Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Ladrilhamentos no plano e pentaminós: uma proposta para o ensino da Geometria no Ensino Médio

Paulo Roberto Pola Campos

Orientadora: Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge

São José dos Campos

Fevereiro, 2020

PROFMAT

Título: *Ladrilhamentos no plano e pentaminós: uma proposta para o ensino da Geometria no Ensino Médio*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Fevereiro, 2020

Campos, Paulo Roberto Pola

Ladrilhamentos no plano e pentaminós: uma proposta para o ensino da Geometria no Ensino Médio, Paulo Roberto Pola Campos – São José dos Campos, 2020.

xii, 77f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Tiling in the plane and pentaminoes: a proposal for teaching Geometry in High School

1. Geometria. 2. Ladrilhamento. 3. Pentaminós. 4. Ângulos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de Departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

PAULO ROBERTO POLA CAMPOS

LADRILHAMENTOS NO PLANO E PENTAMINÓS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Presidente da Banca: Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge

Grasiele C. Jorge

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Agnaldo José Ferrari

Profª. Drª. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Profª. Drª. Flávia Cristina Martins Queiroz Mariano

Data da defesa: 17 de fevereiro de 2020

"Do or do not. There is no try"(Yoda).

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente pela minha vida e pela oportunidade de realizar esse trabalho.

À minha noiva Juliana, que me apoiou e me incentivou durante todo o período de estudo, sendo sempre minha fonte de inspiração.

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim.

À Profª. Drª. Grasiele Cristiane Jorge, pela orientação, sempre disposta a me ajudar, compartilhando conhecimento, fornecendo materiais e principalmente pela paciência para me acompanhar durante o desenvolvimento de toda a dissertação.

A todos os professores do programa PROFMAT e aos amigos de curso, todos foram essenciais para meu sucesso.

E, por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro que me viabilizou a realização do curso.

RESUMO

Neste trabalho estudamos ladrilhamentos no plano, complementando com um estudo da área de algumas figuras planas. Apresentamos e discutimos diferentes padrões de ladrilhamentos, demonstrando os diferentes tipos possíveis de ladrilhamentos no plano por polígonos regulares. Apresentamos também o conceito do pentaminós e como podemos utilizá-los para uma atividade lúdica de pavimentação de diferentes regiões.

Como proposta didática, apresentamos uma sequência que tem como público alvo alunos do Ensino Médio. Tal sequência propõe atividades que objetivam ampliar a visão dos alunos sobre a Matemática, apresentando aplicações de resultados comuns à Educação Básica na Geometria.

Palavras-chave: 1. Geometria. 2. Ladrilhamento. 3. Pentaminós. 4. Ângulos.

ABSTRACT

In this work we study tiling in the plane, complementing with a study of the area of some plane figures. We present and discuss the different tiling patterns, demonstranting the different types of tiling in the plane by regular polygons. We also present the concept of pentaminoes and how we can use them for a playful activity of paving different areas.

As a didactic proposal, we present a sequence that targets high school students. This sequence proposes activities that aim to broaden students' viem of Mathematics, presenting application of results common to basic education in Geometry.

Keywords: 1. Geometry. 2. Tiling. 3. Pentaminoes. 4. Angles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática tem uma função essencial na formação do aluno, pois é responsável pelo desenvolvimento do raciocínio lógico e da compreensão de vários fenômemos que estão presentes no dia a dia das pessoas. Ela recebe um destaque nas escolas, pois sua compreensão proporciona uma condição fundamental de vivência social devido às suas diversas aplicabilidades em diferentes sentidos. Todos os conteúdos matemáticos são raciocínios desenvolvidos por homens e mulheres que desejam compreender melhor o mundo em que vivem, e é importante ressaltar que, principalmente para os educadores, se faz necessária uma reflexão crítica sobre a contextualização dos conceitos, dos significados e da proximidade da Matemática com o cotidiano dos alunos.

Conforme descrito em [3, p. 6], sobre os objetivos do Ensino Médio: "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico."

A Matemática é separada em várias áreas e uma delas, muito importante e presente no nosso cotidiano, é a Geometria, que tem sua origem atrelada à necessidade de se realizar medições, comparações e trabalhar com dimensões. Entre os mais diversos estudos realizados sobre Geometria, talvez o mais importante seja o feito por Euclides, em sua obra Os Elementos, onde são apresentados axiomas e postulados que servem como base para a construção da Geometria Euclidiana, que também é a base do estudos deste trabalho.

A Geometria Euclidiana estabelece regras para estudos que contém propriedades de figuras planas, que devem receber uma atenção especial. E conforme Barbosa em [1, p. 14]: "Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com certos conjuntos de elementos (pontos, retas e planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, os quais são chamados de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinado as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço."

Durantes meus anos lecionando na rede pública, percebi a dificuldade e a resistência que os alunos apresentam em relação ao aprendizado da Matemática. Devido a isso, o tema desse estudo foi selecionado com a finalidade de propor atividades lúdicas e diferenciadas para que os alunos tenham um maior interesse, tentando deixar a aprendizagem menos abstrata.

Neste trabalho exploramos o conceito de ladrilhamento ou pavimentação, tema que está muito presente no nosso cotidiano mesmo que não notemos ou não observemos com uma visão mais matemática em si. Vimos com detalhes como polígonos regulares podem ser distribuídos para cobrir o plano [5]. Além disso, para complementar nosso estudo abordamos as áreas de alguns polígonos regulares e criamos um jogo chamado “Batalha naval das áreas”, onde os alunos precisarão calcular áreas de polígonos convexos, não necessariamente regulares, no plano cartesiano. Por fim, trazemos os poliominós e um jogo envolvendo tais peças para ladrilhar determinadas regiões retangulares [7].

As atividades propostas são direcionados principalmente para as turmas de Ensino Médio devido ao conteúdo que será discutido e ao conhecimento prévio que algumas atividades exigem. A metodologia proposta foi desenvolvida para que possa ser facilmente utilizada em sala de aula de forma bem dinâmica quando aplicada pelo professor.

É importante mencionar que esse tipo de atividade tem intenção de entusiasmar os alunos, motivando-os e fazendo com que o interesse pela Matemática seja desenvolvido transformando o conteúdo de uma aula, muitas vezes complicado de se entender, em algo visivelmente mais fácil de se enxergar e absorver. Fazer com que os alunos se envolvam no seu próprio aprendizado é algo que todos os educadores buscam, porém nem sempre é algo simples de se alcançar, por isso uma boa opção é utilizar atividades lúdicas.

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos que serão abordados neste trabalho, como ângulos e suas características, polígonos e suas classificações, ângulos internos de um polígono e o número de diagonais de um polígono. Alguns termos matemáticos e nomenclaturas também serão mencionados e explicados com finalidade de facilitar o entendimento da leitura.

No Capítulo 2, tratamos o conceito de área de de diversos polígonos. Teremos aqui as fórmulas apresentadas no ensino regular e que de maneira comum são trabalhadas em sala de aula. Apresentamos também o método para o cálculo de áreas para polígonos convexos no plano cartesiano.

No Capítulo 3, abordamos o conceito de ladrilhamento e discutimos os seus diferentes tipos via polígonos regulares.

No Capítulo 4, apresentamos os poliominós, com destaque para pentaminós. Apresentamos uma aplicação de atividade sobre pentaminós que foi realizada com alunos de uma escola estadual em que leciono. Fornecemos neste trabalho um gabarito para impressão e montagem de um kit dos diferentes tipos de pentaminós.

No Capítulo 5, propomos uma sequência didática envolvendo os conceitos de ladrilhamentos e áreas que estão presentes nesse trabalho, que pode ser utilizada de forma sequencial ou de maneira individual. A primeira aula aborda o conceito de polígonos regulares e seus ângulos internos. Na segunda aula vamos explorar o conceito de área de figuras planas. A terceira aula aborda o conceito de cálculo de áreas de polígonos convexos no plano cartesiano. A quarta aula envolve o conceito de ladrilhamentos bem-comportados. Por fim, na quinta aula apresentamos o conceito de pentaminós e propomos alguns desafios sobre eles.

O capítulo da conclusão traz algumas considerações finais sobre este trabalho e a experiência aplicada com os alunos, com observações e algumas sugestões voltadas para o professor.

As definições, os resultados e as demonstrações apresentadas neste trabalho estão presentes nas referências [1, 5, 6, 7, 8, 9]. Algumas das figuras utilizadas também encontram-se nessas obras.

1

CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos de Geometria Plana necessários para nosso estudo e que também serão utilizados nas atividades didáticas. As referências aqui utilizadas foram [1, 6, 9].

1.1 CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Em nosso texto admitimos que o leitor esteja familiarizado com os elementos geométricos elementares do plano: ponto e reta; e também com o conceito de ângulos.

Utilizaremos letras maiúsculas para representar pontos no plano: O, A, B, C, etc. Se A e B são pontos distintos, a reta que os contém será citada como reta r_{AB}, a semirreta que se inicia em A e passa por B por s_{AB} e o segmento com extremos A e B por AB.

Um ângulo determinado pelas semirretas s_{OA} e s_{OB} será denotado por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$. As unidades de medida para ângulos são grau e radiano. Neste texto vamos utilizar somente o grau, representado pelo símbolo º. Utilizaremos em algumas situações letras gregas como α, β e θ para representar ângulos e quando nenhum outro ângulo exibido tiver o mesmo vértice A que um dado ângulo considerado, iremos utilizar apenas a letra do vértice para representá-lo, isto é, $\widehat{A}$.

1.1.1 *Ângulos*

Buscando facilitar a leitura e o estudo desse trabalho, vamos relembrar o conceito de ângulo e algumas de suas classificações e características.

Definição 1.1. *Em um plano, dadas duas semirretas de mesma origem s_{OA} e s_{OB}, o ângulo, denotado por $A\hat{O}B$ é a inclinação entre essas duas semirretas. A origem comum é chamada de vértice do ângulo.*

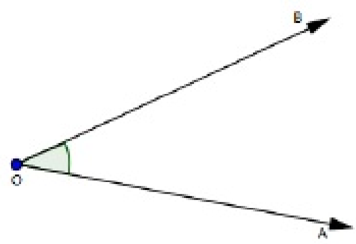

Figura 1: Representação de um ângulo

Axioma 1.2. *[1] É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre esses números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.*

A seguir apresentaremos algumas definições de ângulos de acordo com sua medida.

Definição 1.3. *Um ângulo é classificado como reto quando sua medida é de exatamente 90^o.*

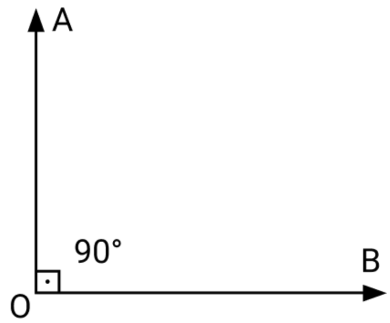

Figura 2: Representação de um ângulo reto

Definição 1.4. *Um ângulo é classificado como raso quando sua medida é de exatamente 180^o.*

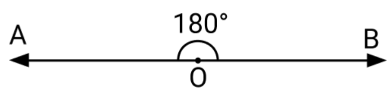

Figura 3: Representação de um ângulo raso

Definição 1.5. *Um ângulo é classificado como nulo quando sua medida é de exatamente 0^o.*

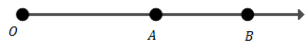

Figura 4: Representação de um ângulo nulo

Definição 1.6. *Um ângulo é classificado como agudo quando sua medida for menor que um ângulo reto e maior que um ângulo nulo, isto é, menor que 90º e maior que zero.*

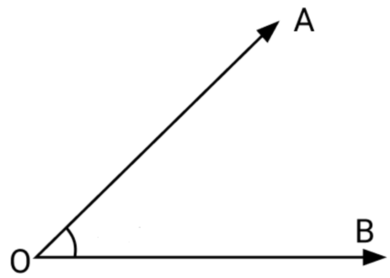

Figura 5: Representação de um ângulo agudo

Definição 1.7. *Um ângulo é classificado como obtuso quando sua medida for maior que um ângulo reto e menor que um ângulo raso, isto é, maior que 90º e menor que 180º.*

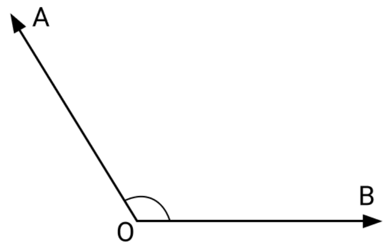

Figura 6: Representação de um ângulo obtuso

Definição 1.8. *Dizemos que dois ângulos distintos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida. Neste caso escrevemos $\widehat{A} = \widehat{B}$.*

Definição 1.9. *Dois ângulos quaisquer α e β são ditos complementares se a soma de suas medidas for um ângulo reto, isto é, $\alpha + \beta = 90^o$.*

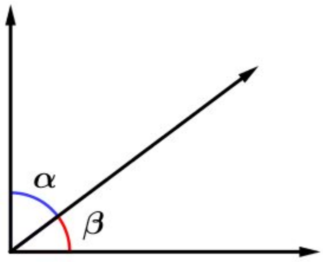

Figura 7: Representação de ângulos complementares

Definição 1.10. *Dois ângulos quaisquer α e β são ditos suplementares se a soma de suas medidas for um ângulo raso, isto é, $\alpha + \beta = 180^o$.*

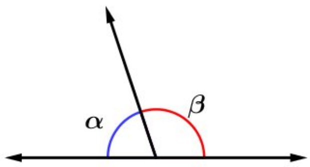

Figura 8: Representação de ângulos suplementares

1.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definição 1.11. *Um triângulo é uma figura plana formada por três pontos que não estão na mesma reta e pelos três segmentos determinados por esses pontos. Os três pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos, lados do triângulo. Usaremos a notação ABC para o triângulo cujos vértices sejam A, B e C.*

Definição 1.12. *Dizemos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando a medida de AB é igual a medida de CD e, neste caso, usaremos a notação $AB = CD$.*

Definição 1.13. *Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Os triângulos apresentam três casos de congruência que serão representados por **LAL** (lado, ângulo, lado), **LLL** (lado, lado, lado) e **ALA** (ângulo, lado, ângulo). O primeiro caso de congruência **LAL** será introduzido pelo axioma a seguir.

Axioma 1.14. *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF, AC = EG$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$, então, $ABC = EFG$.*

Observe que, de acordo com a definição (1.13), para verificarmos se dois triângulos são congruentes, temos que verificar seis relações: congruência dos três lados e congruência dos três ângulos correspondentes. O axioma anterior afirma que é suficiente verificar apenas três delas, ou seja:

$$\begin{array}{l} AB = EF \\ AC = EG \\ \widehat{A} = \widehat{E} \end{array} \Longrightarrow AB = EF, BC = FG, AC = EG, \widehat{A} = \widehat{E}, \widehat{B} = \widehat{F}, \widehat{C} = \widehat{G}.$$

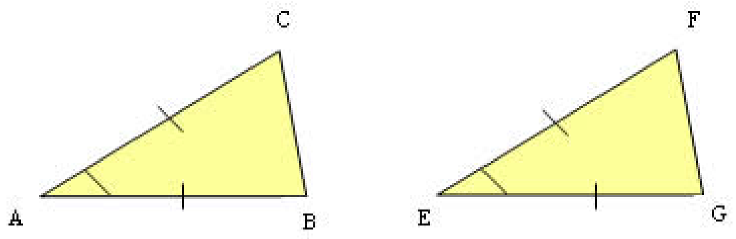

Figura 9: Congruência pelo caso LAL

Teorema 1.15. *Considere dois triângulos ABC e EFG, se os lados AB e EF forem congruentes, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$ forem congruentes e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{F}$ forem congruentes, isto é, $AB = EF$, $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$, então, os triângulos são congruentes, ou seja, $ABC = EFG$.*

Demonstração: Considere dois triângulos ABC e EFG, tais que $AB = EF, \widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$. Seja D um ponto da semirreta s_{AC}, onde $AD = EG$. Compare os triângulos ABD e EFG. Como $AD = EG, AB = EF$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$, pelo axioma 1.14, concluímos que $ABD = EFG$. Portanto, tem-se que $A\widehat{B}D = \widehat{F}$. Mas, por hipótese, $\widehat{F} = A\widehat{B}C$. Logo, $A\widehat{B}D = A\widehat{B}C$. Consequentemente as semirretas s_{BD} e s_{BC} coincidem. Logo, o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, os triângulos ABC e ABD também coincidem. Como já provamos que $ABD = EFG$, então, $ABC = EFG$. ■

Esse é o nosso *segundo caso de congruência de triângulos*, o caso **ALA**.

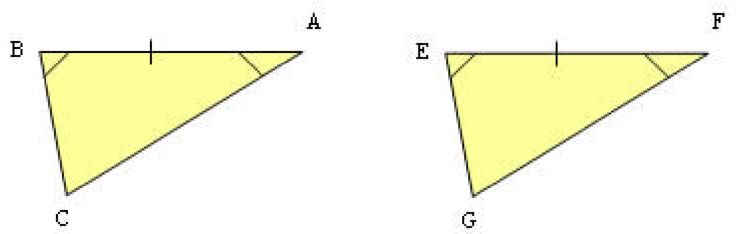

Figura 10: Congruência pelo caso ALA

Teorema 1.16. *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então, os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Considere dois triângulos ABC e EFG, de tal forma que $AB = EF, BC = GF$ e $AC = EG$. Construa, a partir da semirreta s_{AB} e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo $\widehat{E}$. No lado deste ângulo que não contém o ponto B, marque um ponto D, tal que $AD = EG$ e ligue D a B. Por hipótese temos que $AB = EF$, e por construção temos que $AD = EG$ e $D\widehat{A}B = \widehat{E}$, então, $ABD = EFG$. Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace CD. Segue-se que $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}B = D\widehat{C}B$ e, logo, que $A\widehat{D}B = A\widehat{C}B$. Pelo primeiro caso de congruência de triângulos, concluímos que $ABD = ABC$. Como já tinhamos provado que $ABD = EFG$, então temos que $ABC = EFG$. ∎

Esse é o nosso *terceiro caso de congruência de triângulos*, o caso **LLL**.

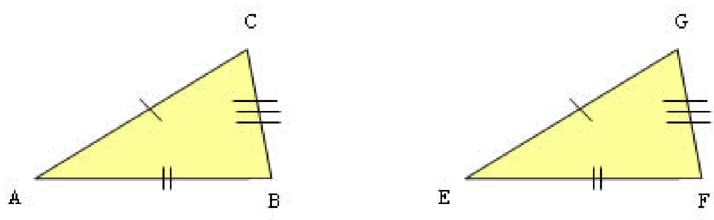

Figura 11: Congruência pelo caso LLL

1.3 RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Para nos auxiliar em algumas demonstrações nos próximos capítulos, vamos apresentar o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal.

Teorema 1.17. *Dadas duas retas paralelas r e s, e uma transversal t que as corta, teremos quatro ângulos formados por r e t que serão correspondentes em s. Como r e s são paralelas, seu ângulos correspondentes são congruentes.*

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada em [1, p. 103].

