Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Welbert de Oliveira Moutta

A INTRODUÇÃO DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
Março de 2013

Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Welbert de Oliveira Moutta

A INTRODUÇÃO DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
Março de 2013

Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Welbert de Oliveira Moutta

A INTRODUÇÃO DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Banca Examinadora:

____

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira- IMPA

____

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de A. Moreira – IMPA

____

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández - UFRJ

Rio de Janeiro, ____ de _________________de _______.

Ficha Catalográfica

MOUTTA, Welbert de Oliveira

A introdução do Princípio da Indução Finita nos Ensinos Fundamental e Médio / Welbert de Oliveira Moutta; orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira – Rio de Janeiro: IMPA, PROFMAT, 2013.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão da minha existência, a minha esposa, por sua infinita compreensão e por acreditar em mim quando nem eu mesmo acreditei, e por fim, a minha filha, por seu carinho e amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus a quem, sem ele, nada disso seria possível.

Agradeço à minha família, que acreditou em mim e me apoiou.

Em especial a minha esposa, Aline, que sempre esteve ao meu lado me dando força, me apoiando nos momentos de dificuldade e compreendendo minha ausência em virtude dos estudos.

A minha filha Alice por seu amor e carinho, de quem me lembrava nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Ângela Moutta e Gutemberg Moutta, e meus irmãos Rondinele Moutta e Loídi Moutta, que me apoiaram para eu chegar até aqui.

Aos meus amigos de caminhada, em especial ao Anderson Carvalho dos Santos que esteve presente durante esses dois anos de caminhada.

Aos professores do IMPA que dedicaram empenho para a realização desse programa. Em especial ao professor Roberto Imbuzeiro, por sua orientação segura, dedicada e atenciosa.

Aos funcionários do Ensino que participaram dessa caminhada junto com a gente.

A SBM e a CAPES pela iniciativa, por acreditar nesse projeto, e principalmente, por acreditar em nós.

Aos meus alunos que fazem parte da minha história.

Resumo

Este trabalho trata da necessidade do uso de demonstrações no ambiente escolar, sugerindo o Princípio de Indução Finita como um conceito de fácil entendimento e fundamental importância para a compreensão de diversas fórmulas que são apresentadas sem demonstração. Para tal, Percorremos um caminho que vai desde a definição do Princípio de Indução Finita, passando por sua história e alguns casos clássicos, e por uma análise da formação do professor de matemática, concluindo no uso de práticas que incentivem o aluno a conjecturar, a partir do estudo de sequências numéricas, preparando-o para assimilar o princípio de Indução finita durante os ensinos fundamental e Médio.

Palavras chaves: Indução, demonstração, Conjecturar, sequências, fórmulas.

Abstract

This project addresses the need of using demonstrations in schools, suggesting the Principle of Finite Induction as a concept easy to understand and fundamental importance for the understanding of several formulas that has no proof. To this end, it will come a way since the definition of the Principle of Finite Induction, through its history and some classic cases, through an analysis of teacher of mathematics, concluding to use practices that encourage students to guess the from the study of numerical sequences, ready to assimilate the principle of finite induction during primary and East.

Keywords: Induction, demonstration, conjecture, sequences, formulas.

Sumário

Lista de Tabelas e Figuras

"Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista".

Abramo Hefez

1. Introdução

Atualmente, o ensino de matemática tem sido tratado em sala de aula como uma simples busca por resultados. Decorar fórmulas e maneiras de se resolver um problema tem sido motivo de constante preocupação por parte dos educadores.

Porém, assim como sugerem os PCNs[1], um ensino mais voltado para a capacidade de argumentação do aluno desenvolvendo o senso crítico, para a capacidade de analisar informações e criar modelos e fazer uso de demonstrações, incentiva o aluno a buscar mais do que uma simples resposta, faz com que o aluno entenda o método utilizado para solucionar problemas.

Assim, pretende-se mostrar durante este trabalho alguns conceitos importantes no ensino da matemática, como a formulação de idéias e construção de modelos e, na tentativa de facilitar a construção do conhecimento de uma maneira mais atraente, introduzir a indução matemática através das atividades com jogos, pois como afirma HEFEZ (2009 p.1):

> *"Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista".*

Para chegarmos a este ponto é preciso abordar outros assuntos tais como os do capítulo 3, que trata de uma melhor capacitação dos professores da educação básica. É necessário, primeiramente, repensar a formação do professor fazendo com que se sinta mais à vontade com provas e demonstrações para que estes assuntos sejam abordados em sala de aula.

[1] PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf e acessado em 17/01/2013 às 17:31h.

Para isso, traçamos um caminho que trata da definição do Princípio de Indução Finita, sua história e alguns casos clássicos, passando por uma análise da formação do professor de matemática, e concluindo com a proposta de algumas atividades que incorram no uso de práticas que estimulem o aluno a conjecturar, a partir de casos particulares até chegar a um modelo geral, associando ainda, as atividades ao estudo de sequências numéricas e funções.

Já a parte prática trata-se de um relato de experiências próprias vividas ao longo dos últimos dois anos com turmas de ensino médio.

A motivação para a pesquisa realizada neste trabalho foi buscar respostas para perguntas como: O que o ensino de indução pode acrescentar à formação do aluno de ensino médio? Como os professores de matemática são preparados para trabalhar provas e demonstrações em sala de aula? E, principalmente, como deve ser abordado o método da indução no ensino médio, quando o aluno ainda não está familiarizado com provas e demonstrações?

Embora a indução finita não pertença oficialmente ao programa do Ensino Médio, propomos este método, que é um dos vários métodos utilizados em demonstrações, por ser simples, de fácil compreensão e trabalhar algumas das principais habilidades esperadas de um aluno de ensino médio.

No ensino de sequências como as progressões aritméticas e progressões geométricas podemos observar um bom exemplo de como podem ser trabalhadas algumas dessas habilidades, quando ao observar o comportamento de uma dessas sequências o aluno é capaz de fazer conclusões e prever um termo mais à frente.

Para isso, é necessário mudar a ideia de que provas e demonstrações são complicadas. Ao abordar estes temas em sala de aula, os professores precisam ter tido uma boa formação para estar mais à vontade com o assunto, assim a mediação do conhecimento acontecerá de forma mais natural.

Nosso objetivo é oferecer ao aluno de ensino médio um breve contato com as provas e demonstrações, não apenas com aulas expositivas, mas, através de uma proposta de atividades onde o assunto é abordado de maneira lúdica, estimulando a investigação e a busca de uma explicação para os resultados encontrados, mostrando assim, que a proposta de introduzir o princípio da indução pode perfeitamente ser realizada pelos professores do ensino médio.

No intuito de modificar a visão dos alunos e, principalmente dos professores, sobre o ensino de matemática, este trabalho traz alguns relatos importantes de como a transição da linguagem verbal para a linguagem matemática acontece mais facilmente quando fazemos uso de alguns jogos para exemplificar as atividades educacionais, deixando-as mais atraente. Com a contextualização o aluno consegue enxergar aplicabilidade no conteúdo que está sendo ensinado, estimulando o aprendizado.

