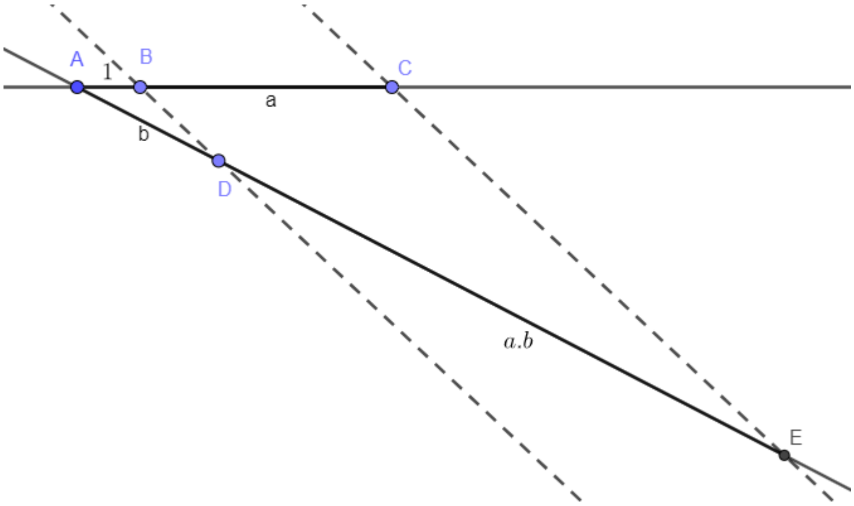


Figura 4.24: Construção $a.b$

Logo $\frac{1}{a} = \frac{b}{x}$. Daí $x = a.b$.
Para construirmos $x = \frac{b}{a}$. Observe na figura que basta trocar a e 1 de ordem:

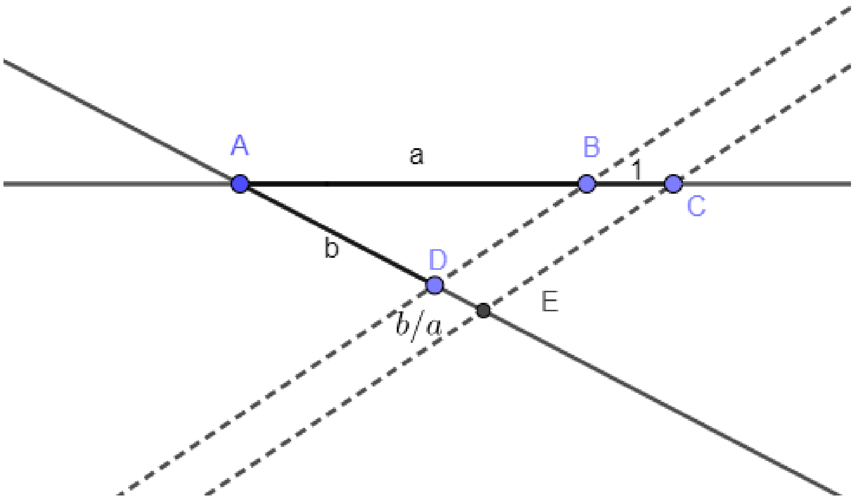


Figura 4.25: Construção $\frac{b}{a}$

Pelo Teorema de Tales $\frac{a}{1} = \frac{b}{x}$. Logo $x = \frac{b}{a}$

4.2.4 Critério de construtibilidade

Nessa seção estabeleceremos um critério para identificar quando um segmento é construtível, nos seguintes termos:

Definição 4.16. *Um segmento de comprimento $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, diz-se construtível se pode ser obtido a partir de um segmento de reta unitário em um número finito de passos utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso.*

Assim dizer que um segmento de comprimento $|\alpha|$ é construtível é o mesmo que construir um número α.

Para isso seja uma reta r, determinada por dois pontos A e B. Tomando a abcissa 0 para A e 1 para B, cada ponto da reta determina um único número real e vice-versa. Assim um segmento AP será construtível a partir de AB se e somente se o ponto P, ou, equivalente a sua abcissa x, for construtível. (Figura 4.26)

Figura 4.26: Segmento construtível

Na seção acima mostramos que dados dois números construtíveis a e b, a soma $(a+b)$, subtração $(a-b)$, multiplicação $(a.b)$ e a divisão $(\frac{b}{a})$ são construíveis e (MEIRA, 2011) em seu trabalho completa a lista mostrando também que o simétrico $(-a)$, inveso $(\frac{1}{a})$ e a raiz quadrada $(\sqrt{a})$ são construtíveis. Observando que é possível construir o simétrico, ou seja, todos os inteiros e consequentemente, são construtíveis todos os quocientes de inteiros, isto é, os racionais. Logo, todos os racionais são construtíveis.

Uma construção geométrica com régua e compasso são pontos determinados através da interseção de retas e circunferências. Tais interseções podem ser de três tipos: retas com retas, retas com circunferências ou circunferências com circunferências. Analiticamente, essas interseções correspondem a pontos (x, y), soluções de sistemas de duas equações. Investigando um formato padrão para esses pontos de interseção, podemos estabelecer um critério para determinar quais pontos são construtíveis. Antes definiremos o conceito de pontos construtíveis.

Definição 4.17. *São pontos construtíveis com régua e compasso aqueles pontos do plano cartesiano obtidos pela interseção de retas e circunferências determinadas por pontos construtíveis.*

Proposição 4.18. *Um ponto $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é construtível se e somente se as suas coordenadas a, $b \in \mathbb{R}$ são números construtíveis.*

A demonstração da proposição acima pode ser consultada em (MEIRA, 2011).

Podemos determinar as coordenadas dos pontos de interseção a partir dos coeficientes das equações de retas e circunferências. A interseção entre duas retas corresponde à solução de um sistema de duas equações do 1^o grau, já a interseção de uma reta e uma circunferência é a solução de um sistema formado por uma equação de 1^o (reta) e por outra de 2^o grau (circunferência). Por fim, a interseção entre duas circunferências é a solução de um sistema de duas equações de 2^o grau.

Analisaremos cada caso:

1^o **caso: Reta e reta**

Considere dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de coordenadas construtíveis, a equação da reta que passa por esses dois pontos é dada por:

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0$$

que em sua forma geral pode ser escrita como,

$$ax + by + c = 0$$

em que $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ e $c = y_1x_2 - x_1y_2$ são números construtíveis pois são obtidos a partir de operações de adição, subtração e multiplicação de números construtíveis.

Os pontos de interseção entre duas retas quando existir é a solução de um sistema da forma:

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2 & = & 0 \end{cases}$$

Ou seja, a interseção será o ponto:

$$\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

Sendo a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 números construtíveis, as coordenadas da solução do sistema são construtíveis para $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Neste caso conclui-se que a interseção de duas retas possui pontos construtíveis, obtido através de operações adição, subtração, multiplicação e divisão de números construtíveis.

2^o **caso: Reta e circunferência**

Agora o caso da interseção de uma reta com uma circunferência. Suponhamos dado um ponto construtível (x_o, y_o) e um número construtível r, sendo $r > 0$. A equação da circunferência é dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

isto é,

$$x^2 + y^2 - 2x_ox - 2y_oy + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

de forma geral,

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Onde $\alpha = -2x_o$, $\beta = -2y_o$ e $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ são números construtíveis, pois são expressos por meio de operações de adição, subtração e multiplicação de números construtíveis.

Assim, a interseção de uma reta e uma circunferência quando existir é a solução de um sistema da forma:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

A solução desse sistema depende se a reta é secante ou tangente à circunferência. Para resolver esse sistema isolamos y na segunda equação:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{4.2}$$

e substituindo na primeira equação, temos para a abcissa x uma equação quadrática da forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

em que $A = a^2 + b^2$, $B = 2ac + b^2\alpha - ab\beta$ e $C = c^2 - bc\beta + b^2\gamma$, cuja solução é:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Para obter a ordenada y basta substituir 4.2 na equação acima.

As soluções deste sistema, quando existem, são (um ou dois) pontos, com ambas as coordenadas da forma $p + q\sqrt{s}$, onde p, q e s são construtíveis, $s > 0$. Assim concluímos que pontos construtíveis, obtidos a partir da interseção de uma reta e uma circunferência, são obtidos por meio das operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas.

3^o caso: Circunferência e circunferência

Finalmente, a interseção de duas circunferências quando existir é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

o qual é equivalente ao seguinte:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \end{cases}$$

Esse sistema recai na solução do sistema 4.1 para $a = \alpha_1 - \alpha_2$, $b = \beta_1 - \beta_2$ e $c = \gamma_1 - \gamma_2$

e, portanto, a interseção corresponde a um ou mais pontos de coordenadas construtíveis da forma $p + q\sqrt{s}$, onde p, q e s são construtíveis, $s > 0$.

Uma conclusão de todas as considerações é que tomamos pontos do plano com coordenadas racionais (construtíveis), e fizermos construções com régua e compasso, envolvendo apenas uma interseção de reta com reta, reta com circunferência ou circunferência com circunferência, as coordenadas dos novos pontos obtidos continuam sendo racionais ou passam a ser da forma $p + q\sqrt{s}$, onde p, q e s são racionais, $s > 0$.

Assim um número será construtível se e somente se puder ser escrito em termos de racionais, usando somente adições, multiplicações, simétricos, inversos e raízes quadradas.

Podemos resumir as contas anteriores no seguinte teorema que reconhece se um número é construtível ou não.

Teorema 4.19. *Se α é construtível, então é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a 2 com coeficientes construtíveis.*

A demonstração desse teorema, de acordo com (WAGNER, 2007) se baseia em fatos fundamentais da teoria de extensão de corpos, com incursões em alguns tópicos de Álgebra Linear.

Exemplificando o teorema, podemos construir o ângulo de 60^o, pois construir um ângulo é o mesmo que construir seu cosseno ou seno. (Figura 4.27)

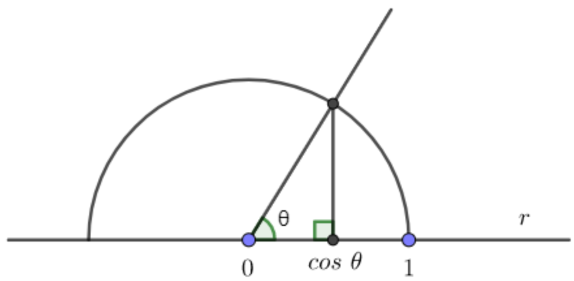


Figura 4.27: Cosseno de um ângulo

Como $\cos(60^o) = \frac{1}{2}$ é racional, portanto construtível.

Uma aplicação do teorema acima é na resolução dos três famosos problemas gregos: a duplicação do cubo, quadratura do círculo e a tricção do ângulo. Tais problemas foram importantes pelo fato de que eles não podem ser resolvidos, com régua e compasso. Muitos matemáticos da época na busca de soluções para esses problemas influenciaram profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas, como as seções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes. Muito tempo depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade da três construções, sob a limitação de se usarem apenas régua e compasso. (EVES, 2004).