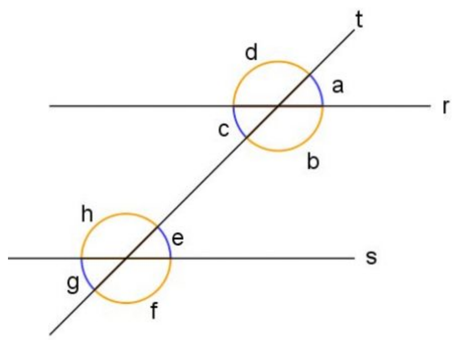

Figura 12: Paralelas cortadas por um transversal

Definição 1.18. *Dois ângulos são ditos opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.*

Teorema 1.19. *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração: Considere os ângulos a, b, c e d da Figura 12. Podemos observar que a e b são suplementares, logo, $a + b = 180^o$. Novamente, podemos notar que a e d também são suplementares, logo, $a + d = 180^o$. Temos então que $a = 180^o - b = 180^o - d$, logo podemos concluir que $b = d$. Agora podemos observar que c é suplementar a d e a também é suplementar a d, portanto, concluímos que $a = c$. ■

Definição 1.20. *Dadas duas retas paralelas distintas cortadas por uma transversal, ângulos alternos internos são aqueles que estão na região interna das retas paralelas e em lados alternados da reta transversal.*

Teorema 1.21. *Dois ângulos alternos internos são congruentes.*

Demonstração: Considere o ângulo a da Figura 12, pelo teorema 1.19 temos que $a = c$, pois são opostos pelo vértice. Novamente considerando o ângulo a, pelo teorema 1.17 temos que $a = e$, pois são correspondentes. Como $e = a = c$, concluímos que $c = e$. ■

1.3.1 *Polígonos*

Definição 1.22. *Um polígono é uma figura plana formada por segmentos sequenciais* $R_1R_2, R_2R_3, R_3R_4, \cdots, R_{n-1}R_n, R_nR_1$, *com* $n \geq 3$, *de tal forma que os segmentos satisfazem as propriedades a seguir:*

(i) Dois segmentos que possuam uma extremidade comum estão contidos em retas distintas;

(ii) Dois segmentos distintos do poligono só se interceptam em uma única extremidade da figura.

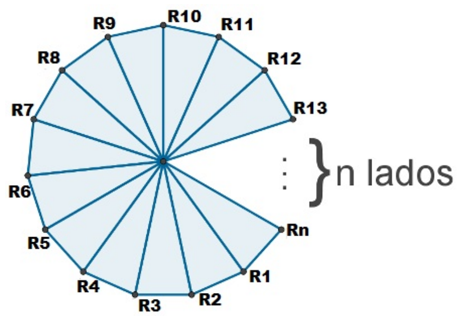

Figura 13: Polígono de n lados

Definição 1.23. *Denotamos o polígono determinado pelos segmentos* R_1R_2, R_2R_3, $R_3R_4, \ldots, R_{n-1}R_n, R_nR_1$ *por* $R_1R_2R_3R_4 \cdots R_n$ *e o chamamos de n-ágono. Os pontos* $R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n$ *são chamados de vértices do polígono e os segmentos* R_1R_2, $R_2R_3, \ldots, R_nR_1$ *lados do polígono.*

Os polígonos podem ser classificados quanto ao número de lados, quanto à congruência de seus lados e quanto a sua forma em relação a ser convexo ou não.

Definição 1.24. *Um polígono é classificado como convexo se, e somente se, dados dois pontos quaisquer em seu interior, o segmento que os une está totalmente contido em seu interior. Caso contrário, dizemos que o polígono é não-convexo.*

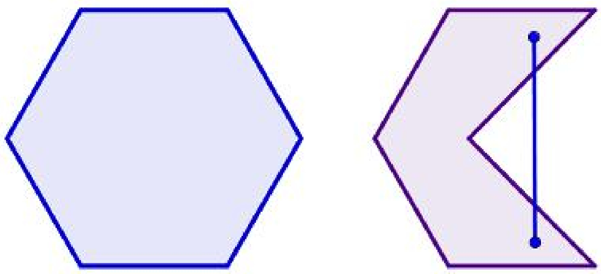

Figura 14: Exemplo de polígono convexo e não-convexo

Os polígonos convexos são nomeados conforme o número de lados que possuem. A seguir vamos apresentar uma tabela contendo a classificação de alguns polígonos em relação a sua quantidade de lados.

Tabela 1: Nome dos polígonos

Número de ângulos ou lados	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero
4	quadrângulo ou quadrilátero
5	pentágono ou pentalátero
6	hexágono ou hexalátero
7	heptágono ou heptalátero
8	octógono ou octolátero
9	eneágono ou enealátero
10	decágono ou decalátero
11	undecágono ou undecalátero
12	dodecágono ou dodecalátero
20	icoságono ou icolátero

Existem vários outros polígonos que não estão presentes nessa tabela, mas aqui apresentamos os mais comuns no ensino regular e os que iremos utilizar com mais frenquência no nosso estudo sobre ladrilhamentos.

Os polígonos convexos também são classificados quanto a medida de seus lados. Essa classificação é simples de se observar, podendo ter apenas duas variações, regulares ou irregulares.

Definição 1.25. *Dizemos que um polígono convexo é regular se, e somente se, todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos internos são congruentes entre si. Caso isso não ocorra, o polígono é classificado como irregular.*

Definição 1.26. *Quadrado é um quadrilátero que possui os 4 lados iguais e os quatro ângulos medindo* 90^o *graus cada.*

Definição 1.27. *Triângulo equilátero é um triângulo que possui os 3 lados iguais e os três ângulos medindo* 60^o *graus cada. Triângulo retângulo é um triângulo que possui um ângulo reto, ou seja, de* 90^o *graus. Triângulo isósceles é um triângulo que possui dois lados com a mesma medida.*

Teorema 1.28. *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo será sempre igual a* 180^o.

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C, trace uma reta paralela ao segmento AB. Numere os ângulos formados com vértice C, como indicado na figura seguinte.

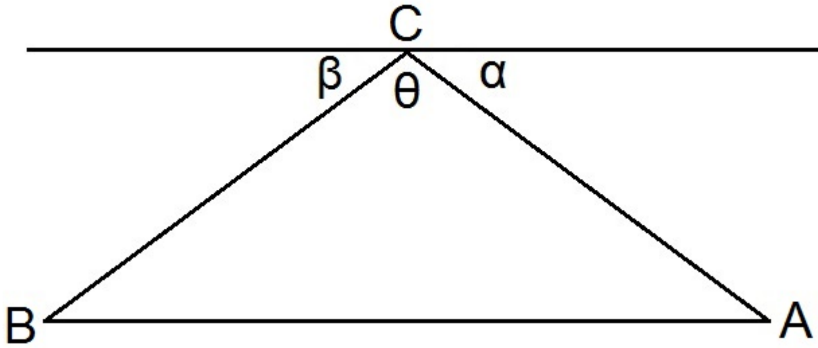

Figura 15: Ângulos de um triângulo

Tem-se $(\alpha + \beta + \theta) = 180^o$. Como AC e BC são transversais às duas paralelas, podemos afirmar pelo caso de ângulos alternos internos que $\alpha = \widehat{A}$ e $\beta = \widehat{B}$. Portanto, $\widehat{A} + \widehat{B} + A\widehat{C}B = \alpha + \beta + \theta = 180^o$. ■

A partir desse teorema podemos obter um importante corolário.

Corolário 1.29.

a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90^o.

b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60^o.

c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

Definição 1.30. *Uma diagonal de um polígono* $A_1A_2 \cdots A_n$ *é qualquer um dos segmentos* A_iA_j*, com* $i \neq j$*, que não seja um lado do mesmo.*

É muito importante entendermos algumas características presentes nos diferentes polígonos que iremos estudar. Os dois resultados a seguir envolvem o número de diagonais presentes em um polígono e a soma de seus ângulos internos. Ambos são diretamente relacionados ao número de lados presentes no polígono.

Proposição 1.31. *Todo n-ágono convexo possui exatamente* $n(n-3)/2$ *diagonais.*

Demonstração: Para $n = 3$ o resultado é verdadeiro, uma vez que triângulos não têm diagonais e $n(n-3)/2 = 0$ para $n = 3$. Suponha, pois, n≥4. Unindo o vértice A_1 aos $n-1$ vértices restantes $A_2, \cdots, A_n$ obtemos $n-1$ segmentos; destes, dois são lados (A_1A_2 e A_1A_n) e os $n-3$ restantes ($A_1A_3, \cdots, A_1A_{n-1}$) são diagonais.

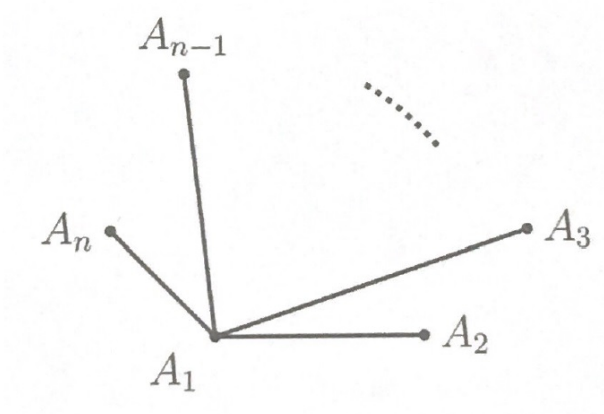

Figura 16: Representação de diagonais

Como um raciocínio análogo é válido para qualquer outro vértice, segue que, de cada vértice do polígono, partem exatamente $n-3$ diagonais. Isso nos daria um total de $n(n-3)$ diagonais. Daria, porque cada diagonal A_iA_j foi contada, da maneira acima, duas vezes: uma quando contamos as diagonais que partem do vértice A_i e outra quando contamos as que partem do vértice A_j. Portanto, para obter o número correto de diagonais do polígono, devemos dividir por 2 o total $n(n-3)$, obtendo , então, $n(n-3)/2$ diagonais. ∎

Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo será sempre igual a 180^o, a partir de tal afirmação podemos determinar a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo, basta analisarmos quantos triângulos são possíveis formar utilizando os lados desse polígono.

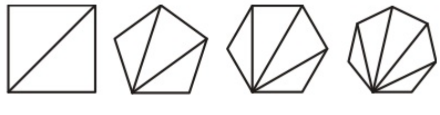

Figura 17: Diagonais de alguns polígonos

Proposição 1.32. *A soma dos ângulos internos para qualquer polígono convexo de n lados pode ser expressa por* $S_n = (n-2) \cdot 180^o$.

Demonstração: Para qualquer polígono convexo com $n > 3$ lados, podemos decompô-lo em $n-2$ triângulos, traçando diagonais a partir de um vértice qualquer (ver Figura 17). Existe uma relação entre o número de lados de um polígono e a quantidade de triângulos que podemos formar unindo vértices não adjacentes. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a soma das medidas dos ângulos internos de todos os $n-2$ triângulos que o compõe, e como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é igual a 180º, temos que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo será sempre $S_n = (n-2) \cdot 180^{\text{o}}$. ∎

Tabela 2: Soma dos ângulos internos

Número de lados	Soma dos ângulos internos
3	180º
4	360º
5	540º
6	720º
7	900º
8	1080º
9	1260º
10	1440º

Proposição 1.33. *Um ângulo interno θ de qualquer polígono regular de n lados vale $\theta = \frac{(n-2)\cdot 180^{o}}{n}$ e é sempre menor que 180^{o}.*

Demonstração: Primeiramente, basta notar que em polígonos regulares todos os ângulos internos são iguais e dividir a fórmula da soma por n. Agora, note que $\frac{(n-2)180^{\text{o}}}{n} = \frac{180^{\text{o}}n}{n} - \frac{360^{\text{o}}}{n} = 180^{\text{o}} - \frac{360^{\text{o}}}{n}$. Para valores de n suficientemente grandes, $\frac{360^{\text{o}}}{n}$ é um número suficientemente próximo, porém diferente, de zero. ∎

2

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

A área de uma região limitada pode ser expressa como um número positivo indicando o espaço que ela ocupa no plano. Alguns postulados sobre áreas se fazem necessários para nosso estudo. Para este capítulo utilizamos as referências [1, 6, 8, 9].

2.1 CONCEITO DE ÁREA

Medir a área de uma região significa compara-lá com uma superfície adotada como unidade.

Definição 2.1. *A área de um polígono é um número real positivo associado ao polígono de forma que:*

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono maior contém outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4. A área de um quadrado de lado $1cm$ *é igual a* $1cm^2$.

Vamos apresentar agora fórmulas fechadas para calcular as áreas das figuras mais estudadas no Ensino Médio. Inicialmente vamos apresentar a área de alguns quadriláteros, em seguida do triângulo e por fim hexágono regular. Alguns polígonos apresentam mais de uma fórmula para calcular sua área, como por exemplo o triângulo. Para isso, vamos dividir o formulário de forma que o estudo fique mais simples.

2.2 ÁREA DE TRIÂNGULOS, QUADRILÁTEROS E HEXÁGONOS REGULARES

Definição 2.2. *Chamamos de quadrilátero o polígono formado por quatro lados, congruentes ou não, e consequentemente quatro ângulos internos que somados formam 360º. Alguns quadriláteros recebem nomes especias por suas particularidades, são eles:*

- *Trapézio: Possui pelo menos um par de lados opostos paralelos.*
- *Paralelogramos: Os lados opostos são paralelos.*
- *Retângulos: Os ângulos internos congruentes.*
- *Losango: Os quatro lados são congruentes.*

- *Quadrado: Os ângulos internos e os lados são congruentes.*

Para qualquer quadrilátero convexo ABCD temos que suas diagonais serão os segmentos AC e BD.

Figura 18: Diagrama de distribuição dos quadriláteros

2.2.1 *Área do retângulo*

Vamos começar com um exemplo. Consideremos um retângulo cuja base mede $8cm$ e a altura mede $4cm$. Para calcular sua área em cm^2, vamos dividi-lo em quadradinhos de lado $1cm$, isto é: Obtivemos 8 colunas com 4 quadradinhos em cada uma, logo, o número de quadradinhos é $8 \cdot 4$. Assim, a área A do retângulo é $A = 32cm^2$.

Agora de uma forma mais geral podemos definir a área do retângulo a seguir.

Definição 2.3. *A área A de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura, isto é, $S = b \cdot h$.*

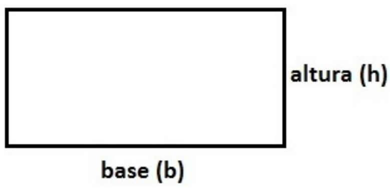

Figura 19: Retângulo de lados b e h

2.2.2 *Área do quadrado*

O quadrado é um caso particular do retângulo, onde as medidas da base e da altura são iguais a l.

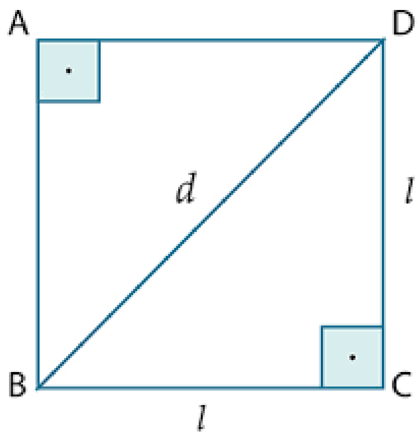

Figura 20: Quadrado de lado l e diagonal d

Proposição 2.4. *Considere um quadrado de lado* l*, podemos expressar sua área como* $S = l \cdot l = l^2$.

Demonstração: Considere um retângulo $ABCD$, com $AB = CD$ e paralelos entre si e $BC = DA$ também paralelos entre si. No caso do quadrado, teremos um retângulo com $AB = BC = CD = DA = l$, portanto temos que $b = h$, logo sua área será expressa por $S = l \cdot l$ ou $S = l^2$. ■

A partir da área do quadrado podemos obter um importante teorema que irá auxiliar muito nosso estudo.

Teorema 2.5. ***[Teorema de Pitágoras]*** *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração: Seja dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Considere o quadrado como na figura da direita da Figura 21, cujos lados medem $b + c$. Construa arestas ligando os pontos X a Y, Y a Z, Z a W e W a X. Desta forma, obtemos 4 triângulos como destacado na figura. Notemos que todos esses triângulos são congruentes pelo critério LAL e portanto, possuem hipotenusa a. Logo, é possível observar que o polígono de vértices X, Y, Z e W é um quadrado com lado a.

Na figura da esquerda da Figura 21, considere o quadrado de lado $b + c$ e os pontos R, S, T e U. Construa os segmentos RT e SU e marque a sua interseção como O. Trace os segmentos ligando o ponto B ao ponto O e o ponto D ao ponto O. Novamente, pelo critério LAL, temos 4 triângulos congruentes, com hipotenusa a, destacados na figura. Notemos que tais triângulos são congruentes aos triângulos da figura da esquerda. Do quadrado de lado $b + c$ da direita, se retiramos os 4 triângulos congruentes destacados sobrará um quadrado de lado b e um quadrado de lado c. Agora, comparando com a figura da direita, temos que a área do quadrado de lado a da figura da direita deve ser igual a soma da área do quadrado de lado b com o quadrado de lado c da figura da esquerda, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

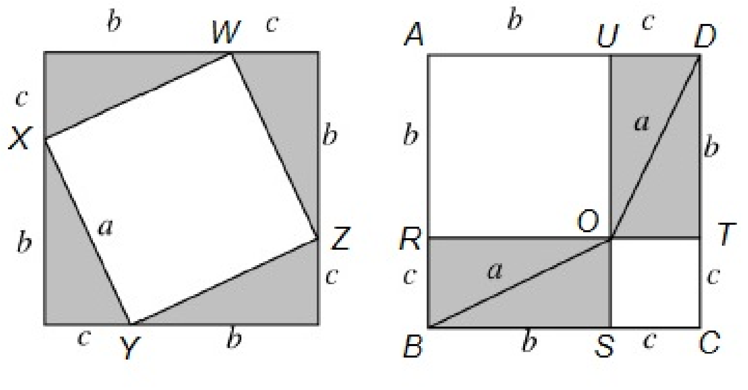

Figura 21: Teorema de Pitágoras

2.2.3 *Área do paralelogramo*

Proposição 2.6. *A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

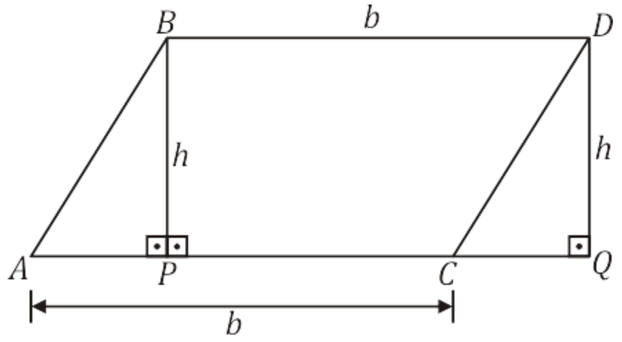

Figura 22: Paralelogramo de base b e altura h

Demonstração: Considerando a notação da Figura 22, vamos demonstrar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b \cdot h$. Para isto, trace, a partir dos pontos B e D, dois segmentos, BP e DQ, perpendiculares a reta que contém AC. Temos que $AB = CD$ por ser um paralelogramo e que $BP = DQ$ pelo fato da reta que passa por B e D ser paralela à reta que passa por A e C. Usando o Teorema de Pitágoras, pois temos triângulos retângulos, concluímos que $AP = CQ$. Logo, o quadrilátero $BPQD$ é um retângulo, com isso, temos que o quadrilátero $BDQP$ é um retângulo cuja área é $BD \cdot DQ$, a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b \cdot h$. ■

A partir desta proposição, podemos determinar a área de um triângulo qualquer.

