

---

**Universidade Federal de São Paulo**

Instituto de Ciência e Tecnologia

---



**Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Trigonometria Esférica: Origens e  
Aplicações**

**Jorge Maurilio de Faria**

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

São José dos Campos  
fevereiro, 2020



**PROFMAT**

Título: *Trigonometria Esférica: Origens e Aplicações*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

**São José dos Campos**  
**fevereiro, 2020**

Faria, Jorge Maurilio

**Trigonometria Esférica: Origens e Aplicações**, Jorge Maurilio de Faria – São José dos Campos, 2020.

ix, 119f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Spherical Trigonometry: Origins and Applications

1. Trigonometria Esférica. 2. Geometria Esférica. 3. Astronomia de Posição. 4. Esfera Celeste. 5. Coordenadas de Posição.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**  
**PROFMAT**

**Chefe de departamento:**

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

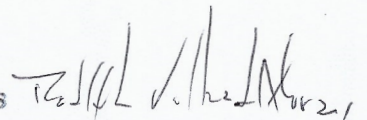
**Coordenador do Programa de Pós-Graduação:**

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

JORGE MAURILIO DE FARIA

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: ORIGENS E APLICAÇÕES

**Presidente da banca:** Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



**Banca examinadora:**

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Claudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Prof. Dr. Sandro da Silva Fernandes

**Data da Defesa:** 28 de fevereiro de 2020

*“Fale-me, e eu esquecerei. Ensine-me, e eu poderei lembrar. Envolve-me, e eu  
aprenderei.”*

*Benjamim Franklin*

## AGRADECIMENTOS

---

A **DEUS** pela força, sabedoria e saúde para que chegasse ao final dessa etapa.

À minha mãe, **MARIA JOSÉ DE FARIA**, por sempre me apoiar em todos meus sonhos e aos **irmãos** pela confiança e orações.

Ao meu pai, **JORGE SOARES DE FARIA**, que sempre esteve ao meu lado e me proporcionou seu maior legado: a educação.

A minha esposa, **ANA CRISTINA SEBE DE FARIA**, que em todos os momentos está ao meu lado e me incentivou a ter nos estudos um sentido de vida.

Aos meus filhos, **BRUNO, RENAN, LEANDRO e JOÃO MIGUEL**, que são inspiração para meus trabalhos.

Aos amigos que compartilharam comigo os anos de aprendizagem da **turma PROFMAT 2017**. O meu carinho, a minha admiração e minha gratidão.

Ao **PROF. DR. ANGELO CALIL BIANCHI** pela dedicação com que conduz o curso PROFMAT e por me transmitir informações sempre pertinentes sobre o curso e principalmente sobre os fundamentos da Aritmética.

Ao meu orientador, **PROF. DR. RODOLPHO VILHENA DE MORAES**, que seu entusiasmo me fez amar mais ainda o tema em estudo.

À **SBM** pela iniciativa do **PROFMAT** e a **CAPES** pelo apoio financeiro.

## RESUMO

---

O presente trabalho tem por objetivo realizar um estudo histórico da Trigonometria Esférica, abrangendo desde suas origens e finalidades, bem como aplicações no dia a dia e sua relação com a Astronomia. Também fazer uma viagem no currículo nacional para observar como o tema está inserido na grade escolar. Destaco aqui os trabalhos de (USUI, 2014) , que me inspiraram com alguma contribuição no desenvolvimento de minhas pesquisas, no que pude aprofundar as questões sobre as transformações de coordenadas.

Os elementos da Trigonometria Esférica são apresentados por meio de definições e teoremas. Apresentamos a relação fundamental, conhecida como relação dos quatro elementos (Lei dos Cossenos), a Lei dos Senos, a Esfera Celeste, seus elementos e suas coordenadas no sistema equatorial, sistema horizontal e sistema horário. Apresentamos também o triângulo de posição como sendo um triângulo esférico, relacionando as coordenadas de diferentes sistemas de um astro.

A partir dos estudos realizados, apresentar uma sequência didática, permitindo o cálculo de distâncias entre dois astros distintos na Esfera Celeste, envolvendo a Geometria Esférica, a Trigonometria Esférica e a Esfera Celeste, em especial, a distância entre cidades em nosso planeta.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

**Palavras-chave:** 1. Trigonometria Esférica. 2. Geometria Esférica. 3. Astronomia de Posição. 4. Esfera Celeste. 5. Coordenadas de Posição.



## ABSTRACT

---

The present work aims to carry out a historical study of Spherical Trigonometry, covering since its origins and purposes, as well as applications in daily life and its relationship with Astronomy. Also take a trip on the national curriculum to observe how the theme is inserted in the school grid. I highlight here the works of (USUI, 2014) , which inspired me with some contribution in the development of my research, in which I was able to deepen the questions about the coordinate transformations.

The elements of Spherical Trigonometry are presented through definitions and theorems. We present the fundamental relation, known as the relation of the four elements (Law of the Cosines) and the Law of the Sines, the Celestial Sphere, its elements and its coordinates in the equatorial system, horizontal system and hourly system. Also present the triangle of position as being a spherical triangle, relating the coordinates of different systems of a star.

From the studies carried out, we present a didactic sequence, allowing the calculation of distances between two distinct stars in the Celestial Sphere, involving Spherical Geometry, Spherical Trigonometry and the Celestial Sphere, especially the distance between cities on our planet.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Financial Code 001.