Como sugerem SMOLE et al (2007),

> *"A ideia da utilização dos jogos nas aulas de matemática está intrinsecamente ligada à perspectiva de resolução de problemas, permitindo uma nova forma de organizar o ensino incluindo, além de aspectos metodológicos, uma nova postura diante do que é ensinar e, consequentemente, no significado do que é aprender".*

As atividades lúdicas são poderosas ferramentas que, se bem utilizadas, ensinam enquanto divertem. Os jogos para fins educacionais vão além do simples entretenimento. Cabe ao professor organizar e controlar as atividades de ensino utilizando recursos apropriados, a fim de criar as condições necessárias para que os alunos explorem os conteúdos e desenvolvam a iniciativa, a criatividade e curiosidade científica.

Na primeira parte deste trabalho trazemos uma breve exposição do princípio da indução finita e seu contexto histórico, relatando diversos períodos da história em que a método foi utilizado por importantes matemáticos e na tentativa de trazer uma melhor informação sobre o princípio da indução, trazemos alguns dos casos clássicos como a soma dos primeiros ímpares e os coelhos de Fibonacci e ainda, alguns exemplos em que conclusões precipitadas podem levar a afirmações falsas.

Na segunda parte, tratamos de uma análise acerca da formação dos professores de matemática que irão atuar na educação básica, como é visto por eles as provas e demonstrações, de como o princípio da indução finita pode ser abordado em sala de aula e, de algumas sugestões para resolver possíveis defasagens.

Na tentativa de analisar com mais cuidado como o método da indução pode ser abordado, a terceira e última parte deste trabalho relata algumas atividades desenvolvidas em sala de aula, bem como as experiências realizadas através de uma abordagem lúdica, despertando o interesse do aluno e fazendo com que a partir dos experimentos consigam chegar a uma conjectura que pode ser provada por indução.

2. Princípio da Indução Finita: Aspectos históricos.

A indução Finita, ou comumente chamada indução matemática compreende uma fase de dedução, que claramente a distingue da indução utilizada em outras ciências.

Assim, PÓLYA (1995 p. 91) diz:

> *"É de lamentar que estes nomes ["indução" e "indução matemática"] estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos os dois conjuntamente".*

Bem antes de aparecer com o axioma dos números naturais, a Indução Finita foi muito utilizada na antiguidade (implicitamente) em outras demonstrações. Seu primeiro uso de forma explicita é atribuído a Francesco Maurolicus (1494-1575) para provar que $1+2+3+...+(2n-1)=n^2$.

Mas o método tornou-se popular só em 1665, quando em sua obra *Traité du triangle aritmétique* (tratado do triângulo Aritmético), Blaise Pascal (1623-1662) utilizou-se da Indução em uma das demonstrações das propriedades de seu triângulo.

O método de demonstração por indução é, na verdade uma criação com contribuições de muitos matemáticos, segundo MORGADO (1990): o termo "indução matemática" é considerado mais recente e atribuído a Augustus Morgan, em 1838 além de ter sido citado por outros matemáticos renomados como vemos a seguir.

George Peacock, em 1830, no seu "Treatise on Álgebra" dá o nome de "indução demonstrativa" ao argumento da passagem de n a n+1.

Isaac Todhunter, em 1866, no seu livro de Álgebra, usou as duas designações indução demonstrativa e indução matemática.

William Stanley, em 1882, no livro “Elementary lessons in Logic” e Joseph Fickling, em 1874 em “Complete Algebra”, usaram também as duas designações.

Richard Dedekind, em 1888, em “Was sind und was sollen die Zahlen?” não usou nenhuma das duas designações – usou o termo “indução completa”.

Ainda no final do século XIX, outros livros de texto tais como a Álgebra de Hall e Knight (1898) e “Textbook of Álgebra” de W. S. Aldin (1887) usaram somente o termo “indução matemática” pois o termo indução demonstrativa caiu em desuso.

LIMA (1998) considera que

> *“O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais”.*

Assim, depois de citar Jacob Bernoulli, Blaise Pascal e Pierre de Fermat , sabe-se que podem ser encontrados traços de indução matemática em escrito Hindus e Gregos, inclusive, na demonstração de Euclides[2] de que a quantidade de números primos é infinita.

2.1. Axiomas de Peano e Alguns Casos clássicos

Em meados do século XX, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) deu uma forma mais precisa para os números naturais, por meio da enumeração dos quatro axiomas que ficaram conhecidos como os Axiomas de Peano, conceituando assim, todas as definições e propriedades dos números naturais.

[2] Tal demonstração pode ser encontrada na obra *Os Elementos*.

O Princípio de Indução Finita aparece como o quinto axioma de Peano, proposto em 1899 em sua obra “*Arithmetic principia novo methodo exposita*” - Novo Método de exposição dos princípios da Aritmética.

O conjunto dos números naturais, segundo Peano, é caracterizado pelas seguintes propriedades:

1. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é chamado de número um e é representado pelo símbolo 1.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1, e, além disso, contém o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto coincide com N.

Este último axioma é conhecido como o Princípio de Indução Matemática, ou mais precisamente segundo HEFEZ (2009 p.3):

> ***Definição [Princípio de Indução Matemática]****: Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais N, tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S, o número n + 1 também pertence a S, tem-se que S = N.*

Para SIMMONS (1997), existe um enorme abismo entre “provavelmente verdadeira” e “absolutamente certa”, sendo necessário um forte argumento lógico para garantir que uma propriedade envolvendo os números naturais, seja verdadeira qualquer que seja o valor de *n*. A indução fornece precisamente este tipo de argumento.

Durante toda a história nos deparamos com o método da indução sendo utilizado por vários matemáticos na demonstração de várias conjecturas. Portanto, uma afirmação só deve ser aceita sobre os números naturais se houver sido demonstrada que é válida para todos os números naturais.

A seguir, vamos ver dois dos casos mais conhecidos da história.

2.1.1. Soma dos n primeiros números ímpares.

O exemplo a seguir trata-se de um dos primeiros casos a ser demonstrado utilizando o princípio da indução, abordado por Maurolicus como já citado anteriormente.

Mostrar que $\forall n \in N^*$, a soma dos n primeiros ímpares é dado por n².

Ou seja, queremos mostrar que $\forall n \in N^*$, teremos $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ é sempre verdade.

Para n=1, temos 1=1², que é verdadeiro.

Admitindo que seja sempre verdadeiro $P(n)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, devemos mostrar que $P(n+1)=1+3+5+...+(2n-1)+...+(2n+1)=(n+1)^2$ também é verdadeiro. Pela hipótese de indução, podemos escrever que $P(n+1)=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

Logo, pelo princípio da indução finita temos que $P(n)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, $\forall n \in N^*$ é sempre verdadeira.

2.1.2. Os coelhos de Fibonacci

Um casal de coelhos recém-nascidos é colocado num certo lugar fechado. Supondo que, a cada mês, cada casal de coelhos produz um outro casal e que um novo casal só começa a procriar dois meses após seu nascimento, quantos casais de coelhos existirão após um ano?

Segundo HEFEZ (2009 p.40), o problema citado acima foi proposto e resolvido por Leonardo Fibonacci (1170-1250), matemático italiano também conhecido Leonardo de Pisa, em seu livro *Liber Abaci* publicado no ano de 1202.

FIONACCI apresenta a seguinte solução:

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 1: Total de coelhos em função do número de meses decorridos.