Duplicação do cubo

Há indícios de que o problema possa ter se originado nas palavras de algum poeta, ao descrever a insatisfação do rei de Minos com o tamanho do túmulo erguido para o seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. Assim o poeta argumentou, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando cada uma de suas dimensões, dessa forma, conseguiram multiplicar por oito o seu volume, e não duplicá-lo, como queria o rei.

Formalmente, dado um cubo de aresta a construtível, o problema consiste em encontrar um outro cubo de aresta x construtível cujo o volume seja o dobro. Ou seja:

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2}a$$

Assim uma vez que a é construtível, basta descobrir se $\sqrt[3]{2}$ é também. Dessa forma, pelo teorema 4.19, basta verificar se $\sqrt[3]{2}$ é raiz de um polinômio de grau menor ou igual a 2 com coeficiente construtíveis. Note que $\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$, que é irredutível sobre os racionais. Logo, não é possível fazer a duplicação do cubo com régua e compasso.

Quadratura do círculo

Provavelmente nenhum outro problema teve uma encantação maior ou mais duradoura do que aquele de construir um quadrado de área de um círculo dado. O problema permaneceu sem solução por cerca de 2000 anos.

O problema baseia-se em construir com régua e compasso um quadrado cuja área seja igual à de um círculo de raio a construtível. Tomando por x o lado do quadrado, temos que:

$$x^2 = \pi a^2$$

$$x = a\sqrt{\pi}$$

Observe que $\sqrt{\pi}$ é raiz do polinômio de grau 2 $p(x) = x^2 - \pi$. Assim, para que o teorema 4.19 se aplique, o número π deve ser construtível. A demonstração de que π não é construtível envolve conhecimentos de diversas área, pricipalmente do Cálculo Diferencial. (WAGNER, 2007). Portanto o círculo não é quadrável.

Trissecção do ângulo

Dos três problemas famosos, o da trissecção do ângulo é o mais popular e o mais fácil de compreender, pois a bissecção de um ângulo é tão fácil, que é natural que cause espanto o fato de que a trissecção não seja igualmente fácil.

Tri-seccionar um ângulo construtível consiste em dividi-lo, utilizando régua e compasso, em três ângulos de mesma medida. Para isso não basta argumentar que a divisão de números construtíveis é um número construtivel, pois tal número iria representar um segmento e não um ângulo como o problema requer.

Podemos verificar que é impossível tri-seccionar um ângulo genérico com régua e compasso, caso contrário o ângulo de 20^o seria construtível e portanto, seu cosseno. No entanto, fazendo $\theta = 20^o$ na formula trigomométrica $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ e pondo $\alpha = \cos 20^o$, temos que $\frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha$, isto é, α é raiz da equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$ que é um polinômio de terceiro grau e é irredutível.

4.2.5 Triângulos e construções

Elementos de um triângulo

Três pontos não colineares formam um triângulo (Figura 4.28), sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os **vértices** do triângulo ABC. Os segmentos AB, AC e BC são os **lados** do triângulo; em geral, escreveremos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC (Figura 4.28). Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os **ângulos internos** do triângulo.

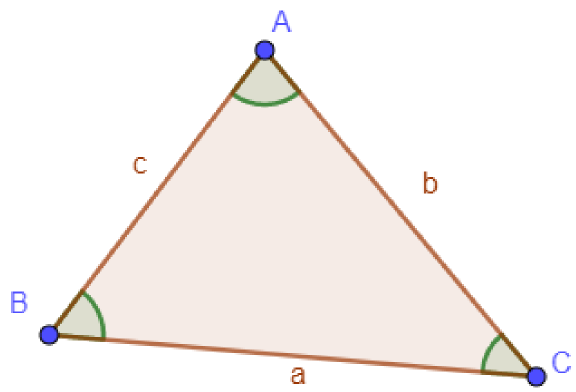


Figura 4.28: Elementos de um triângulo.

Classificação dos triângulos

Podemos classificar triângulos de duas maneiras: em relação ao comprimento de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos.

Definição 4.20. *Um triângulo ABC é denominado:*

(a) ***Equilátero****, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.*

(b) ***Isósceles****, se ao menos dois dentre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ forem iguais.*

(c) ***Escaleno****, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$.*

Pela definição acima, todo triângulo equilátero é isósceles, no entanto, a recíproca não é verdadeira. A figura 4.29 exemplifica a definição anterior.

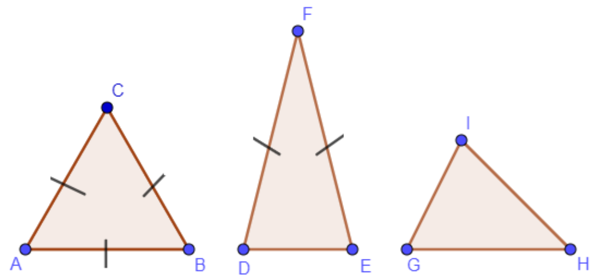


Figura 4.29: Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.)

Agora, quanto às medidas de seus ângulos internos, um triângulo é **acutângulo** se todos os seus ângulos internos forem agudos, **retângulo** se tiver um ângulo reto e **obtusângulo** se tiver um ângulo obtuso (Figura 4.30)

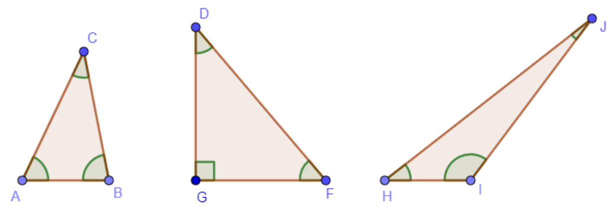


Figura 4.30: Triângulos acutângulo (esq.), retângulo (centro), obtusângulo (dir.)

No caso de um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** do mesmo, enquanto os outros dois são seus **catetos**.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

O objetivo dessa seção é demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede 180^o, para isso enunciaremos um resultado sobre o ângulo externo e o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal.

Definição 4.21. *Seja ABC um triângulo de ângulos internos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$, os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.*

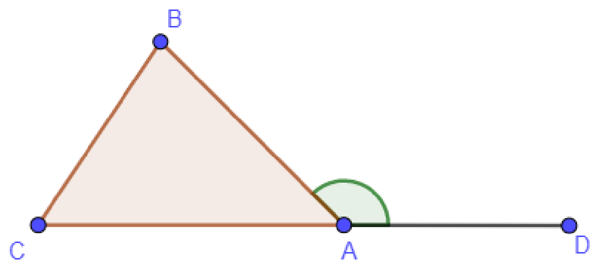


Figura 4.31: Um ângulo externo do triângulo ABC

Na Figura 4.31 o ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno $C\hat{A}B$.

Lema 4.22. *Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração

Seja ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado AC (figura 4.32). Prolongue a semirreta BM até um ponto B', tal que $\overline{BM} = \overline{MB'}$, e considere os triângulos ABM e $CB'M$. Temos $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{B'M}$ e os ângulos $A\hat{M}B$ e $C\hat{M}B'$ são opostos pelo vértice, portanto iguais. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos $AMB \equiv CMB'$, e daí, $B'\hat{C}M = B\hat{A}M$,
Logo,

$$D\hat{C}A > B'\hat{C}A = B\hat{A}M = B\hat{A}C$$

.

Analogamente, prova-se que $D\hat{C}A > A'\hat{B}C$.

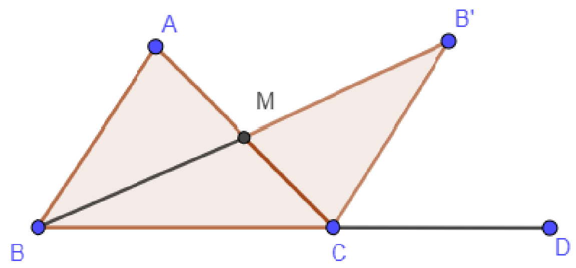


Figura 4.32: Desigualdade do ângulo externo.

□

Com o resultado acima podemos construir e justificar de outra maneira o exemplo 4.10.

Exemplo 4.23. *Construa com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.*

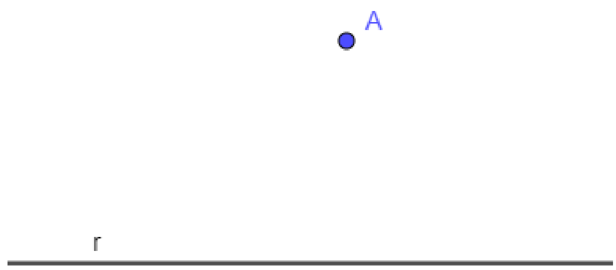


Figura 4.33: Reta e ponto

Descrição dos passos.

1. Tome pontos C e X sobre a reta r e una A a C.

2. Construa o ângulo $C\hat{A}Y$ transportando o ângulo $A\hat{C}X$ tal que, $C\hat{A}Y = A\hat{C}X$ e X e Y estejam situados em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.

3. A reta $s = \overleftrightarrow{AY}$ é paralela à reta r.

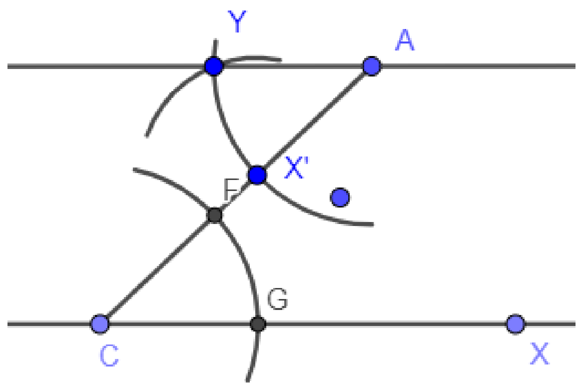


Figura 4.34: Traçado por A uma reta paralela a r

Para justificar a construção acima, suponha, por absurdo, que a reta $\overleftrightarrow{AY}$ intersecte a reta r em um ponto B (Figura 4.35).

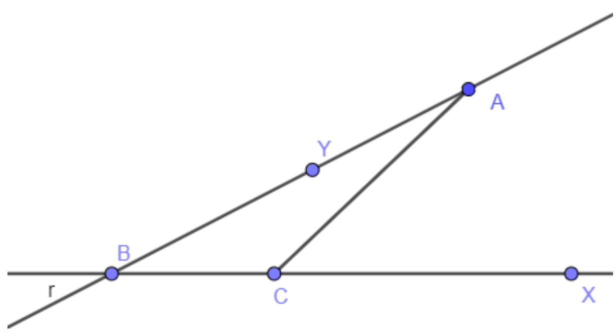


Figura 4.35: Construção de uma paralela a uma reta por um ponto.

Por construção, teríamos

$$B\hat{A}C = Y\hat{A}C = A\hat{C}X$$

;

por outro lado, como $A\hat{C}X$ é ângulo externo do triângulo ABC, segue do lema 4.22 que

$$B\hat{A}C < A\hat{C}X$$

,

o que é um absurdo. Logo, as retas $\overrightarrow{AY}$ e r são paralelas.

De posse do quinto postulado, podemos enunciar e provar alguns dos mais importantes resultados da Geometria Plana. Para esses resultados consideramos alguns conceitos: dadas, no plano, retas r, s e t, com t intersectando r e s nos pontos A e B, respectivamente (figura 4.36).