**Keywords:** 1. Spherical Trigonometry. 2. Spherical Geometry. 3. Positions Astronomy. 4. Celestial Sphere. 5. Position Coordinates.

# SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO	6
2	HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA	11
2.1	A Trigonometria das Cordas	11
2.2	A Trigonometria das Semi-Cordas	15
2.3	A Trigonometria dos Árabes	17
2.4	A Trigonometria Europeia	18
3	TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	20
3.1	Conceitos Fundamentais	20
3.1.1	A Esfera	20
3.1.2	Superfície da Esfera	21
3.1.3	O Círculo Máximo	22
3.1.4	Propriedades Elementares	22
3.1.5	Elementos Notáveis de uma Superfície Esférica	24
3.1.6	Circunferências Máximas	24
3.1.7	Elementos de uma Superfície Esférica	28
3.2	Distâncias numa Superfície Esférica	30
3.3	Triângulo Esférico	30
3.4	A Trigonometria no Triângulo Esférico	33
4	A ESFERA CELESTE	40
4.1	A Esfera Celeste	41
4.1.1	Principais pontos e linhas da Esfera Celeste	41
4.2	A Terra	45
4.3	Sistema de Referência	48
4.4	Sistemas de Coordenadas	49
4.4.1	Sistema de Coordenadas Heliocêntrico - Eclíptico	52
4.4.2	Sistema de Coordenadas Geocêntrico - Equatorial	53
4.4.3	Sistema de Coordenadas Geográficas	54
4.4.4	Sistema de Coordenadas Topocêntrico - Horizontal	56
4.4.5	Sistema de Coordenadas Horárias	57
4.4.6	Sistema de Coordenadas Galácticas	58
4.5	Tabela comparativa entre vários Sistemas de Coordenadas	60
5	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	61
5.1	Transformação de Coordenadas Eclípticas para Equatoriais	65

5.2	Transformação de Coordenadas Equatoriais em Horizontais	66
5.3	Transformação de Coordenadas Equatoriais para Galácticas	68
5.4	Perturbações em Coordenadas	69
5.5	Sistema Global de Navegação por Satélites	72
6	PROPOSTA DIDÁTICA	76
6.1	Atividade 1	77
6.1.1	1º Momento	77
6.1.2	2º Momento	78
6.1.3	3º Momento	79
6.1.4	4º Momento	79
6.1.5	5º Momento	79
6.1.6	6º Momento	80
6.1.7	7º Momento	81
6.1.8	8º Momento	81
6.1.9	9º Momento	82
6.2	Atividade 2	82
6.3	Atividade 3	82
6.4	Atividade 4	83
7	CONCLUSÕES	86
A	APÊNDICES	89
A.1	Vetores no Plano	89
A.1.1	Operações com Vetores	91
A.1.2	Propriedades das Operações com Vetores	93
A.1.3	Combinação Linear de Vetores	93
A.1.4	Produto Interno ou Produto Escalar	94
A.2	Vetores no Espaço	97
A.2.1	Operações com Vetores no Espaço	99
A.2.2	Produto Interno ou Produto Escalar	100
A.2.3	Produto Vetorial	101
A.2.4	Identidade de Lagrange	102
A.3	Superfícies de Revolução	103

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	<i>Esfera Celeste</i>	6
Figura 2	<i>Tábua Plimpton e Papiro de Rhind</i>	11
Figura 3	<i>Problema 56 do Papiro Rhind</i>	12
Figura 4	<i>Sistema de epiciclo de Ptolomeu</i>	14
Figura 5	<i>Equivalência de cordas e seno</i>	14
Figura 6	<i>Tábua com cordas de alguns ângulos</i>	15
Figura 7	<i>Seno indiano, Cosseno e Seno reverso</i>	16
Figura 8	<i>Seno</i>	18
Figura 9	<i>Esfera</i>	20
Figura 10	<i>Interseção da superfície esférica <math>S</math> com um plano <math>\Omega</math> passando pelo centro <math>O</math></i>	21
Figura 11	<i>Círculo Máximo e Círculo Menor</i>	22
Figura 12	<i>Esfera por 4 pontos</i>	23
Figura 13	<i>Círculos Máximos em um ponto</i>	23
Figura 14	<i>Ângulo de círculo máximo</i>	23
Figura 15	<i>Elementos Notáveis</i>	24
Figura 16	<i>Circunferência passando por <math>A</math> e <math>B</math> antípodas</i>	25
Figura 17	<i>Circunferência sobre dois pontos quaisquer</i>	25
Figura 18	<i>Circunferência <math>C</math> dividindo <math>S</math> em dois hemisférios</i>	26
Figura 19	<i>Interseção de duas circunferências máximas</i>	26
Figura 20	<i>Infinitos planos passando por <math>O</math></i>	27
Figura 21	<i>Calota Esférica</i>	28
Figura 22	<i>Zona Esférica</i>	28
Figura 23	<i>Ângulos Esféricos</i>	29
Figura 24	<i>Geodésica</i>	29
Figura 25	<i>Fuso Esférico</i>	30
Figura 26	<i>Triângulo Esférico</i>	31
Figura 27	<i>Área do triângulo esférico <math>ABC</math></i>	31
Figura 28	<i>Albert Girard</i>	33
Figura 29	<i>Lados Esféricos</i>	33
Figura 30	<i>Triângulo Esférico</i>	35
Figura 31	<i>A Esfera Celeste</i>	42
Figura 32	<i>Um observador em um lugar qualquer da Terra</i>	43
Figura 33	<i>Esfera Celeste visível no Hemisfério Sul</i>	44
Figura 34	<i>A latitude</i>	45
Figura 35	<i>Achatamento da Terra</i>	46