Observando a tabela, tem-se que o número de casais de coelhos num determinado mês qualquer, é sempre igual a soma do número de casais dos dois meses anteriores.

Seja a_{n+1} o número de casais de coelhos de um determinado mês, então, teremos que

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \;\; a_1 = a_2 = 1.$$

2.2. Generalizações apressadas

Existem casos em que algumas afirmações acerca dos números naturais nos leva a questionar: A afirmação é sempre verdadeira? Será que, valendo para alguns casos particulares, irá valer para qualquer número natural? Nestes casos, substituir valores para testar a veracidade de uma conjectura, além de ser muito trabalhoso, pode não ser o suficiente.

Por mais que os resultados sejam verdadeiros para alguns valores de n, não se pode garantir que para um número natural não testado, o resultado também seja válido. A seguir, serão abordados alguns casos de generalizações apressadas sobre os naturais que, segundo MORGADO (1990 p.23-27) levaram a alguma afirmação equivocada.

2.2.1.O trinômio de Euler.

$f(x) = x^2 + x + 41$, só nos fornece números primos, quando x é substituído por cada um dos oitenta inteiros consecutivos:

$$-40,\ldots -39,\ldots -1,0,1,2,\ldots,39$$

No entanto, seria errado concluir, após estas oitenta observações, que o trinômio de Euler só fornece números primos, quando x é um inteiro. Tomando $x = 40$, tem-se que:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681$$

Como $f(40) = 41^2$, tem-se que, $f(40)$ não é um primo.

Semelhante ao caso que acabamos de comentar, LIMA (1998 p.38-39) cita a expressão $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ que fornece primos para n = 1, 2,

…, 79. Porém para $q = 80$, temos que $q(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ não é primo, pois também é um múltiplo de 41.

2.2.2.Os números de Fermat.

Pierre de Fermat, em meados do século XVII, chegou a convencer-se de que todos os inteiros da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eram primos, para n inteiro e não negativo.

Numa carta escrita a Bernard Frénicle de Bessy, em 1640, Fermat disse estar "quase persuadido" de que todos os inteiros daquela forma eram primos. E assim como acontece com:

$$2^{2^1} + 1 = 5$$
$$2^{2^2} + 1 = 17$$
$$2^{2^3} + 1 = 257$$
$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

Fermat incluiu ainda os números $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ e $2^{2^6} + 1 = 18.446.744.073.709.551.617$ Que julgava serem primos, mas que não o são.

Nessa carta, Fermat afirmava que ainda não tinha conseguido a uma demonstração exata, mas já tinha excluído tantos divisores, por demonstrações consideradas infalíveis que tinha dificuldade em aceitar que tivesse de dizer o contrário.

Mais tarde, em uma nova carta escrita a Frénicle, com respeito ao mesmo problema, Fermat, segundo MORGADO (1990 p.25) escreveu:

> *Mas confesso-lhe com toda clareza que não consegui ainda demonstrar a exclusão de todos os divisores possíveis, nesta bela proposição que lhe enviei e que o senhor me confirmou, relativamente aos números*
>
> 3, 5, 17, 257, 65.537 etc.

> *..."não pude ainda demonstrar a verdade necessária, da qual, entretanto, como já antes também não duvidava".*

Mesmo afirmada por mais de duas décadas, a conjectura de Fermat, de que todos os inteiros da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ são primos, tal proposição não é verdadeira.

Em 1743, Euler provou que, se a e b são primos entre si, então todo o divisor do número $a^{2^n} + b^{2^n}$ é 2 ou é da forma $2^{n+1}k + 1$.

Ou seja, qualquer divisor do número $F_5 = 2^{2^5} + 1$ é necessariamente da forma $2^6 \cdot k + 1$. De fato, para k=10, o número $2^6 \cdot 10 + 1 = 641$ é divisor de $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6.700.417$.

2.2.3.Leibniz e a quase conjectura falsa.

A partir do pequeno teorema de Fermat, tem-se que se p é um primo (positivo) e n é inteiro não divisível por p, então $n^{p-1} - 1$, é divisível por p; ou se p é primo (positivo), então $n^p - n$ é divisível por p para todo o inteiro positivo n.

Leibniz constatou que, para todo inteiro positivo n, n^3-n é divisível por 3, n^5-n é divisível por 5 e n^7-n é divisível por 7.

A partir destas observações, Leibniz esteve perto de fazer a conjectura de que "para todo inteiro ímpar (positivo) s, $n^p - n$ era divisível por p, qualquer que fosse o inteiro positivo p".

Constatou à tempo que para n=2 e p=9 temos $2^9 - 2 = 510$ não é divisível por 9, evitando assim, que a notícia se espalhasse.

2.2.4. Uma conjectura falsa.

O matemático soviético Dmitri Aleksandrovitch Grave, conhecido por seus trabalhos sobre funções de variável complexa, equações diferenciais, geometria diferencial, teoria dos números, história da matemática e educação matemática não teve a mesma sorte.

O problema atribuído ao matemático norueguês Abel em 1828, consistia em saber se existiria algum primo p tal que $a^{p-1}-1$ seja divisível por p^m, para algum $m \geq 2$.

Sabe-se que pelo pequeno teorema de Fermat, para a não divisível pelo primo p, $a^{p-1}-1$ é divisível por p.

O problema proposto por Abel, consistia em saber se existe algum primo p tal que o inteiro $a^{p-1}-1$ seja divisível por p² para a não divisível por p.

O matemático alemão Jacobi notou que 11^2 divide $3^{10}-1$, 5^2 divide 7^4-1, 7^2 divide 31^6-1, 7^3 divide 19^6-1.

Grave, depois de verificar que não há nenhum primo p, menor que 1000, para o qual $2^{p-1}-1$ seja divisível por p^2, fez a conjectura de que $2^{p-1}-1$ não é divisível por p^2, qualquer que seja o primo (positivo p).

Melssner, em 1913, verificou que para o primo p=1093, o número $2^{1092}-1$ é divisível por 1093² e, portanto, a conjectura de Grave não é verdadeira.

Os exemplos comentados neste capítulo foram abordados com a intenção de trazer alguns casos conhecidos e mostrar que com algumas observações feitas, podemos apenas chegar a uma conjectura, mas, para afirmar que tal conjectura é totalmente verdadeira é necessário provar sua validade para todos os números naturais.

3. A Formação do Professor de Matemática e o Estudo do Princípio de Indução Finita

Para uma boa formação do aluno, faz-se necessária uma boa formação do professor. Discutir esse segundo tema é o objetivo do capítulo.