2.2.4 *Área do triângulo*

Proposição 2.7. *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC como na Figura 23, trace pelo vértice C, uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice A uma reta paralela ao lado BC. Estas duas retas se interceptam em um ponto D. O polígono $ABCD$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e ACD são congruentes pelo critério ALA, pois o lado AC é comum aos dois triângulos, como a reta que passa por A e B é paralela à reta que passa por D e C, os ângulos $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}B$ são alternos internos e portanto congruentes e como a reta que passa por A e D é paralela à reta que passa por B e C, os ângulos $A\widehat{C}B$ e $C\widehat{A}D$ são alternos internos e portanto congruentes.

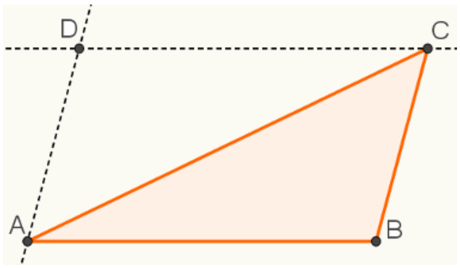

Figura 23: Área do triângulo

Como $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ e $S_{ABC} = S_{ACD}$, então: $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Para completar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABCD$ relativamente ao lado AB. ■

2.2.5 *Área do losango*

Proposição 2.8. *Dado um losango de lado l, temos sua diagonal maior representada por D e sua diagonal menor representada por d, com isso temos que sua área é dada por $S = \frac{D \cdot d}{2}$.*

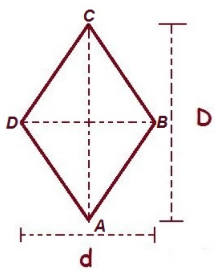

Figura 24: Losango e suas diagonais

Demonstração: Considere um losango $ABCD$ de lados l. Podemos decompor esse losango em dois triângulos ABD e BCD. Como $BC = CD = l$, temos que o triângulo BCD é isósceles de base d. Como $AB = DA = l$, temos que o triângulo ABD é isósceles de base d. Pelo caso de congruência LLL, temos que os triângulos ABD e BCD são congruentes, e portanto suas alturas são congruentes e iguais a $\frac{D}{2}$. Calculando a área do triângulo ABD temos que $S_{ABD} = \frac{d.D}{4} = S_{BCD}$, portanto $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 2 \cdot \frac{d \cdot D}{4} = \frac{d \cdot D}{2}$. ∎

2.2.6 *Área do trapézio*

Proposição 2.9. *A área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases, isto é,* $S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$.

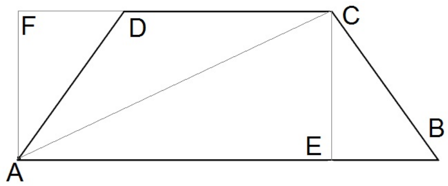

Figura 25: Trapézio e suas medidas

Demonstração: Seja ABCD um trapézio, cujas bases são os lados AB e CD. Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos. Trace as alturas CE, do triângulo ACB e AF, do triângulo ACD. Então, teremos que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Como consequência:

$$S_{ABCD} = S_{ACB} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot CE + \frac{1}{2} DC \cdot AF = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot CE.$$

∎

2.2.7 *Área do triângulo equilátero*

Proposição 2.10. *A área S de um triângulo com os três lados congruentes, onde a medida do lado é definida por l, é igual a* $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Demonstração: Considere o triângulo equilátero ABC de base BC. Trace uma reta perpendicular ao lado BC que passe pelo vértice A. Essa reta corresponde a altura do triângulo em relação ao lado BC. Como os triângulos BMA e MCA são retângulos, temos pelo Teorema de Pitágoras que o comprimento de BM ao quadrado somado a l^2 é igual a h^2. O mesmo vale para o comprimento de MC. Logo, os triângulos BMA e MCA são congruentes pelo critério LLL. Identificando os lados congruentes, temos que $BM = MC$. Logo, $BM = MC = \frac{l}{2}$.

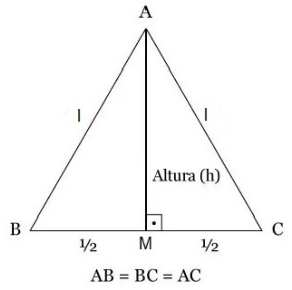

Figura 26: Triângulo equilátero

Agora, pelo Teorema de Pitágoras temos que $h^2 + (\frac{l}{2})^2 = l^2$. Isolando h chegamos que $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Portanto,

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{l \cdot l\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

■

2.2.8 *Área do hexágono regular*

Proposição 2.11. *A área de um hexágono regular de lado l é igual a $S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$.*

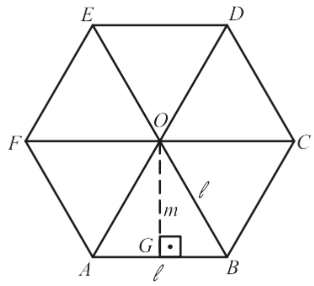

Figura 27: Hexágono regular

Demonstração: Considere um hexágono regular $ABCDEF$ de lado l conforme a Figura 27. Trace o segmento BE, dividindo o hexágono em dois trapézios. Como $AB = EF$ temos que o trapézio $ABEF$ é isósceles. Como $\widehat{A} = \widehat{F} = 120^o$, pois são ângulos internos do hexágono regular, então $A\widehat{B}E = B\widehat{E}F = 60^o$, pois $120^o + 120^o + 60^o + 60^o = 360^o$ que é a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo. Trace os segmentos AD e CF, e observe que a figura foi dividida em seis partes. Como cada ângulo interno de um hexágono regular mede 120^o, pelo argumento utilizado anteriormente, temos que cada um desses segmentos que foram inseridos na figura dividem o ângulo em duas partes iguais de 60^o. Portanto, cada uma das seis figuras representa um triângulo equilátero de lado l. Como a área do hexágono regular $ABCDEF$ é igual a soma da área dos seis triângulos congruentes de lado l, podemos concluir então que $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$. ■

2.3 ÁREA NO PLANO CARTESIANO

2.3.1 *Área do triângulo dados três pontos no plano cartesiano*

Utilizando o conceito de determinantes podemos calcular a área de qualquer triângulo no plano cartesiano, conhecendo os pontos que correspondem aos seus vértices. Omitiremos a demonstração por seus pré-requisitos estarem fora do escopo do nosso trabalho, mas ela pode ser encontrada em [8, p. 96].

Dados três pontos distintos e não colineares no plano $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, formaremos um triângulo de vértices A, B e C. Dessa forma, utilizando o conceito de determinante de matrizes de ordem 3, podemos calcular a área desse triângulo.

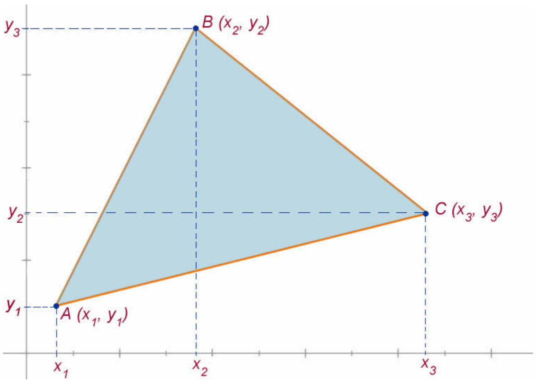

Figura 28: Exemplo de triângulo no plano cartesiano

Antes de calcular o determinante temos que prestar muita atenção em como construir a matriz com os vértices desse triângulo, uma vez que uma matriz quadrada de ordem 3 deve possuir nove elementos e com nossos vértices teremos apenas seis elementos, é necessário completar o restante da matriz com valores de 1 sempre da seguinte maneira:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, após desenvolver o determinante teremos que:

Proposição 2.12. *[8, p. 96] A área de um triângulo ABC no plano cartesiano com $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ é dada por*

$$S_t = \frac{1}{2}(|det(M)|) = \frac{1}{2}(|x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1|).$$

2.3.2 *Área de um polígono convexo formado por n pontos no plano cartesiano*

Um polígono convexo de vértices consecutivos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $\ldots$, $P_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$, $P_n = (x_n, y_n)$, pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos, a partir de um vértice, digamos P_1.

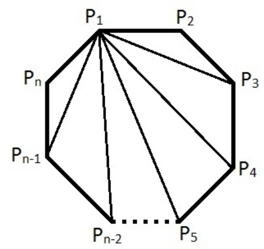

Figura 29: Polígono formado por n pontos como sendo seus vértices

Proposição 2.13. *A área S_p de um polígono convexo é a soma das áreas dos $n-2$ triângulos $A_1, A_2, \cdots, A_{n-2}$, isto é:*

$$S_p = \tfrac{1}{2}[S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_{n-3}) + S(A_{n-2})].$$

O cálculo dos $n-2$ determinantes de S_p pode ser feito simultaneamente de acordo com a regra prática apresentada na Figura 30.

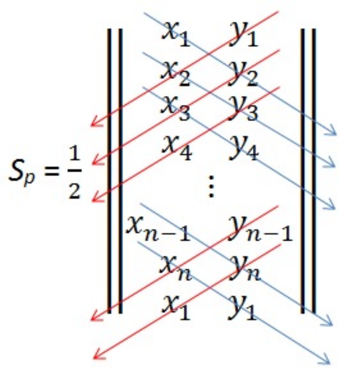

Figura 30: Matriz para o cálculo da área de um polígono convexo no plano cartesiano

É importante observar que os vértices devem ser consecutivos, isto é, partindo de um vértice qualquer deve-se percorrer o polígono no sentido horário ou anti-horário do inicio ao fim, não se esquecendo de repetir o primeiro vértice ao final da matriz.

Na Figura 30, as operações para a direita representam soma e as operações para a esquerda representam subtração, isto é,

$$S_p = \frac{1}{2}[|x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots - y_{n-1}x_n - y_nx_1|].$$

3

LADRILHAMENTOS

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de ladrilhamento, explicando com detalhes o que é e como são classificados. Todos os resultados e a maioria das figuras aqui apresentadas foram retirados do material Desafio Geométrico: Módulo I [5].

Definição 3.1. *Um ladrilhamento é uma cobertura de uma determinada região com formas geométricas pré determinadas (ladrilhos) de forma que dois ladrilhos se tocam apenas na borda, ou seja, não há sobreposição e nem espaço descoberto.*

Neste trabalho vamos considerar apenas os ladrilhamentos bem-comportados.

É muito comum encontrar exemplos de ladrilhamentos feitos com formas quadradas, onde eles são colocados lado a lado para cobrir uma região retangular delimitada, como o piso de um cômodo de uma casa.

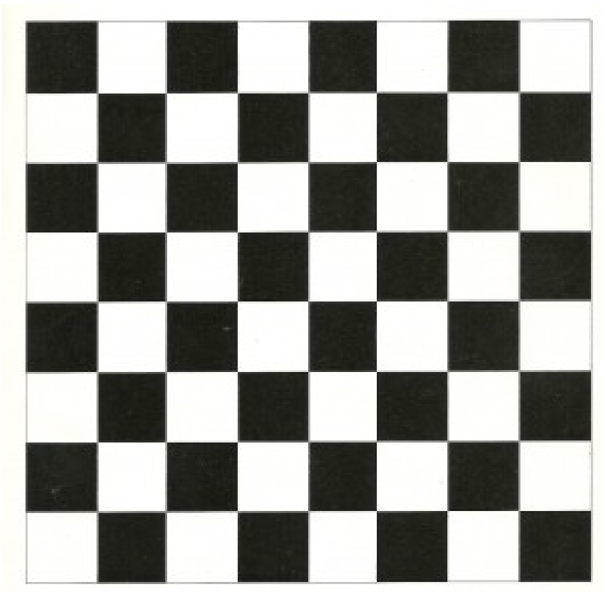

Figura 31: Ladrilhamento quadrado (tabuleiro de xadrez)

3.1 LADRILHAMENTO BEM-COMPORTADO

Definição 3.2. *Um ladrilhamento é dito bem-comportado se:*

1. *Os ladrilhos são sempre polígonos regulares, de um ou mais tipos diferentes.*
2. *Se existir intersecção entre dois ladrilhos será sempre um lado ou um vértice.*

3. *Os ladrilhos são organizados de forma padronizada, mantendo sempre a mesma forma ao redor dos vértices de todos os polígonos ou seja, se fixarmos um vértice de um polígono qualquer e dermos uma volta em torno dele, no sentido horário ou anti-horário, marcando os tipos de polígonos regulares que estão ao seu redor respeitando a ordem em que aparecem, a menos de mudança cíclica e sentido escolhido, a mesma sequência se repetirá nos outros vértices deste polígono e o mesmo ocorrerá com todos os outros polígonos que compõem o ladrilhamento.*

Observação 3.3. *Na definição 3.2 falamos de mudança cíclica. Considere por exemplo, um vértice que tenha como vizinhos um triângulo, um triângulo, um quadrado, um quadrado e um triângulo ao darmos a volta em um dado sentido fixado e começando a contar a partir de um triângulo. As mudanças cíclicas desta sequência são:*

- *um triângulo, um triângulo, um triângulo, um quadrado e um quadrado,*
- *um quadrado, um triângulo, um triângulo, um triângulo e um quadrado,*
- *um quadrado, um quadrado, um triângulo, um triângulo, um triângulo e*
- *um triângulo, um quadrado, um quadrado, um triângulo e um triângulo.*

Uma mudança cíclica nada mais é do que pegar uma dada ordenação e colocar o último polígono desta ordenação no início da lista da próxima ordenação. Considerando todas as mudanças cíclicas possíveis, podemos iniciar nossa enumeração a partir de qualquer vizinho de um dado vértice.

Exemplo 3.4. *No ladrilhamento da Figura 32, todos polígonos são regulares, nenhum ladrilho está sobreposto ao outro e o padrão de organização se mantém por toda a região. Fixemos agora um vértice de um polígono qualquer. A menos de mudança cíclica e sentido (horário ou anti-horário), ao redor de cada um de seus vértices temos 1 hexágono, 1 quadrado e um dodecágono.*

Existem dois tipos de ladrilhamentos bem-comportados: regular e semirregular. Vamos agora discutir um pouco sobre cada um deles.

3.2 LADRILHAMENTO REGULAR

Definição 3.5. *Um ladrilhamento regular é um ladrilhamento bem-comportado que utiliza apenas um único tipo de polígono regular para cobrir determinada região do plano.*

Esse modelo de ladrilhamento costuma ficar mais simples, e é o mais fácil de se estudar.

Vamos agora apresentar uma tabela onde estarão dispostas as medidas dos ângulos internos de alguns polígonos regulares, e a partir daí poderemos observar quais destes polígonos podem ser utilizados para uma pavimentação regular de um plano.

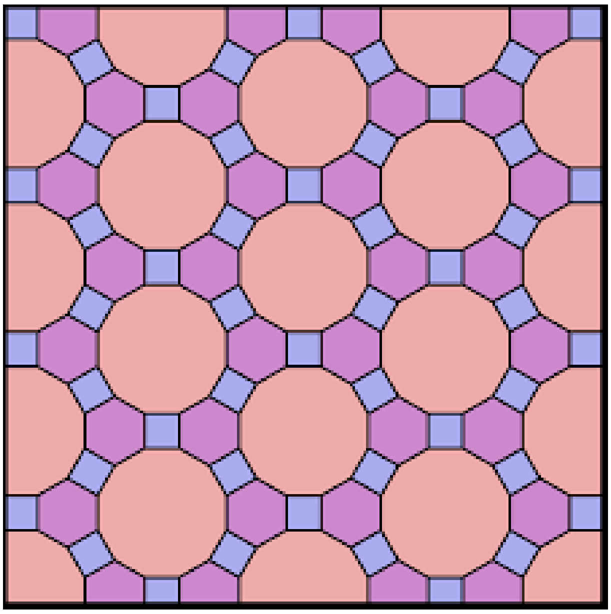

Figura 32: Exemplo de ladrilhamento, Fonte [5]

Tabela 3: Valor do ângulo interno

Polígono	Ângulo interno
Triângulo	60º
Quadrado	90º
Pentagono	108º
Hexágono	120º
Heptágono	128,571...º
Octógono	135º
Eneágono	140º
Decágono	144º
Undecágono	147,2727...º
Dodecágono	150º
Icoságono	162º

Devemos observar que para ladrilhar um plano utilizando apenas um tipo de polígono regular é necessário que a soma dos ângulos ao redor de qualquer um dos nós seja sempre 360º, logo concluímos que apenas três tipos dos polígonos regulares atendem essa condição, e são eles o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono, pois eles são os únicos cujo ângulo interno divide 360º. Todos os outros polígonos regulares possuem ângulo interno menor do que 180º.

Vamos agora fazer um exemplo de como será o ladrilhamento regular com cada um desses tipos de polígonos.