Figura 36	<i>Coordenadas em uma Esfera</i>	49
Figura 37	<i>Coordenadas Polares</i>	50
Figura 38	<i>Sistema de Coordenadas Heliocêntrico - Eclíptico</i>	53
Figura 39	<i>Sistema de Coordenadas Geocêntrico - Equatorial</i>	53
Figura 40	<i>Sistema de Coordenadas Geográficas</i>	54
Figura 41	<i>Observador sobre o elipsóide</i>	55
Figura 42	<i>Latitude Geocêntrica e Tempo Sideral</i>	55
Figura 43	<i>Sistema de Coordenadas Horizontais</i>	57
Figura 44	<i>Sistema de Coordenadas Horárias</i>	58
Figura 45	<i>Sistema de Coordenadas Galácticas</i>	59
Figura 46	<i>Comparativo entre os Sistemas de Coordenadas</i>	60
Figura 47	<i>Exemplo dos sistemas de coordenadas</i>	61
Figura 48	<i>Transformação de Coordenadas <math>Oxyz</math> para <math>Ox'y'z'</math> obtido pela rotação pelo ângulo <math>\chi</math> em torno do eixo <math>x</math>.</i>	62
Figura 49	<i>Coordenadas do ponto <math>P</math> em rotação em torno do eixo <math>x</math>.</i>	62
Figura 50	<i>As coordenadas do ponto <math>P</math> no sistema de rotação <math>x'y'z'</math></i>	63
Figura 51	<i>Ângulo <math>\varepsilon</math> de inclinação entre a eclíptica e o equador celeste</i>	65
Figura 52	<i>Coordenadas Horizontais (esquerda) e Horárias (direita)</i>	67
Figura 53	<i>Interseção do plano equatorial e galáctico</i>	68
Figura 54	<i>Precessão</i>	70
Figura 55	<i>Nutação</i>	70
Figura 56	<i>Efeitos da Paralaxe na posição de estrelas mais próximas</i>	71
Figura 57	<i>Aberração</i>	71
Figura 58	<i>Os efeitos da distorção na direção diferente de um objeto</i>	72
Figura 59	<i>Refração atmosférica</i>	72
Figura 60	<i>Representação esquemática das órbitas praticamente circular com 4 satélites GPS</i>	75
Figura 61	<i>Fazendo circunferências em isopor</i>	78
Figura 62	<i>Quantas retas passam por um ponto?</i>	78
Figura 63	<i>Duas retas paralelas?</i>	79
Figura 64	<i>Pontos Antípodas</i>	79
Figura 65	<i>Paralelas pelo ponto de formação do ângulo</i>	80
Figura 66	<i>Uso do transferidor para medir ângulos entre circunferências máximas</i>	80
Figura 67	<i>Fuso Esférico</i>	81
Figura 68	<i>Triângulo Esférico</i>	81
Figura 69	<i>Triângulo de Posição</i>	83
Figura 70	<i>Triângulo Esférico ABC</i>	84
Figura 71	<i>Distância de Natal a Campo Grande usando GEOGEBRA</i>	85
Figura 72	<i>Segmentos colineares AB e CD</i>	89

Figura 73	<i>Segmentos Equipolentes</i>	90
Figura 74	<i>Representantes do vetor</i>	90
Figura 75	<i>Adição de Vetores</i>	91
Figura 76	<i>Soma de Vetores</i>	91
Figura 77	<i>Adição de vetores em coordenadas</i>	92
Figura 78	<i>Produto do Escalar</i>	93
Figura 79	<i>Ângulo entre dois vetores</i>	94
Figura 80	<i>Diferença entre vetores</i>	96
Figura 81	<i>Paralelogramo <math>ABCD: AB \equiv CD</math></i>	97
Figura 82	<i>Segmentos equipolentes ao segmento <math>AB</math></i>	98
Figura 83	<i>Soma de Vetores no Espaço</i>	99
Figura 84	<i>Superfície de Revolução <math>S(\mathbf{e}, \mathbf{G})</math></i>	103
Figura 85	<i>Aproximando a área de uma superfície de revolução</i>	104
Figura 86	<i>Calota Esférica</i>	106
Figura 87	<i>Área da zona esférica</i>	106
Figura 88	<i>Fuso Esférico</i>	107

## INTRODUÇÃO

A Trigonometria Esférica, parte da Matemática dedicada ao estudo das propriedades geométricas dos triângulos esféricos, teve as suas origens ligadas às necessidades inerentes a problemas de navegação (terrestre ou marítima) orientada por astros. De fato, tanto a Terra como o firmamento apresentam-se, aparentemente, na forma esférica.