3.1. Problemas Gerais Encontrados no Ambiente Acadêmico

Uma das primeiras coisas com que se depara o estudante de licenciatura é a necessidade de se provar tudo aquilo que afirma. Este é um dos maiores problemas encontrados no decorrer do curso, e uma das principais razões da evasão nos cursos de licenciatura em Matemática. Por outro lado, os PCNs (1998 p.49) alertam que:

> *Entre os maiores desafios para a atualização pretendida no aprendizado de Ciência e Tecnologia, no Ensino Médio, está a formação adequada de professores, a elaboração de materiais instrucionais apropriados e até mesmo a modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, relativamente ao aprendizado individual e coletivo e a sua avaliação.*

Devido a grande evasão, algumas universidades vêem a necessidade de se fazer um curso mais voltado para a área de educação, e se esquecem de trabalhar a base de Matemática dos licenciandos, que em sua grande maioria, chegam defasados no Ensino Superior. Não que o aluno de Licenciatura tenha que estudar apenas matemática e se esquecer das disciplinas que tratam de como se relacionar com o aluno, mas o que se procura deixar claro é a importância dos dois aspectos, tanto o domínio do conteúdo, quanto o domínio da técnica para se transmitir. É isto que afirma RESENDE (2007 p.4) quando diz que “no processo de formação de professores o pedagógico não pode se separar do conteúdo, assim como teoria não deve se dissociar da prática, em especial da prática docente na escola básica." Para tal, enxerga-se a necessidade de uma preparação adequada. Com relação a preparação do conteúdo e o uso de demonstração, GARNICA (2002 p.73) defende:

> *Minha trama de investigação, pautada numa vertente qualitativa de pesquisa plasmada na fenomenologia, mostrou uma nítida convergência nos discursos de professores que, embora vindos de áreas de pesquisa diferentes, efetivamente atuavam em cursos licenciatura em Matemática: a prova rigorosa é tida como elemento fundamentalmente importante para a formação de professores (...)não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica aos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais.*

Faz–se importante deixar clara a importância que tem o uso de demonstrações tanto no curso do bacharel quanto no curso do licenciado, ainda que com papéis distintos. Enquanto para o bacharel visa a produção científica, o licenciado visa a formação do pensamento crítico, tanto quanto a própria visão da Matemática. De fato, se o matemático pesquisador vê na matemática um fim em si mesma, o professor de matemática idealiza como um meio ou instrumento de formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos SILVA (2010 p.13). Um dos desafios do professor de matemática é demonstrar os teoremas de forma a priorizar o entendimento dos estudantes e não uma convenção formal produzida no quadro. No entanto, a prova é abandonada por maioria dos professores por enxergar como um impedimento para a compreensão, em vez de ser um meio, segundo RESENDE (2007)

3.2. Problemas Encontrados na Formação do Professor com Relação ao Princípio de Indução Finita e Possíveis soluções para o trabalho de indução com os professores.

O Princípio de Indução finita é um dos primeiros métodos de demonstração com que o estudante de matemática se depara na sua carreira acadêmica, as vezes na disciplina de Teoria dos Números ou

Álgebra I, Esse conceito é apresentado, e passa a fazer parte de toda a caminhada do estudante durante a universidade. No entanto, um problema que aparece quando os estudantes vêem o princípio da Indução finita é encará-lo como um processo mecânico e se restringe a encontrar padrões a serem seguidos, tornando o processo monótono.

Um outro problema, também comum e ainda mais fundamental, é a confusão entre indução empírica e indução matemática. Assim, PÓLYA (1975 p.91) diz:

> *"É de lamentar que estes nomes ["indução" e "indução matemática"] estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos os dois conjuntamente".*

Entretanto, SILVA (2010) deixa claro a diferença entre Indução Finita e Indução Empírica:

> *Indução finita é um método dedutivo enquanto indução empírica é uma generalização não dedutiva, ou seja, na demonstração por indução empírica não ocorre dedução no sentido matemático, pois a generalização é realizada por meio de observações.*

Com relação a ciências empíricas, SILVA (2010) cita a seguinte observação de Fonseca:

> *a demonstração é baseada principalmente na indução empírica e na analogia, a partir das quais se conclui que, o que é verdade para alguns indivíduos de um determinado grupo. Nesse contexto, a validade das proposições aumenta proporcionalmente com o número de fatos que a suporta, sendo invalidada por um contra-exemplo.*

Já com relação ao Princípio da Indução Finita, LIMA (1998 p.27) afirma que o "axioma da indução é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número".

SILVA e SAVIOLI (2012 p.127-148) através de experimentos concluíram que alguns alunos de licenciatura em matemática não compreendem a diferença entre indução empírica e indução finita. Os alunos não enxergam a indução finita como prova formal, tomando afirmações, e uma vez verificada para certo número de termos, validando para todos os naturais.

Ao se deparar com o processo de construção da prova, além de não refletir sobre o que está provando a forma mecânica os leva a enxergar as duas partes da demonstração base e passo indutivo como partes independentes, não estabelecendo a relação que existe entre elas

Um terceiro problema é a não-compreensão da primeira proposição do Princípio da Indução Finita. SILVA afirma ainda que os alunos não conseguem compreender a importância desta, que se apresenta como função de base para toda a demonstração. É a partir da primeira proposição, e só a partir dela, que se pode afirmar que é valido para um valor n.

Uma vez apresentado problemas na formação dos professores, deve-se repensar o trabalho que tem sido feito dentro das Universidades. Uma vez que existe uma diferença de objetivo entre o matemático e o professor de matemática, também deve existir uma diferença na sua formação, pois os próprios enxergam a matemática com olhares diferentes.

Quando se pensa em tais dificuldades RESENDE (2013 p.5) afirma sobre o ensino de Teoria dos Números em turmas de licenciatura em Matemática dentro das Universidades

> *Deste modo, o ensino tende a ser expositivo, livresco, centrado no professor, sendo a aprendizagem resultante da repetição de inúmeros exercícios, no caso demonstrações de proposições que, já se sabe, são verdadeiras. A significação histórico-cultural, a investigação matemática, o conjecturar ficam relegados a segundo plano ou não aparecem.*

Ou seja, mesmo se tratando em turmas de formação de professores, a universidade não tem preocupação com a formação do professor. Cabe a ela estimular a reflexão do estudante de Licenciatura em Matemática, o mesmo que ele deve buscar de seus alunos, que aquilo que ele trabalha não seja apenas uma operação motora, mas que seja objeto de reflexão.

Diante disso, é necessário levar o aluno a refletir, por exemplo, através de exemplos lúdicos sobre o que é o princípio da indução finita, baseado no rigor matemático, o que significa cada uma de suas duas proposições, bem como o fato de as duas proposições estarem relacionadas para que a prova seja válida.

Faz-se necessário também entender a força desse princípio, que a partir de uma analise finita, prova uma conjectura para valores infinitos. Um exemplo interessante é o apresentado por GERONIMO E FRANCO (2006) onde ele cita o trinômio de Euler, no capítulo II.

Por fim, um programa que procura sanar as deficiências nessa área é o PAPMEM[3], um programa realizado pelo IMPA[4] que oferece treinamento gratuito para professores de matemática de ensino médio de todo o estado do Rio de Janeiro e transmitido em forma de videoconferência para diversas universidades no Brasil. O programa conta como o apoio da CAPES e é realizados desde 1990, sob diversas formas, abordando assuntos relativos às três séries do ensino médio. Deste programa resultou uma série de livros especialmente voltados para melhorar a formação dos professores do ensino médio, publicados pela SBM[5] com o título Coleção do Professor de Matemática.

---

[3] Programa de aperfeiçoamento para professores de matemática de ensino médio
[4] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
[5] Sociedade Brasileira de Matemática

4. O ensino da indução finita no ensino médio por meio de uma abordagem lúdica.

O Ensino médio é onde se espera que o aluno tenha condições de concretizar o que foi trabalhado no Ensino Fundamental e construir um senso crítico, permitindo-lhe utilizar o que foi aprendido para ajudar a melhorar a sociedade.

