**Universidade Federal de São Paulo**

Instituto de Ciência e Tecnologia


**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**

# Atividades Escolares que envolvem a Análise Combinatória, a partir da expectativa do desenvolvimento da Habilidade de Contagem, segundo a BNCC


**Alex Sandro Vaz da Silva**

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama



**São José dos Campos**

**Fevereiro, 2020**

Título: *Atividades Escolares que envolvem a Análise Combinatória, a partir da expectativa do desenvolvimento da Habilidade de Contagem, segundo a BNCC*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

**São José dos Campos**
**Fevereiro, 2020**

Vaz da Silva, Alex Sandro

**Atividades Escolares que envolvem a Análise Combinatória, a partir da expectativa do desenvolvimento da Habilidade de Contagem, segundo a BNCC**, Alex Sandro Vaz da Silva – São José dos Campos, 2020.

xi, 101f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

School Activities involving Combinatory Analysis, based on the expectation of the development of the Counting Ability, according to the BNCC

1. Análise Combinatória. 2. Princípio Fundamental da Contagem. 3. Habilidade Matemática. 4. Base Nacional Comum Curricular. 5. Atividade Escolar.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO**

**INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
**PROFMAT**

**Chefe de departamento:**
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

**Coordenador do Programa de Pós-Graduação:**
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

ALEX SANDRO VAZ DA SILVA

# ATIVIDADES ESCOLARES QUE ENVOLVEM A ANÁLISE COMBINATÓRIA, A PARTIR DA EXPECTATIVA DO DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE CONTAGEM, SEGUNDO A BNCC

**Presidente da banca:** Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama Marcelo C. Gama

**Banca examinadora:**

Profa. Dra. Graziela Marchi Tiago

Prof. Dr. Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno

Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

**Data da Defesa:** 13 de fevereiro de 2020

*"O homem, como um ser histórico, inserido num permanente movimento de procura, faz e refaz o seu saber".*

*Paulo Freire*

# AGRADECIMENTOS


Agradeço aos meus familiares e amigos pela ajuda constante em minhas vitórias, por ajudarem a formar a pessoa que sou.

Agradeço à minha mãe Ângela Aparecida Naldoni, que no início da minha formação acadêmica, incentivou a me matricular no curso de Matemática Licenciatura, mesmo sabendo que problemas financeiros viriam até eu me formar.

Agradeço ao meu pai Dárcio Vaz da Silva, que desde sempre foi um incentivador para que eu estudasse, não deixando que abandonasse os estudos após conclusão da antiga 8ª série do Ginásio (hoje 9º ano do Ensino Fundamental).

Agradeço à minha filha Ananda Vitória Damião Vaz da Silva, que desde o sonho que me avisou que eu ia ser pai, criou uma atmosfera maravilhosa na minha vida.

Agradeço aos meus professores do PROFMAT/UNIFESP-SJC, em especial ao orientador Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama, que sempre estão do nosso lado para nos orientar em nossas pesquisas e incertezas.

Agradeço aos amigos do curso PROFMAT por cada momento de convívio, estudo e, principalmente, sofrimento coletivo.

Agradeço aos meus alunos, que ao longo da minha trajetória profissional, foram importantes nas minhas descobertas e práticas pedagógicas.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o curso.

Agradeço à Deus por manter a chama do saber dentro de mim, fazendo com que minhas ações sejam sempre em benefício do próximo.

Agradeço a cada segundo da minha vida dedicados à Educação, que para mim é o norte de qualquer nação.

# RESUMO

A Análise Combinatória é uma área de estudo da matemática que possui ferramentas essenciais ao desenvolvimento da habilidade de contagem, a ser adquirida pelo aluno desde os primeiros anos do Educação Básica, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), promulgada em 20 de dezembro de 2018. No entanto a experiência em sala de aula nos mostra que boa parte dos alunos não apresentam o domínio esperado em matemática, nos anos finais do Ensino Médio. Considerando que a contagem ganha importância significativa na BNCC, tornando-se habilidade matemática imprescindível para a formação do aluno e grande relevância para a sociedade, o estudo da Análise Combinatória é fundamental para garantir os resultados esperados no desenvolvimento dessa habilidade. Como existe uma necessidade de melhorar o desenvolvimento e aprendizagem dos nossos alunos, uma vez que os resultados apresentados por eles nas avaliações externas estão abaixo do esperado, este estudo tem por objetivo contribuir com a pesquisa sobre atividades ligadas a contagem, com uso de ferramentas da Análise Combinatória, que podem ser trabalhadas por profissionais da educação e que produzam resultados positivos no desenvolvimento do conhecimento e prática dos alunos da rede pública (e privada). Atividades com problemas que envolvam contagem, com aplicação do Princípio Multiplicativo e Aditivo, aspectos aleatórios de fenômenos contáveis, análise de algum evento acontecer, estão entre os objetos de estudo.



**Palavras-chave:** 1. Análise Combinatória. 2. Princípio Fundamental da Contagem. 3. Habilidade Matemática. 4. Base Nacional Comum Curricular. 5. Atividade Escolar.

## ABSTRACT

Combinatorial Analysis is an area of study of mathematics that has essential tools for the development of the counting ability to be acquired by the student from the early years of basic education, according to the Common National Curriculum Base (BNCC), promulgated on December 20, 2018. However, classroom experience shows that most students do not have the expected mastery of mathematics in the final years of high school. Considering that counting gains significant importance in BNCC, becoming an essential mathematical skill for student education and great relevance to society, the study of Combinatorial Analysis is fundamental to guarantee the expected results in the development of this skill. As there is a need to improve the evelopment and learning of our students, as the results presented by them in external evaluations are below expectations, this study aims to contribute to research on activities related to counting, using tools from Combinatorial Analysis, which can be worked by education professionals and that produce positive results in the development of knowledge and practice of public (and private) students. Activities with problems involving counting, application of the Multiplicative and Additive Principle, random aspects of countable phenomena, analysis of some event happen, are among the objects of study.

**Keywords:** 1. Combinatorial Analysis. 2. Fundamental Principle of Counting. 3. Mathematical Ability. 4. National Curriculum Common Base. 5. School Activity.

# LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A educação brasileira passa por um momento de transformação, a partir da criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC-2018), para Educação Básica, onde diz que "o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais."

Diante deste desafio, é necessário desenvolver atividades que melhorem a capacidade dos nossos alunos, garantindo-lhes as habilidades matemáticas que farão deles cidadãos críticos e cientes das suas responsabilidades sociais. Gonçalves (2014) diz que "a Análise Combinatória é uma das mais importantes ferramentas de resolução de problemas, parte importante do estudo das Probabilidades e que desenvolve o raciocínio lógico matemático de forma plena e eficaz, fazendo com que o aluno, quando trabalhado corretamente, consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas."

Para o desenvolvimento pleno da Análise Combinatória, o Princípio Fundamental da Contagem é a mais importante ferramenta, pois utiliza a operação de multiplicação em todo seu processo, umas das operações básicas da matemática. A Análise Combinatória também está inserida no ensino de Probabilidade e Estatística, que agora faz parte de uma Unidade Temática, que possui seus objetos de conhecimento e habilidades a serem adquiridos desde os primeiros anos do ensino fundamental, conforme a BNCC.

A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) lançou o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) em 1997, para responder a uma pergunta: "O que é importante os cidadãos saberem e serem capazes de fazer?". Desta forma, trienalmente, o PISA avalia em diversos países o que alunos de 15 anos, no final da educação obrigatória, adquiriram em relação a conhecimentos e habilidades essenciais para a completa participação na sociedade moderna, focada em três áreas de conhecimento: ciências, leitura e matemática. Os resultados no PISA-2015, mostram que no Brasil, 70,3% dos estudantes estão abaixo do nível 2 em matemática, patamar que a OCDE estabelece como necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. Esse percentual é maior na República Dominicana (90,5%) e menor na Finlândia (13,6%).

Ambrozi (2017) cita Bavaresco (2014, p. 72) em sua dissertação de mestrado, "os relatos produzidos por organismos internacionais sobre o progresso educacional, de forma comparativa entre as nações, pressionam governos e sociedades para que se adaptem e respondam a essas transformações", ou seja, o governo brasileiro e outros que apresentam baixos rendimentos nas avaliações internacionais, são pressionados a desenvolverem políticas educacionais que de fato atinjam resultados satisfatórios.

Diante deste cenário, este estudo tenta contribuir para as práticas em sala de aula, abordando atividades que possam melhorar a prática do professor da rede pública (e privada), afim de trazer melhores resultados nos rendimentos dos alunos.

Para isso, fez-se uma pesquisa sobre a História da Análise Combinatória, que também está relaciona com a História da Probabilidade e Estatística, passando pela Antiguidade, com descobertas como problemas de contagem elaborados pelos egípcios, pelo Quadrado Mágico, desenvolvido inicialmente pelos chineses, com o nome de Lo Shu, depois aperfeiçoado pelos árabes, pelo Stomachion de Arquimedes, que hoje por ser confundido com um simples Tangram, que depois teve um início de formalização por matemáticos como Blaise Pascal e Isaac Newton, entre outros. Pascal também ajudou a formalizar parte da Probabilidade e Estatística, a partir de estudos de Girolamo Cardano, um adorador dos jogos de azar, dos quais elaborou conceitos a partir do seu livro *Liber de ludo aleae* (Livro dos Jogos de Azar), baseados em análises sobre jogos que envolviam dados e cartas de baralho.

Em seguida, acrescenta um estudo de quando a Análise Combinatória, como objeto de estudo na área de matemática, integra os currículos de matemático no Brasil. Nesse caminho, também trata de analisar a importância dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que trazem a Análise Combinatória como objeto de estudo, dentro do currículo de matemática, até chegar na BNCC, com suas propostas para educação básica.

A partir de então, formam a base para a pesquisa sobre atividades sobre Análise Combinatória que se ajustam à estrutura do ensino, de acordo com a BNCC, agora formulada nas competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica.

Após uma extensa lista de atividades com problemas envolvendo ferramentas da Análise Combinatória, propõe uma atividade diferenciada com o objetivo de desenvolver nos alunos a capacidade de diferenciar problemas com arranjo dos que envolvem combinação.

Por fim, são realizadas algumas considerações acerca do estudo desenvolvido, além de sugerir novos estudos e novas pesquisas a serem desenvolvidas por futuros pesquisadores.

Encerra com uma breve biografia do autor, abordando aspectos da sua formação e de sua experiência profissional, e de como estas vivências influenciaram na escolha do tema desta pesquisa.

1

# ANÁLISE COMBINATÓRIA AO LONGO DA HISTÓRIA

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que reúne diversas ferramentas de contagem, como Fatorial de um número Natural, Permutação, Arranjo, Combinação, entre outros, que permitem determinar subconjuntos de conjuntos finitos, sem a necessidade de enumerá-los. A sua importância é percebida ao analisar a História da Matemática, em que grandes matemáticos investiram boa parte de suas vidas formulando conceitos para esta área.

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (Morgado et al, 1991)

Por ser um campo da matemática que causa dificuldade tanto na sua compreensão, como no seu ensino, a Análise Combinatória desperta em muitos a necessidade de se buscar novas técnicas que auxiliem professores a atingirem melhores resultados no trabalho do dia a dia com seus alunos.

Por isso é importante percorrer os caminhos deste ramo da matemática, para compreender sua história, como se desenvolveu, até se tornar parte imprescindível no ensino da matemática, fazendo parte dos livros didáticos, além de colaborar para a aquisição da **Habilidade** de contagem, que faz parte do desenvolvimento das competências específicas em Matemáticas, previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

## 1.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA: PRIMEIROS ESTUDOS

Os estudos em Análise combinatória tiveram início na Antiguidade, não havendo uma precisão quanto ao tempo certo, mas pode ter sido iniciado com os Egípcios, na contagem dos seus problemas registrados em Papiros, como o de Rhind, ou com Arquimedes, com seu Stomachion, ou com os chineses, com o Lo Shu. Desde então, tem-se grandes matemáticos que contribuíram para esta área de estudo da matemática.

### 1.1.1 *Análise Combinatória dos Egípcios: problemas de contagem.*

Nos estudos de SANTOS (2013), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas. Um bom exemplo para embasar essa frase é o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.), que segue: "Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos (um hekat é uma unidade de volume, que corresponde a 4,9 litros, aproximadamente); quantos itens têm ao todo?". Percebe-se um exemplo básico da aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, que baseia toda a estrutura do pensamento combinatório.


Figura 1: Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1 650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. [24]

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagens por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro (30 cm de altura por 5 m de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em Tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico. Esse documento, que passou a ser chamado Papiro de Rhind, foi escrito por volta de 1650 a.C. por um escriba chamado Ahmes, ou Ah-mose (sendo por isso também conhecido por Papiro de Ahmes), por solicitação de um certo rei Hyksos que reinou no Egito em algum período entre 1788 a.C. e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 a.C e 1800 a.C, sendo considerado um dos documentos mais antigos da Matemática.

### 1.1.2 *Análise Combinatória de Arquimedes: quase uma brincadeira.*

De acordo com SANTOS (2013), estudos acerca da Análise Combinatória começaram com uma proposta do matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), que propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado Stomachion (palavra derivada do grego stomachos, em português, “estômago”), que consistia em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado, como na figura abaixo.

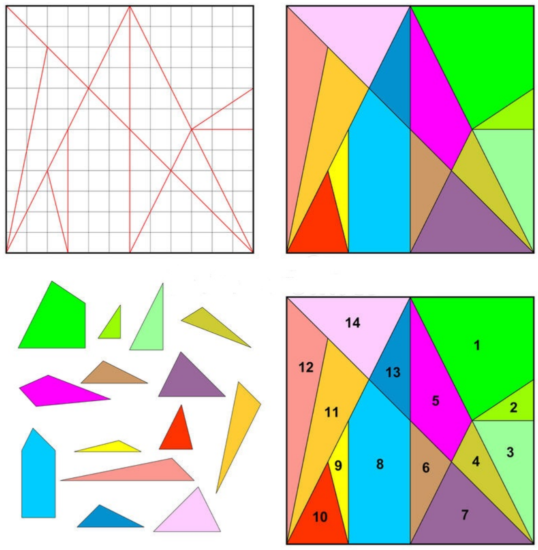



Figura 2: Parecido com o TANGRAM, o STOMACHION remonta a ideia de encaixe de figuras geométricas. [13] [14] [15] [25]

Hoje em dia é provável que as pessoas pensem que a proposta é como um TANGRAM, mais conhecido entre os jovens, mas estudos realizados pelo historiador matemático Reviel Netz, da Universidadede Stanford, Califórnia, dão conta de que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória. Mais especificamente, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado. Desconsiderando as posições simétricas, chegou-se a 268 possibilidades, valor que não é possível verificar se Arquimedes encontrou.

### 1.1.3 *Análise Combinatória dos Chineses: os quadrados mágicos.*

Outra interessante brincadeira conhecida entre os jovens, o quadrado mágico, também fez parte dos primeiros estudos sobre Análise Combinatória. Segundo SANTOS (2013), Lo Shu é o nome do primeiro quadrado mágico conhecido, ainda no século I d.C., porém ele pode ser bem mais antigo do que isto. A figura 3 abaixo ilustra a ideia do Lo Shu e o formato de quadrado mágico mais conhecido:

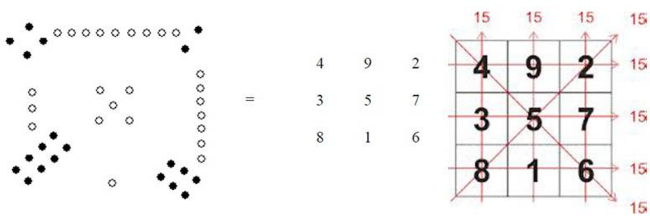



Figura 3: À esquerda a imagem do Lo Shu e à direita um quadrado mágico mais conhecido. [14] [15]

A forma original do Lo Shu está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, e este quadrado foi uma inovação em sua época, pois nela a produção de qualquer aritmética simples era motivo de euforia. Acredita-se que a ideia dos quadrados mágicos, uma tabela quadrada, com números, em que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais são iguais, chegou até os árabes pelos chineses, e que estes deram grandes contribuições e construíram quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5 e 6. Além de criar quadrados de ordem superior ao Lo Shu, os árabes criaram regras para a construção de quadrados de uma determinada ordem.

Um trabalho interessante foi desenvolvido pelo chinês Yang Hui por volta do século XIII, se tratava de um quadrado 9x9 constituído por nove quadrados mágicos 3x3, conforme figura 4.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 76 | 13 | 36 | 81 | 18 | 29 | 74 | 11 |
| 22 | 40 | 58 | 27 | 45 | 63 | 20 | 38 | 56 |
| 67 | 4 | 49 | 72 | 9 | 54 | 65 | 2 | 47 |
| 30 | 75 | 12 | 32 | 77 | 14 | 34 | 79 | 16 |
| 21 | 39 | 57 | 23 | 41 | 59 | 25 | 43 | 61 |
| 66 | 3 | 48 | 68 | 5 | 50 | 70 | 7 | 52 |
| 35 | 80 | 17 | 28 | 73 | 10 | 33 | 78 | 15 |
| 26 | 44 | 62 | 19 | 37 | 55 | 24 | 42 | 60 |
| 71 | 8 | 53 | 64 | 1 | 46 | 69 | 6 | 51 |

Figura 4: Imagem de um Quadrado Mágico 9x9, formados por 9 quadrados mágicos 3x3. [15]

Hoje em dia é possível encontrar vários destes quadrados mágicos em revistas de passatempo, em que o objetivo é completar as lacunas onde faltam os números.

## 1.2 PROBABILIDADE LIGADA A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Ao mesmo tempo que os primeiros estudos em Análise Combinatória estavam sendo desenvolvidos, outro ramo da matemática dava seus primeiros passos para se constituir numa grande área: a Probabilidade. DA SILVA (2016), verificou que a palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como “sorte”, “risca”, “azar”, "chance", “incerteza”, “duvidoso”, dependendo do contexto.

A Teoria da Probabilidade teve início com o fascínio do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades, fascínio presente nos jogos de azar disseminados na Idade Média, que eram comumente praticados através de apostas, além da utilização no intuito de "antecipar o futuro".

Alguns nomes importantes na História da Matemática deram grandes contribuições a esta grande área, que hoje tem significativa importância na BNCC, e por isso merece uma abordagem com destaque.

### 1.2.1 *Probabilidade de Cardano: o jogador.*

A história de Girolamo Cardano (1501-1576) é digna dos melhores filmes de drama. Nascido em Pávia, na Itália, filho de Fazio Cardano e Chiara Micheri, SANTOS JR. (2016) descreve que Cardano teve um início de vida muito difícil, para não dizer até mesmo antes de nascer. Indica que algumas biografias dão conta de que a mãe forçou aborto algumas vezes, não obtendo sucesso em nenhum deles. Com saúde frágil e a Europa passando por um momento difícil em relação a doenças, sua mãe se viu obrigada a se abrigar longe do pai e irmãos de Cardano, período em que a mãe recebeu a notícia do falecimento dos seus outros 3 filhos, pela peste negra.

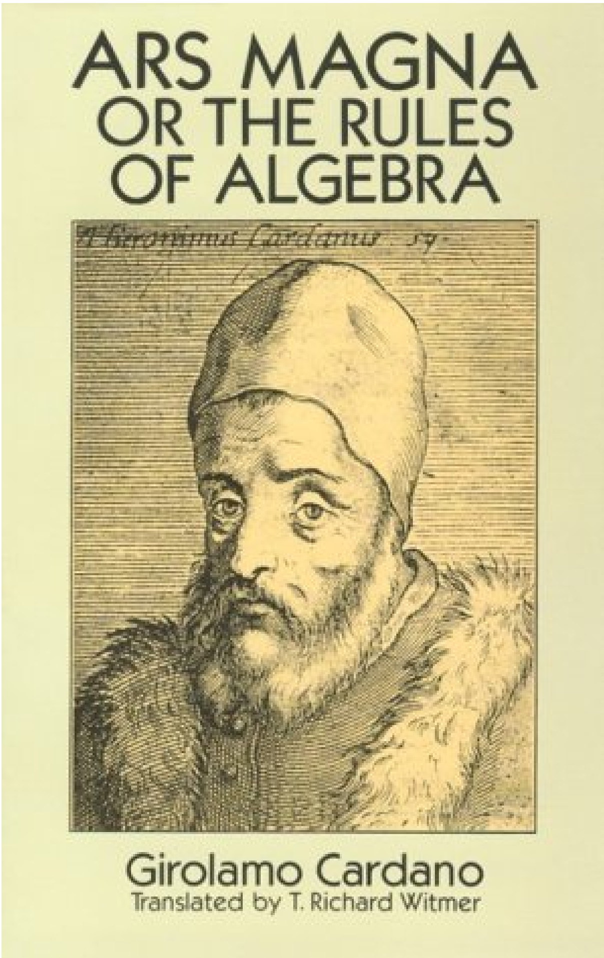



Figura 5: Imagem de Girolamo Cardano na capa de uma tradução do seu livro: Ars Magna (A Arte Maior). [26]

Passado este período, inspirado em seu pai, um intelectual de certa projeção que se dedicava à medicina, à advocacia e à matemática, Cardano ainda adolescente inciou seus estudos em medicina, contrariando seu pai, que queria ver o filho estudando direito, pois assim teria uma bolsa de estudos no valor de cem coroas anuais. Sabendo que não teria qualquer ajuda financeira para seus estudos em medicina, começou a juntar dinheiro dando aulas de astronomia, geometria e alquimia, além de escrever horóscopos e de se envolver com jogos de azar apostado, de onde conseguiu obter muitas coroas, como conta MLODINOW (2009).

Ao mesmo tempo em que jogava para obter recursos, investia nos seus estudos. E foi jogando que percebeu algumas teorias desenvolvidas por ele num manual intitulado *Liber de ludo aleae* (Livro dos Jogos de Azar), que só viria a ser publicado mais de cem anos após a sua morte. No livro, ele faz estudos sistematizados sobre as possibilidades de tirar um ás de um baralho de cartas, de tirar um duplo 6 ou tirar soma igual a 7 no lançamento de dois dados, ou seja, da razão entre eventos favoráveis e eventos possíveis (regra geral de Cardano), entre outras questões. Cardano afirmava que a probabilidade de tirar 1, 3 ou 5 em dados honestos era igual à probabilidade de tirar 2, 4 ou 6 nestes mesmos dados, pois só ocorreria o contrário (probabilidades diferentes) se os dados fossem viciados (SILVA e COUTINHO, 2005).