Ao observarmos o Universo, os astros se distribuem em um espaço tridimensional, no entanto, devido à imensa distância que separa estes astros da Terra, temos a impressão que todos se encontram em uma esfera, que todos eles estão fixos e “colados” em um fundo comum de forma esférica. Essa esfera aparente, chamada *Esfera Celeste*, está centrada a princípio no observador, mas às vezes, é conveniente considerarmos que o centro da esfera celeste esteja em algum outro ponto, no centro da Terra ou no centro do Sol. A esfera celeste não tem um raio definido, e desta forma, consideramos este raio como infinito (NETO, 2019).

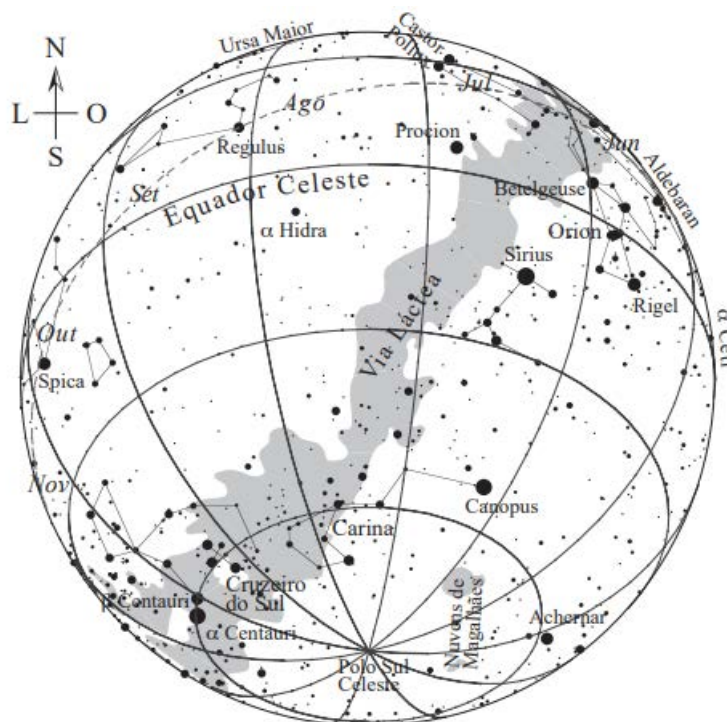


Figura 1: *Esfera Celeste*

Representação da Esfera Celeste, com algumas das principais estrelas, constelações, o equador e o polo Sul Celeste e a trajetória aparente do Sol - linha tracejada. Fonte: (NETO, 2019)

A forma geométrica da Terra foi uma preocupação desde os primórdios da humanidade. A navegação marítima e eclipses logo mostraram uma forma “arredondada” para a Terra. Em 1828, *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) introduziu um modelo aperfeiçoado da figura da Terra, mas o termo geoide foi criado em 1873 por *J.F. Listing*. A partir da utilização de instrumentos altamente sofisticados colocados em sondas e satélites artificiais sabemos hoje que a Terra tem um raio médio de 6348,14 km, uma área superficial de aproximadamente 510 milhões de quilômetros quadrados e um volume aproximado de 1 quatrilhão de quilômetros cúbicos. (WILLIAN, 2010)

Há cerca de 2300 anos, conforme descreve Carl B. Boyer (BOYER; MERZBACH, 2019), o matemático grego *Euclides* escreveu a obra matemática mais famosa e influente de todos os tempos: *Os Elementos*. Em treze livros, Euclides apresenta resultados de Geometria Euclidiana usando um sistema lógico-dedutivo constituído por postulados, noções comuns, proposições e teoremas. Um desses postulados, o V Postulado, conhecido como o *Postulado das Paralelas*, levantou desde logo alguma controvérsia devido à sua natureza mais complexa e menos intuitiva.

Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar este postulado a partir dos restantes, ou então o substituir por outro mais simples. Matemáticos como *John Wallis* (1616-1703), *Saccheri* (1667-1733), *Lambert* (1728-1777), *John Playfair* (1748-1819) e *Legendre* (1752-1833) não resolveram esta questão, mas dos seus trabalhos resultou um conjunto de proposições equivalentes ao V Postulado, presumindo a veracidade dos outros postulados da Geometria Euclidiana. (ABREU; OTTONI, 2015)

Um dos axiomas equivalentes ao V Postulado de Euclides que é usado nos livros modernos foi dado por *Playfair*:

*Dado um ponto  $P$  que não está numa reta  $r$ , existe uma só reta no plano de  $P$  e  $r$  que contém  $P$  e que não intersecta  $r$ .* (KLINE, 1990).

De acordo com (KLINE, 1990), no início do século XIX, alguns matemáticos, incluindo o alemão *Gauss*, notaram que o Postulado das Paralelas não poderia ser provado nem como verdadeiro, nem como falso com base nos outros postulados da Geometria Euclidiana, ou seja, o Postulado das Paralelas seria independente dos restantes. Seria então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas? *Nicolai Ivanovitch Lobachevski* (1792-1856) e *János Bolyai* (1802-1860), de forma independente, publicaram pela primeira vez os resultados de uma nova geometria não Euclidiana, conhecida atualmente por ***Geometria Hiperbólica***, que parte do pressuposto que, por um ponto exterior a uma reta dada, passam infinitas retas paralelas a reta dada (ABREU; OTTONI, 2015), que substitui o Postulado das Paralelas pelo axioma, conforme:



**Axioma Hiperbólico:** *Dada uma reta e um ponto exterior à reta, existem, pelo menos, duas retas distintas contendo o ponto dado e paralelas à reta dada.*(ROSA, 2010)

Os trabalhos de Lobatschewski e Bolyai não foram reconhecidos quando da publicação e só em 1870 é que a descoberta das geometrias não euclidianas tiveram a devida atenção, quando se tornaram conhecidas as notas e correspondência de Gaus sobre o assunto, após sua morte.