Muito além de uma ciência que busca respostas, a Matemática nessa fase do ensino procura formular hipóteses e prever resultados, partindo de casos particulares para chegar a uma fórmula geral, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades, discutindo ideias e produzindo argumentos convincentes, etapa do processo que é tão importante quanto os experimentos. VARELLA (2010) defende que a iniciação do aluno com o processo demonstrativo deve se dar ainda no 6º ano, tendo o seu ápice no ensino médio, onde serão trabalhadas as demonstrações relativas ao conteúdo vigente. Isto corresponde às expectativas das OCs (2006 p.69):

> *Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico*.

Portanto, elaborar estratégias para a resolução de problemas, investigar selecionando entre as já existentes e identificando qual melhor se encaixa em cada problema; interpretar e criticar resultados numa situação concreta; compreender, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos são competências que pretendemos despertar e desenvolver nos alunos de ensino médio através de atividades propostas neste trabalho.

4.1. Sobre as atividades desenvolvidas.

Algumas das perguntas mais feitas, nos dias de hoje, no que tange ao ensino de matemática são: Existe alguma relação entre jogos e o ensino da matemática? Que conceitos podemos trabalhar estrategicamente? Como os professores entendem o uso de jogos em sala de aula?

O principal objetivo da atividade lúdica, através de jogos, é criar uma possibilidade de trabalhar com os alunos a capacidade de investigar e criar modelos, o que no processo de desenvolvimento das idéias matemáticas é um importante processo.

Como defende SMOLE (2007), o quando aluno participa de uma atividade com jogos, ao procurar a melhor opção de jogada, ele se vê forçado a refletir e analisar as regras do jogo, estabelecendo assim, uma relação entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. A utilização de jogos também é defendida nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 46) , nos seguintes termos:

> *“Uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções”.*

As OCs (2006 p.70) recomendam que o aluno ser inserido num ambiente de raciocínio que desenvolva os seguintes aspectos:

> *...formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair*

regularidades, criar modelos e argumentar com fundamentação lógico-dedutiva.

Assim, acredita-se que a atividade com jogos propicia ao aluno além de um ambiente de aprendizado mais agradável, a oportunidade de desenvolver habilidades, como a busca de argumentos convincentes, que o leve a tomada de decisões.

Com esta motivação, propomos discutir, por meio de jogos, dois casos clássicos**:** a Torre de Hanói e a Pizza de Steiner.

Relatamos a seguir parte da nossa experiência em sala de aula com estes assuntos, realizados com turmas de primeiro ano do ensino médio (a Torre de Hanói) e turmas de segundo ano do ensino médio (a Pizza de Steiner) nos últimos dois anos, apresentados de forma lúdica com o objetivo de despertar um maior interesse pelo assunto.

4.2. A Torre de Hanói e uma proposta de atividade.

Criado no fim do século XIX, trata-se de um jogo formado por uma torre de com oito discos, empilhados por tamanhos decrescentes em um dos três pinos fixados. O objetivo é transferir toda a torre para um dos outros pinos, movendo um disco de cada vez e nunca deixando um disco maior sobre um menor.

Figura 1: Torre de Hanói confeccionada em madeira.

Existem diversas lendas a respeito da origem do jogo têm sido contadas ao logo da história. Porém, segundo HEFEZ (2009 p.44), o jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas[6], em 1882, que, para dar mais sabor à sua criação, criou a lenda que falava da existência de um templo oriental, onde existia uma torre sagrada, que tinha como objetivo trabalhar a disciplina mental dos jovens monges que o habitavam. Também conhecida como torre de Brahma, tem seu nome inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

A lenda diz que em uma das hastes, no momento da criação do universo, Deus colocou 64 discos de ouro, de maneira que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os demais decresciam, até que chegasse o topo. Aos monges foi dada a tarefa de mover a torre formada pelos discos de diamante, para uma outra haste, podendo-se utilizar a terceira como auxiliar, deve-se mover apenas um disco por vez e, sem que nunca fosse colocado um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar incessantemente até que terminassem de mover as placas de ouro e, com o estrondo de um trovão, o templo desmoronaria e o mundo desapareceria. Dessa forma, um novo mundo seria criado, o mundo de Hanói.

Os objetivos da atividade com a Torre de Hanói são explorar os conceitos de funções exponenciais e progressões geométricas, que estão relacionados com as regras do jogo; e fazer com que os alunos construam conjecturas matemáticas, criando uma lei para um caso geral.

A atividade foi realizada da seguinte maneira:

***1º passo*:** Os alunos foram deixados à vontade com o jogo, na intenção de que se familiarizassem com as peças, com os movimentos e o

---

[6] François Édouard Anatole Lucas, (1842 - 1891) - matemático francês criador do jogo matemático Torre de Hanói.

jeito de encaixar os discos nos pinos. Depois disso, para deixar o jogo mais atraente, foi contada a história da torre explicando que a construção foi inspirada na lenda hindu. Em seguida, as regras do jogo foram explicadas.

2º passo**:** Nesta etapa da tarefa, observou-se o desenvolvimento do jogo segundo as regras explicadas. O jogo foi iniciado com apenas um disco, para que os alunos transfiram-no para uma outra haste, depois com dois discos, aumentando o grau de dificuldade segundo as regras, até que se chegue ao limite de seis discos.

3º passo**:** Os alunos foram questionados a respeito de quantos movimentos cada um realizou para transferir a torre de um pino para um outro, e se a quantidade de movimentos foi a menor possível.

Separados em duplas, dividiram a tarefa da seguinte forma: um deles movia os discos e o outro contava a quantidade de movimentos realizados para mover a pilha de discos para um outro pino. Depois eles trocavam de função: quem movia os discos passou a contar a quantidade de movimentos e quem contava a quantidade de movimentos passou a mover os discos. Em seguida, foi solicitado aos alunos que construíssem uma tabela com o número mínimo de movimentos necessários para transferir os discos de um pino, para um outro pino qualquer.

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos pelos alunos de forma experimental:

Numero de peças	**Dupla 1**	**Dupla 2**	**Dupla 3**	**Mínimo de movimentos**
1	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*3*	*5*	*3*	*3*
3	*8*	*7*	*10*	*7*
4	*15*	*17*	*22*	*15*
5	*33*	*31*	*35*	*31*

Tabela 2: Tabela com o número de movimentos para mover a torre.

Baseados na tabela apresentada anteriormente, os alunos foram perguntados qual seria o menor número de movimentos realizados para as etapas propostas e, sem muita dificuldade logo em seguida, pôde-se chegar a tabela a seguir, que indica a quantidade mínima de movimentos realizados para os discos do primeiro pino para o último.

Número de peças	**Mínimo de movimentos**
n	*A(n)*
1	*1*
2	*3*
3	*7*
4	*15*
5	*31*
...	...
n	$2^n - 1$

Tabela 3: Mínimo de movimentos em função do número de peças utilizadas.

Neste momento da atividade, foi chamada a atenção dos alunos para que observassem o fato de que, com o número de discos aumentando, aumentava também o número mínimo de movimentos e, neste caso, eles puderam observar facilmente de que se trata de uma função com crescimento exponencial.