Exemplo 3.6. *Iniciando com o ladrilhamento de padrão (3, 3, 3, 3, 3, 3), ou seja, em torno de cada um dos nós ou vértices teremos 6 triângulos equiláteros. Note que é necessário utilizar 6 triângulos por vértice para que a soma resulte em 360º, uma vez que cada ângulo interno do triângulo equilátero equivale a 60º.*

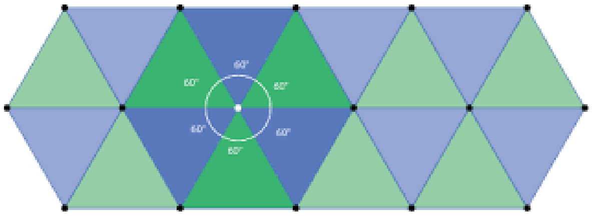

Figura 33: Ladrilhamento de padrão (3, 3, 3, 3, 3, 3)

Exemplo 3.7. *Apresentamos o ladrilhamento de padrão (4, 4, 4, 4), ou seja, em torno de cada um dos nós ou vértices teremos 4 quadrados. Mais uma vez é importante notar que foi necessário utilizar 4 quadrados por vértice para que a soma resulte em 360º, uma vez que cada ângulo interno do quadrado equivale a 90º.*

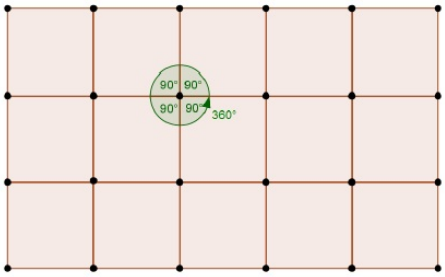

Figura 34: Ladrilhamento de padrão (4, 4, 4, 4)

Exemplo 3.8. *E por fim, nosso último ladrilhamento regular é o de padrão (6, 6, 6), ou seja, em torno de cada um dos nós ou vértices teremos 3 hexágonos regulares. São necessários apenas três pois cada ângulo interno do hexágono regular equivale a 120º.*

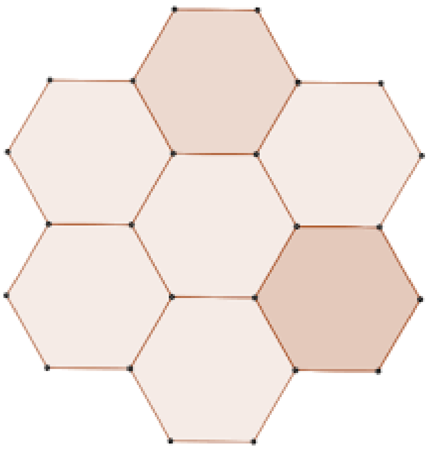

Figura 35: Ladrilhamento de padrão (6, 6, 6)

3.3 LADRILHAMENTO SEMIRREGULAR

Definição 3.9. *Alguns tipos de ladrilhamentos bem-comportados não utilizam apenas um único polígono regular, mas combinações de diferentes tipos que se unem e formam padrões regulares e harmoniosos. Esse tipo de ladrilhamento é classificado como semirregular.*

Proposição 3.10. *Seja k o número de polígonos regulares ao redor de um vértice. Então, $3 \leq k \leq 6$.*

Demonstração: Sendo 60^{o} o menor ângulo interno de um polígono regular, então o maior valor de k é dado por $\frac{360^{\text{o}}}{60^{\text{o}}} = 6$, que corresponde a 6 triângulos equiláteros. Por outro lado, $k > 2$. Portanto resulta o intervalo de restrição para o inteiro k. ■

Dias e Sampaio, [5], apresentam um estudo sobre diferentes formas de ladrilhamento e as dividem de acordo com os quatro possíveis valores de k, sempre considerando o número de polígonos ao redor de cada vértice para classificar cada um dos tipos. São Utilizadas letras para representar os padrões e as ordenam de forma que fique mais facilmente compreensível a sua concepção. Os tipos são divididos em:

1. Padrão (k,l,m): São pavimentações com três polígonos ao redor de cada vértice, onde um polígono tem k lados, o seguinte tem l lados e o seguinte tem m lados,

2. Padrão (k,l,m,n): São pavimentações com quatro polígonos ao redor de cada vértice, onde um polígono tem k lados, o seguinte tem l lados, o seguinte tem m lados e o seguinte tem n lados,

3. Padrão (k,l,m,n,p): São pavimentações com cinco polígonos ao redor de cada vértice, onde um polígono tem k lados, o seguinte tem l lados, o seguinte tem m lados, o seguinte tem n lados e o seguinte tem p lados e

4. Padrão (k,l,m,n,p,q): São pavimentações com seis polígonos ao redor de cada vértice, onde um polígono tem k lados, o seguinte tem l lados, o seguinte tem m lados, o seguinte tem n lados, o seguinte tem p lados e o seguinte tem q lados.

Desses tipos apresentados o padrão que apresenta 6 figuras é único, ou seja, só existe uma possibilidade para sua construção, que é o ladrilhamento regular utilizando 6 triângulos equiláteros.

Vamos discutir agora os outros tipos.

3.3.1 *Ladrilhamento do tipo (k, l, m)*

Proposição 3.11. *Existe um único ladrilhamento de padrão (k, l, m) quando $k = 3$, que é o ladrilhamento de padrão (3, 12, 12).*

Demonstração: Um ladrilhamento do tipo (3, l, m) tem, pelo menos, um triângulo ao redor de cada um de seus vértices, conforme ilustrado na Figura 36. Chamemos de A, B e C os três vértices do triângulo. Ao redor do vértice A, temos um triângulo, um l-ágono (polígono de l lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular. Suponha que o l-ágono compartilhe o lado AC com o triângulo. Para caracterizarmos os vértices como sendo do tipo (3, l, m), necessariamente devemos ter um m-ágono compartilhando o lado AB com o triângulo. Portanto o vértice A é do tipo (3, l, m) e o vértice B é do tipo (3, m, l). Como o vértice C é do tipo (3,l,l) e a terceira condição do bom comportamento diz que todos os vértices devem ser do mesmo tipo, comparando tal vértice com os vértices A e B, devemos obrigatoriamente ter $l = m$. Analogamente, chegaremos à mesma conclusão se levarmos em conta que temos um m-ágono compartilhando um lado com AC. Nesse caso, o vértice C é do tipo (3, m, m). Como a soma dos ângulos ao redor de um vértice será sempre igual a 360º, e nesse caso teremos um ângulo de 60º e outros dois ângulos α iguais, podemos concluir que:

$$60^{\circ} + \alpha + \alpha = 360^{\circ}, \text{ ou seja,}$$
$$2\alpha = 300^{\circ} \text{ e, portanto,}$$
$$\alpha = 150^{\circ}.$$

De acordo com a nossa tabela, o polígono que possui o valor de 150º para cada um de seus ângulos internos é o dodecágono. Assim, concluímos que se um ladrilhamento bem-comportado tem o padrão (3, l, m), então $l = m = 12$. Logo, esse ladrilhamento terá o padrão (3, 12, 12) e será composto por um triângulo e dois dodecágonos ao redor de cada vértice. ■

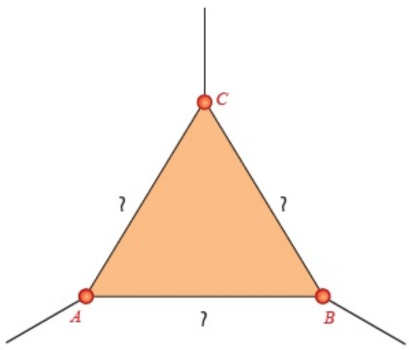

Figura 36: Ladrilhamento de padrão (3, l, m), Fonte [5]

Proposição 3.12. *Se um ladrilhamento tem um padrão (k, l, m), e k é um inteiro ímpar, então $l = m$.*

Demonstração: Consideremos um k-ágono regular, em um ladrilhamento de padrão (k, l, m), sendo k um número ímpar e $k > 3$. Enumeremos os k vértices consecutivos de k-ágono regular como sendo $A_1, A_2, \cdots, A_k$. Vamos agora supor que temos um l-ágono

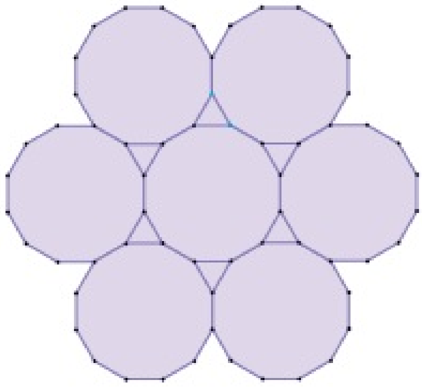

Figura 37: Ladrilhamento de padrão (3, l, l), Fonte [5]

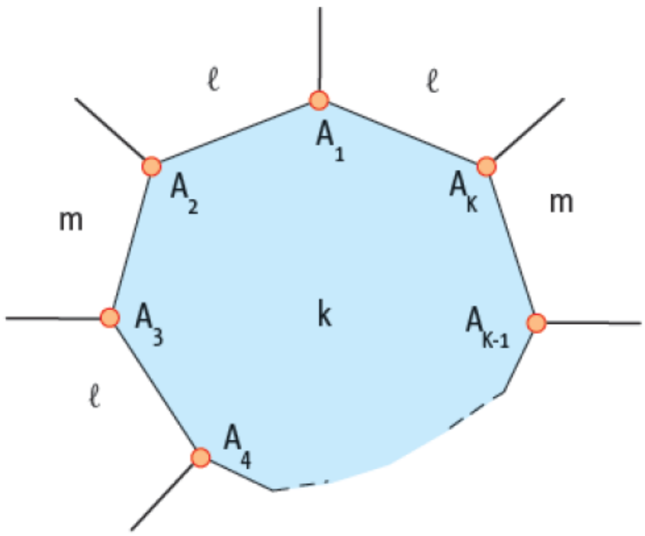

Figura 38: Ladrilhamento de padrão (k, l, m), Fonte [5]

compartilhando o lado A_1A_2. Teremos, então, um m-ágono compartilhando o lado A_2A_3, um l-ágono compartilhando o lado A_3A_4, e assim por diante (Figura 38).

Portanto, com o valor de k sendo ímpar, podemos definir a Tabela 4 de lados consecutivos do k-ágono e correspondentes tipos de ladrilhos colados a esses k lados:

Tabela 4: Lados consecutivos

Lados	Polígonos
A_1A_2	l-ágono
A_2A_3	m-ágono
A_3A_4	l-ágono
...	...
$A_{k-1}A_k$	m-ágono
A_kA_1	l-agono

Assim, o vértice A_1, deverá ser do tipo (k, l, l). Como o ladrilhamento é de padrão (k, l, m), então, lembrando que numa pavimentação regular ou semirregular em torno de qualquer vértice encontraremos os mesmos tipos de polígonos regulares, concluímos que será necessário que ocorra $l = m$. ■

Proposição 3.13. *Quando k é um número ímpar e $k \geq 5$, não existe nenhum ladrilhamento bem-comportado do plano com o padrão (k, l, m).*

Demonstração: Inicialmente mostraremos que $k \leq 10$. Considere $k \geq 3$ e ímpar. Pela proposição 3.11 temos que $l = m$. Temos que a soma dos ângulos internos deve ser igual a 360^o. Logo, temos:

$$\alpha_k + \alpha_m + \alpha_m = 360^o, \text{ ou seja,}$$
$$\alpha_k + 2 \cdot \alpha_m = 360^o.$$

Cada ângulo interno α_n de um polígono regular de n lados é igual a $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^o}{n}$, portanto, para polígonos de k e m lados, temos:

$$\alpha_k = \frac{(k-2)\cdot 180^o}{k} = (1 - \tfrac{2}{k}) \cdot 180^o \text{ e } \alpha_m = \frac{(m-2)\cdot 180^o}{m} = (1 - \tfrac{2}{m}) \cdot 180^o.$$

Substituindo esses valores na equação, teremos:

$$(1 - \tfrac{2}{k}) \cdot 180^o + 2 \cdot (1 - \tfrac{2}{m}) \cdot 180^o = 360^o.$$

Logo,

$$(1 - \tfrac{2}{k}) + 2 \cdot (1 - \tfrac{2}{m}) = \tfrac{360^o}{180^o} = 2.$$

Continuando nosso desenvolvimento algébrico, teremos:

$$(1 - \tfrac{2}{k}) + (2 - \tfrac{4}{m}) = 2, \text{ ou seja, } \tfrac{2}{k} = 1 - \tfrac{4}{m} = \tfrac{m-4}{m},$$

resultando em:

$$k = \tfrac{2m}{m-4}.$$

Como k e m são lados de um polígono, temos que são inteiros positivos, então a fração $\frac{2m}{m-4}$ também deve ser um inteiro positivo. Logo $m - 4 > 0$, ou seja, $m \geq 5$.

Novamente, através de desenvolvimentos algébricos, temos

$$k = \frac{2m}{m-4} = \frac{2 \cdot (m-4) + 8}{m-4} = 2 + \frac{8}{m-4}.$$

Como $k \geq 3$, teremos que $m - 4 \geq 1$, então $\frac{8}{m-4} \leq 8$ e portanto,

$$k = 2 + \tfrac{8}{m-4} \leq 2 + 8 = 10.$$

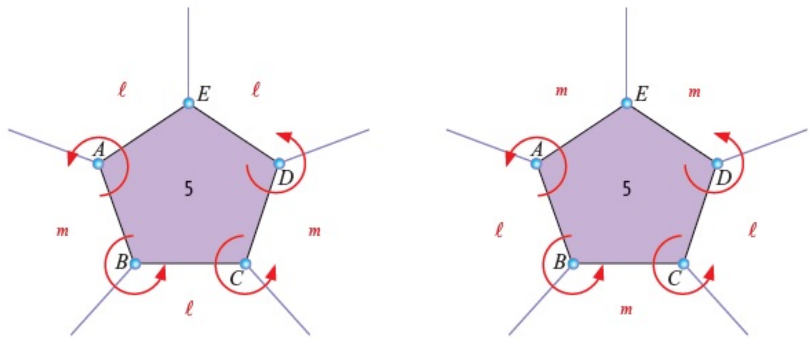

Figura 39: Ladrilhamento de padrão (5, l, l) e (5, m, m), Fonte [5]

Concluímos então que $k = \frac{2m}{m-4} \leq 10$. Dessa forma, os possíveis valores para k são 5, 7 e 9.

Vamos supor $k = 5$. Pela proposição 3.11 temos que $l = m$.

Como a soma dos ângulos ao redor de um vértice será sempre igual a 360º, e nesse caso teremos um ângulo de 108º referente ao pentágono e outros dois ângulos α iguais, podemos concluir que:

$$108^o + \alpha + \alpha = 360^o, \text{ ou seja,}$$
$$2\alpha = 252^o \text{ e, portanto,}$$
$$\alpha = 126^o.$$

Analisando a nossa tabela, não existe polígono regular que possua a medida de seu ângulo interno igual a 126º, portanto podemos concluir que para $k = 5$ ímpar, não existe nenhuma ladrilhamento bem comportado (5, m, m).

Agora vamos supor $k = 7$. Novamente, pela proposição 3.11 temos que $l = m$.

Como a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice será sempre igual a 360º, e nesse caso teremos um ângulo de $128,57^o$ referente ao heptágono e outros dois ângulos α iguais, podemos concluir que:

$$128,57^o + \alpha + \alpha = 360^o, \text{ ou seja,}$$
$$2\alpha = 231,42^o \text{ e, portanto,}$$
$$\alpha = 115,71^o.$$

Também sabemos que não existe polígono regular com ângulo interno $115,71^o$. Portanto, não existe nenhum ladrilhamento bem comportado do tipo (7,l,m).

Por fim, vamos supor $k = 9$. Novamente, pela proposição 3.11 temos que $l = m$.

Como a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice será sempre igual a 360º, e nesse caso teremos um ângulo de 140º referente ao eneágono e outros dois ângulos α iguais, podemos concluir que:

$$140^o + \alpha + \alpha = 360^o, \text{ ou seja,}$$
$$2\alpha = 220^o \text{ e, portanto,}$$
$$\alpha = 110^o.$$

Também sabemos que não existe polígono regular com ângulo interno 110º. Portanto, não existe nenhum ladrilhamento bem comportado do tipo (9,l,m). ■

Proposição 3.14. *Os únicos ladrilhamentos semirregulares de padrão (k, l, m) com k, l e m todos pares, são do tipo (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (6, 6, 6).*

Demonstração: Considere primeiramente que um dos valores k, l ou m é igual a 4. Os vértices (4, l, m), (l, 4, m) e (l, m, 4) são todos equivalentes. Assim podemos supor que, se o ladrilhamento com padrão (k, l, m) admite um quadrado, então $k = 4$. Como k é um número par, podemos ter $l \neq m$.

Para o caso de $k = 4$ temos quatro vértices, A, B, C e D, de um quadrado que integra um ladrilhamento de padrão (4, l, m). Assim, ao redor de cada vértice podemos ter um quadrado, um l-ágono (polígono de l lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular, com $l \neq m$ ou $l = m$.

Partindo do princípio que a soma dos ângulos internos dos polígonos adjacentes a cada vértice é igual a 360º, com um ladrilhamento de padrão (4, l, m) devemos ter:

$$\alpha_4 + \alpha_l + \alpha_m = 360^o.$$

Como $\alpha_4 = 90^o$, ficamos com a equação

$$\alpha_l + \alpha_m = 270^o.$$

Para descobrirmos quem é o l-ágono e o m-ágono envolvidos em nosso problema, temos que utilizar a equação que define a medida dos ângulos internos de polígonos:

$$\alpha_l = \frac{l-2}{l} \cdot 180^o = (1 - \frac{2}{l}) \cdot 180^o \text{ e } \alpha_m = \frac{m-2}{m} \cdot 180^o = (1 - \frac{2}{m}) \cdot 180^o.$$

Com isso temos que a soma dos ângulos internos do l-ágono e do m-ágono concorrentes em um vértice deve ser 270º, então:

$$(1 - \frac{2}{l}) \cdot 180^o + (1 - \frac{2}{m}) \cdot 180^o = 270^o, \text{ ou seja,}$$
$$[(1 - \frac{2}{l}) + (1 - \frac{2}{m})] \cdot 180^o = 270^o, \text{ ou seja,}$$
$$(1 - \frac{2}{l}) + (1 - \frac{2}{m}) = \frac{270^o}{180^o} = \frac{3}{2}.$$

Portanto, teremos que $\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2}$.

Como l e m são inteiros pares, por hipótese, podemos escrever $l = 2r$ e $m = 2s$, para certos inteiros positivos r e s.

Substituindo l e m por $2r$ e $2s$ respectivamente a equação será $\frac{2}{2r} + \frac{2}{2s} = \frac{1}{2}$ que é equivalente à equação $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$. Continuando com nosso desenvolvimento algébrico, isolando a variável r teremos que $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{s} = \frac{s-2}{2s}$ que pode ser escrito como $r = \frac{2s}{s-2}$, pois $s > 2$, uma vez que se $s = 2$, da equação $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$ teremos um absurdo.

Observamos ainda que, $r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2(s-2)+4}{s-2}$, ou seja, $r = 2 + \frac{4}{s-2}$. Como r é um número inteiro, então $s - 2$ deverá ser um divisor de 4, logo, $s - 2$ só pode ser igual a 1, 2 ou 4, ou seja, s só pode ser 3, 4 ou 6.

Analisando cada um dos possíveis casos:

- Para $s = 3$, $r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2.3}{3-2} = 6$, portanto $l = 2r = 12$ e $m = 2s = 6$, obtemos o padrão de ladrilhamento (4, 12, 6).
- Para $s = 4$, $r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2.4}{4-2} = 4$, portanto $l = 2r = 8$ e $m = 2s = 8$, obtemos o padrão de ladrilhamento (4, 8, 8).
- Por fim, para $s = 6$, $r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2.6}{6-2} = 3$, portanto $l = 2r = 6$ e $m = 2s = 12$, obtemos o padrão de ladrilhamento (4, 6, 12) que é o mesmo padrão (4, 12, 6).

Considere agora $k = 6$. Teremos seis vértices, A, B, C, D, E e F, de um hexágono que integra um ladrilhamento padrão (6, l, m). Assim, ao redor de cada vértice podemos ter um hexágono, um l-ágono (polígono de l lados) regular e um m-ágono (polígono de m lados) regular, com $l \neq m$ ou $l = m$.