### 1.2.2 *Probabilidade de Pacioli: o pai da contabilidade.*

O matemático Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1517) foi um dos principais nomes do humanismo renascentista, tendo transitado tranquilamente entre os reinos secular e espiritual. É considerado o ‘Pai da Contabilidade Moderna’ por seu livro *Summa de Arithmetica*, publicado em 1494, que contém a primeira descrição de dupla entrada e marca o nascimento dos negócios modernos, de acordo com os estudos de CALABRIA e CAVALARI (2013). Tal obra também o colocou na história do desenvolvimento da probabilidade.

Nascido na cidade italiana de Arezzo, no vilarejo de Borgo San Sepolcro, na região da Toscana, por volta de 1445, Pacioli tinha como objetivo compilar um resumo da matemática e torná-lo comumente disponível na esperança de que isso melhorasse a vida das pessoas. Na década de 1470, foi a Roma e tornou-se frade na Ordem dos Franciscanos Menores e, ainda, elaborou dois tratados, sendo um sobre álgebra e outro sobre aritmética. Foi professor em diversas instituições como na Universidade de Perugia, em Zara, na Sapienza, em Roma, em Nápoles, em Pádua, em Milão, dentre outras. Fez a primeira tradução para o italiano dos Elementos de Euclides. Em 1509 publicou a obra *De Divina Proportione*, ilustrada pelo seu amigo de Leonardo da Vinci, obra que se destaca pela tentativa de combinar álgebra com geometria.

Pacioli deu a sua contribuição à Probabilidade quando divulgou o "Problema do Pontos"(divisão de apostas), que apresentava a seguinte situação: um jogo equitativo termina quando um dos jogadores vence seis partidas, supondo que por algum motivo o jogo tenha que ser interrompido, e neste momento o primeiro jogador tenha sido vencedor em cinco


Figura 6: Imagem de Luca Pacioli (à esquerda) e seu amigo Leonardo Da Vinci (à direita). [27]

partidas, e o segundo em apenas três, como as apostas devem ser repartidas? Novamente, os estudos de CALABRIA e CAVALARI (2013) apontam que Pacioli publicou, em 1494, na obra intitulada *Summa de arithmetica, geometria, proportinoni e proportionalità*, uma solução (incorreta) para este problema. Tal solução apontava que os jogadores deveriam dividir a aposta numa proporção de 5 por 3. O "Problema dos Pontos"pode ser considerado como o problema fundador do cálculo das probabilidades e inspirou muitos outros pensadores da era Renascentista, como Tartaglia e Cardano.

### 1.2.3 *Probabilidade de Tartaglia: o gago.*

Niccolo Fontana de Brescia (1499-1557), conhecido por Niccolo Tartaglia, nasceu em uma família humilde na Bréscia, Itália, em 1499. Aprendeu a escrever sozinho e ensinou Matemática em cidades Italianas como Verona, Veneza, Piacenza e Bréscia, de acordo com CALABRIA e CAVALARI (2013). Seu apelido Tartaglia significa "gago", condição que adquiriu após sofrer golpes de sabre, por soldados franceses em conflito na região da Bréscia, onde morava com mãe e irmãos. O uso constante de barba, segundo Tartaglia descreve em seu livro, era para camuflar as cicatrizes decorrentes dos golpes de sabre, pois argumentava que se sua barba não escondesse as cicatrizes, ele pareceria um monstro.

Em 1537, publicou sua primeira obra intitulada *Nova scientia inventa*, que abordava conceitos relativos à balística. Em 1546, escreveu outro trabalho *Quesiti et inventioni diverse*, que abordava conceitos de engenharia e arte militar e, ainda, apresentava questões matemáticas. Nesta obra estão publicados trechos de sua autobiografia que narram, dentre outras situações, seu contato com Cardano. O trabalho de maior destaque da carreira de Tartaglia foi *Tratado general de números y medidas*, publicado em 1556, no qual eram apresentadas regras de aritmética, álgebra, geometria e física. Tartaglia também


Figura 7: Imagem de Niccolo Tartaglia em capa do seu livro *Quesiti et inventioni diverse.* [28]

realizou trabalhos nas áreas de aritmética, geometria, álgebra, balística e estática. A ele foi atribuído o desenvolvimento do primeiro método geral para resolver equações cúbicas. Este matemático ainda publicou versões de obras de Arquimedes e Jordanus Nemorarius.

Foi Tartaglia, que em 1556, na sua publicação *General Trattato*, levantou a hipótese de que a solução de Pacioli para o "Problema dos Pontos"pudesse estar incorreta, sugerindo que a divisão da aposta deveria considerar também quem tinha a maior possibilidade de ganhar o jogo no momento em que foi encerrado, argumentando que o jogador com mais vitórias tem mais chances de ganhar o jogo, contribuindo, assim, com o início das primeiras ideias acerca da teoria da probabilidade, que seriam mais aprofundadas posteriormente por outros matemáticos da época.

## 1.3 MATEMÁTICOS E O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Antes do século XV, matemáticos como o hindu Báskhara (1114-1185?), conhecido geralmente pela "fórmula de Báskhara"para a solução de equações do 2º grau, e o também filósofo religioso francês Levi ben Gerson (1288-1344), já sabiam utilizar fórmulas de Permutação, Arranjo e Combinação.

Após o século XV, a Análise Combinatória ganhou grande importância, sendo ferramenta crucial para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, pois os estudos iniciais destes campos da matemática estão ligados diretamente, como mencionado anteriormente.

Michael Stifel (1486?-1567), matemático alemão, publicou em 1554 um trabalho chamado *Arithmetica Integra*, no qual menciona o Triângulo de Pascal, além de uma relação com seu nome:

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \text{ Relação de Stifel.}$$

Segundo Morgado et al (1991) "o primeiro aparecimento do triângulo de Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552)".

Em 1654, foi o próprio Pascal (1623-1662) que publicou um tratado mostrando como utilizar o triângulo com seu nome para determinar os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$. Algum tempo depois, em 1713, Jakob Bernoulli (1654 -1705), com base na publicação de Pascal, demonstrou em seu trabalho intitulado *Ars Conjectandi* que $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$. Além deles, Isaac Newton (1646-1727) também contribui para desenvolvimento de binômios, chegando ao desenvolvimento do binômio do tipo $(a+b)^r$, em que r é um número racional.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão, foi quem utilizou o termo "combinatório"pela primeira vez, além de ter descoberto o Teorema Multinomial, que é o desenvolvimento das expressões do tipo $(a+b+c+d+...+x+y+z)^n$, demonstrado posteriormente por Johann Bemoulli (1667- 1748).

"Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) mostraram como achar diretamente os números de Fibonacci, o Leonardo de Pisa, sem ser necessário calcular todos eles, até o que desejamos"de acordo com MORGADO et al (1991), em que De Moivre aplicou pela primeira vez a técnica de Funções Geradoras.

Autor do livro *Introductio in Analysin Infinitorum*, Leonhard Euler (1707-1783) foi outro grande matemático a contribuir com a Análise Combinatória, desenvolvendo entre outras teorias, a Teoria das Partições, para responder de quantas maneiras um número pode ser escrito como soma de inteiros positivos distintos, pergunta encaminhada, por carta, pelo matemático francês Phillipe Naudé. Euler também foi quem iniciou os Estudos de Grafos, para solucionar o problema das Sete Pontes de Konigsberg, resolvido em 1736.

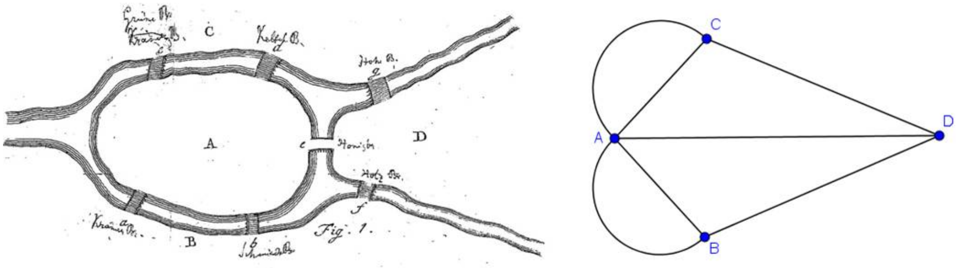



Figura 8: À esquerda desenho das Sete Pontes de Konigsberg. À direita o Primeiro Grafo. [18]

Mais recentemente, no século XX, segundo MORGADO et al (1991), destacam-se o matemático George Pólya (1887-1985), que

> introduziu nova e importante técnica de enumeração, que se tem prestado às mais variadas aplicações, permitindo tratar, de maneira unificada, desde a enumeração do número de isômeros de uma substância, até a enumeração de grafos, principalmente árvores, resolvendo problemas que ate então eram atacados somente por métodos "ad hoc". Sua teoria é uma maneira de enumerar configurações não- equivalentes relativamente a um grupo de permutações dado. Um exemplo simples de aplicação da teoria do Pólya é o de determinar o número de tetraedros regulares "diferentes"com faces pintadas com duas cores, preto e branco, por exemplo. Podemos ter um tetraedro todo preto, outro lodo branco, um com uma face branca e as outras pretas, etc. Dois tetraedros são considerados "diferentes"se um deles não pode ser obtido do outro por meio de rotações.

e também o matemático e lógico inglês Frank Plumpton Ramsey (1903- 1930), que deixou uma teoria com seu nome, afirmando que

> se tivermos no plano um conjunto de n pontos, com $n \geq 6$, no qual não há três pontos colineares, então, se unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas, por exemplo, preto e branco, para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então forçosamente teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor (preto ou branco).

Em se tratando da História da Matemática, é provável que hajam outros matemáticos que contribuíram para a Análise Combinatória, que não foram destacados nesta pesquisa. No entanto percebe-se que a lista é grande, com nomes importantes, que possuem suas teorias em destaque até os dias atuais.

## 1.4 ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

No Brasil, antes da década de 80, a Análise Combinatória já era parte do currículo da Educação Básica, porém somente para o Ensino Médio e para últimos anos do Ensino Fundamental. A partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 1996), um importante marco na Educação do Brasil, foram criados os PCNs para o Ensino Fundamental, em 1997, e, em 2000, para o Ensino Médio. Foi o início de uma reestruturação da educação do Brasil, que norteou a formação dos currículos em educação no país, em que houve uma ampliação do ensino de Análise Combinatória, passando a fazer parte dos 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental.

O documento *Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental* (BRASIL, 2012) enuncia que "a necessidade de organizar e de comunicar informações de maneira eficiente faz parte do processo de alfabetização matemática", e que no processo de alfabetização as crianças devem desenvolver a capacidade de "reconhecer regularidades em diversas situações, de diversas naturezas, compará-las e estabelecer relações entre elas e as regularidades já conhecidas. Para que isso ocorra, ressalta que

> as crianças em alfabetização e letramento devem tomar contato com a leitura e interpretação de tabelas e gráficos e também devem perceber que existem fenômenos que são aleatórios, e que existem variáveis que podem interferir em sua ocorrência (BRASIL, 2012, p.83).

É importante, neste contexto, ressaltar que os PCNs deixam claro que a Matemática tem a função, no ensino fundamental, de demonstrar ao aluno que ela é um instrumento para compreender o mundo em que vivemos. O objetivo também é trabalhar essa área do conhecimento de maneira que se estimule o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Para tal, há de serem selecionados os conteúdos de acordo com a sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. E é por essa relevância que a Análise Combinatória é inserida no currículo. Se, para os PCNs, a Matemática "interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno", a Análise Combinatória é um conteúdo que deve ser trabalhado desde a infância, pois "o conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contra-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos".

Nos PCNs para o Ensino Fundamental, a Análise Combinatória é fundamental na aquisição da capacidade em "resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e tabelas", que faz parte dos conceitos e procedimentos que os alunos devem desenvolver ao longo do 3º Ciclo, além de "resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão".

> Tendo em vista que os alunos já desenvolveram estratégias para resolver os problemas de contagem nos ciclos anteriores, apoiados em tabelas, diagramas etc., os problema poderão apresentar números um pouco maiores de modo que percebam que o princípio multiplicativo é um recurso que auxilia resolver mais facilmente muitos problemas. (BRASIL, 1998, p.85)

Além disso, para o 4º Ciclo, espera-se que a Análise Combinatória contribua para o desenvolvimento do "raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos".

A maior parte do estudo em Análise Combinatória está prevista para ocorrer no Ensino Médio. E ela concorre para que

> a as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população,

> aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p.44)

Em 2006 o Ministério da Educação cria um documento chamado *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs+2006), que

> pretende discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de forma a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a educação básica. Procura estabelecer um diálogo direto com professores e demais educadores que atuam na escola, reconhecendo seu papel central e insubstituível na condução e no aperfeiçoamento da educação básica. Sem pretensão normativa, e de forma complementar aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as orientações educacionais aqui apresentadas têm em vista a escola em sua totalidade, ainda que este volume se concentre nas disciplinas da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. (BRASIL, 2006, p.7)

Como documento orientador, ressalta a importância da Análise Combinatória, dizendo que

> a Contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 2006, p.126)

Após este período de reestruturação da educação e, consequentemente, de mudanças nos currículos, inciaram os estudos para a criação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2018), que se tornou o principal documento norteador dos processos de aprendizagem, que será tema de estudo no próximo capítulo.

2

# BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: CONTAGEM COMO UMA DAS HABILIDADES

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está estruturada de modo a explicitar as dez competências gerais que os alunos devem desenvolver ao longo de toda a Educação Básica e em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes, que pretendem assegurar uma formação humana integral que visa à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

As competências percorrem as diversas áreas de conhecimento, e estão definidas a seguir:

> **COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA**
>
> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o

> consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
>
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

A Educação Básica está dividida em 3 etapas:

- Ensino Infantil
- Ensino Fundamental
- Ensino Médio

Como o profissional formado em matemática licenciatura não é habilitado a lecionar na Ensino Infantil, não será abordado esta etapa de educação neste estudo.

Para o desenvolvimento destas Competências, a BNCC define que "as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares". Para tanto, elas são descritas de acordo com uma determinada estrutura alfanumérica, como se vê no exemplo de uma habilidade do **Ensino Fundamental**: **(EF08MA03)**.

Veja o significado de cada dígito a seguir:

a) Os dois primeiros dígitos indicam a etapa de ensino:

- EI - Educação Infantil
- EF - Ensino Fundamental
- EM - Ensino Médio

b) Os 3º e 4º dígitos numéricos indicam o ano ou bloco de anos:

- Quando iniciados com 0 (zero), correspondem aos anos/séries: 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 e 09.
- Bloco de anos do Ensino Fundamental I (do 1º ao 5º ano): 15;
- Bloco de anos do Ensino Fundamental II (do 6º ao 9º ano): 69;
- Blocos de dois a três anos: 12, 34, 25, 68, 89 ou 79, entre outros.

c) Os 5º e 6º dígitos indicam componente curricular:

- AR = Arte
- CI = Ciências
- EF = Educação Física
- ER = Ensino Religioso

- GE = Geografia
- HI - História
- LI = Língua Inglesa
- MA = Matemática
- LP = Língua Portuguesa

d) Os dois últimos dígitos numéricos indicam a posição na sequência de habilidades propostas.

Interpretando o exemplo dado, **(EF08MA03)**, temos que a habilidade proposta faz parte do Ensino Fundamental **(EF)**, para o 8º ano **(08)**, da componente curricular matemática **(MA)**, na terceira posição **(03)** da sequência de habilidades propostas em Matemática para o 8º ano.

A estrutura de identificação da habilidade no **Ensino Médio** tem algumas alterações na sequência alfanumérica e será explicada na sessão específica, por envolver **Áreas de Conhecimento**.

## 2.1 ENSINO FUNDAMENTAL

Segundo a BNCC,

> o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais,

além disso, reforça que

> a matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório.

Complementa dizendo que

> a Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico.

Desta forma, entende-se que

> a área de Matemática e, por consequência, o componente curricular de Matemática devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas.

A BNCC define as competências Matemáticas para o Ensino Fundamenta da seguinte forma:

> **COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**
>
> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las eavaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

A BNCC é referenciada nos documentos curriculares brasileiros recentes, e considera que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. São consideradas ideias fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter em objetos de conhecimento nos espaços escolares. Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

> A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar

> atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

Tendo como referência Ensino Fundamental – Anos Finais, de acordo com a BNCC "espera-se que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizem variadas estratégias, obtendo compreensão dos processos neles envolvidos", nos quais estão inseridos os problemas de contagem, que envolvem **Análise Combinatória**.

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática **Probabilidade e Estatística**. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.

De acordo com a BNCC, o objetivo do estudo de noções de **Probabilidade**, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é

> promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista.

Com relação à **Estatística**,

> os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da estatística no cotidiano dos alunos. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões. No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é que os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas

> descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico. Esse planejamento inclui a definição de questões relevantes e da população a ser pesquisada, a decisão sobre a necessidade ou não de usar amostra e, quando for o caso, a seleção de seus elementos por meio de uma adequada técnica de amostragem.

Como abordado anteriormente, a BNCC traz a contagem, na qual está inserida a **Análise Combinatória**, como um dos conhecimentos e habilidades a ser adquirida ao longo do ensino fundamental, inserida no estudo de temáticas, como os Números e também na Probabilidade e Estatística.

A seguir estão descritos a Unidade Temática, Objeto de Conhecimento e Habilidades a serem adquiridas, relacionadas com a Análise Combinatória.

### 2.1.1 *Ensino Fundamental I - Anos Iniciais: do 1º ao 5º ano.*

O Ensino Fundamental I é composto por 5 anos e, apesar do profissional formado em matemática licenciatura não ser habilitado a lecionar nesta etapa do ensino, é importante que saiba o que é trabalhado nesta etapa, relacionado a área de Análise Combinatória, para que possa planejar suas atividades e obter resultados favoráveis em anos posteriores.

A seguir estão as tabelas com as descrições das habilidades, de acordo com a Unidade Temática e o Objeto de Conhecimento, ano por ano, **Ensino Fundamental I - Anos Finais**:

Tabela 1: Habilidades do 1º ano EF

| **Unidade Temática** | **Objeto de Conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Probabilidade e Estatística** | • Noção de acaso | **(EF01MA20)** Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano. |

Tabela 2: Habilidades do 2º ano EF

| **Unidade Temática** | **Objeto de Conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Probabilidade e estatística** | • Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano | **(EF02MA21)** Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis". |

Tabela 3: Habilidades do 3º ano EF

| **Unidade Temática** | **Objeto de Conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Probabilidade e estatística** | • Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral | **(EF03MA25)** Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência. |

Tabela 4: Habilidades do 4º ano EF

| **Unidade Temática** | **Objeto de conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Números** | • Problemas de contagem | **(EF04MA08)** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. |
| **Probabilidade e Estatística** | • Análise de chances de eventos aleatórios | **(EF04MA26)** Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações. |

Tabela 5: Habilidades do 5º ano EF

| Unidade Temática | Objeto de conhecimento | Habilidade |
|---|---|---|
| **Números** | • Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?" | **(EF05MA09)** Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. |
| **Probabilidade e Estatística** | • Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios;<br>• Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis | **(EF05MA22)** Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.<br>**(EF05MA23)** Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis). |

Observe que em todos os anos a Unidade Temática **Probabilidade e Estatística** está presente, mostrando a sua importância na BNCC.

### 2.1.2 *Ensino Fundamental II - Anos Finais: do 6º ao 9º ano.*

O **Ensino Fundamental II - Anos Finais** é formado por 4 anos, do 6º ao 9º, onde se inicia o estudo das componentes curriculares (disciplinas) de forma separada, ou seja, para cada componente tem um professor específico, licenciado na respectiva componente, com uma determinada quantidade de aulas semanais para executar seu plano de ensino.

Em geral, o ensino fundamental é composto de 25 aulas na semana (5 aulas diárias com 50 minutos cada uma), das quais são destinadas 5 para a componente de matemática. Quando as redes adotam 30 aulas semanais, costuma-se acrescentar uma aula a mais para a componente matemática. Geralmente a componente que tem mais aulas é a Língua Portuguesa, com 6 ou 7 aulas semanais. Por esta composição, nota-se a importância que a matemática tem nesta etapa do ensino, considerada fundamental na formação do aluno e sua preparação para a vida.

A BNCC orienta que

> para o desenvolvimento das habilidades previstas para o **Ensino Fundamental – Anos Finais**, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

É comum que alunos questionem as atividades propostas pelos professores de matemática quando não parecem condizer com sua realidade. Diante de tais situações, para que alcance o desenvolvimento de cada uma das habilidades em seus alunos, o professor deve buscar elementos históricos da matemática, além de conhecer a sua clientela, para propor atividades, as quais devem considerar as experiências e os conhecimentos dos seus alunos.

A seguir estão as tabelas com as descrições das habilidades, de acordo com a Unidade Temática e o Objeto de Conhecimento, ano por ano, do **Ensino Fundamental II - Anos Finais**:

Tabela 6: Habilidades do 6º ano EF

| **Unidade Temática** | **Objeto de Conhecimento** | **Habilidade** |
|---|---|---|
| **Probabilidade e Estatística** | • Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.<br>• Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).<br>• Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas. | **(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.<br>**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas empresa etc.). |

Tabela 7: Habilidades do 7º ano EF

| Unidade Temática | Objeto de conhecimento | Habilidade |
|---|---|---|
| **Números** | • Múltiplos e divisores de um número natural | **(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.<br>**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.<br>**(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.<br>**(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. |
| **Probabilidade e Estatística** | • Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências | **(EF07MA34)** Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências. |

Tabela 8: Habilidades do 8º ano EF

| Unidade Temática | Objeto de conhecimento | Habilidade |
|---|---|---|
| **Números** | • O princípio multiplicativo da contagem | **(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. |
| **Probabilidade e Estatística** | • Princípio multiplicativo da contagem<br>• Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral | **(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. |

Tabela 9: Habilidades do 9º ano EF

| Unidade Temática | Objeto de Conhecimento | Habilidade |
|---|---|---|
| **Probabilidade e Estatística** | • Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.<br>• Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação | **(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. |

Outra indicação importante da BNCC é a inclusão da **História da Matemática**

> como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esse recurso e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização de conceitos matemáticos.

A BNCC salienta ainda que

> a leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão das habilidades. Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes.
>
> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria **História da Matemática**. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

O papel do professor de matemática é fundamental na constituição das habilidades indicadas neste etapa do ensino, pois o alunos ainda são muito dependentes de orientações e possuem baixa quantidade de tempo dedicados à leitura. Apesar da BNCC trazer uma novas proposta de entendimento sobre como aprender, ela em si não é o fim, é apenas parte de um processo.

## 2.2 ENSINO MÉDIO

A BNCC enfatiza que

> o Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica, direito público subjetivo de todo cidadão brasileiro. Todavia, a realidade educacional do País tem mostrado que essa etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação. Para além da necessidade de universalizar o atendimento, tem-se mostrado crucial garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, respondendo às suas demandas e aspirações presentes e futuras.