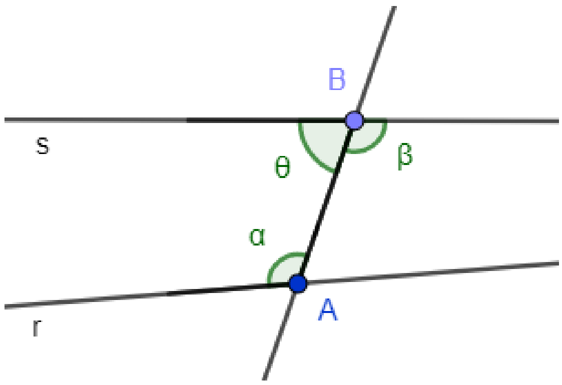


Figura 4.36: Ângulos alternos internos e colaterais internos.

Na figura 4.36, os ângulos α e β são ditos **alternos internos**, e os ângulos α e θ são chamados **colaterais internos**.

De posse da nomenclatura acima, temos o seguinte critério para o paralelismo de duas retas.

Corolário 4.24. *Nas notações da figura 4.36, temos*

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \theta = 180^o$$

Demonstração

Note que, como $\beta + \theta = 180$, temos $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \theta = 180^o$. Agora, basta provar que $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Na justificativa do exemplo 4.23, provamos que $\alpha = \beta \Rightarrow r \parallel s$, portanto basta provar a implicação contrária.

Suponha que $r \parallel s$, então, pelo quinto postulado de Euclides, s é a única reta paralela a r que passa por B, que pode ser construída com a descrição dos passos do exemplo 4.23. Logo, segue da construção descrita que $\alpha = \beta$. □

Por afim, apresentamos o principal resultado dessa seção.

Proposição 4.25. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180^o.

Demonstração

Sejam ABC um triângulo qualquer.

Trace uma reta paralela a base $\overline{BC}$ e passando por A. (figura 4.37)

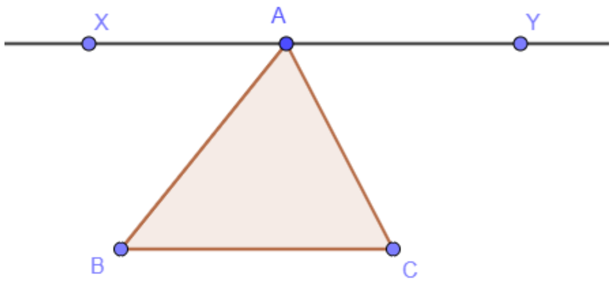


Figura 4.37: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Pelo corolário 4.24, temos $\hat{B} = B\hat{A}X$ e $\hat{C} = C\hat{A}Y$, logo

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + B\hat{A}X + C\hat{A}Y = 180^o$$

□

Um resultado direto da proposição 4.25 é conhecido como o teorema do ângulo externo, enunciado abaixo.

Corolário 4.26. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração

Na figura 4.38 temos, $A\hat{C}X = 180^o - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.

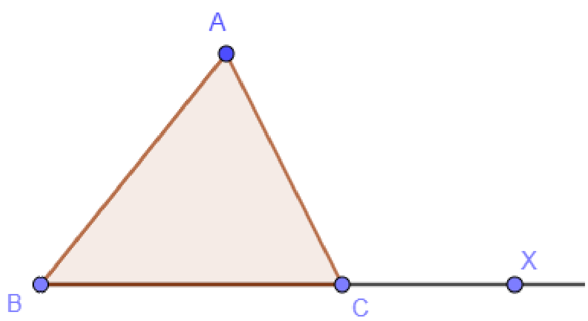


Figura 4.38: Teorema do ângulo externo

$\square$

A desigualdade triângular

O objetivo dessa seção é mostrar o critério para a construção de um triângulo dadas as medidas de seus lados. Mas, antes vamos estabelecer uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos.

Proposição 4.27. *Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.*

Demonstração

Como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta $\overrightarrow{BX}$, tal que $C\hat{B}X = \dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$. (Figura 4.39)

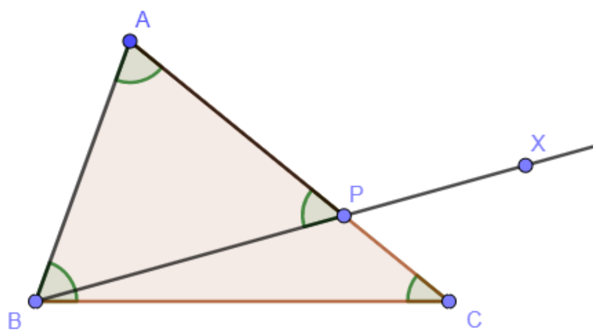


Figura 4.39: Ordem dos lados e ângulos de um triângulo.

Sendo P o ponto de interseção de $\overrightarrow{BX}$ com o lado AC.

Pelo teorema do ângulo externo segue que

$$A\hat{P}B = P\hat{B}C + P\hat{C}B = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} + \hat{C} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$$

.

Por outro lado, $A\hat{B}P = \hat{B} - \dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{BP}$.

Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}$$

$\square$

Proposição 4.28. *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração

Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Mostraremos que $a < b+c$ sendo a prova das demais desigualdades análoga. Marque um ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$ (Figura 4.40).

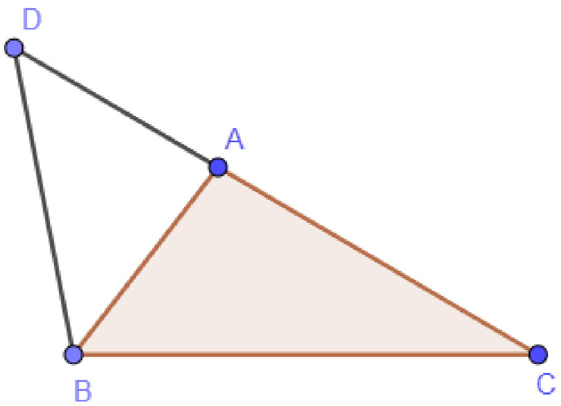


Figura 4.40: A desigualdade triangular.

Temos

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$$

pela proposição 4.27, basta mostrar que $C\hat{D}B < D\hat{B}C$, para isso, observe que $B\hat{D}A < D\hat{B}C$, então

$$C\hat{D}B = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C$$

□

Sendo a, b e c os comprimentos do lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

é a única restrição para que se possa construir um triângulo dado o comprimento dos lados. Por exemplo, não é possível construir um triângulo cujo lados sejam 5, 3 e 9.

A proposição abaixo descreve que é possível construir um triângulo dados o comprimento dos lados.

Proposição 4.29. *Sejam a, $b \leq c$ três números positivos. Se $c < a + b$ então podemos construir um triângulo cujo lados medem a, b e c.*

Demonstração

Trace uma reta e sobre ela marque dois pontos A, B tais que $\overline{AB} = c$. Com o compasso trace um círculo de centro em A e raio b, e um círculo de centro B e raio a.

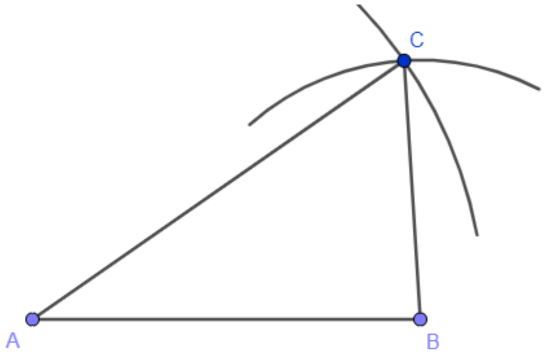


Figura 4.41: Construção do triângulo dados as medidas dos lados.

Como $c < a + b$, os círculos se interceptam. Chame quaisquer um dos pontos de interseção de C. O triângulo ABC tem lados medindo a, b e c.

$\square$

4.2.6 Mediatriz, bissetriz e construção de ângulos.

Mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio, descrita de outra forma pela propriedade:

Proposição 4.30. *Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o conjunto dos pontos do plano que esquidistam de A e de B.*

Exemplo 4.31. *Construa com régua e compasso, a mediatriz do segmento AB dado a seguir.*

Figura 4.42: Segmento AB.

Descrição dos passos.

1. Construa duas circunferências de $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$, centradas em A e em B. (Figura 4.43)

2. Sejam P e Q os pontos de interseção dessas circunferências.

3. A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de AB.

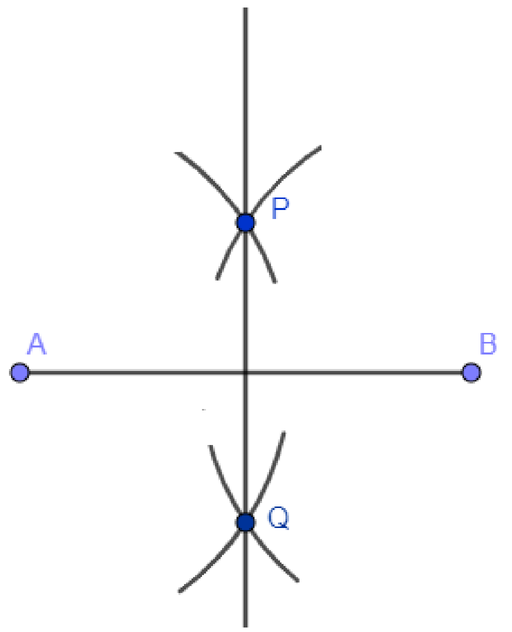


Figura 4.43: A mediatriz do segmento AB.

A justificativa dada por (WAGNER, 2007) é que $APBQ$ é um losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.

Bissetriz

A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semirreta OP tal que $A\hat{O}P = P\hat{O}B$, que divide um ângulo em dois outros iguais, mais formalmente pela proposição abaixo.

Proposição 4.32. *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então*

$$d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Leftrightarrow P \in (bissetriz\ \ de\ \ A\hat{O}B)$$

O exemplo abaixo descreve os passos para a construção da bissetriz de um ângulo.

Exemplo 4.33. *Construa com régua e compasso, a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado a seguir.*

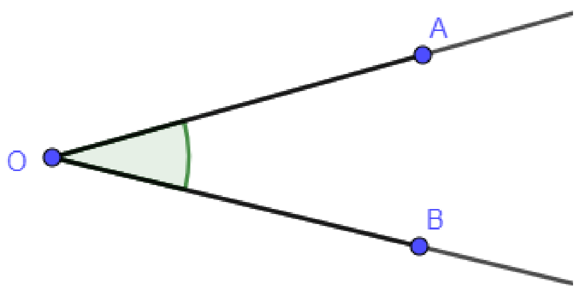


Figura 4.44: Ângulo $A\hat{O}B$.