Com a tabela montada, construímos a seqüência formada com o número mínimo de movimentos que eles conseguiram: 1, 3, 7, 15, 31... . Em seguida foi pedido que observassem a seqüência e analisassem se existe alguma relação entre os dados que obtiveram.

Depois de observarem a seqüência, a seguinte pergunta lhes foi feita: Existe uma fórmula matemática que relacione a quantidade de discos com o número mínimo de movimentos?

Alguns responderam: *São todos ímpares!* Enquanto outros disseram: *A diferença entre eles forma uma PG de razão 2!* e *São todos "quase" uma* *potência de dois.* E por fim, a partir da afirmação anterior, a tão esperada resposta: *- Todos eles são uma potência de dois subtraído de um.*

Analisando os dados da segunda coluna, temos que os resultados obtidos são todos uma potência de base dois subtraído de um.

De fato:

Para um disco, temos: $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Para dois discos, temos: $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Para três discos, temos: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

Para quatro discos, temos: $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

Para cinco discos, temos: $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

Então, para n discos, teremos $2^n - 1$ movimentos?

O próximo passo da atividade, a partir desta conjectura, foi procurar uma resposta para a seguinte pergunta: a fórmula funciona claramente para $n = 1,2,3,4,5$ mas, será verdadeira para qualquer valor de natural de n?

Tentando solucionar a problemática da justificação do processo indutivo, RUSSEL (2005 cap.6) afirmou:

> *"...a verdadeira questão é esta: um número qualquer de casos em que se cumpriu uma lei no passado proporciona evidência de que se cumprirá no futuro?"*

Neste momento, surge o primeiro contato com o princípio da indução, pois de acordo com VELOSO (2004 p.6)

> *"A indução é um processo de inferência que vai do conhecido para o desconhecido".*

Na intenção de que os alunos tivessem uma breve noção do método da indução, foi feita uma rápida explicação mostrando que é uma técnica simples e muito utilizada para demonstrações em matemática para provar que um determinado modelo irá funcionar para todos os números naturais.

Explicado de maneira bem simples, o método da indução consiste em duas etapas:

1. Mostrar que o enunciado vale para $n = 1$.
2. Mostrar que se o modelo vale para um $n = k$, então também valerá para $n = k + 1$.

Assim, tendo visto que o modelo é válido para um valor inicial, mostrou-se que o processo para ir de um valor para o próximo também é válido. Dessa forma, se as duas hipóteses forem comprovadas, eles poderiam então, obter qualquer valor através da repetição deste processo.

Para entender melhor porque apenas duas etapas são suficientes, o processo foi ilustrado com o chamado “efeito dominó”. Se tivermos uma carreira de dominós enfileirados e pudermos garantir que o primeiro dominó cairá, então o seguinte também cairá. Logo, pode-se concluir que todas as peças do dominó cairão.

Assim, uma vez entendido o método da indução passamos para a prova por indução.

Seja S o conjunto dos naturais tais que os n discos são movidos de acordo com o modelo $A(n) = 2^n - 1$, onde n representa o número de discos e $A(n)$ o número total de movimentos realizados.

Assim, tem-se que:

1. $1 \in S$, pois com apenas um disco, precisamos de $2^1 - 1 = 1$ movimento.

2. Agora suporemos que para um k qualquer, $k \in S$, ou seja, k discos são totalmente removidos com $2^k - 1$ movimentos.

No próximo passo tenta-se provar que o sucessor do k, ou seja, k+1, também pertence ao nosso conjunto S, isto é $A(k+1)=2^{k+1}-1$.

Para mover um número de discos igual a k+1, passamos inicialmente, k discos para o segundo pino, sendo necessário um total de $A(k)=2^{k}-1$ movimentos e, em seguida, com apenas mais um movimento, o (k+1)-ésimo disco é movido para o terceiro pino, com A(k) movimentos os k discos que estão no segundo pino passam para o terceiro pino. Ou seja,

São realizados $(2^{k}-1)+1+(2^{k}-1)$ movimentos. Isto é, $A(k+1)=2^{k}-1+1+2^{k}-1 \Rightarrow 2\cdot 2^{k}-1 \therefore A(k+1)=2^{k+1}-1$.

Portanto, isso prova que $(k+1)\in S$.

Assim, se vale para k e também vale para k+1, pelo princípio da indução, podemos afirmar que vale para qualquer número natural.

Pelo princípio da indução acabamos de ver que numa torre com n discos são necessários $2^{n}-1$ movimentos. De acordo com a lenda, a torre de Brama possuía um total de 64 discos, ou seja, seriam necessários $2^{64}-1$ movimentos. Assim, os monges teriam de fazer no mínimo 18.446.073.709.551.615 movimentos, levando bastantes bilhões de anos para terminar a suposta tarefa.

Vale ressaltar que o objetivo da tarefa era, a partir de um caso particular chegar a um modelo que funcionasse para o caso geral, ou seja, verificar que com $2^{n}-1$ movimentos resolvemos uma torre com n discos. Provar que este é o número mínimo de movimentos é uma outra tarefa, que pode ser realizada mais tarde de uma outra maneira.

4.3. A pizza de Steiner.

Segundo HEFEZ (2009 p.48), O problema a seguir foi proposto e resolvido por Steiner[7].

“Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?”.

E, mais recentemente, proposto pela UFRJ no ano de 2003, em seu extinto vestibular da seguinte maneira:

“Uma reta divide o plano em 2 regiões; duas retas dividem-no em, no máximo, 4 regiões; três retas dividem-no em, no máximo, 7 regiões; e assim sucessivamente. ***Em quantas regiões, no máximo, 37 retas dividem o plano?”.***

Para o problema da Pizza de Steiner vamos apresentar dois argumentos para calcular heuristicamente o valor de r(n): um baseado em tentativas de construção e outro em achar um polinômio que corresponda ao comportamento recursivo observado. A seguir, apresentaremos uma demonstração formal de que a fórmula obtida é correta. Observamos que se, por um lado, a prova formal é a “última palavra” quanto à solução do problema, por outro lado, esta prova requer que já se conheça previamente a fórmula correta para r(n). Portanto, os dois argumentos correspondem a etapas preliminares que são em geral muito importantes para que chegarmos a um teorema que possa ser provado formalmente. Além disto, cada um dos dois argumentos apresenta uma ideia importante: recursão, no primeiro caso;

[7] Jacob Steiner (1796-1863) - Geômetra alemão.

e, no segundo caso, “fitar”[8] os dados, determinando uma função que corresponda aos resultados obtidos experimentalmente.

4.3.1. Dois argumentos heurísticos para achar a fórmula de r(n).

Ao abordar este problema em sala de aula, a tarefa aconteceu da seguinte forma:

Foi pedido a um aluno que, considerando o quadro negro como um plano, traça-se uma reta dividindo-o em duas regiões. A um segundo aluno, diferente do primeiro, foi pedido que traçasse uma reta de modo que o quadro ficasse dividido no maior número de regiões possível. A um terceiro aluno, diferente dos outros dois, também foi pedido que traçasse uma reta de modo que o quadro ficasse dividido na maior número de regiões. E, a um quarto aluno foi pedido que fizesse a mesma coisa: com uma reta, dividir o plano no máximo de regiões possível.