Além disso, complementa afirmando que

> para responder a essa necessidade de recriação da escola, mostra-se imprescindível reconhecer que as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação. Nesse cenário cada vez mais complexo, dinâmico e fluido, as incertezas relativas às mudanças no mundo do trabalho e nas relações sociais como um todo representam um grande desafio para a formulação de políticas e propostas de organização curriculares para a Educação Básica, em geral, e para o Ensino Médio, em particular.

Vale lembrar a finalidade do Ensino Médio, norteado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), em 1996:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

A **BNCC do Ensino Médio**, como também a de Educação Infantil e o do Ensino Fundamental, é "centrada no desenvolvimento de competências e orientada pelo princípio da educação integral. Portanto, as competências gerais da Educação Básica orientam igualmente as aprendizagens dessa etapa".

A organização da **BNCC do Ensino Médio** é por áreas do conhecimento:

- Linguagens e suas Tecnologias;
- Matemática e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Para cada uma das áreas do conhecimento, a BNCC define as

> competências específicas, articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio. Essas competências específicas de área do Ensino Médio também devem orientar a proposição e o detalhamento dos itinerários formativos relativos a essas áreas.

De acordo com cada uma dessas competências, a BNCC descreve as habilidades a serem desenvolvidas ao longo da etapa, que constituem a formação geral básica proposta. Este conjunto de competências específicas e habilidades, definidas para o Ensino Médio, é que contribuem para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica e está articulado às aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental, atendendo ao objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral, algumas das finalidades dessa etapa, além de contribui para que os estudantes possam construir e realizar seu projeto de vida, em consonância com os princípios da justiça, da ética e da cidadania.

Uma análise acerca da área de Matemática, no Ensino Fundamental, observa-se que a BNCC

> centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). No Ensino Médio a BNCC define a **Matemática e suas Tecnologias** como **Área do Conhecimento**, e propõe

> a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

Dando continuidade às aprendizagens do Ensino do Fundamental, no Ensino Médio o objetivo é

> a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é

> preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

A BNCC considera que a área de **Matemática e suas Tecnologias** tem

> a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

No Ensino Médio, a BNCC pressupõe que a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento das competências específicas, relacionadas com cada um das habilidades a serem alcançadas nessa etapa, que serão indicadas posteriormente. Apesar de cada uma das habilidades estarem associadas a uma determinada competência, ela também poder ser significativa no desenvolvimento de outras.

A Matemática é oferecida nos três anos do Ensino Médio, no entanto as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação. Essa decisão permite flexibilizar formatação anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola.

A BNCC do Ensino Médio define as competências da seguinte forma:

> **COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO**
>
> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Diferente do **Ensino Fundamental**, onde as habilidades foram organizadas por Unidade Temática, Objeto de Conhecimento e divididos por anos/série, no **Ensino Médio** as habilidades foram divididas por competências. Sendo assim, serão apresentadas todas as habilidades propostas em matemática para o **Ensino Médio**, de acordo com cada Competência e, em seguida, serão realizadas observações acerca daquelas que estão alinhadas à **Análise Combinatória**. Cada uma das habilidades do **Ensino Médio**, como mencionado anteriormente, é identificada por uma estrutura alfanumérica com 10 dígitos, como no exemplo: **EM13MAT310**

Veja o significado de cada dígito a seguir:

a) Os dois primeiros dígitos indicam a etapa de ensino: EM - Ensino Médio.

b) Os 3º e 4º dígitos numéricos indicam o bloco de anos/séries: 13 - 1º ao 3º ano do Ensino Médio (neste caso específico, não se tem 01, 02 ou 03, pois as habilidades não foram divididas por anos/séries).

c) Os 5º, 6º e 7º dígitos indicam a Área de Conhecimento:
- LGG - Linguagens e suas Tecnologias
- MAT - Matemática e suas Tecnologias
- CNT - Ciências da Natureza e suas Tecnologias
- CHS - Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

d) O 8º dígito indica a Competência Específica da Área de Conhecimento, que podem ser: 1, 2, 3, 4 ou 5, já descritas anteriormente.

e) Os 9º e 10º dígitos indicam a posição da habilidade na sequencia dentro de cada Competência Específica: 01, 02, 10, 15 são exemplos de valores possíveis.

Interpretando o exemplo dado, **EM13MAT310**, temos que a habilidade proposta faz parte do Ensino Médio (**EM**), para o bloco de anos/séries do Ensino Médio (**13**), da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, da competência específica 3 (**3**), na 10ª posição (**10**) da sequencia de habilidades da competência específica proposta na área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias, do Ensino Médio.

A BNCC também sugere uma organização das habilidades de forma simular à do **Ensino Fundamental**, por Unidade Temática, dividindo em 3 blocos:
• Números e Álgebra
• Geometria e Medidas
• Probabilidade e Estatística

A seguir estão as tabelas com as descrições da habilidades, de acordo com a Unidade Temática, a ser adquirida ao longo do **Ensino Médio**:

Tabela 10: Habilidades em Números e Álgebra EM - Parte 1 de 2

| HABILIDADES |
|---|
| **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. |
| **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |
| **(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. |
| **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. |
| **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. |
| **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. |
| **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = $ax^2$. |

Tabela 11: Habilidades em Números e Álgebra EM - Parte 2 de 2

| **HABILIDADES** |
|---|
| **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.<br>**(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.<br>**(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.<br>**(EM13MAT303**) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.<br>**(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.<br>**(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.<br>**(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.<br>**(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.<br>**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.<br>**(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.<br>**(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.<br>**(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. |

Tabela 12: Habilidades em Geometria e Medidas EM

| **HABILIDADES** |
|---|
| **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.<br>**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.<br>**(EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.<br>**(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).<br>**(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.<br>**(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.<br>**(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.<br>**(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).<br>**(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.<br>**(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.<br>**(EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.<br>**(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. |

Tabela 13: Habilidades em Probabilidade e Estatística EM

| **HABILIDADES** |
|---|
| **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. |
| **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. |
| **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. |
| **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. |
| **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.). |
| **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. |
| **(EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). |
| **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. |
| **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. |
| **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. |

Observa-se que a habilidade **EM13MAT310**, entre outras, da unidade **Probabilidade e Estatística**, está bem alinhada com a **Análise Combinatória**, pois descreve que o aluno deve: resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. O **Princípio Fundamental da Contagem** é a principal ferramenta da **Análise Combinatória**, e está diretamente ligado ao princípio multiplicativo.

Percebe-se claramente que a BNCC já não trata currículo por conteúdo de alguma disciplina, mas é fundamental que se entenda que para a habilidade **EM13MAT310** ser desenvolvida passa por oferecer ao aluno as ferramentas estudadas em **Análise Combi-**

**natória**, fruto de estudos ao longo dos tempos, como já se viu, desde a Antiguidade, que serão abordadas no próximo capítulo.

Como etapa final da educação básica, o **Ensino Médio** tem sido um enorme entrave para os Governos Estaduais e a União, pois indicam os piores resultados nas avaliações do ensino. Desta forma, espera-se que um trabalho desenvolvido por competências e habilidades possa elevar a qualidade da educação básica no Brasil.

# 3 ATIVIDADES DE CONTAGEM: ABORDAGENS A PARTIR DE FERRAMENTAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Diante do desafio de propor atividades que contemplem a BNCC, foram realizadas pesquisas em diversas fontes, como livros, avaliações, trabalhos científicos, sites, entre outros. As atividades propostas têm o objetivo de levar ao aluno situações problemas, em que sejam possíveis trabalhar e refletir princípios de contagem estabelecidos pelos estudos de **Análise Combinatória** ao longo da história.

As propostas de atividades serão divididas em 2 (dois) blocos:

- Ensino Fundamental Séries Finais
- Ensino Médio

Dentro de cada bloco, será sugerido um ano/série para ser trabalhada a atividade.

## 3.1 ATIVIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL SÉRIES FINAIS

Nesta etapa do ensino o aluno já tem uma significativa experiência em contagem, no entanto ainda não consegue perceber com frequência que entre as várias experiências em contagem estão presentes métodos e algoritmos que podem ser utilizados em diversos outros problemas. Desta forma, é importante que as atividades nesta etapa apresentem possibilidades do aluno fazer distinção entre contagens que possam produzir algoritmos e modelos que sirvam para outras situações problemas.

### 3.1.1 *Atividades para 6º e 7º anos*

**Atividade 01 com Encaixe de Figuras**

Como visto no 1º capítulo deste trabalho, o Stomachion (Figura 2) é uma proposta bastante interessante para os alunos de 6º e 7º anos do EF (Ensino Fundamental) fazerem combinações e contagens. É sugerido ao professor que apresente as figuras que formam o quadrado com seus respectivos ângulos, para que os alunos percebam quais combinações de ângulos apresentam uma soma igual a 90 graus, fazendo com que o aluno retome o assunto de ângulo reto, além de rever o estudo de figuras planas.

Outra sugestão é que o professor aborde o fato histórico de que a atividade foi importante no desenvolvimento da contagem há muitos anos atrás, para que o aluno perceba também que numa atividade aparentemente simples, há muito conhecimento de matemática envolvido.

Uma sequência didática interessante é apresentar as figuras separadas aos alunos, organizados em pequenos grupos. Oriente-os para que busquem formar um quadrado com as figuras recebidas. Após determinado tempo, verificar se estão conseguindo e ajudá-los. Concluída esta primeira etapa, pedir para que façam uma comparação entre os quadrados formados pelos outros grupos, para verificar a possibilidade de haver várias formas de se conseguir formar o quadrado. Em seguida, apresente aos alunos a quantidade real de possibilidades, que são 268.

### Atividade 02 com Árvore de Possibilidades

Outra proposta interessante é que se trabalhe a ideia de **Árvore de Possibilidades**, sem preocupação com a enunciação do **PFC** ou o **Princípio Multiplicativo**, que será objeto de estudo no 8º ano de forma mais aprofundada. De início, é sugerido que se trabalhe problemas com 2 a 4 itens no máximo, sendo que cada item tenha também no máximo entre 2 a 5 tipos, para que a Árvore de Possibilidades possa ser desenhada pelo aluno sem grandes dificuldades.

A seguir, um exemplo de atividade proposta pelo Clube da OBMEP:

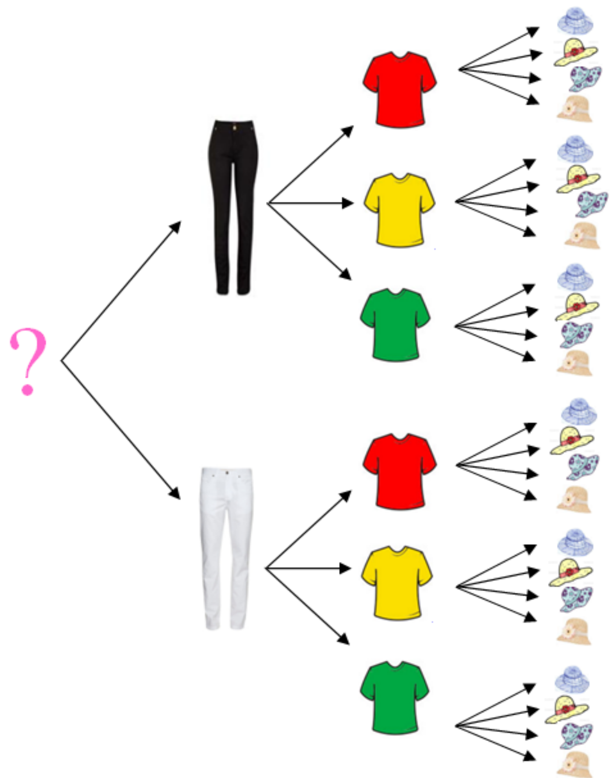



Figura 9: O problema sugere a contagem de quantas maneiras se pode escolher itens para uma mulher se vestir, em que se tem duas cores de calça (branca e preta), três cores de blusa (amarela, verde e vermelha) e quatro modelos de chapéu (azul claro, bege com laço rosa, azul com flores e rosa com laço bege). [29]

**Atividade 03 com Potência**

Considerando que foram trabalhadas as Atividades 01 e 02, desta subseção, e que o aluno possui domínio da operação de potenciação, outra proposta é que se trabalhe a **Árvore de Possibilidades** levando-se em conta itens com a mesma quantidade de tipos, para que o aluno perceba que a contagem é determinada por uma operação de potenciação, ou seja, uma base e um expoente.

A seguir, um exemplo de contagem determinada pela potência $2^3$:

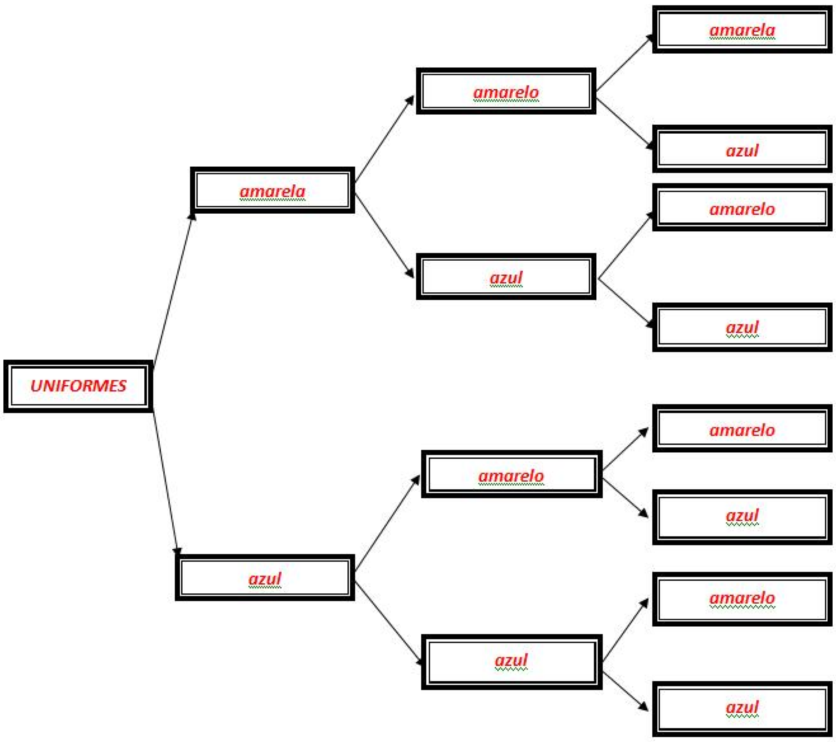



Figura 10: O problema sugere a contagem de quantas maneiras se pode escolher as cores de um uniforme esportivo, em que se tem camiseta, shorts e meia, ambos na cores azul e amarela. [30]

Com a execução de atividades como estas sugeridas nos 6º e 7º anos do EF e outras similares, espera-se que o aluno esteja capacitado a trabalhar atividades mais elaboradas em contagem nos anos seguintes.

### 3.1.2 *Atividades para 8º ano*

Uma observação importante é a de que justamente no 8º ano EF que está previsto para que seja trabalhada a habilidade **EF08MA03** (Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.), pois espera-se que o aluno possua uma experiência capaz de compreender o **Princípio Fundamental da Contagem**, que a partir desta etapa será muito ou quase sempre trabalhado nos algoritmos de contagem, seja com o princípio multiplicativo e/ou com o princípio aditivo.

Segue a definição do **Princípio Fundamental da Contagem**: "*quando um evento é composto por n etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, o resultado do número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto (x)•(y)*".

**Atividade 01 com Princípio Multiplicativo e Aditivo**

Outra proposta de atividade do 1º capítulo é o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind, em que é aplicado o **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**: "Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos (um hekat é uma unidade de volume, que corresponde a 4,9 litros, aproximadamente); quantos itens têm ao todo?". Por se tratar de um problema mais elaborado, com um enunciado de difícil interpretação, espera-se que o aluno de 8º ano, com as experiências em contagem dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e dos 6º e 7º anos, já tenha condições de interpretar seu enunciado e desenvolver sua resolução aplicando o **PFC**, além de perceber que se trata de um resultado de valor bastante elevado.

Inicialmente é sugerido uma abordagem histórica do problema, mencionando o quão é antigo problemas desta natureza. Outro ponto importante é fazer o aluno notar palavras desconhecidas do nosso vocabulário, como **hekat**, que trata de uma unidade de medida de volume da época, e fazer a sua conversão para uma unidade em que o aluno compreenda melhor o resultado do problema.

Nesta atividade aplica-se o Princípio Multiplicativo, logo o professor deve mostrar aos alunos que cada elemento do problema exerce uma multiplicação no item a seguir, como visto anteriormente na atividade em que se trabalhou a Árvores de Possibilidades.

Inicialmente faz-se a contagem com os dois primeiros itens:

**7 casas x 7 gatos = 49 gatos**

Em seguida, o resultado anterior com o próximo item:

**49 gatos x 7 ratos = 343 ratos**

E assim, faz-se todos os cálculos:

**343 ratos x 7 safras de trigo = 2.401 safras de trigo**

**2.401 safras de trigo x 7 hekat de grãos = 16.807 hekat de grãos**

O professor deve refletir com os alunos sobre o fato de que o hekat de grãos, sendo o último na relação de itens da contagem, é o que vai gerar o maior valor na contagem, como mostra a figura a seguir, e que todos os outros itens poderiam ser contados também por uma potência de 7 com expoentes menores, de acordo com a ordem na contagem.

| Casas | Gatos | Ratos | Safras de Trigo | Hekat de Grãos | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | $7^5$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11: Princípio Fundamental da Contagem aplicado ao Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind.

A partir dos cálculos de cada item, como a quantidade de casas, de gatos, de ratos, de safras de trigo e de hekat de grãos, é que deve-se responder à pergunta do problema: "quantos itens têm ao todo?"

Neste caso aplica-se o Princípio Aditivo, pois todos os itens fazem parte da contagem, ou seja, deve-se somar a quantidade de todos os itens calculados.

**7 casas + 49 gatos + 343 ratos + 2.401 safras de trigo + 16.807 hekat de grãos = 19.607 unidades de itens**

Além dos cálculos já realizados, outra proposta é sugerir aos alunos que pesquisem quantos grãos de trigo, aproximadamente, formam um litro ou um hekat, para em seguida determinarem a quantidade de grãos aproximada do problema.

**Atividades com objetos**

Para realizações de atividades que desenvolvem a habilidade em contagem, utilizam-se bastante 3 objetos conhecidos: moeda, dado e baralho. Eles fazem parte da história do início dos estudos em contagem e probabilidade, e são até hoje muito explorados em atividades nos livros didáticos, pois são objetos com características próprias e que podem facilmente fornecer informações para iniciar um processo de contagem.

**Atividade 02 com Moeda**

Sugestão de atividade com moeda é a contagem de quantas combinações é possível quando lança-se uma, duas, três ou n vezes a Moeda. A Moeda é um sólido geométrico (objeto com 3 dimensões), com formato de um cilindro, que para fins de estudo em contagem, despreza-se a sua face lateral curva, de dimensão sempre muito pequena, considerando apenas suas faces circulares planas, onde numa face está gravado um personagem (Cara-K), e na outra o valor (Coroa-C). Uma moeda honesta determina chances iguais para CARA (K) ou COROA (C), logo, ao lançar uma vez a moeda, as combinações possíveis são duas: CARA (K) ou COROA (C). Ao lançar duas vezes a moeda, formam-se 4 combinações possíveis: K-K, K-C, C-K ou C-C. Ao lançar três vezes a moeda, formam-se 8 combinações possíveis: K-K-K, K-K-C, K-C-K, K-C-C, C-K-K, C-K-C, C-C-K ou C-C-C. De forma genérica, ao lançar a moeda n vezes, a quantidade de combinações é 2•2•2•...•2 n vezes.

Deve-se levar o aluno a perceber que as possibilidades podem ser construídas pela **Árvore de Possibilidades**, em seguida observar que pelo Princípio Multiplicativo, a cada novo lançamento da moeda, é um produto por 2, ou seja, a quantidade de combinações possíveis da moeda é $2^n$, sendo que n é a quantidade de vezes que se lança a moeda, mencionado anteriormente.

Observe a figura a seguir, com um exemplo de moeda lançada 3 vezes, sendo utilizada a **Árvore de Possibilidades**:

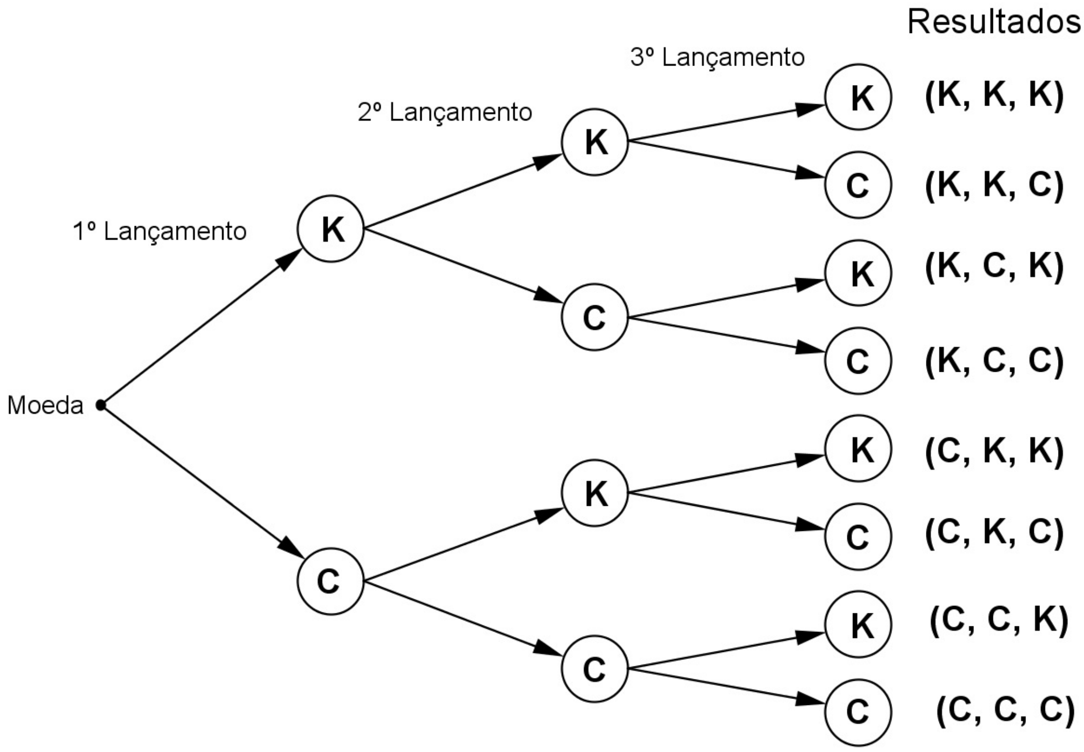



Figura 12: Exemplo de uma Árvore de Possibilidades como forma de contagem dos resultados de uma Moeda lançada 3 vezes.