Partindo do princípio que a soma dos ângulos internos dos polígonos adjacentes a cada vértice é igual a 360º, com um ladrilhamento de padrão (6, l, m) devemos ter:

$$\alpha_6 + \alpha_l + \alpha_m = 360^{\text{o}}.$$

Como $\alpha_6 = 120^{\text{o}}$, ficamos com a equação:

$$\alpha_l + \alpha_m = 240^{\text{o}}.$$

Para descobrirmos quem é o l-ágono e o m-ágono envolvidos em nosso problema, temos que utilizar a equação que define a medida dos ângulos internos de polígonos:

$$\alpha_l = \frac{l-2}{l} \cdot 180^{\text{o}} = (1 - \frac{2}{l}).180^{\text{o}} \text{ e } \alpha_m = \frac{m-2}{m} \cdot 180^{\text{o}} = (1 - \frac{2}{m}) \cdot 180^{\text{o}}.$$

Com isso temos que a soma dos ângulos internos do l-ágono e do m-ágono concorrentes em um vértice deve ser 240º, então:

$$(1 - \frac{2}{l}).180^{\text{o}} + (1 - \frac{2}{m}).180^{\text{o}} = 240^{\text{o}}, \text{ ou seja,}$$
$$[(1 - \frac{2}{l}) + (1 - \frac{2}{m})].180^{\text{o}} = 240^{\text{o}}, \text{ ou seja,}$$
$$(1 - \frac{2}{l}) + (1 - \frac{2}{m}) = \frac{240^{\text{o}}}{180^{\text{o}}} = \frac{4}{3}.$$

Portanto, teremos que $\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$.

Substituindo l e m por $2r$ e $2s$ respectivamente a equação será $\frac{1}{2r} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{3}$. Continuando com nosso desenvolvimento algébrico, isolando a variável r teremos que $r = \frac{3s}{2s-3} - \frac{1}{s} = \frac{s-2}{2s}$ que só admite valores de $s \geq 2$, uma vez que se $s = 1$, teremos um valor negativo para r.

Dessa desigualdade $\frac{3s}{2s-3} \geq 2$, determinamos que $s \leq 6$, logo, s só pode ser igual a 2, 3 ou 6.

Analisando cada um dos possíveis casos:

- Para $s = 2$, $r = \frac{3s}{2s-3} = \frac{3.2}{2.2-3} = 6$, portanto $l = 2r = 12$ e $m = 2s = 4$, obtemos o padrão de ladrilhamento (6, 12, 4).

- Para $s = 3$, $r = \frac{3s}{2s-3} = \frac{3.3}{2.3-3} = 3$, portanto $l = 2r = 6$ e $m = 2s = 6$, obtemos o padrão de ladrilhamento (6, 6, 6).

- Para $s = 6$, $r = \frac{3s}{2s-3} = \frac{3.6}{2.6-3} = 2$, portanto $l = 2r = 4$ e $m = 2s = 12$, obtemos o padrão de ladrilhamento (6, 4, 12) que é o mesmo padrão (6, 12, 4).

Por fim, considere um ladrilhamento do tipo (k, l, m) onde k, l e m sejam pares. Considere também que não serão utilizados quadrados ou hexágonos para esse ladrilhamento. Logo, os ladrilhos terão no mínimo 8 lados, e isso significa que os ângulos internos devem ser no mínimo 135º. Assim, a soma dos ângulos em cada vértice deve ser $135^o + 135^o + 135^o = 405^o$, uma vez que esse ladrilhamento será formado apenas por octógonos regulares. Como a soma resultou em um valor diferente de 360º, não teremos um ladrillhamento bem-comportado.

Com isso concluímos que os ladrilhamentos semirregulares de padrão (k, l, m) com k, l e m todos pares, são do tipo (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (6, 6, 6). ■

A Figura 40 mostra um ladrilhamento semirregular de padrão (4, 8, 8), ou seja, em torno de cada vértice temos um quadrado e dois octágonos regulares.

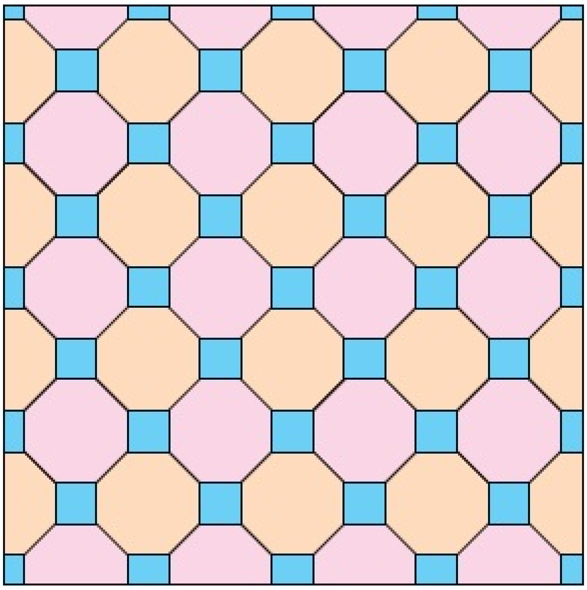

Figura 40: Ladrilhamento de padrão (4, 8, 8), Fonte [5]

A Figura 41 mostra um ladrilhamento semirregular de padrão (4, 6, 12), ou seja, em torno de cada vértice temos um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular.

A Figura 35 mostra um ladrilhamento semirregular de padrão (6, 6, 6), na verdade é um ladrilhamento regular, que possui em torno de cada vértice, 3 hexágonos regulares.

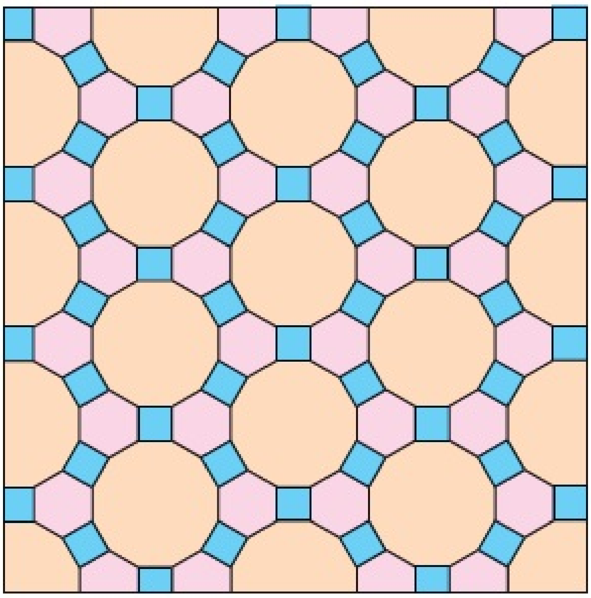

Figura 41: Ladrilhamento de padrão (4, 6, 12), Fonte [5]

3.3.2 *Ladrilhamento do tipo (k, l, m, n)*

Para os ladrilhamentos semirregulares de padrão (k, l, m, n), temos duas condições importantes: quando estão presentes triângulos equiláteros e quando não fazemos o uso desse tipo de polígono. Primeiramente vamos estudar os casos onde teremos triângulos equiláteros.

Proposição 3.15. *Não existe nenhum ladrilhamento bem-comportado com o padrão da forma (3, l, m, n), onde os valores de l e n sejam diferentes. Ou seja, para todos os casos de ladrilhamento bem-comportado do tipo (3, l, m, n), teremos somente a opção (3, l, m, l). Ainda mais, os únicos casos neste padrão são (3, 4, 6, 4) e (3, 6, 3, 6).*

Demonstração: Repetindo o procedimento geométrico já utilizado anteriormente, examinemos então um ladrilho triangular, em um ladrilhamento de padrão (3, l, m, n), e a disposição cíclica de outros ladrilhos (polígonos) que compartilham de seus vértices.

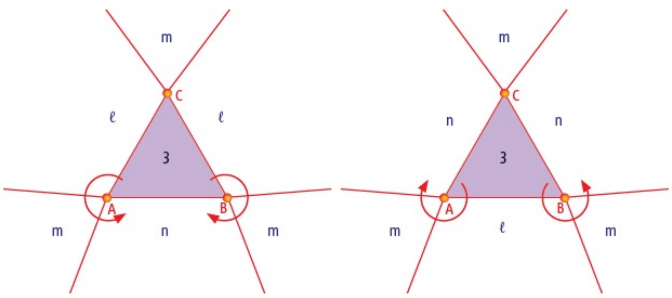

Figura 42: Ladrilhamento de padrão (3, l, m, n), Fonte [5]

Chamemos de A, B e C os três vértices do triângulo. Ao redor dos vértices A e B devemos ter o triângulo, um l-ágono, um m-ágono e um n-ágono conforme descrito na

Figura 42. Sabemos que o m-ágono não terá lado comum com o triângulo pelo padrão (3, l, m, n). Fazendo pequenos percursos circulares em torno dos vértices A e B, identificamos ambos os vértices como tendo o tipo (3, l, m, n). Observando a Figura 39, notamos que o vértice C pode ser do tipo (3, l, m, l) ou do tipo (3, n, m, n). Como o vértice precisa ser do mesmo tipo dos vértices A e B para atender à terceira condição de bom comportamento, então só podemos concluir que l = n. Para determinar os polígonos que irão satisfazer a condição do tipo (3, l, m, l), vamos seguir o mesmo procedimento utilizado anteriormente. Como a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice será sempre igual a 360º, e nesse caso teremos um ângulo de 60º referente ao triângulo equilátero, temos ainda mais três ângulos a serem descobertos, sendo que dois deles serão iguais, portanto:

$$60^o + \alpha + \alpha + \beta = 360^o, \text{ ou seja,}$$
$$2\alpha + \beta = 300^o.$$

Com a ajuda da nossa tabela de polígonos, podemos facilmente verificar quais casos atendem essa condição.

Para $n = 4$, $\alpha = 90^o$, e então $\beta = 120^o$, que é o ângulo interno de um hexágono regular. Nesse caso, nosso ladrilhamento será do padrão (3, 4, 6, 4).

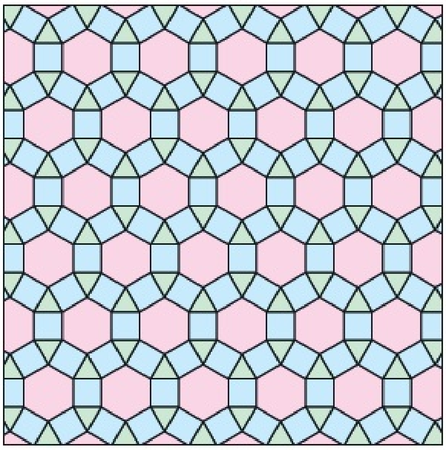

Figura 43: Ladrilhamento de padrão (3, 4, 6, 4), Fonte [5]

Para $n = 6$, $\alpha = 120^o$, e então $\beta = 60^o$, que é o ângulo interno de outro triângulo equilátero. Nesse caso, nosso ladrilhamento será do padrão (3, 6, 3, 6).

Para $n = 3$, $\alpha = 60^o$, e então $\beta = 180^o$, como os ângulos internos de um polígono convexo devem ser menores que 180º, temos que $n = 3$ não é válido nesse caso.

Para $n = 5$, $\alpha = 108^o$, e então $\beta = 84^o$, como nenhum polígono convexo regular possui ângulos internos iguais a 84º, temos que $n = 5$ não é válido nesse caso.

Para $n = 7$, $\alpha = 128,57^o$, e então $\beta = 42,86^o$, como nenhum polígono convexo regular possui ângulos internos menores que 60º, temos que $n = 7$ não é válido nesse caso.

Para todos os valores de $n \geq 7$, teremos $\alpha > 120^o$ e $\beta < 60^o$, como nenhum polígono convexo regular possui ângulos menores que 60º, teremos que não é válido $n \geq 7$.

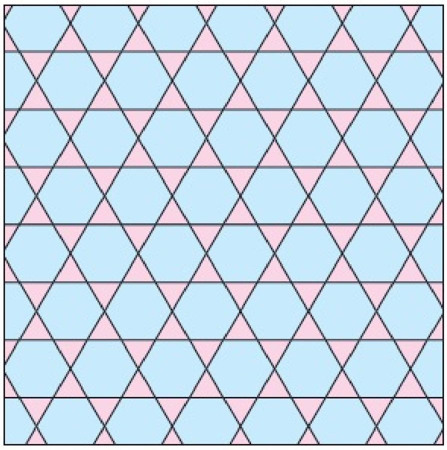

Figura 44: Ladrilhamento de padrão (3, 6, 3, 6), Fonte [5]

Com isso, concluímos que os ladrilhamentos semirregulares bem-comportados que possuem padrão da forma (3, l, m, n) são (3, 4, 6, 4) e (3, 6, 3, 6). ■

Agora vamos analisar os casos onde não teremos triângulos equiláteros.

Proposição 3.16. *O único ladrilhamento do padrão (k, l, m, n) que não possui triângulos equiláteros é da forma (4, 4, 4, 4), que na verdade é um ladrilhamento regular.*

Demonstração: Vamos começar com o polígono de menor número de lados depois do triângulo: o quadrado, que possui cada ângulo interno igual a 90^o. Ou seja, vamos então supor $k = 4$. Como não estamos empregando triângulos, se ocorrer de um dos valores de l, m ou n for maior que 4, isso implica que teremos um ângulo maior que 90^o, logo a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice será maior que a soma de quatro ângulos retos, ou seja, maior que 360^o, o que não pode ocorrer, pois assim não iremos atender as condições de com comportamento. Se substituirmos um quadrado por um k-ágono com $k \geq 5$ e não usarmos triângulos, a soma dos ângulos internos já será maior que 360^o. Logo, concluímos que o único caso possível sem a utilização de triângulos é na verdade o caso regular de padrão (4, 4, 4, 4) conforme a Figura 34. ■

3.3.3 *Ladrilhamento do tipo (k, l, m, n, p)*

Vamos agora estudar o último caso de ladrilhamento, o caso (k, l, m, n, p).

Proposição 3.17. *Um ladrilhamento de padrão (k, l, m, n, p) terá sempre três triângulos equiláteros em torno de cada vértice. Mais ainda, se um ladrilhamento tem um padrão (k, l, m, n, p), ele deverá ter um dos seguintes padrões: (3, 3, m, n, 3) ou (3, l, 3, 3, l).*

Demonstração: Vamos considerar $k = 3$. A partir de dois vértices A e B, de um triângulo equilátero do ladrilhamento, analisaremos os tipos de polígonos regulares que os contornam.

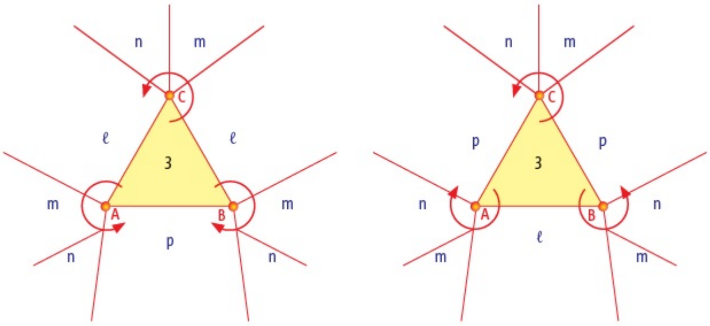

Figura 45: Ladrilhamento de padrão (3, l, m, n, p), Fonte [5]

Podemos observar que, se A e B têm ambos o tipo (3,l,m,n,p), então o vértice C deverá ter o tipo (3, l, m, n, l), como mostra o primeiro triângulo, ou do tipo (3, p, m, n, p), conforme o segundo triângulo. Para que a terceira condição do bom comportamento seja atendida, os vértices A, B e C precisam ser todos do mesmo tipo. Concluímos então que, necessariamente, deveremos ter l = p. Assim, se um ladrilhamento tem um padrão (k, l, m, n, p), com $k = 3$, temos que $l = p$, ou seja, o ladrilhamento deverá ter uma padrão (3, l, m, n, l). Em outras palavras, não pode haver nenhum ladrilhamento de padrão (3, l, m, n, p) com l diferente de p.

É importante observar que se dentre os demais polígonos de um ladrilhamento (3, l, m, n, l) não houver outro triângulo, cada um deles terá, no mínimo, quatro lados. Sendo assim, a soma dos ângulos internos, adjacentes a cada vértice do ladrilhamento, será no mínimo igual a

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 60^o + 90^o + 90^o + 90^o + 90^o = 420^o.$$

Levando em consideração que queremos um ladrilhamento bem-comportado, vemos que a contrução desse padrão de ladrilhamento é impossível quando possui apenas um triângulo ao redor de cada um de seus vértices.

Agora vamos considerar colocar somente dois triângulos ao redor de cada vértice do ladrilhamento. A soma dos ângulos internos em torno de cada vértice será no mínimo igual a:

$$60^o + 60^o + 90^o + 90^o + 90^o = 390^o.$$

Novamente, como esta soma deve ser sempre igual a 360^o, observamos que esse ladrilhamento não é possível quando formado apenas por dois triângulos ao redor de cada um dos vértices.

Agora, vamos considerar pelo menos três triângulos ao redor de cada vértice. Se $l = 3$, teremos o padrão (3,3,m,n,3). Se l for diferente de 3, então deveremos ter $m = n = 3$ e teremos o padrão (3,l,3,3,l).

Podemos facilmente analisar os casos possíveis para o ladrilhamento do padrão (3, 3,m, n, 3) e (3, l, 3, 3, l).

No caso do padrão (3, l, 3, 3, l), devemos ter $3.60^o + 2a_l = 360^o$, isto é, $2a_l = 180^o$, ou seja, $a_l = 90^o$.

Neste caso, então, o ladrilhamento terá o padrão (3, 4, 3, 3, 4).

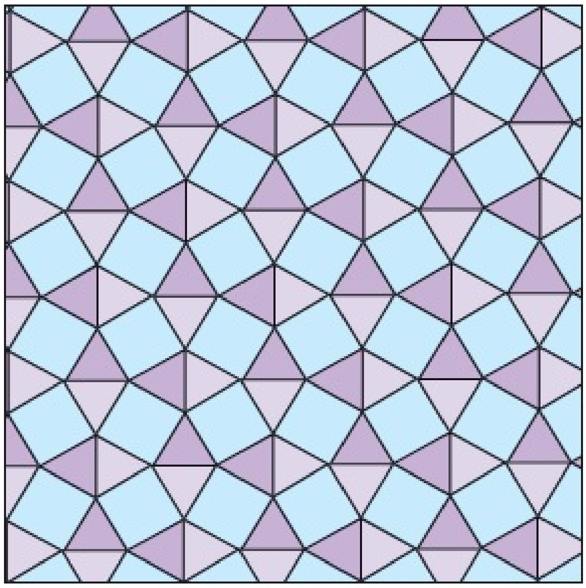

Figura 46: Ladrilhamento de padrão (3, 4, 3, 3, 4), Fonte [5]

Já no caso do padrão (3, 3, m, n, 3), teremos $3.60^o + a_m + a_n = 360^o$, ou seja, $a_m + a_n = 180^o$.