A primeira observação feita pelos alunos foi que, para obter o número máximo de regiões, as retas deveriam intersectar-se.

Em seguida, através dos desenhos no quadro representados a seguir, observou-se que:

Portanto, o primeiro corte produz duas regiões, como mostra a figura.

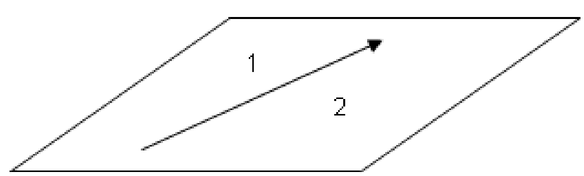

Figura 2: *Plano seccionado por apenas uma reta, dividindo-o em duas regiões.*

[8] Neologismo vindo do inglês *fitting*.

O segundo aumenta o número de regiões *em duas*, se cortar a reta anterior.

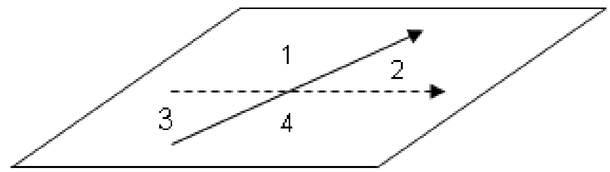

Figura 3: *Plano seccionado por duas retas, dividindo-o em quatro regiões.*

O terceiro aumenta em três o número de regiões, se cortar as duas anteriores em pontos distintos.

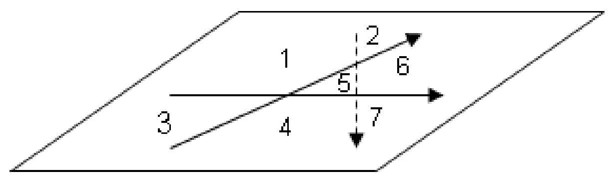

Figura 4: *Plano seccionado por três retas, dividindo-o em sete regiões.*

O quarto aumenta em quatro o número de regiões, se cortar as três anteriores em pontos distintos.

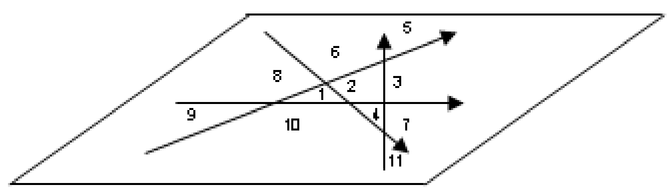

Figura 5: *Plano seccionado por quatro retas, dividindo-o em onze regiões.*

Assim, os alunos perceberam que para obter o maior número de regiões possíveis no plano, a reta seguinte deveria intersectar as retas já existentes criando uma nova região após cada intersecção com cada uma das retas traçadas.

Denotando por r(n) o número de regiões em que o plano fica dividido usando n retas, de maneira recursiva podemos escrever:

$$r(1) = 2 \text{ e } r(n) = n + r(n-1)$$

Desta forma, temos que:

Para n-1: $r(n-1) = n-1+r(n-2) = n+(n-1)+r(n-2).$

Para n-2: $r(n-2) = n+(n-1)+(n-2)+r(n-3).$

Estendendo o processo até r(1), teremos:

$r(n) = n+(n-1)+(n-2)+...+2+r(1)$. Mas $r(1)=2$, então temos:

$r(n) = n+(n-1)+(n-2)+...+2+2 = r(n) = n+(n-1)+(n-2)+...+2+(1+1)$

Observe que as n primeiras parcelas representam a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, com $a_0 = 1$ e razão 1. Logo, $r(n) = \frac{n(n+1)}{2}+1$. Ou seja, $r(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$. Assim, o número máximo de regiões em que n retas dividem um plano, é dada por: $r(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Uma outra abordagem para o problema da Pizza de Steiner foi feita em sala de aula da maneira exposta a seguir.

Com os dados dos experimentos montamos a tabela abaixo.

n	$r(n)$
1	2
2	4
3	7
4	11

Tabela 4: Relação entre o número de retas e o número de regiões do plano.

Ao observá-la, percebeu-se que o número de retas n, que formava uma progressão aritmética, estava associado ao número $r(n)$ de regiões do plano que formava uma outra progressão aritmética, de segunda ordem, ou seja, uma seqüência em que as diferenças entre seus termos formam uma progressão aritmética. Logo $r(n+1) = r(n) + n + 1$ é dado por uma função polinomial do segundo grau, ou seja, $r(n) = an^2 + bn + c$.

Assim, a partir dos dados $r(1) = 2$, $r(2) = 4$ e $r(3) = 7$ montamos o sistema $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=7 \end{cases}$ que resolvendo, encontramos $a = b = 1/2$ e $c = 1$.

Portanto, temos que $r(n) = \dfrac{n^2+n}{2} + 1$, ou seja, $r(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

Verificar que a fórmula é válida para os casos em que $n = 1,2,3,4$ é simples. Mas será que vale para todo natural? Vamos à prova por indução.

4.3.2. A prova formal.

Uma prova por indução apresentada por HEFEZ (2009 p.38-39) é a seguinte:

Sendo $r(n)$ o número máximo de regiões que podemos dividir o plano com n retas, vamos provar por indução que $r(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Dado que $r(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, temos que:

Para *n* = 1, temos que $r(1) = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$. Ou seja, com apenas um corte, obtemos dois pedaços. Logo, a fórmula está correta.

Admitamos agora que, para algum valor de *n*, a fórmula para $r(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ esteja correta. Vamos mostrar que para $r(n+1)$ a fórmula também está correta.

Supondo que, com *n* cortes, foi obtido o número máximo $r(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ de pedaços e queremos fazer mais um corte, de forma que se tenha o maior número de pedaços possível. Isso só será possível se o $(n+1) - ésimo$ corte dividir cada um dos *n* cortes anteriores em pontos que não são de interseção de outros dois cortes.

Por outro lado, se o $(n+1) - ésimo$ corte encontra todos os *n* cortes anteriores, ele irá produzir *n* + 1 novos pedaços: o corte começa em um determinado pedaço e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço, e assim sucessivamente, até encontrar o *n*-ésimo corte separando o último pedaço em que entrar em dois.

Assim, são obtidos *n* + 1 pedaços a mais dos que já existiam.

Logo, $r(n+1) = r(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$

Mostrando assim, que a fórmula está correta para $n+1$ cortes.

5. Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi investigar e entender, a partir de experiências em sala de aula, como o princípio da indução finita pode ser levado aos alunos de ensino médio a fim de que possam ser introduzidos às provas e demonstrações. Escolheu-se o método da indução pois é considerado um princípio simples e de enorme importância, permitindo analisar situações e, a partir disso, validar proposições para todos os números naturais.

Porém, para conseguir trabalhar o princípio da indução finita, assim como a possibilidade de criar as tais conjecturas, é necessário que tenhamos professores mais preparados e ambientados com provas e demonstrações e, enfatizamos ainda, que as atividades propostas com o professor como mediador em sala de aula são elementos fundamentais para que a aprendizagem seja matematicamente significativa.

Para realização deste trabalho foi realizada uma pesquisa no campo educacional que resultou em dois capítulos, os capítulos dois e três, que permitem ao professor entender melhor o Princípio de Indução Finita e enxergar as dificuldades de formação da maioria dos professores desde o ensino na graduação.