Uma atividade aparentemente simples, mas que na prática muitos alunos demonstram dificuldades, por isso a importância de se trabalhar esta atividade no 8º ano sempre, e de forma exaustiva.

**Atividade 03 com Dado**

O Dado também é um sólido geométrico, em formato de cubo, que apresenta 6 faces planas idênticas, em formato de quadrado, numeradas de 1 a 6, que no processo de contagem, todas são utilizadas. O Dado é utilizado em vários tipos de jogos, como o de tabuleiro, por exemplo, determinando a quantidade de passos de um jogador. O Dado considerado honesto é aquele que lançado produz a mesma chance de ocorrer todas as suas 6 faces. Ele pode ser trabalhado da mesma forma que foi sugerido com a Moeda, observando que haverá um considerável aumento de combinações, pois as combinações serão $6^n$, em que n será a quantidade de dados lançados ou a quantidade de vezes que um único dado for lançado. Lançando o Dado uma única vez, as possibilidades são 1, 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, $6^1$. Lançando o Dado duas vezes, teremos $6^2 = 36$ possibilidades de combinações, que são: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, 6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5 e 6-6.

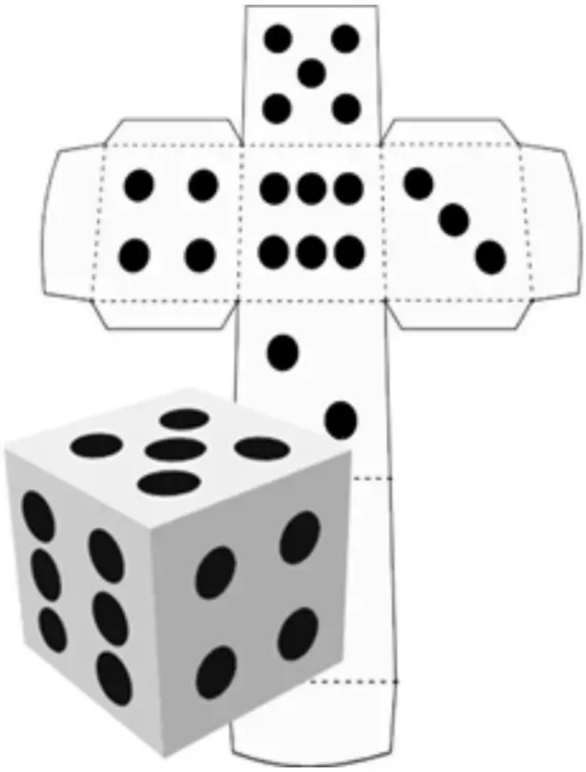


Figura 13: Imagem de um Dado e sua planificação. [32]

Por suas características, o Dado fornece mais diversidade de possibilidades de contagem, em relação à Moeda, pois sugere elaboração de atividades envolvendo cálculos com suas faces numeradas. Uma sugestão é pedir ao aluno que conte a quantidade de possibilidades em que a soma das faces do Dado resulta determinado valor possível (levar em consideração os valores de 1 a 6), lançando um Dado mais de uma vez ou lançando mais de um Dado. Isso faz com que os alunos tenham de pensar quais das faces produzem as somas que resultam o valor. Considerando o lançamento de dois Dados e uma soma igual a 5, por exemplo, o aluno deve perceber que todas possibilidade com os números 5 e 6 devem ser descartadas logo de início, pois já possuem valor igual ou superior à soma considerada. Desta forma restam as combinações com os valores menores que 5, que são: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2 e 4 + 1, levando-se em consideração que existem dois dados, apesar de idênticos. É importante fazer o aluno notar que o aumento da quantidade de lançamentos de um único Dado ou lançando mais Dados de uma vez, alteram as configurações do problema e a quantidade de possibilidades.

Para implementar outras atividades, utilizando Dados, é interessante explorar as propriedades dos números das faces, como paridade, primos e compostos, múltiplos e divisores, entre outras situações.

### Atividade 04 com Baralho

Outro objeto muito importante e utilizado em atividades de contagem é o Baralho. Suas 52 cartas estão dividas de 3 formas, como na figura logo a seguir:

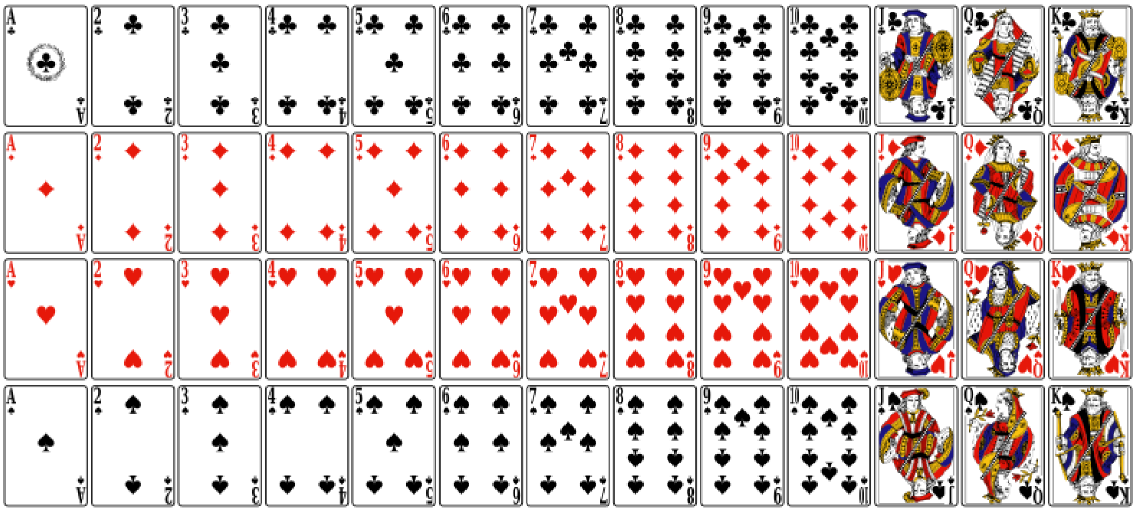


Figura 14: Imagem das cartas de um Baralho completo. [33]

- 13 tipos: Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei;
- 4 naipes: Paus , Ouros, Copas e Espadas;
- 2 cores: Pretas e Vermelhas.

Diferente da Moeda e do Dado, em que os lançamentos são determinados por suas formas geométricas, as cartas do Baralho têm outras características, são placas retangulares de espessura desprezível, às vezes de papel, às vezes de plástico, em que um lado da face é marcada por seu tipo, naipe e cor, do outro uma estampa genérica, que será a mesma em todas as 52 cartas, para que estando todas viradas com a mesma face, não seja possível saber de qual carta se trata, uma vez que a maioria dos jogos com Baralho pressupõe que os jogadores não saibam as cartas de seus oponentes.

Como anteriormente, sugere-se que inicie com uma atividade de contagem simples, para que o aluno perceba que ao retirar uma carta do Baralho ele tem 52 possibilidades. Ao passo que se aumente a retirada de cartas, as combinações possíveis vão ficando maiores. Sendo assim, com o Baralho é possível propor várias formas de contagem, como por exemplo:

• ao retirar uma carta, quantas possibilidades dela ser de Copas? Como são 13 cartas de cada naipe, existem 13 possibilidades de ser uma carta de Copas.

• ao retirar duas cartas, quantas possibilidades da primeira ser uma preta e a segunda ser vermelha? Neste caso foi inserida uma condição: a ordem da retirada das cartas. Para a $1^a$ retirada tem 26 cartas pretas e para a $2^a$ retirada tem 26 cartas vermelhas. Aplica-se o Princípio Multiplicativo das possibilidades da $1^a$ e $2^a$ retirada, ou seja, $26 \bullet 26 = 676$ possibilidades.

• ao retirar 3 cartas, quantas possibilidades de ser um Ás, um 2 e um 3? Neste caso não foi inserida uma ordem para que saia um Ás ou um 2 ou um 3, sendo assim, implica que além da análise sobre as possibilidades de sair cada uma das cartas, também é necessário analisar a ordem em que elas podem sair. A possibilidade de sair cada uma delas é 4, logo temos que a possibilidade de sair um Ás, um 2 e um 3 é $4 \bullet 4 \bullet 4 = 64$, considerando que elas sejam retiradas exatamente nesta ordem (A-2-3). Em seguida é necessário verificar de quantas maneiras estas três cartas podem sair: (A-2-3), (A-3-2), (2-A-3), (2-3-A), (3-A-2) e (3-2-A). Como são 6 maneiras diferentes, o resultado final é $6 \bullet 64 = 384$ possibilidades. Esta última parte da atividade é um exemplo de **Permutação Simples**, um assunto da **Análise Combinatória** que é mais desenvolvida no Ensino Médio, quando há uma ênfase maior, no entanto é interessante fazer uma menção deste assunto com os alunos do $8^o$ ano, alertando-os de que será novamente abordado em séries futuras.

Estas são algumas sugestões de como trabalhar com o Baralho, mas devido às suas características, é possível explorá-lo de muitas formas, aproveitando, inclusive, o fator numeração e figuras.

**Atividade 05 com Senhas ou Placas**

Outra forma de trabalhar o **Princípio Multiplicativo** em atividades para o $8^o$ ano é a formação de senhas ou placas de automóveis. Para que os cálculos não se tornem cansativos e não seja necessário utilizar calculadoras, invista para que o aluno entenda o processo, iniciando com senhas e/ou placas com 3 a 4 dígitos. Um exemplo simples é propor ao aluno que calcule quantas senhas são possíveis com 4 dígitos numéricos. É possível que alguns alunos, sem que façam algum cálculo elaborado, respondam 9999 maneiras, por se tratar do último número com 4 dígitos. Neste caso deve lembrá-los que a senha 0000 é possível, logo existem 10 mil maneiras. Mostre ao aluno que pelo **Princípio Multiplicativo** existem 10 algarismos para escolher o $1^o$ dígito, 10 para o $2^o$, 10 para o $3^o$ e 10 para $4^o$, ou seja, $10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 = 10^4 = 10.000$ maneiras. Aproveitando o mesmo exemplo, uma sugestão é inserir condições, como quantas têm algarismos distintos, quantas são números consecutivos, entre outras formas.

Com o mesmo objetivo, utilizando a mesma abordagem, pode-se sugerir uma atividade envolvendo a contagem de quantas combinações de placas é possível formar, lembrando que placas automotivas envolvem números e letras. Fazer uma observação sobre as mudanças que as placas automotivas sofreram ao longo do tempo, de acordo com a necessidade, considerando o aumento na produção de veículos. Pesquise modelos de placas antigas, peça que calculem quantas placas são possíveis de formar, até chegar nos modelos atuais de placa: LLLNNNN e LLLNLNN, onde L é letra e N é número.


Figura 15: Imagem de algumas Placas Automotivas Brasileiras ao longo de história. [34]

### Atividade 06 com Anagrama e Fatorial

Com nome sugestivo e sensação de brincadeira com as palavras, os **Anagramas** estão entre as atividades que o alunos gostam de fazer. Atividade que se emprega o **Princípio Multiplicativo** e aborda outra a ferramenta importante da **Análise Combinatória**: **Fatorial** de um número.

Segue a definição de **Fatorial de um Número**: "*seja n um número natural, o fatorial de n, representado por n!, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n*", ou seja, $n! = n\bullet(n\text{-}1)\bullet(n\text{-}2)\bullet\ldots\bullet 3\bullet 2\bullet 1$.

Neste nível de ensino é sugerido aplicar atividades com palavras simples, poucas letras e sem repetições, para que possa ser trabalhado o conceito de Fatorial de um número. Uma sugestão é pedir para que os alunos escrevam todos os **Anagramas** da palavra DOR (3 letras), por exemplo. Em seguida os da palavra AMOR (4 letras). Mostre que pelo **Princípio Multiplicativo** é possível conferir se a quantidade de **Anagramas** está correta, e na sequência fazer com que os alunos percebam que no processo de multiplicação aparece uma sequência de números consecutivos em ordem decrescente, que pode ser interpretada como **Fatorial** de um número, $n! = n\bullet(n\text{-}1)\bullet(n\text{-}2)\bullet\ldots\bullet 2\bullet 1$, em que $n$ é a quantidade de letras da palavra.

É indicado que se explore palavras com mais letras, observando com os alunos que a cada acréscimo de uma nova letra, o número de **Anagramas** da palavra aumenta substancialmente. As palavras com letras repetidas também devem ser utilizadas, mas para que não sejam necessárias fórmulas ou conhecimentos mais elaborados para contá-los, é indicado que as palavras não tenham mais que 5 letras.

Para cada atividade aplicada no 8º ano deve-se ter o cuidado de analisar o nível de dificuldade e as ferramentas exigidas para desenvolvê-las, pois o assunto será abordado com maior ênfase no **Ensino Médio**, momento em que fórmulas de **Permutação**, **Arranjo** e **Combinação** serão trabalhadas.

### 3.1.3 *Atividades para 9º ano*

A habilidade de contagem, envolvendo princípios de **Análise Combinatória**, não está prevista no currículo de matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental, de acordo com a BNCC, no entanto a habilidade **(EF09MA20)** (Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.) traz consigo a necessidade de que a habilidade em contagem esteja bem alicerçada, para que os alunos consigam resolver atividades envolvendo cálculo de **Probabilidades**. Diante deste desafio, é importante propor atividades que envolvam cálculo de **Probabilidades** que retomem conhecimentos em contagem desenvolvidos anteriormente.

**Atividade 01 com Bolas Coloridas**

Um dos tipos de atividade mais exploradas, quando o assunto é **Probabilidade**, é o cálculo das chances de se retirar bolas coloridas armazenadas em urnas, sacos ou caixas.

De forma simplificada, o cálculo da **Probabilidade** de um evento $A$ ($P_{(A)}$) ocorrer é determinado pela razão entre os casos favoráveis em que ocorre $A$ ($n_A$) por todos os casos possíveis ($n$), ou seja, $P_{(A)} = \frac{n_A}{n}$.

Considerando que existam bolas depositadas numa caixa, sendo uma azul, duas brancas, três pretas e quatro vermelhas, a sugestão é iniciar a atividade com perguntas simples, por exemplo, retirando uma bola, qual a probabilidade de ser cada uma das cores. Inicialmente o aluno deve perceber que todos os casos possíveis é a soma da quantidade de todas a bolas, igual a 10. Em seguida calcula-se a probabilidade de ocorrer cada uma das bolas: $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$ azul, $\frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$ branca, $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$ preta e $\frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$ vermelha.

Concluída esta etapa, a sugestão é propor que se calcule a probabilidade quando são retiradas mais de uma bola, de cores iguais ou distintas.

Utilizando a proposta anterior, uma sugestão é pedir ao aluno que, retirando duas bolas, calcule a probabilidade de a 1ª ser preta e a 2ª ser branca. É possível que alguns alunos, com afinidade maior com a área de conhecimento, respondam rapidamente $\frac{3}{10} \bullet \frac{2}{9}$

ou $\frac{6}{90}$ ou até mesmo $\frac{1}{15}$, mas em geral a compreensão de fenômenos probabilísticos causa dificuldades aos alunos.

Como se fossem dados "nomes"às bolas, para diferenciar as bolas com a mesma cor, sugere-se a formação dos pares ordenados com os casos favoráveis, lembrando que a 1ª deve ser preta e a 2ª deve ser branca: $(P_1; B_1)$, $(P_1; B_2)$, $(P_2; B_1)$, $(P_2; B_2)$, $(P_3; B_1)$ e $(P_3; B_3)$. Ao realizar esta etapa, mostrar aos alunos que estes casos favoráveis podem ser calculados pelo **Princípio Multiplicativo**, uma vez que a possibilidade de ser preta é 3 e de branca ser 2, logo 3•2 = 6, que são os casos favoráveis obtidos.

A partir do momento em que os alunos perceberem que os casos favoráveis são calculados desta forma, então calculam-se os casos possíveis: na retirada da 1ª bola existem 10 bolas, retirando-se a uma bola, na 2ª retirada haverá 9 bolas, então pelo **Princípio Multiplicativo** 10•9 = 90 casos possíveis. Determinado os casos favoráveis e possíveis, aplica-se o cálculo da probabilidade. Realizado este processo, será mais fácil para o aluno compreender que a **Probabilidade** final, neste caso, é um produto entre a probabilidade de ocorrer o 1º evento (sair uma bola preta) pela probabilidade de ocorrer o 2º evento (sair uma bola branca, retirada uma bola preta).

**Atividade 02 com Objetos**

Os objetos mencionados nas atividades de **Analise Combinatória** para o 8º ano, como dado, moeda e baralho, estão entre as opções também muito exploradas em atividades de **Probabilidade**. Entre problemas abordados estão, por exemplo:

• Jogando uma moeda 3 vezes, qual a chance de se obter pelo menos 2 caras (K)? Aplica-se processo de contagem dos total de eventos ($2^3 = 8$), os eventos favoráveis (K-K-K, K-K-C, K-C-K e C-K-K), em seguida calcula-se a probabilidade indicada por $\frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\%$.

É possível elaborar atividades com mais de uma moeda, mais jogadas, alteração nos casos favoráveis, entre outras opções.

• Arremessando um dado 2 vezes, qual a chance da soma dos valores ser um número primo? Do mesmo modo, aplica-se processo de contagem dos total de eventos ($6^2 = 36$). Para a contagem dos casos favoráveis, tem de haver a retomada do assunto Número Primo, e analisar dentro das somas possíveis, quantos casos são resultam em números primos. Como o Dado tem valores de 1 a 6, temos que as somas vão de 2 a 12, e entre eles, temos 2, 3, 5, 7 e 11 que são números primos. Agora elenca-se os casos favoráveis: (1+1), (1+2), (1+4), (1+6), (2+1), (2+3), (2+5), (3+2), (3+4), (4+1), (4+3), (5+2), (5+6), (6+1) e (6+5), que são 15 no total, em seguida calcula-se a probabilidade indicada por $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0{,}41666... = 41{,}666...\%$.

O uso de outros conceitos matemáticos são bem vindos, são momentos para reafirmar habilidades desenvolvidas ou retomar aquelas que ainda não foram. Neste pode ser explorado conceitos de múltiplos, divisores, pares e ímpares entre outra situações, além de acrescentar Dados nas jogadas.

• Retirando-se ao acaso 2 cartas de um Baralho Completo, qual a probabilidade da 1ª carta ser uma Dama e a 2ª ser de Ouros? Foi mencionado anteriormente que a Análise Combinatória é fascinante porque enunciados simples têm soluções engenhosas. Esta atividade é um caso dessas soluções engenhosas. Além do cálculo da Probabilidade, nesta atividade será necessário utilizar os dois princípios básicos das contagem: Multiplicativo e Aditivo. Pouco explorado até o momento, o Princípio Aditivo é utilizado quando existe a necessidade de separar a contagem em casos, como neste exemplo.

Caso 1º: *A 1ª carta é Dama e de Ouros.*

Considerando que a 1ª carta retirada é uma Dama de Ouros, invés de ter 13 cartas de ouros, terá 12. Calculando a probabilidade, tem-se $\frac{1}{52} \bullet \frac{12}{51} = \frac{1}{52} \bullet \frac{4}{17} = \frac{1}{13} \bullet \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

Caso 2º: *A 1ª carta é Dama e não é de Ouros.*

Considerando que a 1ª carta retirada não é uma Dama de Ouros, então temos 3 damas para a primeira retirada e 13 cartas de ouros para a segunda retirada. Calculando a probabilidade, tem-se $\frac{3}{52} \bullet \frac{13}{51} = \frac{1}{4} \bullet \frac{1}{17} = \frac{1}{68}$

Agora aplica-se o Princípio Aditivo, somando as duas probabilidades calculadas: $\frac{1}{221} + \frac{1}{68} = \frac{4}{884} + \frac{13}{884} = \frac{17}{884} = \frac{1}{52}$. Desta forma, a probabilidade calculada é $\frac{1}{52}$.

Também é possível explorar outras situações, como retirada de mais cartas, não impor ordem, entre outras situações.

Estas são algumas sugestões de atividades de Contagem, para o Ensino Fundamental, onde são explorados os conceitos em Análise Combinatória. Existem milhares de outras situações a serem elaboradas, ficando a cargo do professor utilizar sua capacidade criativa.

## 3.2 ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

Diferente do Ensino Fundamental, em que as atividades foram organizadas por ano/série, as atividades do Ensino Médio serão organizadas por temas (ferramentas) da Análise Combinatória, como segue:

- Permutação Simples
- Permutação com Repetição
- Permutação Circular
- Arranjo
- Combinação
- Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal
- Relação de Stifel

Antes de inciar com as sugestões de atividades, faz-se necessário definir alguns conceitos básicos da Análise Combinatória.

Como visto anteriormente, ainda nas atividades para o 8º ano do Ensino Fundamental, é importante relembrar dos conceitos básicos da contagem:

1º) **Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem**: *Quando um evento é composto por n etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, o resultado do número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto* $x \bullet y$.

2º) **Princípio Aditivo**: *Para determinar uma contagem de conjuntos de objetos é permitido dividir em duas ou mais partes, realizar a contagem de cada uma das partes, e somar os resultados.*

3º) **Fatorial de um Número Natural**: *Seja n um número natural, o fatorial de n, representado por n!, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n*", ou seja, $n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$, *em que* $0! = 1! = 1$.

A partir destes conceitos básicos é que são formadas as definições das ferramentas da Análise Combinatória, que serão demonstradas a seguir.

### 3.2.1 *Ferramentas da Análise Combinatória*

Seguem as deduções das ferramentas da Análise Combinatória que serão utilizadas como base para a formulação das atividades.

*I - Permutação Simples*

Considere um conjunto de n elementos. Quantas filas podem ser formadas com esses n elementos?

Tome-se o Princípio Multiplicativo.

$$\frac{n}{1^o lugar} \bullet \frac{n-1}{2^o lugar} \bullet \frac{n-2}{3^o lugar} \bullet \cdots \bullet \frac{1}{n^o lugar}$$

Tem-se n possibilidades de escolha para o 1º lugar.
Tem-se $n-1$ possibilidades de escolha para o 2º lugar.
Tem-se $n-2$ possibilidades de escolha para o 3º lugar.
$\vdots$
Tem-se 2 possibilidades de escolha para o $(n-1)^o$ lugar.
Tem-se 1 possibilidade de escolha para o nº lugar.

Segue que o número de filas é $n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \cdots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$, ou seja, $n!$ (como visto anteriormente, chamado n fatorial).

Cada fila contém os mesmos elementos, porém em ordem diferente. Cada uma dessas filas é chamada uma permutação de n elementos, denotada por $P_n$.