Fazendo uma consulta rápida na nossa tabela de polígonos regulares e seus ângulos internos, notamos que as únicas possibilidades neste caso são:

- $m = n = 4$,
- $m = 3$ e $n = 6$,
- $m = 6$ e $n = 6$.

Ou seja, o ladrilhamento deverá ter padrão (3, 3, 4, 4, 3) ou (3, 3, 3, 6, 3), sendo o último equivalente a (3, 3, 3, 3, 6).

Agora, consideremos um ladrilhamento do tipo (k, l, m, n, p) sem triângulos. Logo $k \geq 4$, $l \geq 4$, $m \geq 4$, $n \geq 4$ e $p \geq 4$. Assim, a soma dos ângulos internos será no mínimo

$90^o + 90^o + 90^o + 90^o + 90^o = 450^o > 360^o$.

Concluímos então que os ladrilhamentos do padrão (k, l, m, n, p) sempre farão uso de triângulos equiláteros e existem apenas dois tipos bem-comportados para esse padrão. ■

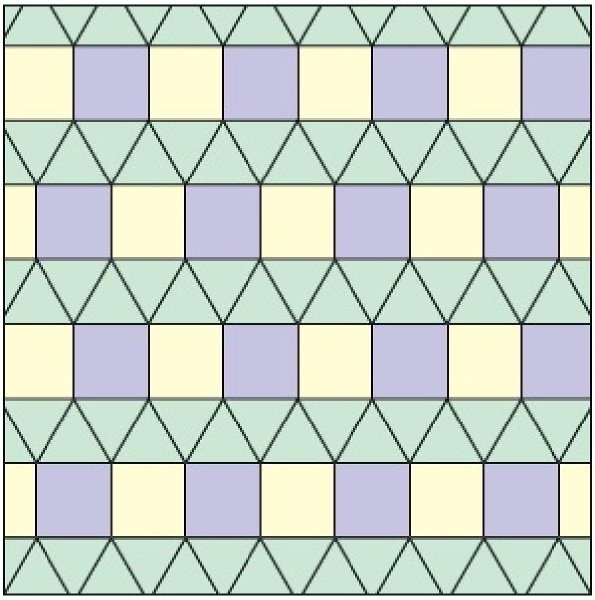

Figura 47: Ladrilhamento de padrão (3, 3, 4, 4, 3), Fonte [5]

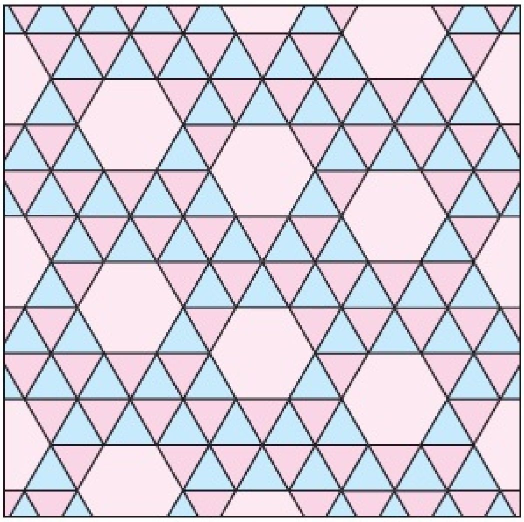

Figura 48: Ladrilhamento de padrão (3, 3, 3, 6, 3), Fonte [5]

E, dessa forma, deduzimos matematicamente todos os padrões de ladrilhamento que atendem as três condições de bom comportamento. Observe, ainda, que o padrão (k, l, m, n, p, q), o único padrão quer comporta seis polígonos regulares em torno de cada vértice é o ladrilhamento de padrão (3, 3, 3, 3, 3, 3), conforme a Figura 33.

3.3.4 *Conclusão*

Iniciamos o estudo com o resultado que nenhum ladrilhamento regular ou semirregular pode ter menos que três ou mais que seis polígonos regulares de cada um de seus vértices. Após o estudo de todos os casos possíveis, podemos fazer o seguinte resumo:

- São três os padrões de ladrilhamento regular e apenas oito os padrões de ladrilhamento semirregular.

- Os ladrilhamentos regulares são os de padrões (3, 3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4) e (6, 6, 6).

- Os semirregulares, com quatro polígonos em torno de cada vértice são os de padrões (3, 4, 6, 4) e (3, 6, 3, 6).

- Finalmente, os com cinco polígonos regulares em torno de cada vértice são os de padrões (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 3, 3, 6) e (3, 4, 3, 3, 4).

3.4 LADRILHAMENTO IRREGULAR

Um ladrilhamento irregular é simplesmente um padrão de ladrilhamento que não utiliza de polígonos regulares. Existem inúmeras formas desse tipo, algumas inclusíve famosas como o Diagrama de Voronoy.

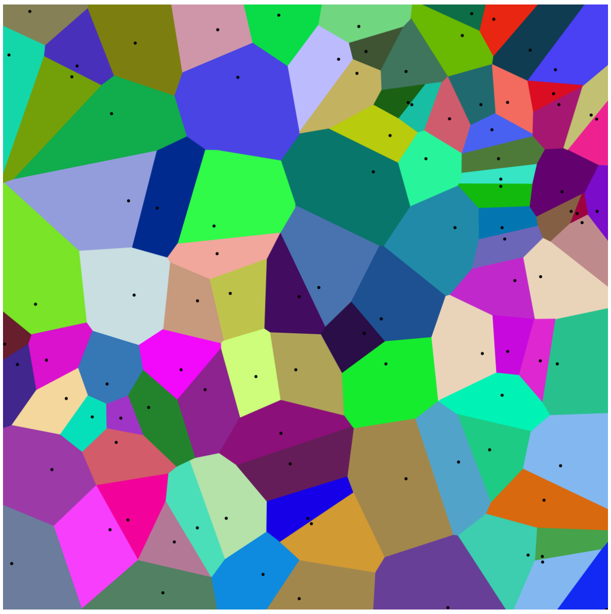

Figura 49: Diagrama de Voronoy, Fonte [4]

4 POLIOMINÓS

A referência utilizada para este capítulo foi [7].

Definição 4.1. *Poliominós são figuras formadas pela junção de um determinado número de quadrados de mesmo tamanho onde a intersecção entre dois quadrados distintos ou é um lado ou um vértice ou vazia e todos os quadrados obrigatoriamente intersectam ao menos um dos outros.*

Muitos jogos e desafios foram desenvolvidos a partir do poliominó, e pioneiro nisso foi Solomon Wolf Golomb (30 de maio de 1932 a 1 de maio de 2016), um matemático norte americano, engenheiro e professor de engenharia da University of Southern California, muito conhecido por seus trabalhos em jogos matemáticos. Desenvolveu o jogo Cheskers em 1948 e também o jogo de poliminós e pentominós em 1953. Possuia especialização nas áreas de jogos, problemas de análise combinatória, teoria dos números e teoria dos códigos. Seus jogos com pentominós inspiraram Alexey Pajitnov, Dmitry Pavlovsky e Vadim Gerasimov a desenvolverem o jogo Tetris, muito famoso dos anos 80.

Figura 50: Solomon W. Golomb

Os padrões dos diversos tipos de poliominós são exemplos do que podemos classificar como "combinação geométrica", pois consistem em diferentes formas de se organizar os quadrados formando assim figuras distintas. Os famosos dominós, representam um padrão de poliominós com peças de apenas dois quadrados.

Exemplo 4.2.

- *Dominós são poliominós formados por apenas dois quadrados;*
- *Treminós são poliominós formados por três quadrados;*
- *Tetraminós são poliominós formados por quatro quadrados, essas são as formas do jogo Tetris;*
- *Pentaminós são poliominós formados por cinco quadrados.*

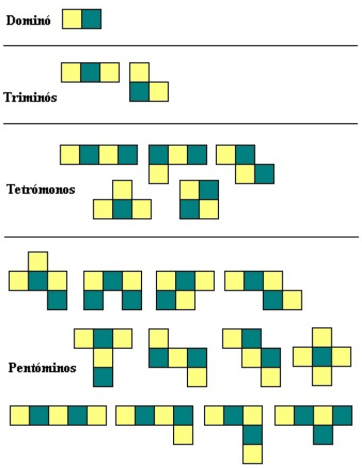

Figura 51: Exemplos de poliominós

4.1 PENTAMINÓS

Neste estudo vamos destacar os "pentaminós", figuras formadas pela união de cinco quadrados de mesmo tamanho. Existem doze tipos diferentes de pentaminós que podem ser formados, cada um deles lembra uma letra do nosso alfabeto, conforme mostrado na Figura 49.

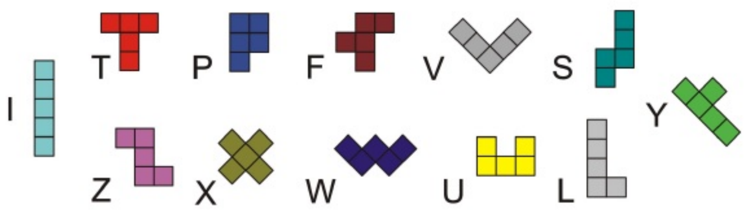

Figura 52: Os 12 tipos de pentaminós

Como cada uma dessas figuras é formada por cinco quadrados iguais, podemos concluir que essas todas juntas compreendem uma área de sessenta quadrados. No caso de considerarmos um tabuleiro semelhante ao utilizado no jogo de xadrez, existem inúmeras maneiras de posicionar os 12 pentaminós distintos, de tal forma que todos os tipos sejam utilizados, porém sempre deixando quatro quadrados desocupados, uma vez que o tabuleiro possui sessenta e quatro quadrados. Muitos padrões interessantes podem ser formados por essa combinação, mantendo esses quadrados extras em posições artisticamente específicas, porém, segundo Golomb, em seu livro [7, p. 6], uma opção mais simples é manter os quadrados centrais ou em um dos cantos vazios.

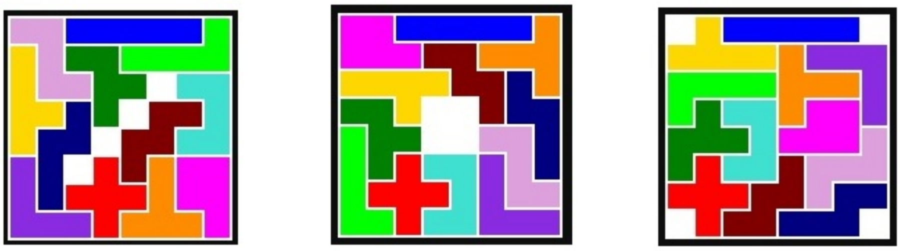

Figura 53: Padrões de pentaminó em tabuleiro 8x8

Outros padrões podem ser formados usando os doze pentaminós, alguns desses padrões incluem retângulos de 6x10, 5x12, 4x15 e 3x20, sendo esse último o que apresenta maior dificuldade de se resolver, pois possui apenas uma solução.

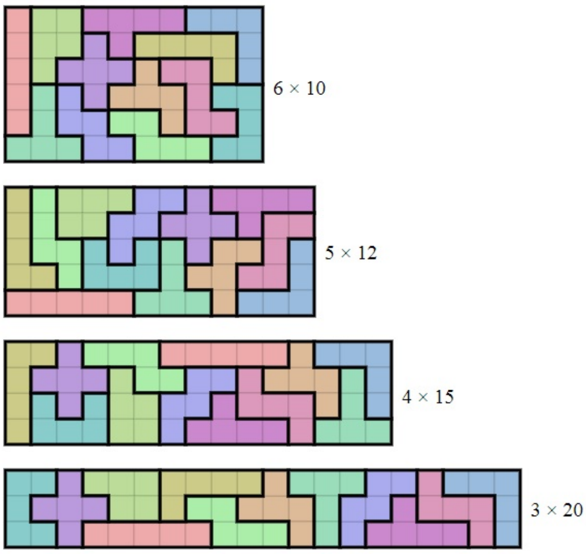

Figura 54: Padrões de pentaminós

Outra maneira de se utilizar os pentaminós, sugerida pelo professor R. M. Robinson, da University of California, é o que ele chama de "triplication problem", ou problema da triplicação. Esse problema consiste em: Dado um pentaminó, você deve utilizar exatamente nove pentaminós diferentes para formar o pentaminó fixado com sua dimensão aumentada em 3 vezes. Podemos ver algumas soluções a seguir para "T" e "X".

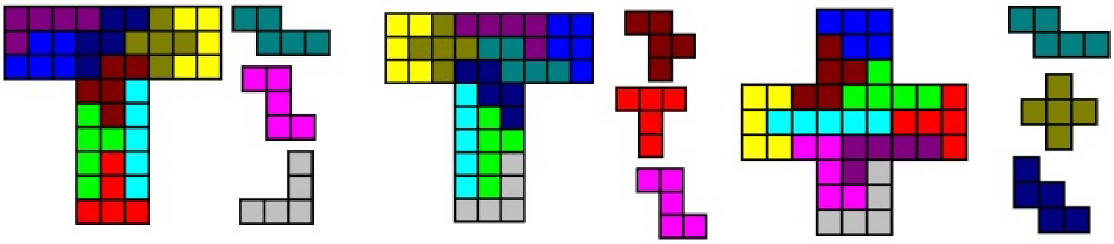

Figura 55: Exemplo de triplication

4.2 REGISTRO DE ATIVIDADE

Em novembro de 2019, na Escola Estadual Prof. Bernardino Querido, em Taubaté, fui um dos responsáveis por desenvolver uma sala de jogos e desafios matemáticos como atividades complementares. Dentre esses jogos eu produzi peças de diferentes tamanhos e tabuleiros de formas variadas do pentaminó para que os alunos se desafiassem.

Também produzi alguns modelos do Tangram, um quebra-cabeças chinês muito antigo e famoso. Seu nome significa "Tábua das sete sabedorias" e ele é composto por sete peças, chamadas de tans, sendo 2 triângulos grandes, 2 pequenos, 1 médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo, que originalmente eram posicionadas para formar um quadrado, porém hoje encontramos diversos formatos diferentes para construir, sempre seguindo suas duas regras: usar todas as peças e não sobrepor uma peça a outra.

Figura 56: Peças do Tangram

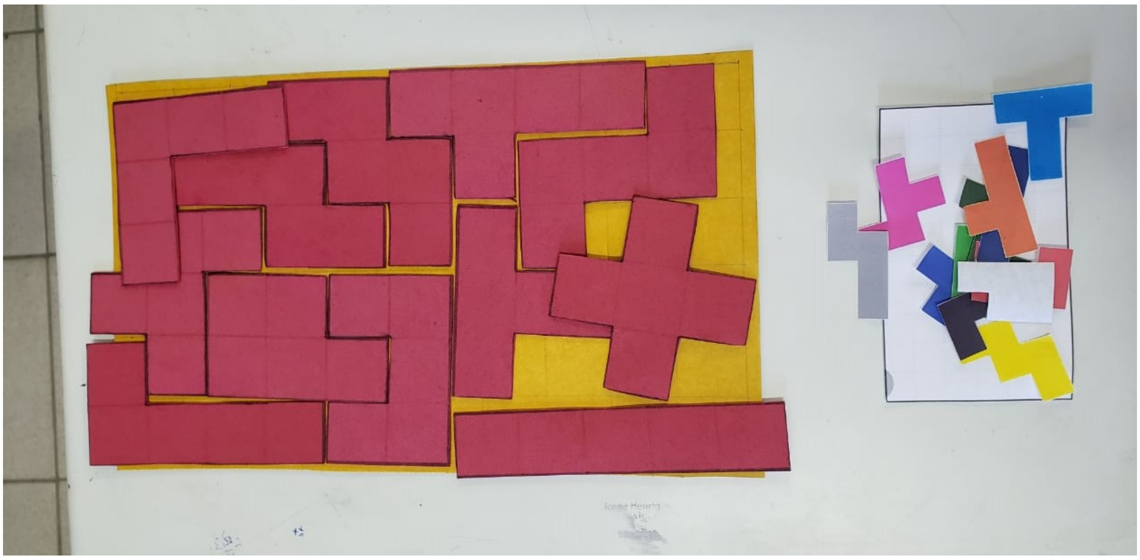

Figura 57: Peças e tabuleiro 6x10

Os alunos que visitavam a sala de desafios tinham a disposição quatros jogos de peças de Tangram de cores e tamanhos variados. Também disponibilizei cinco conjuntos com tamanhos variados de pentaminós, com tabuleiros 6x10, 5x12, 4x15 e 3x20.

Figura 58: Aluna montando tabuleiro 6x10

Inicialmente os alunos se interessaram mais pelo Tangram, alegando que era mais simples e mais rápido de se solucionar. Em seguida foi proposto que os alunos analisassem os 12 pentaminós, para entenderem melhor como ele funciona. Com o tabuleiro 6x10, os alunos apresentaram um pouco de dificuldade em resolver, observei que alguns alunos começavam a montagem pelo centro e alguns alunos começavam pelas bordas da região, mas sempre ficavam 3 ou 4 pentaminós sem possibilidade de encaixe. Após alguns minutos, uma aluna conseguiu usar 11 das 12 peças de maneira correta. Orientei para que ele observasse com calma o que tinha feito, e que talvez não fosse necessário iniciar a montagem desde a primeira peça. Pouco a pouco outros alunos também foram evoluindo e notei que eles estavam se desafiando, para ver quem conseguia completar a montagem de forma correta primeiro. Após alguns minutos os alunos começaram a obter sucesso na montagem, e passaram a ajudar outros colegas, com isso o interesse foi aumentando e outros alunos começaram a participar. Os alunos passaram a comentar que o jogo não é tão difícil, basta pensar com calma, prestar atenção na montagem e entender como os pentaminós podem se encaixar.

Quando os alunos já estavam mais familiarizados com o pentaminó, eu questionei se os alunos notaram alguma coisa sobre as diferentes maneiras de se combinar as peças e rapidamente eles responderam que sempre irá formar um retângulo. Com isso, questionei se era possível montar um quadrado e lancei o desafio a eles. Os alunos se organizaram em grupos e começaram a tentar resolver o problema. Algum tempo depois, um aluno do 2º ano, percebeu que o quadrado maior teria que possuir 8 quadradinhos em seus lados. Eu confirmei a observação dele e mencionei que mais um detalhe precisava ser notado. Os alunos se mantiveram focados, tentando resolver o tabuleiro 8x8, mas encontraram algumas dificuldade, pois nenhum deles percebeu que iriam faltar quatro quadradinhos. Após algum tempo eu decidi ajudar, e montei o tabuleiro com os quatro cantos vazios, expliquei que não seria possível cobrir o tabuleiro todo, pois só seria possível cobrir sessenta quadradinhos com as nossas peças e o tabuleiro possui um total de sessenta e quatro quadradinhos. Por fim, expliquei que além da maneira que montei, existem diversas outras formas de se cobrir o tabuleiro 8x8 com pentaminós, dei a dica de deixar os quatro quadradinhos do meio vazios e os alunos seguiram tentando montar.