1. Construa uma circunferência de centro O determinando os pontos X e Y nos lados do ângulo. (Figura 4.45)

2. Trace duas circunferências de mesmo raio com centros em X e Y que possuem P como um dos pontos de interseção.

3. A reta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$.

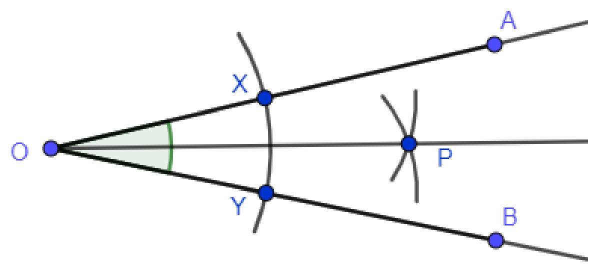


Figura 4.45: A bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Pela construção feita, os triângulos OXP e OYC são congruentes (caso LLL) e portanto $A\hat{O}P = P\hat{O}B$.

Construção dos ângulos de 30^o, 45^o, 60^o e 90^o.

Para determinar um ângulo de 60^o, basta construir um triângulo equilátero ABC. A bissetriz de $C\hat{A}B$ nos dará um ângulo de 30^o.

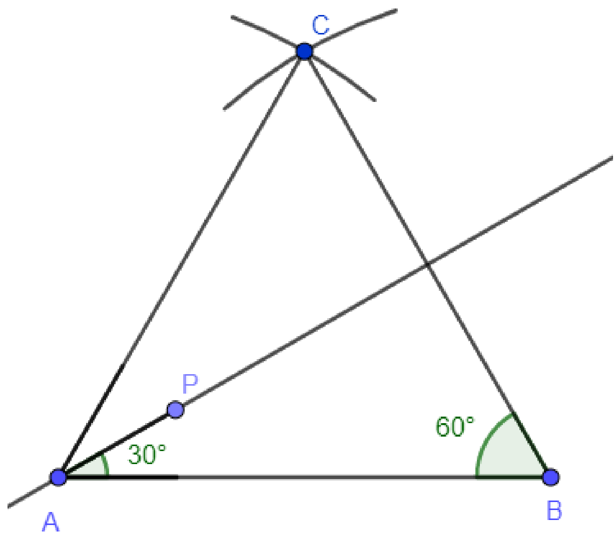


Figura 4.46: Construção dos ângulos de 60^o e 30^o .

Na figura 4.46, $P\hat{A}B = 30^o$ e $C\hat{B}A = 30^o$.

Para construir o ângulo de 90^o basta trasportar o de 30^o para um lado do de 60^o e o de 45^o é a bissetriz do de 90^o.

4.2.7 Construção de polígonos regulares.

Antes de tratarmos do problema da construção de polígonos regulares precisamos definir e demonstrar alguns resultados sobre polígonos.

Definição, classificação e elementos de um polígono

Chama-se polígono a região do plano limitada somente por segmentos de reta, dois a dois consecutivos e não colineares, sendo que dois segmentos não consecutivos jamais se interceptam.

Os polígonos podem ser classificados em convexos ou côncavos.

É considerado polígono convexo aquele que tem a seguinte propriedade: o segmento de reta que une dois pontos distintos quaisquer pertencentes ao polígono está contido totalmente nele. Se ele não possui essa propriedade, é classificado como côncavo. Figura 4.47

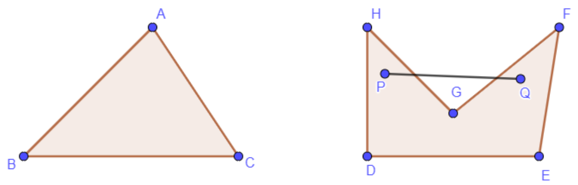


Figura 4.47: Polígono convexo e côncavo respectivamente.

Os polígonos são nomeados de acordo com o seu número de lados. Observe na tabela 4.1.

Na figura 4.48 podemos destacar os seguintes elementos:

. **Lados:** são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.

. **Vértices:** são as extremidades dos lados, ou seja, os pontos A, B, C, D e E.

. **Ângulos internos:** são os ângulos formados por dois lados consecutivos.

. **Ângulos externos:** são os ângulos suplementares dos internos, formado pelo prolongamento do lado a ele consecutivo.

. **Diagonais:** são os segmentos que têm como extremo dois vértices não consecutivos, ou seja, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$.

Número de lados	Denominação
3 lados	triângulo
4 lados	quadrilátero
5 lados	pentágono
6 lados	hexágono
7 lados	heptágono
8 lados	octógono
9 lados	eneágono
10 lados	decágono
11 lados	undecágono
12 lados	dodecágono
13 lados	tridecágono
14 lados	quadridecágono
15 lados	pentadecágono
16 lados	hexadecágono
17 lados	heptadecágono
18 lados	octodecágono
19 lados	eneadecágono
20 lados	icoságono

Tabela 4.1: Nomenclatura dos polígonos

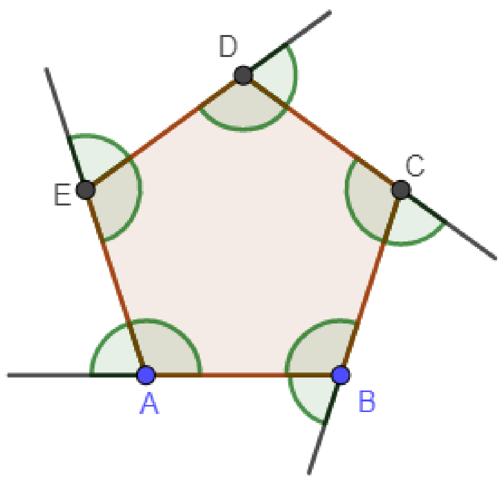


Figura 4.48: Elementos de um polígono.

Relações entre os ângulos de um polígono.

Proposição 4.34. *A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é representada pela relação* $S_n = (n-2).180^o$

Demonstração

Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono convexo de n lados. Escolhido um vértice qualquer, traçam-se todas as diagonais que têm esse vértice como extremo. O polígono fica dividido em $(n-2)$ triângulos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo mede 180^o, conclui-se que:

$$S_n = (n-2).180^o$$

$\square$

Proposição 4.35. *A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a* 360^o.

Demonstração

Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono convexo de n lados e considere os ângulos externos e_1, e_2, e_3, ..., e_n e os internos i_1, i_2, i_3, ..., i_n.

A soma das medidas de um ângulo interno com um externo adjacente a ele é igual a 180^o, ângulos suplementares.

Observe que: $e_1 + a_1 = 180^o$, $e_2 + a_2 = 180^o$, $e_3 + a_3 = 180^o$ ... e $e_n + a_n = 180^o$

Somando os termos antes e depois das n igualdades, obtém-se: $S_e + S_i = 180^o.n$.

Como $S_i = (n-2).180^o$, substituindo S_i na equação anterior:

$$S_e + (n-2).180^o = 180^o.n$$

$$S_e + 180^o n - 360^o = 180^o.n$$

$$S_e = 360^o$$

$\square$

Polígonos regulares.

Um polígono convexo é regular quando tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

A seguir, serão demostradas as fórmulas de cálculo das medidas de um ângulo interno e de um ângulo externo de um polígono regular.

Medida do ângulo interno.

Considerando que um polígono regular tenha n lados, ele também terá n ângulos internos congruentes. Logo:

$S_i = n.a_i$, onde a_i é a medida do ângulo interno.

$$n.a_i = (n-2).180^o$$

Então,

$$a_i = \frac{(n-2).180^o}{n}$$

Medida do ângulo externo.

Um polígono regular de n lados possui n ângulos externos congruentes. Assim: $S_e = n.a_e$, onde a_e é a medida do ângulo externo.
Então

$$n.a_e = 360^o$$

.

Assim,

$$a_e = \frac{360^o}{n}$$

Polígono regular inscrito.

Dizemos que um polígono é inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos da circunferência. A partir dessa definição, pode-se perceber que todos os lados de um polígono inscrito são cordas da circunferência.

Quando esse polígono é regular, podemos observar os seguintes elementos e suas propriedades.

O **raio do polígono regular** é também o raio da circunferência que o circunscreve (na qual ele está inscrito). Sendo assim, se o raio da circunferência mede r, então o raio do polígono regular inscrito nela também mede esse valor.

Com isso, podemos perceber que o raio do polígono inscrito é a distância do seu centro até um de seus vértices, que é equivalente ao raio da circunferência. A figura 4.49 ilustra um dos raios de um polígono regular inscrito.

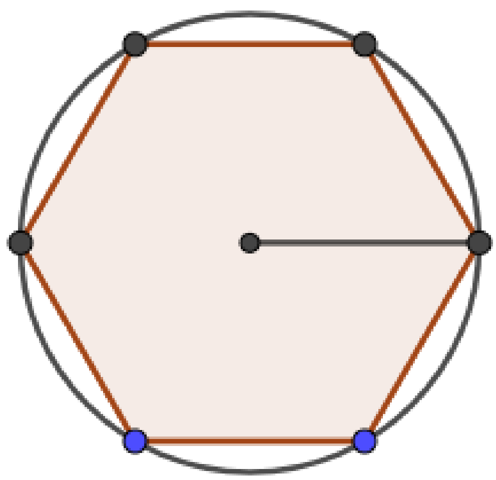


Figura 4.49: Hexágono regular inscrito.

O **ângulo central** do polígono regular é o ângulo central da circunferência que passa por dois vértices adjacentes (consecutivos) do polígono regular inscrito.

Em outras palavras, o vértice do ângulo central do polígono regular é o centro da circunferência e seus lados passam pelos vértices do polígono, como mostra a figura 4.50.

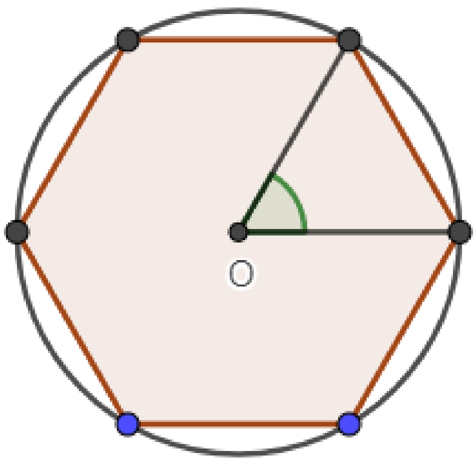


Figura 4.50: Ângulo central.

Para calcular o valor do ângulo central, basta dividir o ângulo total da circunferência pelo número de lados (n) do polígono. Sabendo que esse ângulo é de 360°, teremos:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n}$$

Construção geométrica de um polígono regular

A construção de certos polígonos regulares foi assunto em *Elementos*, de Euclides, o livro *IV* fornece a construção, com régua e compasso, para o triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, octógono regular e decágano regular. No entanto , vinha sendo especulado se os polígonos que faltavam na lista (heptágono regular e eneágono regular), eram ou não construtíveis. (WAGNER, 2007)

Em 1796, Gauss construiu, segundo as regras euclidianas, o polígono regular de dezessete lados e sensibilizado com a sua descoberta, disse em carta que gostaria de ter o polígono de dezessete lados esculpido em sua lápide, após sua morte. (PEDROSO; PRECIOSO, 2009)

O problema de construir um polígono regular de n lados, é o mesmo de dividir uma circunferência em n arcos de mesmo comprimento, pois todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, assim o problema reduz-se a construir o seu ângulo central $\frac{360^o}{n}$ e ligar, de forma consecutiva os pontos de interseção dos lados dos ângulos centrais com a circunferência.