Define-se, então, que o número de permutações de n elementos $P_n$ é dado por:

$$P_n = n!$$

**Prova por Indução**

Seja A um conjunto com n elementos, com $A = \{a_k / k \in (1, 2, 3, \ldots, n)\}$ e $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.

O número de Permutações Simples dos elementos de B é dado por:

$$\left[\frac{n}{1^o lugar} \bullet \frac{n-1}{2^o lugar} \bullet \frac{n-2}{3^o lugar} \bullet \cdots \bullet \frac{1}{n^o lugar}\right] \bullet (n+1)$$

Formando filas com n elementos, temos n! possibilidades.
Sobram $n+1$ possibilidades para a última posição, logo:

$$P_{n+1} = (n+1) \bullet n! = (n+1)!$$

*II - Permutação com Repetição*

Considere o conjunto A com n elementos, de modo que $a_1$ ocorre $k_1$ vezes, $a_2$ ocorre $k_2$ vezes, ..., $a_n$ ocorre $k_n$ vezes.

De quantos modos pode-se criar uma fila com n elementos?

$$\frac{}{1^{\underline{a}} posição} \bullet \frac{}{2^{\underline{a}} posição} \bullet \frac{}{3^{\underline{a}} posição} \bullet \cdots \bullet \frac{}{n posição} \; n! \text{ filas}$$

Considere agora as repetições de $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$:

$$\frac{a_1}{1} \bullet \frac{a_1}{2} \bullet \frac{a_1}{3} \bullet \cdots \bullet \frac{a_1}{k_1} \; k_1! \text{ permutações}$$

$$\frac{a_2}{1} \bullet \frac{a_2}{2} \bullet \frac{a_2}{3} \bullet \cdots \bullet \frac{a}{k_2} \; k_2! \text{ permutações}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{1} \bullet \frac{a_n}{2} \bullet \frac{a_n}{3} \bullet \cdots \bullet \frac{a_n}{k_n} \; k_n! \text{ permutações}$$

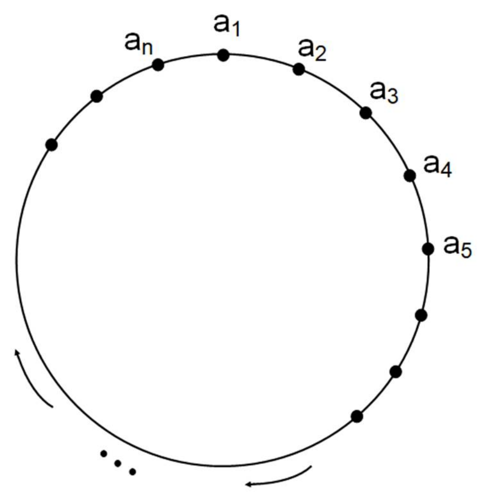
Logo, cada uma das permutações corresponde a elementos repetidos, então, o número de filas é o número de permutações repetidas $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ e é dado por:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

*III - Permutação Circular (ou Cíclica)*

Considere o conjunto A com n elementos. De quantos modos esses elementos podem ser postos em círculo (ou ciclo)?

Seja $P_{C_n}$ esse número. Inicia-se com n cortes no círculo, onde se darão as marcações dos elementos colocados em círculo.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16: Representação de n elementos colocados em círculo.

Ao cortar o círculo, tem-se $n!$ filas possíveis:

$$\frac{n}{1^{o}} \bullet \frac{n-1}{2^{o}} \bullet \frac{n-2}{3^{o}} \bullet \cdots \bullet \frac{2}{(n-1)^{o}} \bullet \frac{1}{n^{o}} = n!$$

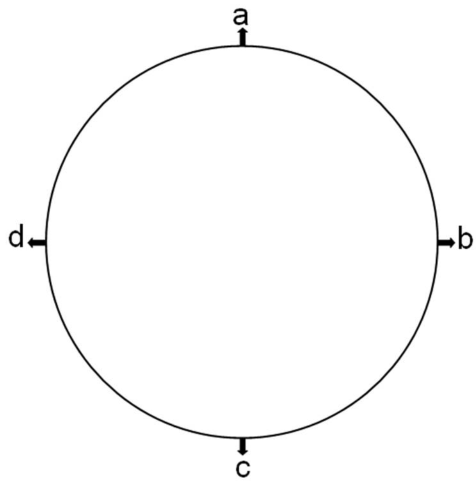
Cada corte pode ser feito de n modos diferentes, ou seja, as filas $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$, $(a_3, \ldots, a_n, a_1, a_2)$, $(a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2, a_3)$, ... , $(\ldots, a_n, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

etc, representam o mesmo círculo (ou ciclo).

Logo:

$$P_{C_n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo:




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17: Com 4 elementos para serem colocados em círculo a possibilidades são (a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d), (a, c, d, b), (a, d, b, c) e (a, d, c, b).

$$P_{C_a} = (4-1)! = 3! = 6 \text{ maneiras}$$

*IV - Arranjo*

Dados n elementos de um conjunto A, quantas comissões de k elementos, com $k \leq n$, podem ser formadas, segundo uma hierarquia? Ou, ainda, quantas filas de k elementos podem ser formadas? Esse número é chamado de número de arranjos de n elementos tomados k a k, denotado por $A_n^k$, definido assim:

$$A_n^k = \frac{n}{1^o} \bullet \frac{n-1}{2^o} \bullet \frac{n-2}{3^o} \bullet \cdots \bullet \frac{n-(k-1)}{k^o}$$

Então:

$$A_n^k = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \cdots \bullet (n-(k-1))$$
$$= n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \cdots \bullet (n-(k-1)) \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Portanto:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} =$$

*V - Combinação*

Considere n elementos de um conjunto A. De quantos modos pode-se agrupar k desses elementos sem que haja um hierarquia? Ou de forma equivalente, quantas comissões de k membros podem ser formadas a partir de um conjunto de n membros, com $k \leq n$?

Pelo Princípio Multiplicativo:

$$\frac{n}{1^{o}} \bullet \frac{n-1}{2^{o}} \bullet \frac{n-2}{3^{o}} \bullet \cdots \bullet \frac{n-(k-1)}{k^{o}}$$

Numa comissão não há hierarquia, então abc é equivalente a acb ou bac ou bca ou cab ou cba. Deste modo, tem-se $k!$ comissões equivalentes, ou seja, o número procurado, denotado por $C_n^k$, é dado por:

$$C_n^k = \frac{n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \cdots \bullet (n-(k-1))}{k!}$$

$$= \frac{n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \cdots \bullet (n-(k-1))}{k!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Portanto:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{o} \\ binomial \end{pmatrix}$$

*VI - Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

**Prova**

Tome-se o conjunto $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Conte-se o número de subconjuntos de dois modos:

- Primeiro Diretamente
- Segundo contando separadamente os subconjuntos de cada cardinalidade.

1) Para formar subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ deve-se decidir se cada elemento está ou não no subconjunto. Tem-se duas possibilidades para cada elemento:

$$\frac{2}{1} \bullet \frac{2}{2} \bullet \frac{2}{3} \bullet \cdots \bullet \frac{2}{n} = 2^n$$

Observe como se constroem os conjuntos:

$$\begin{gathered}000\ldots0 \longrightarrow \{\phi\}\\ 100\ldots0 \longrightarrow \{1\}\\ 010\ldots0 \longrightarrow \{2\}\\ \vdots\\ 110\ldots0 \longrightarrow \{1,2\}\\ 101\ldots0 \longrightarrow \{1,3\}\\ \vdots\\ 111\ldots1 \longrightarrow \{1,2,3,\ldots,n\}\end{gathered}$$

2) Enumera-se os conjuntos de acordo com as combinações que representa.

• Subconjuntos com 0 elemento: somente o conjunto vazio $\longrightarrow C_n^0 = 1$
• Subconjuntos com 1 elemento: tem-se n subconjuntos com 1 elemento $\longrightarrow C_n^1 = n$
• Subconjuntos com k elementos: é a combinação dos n elementos do conjuntos k a k
$\longrightarrow \underset{1}{-} \bullet \underset{2}{-} \bullet \underset{3}{-} \bullet \cdots \bullet \underset{k}{-} = C_n^k$

O número total de subconjuntos é, portanto:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k + \ldots C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

que também pode ser representado por notação de número binomial, como a seguir:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

*VII - Relação de Stifel*

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

ou, de modo equivalente

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

**Prova Algébrica**

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \bullet \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \bullet \frac{(n-k)}{(n-k)} =$$
$$= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

**Prova por Argumentos Combinatórios**

Considere o número de comissões de k membros escolhidos de um grupo de n pessoas:

$$\binom{n}{k}$$

Divide-se essas comissões em 2 grupos:
- Comissões em que o elemento $n_1$ faz parte;
- Comissões em que o elemento $n_1$ não faz parte;

1) Número de comissões da quais $n_1$ faz parte: são comissões de $k-1$ pessoas escolhidas em $n-1$ pessoas, pois $n_1$ já faz parte. Como um membro já está escolhido ($n_1$), o problema se resume em escolher os outros $k-1$ elementos entre os $n-1$ restantes.

$$\binom{n-1}{k-1}$$

2) Número de comissões da quais $n_1$ não faz parte: são comissões de $k$ pessoas escolhidas em $n-1$ pessoas, pois $n_1$ não por ser escolhida. Como uma pessoa não pode ser escolhida ($n_1$), o problema se resume em escolher os $k$ elementos entre os $n-1$ restantes.

$$\binom{n-1}{k}$$

Logo, temos que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Após descrição das deduções das ferramentas da Análise Combinatória que serão utilizadas, seguem as atividades.

### 3.2.2 *Atividades envolvendo Permutação Simples*

Permutar é sinônimo de trocar, desta forma, devemos associar a ideia de permutação à noção de embaralhar, de trocar os objetos de posição. Um exemplo simples é a permutação das letras da palavra AMOR que podem ser permutadas, gerando outras palavras, como: ROMA, RAMO, OMAR, entre outras.

Segue a definição de **Permutação Simples**: *Seja n um número natural que representa a quantidade de elementos de um conjunto. A permutação dos n elementos, escreve-se* $P_{(n)}$*, é o número de maneiras de dispor os n elementos distintos em fila, dado por:*

$$P_{(n)} = n!$$

Como a Permutação Simples é determinada pelo Fatorial de um Número Natural, umas das atividades que podem ser trabalhadas, são os Anagramas, mencionados neste mesmo capítulo, na seção anterior, nas Atividades para o 8º ano do Ensino Fundamental. Como o aluno do Ensino Médio carrega consigo uma experiência em contagem maior, agora é momento de intensificar o uso de Anagramas das palavras com maior quantidade de letras.

Outro tipo de atividade é a formação de filas (ou comissões ou grupos) ordenáveis. Entre algumas sugestões estão:

• *Quantos números de 5 algarismos distintos é possível formar com os algarismos ímpares? E com os pares?*

Primeiramente é preciso fazer uma observação com os alunos sobre o significado da palavra "distinto", para que fique claro que números como 11375 não são aceitos, pois o algarismo 1 se repete. Este é um clássico problema envolvendo Permutação Simples, que pode ser resolvido com Princípio Multiplicativo, pois basta imaginar que se tem 5 possibilidades de escolha para o algarismo da dezena de milhar, 4 para o da unidade de milhar, 3 para o da centena, 2 para o da dezena, restando apenas 1 para o da unidade, ou pode-se pensar o inverso das ordens do número. Temos uma multiplicação de números consecutivos, em ordem decrescente, ou seja, $5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 5! = 120$ números. Ou simplesmente $P_{(5)} = 5! = 120$ modos, quando se parte da ideia de uma Permutação Simples de 5 elementos distintos e ordenáveis. Como os algarismos pares também são 5, obviamente, a solução para esta situação é a mesma.

• *De quantos modos pode-se acomodar 3 pessoas em um sofá de 3 lugares?*

Outro problema clássico envolvendo Permutação Simples. Como pessoas são únicas, relaciona cada um delas a um objeto, como uma letra: A, B e C. Agora basta fazer a permutação entre as letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, e encontram-se 6 modos. Pelo Princípio Multiplicativo tem-se 3 possibilidades para escolher quem senta à esquerda, 2 para sentar-se ao centro, restando 1 para sentar à direita, novamente $3 \bullet 2 \bullet 1 = 6$ modos.

Ou simplesmente $P_{(3)} = 3! = 6$ modos, quando se parte da ideia de uma Permutação Simples de 3 elementos distintos e ordenáveis.

• *De quantos modos é possível pintar as faces de um Dado, utilizando as cores amarela, branca, marrom, preta, rosa e vermelha, de forma que as faces tenham cores distintas?*

Observação: Por que um Dado e não simplesmente um Cubo? É preciso deixar claro para os alunos que ao escolher o Dado, impõe-se uma distinção entre as faces, ou seja, a face 1 é diferente da face 2, que é diferente da face 3, e assim por diante, o que não dá para fazer se utilizar um Cubo, simplesmente, em que não há como distinguir uma face da outra.

Partindo da ideia dos problemas anteriores, tem-se 6 possibilidades de cores para pintar a **face 1**, 5 para a **face 2**, 4 para a **face 3**, 3 para a **face 4**, 2 para a **face 5** e restando 1 para a **face 6**. Novamente, pelo Princípio Multiplicativo, $6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6! = 720$. Ou simplesmente $P_{(6)} = 6! = 720$ modos, quando se parte da ideia de uma Permutação Simples de 6 elementos distintos e ordenáveis.

E se fosse simplesmente um Cubo? Será analisado mais adiante, quando forem apresentadas outras ferramentas da Análise Combinatória.

Na formalização das resoluções destes problemas houve uma redundância proposital. O professor deve repetir os procedimentos de Princípio Multiplicativo em todas as resoluções para que fique bem alicerçada a relação com a Permutação Simples. Outra sugestão para as aulas expositivas é que se façam lacunas (ou pequenos retângulos) na lousa para que os alunos construam a ideia de que cada lacuna representa uma posição, e quantas são as possibilidades em cada posição. Esta ideia será importante para o desenvolvimento dos próximos conceitos.

### 3.2.3 *Atividades envolvendo Permutação com Repetição*

Em alguns conjuntos é possível que haja elementos que se repetem, os quais não é possível fazer distinção entre eles, por exemplo o conjunto das letras da palavra ARARA, em que a letra A repete três vezes e a letra R duas vezes. Nestes exemplos, quando é necessário realizar a permutação dos elementos, faz-se por Permutação com Repetição.

Segue a definição de **Permutação com Repetição**: *Seja $n$ um número natural que representa a quantidade de elementos de um conjunto, em que há elementos que se repetem $a$, $b$, $c$ vezes, com $a + b + c = n$. O número de permutações de $n$, escreve-se $P_{(n)}^{(a,b,c)}$, é dado por:*

$$P_{(n)}^{(a,b,c)} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

Conhecendo esta ferramenta, pode-se trabalhar com os alunos os Anagramas de palavras com mais letras e mais repetições de letras. Este é o momento de trabalhar também algumas com simplificações envolvendo fatoriais. Seguem algumas sugestões.

• *Quais são os anagramas das palavras ARARA, BANANA, ARARAQUARA e ORNITORRINCO?*

Nestes casos dispensam-se demonstrações, basta atacar o problema utilizando a fórmula de Permutação com Repetição e trabalhar as simplificações dos fatoriais.

ARARA - 5 letras, sendo 3 A e 2 R: $P_{(5)}^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{2!3!} = \dfrac{5 \bullet 4}{2} = 10$ Anagramas da palavra ARARA.

BANANA - 6 letras, sendo 3 A, 2 N e 1 B: $P_{(6)}^{(2,3)} = \dfrac{6!}{2!3!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!}{2!3!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4}{2} = 60$ Anagramas da palavra BANANA. Faz-se necessário um comentário acerca da letra B, que como aparece uma única vez, pois $1! = 1$.

ARARAQUARA - 10 letras, sendo 5 A, 3 R, 1 Q e 1 U: $P_{(10)}^{(3,5)} = \dfrac{10!}{3!5!} = \dfrac{10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5!}{3!5!} = \dfrac{10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6}{6} = 5.040$ Anagramas da palavra ARARAQUARA.

ORNITORRINCO - 12 letras, sendo 3 O, 3 R, 2 I, 2 N, 1 C e 1 T: $P_{(12)}^{(3,3,2,2)} = \dfrac{12!}{2!2!3!3!} = \dfrac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!}{4 \bullet 6 \bullet 3!} = 3 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 5 = 831.600$ Anagramas da palavra ORNITORRINCO.

Uma outra forma de utilização da Permutação com Repetição, é determinar os modos para de se deslocar de um ponto a outro por determinados tipos de direção.

• *De quantos modos é possível sair do ponto A e chegar até B, conforme figura a seguir, utilizando de movimentos laterais à direita e para cima?*

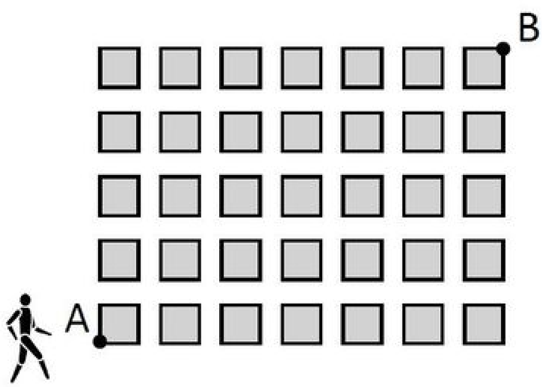
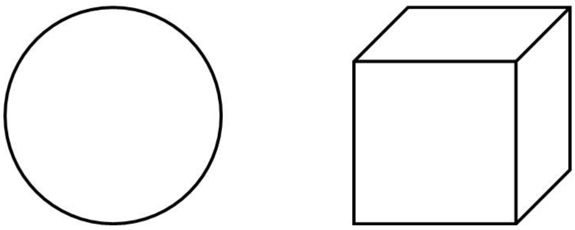



Figura 18: Mostra uma pessoa que sai de um ponto A e pretende chegar ao ponto B. [35]

Aparentemente, pode-se questionar em que a ideia de resolução de Anagramas é determinante na resolução deste tipo de problema. Neste caso a ideia é utilizar uma letra para indicar os movimentos, como L, para movimento lateral, e C, para movimento para cima. Um dos caminhos possíveis, seria 7 movimentos laterais seguidos e 5 movimentos para cima seguidos, construindo uma sequência alfabética como esta: LLLLLLLCCCCC. Como se fosse uma "palavra", basta fazer a Permutação com Repetição destas letras, para se chegar no resultado, de quantos modos é possível sair de A até chegar em B. São 12 movimentos no total, sendo 7 laterais e 5 para cima, logo, temos $\frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7!}{7!120} = 11 \bullet 9 \bullet 8 = 792$ modos de sair de A e chegar até B.

### 3.2.4 *Atividades envolvendo Permutação Circular*

Algumas situações envolvendo formas geométricas, não permite distinguir posições, como quando está para cima, para baixo, deitada ou em pé, como por exemplo um Círculo ou um Cubo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

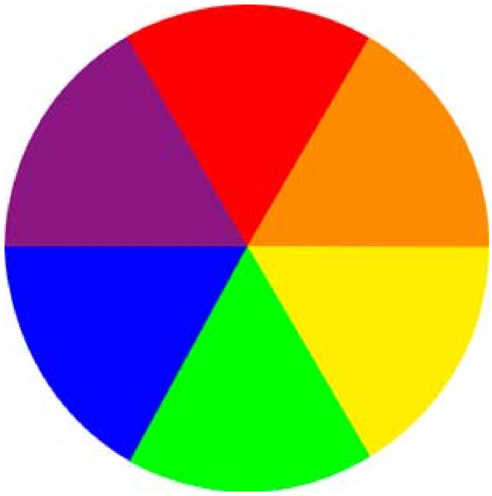
Figura 19: Imagem de um Círculo, à esquerda, e de um Cubo, à direita.

Alguns problemas de contagem, que envolvem estes tipos de figuras geométricas, exigem um pensar mais apurado e novas ferramentas de contagem, como **Permutação Circular**.

Segue a definição de **Permutação Circular**: *A permutação de n objetos em círculo é o número de modos de colocar estes n objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação, sejam consideradas iguais, dada por* $P_c^n = (n-1)!$.

A seguir, algumas sugestões de atividades, em que se aplica a **Permutação Circular**.

• *Repartindo um círculo em 6 partes iguais, como na figura a seguir, de quantos modos é possível colorir as partes deste círculo, utilizando as cores amarela, azul, laranja, roxa e vermelha, de forma que as partes tenham cores distintas?*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20: Imagem de um Círculo dividido em 6 partes iguais, pintadas com cores diferentes.

Antes de iniciar a resolução, faz-se necessário reler a definição de Permutação Circular com os alunos e mostrar o que seriam contagens indevidas, ou seja, situações em que figuras serão consideradas idênticas, como na figura a seguir.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21: A imagem das Rotações de um mesmo Círculo Colorido.

Para a solução destes problemas é preciso impor uma condição inicial: pintar qualquer uma das 6 partes primeiro, com uma das 6 cores. A partir de agora, basta permutar as outras 5 cores nas 5 partes restantes, ou seja, 1 cor para definir a 1ª parte a ser pintada, em seguida define-se um sentido para pintar as outras partes, sendo que terá 5 possibilidades para a 2ª, 4 para a 3ª, 3 para a 4ª, 2 para a 5ª e 1 para a 6ª, como no cálculo $1 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 5! = 120$ modos. Resolvendo pela fórmula, como são 6 cores, então $P_c^6 = (6-1)! = P_5 = 5! = 120$ modos de pintar um círculo dividido em 6 partes, cada uma com uma cor distinta.

• *De quantos modos é possível pintar as faces de um Cubo, utilizando as cores azul, bege, marrom, preta, rosa e vermelha, de forma que as faces tenham cores distintas?*

Inicialmente é preciso mostrar aos alunos que o Cubo tem todas as faces quadradas idênticas, não havendo a possibilidade de distingui-las. Para isso, basta reforçar a ideia de que rotacionando o Dado de várias formas, ainda assim não é possível distinguir suas faces. Como na resolução do problema anterior, deve-se definir uma posição inicial para o Cubo e pintar uma das suas faces, como na figura a seguir.

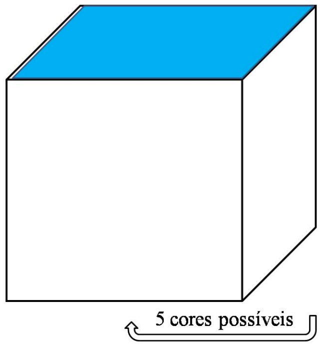



Figura 22: Imagem de um Cubo com a face superior pintada.