*Apesar do valor inegável dos trabalhos de Lobatschewski e János Bolyai, eles não demonstraram a consistência da Geometria Hiperbólica, ou seja, que o sistema axiomático não conduz a nenhuma contradição.*

*A consistência das geometrias não Euclidianas prova-se com a existência de modelos, que se obtêm a partir da atribuição de interpretações aos chamados termos primitivos (pontos, retas...) de modo a transformar os axiomas em afirmações verdadeiras à luz dessas interpretações. Por exemplo, neste trabalho é apresentado um modelo da Geometria Esférica onde os pontos são pontos da esfera e as retas são círculos máximos.*

*Em 1868, Eugênio Beltrami (1835-1900) apresentou o primeiro modelo para a Geometria Hiperbólica. A existência desse modelo revelou que se a Geometria Hiperbólica contém alguma contradição então essa contradição poderia ser transposta para a Geometria Euclidiana. Admitindo então que a Geometria Euclidiana é consistente, deduz-se assim que a Geometria Hiperbólica também o é.*

*Em 1882, Henri Poincaré (1854-1912) apresentou um segundo modelo da Geometria Hiperbólica: o modelo de Poincaré num semi-plano.* (ROSENFELD, 2012).

*Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana onde não existem retas paralelas. Contudo, ao contrário do que acontece na Geometria Hiperbólica e na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica duas retas (dois círculos máximos) distintas não se intersectam em apenas um ponto mas sim em dois pontos antípodas, não se verificando, portanto, o primeiro postulado de Euclides que implica **que dois pontos definem uma única reta**. Em 1871, o matemático alemão *Felix Klein* (1849-1925) resolveu esta questão propondo uma modificação da Geometria Esférica: a identificação de pontos antípodas, ou seja, um ponto é um par de pontos antípodas na esfera e uma reta é um círculo máximo com todos os pares de pontos antípodas identificados (ou um semi-círculo máximo com os seus extremos identificados). A esta nova geometria Klein chamou **Geometria Elíptica**.*(COXETER, 1998)

A descoberta das geometrias não Euclidianas teve consequências muito importantes, quer matemáticas quer filosóficas, principalmente no que diz respeito aos fundamentos da matemática. Surgiram, então, vários sistemas axiomáticos, sendo o mais famoso o de *David Hilbert* (1862-1943), *Fundamentos da Geometria*, cuja estrutura tem marcadamente a influência de Euclides. *Hilbert* denomina por Geometria Absoluta (tal como *János Bolyai*) ou Neutra a geometria que é comum às Geometrias Hiperbólica e Euclidiana. De fato, existem diferenças substanciais entre estas geometrias e a Elíptica. Por exemplo, em Geometria Neutra a existência de retas paralelas é um teorema, o que não é válido em Geometria Elíptica. (BLUMENTHAL, 1980)

O estudo das Geometrias não Euclidianas, principalmente a Geometria Esférica relacionada ao triângulo esférico, teve seu desenvolvimento ao longo dos séculos devido à sua grande aplicabilidade à Astronomia e à Navegação.

A Astronomia é uma ciência natural que estuda corpos celestes (como estrelas, planetas, cometas, nebulosas, aglomerados de estrelas, galáxias) e fenômenos que se originam fora da atmosfera da Terra (como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas). Ela está preocupada com a evolução, a física, a química, e o movimento de objetos celestes, bem como a formação e o desenvolvimento do universo.

A Astronomia nasceu e cresceu gradativamente para suprir necessidades sociais, econômicas, religiosas e também culturais. A Astronomia esférica, ou Astronomia de posição está relacionada, fundamentalmente, as direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância em relação ao observador. É conveniente expressar essas direções em termos das posições sobre a superfície de uma esfera (a esfera celeste). Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Assim, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações. As relações trigonométricas nos triângulos esféricos são fundamentais nos cálculos destas distâncias.

No presente trabalho usamos a navegação e uso de celulares, mostrando a importância da Geometria Esférica, da Trigonometria Esférica e a teoria de rotações em tecnologias envolvendo Sistema Global de Navegação por Satélites (GNSS) e o GEO-LOCAL.

Iniciamos com uma breve História da Trigonometria, apresentando algumas definições e resultados da Geometria Euclidiana plana. Apresentamos os conceitos de Geometria Esférica, como ângulo, circunferência máxima, fuso esférico e os principais elementos de uma superfície esférica, além de apresentarmos a definição de Triângulo Esférico, com suas relações.

Seguindo a linha metodológica de *Seymour Papert* (PAPERT, 2016), apresentamos uma sequência didática de um trabalho interdisciplinar envolvendo navegação terrestre e astronômica, objeto de nosso trabalho.

## HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

---

A Trigonometria surgiu e desenvolveu-se, ainda na Antiguidade, como ferramenta para auxiliar na Astronomia. O primeiro tratado de Trigonometria independente da Astronomia que se tem notícia foi o Tratado dos Quadriláteros, de *Nasīr al-Dīn al-Tūsī*, no século XIII. Na Europa, a Trigonometria foi tratada de modo independente da Astronomia no *De triangulis omnimodis libri quinque*, de *Regiomontanus*, obra escrita por volta de 1464 e publicada postumamente em 1533. (PEREIRA, 2010)

### 2.1 A TRIGONOMETRIA DAS CORDAS

As primeiras contribuições para a Trigonometria aconteceram com os Babilônios através de suas observações astronômicas e registros em suas inúmeras tábuas, como a tábua famosa chamada *Plimpton 322* cujo conteúdo refere-se aos valores da cossente de ângulos de  $31^\circ$  a  $45^\circ$ . O *Papiro de Rhind* ou *Papiro de Ahmes* ( $\sim 1650$  a.C.) demonstra que os Egípcios já conheciam instrumentos matemáticos para medir inclinação.



Figura 2: *Tábua Plimpton e Papiro de Rhind*

Fonte: <http://ms-matematica.blogspot.com/2015/01/plimpton-322.html> e <https://www.sitedecuriosidades.com/im/g/2F671.jpg>, respectivamente, acesso 19/06/2019

Os problemas 56 a 60 do *Papiro de Rhind* contém cálculos sobre a inclinação da Pirâmide relacionado ao *seqed*, que tem como uma das interpretações o cosseno do

ângulo formado pela margem lateral com a diagonal da base, e outra interpretação como a cotangente do ângulo.

A figura 3 a seguir mostra o problema 56 do Papiro de Rhind, que envolve conceitos trigonométricos.

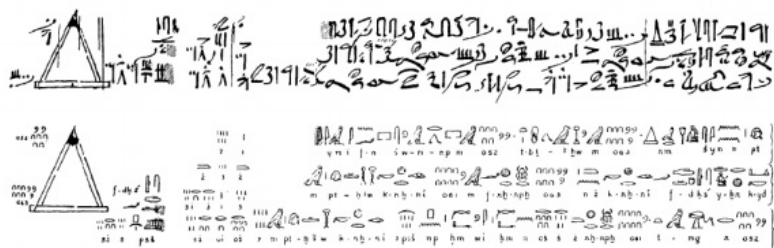


Figura 3: *Problema 56 do Papiro Rhind*  
Fonte: (MAOR, 1998)

Este problema, na escrita Hierática e Hieroglífica, segundo (MAOR, 1998), tem a tradução para o inglês:

*If a pyramid is 250 cubits high and the side of its base 360 cubits long, what is its seked? Ahmes's solution follows:*

*Take  $\frac{1}{2}$  of 360; it makes 180. Multiply 250 so as to get 180; it makes  $\frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{50}$  of a cubit. A cubit is 7 palms. Multiply 7 by  $\frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{50}$ . The seked is  $5 \frac{1}{25}$  palms.*

Na Grécia do século III a.C., a Trigonometria ganhou uma sistematização a partir da Geometria, segundo o modelo de raciocínio lógico dedutivo, com *Hiparco de Nicéia* (~ 190 a.C. - ~ 126 a.C) e *Claudius Ptolomeu* (~87 d.C. - ~150 d.C.) com sua *Trigonometria das Cordas*.

Em (PEREIRA; MOREY, 2016), o autor afirma que Hiparco teria escrito por volta de 150 a.C. uma obra em doze livros sobre cálculo do comprimento de cordas, na qual incluía a primeira tabela Trigonométrica baseada em uma função: a corda de um arco de círculo arbitrário. Também realizou cálculos da distância Terra - Lua a partir da contagem do tempo de um eclipse lunar, utilizando-se de tabelas trigonométricas de origens babilônicas. Infelizmente as obras de Hiparco não chegaram até nós.

A primeira tabela Trigonométrica que chegou até nós, o *Almagesto*, de Ptolomeu talvez tenha se baseado nas obras de Hiparco. Brummelen (BRUMMELEN, 2009) reconstituiu a tabela de cordas de Hiparco.

$\theta$	<b>Crd <math>\theta</math></b>
0	0
$7\ 1/2^\circ$	450
$15^\circ$	897
$22\ 1/2^\circ$	1341
$30^\circ$	1780
$37\ 1/2^\circ$	2210
...	...
$180^\circ$	6875