Abaixo descreveremos os passos para a construção de um polígono regular qualquer, a partir do traçado de uma circunferência e do cálculo da medida do ângulo central.

Descrição dos passos.

1. Trace uma circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$.

2. Defina o número n de lados do polígono.

3. Calcular a medida do ângulo central a_c do polígono.

4. Construir, a partir de $\overline{OA}$, n ângulos centrais de vértice O.

5. Ligar de forma consecutiva, os pontos de interseção dos lados dos ângulos centrais com a circunferência.

Exemplo 4.36. *Construa com régua e compasso um hexágono regular.*

Descrição dos passos.

1. Trace uma circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$.

2. Para $n = 6$, a medida do ângulo central é $a_c = \frac{360°}{6} = 60^o$.

4. Construa, a partir de $\overline{OA}$, 6 ângulos centrais de vértice O. (Figura 4.51)

5. Ligue de forma consecutiva, os pontos de interseção dos lados do ângulos centrais com a circunferência.

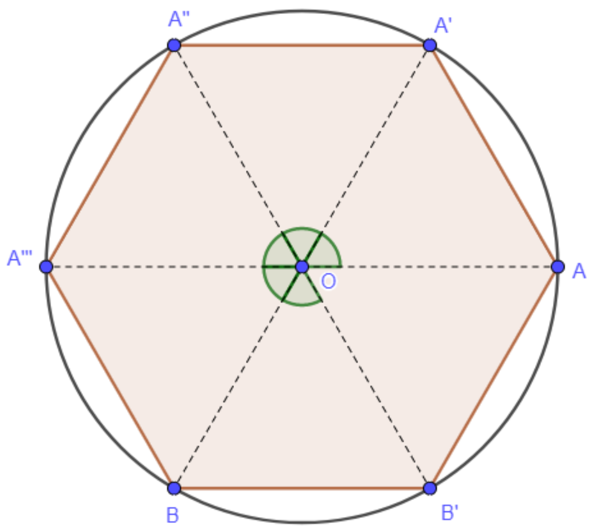


Figura 4.51: Construção do hexágono regular.

Gauss demonstrou o teorema a seguir, que exibe quais os possíveis polígonos regulares que são construtíveis segundo as regras euclidianas.

Teorema 4.37. *Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso se, e somente se, $n = 2^\alpha$ ou $n = 2^\alpha p_1 p_2 ... p_r$ em que p_1, p_2, ...,p_r são números primos "distintos"da forma $p = 2^{2^\beta} + 1$ e α e β são números inteiros não negativos.*

Consequências do Teorema.

. É possível construir os seguintes polígonos (até 20 lados): de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 e 20 lados.

. Os polígonos regulares de 7 e 9 lados, por exemplo, não são construtíveis, pois $7 = 2^0.7$, mas 7 não é um primo da forma 2^{2^β}; $9 = 2^0.3.3$, mas $p_1 = p_2 = 3$.

Capítulo 5

Produção das Atividades

Em seu artigo escrito para a Revista do Professor de Matemática (PUTNOKI, 1988), defende que o ensino de construções geométricas devem ser incorporadas naturalmente à Geometria Plana e que desde os *Elementos*, de Euclides, as construções se apresenta ligada à Geometria de forma indissolúvel. Argumenta que ensinar geometria sem as construções é como dar a uma criança um triciclo sem uma das rodas traseiras, ela até consegue locomover, mas muito mal. Assim didaticamente, discutir como construir e, em seguida construir, são etapas que se completam.

Dessa forma as atividades produzidas contemplarão não só as habilidades de construções geométricas mas também as de geometria de cada ano escolar dos anos finais do ensino fundamental, pois as construções geométricas auxiliam na compreensão de conceitos geométricos, bem como incentivam a criatividade dos alunos quando é dada a eles a oportunidade de criar livremente desenhos, construções e representações. Alguns dos exercícios propostos foram adaptados de livros didáticos de algumas coleções como Matemática: Compreessão e Prática (SILVEIRA, 2018), Teláris-Ensino Fundamental-Anos Finais (DANTE, 2018) e (PUTNOKI, 1993).

5.1 Atividades para o 6^o ano do ensino fundamental.

Para o 6^o ano o objeto de conhecimento é a construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*. Nessa etapa de ensino o aluno tem o primeiro contato com os instrumentos de desenho como: a régua, o compasso, o transferidor e o par de esquadros. Então, antes de iniciar as construções geométricas, o aluno deve saber manusear muito bem esses instrumentos, principalmente o compasso, por isso as primeiras atividades propostas tem o objetivo de aprender utilizar o compasso e a régua.

Como a construção de retas paralelas e perpendiculares será útil em todos os anos seguintes da escola, é fundamental que seja fornecido tempo suficiente para que os alunos adquiram as habilidades necessárias para trabalhar com desenvoltura tais construções.

Sabemos que por excelência os instrumentos de construções geométricas são a régua e o compasso, mas didaticamente para o 6^o ano a construção de retas paralelas e perpendiculares devem ser ensinados usando régua e o par de esquadros como nos exemplos 4.12, 4.13 e 4.14, pois esses instrumentos facilitam a construção, porém o professor pode mostrar a construção com apenas régua e compasso como nos exemplos 4.10 e 4.11.

Como recurso didático o professor deve utilizar programas de computador para aprofundar ainda mais a aprendizagem matemática, como por exemplo o GeoGebra, que é um *software* livre (programa gratuito de computador) e dinâmico de Matemática que pode ser utilizado em diversos conteúdos de Álgebra e Geometria e em todos os níveis de ensino. No endereçø/ www.geogebra.org/download, poderá ser feito o *download* do *software* ou acessá-lo *online*. (LIMA, 2018) em seu trabalho apresenta uma proposta de sequência didtíca com foco em construções geométricas usando o *software* GeoGebra.

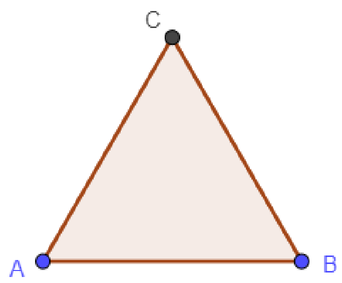
Atividade 01: Aprendendo a manusear o compasso e a régua.

Questão 01: Dado o triângulo ABC trace.

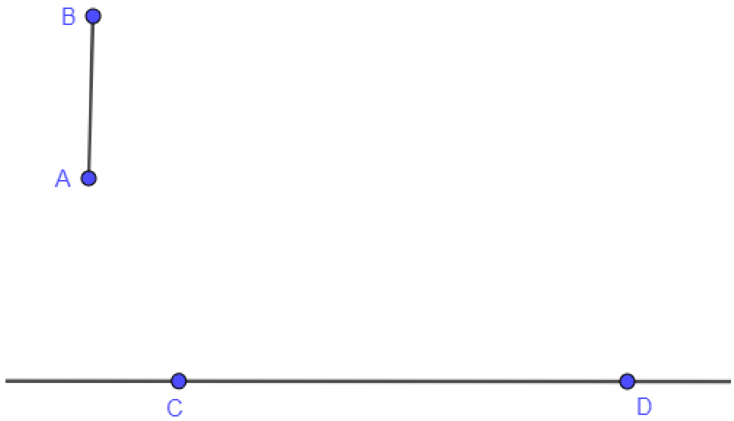
a) Uma circunferência de centro em C passando por A.

b) Uma circunferência de centro em A passando por B.

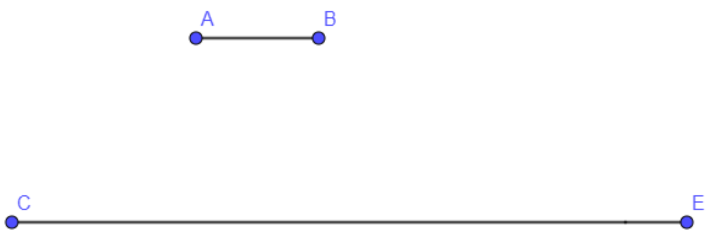
c) Uma circunferência de centro em B passando por C.



Questão 02: Com a abertura do compasso de tamanho $\overline{AB}$, faça duas circunferências, uma com centro no ponto C e a outra em D.



Questão 03: Transporte a medida AB para o segmento de reta CE e verifique quantos segmentos inteiros de AB cabem dentro do segmento CE.



Questão 04: Construa uma rosácea de 6 pétalas. Para isso, siga as instruções.

. Em uma folha de papel sulfite marque um ponto P na sua região central em seguida trace uma circunferência com centro em P e 3 cm de raio.

. Marque um ponto A qualquer sobre essa circunferência.

. Com a ponta seca em A, trace outra circunferência, mantendo o mesmo raio. Essa circunferência deve cortar a anterior em outros dois pontos, que devem ser chamados de B e C.

. Construa duas circunferências, com centro em B e C, sempre com o mesmo raio (3 cm). Cada uma delas deve cortar a primeira no ponto A e em outro ponto. Denomine os novos pontos de D e E.

. Mantendo a medida do raio, construa outras duas circunferências, com centro em D e E. Elas devem se intersectar em um mesmo ponto, que pode ser chamado de F.

. Com a ponta seca em F, trace uma circunferência com o mesmo raio, para completar as pétalas da rosácea.

. Agora, use sua criatividade para decorar a figura.

Atividade 02: Retas paralelas e perpendiculares.

Questão 01: Escreva a definição de retas paralelas e perpendiculares e em seguida faça um desenho para representá-las.

Questão 02: Procure na sala de aula ou em outros espaços da escola exemplos de objetos que dão a ideia de retas paralelas e perpendiculares e faça desenhos para representá-los.

Questão 03: Em cada situação abaixo meça os ângulos entre as retas e classifique-as em perpendiculares ou não perpendiculares.