Definida uma face como superior, percebe-se que agora existem 5 possibilidades de cores para a face inferior. Definida a cor da face inferior, restam 4 cores para pintar as faces laterais. Neste momento é que a ideia de **Permutação Circular** entra como uma alternativa, pois pode-se pensar que as faces laterais do Cubo então como as partes de um círculo, pois não há como definir quem é a primeira ou segunda ou terceira ou quarta. Tem-se que definir uma das faces laterais para pintar inicialmente, em seguida permutar as 3 cores restantes nas outras faces. Montando o cálculo, tem-se $1 \bullet 5 \bullet 1 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 30$ modos. De forma simplificada, e utilizando a fórmula da **Permutação Circular**, tem-se $5 \bullet P_c^4 = 5 \bullet (4-1)! = 5 \bullet 3! = 5 \bullet 6 = 30$ modos de colorir as faces de um Cubo com 6 cores diferentes, de forma que as faces tenham cores distintas.

Existem muitas outras formas de aplicar a **Permutação Circular**, no entanto estes dois problemas são eficientes para desenvolver nos alunos a habilidade de contagem em modelos semelhantes.

### 3.2.5 *Atividades envolvendo Arranjo*

Para a formação de grupos ordenáveis se aplica a ideia de **Arranjo Simples**, isso significa considerar que grupos com os mesmos elementos são diferentes, como por exemplo arranjar os algarismos 1, 2, e 3 em números de 2 ordens, de forma que os algarismos sejam distintos: 12, 13, 21, 23, 31 e 32. Percebe-se que os números 12 e 21, possuem os mesmos elementos (o 1 e o 2), mas são considerados agrupamentos distintos.

Segue a definição de **Arranjo Simples**: *Sejam $n$ e $p$ números naturais, com $p \leq n$, sendo $n$ a quantidade de elementos de um conjunto, e $p$ a quantidade de elementos de subconjuntos de $n$. Se subconjuntos de $n$ com os mesmos $p$ elementos são considerados distintos, ou seja, são ordenáveis, então o número de Arranjos de $p$ em $p$ elementos, escreve-se $A_{(n,p)}$, é dado por:*

$$A_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ ou simplesmente } A_{(n,p)} = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet ... \bullet (n-p+1).$$

Como se pode observar, as situações em que se aplica **Arranjo Simples** podem ser resolvidas apenas aplicando o Princípio Multiplicativo, como se observou na **Permutação Simples**. Pode-se, inclusive, entender que a **Permutação Simples** é um caso particular do **Arranjo Simples**, em que os arranjos são formados por todos os elementos, ou seja: $A_{(n,n)} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{1} = P_{(n)}$

A seguir, algumas sugestões de atividades, em que se aplica **Arranjo Simples**.

• *Quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos ímpares?*

Primeiramente é preciso fazer uma observação com os alunos sobre o significado de "algarismos distintos", para que fique claro que números como 113 não é aceito, pois o 1 repete. Este é um clássico problema envolvendo Princípio Multiplicativo, pois basta imaginar que se tem 5 possibilidades de escolha para o algarismo da centena, 4 para o da dezena, 3 para o da unidade, ou pode-se pensar o inverso das ordens do número. Tem-se uma multiplicação $5 \bullet 4 \bullet 3 = 60$ números. Aplicando-se a fórmula $A_{(5,3)} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2!}{2!} = 5 \bullet 4 \bullet 3 = 60$ números.

Observando as duas resoluções, pode-se ficar com a impressão de que a fórmula do **Arranjo Simples** mais complica o cálculo do que simplifica. No entanto é importante saber a fórmula, pois há casos em problemas de contagem que se trabalha com duas ou mais ferramentas da Análise Combinatória, havendo a possibilidade de composições e simplificações entre elas.

• *De quantos modos é possível formar uma diretoria composta por um presidente, um secretário e um tesoureiro, entre 4 homens e 4 mulheres? Quantas destas diretorias teriam pelo menos uma pessoa de cada gênero?*

A representação de comissões de pessoas com posições determinadas, é outro problema clássico de contagem muito utilizado, um exemplo de aplicação de Arranjo Simples.

Os alunos devem perceber, neste caso, que a ordenação deste tipo de grupo está diretamente ligada às funções ocupadas. Supondo 3 pessoas A, B e C, e que a ordem das funções que ocupam é 1º presidência, 2º secretaria e 3º tesouraria, numa comissão ABC, significa que "A"é presidente, "B"é secretário e "C"é tesoureiro. Com isso, pode-se afirmar que as composições de diretorias ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, são agrupamentos distintos, mesmo formados pelos mesmos elementos. Com isso, o que se deseja no 1º item do problema é calcular um **Arranjo Simples** de 8 pessoas, tomadas 3 a 3, ou seja, $A_{(8,3)} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5!}{5!} = 8 \bullet 7 \bullet 6 = 336$ possíveis diretorias.

No 2º item, a questão é determinar quantas destas 336 possíveis diretorias teriam pelo menos um homem ou pelo menos uma mulher. É um processo de análise de configuração, pois quando se quer garantir um elemento, significa que foi imposta uma condição. Diante desta condição, as configurações possíveis são: HHM, HMH, MHH, HMM, MHM e MMH, ou seja, 6 configurações. Em todas as configurações tem-se 4 possibilidades para a escolha de um dos gêneros, em seguida um **Arranjo Simples** de 4 pessoas de 2 em 2. Ao final, tem-se $6 \bullet 4 \bullet A_{(4,2)} = 24 \bullet \dfrac{4!}{(4-2)!} = 24\dfrac{4 \bullet 3 \bullet 2!}{2!} = 24 \bullet 12 = 288$ possíveis diretorias com pelos menos uma pessoa de cada gênero.

Uma outra forma de resolver o problema é partir das possíveis diretorias que não atendem à condição, que neste caso seriam apenas duas: HHH e MMM, ou seja, diretorias em que seriam todos do mesmo gênero. Neste caso, são 2 **Arranjos Simples** de 4 elementos 3 a 3, ou seja, $2 \bullet A_{(4,3)} = 2 \bullet \dfrac{4!}{(4-3)!} = 2\dfrac{4!}{1!} = 2 \bullet 4! = 2 \bullet 24 = 48$ possíveis diretorias em que os membros são todos do mesmo gênero. Em seguida, subtrai este valor do total: $336 - 48 = 288$ possíveis diretorias com pelos menos uma pessoa de cada gênero.

É um modelo que também pode ser trabalhado colocando-se outras condições, além de alteração da configuração das pessoas e das funções.

• *De quantos modos é possível formar uma senha de 6 dígitos distintos, utilizando apenas algarismos? e apenas letras? e com algarismos e letras?*

Outro problema clássico, a formação de senhas também é muito utilizada para aplicação de ferramentas da Análise Combinatória. Novamente, a ideia é atacar o problema com a fórmula de **Arranjo Simples** e verificar o **Princípio Multiplicativo**.

Senha com Algarismos: 10 algarismo para arranjar de 6 em 6, logo, faz-se $A_{(10,6)} = \dfrac{10!}{(10-6)!} = \dfrac{10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4!}{4!} = 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 \bullet 5 = 151.200$ senhas.

Senha com Letras: 26 letras para arranjar de 6 em 6, logo, faz-se $A_{(26,6)} = \dfrac{26!}{(26-6)!} = \dfrac{26 \bullet 25 \bullet 24 \bullet 23 \bullet 22 \bullet 21 \bullet 20!}{20!} = 26 \bullet 25 \bullet 24 \bullet 23 \bullet 22 \bullet 21 = 165.765.600$ senhas.

Senha com Algarismos e Letras: 10 algarismos + 26 letras = 36 dígitos para arranjar de 6 em 6, logo, faz-se $A_{(36,6)} = \dfrac{36!}{(36-6)!} = \dfrac{36 \bullet 35 \bullet 34 \bullet 33 \bullet 32 \bullet 31 \bullet 30!}{30!} = 36 \bullet 35 \bullet 34 \bullet 33 \bullet 32 \bullet 31 = 1.402.410.240$ senhas.

Em problemas envolvendo cálculo de senhas, é possível criar muitas condições, como determinar que tenha uma quantidade x de algarismos e y de letras, como numa placa de automóvel, em que os primeiros dígitos são letras e os finais são algarismos, ou seja, um modelo pode ser trabalhado para que se aplique a ferramenta de várias formas. Em seguida, um outro problema envolvendo contagem do número de senhas.

• *De quantas maneiras é possível formar senhas de 6 dígitos distintos, com duas letras e quatro algarismos? e com no mínimo dois dígitos de cada um?*

Este é um problema que exige mais de uma ferramenta de Análise Combinatória.

No 1º item, uma possível configuração é LLAAAA, em que L é representa letra e A representa algarismos. Como a senha é para ser formada com dígitos distintos, então basta fazer um arranjo de 26 letras 2 a 2, e outro arranjo de algarismos 4 a 4, ou seja, $A_{(26,2)} \bullet A_{(10,4)}$. Além disso, é preciso lembrar que a configuração da senha não se limita a LLAAAA, é preciso permutar os dígitos, ou seja, $P_{(6)}$. Ao final tem-se $A_{(26,2)} \bullet A_{(10,4)} \bullet P_{(6)} = \dfrac{26!}{(26-2)!} \bullet \dfrac{10!}{(10-4)!} \bullet 6! = 26 \bullet 25 \bullet 10! = 3.628.800$ senhas.

No 2º item há a exigência de que tenha no mínimo 2 dígitos de cada tipo (algarismo e letra). Nestas condições, as configurações possíveis são 3: LLAAAA, LLLAAA e LLLLAA, que ainda devem ser permutadas.

1ª Configuração: como no 1º item, 3.628.800 senhas.

2ª Configuração: $A_{(26,3)} \bullet A_{(10,3)} \bullet P_{(6)} = \dfrac{26!}{(26-3)!} \bullet \dfrac{10!}{(10-3)!} \bullet 6! = 26 \bullet 25 \bullet 24 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 720 = 8.087.040.000$ senhas.

3ª Configuração: $A_{(26,4)} \bullet A_{(10,2)} \bullet P_{(6)} = \dfrac{26!}{(26-4)!} \bullet \dfrac{10!}{(10-2)!} \bullet 6! = 26 \bullet 25 \bullet 24 \bullet 23 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 720 = 23.250.240.000$ senhas.

A seguir aplica-se o Princípio Aditivo, somando a contagem de cada configuração: $3.628.800 + 8.087.040.000 + 23.250.240.000 = 31.340.908.800$ senhas, um valor bastante elevado.

Estes modelos de problemas que envolvem **Arranjo Simples** sugeridos, se bem trabalhados, conseguem desenvolver nos alunos a capacidade de resolver vários outros modelos existentes.

### 3.2.6 *Atividades envolvendo Combinação*

Diferente dos **Arranjos**, as **Combinações** são aplicadas em agrupamentos não ordenáveis, ou seja, em que a ordem do elementos não configura um agrupamento novo. Um exemplo é um técnico que tem 3 atletas de vôlei, Ari, Etô e Irã, para formar uma dupla. As duplas possíveis são: Ari&Etô, Ari&Irã e Etô&Irã. Duplas como Ari&Irã e Irã&Ari são consideradas idênticas.

Segue a definição de **Combinação Simples**: *Sejam $n$ e $p$ números naturais, com $p \leq n$, sendo $n$ a quantidade de elementos de um conjunto, e $p$ a quantidade de elementos de subconjuntos de $n$. Se subconjuntos de $n$, com os mesmos $p$ elementos não se distinguem, ou seja, não ordenáveis, então o número de Combinações de $p$ em $p$ elementos, escreve-se $C_{(n,p)}$, é dado por:*

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou simplesmente } C_{(n,p)} = \frac{n \bullet (n-1) \bullet ... \bullet (n-p+1)}{p!}$$

Como citado anteriormente, a **Combinação Simples** é bastante aplicada em problemas que envolvem a formação de comissões, times, entre outros. A seguir, algumas sugestões de atividades a serem desenvolvidas.

• *De quantas maneiras pode-se montar um trio de dança, com 4 dançarinos.*

Inicialmente, é importante mostrar aos alunos alguns exemplos de agrupamentos destes dançarinos, com os mesmos elementos, para evidenciar o conceito de que grupos com os mesmos elementos são considerados idênticos, por isso não podem ser contados mais de uma vez. Em seguida, por se tratar de valores que vão gerar poucos agrupamentos, é interessante fazer todos os agrupamentos com os alunos. Indique os dançarinos com as letras A, B, C e D, e incie os agrupamentos: ABC, ABD, ACD e BCD.

O que foi feito é uma **Combinação simples** de 4 elementos agrupados de 3 em 3. Agora mostre aos alunos que é possível chegar neste resultado aplicando a fórmula, ou seja, $C_{(4,3)} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{4 \bullet 3!}{3!} = 4$ maneiras.

O mesmo modelo de problema pode ter algumas alterações, as quais podem ser trabalhadas outras ferramentas.

• *De quantas maneiras pode-se montar um quarteto de dança, com 3 dançarinos e 3 dançarinas? Quantos terão a mesma quantidade de gêneros?*

Em relação ao 1º item do problemas, os alunos devem perceber que se trata de uma **Combinação Simples** de 6 elementos agrupados de 4 em 4. Fazer todos os agrupamentos com os alunos (15 no total) é uma boa indicação, em seguida aplica-se a resolução por fórmula, ou seja: $C_{(6,4)} = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4!}{4!2!} = \dfrac{30}{2} = 15$ maneiras.

O 2º item traz a condição de que o quarteto de dança tenha dois homens e duas mulheres, ou seja, uma dupla de homem e outra de mulher. Como não é um grupo ordenável, para cada dupla aplica-se uma combinação de 3 elementos agrupados de 2 em 2, ou seja, um produto de combinações. Como as combinações são idênticas, faz-se $2 \bullet C_{(3,2)} = 2 \bullet \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 2 \bullet \dfrac{3 \bullet 2!}{2!1!} = 2 \bullet 3 = 6$ quartetos com a mesma quantidade de gêneros. Como se trata de poucas combinações, é interessante fazê-las com os alunos. Se já foi realizada no item anterior, basta uma simples conferência.

Agrupamentos que se aplica o mesmo modelo:

- times, em que não se determina uma posição para os jogadores;
- comissões, em que não se determina uma função para as pessoas;

• *Quantos jogos terá um campeonato de futsal, com 8 times, jogando todos entre si? E se for um campeonato de turno e returno?*

Este é um problema que se pode aplicar o conceito de **Combinação Simples** ou **Arranjo Simples**, o motivo é o agrupamento de 2 em 2. No 1º item, os alunos devem perceber que se trata de um campeonato em que um time joga uma única vez com seus 7 adversários, logo, os jogos são agrupamentos de 2 times, então basta fazer uma

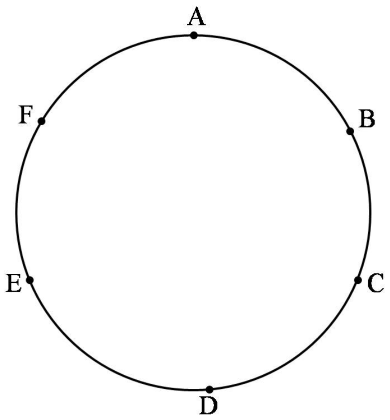
**Combinação Simples** de 8 times, agrupados de 2 em 2, ou seja, $C_{(8,2)} = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} =$ $dfrac8 \bullet 7 \bullet 6!2!6! = dfrac8 \bullet 72 = 28$ jogos.

Em relação ao 2º item, os jogos serão contados duas vezes, pois será turno e returno, $28 + 28 = 56$ jogos.

Partindo do 2º item a resolução, o problema poderia ser visto como um **Arranjo Simples**, pois como os agrupamentos são de 2 em 2, um time A e outro B, formam jogos AxB e BxA, que são considerados agrupamentos distintos. Pode-se pensar no 1º agrupamento que o time "A"joga na sua casa e no 2º é o visitante. Logo, aplica-se $A_{(8,2)} = \dfrac{8!}{(8-2)!} = \dfrac{8 \bullet 7 \bullet 6!}{6!} = 56$ jogos. Como são 2 turnos, divide-se o resultado por 2 para obter o resultado do 1º item: $56 : 2 = 28$ jogos.

Com este exemplo é possível fazer com que os alunos percebam que a **Combinação Simples** é um **Arranjo Simples**, em que foram desfeitas as contagens excessivas, dividindo pelo fatorial da quantidade de elementos do agrupamento (p!). É importante fazer essas observações, pois isso ajuda a gravar os conceitos, e até a memorizar as fórmulas.

- *Dados 6 pontos distintos numa circunferência, como na figura a seguir, quantos triângulos inscritos podem ser formados com estes pontos? Quantos quadriláteros convexos?*




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 23: A imagem de uma circunferência com 6 vértices distintos.

Outro modelo de aplicação de **Combinação simples** é a formação de figuras geométricas a partir de alguns vértices. Este é um momento também para rever com os alunos conceitos acerca de geometria, como elementos de uma figura geométrica, polígonos, figuras côncavas e convexas, entre outras coisas.

Para responder ao 1º item, é mostrar aos alunos de que se trata de uma **Combinação Simples** de 6 vértices, tomados de 3 em 3, ou seja, $C_{(6,3)} = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} =$ $dfrac6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!3!3! = 5 \bullet 4 = 20$ triângulos.

No 2º item é o mesmo procedimento, **Combinação Simples** e 6 vértices agrupados de 4 em 4, ou seja, $C_{(6,4)} = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4!}{4!2!} = 5 \bullet 3 = 15$ quadriláteros.

• *Dada uma caixa com 5 bolas brancas e 5 bolas pretas, de quantos modos é possível selecionar 3 bolas brancas e 2 pretas?*

Neste tipo de problema, o aluno deve perceber bolas de mesma cor são consideradas idênticas, logo não importa a ordem delas. Esta resolução consiste em realizar duas **Combinações Simples**, uma de bolas brancas e outra de bolas pretas, e fazer o produto entre elas.

Bolas Brancas: $C_{(5,3)} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!2!} = 5 \bullet 2 = 10$ modos de selecionar 3 bolas brancas.

Bolas Pretas: $C_{(5,2)} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{2!3!} = 5 \bullet 2 = 10$ modos de selecionar 2 bolas pretas.

Aplica-se o **Princípio Multiplicativo**, ou seja, $10 \bullet 10 = 100$ modos de se escolher 3 bolas brancas e 2 pretas.

É interessante aproveitar o problema e mostrar aos alunos uma propriedade importante da **Combinação Simples**: *dado um conjunto de $n$ objetos, com $p + q = n$ e $n$, $p$ e $q$ números naturais, combinações de $p$ objetos e $q$ objetos produzem o mesmo resultado.* De forma simplificada, tem-se que $C_{(n,p)} = C_{(n,q)}$, com $p + q = n$.

Como mencionado anteriormente, na subseção de **Atividades envolvendo Arranjo**, existem vários outros modelos de atividades envolvendo **Combinação Simples**, porém espera-se que, a partir destas sugestões, os alunos continuem desenvolvendo a habilidade em contagem para diversos tipos de problemas envolvendo ferramentas da **Análise Combinatória**.

Estes dois modos de agrupamento, **Arranjo Simples** e **Combinação Simples**, são importantes para o desenvolvimento da habilidade de contagem. Por este motivo, a **Proposta Didática** (Capítulo 4 deste trabalho) será uma sugestão de como apresentar os dois modos de agrupamento em um mesmo problema, para desenvolver nos alunos a capacidade de distinguir grupos ordenáveis e não ordenáveis.

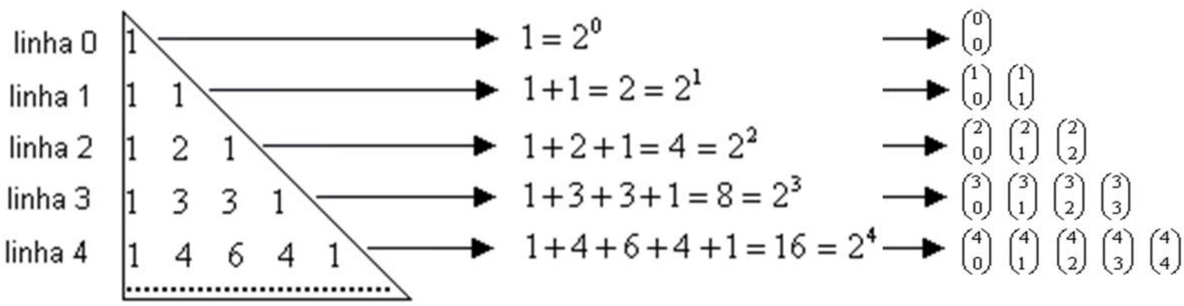
A proposta se faz necessária, uma vez que os livros didáticos, em geral, apresentam um dos modos primeiro, em seguida uma sequência de problemas de aplicação deste modo. Depois apresenta o segundo modo de agrupamento e uma outra lista de aplicação deste outro modo. Os alunos, desta forma, ficam condicionados a utilizar uma das fórmulas de um modo de agrupamento numa lista, que está na sequência, e a outra fórmula na outra sequência. Ao embaralhar os problemas, muitos destes alunos não conseguem distinguir qual "fórmula"utilizar, pois não tiveram o cuidado de perceber de que forma os problemas se diferem.

### 3.2.7 *Atividade envolvendo Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal*

Como visto na Seção 3, do Capítulo 1, deste trabalho, o binômio do tipo $(a+b)^n$, em que n é um número natural, conhecido como **Binômio de Newton**, foi objeto de estudo por muitos matemáticos desde a antiguidade. É partindo do desenvolvimento deste binômio que se obtém o **Triângulo de Pascal**, como se vê a seguir:

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = 1a + 1b$
- $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- $(a+b)^a = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Retirando-se a parte literal dos termos das expressões desenvolvidas e relacionando cada linha do triângulo com o expoente de cada binômio, tem-se o **Triângulo de Pascal**, como na figura a seguir.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24: À esquerda: o Triângulo de Pascal. Ao centro: a soma dos coeficientes dados por $2^n$. À direita: Representação Binomial da soma dos coeficientes.

Além do **Triângulo de Pascal**, observa-se na figura duas informações muito importantes, que dizem respeito à proposta de atividade desta seção:

- a soma dos coeficientes de qualquer linha é uma potência de 2;
- cada coeficiente pode ser representado por uma combinação.

Diante destas informações, pode-se enunciar o **Teorema das Linhas** do **Triângulo de Pascal**:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Esta é uma ferramenta eficiente na solução de atividades em que existam situações de comandos binários, ou seja, sim ou não. A seguir uma sugestão de atividade com aplicação desta ferramenta.