Fonte: *Brummellen*

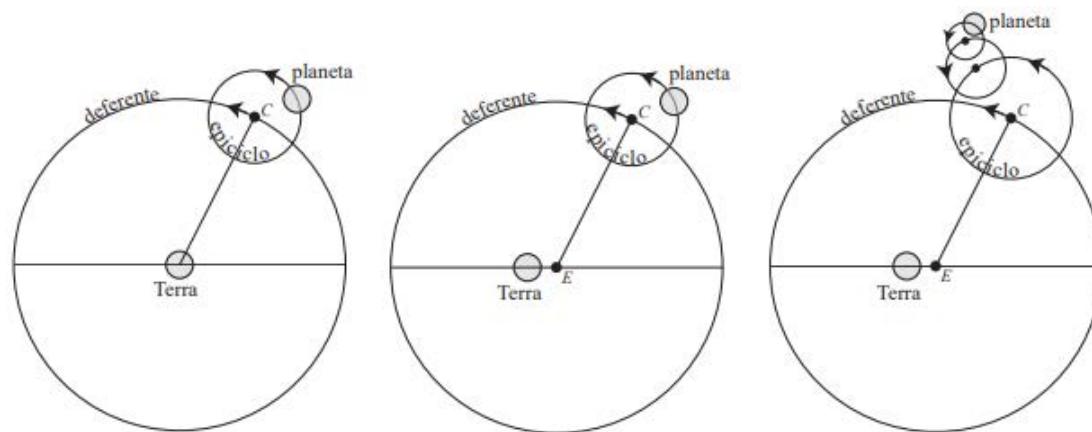
O *Almagesto*, escrito com o título de *Matematike Syntaxis*, foi traduzido do grego diversas vezes, primeiro para o siríaco e depois para o árabe. A tradução do árabe para o latim feita por Gerard de Cremona, em Toledo, no século XII, possibilitou a difusão na Europa.

Esta obra é uma exposição completa da Astronomia Matemática, de acordo com o entendimento grego do termo. Segundo Asger (AABOE, 1984), o

*Almagesto desempenhou o mesmo papel na Astronomia Matemática que os Elementos de Euclides e as Cônicas de Apolônio em seus respectivos assuntos. (...) Mas Ptolomeu, diferentemente de Euclides, reconheceu as realizações de seus antecessores generosa e precisamente, de maneira que nosso conhecimento da Astronomia préptolomaica é mais rico e mais firme do que o da matemática pré-euclidiana. Pela mesma razão podemos identificar bem as contribuições do próprio Ptolomeu.*

Numa coleção de treze livros, o *Almagesto* defendia a visão cosmológica de que a Terra ficava no centro do Universo e todos os outros astros giravam em torno dela. Dizia que a Lua e os planetas estariam em movimentos uniforme sobre círculos chamados *epiciclos*. O centro do epiciclo estaria se movendo uniformemente ao longo de outro círculo maior chamado *deferente*.

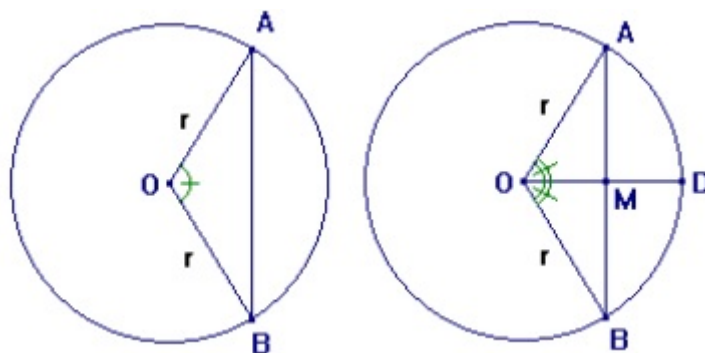
Dentre as tabelas trigonométricas da antiguidade, a mais famosa é a tabela das cordas de Ptolomeu, inserida no *Almagesto*, que foi construída pelo relacionamento do comprimento do arco de circunferência com a medida em graus do arco/ângulo central correspondente.

Figura 4: *Sistema de epiciclo de Ptolomeu*

Fonte: (NETO, 2019)

**Esquerda:** a Terra se encontra no centro do círculo (deferente) onde o epiciclo orbita. O planeta por sua vez gira em torno do ponto  $C$ , centro do epiciclo. **Meio:** Hiparco notou que, para levar em conta a velocidade variável no movimento anual do Sol, a Terra deveria ser deslocada do centro do deferente ( $E$ ), ou seja, existe uma excentricidade na posição da Terra. **Direita:** Ptolomeu introduziu epiciclos que giram em torno de epiciclos, para explicar precisamente todas as irregularidades das órbitas dos planetas.

Por meio de raciocínio geométrico estabelece a equivalência entre o conceito de comprimento de corda de um ângulo central, aqui chamado de **crd**, e o seno da metade deste mesmo ângulo.

Figura 5: *Equivalência de cordas e seno*

$$AO = OB = r = 60 \text{ partes}$$

$$AB \text{ é corda (crd } 2\alpha)$$

$$2\alpha = A\hat{O}B,$$

$$A\hat{O}M = B\hat{O}M = \alpha$$

$$OD \perp AB$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{2AM}{2OA} = \frac{\text{crd } 2\alpha}{120}$$

Como unidade de comprimento de corda, Ptolomeu usou o que ele chamou de parte, ou seja,  $\frac{1}{120}$  do comprimento do diâmetro da circunferência. A medida usada para o

arco foi o grau e para expressar as subdivisões dos comprimentos das cordas usou o sistema sexagesimal. Com esse recurso, ele calculou os valores das cordas para os ângulos centrais de  $0^\circ$  até  $180^\circ$ , em intervalos de  $\frac{1}{2}^\circ$ .

Identificou as cordas como lados de polígonos regulares inscritos na circunferência como  $\text{crd } 36^\circ$ , lado do decágono inscrito;  $\text{crd } 60^\circ$ , lado do hexágono inscrito;  $\text{crd } 72^\circ$ , o lado do pentágono inscrito;  $\text{crd } 120^\circ$ , lado do triângulo equilátero.