O capítulo quatro apresenta uma proposta de como introduzir o princípio da indução finita no ensino médio de forma lúdica, utilizando-se de jogos na tentativa de tornar o método indutivo mais atraente, fazendo com que os alunos ao analisar os caminhos, conjecturem e criem soluções, preparando-os dessa maneira, para a construção de demonstrações formais.

A principal dificuldade encontrada para a realização deste trabalho, foi a falta de material didático específico que abordasse o principio da indução. Como o assunto não faz parte do programa oficial do ensino médio, não é possível encontrar material disponível que incentive o ensino de indução nesta importante etapa da educação básica.

Ao realizar este trabalho, o objetivo era introduzir o princípio da indução no ensino médio, mas, nos deparamos com o fato de que os parâmetros curriculares nacionais (PCNs) bem como as orientações curriculares (OCs) tem as suas propostas quase esquecidas, uma vez que as fórmulas são simplesmente apresentadas, desprezando assim, a capacidade investigativa, e de conjecturar, durante toda a educação básica.

O que predomina nas salas de aula é uma matemática voltada simplesmente para encontrar resultados a partir de mecanismos decorados, ignorando a capacidade crítica do aluno de discernir o caminho que deve ser utilizado.

Por entendermos que é necessário um novo caminho, escrevemos este trabalho que contém um capítulo onde o professor possa se conscientizar de que o principio da indução finita não deve ser um processo mecânico, mas que existe a necessidade de, antes de provar uma conjectura, analisar o problema e criar um modelo e, não observar apenas o mecanismo deixando de lado o significado do modelo que se quer validar. Buscar outros mecanismos para facilitar o aprendizado é uma forma de mostrar aos professores de ensino básico, que não se deve restringir apenas às aulas expositivas, é necessário que busquemos outras maneiras para abordar o conteúdo sempre que possível.

Estabelecida esta etapa de conscientização dos professores, iniciamos o que seria nosso objetivo: criar e propor atividades de modo a tornar possível a introdução do princípio da indução com a utilização de jogos matemáticos, na intenção de que, de maneira lúdica as atividades se tornassem mais divertidas.

Assim, pretendemos com o desenvolvimento das atividades deste trabalho proporcionar uma reflexão sobre as possibilidades de problematização com o uso de jogos, especificamente no estudo de indução, pois, a partir da descrição e análise da situação de jogo, permitindo que os alunos criem maneiras de chegar às suas próprias respostas ao invés de usar fórmulas prontas ou decoradas.

Com as atividades propostas, podem ser trabalhados os conceitos de seqüências numéricas, em particular o de progressão geométrica, e ainda observar o crescimento de funções exponenciais. Ressaltamos que com as experiências em sala de aula com as atividades realizadas limitou-se em criar um modelo a partir de dados empíricos e, em seguida apresentamos a prova formal dos modelos criados a partir dos experimentos. Demonstrar que a fórmula da torre de hanói nos dá o número mínimo de movimentos que devem ser realizados com os n discos é uma proposta sugerida para trabalhos futuros.

De modo geral, os alunos atribuíram significado matemático ao método indutivo e, sem maiores problemas puderam notar sua importância e aplicabilidade. A partir disso, entendemos a necessidade de aprofundar as pesquisas com jogos que possam ser levados para as salas de aula e seus efeitos na aprendizagem.

Nossa proposta, abordar a indução por meio de jogos, foi satisfatoriamente respondida, pois os alunos reconheceram que os jogos auxiliam na compreensão do conteúdo proposto. Isto mostra que as atividades lúdicas podem ser encaradas como ferramenta para o aprendizado de indução finita no ensino médio, obtendo melhoras significativas no desempenho das atividades. Em outras palavras, os jogos atuaram auxiliando na compreensão do processo relacionado ao conteúdo, indução finita, quando os problemas contextualizados foram apresentados, de forma concreta.

Por fim, esperamos que este trabalho contribua significativamente para uma reflexão sobre o princípio da indução finita, a fim de que esse assunto quando abordado em sala de aula, não seja trabalhado apenas como um processo mecânico, mas que seja entendido que este conceito pode ser usado em diversas situações de provas e demonstrações matemáticas com os alunos de ensino médio.

6. Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Prova e Demonstração em Matemática: Problemática de seus Processos de Ensino e Aprendizagem*, GT: Educação Matemática / n.19, PUC - SP.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio*, V. 2, Brasília, 2006.

BRASIL. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática, 3º e 4º ciclos*. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

DEUS, Angelica Karina de, ANDRADE, José Antônio Araújo, *Demonstrações: Uma Proposta Para o Ensino-Aprendizagem de Algebra*, Artigo - XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Recife, Pernambuco. Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2151/935, acessado em 16 de janeiro de 2013 às 22:49 hs.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. *Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar.* Pro-Posições, v. 4, n.1, pp. 89, março, 1993.

GARNICA, A. V. M. *As Demonstrações em Educação Matemática: em ensaio*. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 15, nº. 18, 2002, p. 73 a 81.

GERÔNIMO, J. R., Franco, V.S. (2006). *Fundamentos de Matemática: uma introdução à Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções*.Eduem, Maringá-PR.

HEFEZ, Abramo. *Indução Matemática.* Programa de Iniciação Científica da OBMEP Vol. 4, em http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654 acessado em 10 de janeiro de 2013 às 23:21.

LAKATOS, I. *A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LIMA, Elon L. et. al., *A Matemática do Ensino Médio*. Vol 1, SBM, Rio de Janeiro, RJ.

LIMA, Elon L. *O Princípio da Indução. Eureka,* nº 3, 1998.

MORGADO, José. *Indução e Indução Matemática*, Boletim da SPM – nº 17, junho de 1990. – Centro de Matemática – Faculdade de Ciências do Porto.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RESENDE, M. R, *Re-Significando A Disciplina Teoria Dos Números Na Formação Do Professor De Matemática Na Licenciatura* em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/significando.pdf, acessado às 16:33 hs de 22 de janeiro de 2013.

RUSSEL, B. *Os problemas da filosofia*. Trad. Jaimir Conte. Florianópolis: 2005, cap. 6. Disponível em http://www.cfh.ufsc.br/~conte/russell.html>. Acessado em 22 de janeiro de 2013.

SILVA, E. M. Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução matemática. 2010. Dissertação (Mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.

SILVA, E. M., SAVIOLI, Angela M. P das D. *O Conceito de Indução Finita na Compreensão de Estudantes de Um Curso de Matemática*, Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, ISSN 1982-5153, v.5, n.3, p.127-148, novembro 2012.

SIMMONS. G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1. São Paulo: Editora Makron Books do Brasil, 1997.

SMOLE, Kátia et al. *Cadernos do Mathema*: Jogos de Matemática de 1º ao 5º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007

VARELLA, Marcia, *Prova e demonstração na Geometria Analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos",* Dissertação de Mestrado, 2010, PUC – SP.

VELOSO, A.J.B, *Acerca da Indução*, 2004 - Disponível em <cfcul.fc.ul.pt/equipa/2_cfcul_nao.../acercadainducao.doc>. Acessado em 22 de janeiro de 2013.