Eu pude notar através dessa atividade que os alunos conseguiram demonstrar uma alta capacidade de concetração e raciocínio. Muitos foram escolhendo peças mais e menos favoritas, e conforme começavam a montagem, alguns já tentavam encaixar os pentaminós que achavam mais difíceis. Outro fator que me chamou a atenção foi o trabalho em equipe, os alunos fizeram questão de se unir pra tentarem resolver os tabuleiros, pensando em conjunto e resolvendo os desafios. Por fim, levo comigo que essa atividade foi muito produtiva, estudamos de uma maneira lúdica, e o retorno dos alunos foi totalmente positivo.

5 PROPOSTA DIDÁTICA

No estudo da Geometria, é comum encontrarmos atividades que necessitem do cálculo da área de figuras planas, e para que isso seja feito de maneira correta, é preciso reconhecer a figura com a qual se deseja trabalhar e também qual fórmula ou método deve ser empregado para determinar esse valor.

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática onde iremos abordar os conteúdos estudados nos capítulos anteriores. Essa sequência consiste em algumas atividades envolvendo raciocínio lógico, identificação de regularidades, relacionamento entre figuras, observação de padrões e análise de resultados.

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática tem o objetivo de propor atividades nas quais os alunos irão trabalhar alguns dos conceitos de figuras planas, compreender seus formatos e características, como diagonais, ângulos internos e área, também iremos utilizar o conceito de ladrilhamento em forma de atividade, buscando algo diferenciado do que normalmente é visto em sala de aula. Por fim vamos propor atividades utilizando os pentaminós, com o intuito de desenvolver algo mais lúdico aos alunos. Com essas atividades, pretendemos que os alunos desenvolvam algumas competências em Geometria e melhorem o interesse no estudo da Matemática.

5.2 PÚBLICO ALVO

Alunos do Ensino Médio.

5.3 AULAS PREVISTAS

3 aulas simples de 50 minutos e 2 aulas duplas de 100 minutos.

5.4 OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

1. Identificar que qualquer polígono convexo pode ser decomposto em figuras triângulares.

2. Compreender o conceito e resolver problemas envolvendo a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

3. Diferenciar os processos, fórmulas e os termos necessários para cálculos de áreas de polígonos.

4. Resolver problemas envolvendo os diferentes tipos de ladrilhamento no plano.

5. Realizar atividades ou jogos utilizando peças de pentaminós.

5.5 COMPETÊNCIAS DA BNCC

1. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

2. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de Geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

5.6 DESENVOLVIMENTO

Nesta seção apresentaremos propostas para o desenvolvimento de cada uma das aulas, descritas de maneira clara e objetiva.

5.6.1 *Aula 1 - Reconhecimento de figuras planas e suas características.*

Duração: 50 minutos.
Local de desenvolvimento da atividade: sala de aula.
Recursos necessários: lousa, giz e instrumentos para construções geométricas.

Inicie a aula explicando sobre o conceito retas, ângulos, polígonos convexos e não-convexos. Em seguida questione quais polígonos os alunos conhecem e desenhe algumas formas na lousa, ressaltando os polígonos regulares e apresentando as classificações conforme o seu número de lados. Comente sobre a diferença de ângulos internos e externos e mostre aos alunos que todo triângulo possui uma soma de ângulos internos igual a 180°. Após isso explique através de exemplos como qualquer polígono convexo pode ser decomposto em triângulos traçando suas diagonais. Finalize a aula apresentando a fórmula para se calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo e propondo aos alunos para que construam uma tabela contendo a soma dos ângulos internos de diferentes polígonos calculadas através dessa fórmula.

5.6.2 *Aula 2 - Cálculo de área de figuras planas.*

Duração: 50 minutos.
Local de desenvolvimento da atividade: sala de aula.
Recursos necessários: lousa e giz.

Inicie a aula comentando sobre alguns polígonos que possuem fórmulas fechadas para se calcular suas áreas. Nós apresentaremos fórmulas para: triângulos, quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e hexágono. Apresente as diferentes fórmulas para calcular as áreas do polígonos citados e apresente alguns dos seguintes exemplos.

Exemplo 5.1. *Determine a área de um retângulo sabendo que a medida de sua base e sua altura medem respectivamente* $7cm$ *e* $11cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = b.h$, *para* $b = 7$ *e* $h = 11$ *temos que:*

$$S = b \cdot h = 7 \cdot 11 = 77cm^2.$$

Exemplo 5.2. *Determine a área de um quadrado de lado igual a* $8cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = l^2$, *para* $l = 8$ *temos que:*

$$S = l^2 = 8^2 = 64cm^2.$$

Exemplo 5.3. *Determine a área de um triângulo sabendo que a medida de sua base e sua altura são respectivamente* $6cm$ *e* $8cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = \frac{b.h}{2}$, *para* $b = 6$ *e* $h = 8$ *temos que:*

$$S = \frac{b.h}{2} = \frac{6.8}{2} = \frac{48}{2} = 24cm^2.$$

Exemplo 5.4. *Determine a área de um triângulo equilátero sabendo que a medida do seu lado é de* $5cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, *para* $l = 5$ *temos que:*

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3}cm^2.$$

Exemplo 5.5. *Determine a área de um losango sabendo que a medida de suas diagonais valem* $12cm$ *e* $20cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = \frac{D.d}{2}$, *para* $D = 20$ *e* $d = 12$ *temos que:*

$$S = \frac{D.d}{2} = \frac{20.12}{2} = \frac{240}{2} = 120cm^2.$$

Exemplo 5.6. *Determine a área de um trapézio sabendo que sua base maior mede* $10cm$, *sua base menor mede* $4cm$ *e sua altura mede* $5cm$.

Solução: Utilizando a fórmula $S = \frac{(B+b)h}{2}$, *para* $B = 10, b = 4$ *e* $h = 5$, *temos que:*

$$S = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(10+4)5}{2} = \frac{14.5}{2} = \frac{70}{2} = 35cm^2.$$

Exemplo 5.7. *Determine a área de um hexágono regular que tem seus lados medindo* $\sqrt{3}cm$

Solução: Utilizando a fórmula $S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, *para* $l = \sqrt{3}$, *temos que:*

$$S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 4,5\sqrt{3}cm^2.$$

É necessário reforçar com os alunos a importância de sempre tentar desenhar as figuras quando o enunciado não as fornece.

Após apresentar alguns dos exemplos anteriores finalize a aula propondo aos alunos alguns exercícios diferenciados para que eles se familiarizem com as fórmulas e com os métodos de cálculos das áreas. Uma sugestão é trabalhar o Teorema de Pitágoras com diferentes figuras regulares conforme exemplo a seguir.

Exemplo 5.8. *Sabemos que o Teorema de Pitágoras pode ser demonstrado com uma relação entre as áreas de quadrados, conforme figura a seguir.*

Temos que as áreas dos quadrados são $a^2 = b^2 + c^2$. *Dados 3 valores que satisfazem o Teorema de Pitagóras, é possível construir triângulos equiláteros e hexágonos de forma que a área da figura que tem a hipotenusa do triângulo como lado seja igual a soma da área das outras duas figuras?*

Resolução: Para a análise dos casos, vamos utilizar três triângulos equiláteros com lados medindo $5cm, 4cm$ *e* $3cm$ *e três hexágonos regulares com lados medindo* $13cm, 5cm$ *e* $12cm$. *Agora basta verificar se suas áreas são equivalentes.*

Para o caso dos triângulos temos:

- *Área* S_a *do triângulo de lado* $5cm$: $S_a = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 6,25\sqrt{3}cm^2$.
- *Área* S_b *do triângulo de lado* $3cm$: $S_b = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = 2,25\sqrt{3}cm^2$.
- *Área* S_c *do triângulo de lado* $4cm$: $S_c = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}cm^2$.

Podemos observar que $S_b + S_c = 2,25\sqrt{3}cm^2 + 4\sqrt{3}cm^2 = 6,25\sqrt{3}cm^2 = S_a$.

Para o caso dos hexágonos temos:

- *Área* S_a *do hexágono de lado* $13cm$: $S_a = 3.\frac{13^2\sqrt{3}}{2} = 253,5\sqrt{3}cm^2$.

- *Área S_b do hexágono de lado 5cm:* $S_a = 3.\frac{5^2\sqrt{3}}{2} = 37,5\sqrt{3}cm^2$.
- *Área S_c do hexágono de lado 12cm:* $S_a = 3.\frac{12^2\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}cm^2$.

Podemos observar que $S_b + S_c = 37,5\sqrt{3}cm^2 + 216\sqrt{3}cm^2 = 253,5\sqrt{3}cm^2 = S_a$.

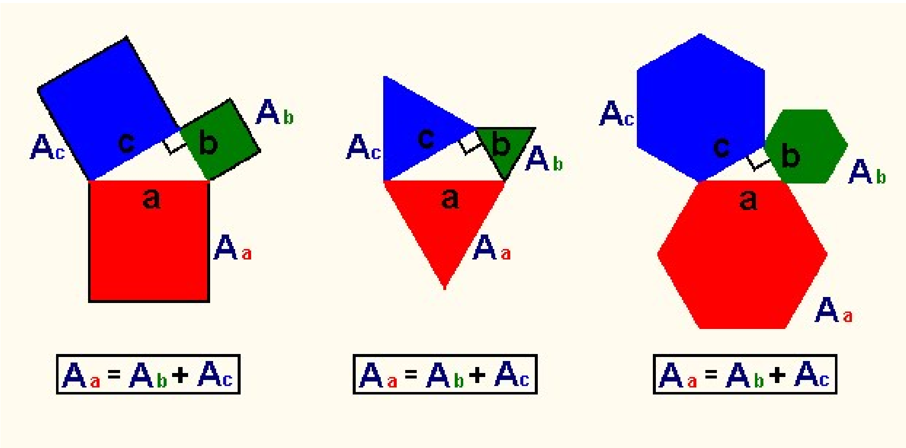

Figura 59: Áreas e Teorema de Pitágoras

Perguntar aos alunos se eles conseguem enxergar por que funciona para o triângulo equilátero e para o hexágono uma vez que funciona para o quadrado.

5.6.3 *Aula 3 - Área de figuras no plano cartesiano*

Duração: 100 minutos.
Local de desenvolvimento da atividade: sala de aula.
Recursos necessários: lousa, giz e uma folha de papel quadriculado por aluno.

Inicie a aula explicando como funciona o plano cartesiano e como são organizados os pontos e pares ordenados na forma $P_n = (x_n, y_n)$. Após isso, marque alguns pontos no plano cartesiano, una eles e forme polígonos convexos. Após isso demonstre como calcular a área de um triângulo no plano cartesiano. Talvez seja necessário retomar o conceito de determinante de matrizes de ordem 3. Em seguida relembre que qualquer polígono convexo pode ser decomposto em triângulos e dessa forma podemos calcular a área total como a soma das áreas dos triângulos, mas também mostre a maneira direta de se calcular a área conforme demonstrado no capítulo 2 desse trabalho.

Veja alguns exemplos que podem ser feitos.

Exemplo 5.9. *Determine a área de um triângulo no plano cartesiano sabendo que seus vértices são definidos pelos pontos* $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ *e* $C = (4,5)$.

Solução: Inicialmente vamos construir a matriz quadrada M de ordem 3.

$$M = \begin{bmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida vamos calcular o determinante da matriz M:

$$det(M) = (1.1.1 + 1.1.4 + 1.4.5 - 1.1.4 - 1.1.5 - 1.4.1) = 12.$$

Por fim, vamos determinar a área do triângulo:

$$S = \frac{1}{2}.|det(M)| = \frac{1}{2}.|12| = \frac{12}{2} = 6u^2.$$

Mais uma vez, estimule os alunos a desenhar o plano cartesiano, localizar os pontos nesse plano e formar o triângulo.

Após isso divida a turma em duplas e proponha o seguinte jogo:

Batalha naval das áreas

Esse jogo consiste em uma disputa entre dois competidores. Inicialmente cada um dos competidores deve desenhar dois planos cartesianos em uma folha, considerando apenas o primeiro quadrante com os intervalos nos eixos x e y definidos em $[0, 4]$. Após isso cada competidor deve selecionar em segredo n dos 25 possíveis pontos com coordenadas inteiras no primeiro plano cartesiano desenhado para serem os vértices do seu polígono convexo. É interessante que a quantidade de pontos seja menor que 7 e obviamente maior ou igual a 3. Cada jogador deve calcular a área do seu polígono e deixar registrado para conferência ao final da partida.

Feito isso, escolhe-se quem irá iniciar a partida e então cada jogador tenta adivinhar um dos vértices do polígono adversário por rodada. Conforme for acertando ele deve registrar no segundo plano cartesiano desenhado. Assim que atingir três acertos o competidor calcula a área do triângulo formado adversário através do cálculo de determinante de matrizes, e fala para o adversário os três pontos e a área calculada. É importante que os alunos percebam que aquele que escolher mais vértices terá uma área mais difícil de ser calculada, mas terá os vértices mais fáceis de serem descobertos, ao contrário daquele que escolher menos vértices que terá uma área mais fácil de ser calculada, porém descobrir os vértices será mais difícil.

Aquele que encontrar todos os vértices e a área do polígono adversário primeiro vence.

Exemplo 5.10. *Vamos considerar dois competidores: Aluno A e Aluno B.*

- *Os competidores inicialmente selecionam os pontos que irão ser os vértices da sua figura.*

  Suponha que o Aluno A escolheu três pontos, $A = (1, 1); B = (3, 4)$ *e* $C = (4, 2)$*, formando um triângulo e o Aluno B escolheu cinco pontos,* $A = (1, 1); B = (1, 3); C = (4, 4); D = (4, 2)$ *e* $E = (3, 0)$*, formando um pentágono.*

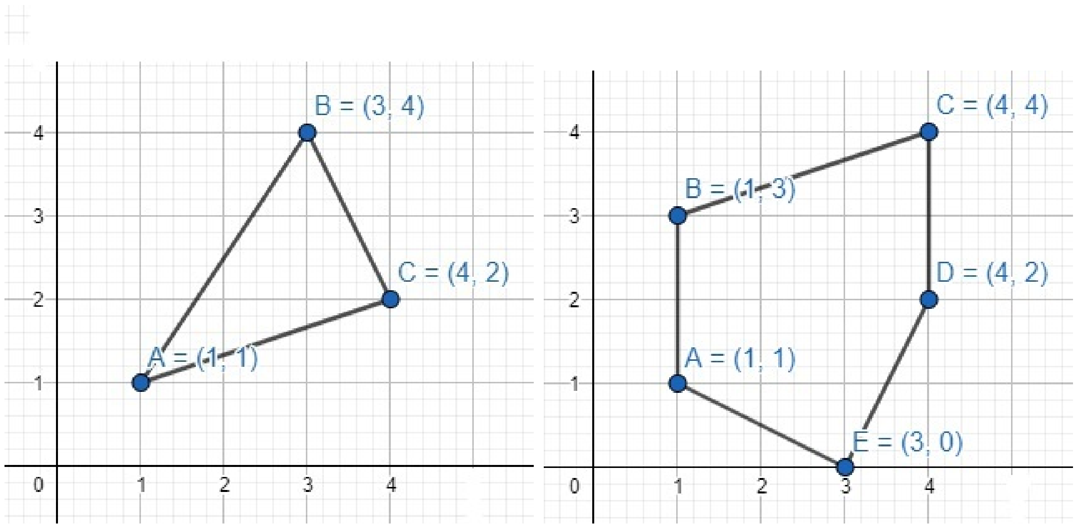

Figura 60: Figura do Aluno A e figura do Aluno B

- *Agora cada aluno calcula a área de sua figura para conferência no final da partida. A área da figura do Aluno A é* $S_A = 3,5$ *e a área da figura do Aluno B é* $S_B = 8,5$.
- *Após isso, os alunos tiram cara ou coroa para definir quem irá iniciar e o Aluno A vence.*

Rodada 1: *O Aluno A inicia a partida escolhendo o ponto* $P_1 = (0,0)$ *e o Aluno B responde que ele não acertou. Em seguida o Aluno B escolhe o ponto* $P_1 = (3,3)$ *e o Aluno A responde que ele não acertou, fim da primeira rodada.*

Rodada 2: *Aluno A escolhe o ponto* $P_2 = (3,0)$ *e o aluno B responde que ele acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_2 = (4,1)$ *e o Aluno A responde que ele não acertou, fim da segunda rodada.*

Rodada 3: *Aluno A escolhe o ponto* $P_3 = (1,1)$ *e o aluno B responde que ele acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_3 = (1,1)$ *e o Aluno A responde que ele acertou, fim da terceira rodada.*

Rodada 4: *Aluno A escolhe o ponto* $P_4 = (4,1)$ *e o aluno B responde que ele não acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_4 = (2,2)$ *e o Aluno A responde que ele não acertou, fim da quarta rodada.*

Rodada 5: *Aluno A escolhe o ponto* $P_5 = (4,2)$ *e o aluno B responde que ele acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_5 = (4,2)$ *e o Aluno A responde que ele acertou. Como o Aluno A já conhece três pontos da figura do Aluno B, ele pode calcular a área da primeiro figura obtida, que é um triângulo. Após o cálculo com os pontos* P_2, P_3 *e* P_5 *o Aluno A encontra a área* $S_B = 2,5$, *revela ao Aluno B que responde que o valor está incorreto, indicando que faltam mais vértices. Fim da quinta rodada.*

Rodada 6: *Aluno A escolhe o ponto* $P_6 = (2,2)$ *e o aluno B responde que ele não acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_6 = (3,1)$ *e o Aluno A responde que ele não acertou, fim da sexta rodada.*

Rodada 7: *Aluno A escolhe o ponto* $P_6 = (2, 4)$ *e o aluno B responde que ele não acertou. O Aluno B escolhe o ponto* $P_6 = (3, 4)$ *e o Aluno A responde que ele acertou. Como o Aluno B já conhece três pontos da figura do Aluno A, ele pode calcular a área da figura para dar seu primeiro chute. Após o cálculo com os pontos* P_3, P_5 *e* P_7 *o Aluno B encontra a área* $S_A = 3,5$*, revela ao Aluno A que responde que o calor está correto. Fim de jogo, o Aluno B é o vencedor da partida.*

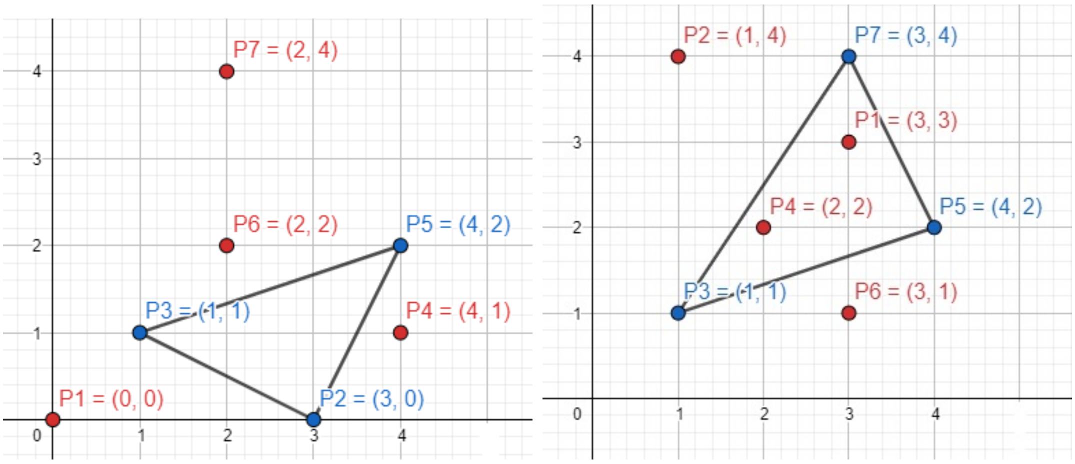

Figura 61: Registro do Aluno A e registro do Aluno B

5.6.4 *Aula 4 - Ladrilhamento no plano*

Duração: 100 minutos.
Local de desenvolvimento da atividade: sala de aula.
Recursos necessários: lousa, giz, intrumentos de medição, tesoura, modelos de polígonos para recorte, papel cartão colorido ou cartolina colorida.