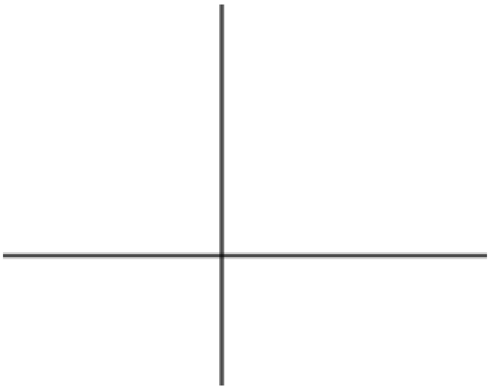


Figura 5.1: situação 01

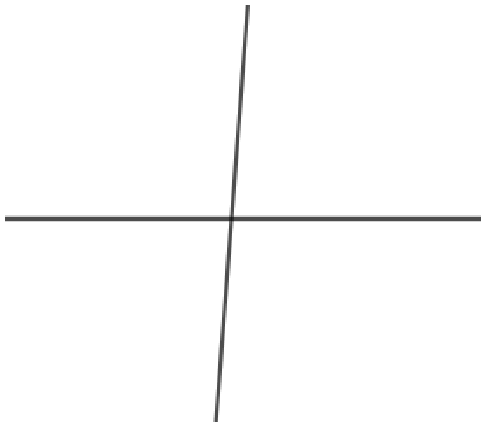


Figura 5.2: situação 02

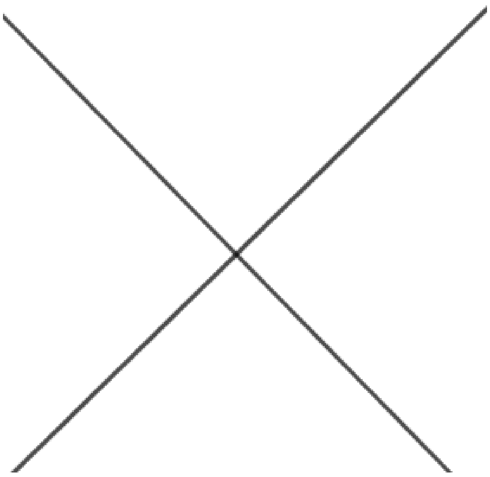


Figura 5.3: situação 03

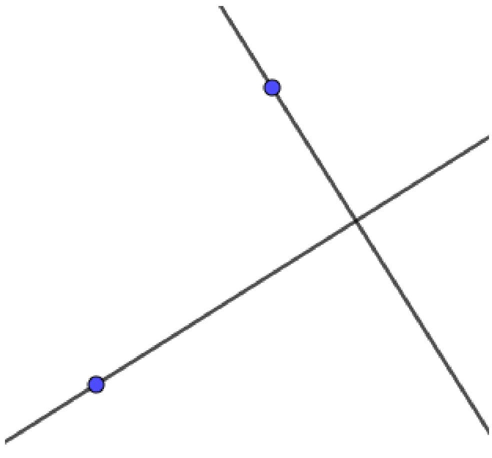


Figura 5.4: situação 04

Questão 04: Dada a reta r e um ponto A fora dela, utilize o jogo de esquadros para traçar as retas s e t passando pelo ponto A.

. s paralela a r.

. t perpendicular a r

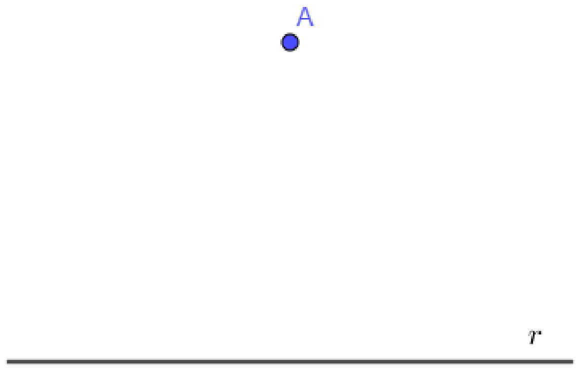


Figura 5.5: Reta paralela e perpendicular a r passando por A.

Questão 05: Trace uma reta paralela a r passando por B e outra reta perpendicular a r passando por B.

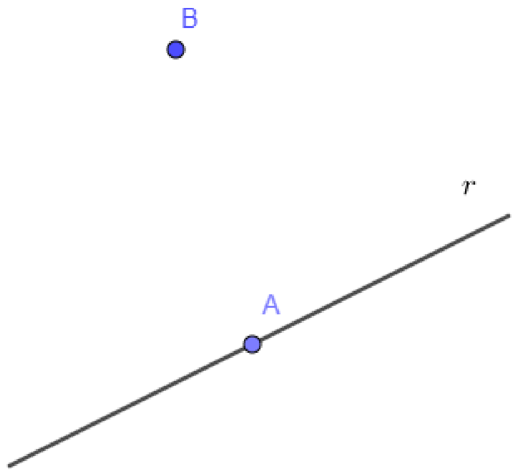


Figura 5.6: Reta paralela e perpendicular a r passando por A.

Questão 06: Repita as construções das questões 4 e 5 usando o *software* Geogebra.

5.2 Atividades para o 7^o ano do ensino fundamental.

No 7^o ano a ideia é trabalhar com construções de triângulos, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos.

Para o desenvolvimento do tópico condição de existência de um triângulo (proposição 4.28) é interessante que os alunos trabalhem com uma atividade prática usando material manipulável para concluírem em quais condições não é possível construir um triângulo. Disponha para os alunos barbante e canudos, peça que se reúnam em duplas e recortem pedaços do canudo cujos comprimentos sejam de: 3 cm, 4 cm, 7 cm e 10 cm. Em seguida, solicite aos alunos que passem o barbante por 3 pedaços de canudo e que confiram se formam triângulos e que expliquem, com suas palavras, quando não foi possível realizar a construção.

Antes de iniciar o tópico "construções de triângulos", ressalte a necessidade de se ter um bom material de desenho adequado e organizado, como um compasso com ponta e perna estáveis. Apresente o resultado da proposição 4.29 e instigue a turma a justificar por que a construção descrita está correta usando o conceito de circunferência como lugar geométrico. Mostre que é possível construir triângulos conhecendo dois ângulos e o lado compreendido entre eles ou dois lados e o ângulo formado por esses lados.

Por fim para verificar a soma das medidas dos ângulos internos, peça aos alunos que usem o transferidor para verificar tal resultado.

Atividade 01: Condição de existência de um triângulo.

Questão 01: Usando a condição de existência, verifique se é possível construir um triângulo de lados:

a) 5 cm, 10 cm e 9 cm.

b) 16 cm, 20 cm e 30 cm.

c) 4 cm, 3 cm e 5 cm.

d) 2 cm, 4 cm e 3 cm.

e) 15 cm, 18 cm e 9 cm.

Questão 02: Os passos abaixo, descrevem o algoritmo para a construção de um triângulo qualquer de medidas a, b e c.

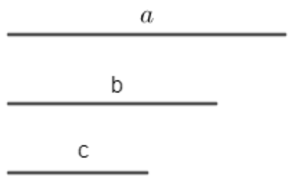
1 Transporte para um reta o segmento de medida a.

2 Com o compasso trace uma circunferência de centro em uma das extremidades do segmento de medida a com raio b.

3 Trace outra circunferência de centro na outra extremidade do segmento de medida a com raio c.

4 A interseção das circunferências e as extremidades do segmento de medida a são os vértices do triângulo.

Agora construa um triângulo ABC, dados a, b e c.



Questão 03: Construa um triângulo ABC, dados $a = 10$ cm, $b = 6$ cm e $c = 8$ cm. Use o transferidor para determinar a medida do ângulo $\hat{A}$.

Questão 04: Construa um triângulo ABC isósceles, dados $a = 10$ cm, $b = c = 6$ cm e classifique-o quanto aos ângulos.

Questão 05: Construa um triângulo equilátero de lado $l = 5$ cm. Verifique, com o transferidor, que um ângulo interno qualquer mede 60^o.

Questão 06: Com régua e compasso, construa os seguintes triângulos:

a) isósceles; medida da base 5 cm; lados congruentes: 4 cm.

b) equilátero; medidas dos lados: 3 cm;

c) escaleno; medida dos lados: 6cm, 4 cm e $3,5$ cm.

Questão 07: Construa um triângulo retângulo e isósceles. Quanto mede cada um de seus ângulos agudos?

Questão 08: É possível a construção de um triângulo retângulo equilátero? Justifique sua resposta.

Questão 09: Rafael quer construir um triângulo da seguinte forma:

. um dos lados deve medir 30 cm.

. o outro lado deve medir 20 cm.

. o terceiro lado deve ter como medida, em centímetros, um múltiplo de 15.

a) Dessa forma, quantos triângulos diferentes Rafael poderá construir?

b) Quais serão as medidas dos lados dos triângulos?

Questão 10: Os comprimentos de dois lados de um triângulo medem 6 cm e 10 cm. Determine a medida inteira de comprimento do terceiro lado, em cm, sabendo que ela corresponde:
a) ao menor número natural par possível.
b) ao menor número natural ímpar possível.

Questão 11: Construa com régua e compasso, um triângulo com lados de comprimento:

a) 3 cm, 4 cm e 5 cm.

b) 5 cm, 6 cm e 8 cm.

c) 4 cm, 4 cm e 4 cm.

d) 6 cm, 9 cm e 12 cm.

e) 2 cm, 7 cm e 5 cm.

Agora, classifique os triângulos construídos quanto as medidas de comprimento dos lados; quanto as medidas de abertura dos ângulos e verifique que a soma das medidas dos ângulos internos medem 180^o.

Questão 12: Descreva, por escrito e por meio de um esquema, como construir um triângulo ABC cujos lados meçam $4,5$ cm, $5,5$ cm e $6,5$ cm.

Questão13: Qual é a medida do terceiro lado de um triângulo isósceles se os outros dois lados têm medidas 2 cm e 5 cm?

5.3 Atividades para o 8^o ano do ensino fundamental.

Para o 8^o ano o objeto de conhecimento é construção de ângulos, mediatriz e bissetriz. Apresente aos alunos a definição e construção da bissetriz, depois para verificar que todos os pontos da bissetriz são equidistantes aos lados do ângulo, solicite que marquem um ponto X qualquer sobre a bissetriz e meçam a distância entre ele e os lados do ângulo inicial. Lembrando que para medir essa distância (entre um ponto e uma semirreta), devem traçar um segmento que ligue o ponto X ao lado do ângulo, formando um ângulo reto, e medir o comprimento desse segmento.

Com relação a mediatriz apresente a definição e siga os passos para sua construção.

Para a construção do ângulo de 60^o retome a ideia do traçado do triângulo equilátero, o de 30^o tem-se construindo a bissetriz do de 60^o. Através da construção de uma perpendicular temos o ângulo de 90^o e o de 45^o traçando a bissetriz.

Como aplicação dos conteúdos acima, nas atividades é proposto a construção das cevianas de um triângulo qualquer.

Atividade 01: Construção de ângulos, mediatriz e bissetriz.

Questão 01: Desenhe um segmento de reta de 8 cm. Construa a mediatriz desse segmento.

Questão 02: Desenhe um segmento de reta de 10 cm. Obtenha o ponto médio desse segmento. Em seguida, verifique a precisão do seu desenho medindo para ver se o ponto é médio mesmo.

Questão 03: Utilizando régua e compasso construa um ângulo cuja a medida seja:
a) 90^o.
b) 60^o.
c) 30^o.
d) 45^o.

Questão 04: Estime a medida dos ângulos. Em seguida utilizando um transferidor, meça-os e classifique-os em agudo ou obtuso.

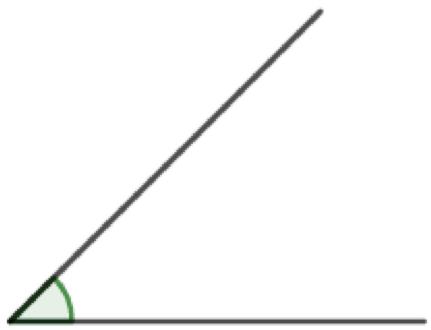


Figura 5.7: Situação 01

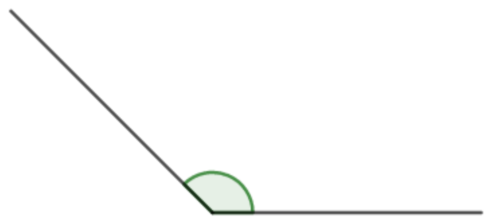


Figura 5.8: Situação 02

Questão 05: Construa, com auxílio de uma régua e de um compasso, um ângulo agudo qualquer e sua bissetriz.