- *Numa chácara existem 4 postes de luz que acendem e apagam de forma independente. De quantas maneiras uma pessoa pode decidir os postes que vão ter suas luzes acesas ou apagadas? De quantas maneiras com no mínimo 2 acesas?*

Inicialmente, os alunos devem perceber a aplicação do **Teorema das Linhas** neste tipo de problema, em que se observa comandos binários, como as luzes podem estar acesas ou apagadas. Em seguida, algumas demonstrações de como cada "termo-combinação"da expressão do teorema corresponde a uma situação em relação aos postes de luz. Inicie pela situação em que as luzes estão todas apagadas.

Como são 4 postes de luz, então $n = 4$. Em seguida, determina o comando binário, que neste caso será utilizado ACESA. Para a solução do 1º item, segue a sequência de resoluções.

O 1º termo-combinação é $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$, então se tem que $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$. Isso significa que que há uma situação em que nenhuma luz estará acessa, ou seja, todas estarão apagadas.

Relembrando outra propriedade das combinação, $C_{(n,p)} = C_{(n,q)}$, com $p + q = n$, já se sabe que $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$, o que significa que há uma situação em que todos os 6 postes de luz terão suas luzes acessas.

Faz-se a sequência de todas a combinações e a relação com as situação das luzes.

- 1 luz acesa = 3 luzes acesas: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{4!}{1!3!} = 4$ maneiras de uma ou três luzes acessas.

- 2 luzes acesas = 2 luzes apagadas: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras com 2 luzes acesas e duas apagadas.

Realizados os cálculos de cada termo com os alunos, aplica-se o **Princípio Aditivo**, somando-se todos os valores: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. Em seguida, retorne para a Figura 24 e mostre para os alunos a relação dos resultados obtidos com os coeficientes do **Triângulo de Pascal**. Após esta etapa, faça a observação com os alunos que a soma dos resultados é uma potência de 2, que está diretamente ligada ao conceito binário, além de relacionar a potência do 2 com a linha do **Triângulo de Pascal**.

Agora é o momento de resolver o problema aplicando apenas o **Teorema das Linhas**: 4 postes de luz indica que $n = 4$, logo a solução seria $2^4 = 16$ maneiras.

Em relação ao 2º item, faça a observação com os alunos de que as combinações $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ são aquelas que garantem que pelo menos 2 postes de luz estarão acesas, isso significa subtrair do resultado as combinações $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Logo, tem-se que : $16 - 1 - 4 = 11$ maneiras de que pelo menos 2 postes de luz estejam com as suas luzes acesas.

Os problemas que envolvem aplicação do **Teorema das Linhas**, como visto, estarão condicionados a um aumento do valor de n e a eliminação de mais ou menos termos combinatórios. Esta é mais uma ferramenta poderosa em **Análise Combinatória**, essencial para o desenvolvimento da habilidade de contagem pelos alunos.

### 3.2.8 *Atividade envolvendo Relação de Stifel*

A Relação de Stifel, mencionada na Seção 3, do 1º Capítulo, é uma das propriedades do **Triângulo de Pascal**, em que *a soma de dois coeficientes consecutivos da uma linha é igual ao coeficiente da mesma posição do 2º coeficiente na próxima linha.* Observando a Figura 24, a soma do 2º e 3º coeficiente da linha 3 (3 + 3), é igual ao 3º coeficiente da linha 4 (6). E isso segue para todo o Triângulo de Pascal. A seguir, a sua representação Binomial:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \text{ ou } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \text{ Relação de Stifel}$$

A seguir uma sugestão de atividade com aplicação desta relação.

- *Considere um grupo de 7 amigos, incluindo você, que irão fazer uma viagem de SUV, para 7 passageiros, sendo 2 nos bancos da frente, 3 no banco central e 2 no banco traseiro. Quantos são os modos em que 3 amigos estarão sentados no banco central, não importando a posição no banco? Em quantos você estará no banco central? Em quantos você não estará?*

Observe o 1º modo como foi escrita a Relação de Stifel.

Para responder o primeiro item, basta fazer uma combinação, como no 2º membro da relação, ou seja, fazendo $n = 7$ e $p = 3$: $C_{7,3} = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7 \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4!}{3!4!} = \dfrac{7 \bullet 6 \bullet 5}{6} = 35$ modos, ou seja, com os 7 amigos, incluindo você, é possível formar 35 combinações de 3 amigos.

Agora, para responder os 2º e 3º itens, observe o 1º membro da relação.

Para responder ao 2º item, na primeira parcela do 1º membro, $\binom{n-1}{p-1}$, imagine que o -1"é você que foi retirado(a) do grupo de 7 amigos e do grupo de 3 passageiros, deixando 2 vagas, pois a ideia é fixá-lo(a) no banco central. Logo, tem-se 6 amigos para combinar de 2 em 2, que irão sentar com você, ou seja, $C_{7-1,3-1} = C_{6,2} = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4!}{2!4!} = \dfrac{6 \bullet 5}{2} = 15$ modos.

Para responder ao 3º item, na segunda parcela do 1º membro $\binom{n-1}{p}$, imagine que o -1"é você que foi retirado(a) do grupo de 7 amigos, e agora serão organizados de 3 em 3, e você não estará no banco central. Logo, tem-se 6 amigos para combinar de 3 em 3, ou seja, $C_{7-1,3} = C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!3!} = \dfrac{6 \bullet 5 \bullet 4}{6} = 20$ modos

É natural imaginar que sabendo o total de modos que 3 amigos estarão sentados no banco central, que são 35, e os modos em que você estará sentando(a) no banco central, que são 15, para responder ao 3º item, bastava fazer 35 - 15 = 20 modos. A ideia foi mostrar o poder desta ferramenta, que é a Relação de Stifel, para solucionar problemas relacionados a formação de grupos ou comissões não ordenáveis.

Observação sobre a Relação de Stifel: é preciso mostrar aos alunos que trata de uma situação em que as duas combinações do 1º membro representam duas partes de um grupo, em que 1 elemento específico, de uma parte ele pertence, da outra não. Já no 2º membro, a combinação representa o total de combinações do grupo.

O campo da Análise Combinatória tem um amplo espaço a ser explorado, principalmente no Ensino Médio, mas acredita-se que ao fim das realizações destas atividades, o aluno terá desenvolvido de forma consistente a **Habilidade de Contagem**, em diversos tipos de agrupamentos, contribuindo para o desenvolvimentos das competências específicas e gerais, esperadas para esta etapa de ensino.

# 4 PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo será apresentada uma sequência de atividades, culminando na aplicação dos conceitos de Arranjo e Combinação. Inicialmente, serão abordadas algumas atividades de Anagrama, para revisão e investigação sobre conceitos e ferramentas básicas da Análise Combinatória, como Princípio Fundamental da Contagem, Diagrama de Árvore e Fatorial de um Número Natural. Na sequência, a apresentação de um problema que aborda juntamente os conceitos de Arranjo e Combinação, para que os alunos desenvolvam a capacidade de diferenciar em que tipo de situação-problema se utiliza cada uma das ferramentas, em problemas de contagem.

## 4.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática consiste inicialmente na exposição de palavras com no máximo 5 letras, em que será solicitado a contagem dos seus Anagramas, buscando fazer uma investigação, por parte do professor, sobre a experiência dos alunos com a resolução deste tipo de problemas, e se necessário intervir, realizando uma revisão sobre os conceitos do Princípio Fundamental da Contagem, do Diagrama de Árvore e do Fatorial de um Número Natural.

Após a conclusão das atividades anteriores, expor aos alunos uma situação-problema em que seja abordado a contagem de grupos ordenáveis e não ordenáveis. Primeiramente, solicite que reflitam maneiras de resolver a situação-problema com a experiência em contagem que possuem e utilizando os conceitos abordados nas atividades anteriores. Após manifestação de algumas soluções (corretas ou incorretas), aborda-se os conceitos de Arranjo e Combinação e aplicação das fórmulas.

## 4.2 PÚBLICO ALVO

Alunos do Ensino Médio, de escolas públicas ou privadas.

## 4.3 NÚMERO DE AULAS PREVISTAS

4 aulas

## 4.4 OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

1. Resolver problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio do princípio multiplicativo e diagrama de árvore.
2. Diferenciar formas de contagem, como agrupamentos que se utilizam Arranjo e Combinação.
3. Aplicar fórmulas de Arranjo e Combinação em problemas de contagem.

## 4.5 DESENVOLVIMENTO

As aulas serão de característica expositiva, apresentando os conceitos do Princípio Fundamental da Contagem, do Diagrama de Árvore e do Fatorial de um Número Natural, em seguida os conceitos de Arranjo e Combinação e a utilização correta das fórmulas, identificando as características que determinam a utilização de uma e outra fórmula.

### 4.5.1 *Aulas 1 e 2 - Atividade sobre contagem de Anagramas*

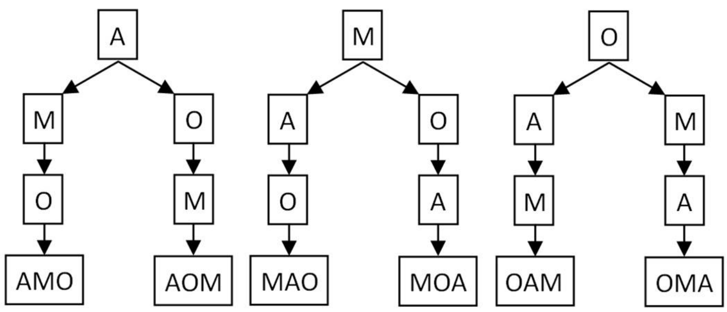
| |
|---|
| **Duração:** 90 minutos. |
| **Local de desenvolvimento da atividade:** sala de aula. |
| **Recursos necessários:** lousa, caneta de lousa e folhas impressas com as atividades. |

O professor deve iniciar a aula expondo a atividade para contagem dos número de Anagramas das palavras indicadas.

**Exemplo 4.1.** *Determine o número de anagramas da palavra AMO.*

*Solução: Como a palavra AMO possui 3 letras diferentes, espera-se que o aluno consiga apresentar umas das 3 possibilidades de resolução, para chegar no resultado 6.*

**1ª possibilidade de solução por Diagrama de Árvore:**




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25: Os anagramas da palavra AMO.

**2ª possibilidade de solução por Princípio Multiplicativo:**

| 1ª letra | | 2ª letra | | 3ª letra | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | • | 2 | • | 1 | = | 6 |

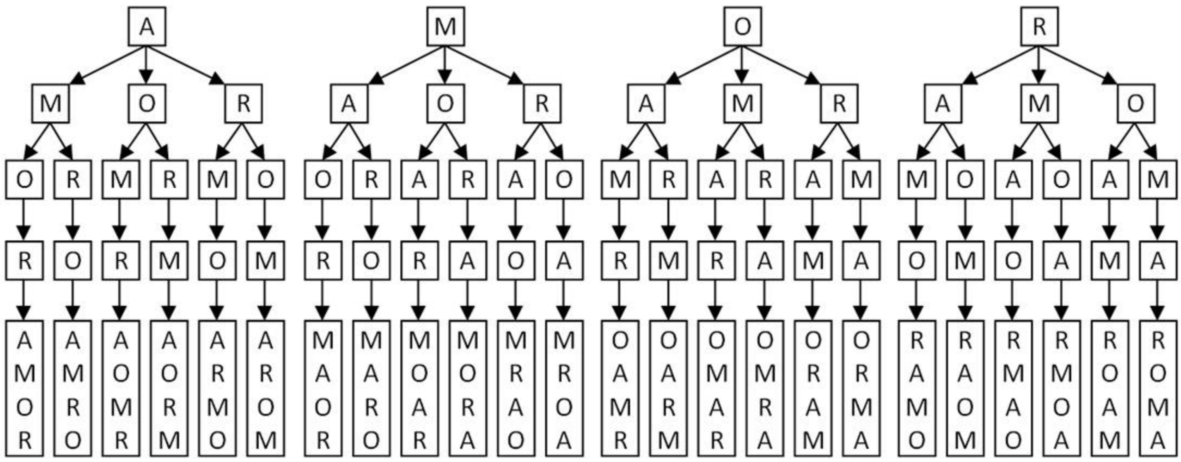
**3ª possibilidade de solução por Fatorial de um número natural:**

3! = 3•2•1 = 6

**Exemplo 4.2.** *Determine o número de anagramas da palavra AMOR.*

*Solução: Como a palavra AMOR possui 4 letras diferentes, espera-se que o aluno consiga apresentar umas das 3 possibilidades de resolução, para chegar no resultado 24.*

**1ª possibilidade de solução por Diagrama de Árvore:**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26: Os anagramas da palavra AMOR.

**2ª possibilidade de solução por Princípio Multiplicativo:**

| 1ª letra | | 2ª letra | | 3ª letra | | 4ª letra | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | • | 3 | • | 2 | • | 1 | = | 24 |

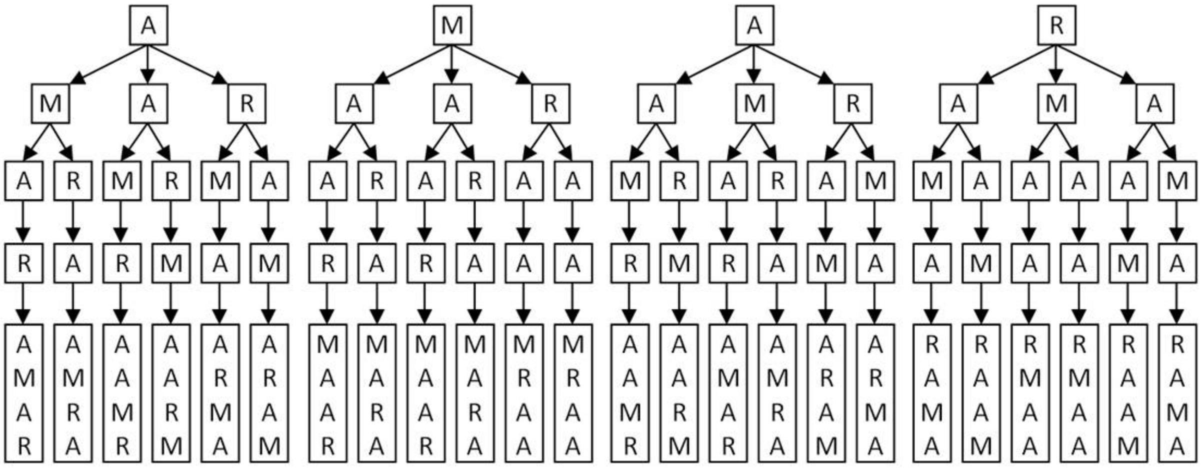
**3ª possibilidade de solução por Fatorial de um número natural:**

4! = 4•3•2•1 = 24

**Exemplo 4.3.** *Determine o número de anagramas da palavra AMAR.*

*Solução: Como a palavra AMAR possui 4 letras, e a letra A repete 2 vezes, espera-se que os alunos apresentem as mesmas possibilidades de resolução do exemplo anterior, mas neste caso devem perceber que o resultado é 12, pois metade dos anagramas se repetem.*

**1ª possibilidade de solução por Diagrama de Árvore:**




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27: Os anagramas da palavra AMAR.

Ao concluírem o Diagrama de Árvore, devem notar que cada anagrama aparece repetido duas vezes, começando pelo 1º e 3º galhos iniciados pela letra A, que produzem os mesmos anagramas. Em seguida, perceber que nos galhos iniciados pela letra M possuem anagramas repetidos, da mesma forma os da iniciados pela letra R. Sendo assim, devem dividir o resultado por 2.

**2ª possibilidade de solução por Princípio Multiplicativo:**

Neste caso, além de realizar o cálculo por Princípio Multiplicativo, os alunos devem perceber que o fato da letra A aparecer 2 vezes, resulta que os anagramas serão contado duas vezes, logo será necessário dividir por 2 o resultado.

| 1ª letra | | 2ª letra | | 3ª letra | | 4ª letra | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $\bullet$ | 3 | $\bullet$ | 2 | $\bullet$ | 1 | $=$ | 24 |

Em seguida 24:2 = 12

**3ª possibilidade de solução por Fatorial de um número natural:**

Neste caso, além de realizar o cálculo por 4!, os alunos devem perceber que o fato da letra A aparecer 2 vezes, resulta que um mesmo anagrama será contado 2 vezes, logo será necessário dividir por 2 o resultado.

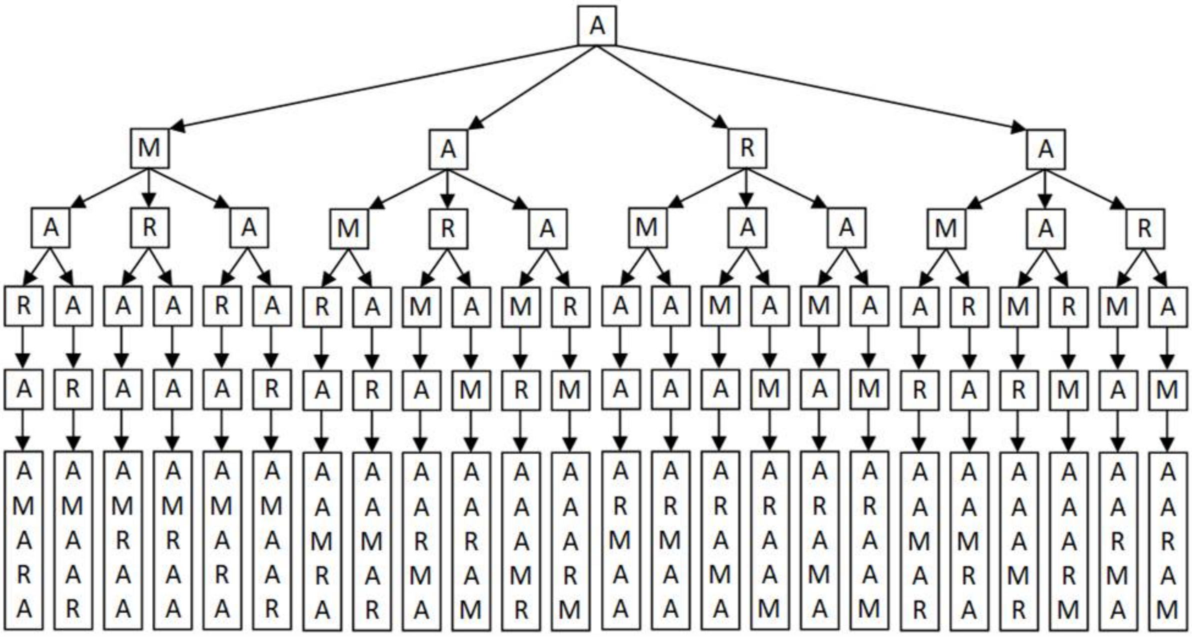
$$\frac{4!}{2} = \frac{4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1}{2} = 4 \bullet 3 = 12$$

**Exemplo 4.4.** *Determine o número de anagramas da palavra AMARA.*

*Solução: Como a palavra AMARA possui 5 letras, e a letra A repete 3 vezes, espera-se que os alunos apresentem as mesmas possibilidades de resolução do exemplo anterior, mas neste caso devem perceber que o fato da letra A repetir 3 vezes, implica, por exemplo, que é necessário produzir um galho do Diagrama da Árvore que se inicia pela letra A, pois os outros se repetem. Neste caso, o resultado é 20, e o objetivo é que os alunos percebam a partir deste atividade a regularidade que os resultados são divididos pelo fatorial da quantidade de repetições de uma letra, ou várias letras. Muito provavelmente o professor deverá interceder para que os alunos consigam desenvolver este raciocínio.*

**1ª possibilidade de solução por Diagrama de Árvore:**

Neste caso, partindo de um único galho do Diagrama de Árvore, percebe-se que cada galho iniciado por uma letra produz 24 anagramas. Como são 5 letras, daria um total de 120 anagramas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28: Os anagramas da palavra AMARA iniciados por A.

Como neste galho cada anagrama repete 2 vezes, e seriam 3 galhos iniciados pela letra A, conclui-se que repetirão 6 vezes cada anagrama, tanto nos galhos iniciados pela letra A quanto nos iniciados pelas letras M e R. Logo, o número de anagramas da palavra AMARA é: 120:6 = 20

**2ª possibilidade de solução por Princípio Multiplicativo:**

Neste caso, além de realizar o cálculo por Princípio Multiplicativo, os alunos devem perceber que o fato da letra A aparecer 3 vezes, resulta que cada anagrama repete 6 vezes.

Provavelmente, o professor deverá intervir junto aos alunos, pois baseado na resolução do exercício anterior, podem pensar que os anagramas repetem 3, pois a letra A também repete 3 vezes. A intervenção é para que percebam que 6 = 3!, e assim relacionem as repetições da letra A, que são 3, ao fatorial deste número. Logo, será necessário dividir a contagem total dos anagramas por 6.

| 1ª letra | | 2ª letra | | 3ª letra | | 4ª letra | | 5ª letra | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | • | 4 | • | 3 | • | 2 | • | 1 | = | 120 |

Em seguida 120:6 = 20

**3ª possibilidade de solução por Fatorial de um número natural:**

Neste caso, além de realizar o cálculo por 5!, como abordado anteriormente, os alunos devem perceber que o fato da letra A aparecer 3 vezes, resulta que um mesmo anagrama será contado 6 vezes, logo será necessário dividir por 3! o resultado.

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!} = 5 \bullet 4 = 20$$

É natural que os alunos iniciem qualquer contagem "criando"seus elementos, como no caso do Diagrama de Árvore, pois é mais indutivo saber quem são os elementos e depois contá-los. Diante disso, cabe ao professor mostrar outras possibilidades de contagem, pois os alunos deve perceber que muitas delas produzem valores os quais trariam dificuldades de contar um a um. Do exemplo 1 ao 4, é imprescindível que os alunos consigam utilizar as 3 formas de resolução propostas.

### 4.5.2 *Aula 3 - Problema sobre contagem de grupos ordenáveis e não ordenáveis*

**Duração:** 45 minutos.
**Local de desenvolvimento da atividade:** sala de aula.
**Recursos necessários:** lousa, caneta de lousa e folhas impressas com as atividades.

**Exemplo 4.5.** *Uma escola selecionou 5 alunos do 3º ano do Ensino Médio para serem ou Orador ou Juramentista, são eles: Ana, Bil, Caê, Dan e Elô. Agora querem saber quantas duplas de alunos podem ser formadas pelos 5 alunos, já definidos o(a) orador(a) e o(a) juramentista. Caso não fossem definidos o(a) orador(a) e o(a) juramentista, quantas duplas de alunos seriam possíveis?*

*Solução: Esta situação-problema requer duas respostas, uma para a quantidade de duplas já definidos o(a) orador(a) e o(a) juramentista e outra para a formação de duplas, em que seriam definidos o(a) orador(a) e o(a) juramentista num segundo momento. No primeiro item é um Arranjo Simples de 5 elementos 2 a 2, que resulta em 20 duplas. No segundo é uma Combinação de 5 elementos 2 a 2, que resulta em 10 duplas. No* *entanto, esses conceitos de Arranjo e Combinação, serão abordados num segundo momento, inicialmente deseja-se saber quais as estratégias que os alunos vão criar a partir de suas experiências.*

O professor deve iniciar a aula expondo a atividade com a situação-problema aos alunos, para que tentem encontrar a solução utilizando a experiência que possuem na resolução dos exercícios de contagem, como princípio multiplicativo, diagrama de árvore e fatorial de um número natural, apresentados em aulas anteriores.