Inicie a aula explicando o conceito de ladrilhamento e após isso divida a turma em grupos de 4 alunos no máximo. A princípio cada grupo irá trabalhar com um tipo único de polígono regular para realizar o ladrilhamento para que ele percebam que nem todos os polígonos formam ladrilhamentos bem-comportados. Cada grupo recebe um molde do polígono selecionado e deve produzir pelo menos 10 cópias do mesmo. Os moldes são de: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, octógono e dodecágono.

Cada grupo deve agora calcular a medida do ângulo interno de seu polígono. O método utilizado fica a cargo do grupo, podendo ser pela triangulação ou utilizando instrumentos de medição.

Após isso questione sobre quais dos ladrilhos podem ser utilizados para ladrilhar o plano utilizando apenas um tipo de polígono regular. A partir desse momento é provável que os alunos comecem a apresentar os padrões de ladrilhamentos bem-comportados de polígonos regulares. É importante que os alunos percebam que para se conseguir utilizar determinados polígonos é necessário que a soma dos ângulos ao redor do vértices seja de 360^o. A partir desse momento proponha para os alunos que montem diferentes tipos de ladrilhamento misturando dois tipos de polígonos, depois 3 tipos e se achar necessário mencione que existem 11 padrões diferentes.

Os diferentes tipos de ladrilhamento podem ser encontrados nesse trabalho. Vamos listar aqui esses padrões para facilitar a consulta, lembrando que a notação (k, l, m) significa os lados que cada figura deve ter, o mesmo vale para (k, l, m, n), (k, l, m, n, p) e (k, l, m, n, p, q).

1. Padrão (3, 3, 3, 3, 3, 3)
2. Padrão (4, 4, 4, 4)
3. Padrão (6, 6, 6)
4. Padrão (3, 12, 12)
5. Padrão (4, 6, 12)
6. Padrão (4, 8, 8)
7. Padrão (3, 4, 6, 4)
8. Padrão (3, 6, 3, 6)
9. Padrão (3, 4, 3, 3, 4)
10. Padrão (3, 3, 4, 4, 3)
11. Padrão (3, 3, 3, 6, 3)

5.6.5 *Aula 5 - Jogos envolvendo pentaminós*

Duração: 50 minutos.
Local de desenvolvimento da atividade: sala de aula.
Recursos necessários: tabuleiro e conjuntos de peças para pentaminó.

Inicie a aula organizando os alunos em turmas e em seguida distribua os jogos contendo os pentaminós e alguns dos tabuleiros retangulares. Explique a idéia básica sobre pentaminós e inicie propondo aos alunos que utilizem as peças para formarem os padrões 6x10, 5x12, 4x15 e 3x20. Em seguida, questione sobre o que os alunos perceberam sobre quais figuras são formadas ao final da montagem e proponha aos alunos que tentem formar um quadrado utilizando todas as peças e aguarde com que eles percebam que sempre irá faltar quatro quadrados. Explique a relação entre o número de quadrados das peças e o número de quadrados do tabuleiro. Caso os alunos não obtenham soluções, apresente uma e proponha variações. Finalize a aula apresentando o conceito do triplication apresentado no Capítulo 4 e proponha que os alunos façam alguns modelos.

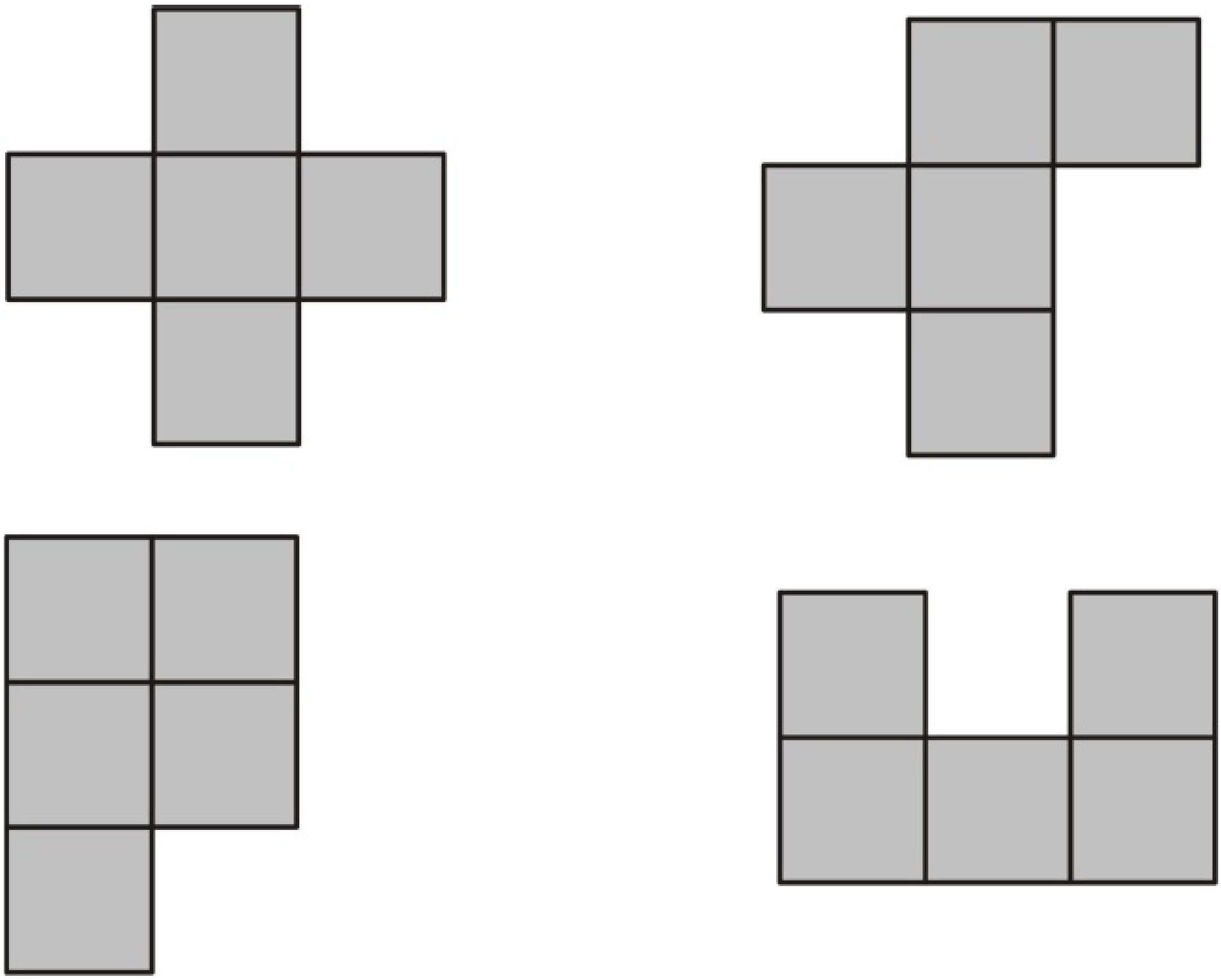

Figura 62: Peças do pentaminó (1 de 4)

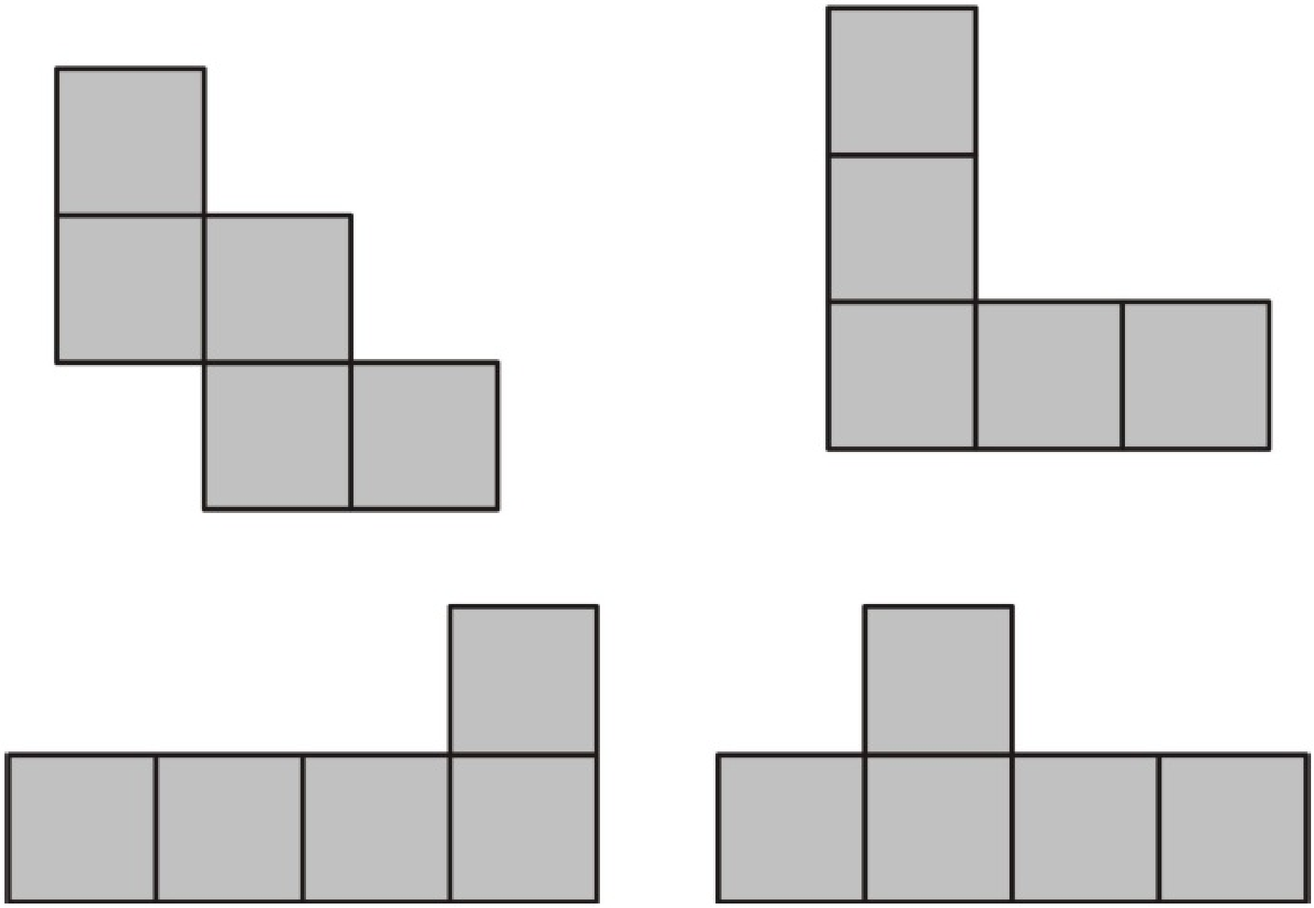

Figura 63: Peças do pentaminó (2 de 4)

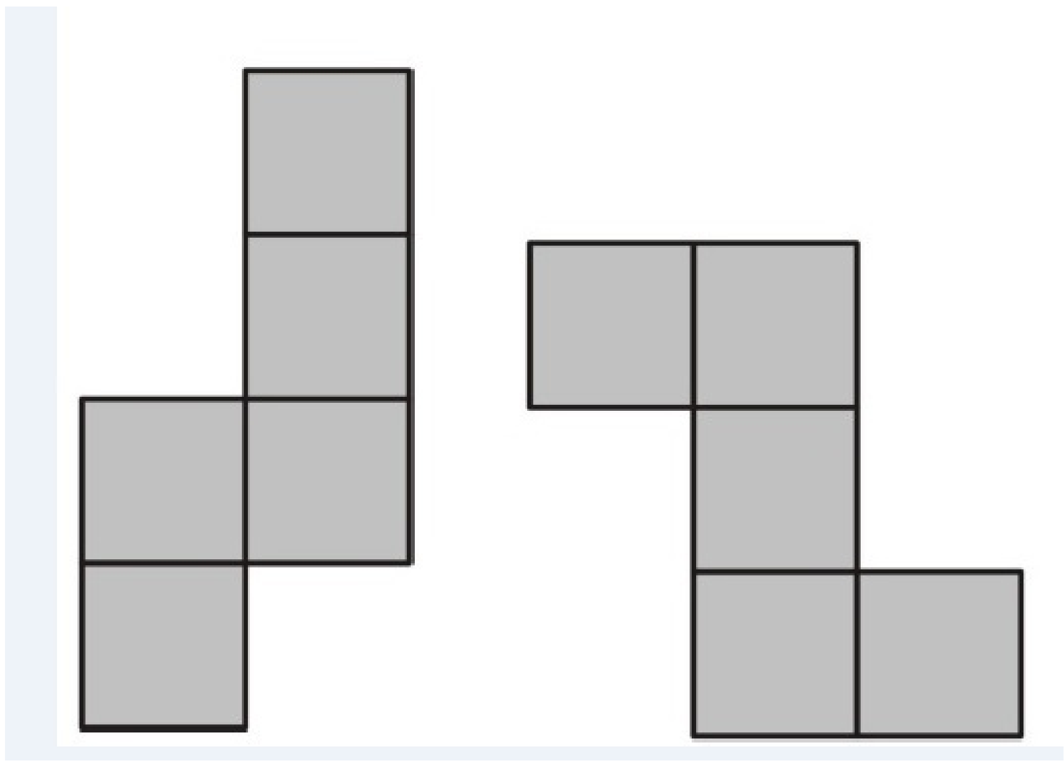

Figura 64: Peças do pentaminó (3 de 4)

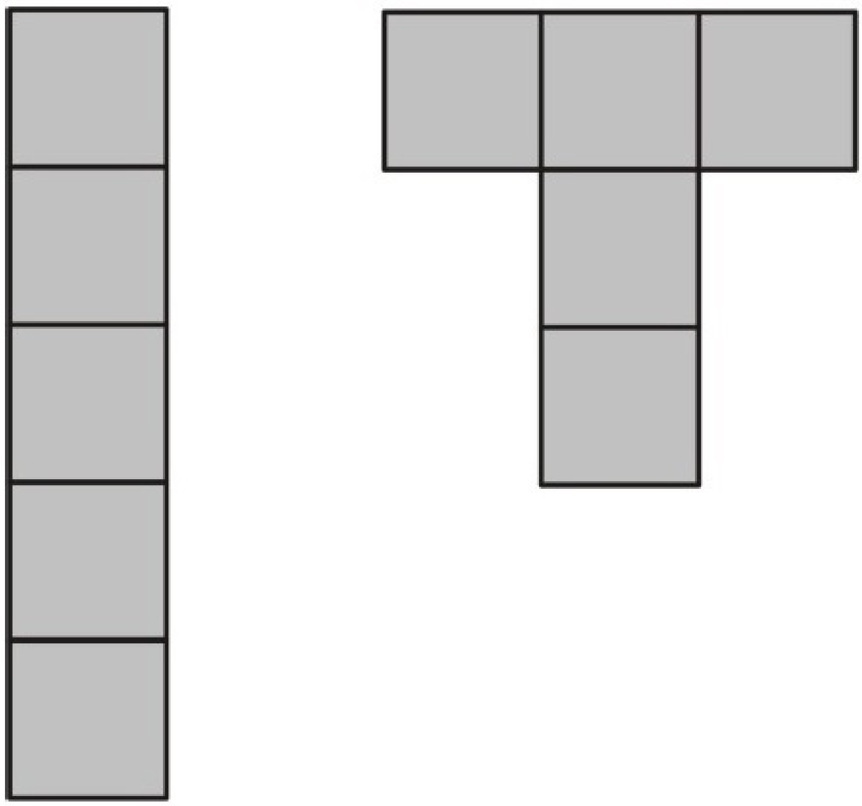

Figura 65: Peças do pentaminó (4 de 4)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo apresentar o conceito de polígonos, e como seus diferentes formatos afetam a maneira de determinar as suas áreas. Apresentamos também os diferentes casos ladrilhamentos do plano por polígonos regulares. Trouxemos também o conceito de poliominós, com destaque para pentaminós, comentando sobre alguns de seus modos de atividades. Por fim, foi fornecida uma sequência didática, cujo público alvo são os alunos do Ensino Médio, com o objetivo de explorar os conceitos apresentados neste trabalho. Essa sequência busca estimular o raciocínio lógico, o desenvolvimento de estratégias e a análise de resultados, respeitando o rigor matemático, mas buscando cativar os alunos com atividades voltadas para o lúdico. Por fim, buscamos deixar claro para os alunos que a Matemática não se resume apenas a números e operações, mas também formas, jogos e desafios, fazendo que seu estudo seja mais atrativo e divertido, ressaltando que a boa compreensão da Matemática será sempre importante para seu desenvolvimento.

É interessante ressaltar que o conceito de ladrilhamento pode facilmente ser trabalhado com outras disciplinas, como por exemplo Artes, através de mosaicos ou ladrilhamentos famosos reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Barbosa, João Lucas Marques, Geometria euclidiana plana, 11a ed., Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio – BNCC*. Brasília, 2020.

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria da Educação Fundamental*. Brasília, MEC/SEF, 1998.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

[4] Diagrama de Voronoy, Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Voronoy. Acesso: 10 de janeiro 2020.

[5] Dias, Cláudio Carlos; Sampaio, João Carlos Vieira, Desafio geométrico: Módulo I, Cuiabá, MT, Central de Texto, 2010.

[6] Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau, Fundamentos da Matemática Elementar Volume 9: Geometria plana, Atual, 2013.

[7] Golomb, Solomon Wolf, Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packing, 2 ed., Princeton, New Jersey, Princeton Academic Press, 1994.

[8] Iezzi, Gelson, Fundamentos de Matemática Elementar Volume 7: Geometria Analítica, Atual, 2013.

[9] Muniz Neto, Antônio Caminha, Tópicos de Matemática Elementar: Geometria euclidiana plana, 1a ed., Rio de Janeiro, SBM, 2013.

[10] Stewart, Ian, Incríveis passatempos matemáticos, Rio de Janeiro, Zahar, 2010.