Atividade 2**: Cevianas de um triângulo.**

Definição 5.1. *Ceviana é qualquer segmento de reta com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.*

Reta suporte de um segmento de reta é a reta que contém esse segmento.

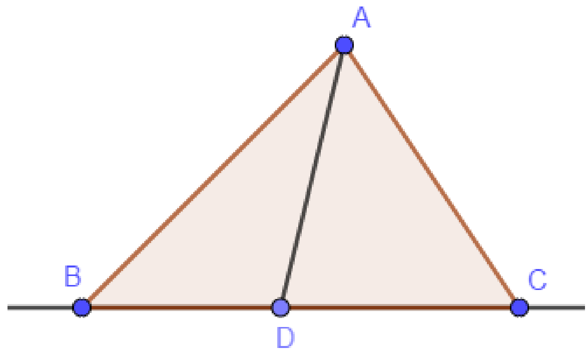


Figura 5.9: r é a reta suporte do lado BC

Na figura 5.9 o triângulo ABC, $\overline{AD}$ é ceviana relativa ao lado $\overline{BC}$.

Questão 06: Mediana de um triângulo

Definição 5.2. *A mediana de um triângulo é a ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.*

No triângulo ABC abaixo, $\overline{AM}$ é a mediana ao lado $\overline{BC}$. Como M é o ponto médio de $\overline{BC}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ são congruentes.

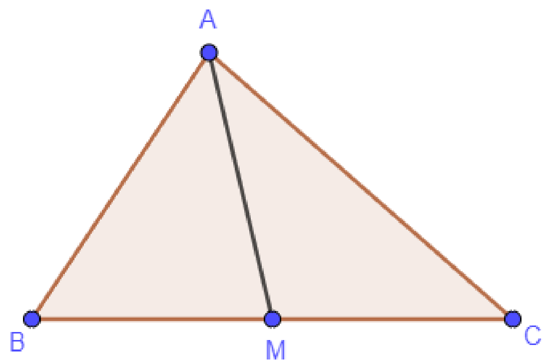


Figura 5.10: Mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

No triângulo ABC (Figura 5.11), com régua e compasso, construa suas medianas.

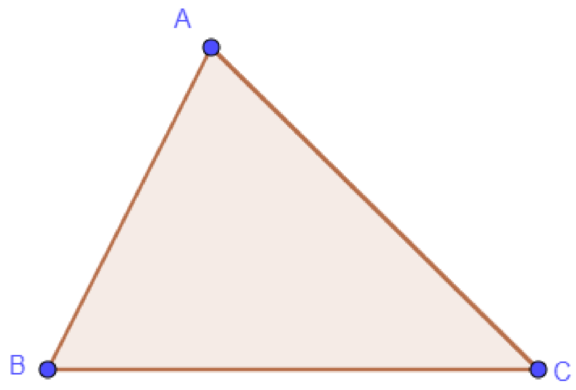


Figura 5.11: Medianas do triângulo ABC

Agora marque o ponto G, que é a interseção das medianas, tal ponto é chamado de **baricentro** do triângulo ABC. O baricentro de um objeto qualquer é considerado o seu centro de gravidade, isso quer dizer que, se apoiarmos um objeto em seu baricentro ele ficará em equilíbrio.

Questão 07: Bissetriz de um triângulo.

Definição 5.3. *A bissetriz interna de um triângulo é a ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes.*

No triângulo ABC abaixo, $\overline{AD}$ é a bissetriz interna relativa ao ângulo $B\hat{A}C$.

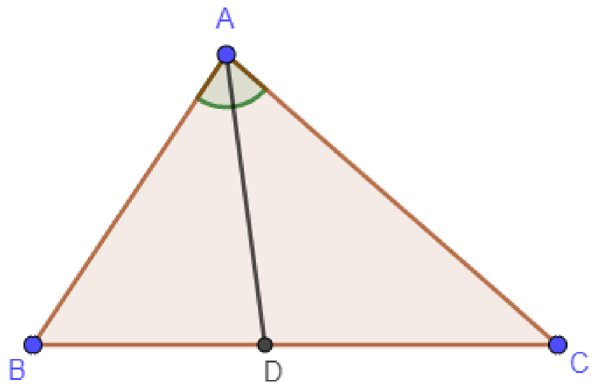


Figura 5.12: Bissetriz interna relativa ao ângulo $B\hat{A}C$

No triângulo ABC (figura 5.13), trace com régua e compasso as suas bissetrizes internas.

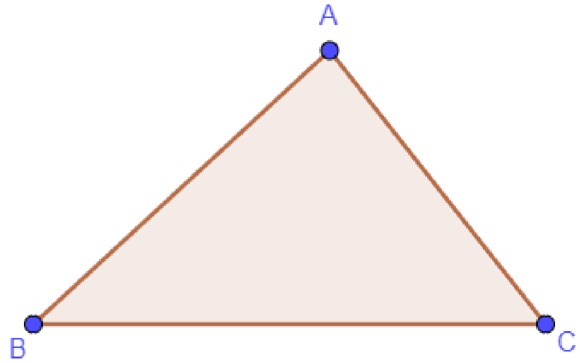


Figura 5.13: Bissetrizes internas do triângulo ABC

As três bissetrizes se cruzam em um ponto I, denominado **incentro**, que é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Questão 08: Altura de um triângulo.

Definição 5.4. *A altura de um triângulo é a ceviana que passa por um vértice do triângulo e é perpendicular à reta suporte do lado oposto a esse vértice.*

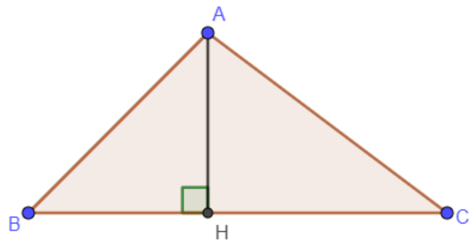


Figura 5.14: $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$

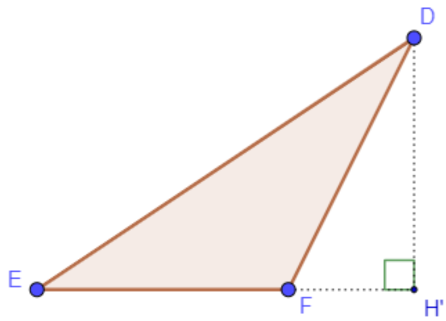


Figura 5.15: $\overline{DH'}$ é a altura relativa ao lado $\overline{EF}$

No triângulo ABC (figura 5.16) trace, com régua e compasso, a altura relativa a cada lado.

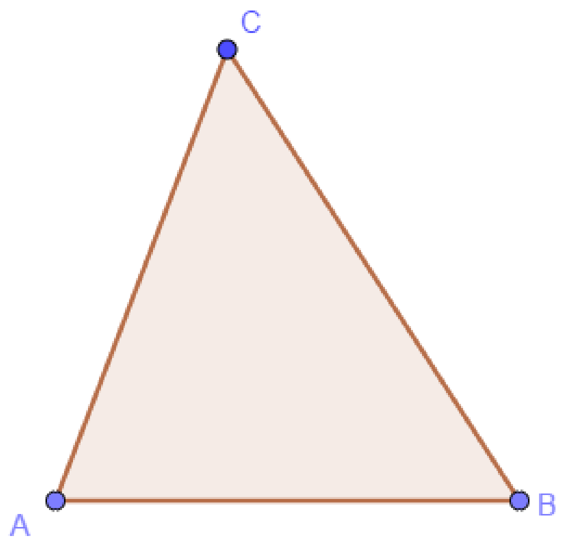


Figura 5.16: Altura relativa a cada lado do triângulo ABC

As retas suportes das três alturas se cruzam em um ponto, denominado **ortocentro**.

Questão 09: No triângulo ABC trace, com régua e compasso, a mediatriz de cada lado do triângulo.

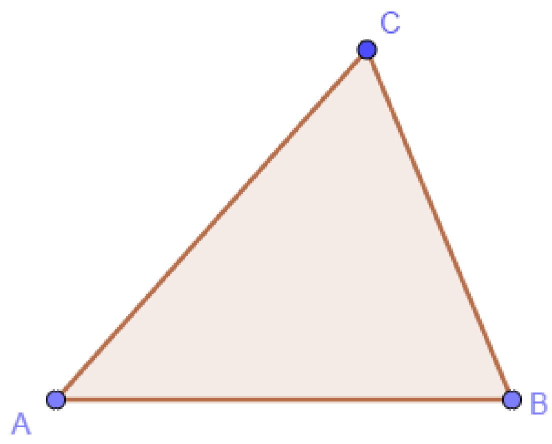


Figura 5.17: Mediatrizes de cada lado do triângulo ABC

As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto, chamado de **circuncentro**, que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, isto é, aquela que passa por todos os vértices do triângulo.

Questão 10: Utilizando régua e compasso, construa um triângulo qualquer, trace suas medianas e determine seu baricentro.

Questão 11: Utizando régua e compasso, construa um triângulo cujos lados meçam 6 cm, 5 cm e $8cm$. Em seguida, trace suas bissetrizes e determine seu incentro.

Questão 12: Desenhe um triângulo cujos lados meçam 7 cm, 4 cm e 6 cm. Em seguida, determine o encontro das alturas desse triângulo (ortocentro).

5.4 Atividades para o 9^o ano do ensino fundamental.

A ideia central para o 9^o ano é a construção de polígonos regulares. O método geral para essas construções é a partir da divisão de uma circunferência em partes iguais. Apresente aos alunos a descrição dos passos para o traçado de um polígono qualquer e a justificativa para a não construção de alguns polígonos regulares, se necessário apresente o teorema sobre a existência da construção de tais polígonos.

Atividade: Polígonos Regulares.

Questão 01: Os passos abaixo descrevem a construção de um quadrado qualquer dado, a medida do lado.

1 Traça-se um segmento AB que representará um dos lados do quadrado.

2 Levanta-se uma perpendicular na extremidade B.

3 Nessa perpendicular, utilizando a abertura do compasso na medida de AB e centro B, marca-se o ponto C.

4 Trace uma reta perpendicular a CB passando por C.

5 Na perpendicular do item acima, utilizando a abertura do compasso na medida BC e centro C, marca-se o ponto D.

6 Por fim trace o segmento AD.

Com base nos passos acima, construa quadrados de lados medindo 4 cm, 6 cm e 10 cm; em seguida determine o perímetro e a área de cada quadrado construído.

Questão 02: Construa um triângulo equilátero de lado medindo 6 cm.

Questão 03: O pentágono regular é um polígono de 5 lados que tem todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos com mesma medida de abertura, igual a 108^o. Construa um pentágono regular de qualquer medida de lado.