O professor deve aproveitar o momento em que os alunos estão tentando resolver a atividade para observar as estratégias que estão sendo utilizadas, além de verificar aqueles que não conseguem iniciar com alguma estratégia, fazendo uma revisão sobre os assuntos abordados.

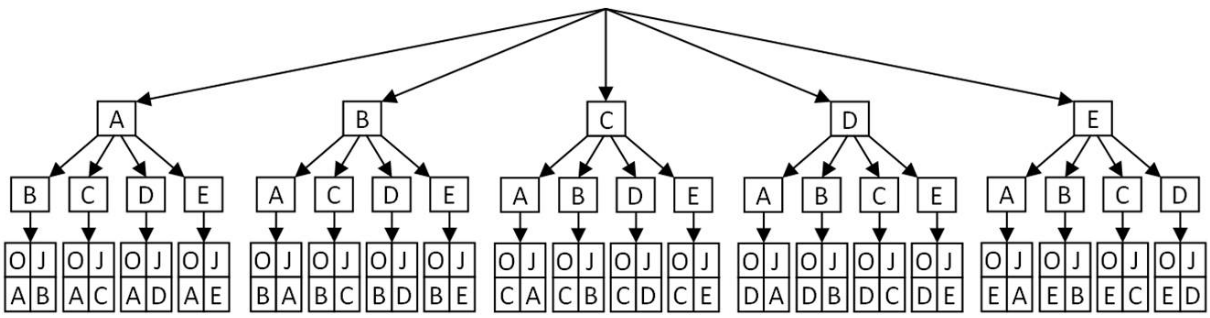
Além disso, oriente os alunos a observar as regularidades que podem ocorrer na resolução deste tipo problema.

Após transcorridos aproximadamente 25 minutos, realize uma compilação das principais soluções dos alunos, apontando estratégias bem elaboradas, sejam com soluções corretas ou incorretas.

Neste caso, espera-se que as soluções aconteçam por formação das duplas (Agrupamentos ou Diagrama de Árvore) e em seguida a contagem das duplas possíveis, mas haverá aqueles que conseguem determinar pelo princípio multiplicativo e fatorial de um número natural.

**1ª Possibilidade de solução por Diagrama de Árvore:**

Propositalmente, para representar os alunos usa-se as iniciais dos nomes, e para definir o Orador, a letra O (ó), e Juramentista, a letra J (jota).



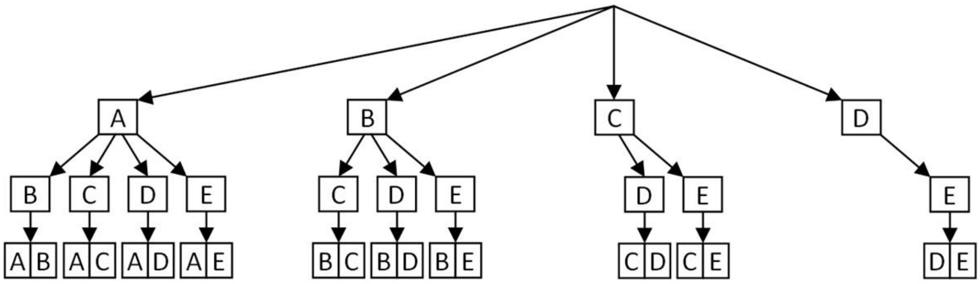

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29: As duplas de alunos já definidos o(a) orador(a) e o(a) juramentista.

Contando a última linha do Diagrama de Árvore, tem-se 20 duplas, que é a resposta do primeiro item do problema.

Para a resposta do segundo item, utiliza-se o mesmo diagrama, sem definir o(a) orador(a) e o(a) juramentista, eliminando os casos em que duplas têm os mesmos alunos.

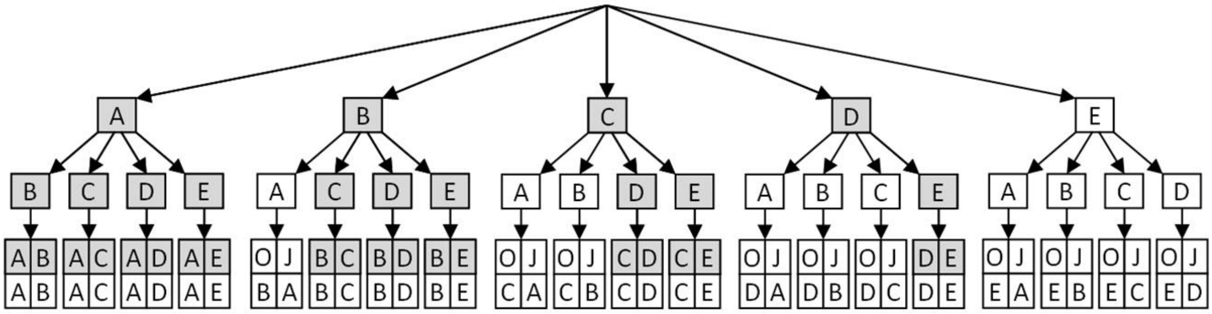
Mantendo a mestra estrutura, é importante que os alunos percebam as partes que foram eliminadas, concluindo que metade das duplas eram formadas pelos menos alunos.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30: As duplas de alunos sem definir o(a) orador(a) e o(a) juramentista.

Leve os dois diagramas impressos com o mesmo tamanho, solicitando aos alunos que recorte partes do 2º diagrama e sobreponha ao 1º, para uma observação mais clara, das duplas eliminadas, isso auxilia aqueles com maior dificuldade, como no exemplo a seguir.




Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31: As duplas de alunos sobrepostas.

**2ª Possibilidade de solução por Princípio Multiplicativo e Fatorial de um Número Natural**

Neste caso, para responder ao primeiro item, basta realizar o cálculo por Princípio Multiplicativo, analisando que escolhendo como primeira opção o Orador, tem-se 5 alunos possíveis, e uma vez escolhido o Orador, restam 4 alunos para a escolha do Juramentista. O fato de escolher o Juramentista antes do Orador, não interfere no cálculo.

| Orador | | Juramentista | | Total |
|---|---|---|---|---|
| 5 | $\bullet$ | 4 | = | 20 |

Como parece intuitivo que se tem duplas como AB e BA, que significam os mesmos alunos, é natural que os alunos que optem por esta solução percebam que será necessário dividir o resultado anterior por 2. Logo, para responder o segundo item, faz-se: $20{:}2 = 10$

**Observações:**

• Aparentemente, a trajetória parece simples, mas a assimilação destes conceitos pelos alunos não é. O professor deve ser um constante observador deste processo, devendo intervir sempre que perceber a dificuldade dos alunos.

• O tempo de 45 minutos pode ser insuficiente, dependendo das turmas, o que pode ser compensado com um avanço no tempo da **Aula 4**, que deve ser mais rápida e utilizar menos que o tempo de uma aula de 45 minutos.

### 4.5.3 *Aula 4: Apresentação da solução do Problema por fórmulas de Arranjo e Combinação*

| |
|---|
| **Duração:** 45 minutos.<br>**Local de desenvolvimento da atividade:** sala de aula.<br>**Recursos necessários:** lousa, caneta de lousa e folha impressa. |

A partir do momento em que foram debatidas algumas resoluções, o professor deve expor aos alunos a diferença do que significa grupos ordenáveis (quando é utilizado arranjo) e grupos não ordenáveis (quando é utilizado combinação). A explicação pode ser com outras situações, como ordenação dos números em centena, dezena e unidade, por exemplo, para mostrar que um grupo com 123 é diferente de outro 321, com os mesmos números, mas que se 1, 2 e 3 são os números da camisa de jogadores, um grupo formados pelos jogadores 1, 2 e 3, é igual ao grupo formados pelos jogadores 3, 2 e 1, pois são grupos formados pelos mesmos jogadores, em que a ordem não importa. Os alunos devem perceber que em determinados grupos com os mesmos elementos a sua ordenação implica em contagem, sendo que em outros, não há ordenação.

**Exemplo 4.6.** *Idem ao Exemplo 4.5.*

*Solução:*

*O primeiro item pode ser revolvido pela fórmula de Arranjo* $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, *em que* $n$ *é o total de elementos e* $p$ *a quantidade de elementos de um determinado conjunto ordenável. Logo, temos de resolver o Arranjo* $A_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!} = 5 \bullet 4 = 20.$

*O segundo item pode ser resolvido pela fórmula de Combinação* $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, *em que* $n$ *é o total de elementos e* $p$ *a quantidade de elementos de um determinado conjunto não ordenável. Logo, temos de resolver a Combinação* $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \bullet 4 \bullet 3!}{2!3!}$
$= \dfrac{5 \bullet 4}{2} = \dfrac{20}{2} = 10.$

## 4.6 AVALIAÇÃO

Durante as etapas desenvolvidas, a observação em relação à participação dos alunos e os conhecimentos adquiridos por eles, devem ser avaliados a partir de comentários realizados pelo professor, buscando incentivá-los por buscas a novos conhecimentos, além de buscarem revisões àqueles que apresentaram mais dificuldades.

Avalie também a capacidade que os alunos desenvolveram para interpretar os conceitos novos e relacioná-los com situações das quais já tiveram experiência.

Caso seja possível e tenha tempo hábil, recolha os registros das resoluções estabelecidos, com as estratégias produzidos por eles, dando-lhes um retorno acerca de seus resultados, enaltecendo a criatividade em detrimento de respostas corretas ou incorretas.

O professor deve ter o bom senso de perceber que algumas respostas incorretas, com resoluções criativas e muito próximas da resposta correta, podem ser resultado de algum conceito empregado errado. O caso da letra A, que se repete na palavra AMARA por 3 vezes, no **Exemplo 4.4**, poderia levar os alunos a dividir o resultado por 3, levando-se em conta a resolução do **Exemplo 4.3**.

# 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O fator motivador deste trabalho é poder contribuir com a melhoria do ensino de matemática no Brasil, em que resultados de avaliações internas e externas, como o PISA, por exemplo, apresentam resultados insatisfatórios.

Como norteador do trabalho, escolheu-se a Análise Combinatória por ser uma área da Matemática que trabalha uma ideia muito simples: contagem de objetos. Desde sempre o ser humano teve a necessidade de contar coisas, e com a homologação da BNCC, em 2018, a habilidade de contagem passou a configurar entre aquelas que são essenciais à formação de um cidadão.

A partir das operações básicas da matemática, como adição e multiplicação, que parecem simples, mas que ainda trazem dificuldades de aprendizagem aos alunos, chega-se a conceitos de contagem, como Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo, e a partir delas a uma gama enorme de ferramentas de contagem. Logo, é esperado que ao trabalhar com as ferramentas de contagem, os alunos também estejam se aprimorando nas operações básicas da matemática.

O trabalho teve início com uma referência a situações históricas que motivaram os primeiros estudos em Análise Combinatória, e percebeu-se que desde da antiguidade já existiam grandes matemáticos em busca de soluções a problemas de contagem da época. Em seguida, com os primeiros estudos em Probabilidade, desenvolvidos por alguns matemáticos, como Cardano, Pacioli e Tartaglia, verificou-se que o desenvolvimento desta área da matemática esteve diretamente ligado ao desenvolvimento da Análise Combinatória.

Com os estudos mais aprofundados em História da Análise Combinatória, observou-se a contribuição de diversos grandes matemáticos para esta área, desde Baskhara (mais conhecido por todos pela fórmula que tem o seu nome), passando por nomes, como Stifel (outro que tem uma relação com seu nome), Pascal (um dos mais importantes para esta área, que dá nome ao Triângulo de Pascal), Newton (mais conhecido em física, por suas Leis), até Leibniz (que ajudou a desenvolver a Teoria do Cálculo), De Moivre (conhecido pela fórmula com seu nome, em Geometria Analítica) e Euler (um dos mais talentosos matemáticos, com contribuições em diversas áreas, como na Aritmética e Teoria dos Grafos). Foram a partir destes e de outros matemáticos que surgiram conceitos, como Permutação, Arranjo, Combinação e a relação entre o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton, estudados até hoje, ferramentas que auxiliam na resolução de problemas envolvendo contagem de objetos.

O trabalho também pesquisou a inclusão da Análise Combinatória nos currículos escolares do Brasil, e verificou-se que desde antes dos anos 70 já fazia parte da série final do ensino fundamental e do ensino secundário, ganhando maior abrangência com os PCNs, em 1997, quando passou a ser conteúdo dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (antigo ensino secundário).

Em relação à BNCC, o trabalho concluiu que é uma nova proposta sobre os currículos escolares, que anteriormente eram baseados em componentes (disciplinas escolares) e seus conteúdos, agora se pauta essencialmente nas competências e habilidades que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em que as componentes curriculares tornam-se instrumentos na aquisição destas habilidades. Além disso, enfatiza as habilidades contidas na BNCC que contemplam e justificam o ensino da Análise Combinatória.

A partir de como a Análise Combinatória se desenvolveu ao longo da História e da sua importância nos currículos escolares, o trabalho sugeriu uma série de atividades para serem desenvolvidas com os alunos, desde as séries finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, elencando suas aplicações e forma de desenvolvimento com os alunos.

Tendo como ponto de partida a dificuldade apresentada pelos alunos em diferenciar problemas de contagem que envolvem arranjo dos que envolvem combinação, a proposta didática do trabalho propõe uma situação-problema em que os dois casos de agrupamento são abordados, justamente com o objetivo de oferecer uma alternativa de desenvolver nos alunos a capacidade de diferenciá-los.

Ao final do trabalho desenvolvido, nota-se que há muito a ser pesquisado em Análise Combinatória, como por exemplo o desenvolvimento do Binômio de Newton $(a+b)^n$ e a sua relação com o Triângulo de Pascal. Destes estudos, por exemplo, originaram-se a Relação de Stifel e o Teorema das Linhas, duas ferramentas aplicadas a problemas neste trabalho. Outra proposta de estudo seria a Teoria dos Grafos, iniciada por Euler, que está ligada a estudos mais recentes.

Espera-se que o trabalho não se finda em si próprio, mas que sirva de instrumento a outros profissionais da área de educação, principalmente os professores de matemática, quando buscarem alternativas de como desenvolver a habilidade de contagem em seus alunos.

## 5.1 UM POUCO DO AUTOR

Conhecido como professor Alex Vaz ou simplesmente Alex, minha formação em Matemática Licenciatura ocorreu entre os anos de 2001 e 2004, na Universidade de Taubaté, quando o curso ainda era anual e de 4 anos. Como aluno do curso de Matemática Licenciatura, não tenho recordação de ter estudado Análise Combinatória, no máximo uma vaga lembrança de algumas aulas de Estatística, o mais próximo. No ensino secundário, muito menos. Muitos questionavam se o curso era licenciatura ou bacharelado, pela enorme quantidade de disciplinas voltadas para a pesquisa em nível superior, como cálculo, métodos numéricos, variáveis complexas e estruturas algébricas, das quais me lembro muito pouco.

Como professor, minha experiência é basicamente em redes públicas de ensino, em Taubaté e cidades vizinhas, desde 2003, quando ainda era aluno do 3º ano de matemática. Destes anos, poucas vezes consegui lecionar a Análise Combinatória, ou porque não fazia parte dos conteúdos dos anos que eu lecionava, ou porque estava no final do planejamento que nunca conseguia cumprir por total, ou talvez por não dar a devida importância.

O fato de não desenvolver esta área da matemática no decorrer dos anos como aluno de graduação e professor, trouxe-me muita dificuldade durante as aulas de Matemática Discreta, do PROFMAT. Minha forma de pensar sobre o assunto então mudou, fazendo com que naquele mesmo ano eu modificasse o planejamento de matemática do 2º ano do Ensino Médio, para que pudesse lecionar os conteúdos de análise combinatória na escola em que trabalhava. Isso também foi um fator de motivação para pesquisar sobre este assunto.

A partir de então, a Análise Combinatória ganhou um novo significado na minha prática pedagógica, principalmente no Ensino Médio, em que as suas ferramentas são intensamente desenvolvidas. Por diversas vezes visitei o site do IMPA, para assistir às aulas do professor Josimar Silva, as quais foram muito inspiradoras para propor as atividades deste trabalho.

Após à conclusão das disciplinas do curso do PROFMAT e deste trabalho de pesquisa, considero-me um profissional mais preparado para o desenvolvimento de projetos futuros, buscando novos desafios que estão pela frente no ensino da matemática.

Por fim, a mensagem de Paulo Freire, a qual diz que

> Ler é uma operação inteligente, difícil, exigente, mas gratificante. Ninguém lê ou estuda autenticamente se não assume, diante do texto ou do objeto da curiosidade a forma crítica de ser ou de estar sendo sujeito da curiosidade, sujeito da leitura, sujeito do processo de conhecer em que se acha. Ler é procurar buscar criar a compreensão do lido; daí, entre outros pontos fundamentais, a importância do ensino correto da leitura e da escrita. É que ensinar a ler é engajar-se numa experiência criativa em torno da compreensão. Da compreensão e da comunicação.

tem muito a ver com a nossa prática de pesquisa, onde buscamos compreender os acontecimentos históricos para criar alternativas para a solução dos problemas, principalmente em matemática.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] Brasil. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018, 595 p.

Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Acesso em: 30 dez. 2019

[2] Brasil no PISA 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Brasília : MEC, 2015, 272 p.

Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf

Acesso em: 30 dez. 2019

[3] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998, 148 p.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Acesso em 05 jan. 2020

[4] Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000, 58 p.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Acesso em 05 jan. 2020

[5] Brasil. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros curriculares nacionais (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006, 144 p.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Acesso em 05 jan. 2020

[6] Brasil. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013, 562 p.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&category_slug=abril-2014-pdf&Itemid=30192

Acesso em 05 jan. 2020

[7] Brasil. Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º E 3º ANOS) do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEC, 2012, 137 p.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=12827-texto-referencia-consulta-publica-2013-cne-pdf&category_slug=marco-2013-pdf&Itemid=30192

Acesso em 05 jan. 2020

[8] MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo César Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade, Editora Própria **191**, Rio de Janeiro (1991).

Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf

Acesso em 05 jan. 2020

[9] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações. Volume 2. Ensino Médio. 2ª Edição. Editora Ática **448**, São Paulo (2013).

[10] SILVA, Claudi Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula. Volume 2. Ensino Médio. 2ª Edição. Editora FTD **432**. São Paulo (2005).

[11] PAIVA, Manoel. Matemática. Volume Único. Ensino Médio. 1ª Edição. Editora Moderna **461**. São Paulo (1999).

[12] VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G. Minimanual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. Volume Único. Ensino Médio. Editora Rideel **586**. São Paulo (1999).

[13] GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático pedagógica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – IMPA, Rio de Janeiro, (2014)

[14] AMBROZI, Luiz, Jogos em uma Sequência Didática para o Ensino de Análise Combinatória, Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, (2017).

[15] SANTOS, Patrick F. Uma Abordagem da Análise Combinatória Sem o Uso Abusivo de Fórmulas, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, (2013).

[16] ALMEIDA, Adriana Luziê de. Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, (2010).

[17] ALVES, Renato de Carvalho. O Ensino de Análise Combinatória na Educação Básica e a Formação de Professores. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, (2012).

[18] TROCADO, Nathália López. Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística. Rio de Janeiro (2017).

[19] SANTOS JR, Juvino Pereira dos. Análise combinatória: Uma abordagem para o sexto ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, (2016).

[20] DA SILVA, André Luis Beltrão. Probabilidade no Ensino Médio e Suas Aplicações no Cotidiano. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Universidade Federal do Amapá - UNIFAP. Macapá (2016)

[21] CALABRIA, Angelica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. X Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Campinas (2013).

[22] SILVA, Cláudia Borim e COUTINHO, Cleida de Queiroz e Silva. O nascimento da Estastísticas e sua relação com o surgimento da Teoria da Probabilidade. Revista Integração. v. ano XI, n. 41, p. 191-196, 2005.

[23] MLODINOW, Leonard, O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas. Jorge Zahar, Rio de Janeiro (2009).

[24] Site Matemática Fácil. Os Papiros da Matemática Egípcia - O Papiro de Rhind ou Ahmes. 2015

Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html

Acesso em 11 jan. 2020

[25] Site Dreams Time.

Disponível em: https://pt.dreamstime.com/ilustraç~ao-stock-enigma-archimedes-key-do-jogo-de-ostomachion-image45995991

Acesso em 11 jan. 2020

[26] Site Amazon. Ars Magna or the Rules of Algebra by Girolamo Cardano (1993-12-01)

Disponível em: https://www.amazon.com/Magna-Algebra-Girolamo-Cardano-1993-12-01/dp/B01K16HOC4

Acesso em 11 jan. 2020

[27] Blog Carolina Carreño

Disponível em: http://carofelipeomar13.blogspot.com/2015/02/fray-luca-pacioli-l-uca-de-borgo-sancti.html

Acesso em 11 jan. 2020

[28] Site Wikipedia. Ficheiro Tartaglia

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Tartaglia-Opere-portrait.jpg

Acesso em 11 jan. 2020

[29] Site Clube de Matemática da OBMEP

Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_006-principio-fundamental-de-contagem/principio-fundamental-de-contagem-generalizacao/

Acesso em 11 jan. 2020

[30] Blog Matemática Show

Disponível em: http://matemlua.blogspot.com/2013/06/

Acesso em 11 jan. 2020

[31] Site Central Exatas. Análise Combinatória

Disponível em: http://www.centralexatas.com.br/matematica/analise-combinatoria/942269

Acesso em 11 jan. 2020

[32] Site Elo 7

Disponível em: https://www.elo7.com.br/caixa-cubo-dado/dp/C0AAEA

Acesso em 11 jan. 2020

[33] Site Wikipedia. Kortlek

Disponível em: https://sv.wikipedia.org/wiki/Kortlek#/media/Fil:Kortlek.png

Acesso em 11 jan. 2020

[34] Site Web Motors. Conheça a História das Placas

Disponível em: https://www.webmotors.com.br/wm1/cultura-auto/conheca-historia-das-placas-veiculares

Acesso em 11 jan. 2020

[35] Site GoConqr

Disponível em: https://www.goconqr.com/quiz/766182/an-lise-combinat-ria

Acesso em 11 jan. 2020