Questão 04: Construa com régua e compasso, um hexágono regular.

Questão 05: Veja os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para construir um hexágono regular a partir da medida de comprimento do lado.

1^o **passo** No menu de ferramentas, no canto superior esquerdo da tela, clique na opção "Segmento com comprimento fixo", marque um ponto próximo ao centro da tela e escolha uma medida de comprimento para esse segmento de reta. Nesse exemplo, vamos usar $AO = 5$. Depois, clique na opção "Reta" e nos pontos A e O para traçar a reta que passa por esses pontos.

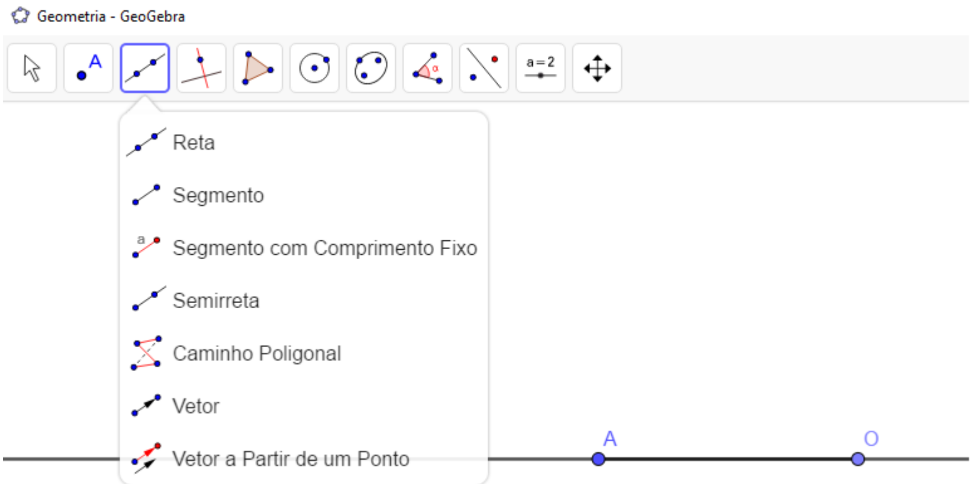


Figura 5.18: 1^o passo

2^o **passo** Clique na opção "Círculo dados centro e um de seus pontos" e nos pontos A e O, nessa ordem, para traçar a circunferência com centro em A e raio de medida de comprimento AO. Clique novamente na ferramenta de circunferência e nos pontos O e A, nessa ordem, para traçar a circunferência com centro em O e raio de medida de comprimento AO. Os pontos de interseção das circunferências com a reta r são os pontos P e D. Use a ferramenta "Ponto"para marcá-los.

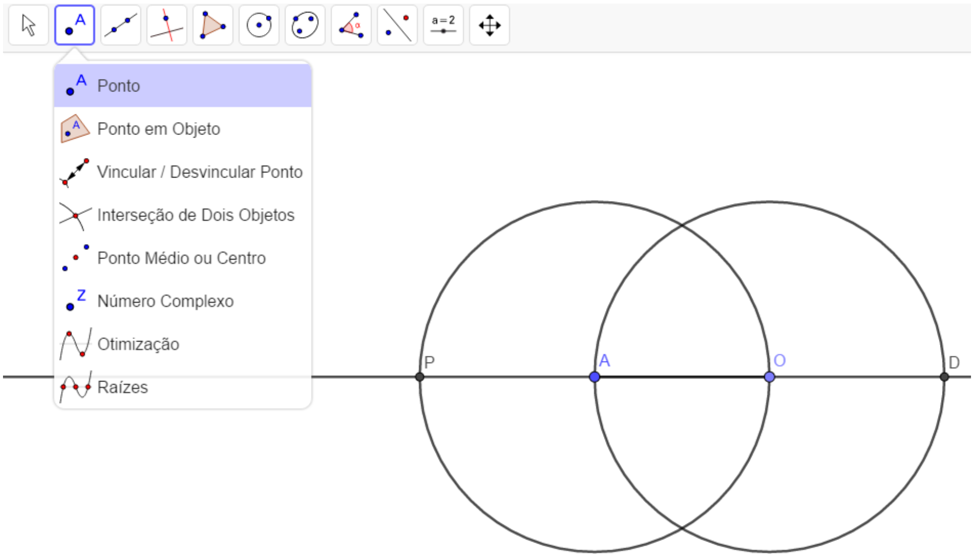


Figura 5.19: 2^o passo

3^o **passo** Escolha um dos pontos P ou D para continuar a construção. Nesse exemplo, vamos escolher o ponto D. Clique na opção Círculo dados centro e um de seus pontos"e nos pontos D e O, nessa ordem, para traçar a circunferência com centro em D e raio de medida de comprimento $OD = AO = 5$ cm.

4^o **passo** Clique na opção " Ponto " e marque todos os pontos de interseção entre as 3 circunferências. Esses são os vértices do hexágono. Clique na opção "Segmento" e trace os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ para obter o hexágono regular com lados de medida de comprimento igual 5 cm.

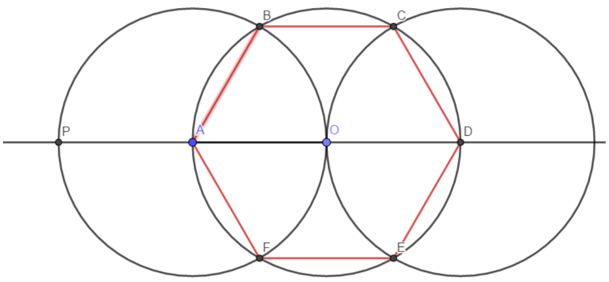
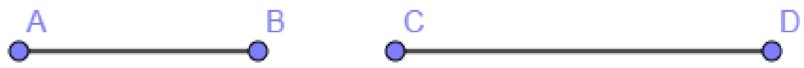


Figura 5.20: 4^o passo

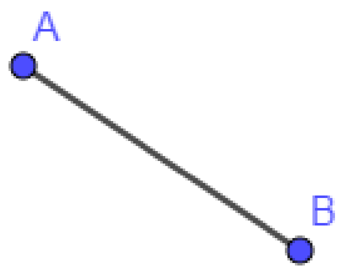
Questão 06: Transporte estes segmentos de reta e construa o que se pede.



a) Um triângulo equilátero com lados de medida de comprimento AB.

b) Um quadrado com lados de medida de comprimento CD.

Questão 07: Usando apenas régua e compasso, construa um hexágono com lados com a mesma medida de comprimento deste segmento de reta $\overline{AB}$.



Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho percebo que as Construções Geométricas são uma importante ferramenta para o ensino da Geometria Plana, pois com ela o estudante pode através do desenho concretizar os conhecimentos teóricos da geometria, conseguindo assim definir conceitos e resolver problemas. Dessa forma as Construções Geométricas devem ser desenvolvidas naturalmente incorporada à Geometria Plana, pois desde os Elementos de Euclides, se apresentaram ligados à Geometria de forma inseparável, pois como argumenta (PUTNOKI, 1988) ensinar Geometria sem a régua e o compasso é como dar a uma criança um triciclo sem uma das rodas traseiras, ela até consegue se locomover, mas muito mal. Assim quando essa incorporação não é realizada, a Geometria está sendo mutilada.

No currículo escolar as Construções Geométricas permaneceram por alguns anos consecutivos, até que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacioal de 1961 trouxe opções de currículo onde elas não eram mais obrigatória. Depois de anos de desprestígio dessa área de conhecimento, com a publicação do Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática para o ensino fundamental, vemos uma real preocupação com o ensino das construções geométricas. Mas o ensino não era obrigatório, pois os professores priorizavam o ensino das operações básicas, bem como a álgebra e se sobrasse tempo ensinavam Geometria mas sem falar de construções; nos anos de 2000 a 2003 em que eu frequentei o ensino fundamental nunca tive contato com desenho geométrico.

Com o surgimento do documento normativo (BNCC), que será referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares, é que o ensino das construções geométricas passa a fazer parte do currículo de matemática de todas as escolas brasileiras de ensino fundamental. Vale ressaltar que as habilidades de construções fixadas pela BNCC são conteúdos mínimos, uma vez que cada instituição escolar pode acrescentar tópicos, por exemplo assunto como: arco capaz, traçados de tangentes ao círculo, expressões algébricas são não contemplados pela Base, assim o professor se achar necessário pode acrescentar tais assuntos.

As habilidades de construções para o ensino fundamental de acordo com a BNCC são basicamente o traçado de retas paralelas e perpendiculares, construção de triângulos,

ângulos, mediatriz, bissetriz e polígonos regulares. Mas o presente trabalho oferece aos professores da educação básica um aprofundamento sobre o critério de construtibilidade de acordo com as regras de Construções Geométricas, pois pode partir dos estudantes o questionamento do que é possível construir. As atividades propostas podem ser usadas em sala de aula para o estudantes como exercícios de fixação dos conhecimentos adquiridos.

Muito ainda pode ser feito na aprendizagem de Geometria e Construções Geométricas no Ensino Fundamental, pois esse estudo não esgotou o assunto. Outras pesquisas podem ser realizadas buscando relacionar o ensino de Geometria com as Competências Gerais da Educação Básica, descritas nas páginas 21 e 22 do capítulo 3.

Referências Bibliográficas

BIGODE, A. J. *Matemática hoje é feita assim.* São Paulo: FTD, 2000.

DANTE, L. R. *Teláris-Ensino Fundamental-Anos Finais- Matemática.* Terceira. São Paulo: Ática, 2018. 248 p.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Unicamp, 2004. 843 p.

LEI de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: [s.n.], 2017. 58 p. Edição atualizada até março de 2017-Senado Federal. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf>. Acesso em: abril. 2019.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria.* Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, F. E. de. *Construções geométricas com o auxilio de régua e compasso do software GeoGebra.* 104 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

MEIRA, A. C. P. F. *Aplicações da álgebra no estudo de segmentos construtíveis.* 16 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2011.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática-Ensino de quinta a oitava séries.* Brasília, 1998. 148 p. Disponível em: <http://http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf/>. Acesso em: julho. 2019.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2017. 468 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: fev. 2019.

NETO, A. C. M. *Geometria.* Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. (Coleção PROFMAT, v. 1).

OLIVEIRA, L. M. da S. *Ensinando Geometria com Régua e compasso, uma proposta para o 8^o ano.* 100 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2015.

PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. O problema da construção de polígonos regulares de euclides a gauss. *FAMAT em revista*, v. 13, n. 1, p. 101–116l, 2009.

PUTNOKI, J. C. Que se devolvam a euclides a régua e compasso. *Revista do Professor de Matemática*, v. 13, n. 2, p. 13–17l, 1988.

PUTNOKI, J. C. *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico*. São Paulo: Scipione, 1993. 192 p.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e compasso nos elementos de euclides: uma prática interpretada como regra. *História Unisinos*, v. 18, n. 1, p. 91–103l, 2014.

SILVEIRA, E. *Matemática: Compreensão e Prática: Manual do professor*. São Paulo: Moderna, 2018. 248 p.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

ZUIN, E. de S. L. *Da Régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. 211 p. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.