Ângulo	Corda
$36^\circ$	$37^p 04' 55''$
$60^\circ$	$60^p$
$72^\circ$	$70^p 32' 03''$
$90^\circ$	$84^p 51' 10''$
$108^\circ$	$97^p 04' 56''$
$120^\circ$	$103^p 55' 23''$
$144^\circ$	$114^p 07' 37''$
$180^\circ$	$120^p$

Figura 6: *Tábua com cordas de alguns ângulos*  
Fonte (PEREIRA, 2010)

Para os demais ângulos, Ptolomeu deduz, sempre geometricamente, e utiliza as fórmulas da corda da diferença de dois arcos, a corda do arco metade e a corda da soma de dois arcos.

O *Almagesto* de Ptolomeu com sua tabela de cordas serviu de base para estudos de Astronomia, na Europa, durante vários séculos, até a evolução dos conceitos trigonométricos dada pelos indianos com a introdução da semi-corda.

## 2.2 A TRIGONOMETRIA DAS SEMI-CORDAS

Os registros sobre Trigonometria na Índia são encontrados nos manuais de Astronomia, chamados Siddhāntas: Sūrya - Siddhānta ( $\sim 500$  d.C.), Pāca - Siddhāntikā ( $\sim 628$  d.C.) e Brāhmasphuta - Siddhānta ( $\sim 628$  d.C.).

A obra Sūrya - Siddhānta, de autor desconhecido, é um dos mais notáveis textos de Astronomia que sobreviveu aos nossos tempos. Constituído de regras em versos redigidos em sânscrito com poucas explicações e nenhuma prova (WIKIPEDIA).



No estudo das funções Trigonométricas, os indianos utilizavam a meia corda, que posteriormente seria o seno indiano. Segundo (MOREY, 2003),

[...] para os indianos as funções trigonométricas ainda eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos, como é o caso as funções trigonométricas modernas. Então quando dizemos seno indiano estamos nos referindo ao comprimento da meia-corda do ângulo central.

Na figura (7) encontramos segmentos referente ao seno indiano, ao cosseno indiano e ao seno reverso ( $1 - \cos \beta$ ). A partir da figura é possível estabelecer uma relação entre as funções trigonométricas modernas e as indianas.

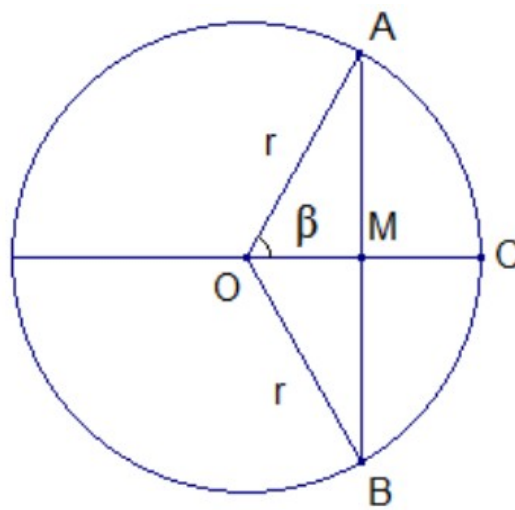


Figura 7: Seno indiano, Cosseno e Seno reverso

Seja  $M\hat{O}A = \beta$  e  $AO = BO = r$ , então:

$$AM = jya \beta = r \operatorname{sen} \beta = (\textit{seno indiano})$$

$$OM = kojya \beta = r \operatorname{cos} \beta = (\textit{cosseno indiano})$$

$$MC = OC - OM = ukamajya \beta = r - r \operatorname{cos} \beta = r (1 - \operatorname{cos} \beta) = \operatorname{vers} \beta$$

Varahamihira (505 - 587 d.C.) ao calcular  $jya \beta = r \operatorname{sen} \beta$  para  $\beta \leq 90^\circ$ , sugeriu o uso de equações:

$$jya 30^\circ = \frac{1}{2} r$$

$$jya 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{r}$$

$$jya 90^\circ = r$$

Varahamihira calculou valores de  $jya \beta$  ( $r \operatorname{sen} \beta$ ) para todos os múltiplos de  $3^\circ 45'$  até  $90^\circ$ .

Āryabhata escreveu um trabalho que é essencialmente uma sistematização dos resultados contidos no Siddhāntas, fornecendo outras medidas de raios, permitindo assim

que o seno fosse expresso em um tipo de medida circular, isto é, parte de uma circunferência. (MOREY, 2003)

### 2.3 A TRIGONOMETRIA DOS ÁRABES

Os árabes proporcionaram um grande avanço à Matemática e principalmente à Trigonometria, influenciando o seu desenvolvimento na Europa Medieval e Renascentista. Importantes foram os trabalhos em Trigonometria de *Abū'l-Wafā al Būzjānī* (940 – 998) e *Nasīr al-Dīn al-Tūsī* (1201 – 1274), no entanto, não conseguiram conquistar o reconhecimento por quase três séculos. (MOREY, 2003)

Os árabes contribuíram em três aspectos (MOREY, 2003):

- A introdução de seis funções trigonométricas básicas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
- A dedução da regra do seno e o estabelecimento de outras identidades.
- A construção de tábuas trigonométricas mais precisas com a ajuda de vários procedimentos de interpolação.

*Abū'l-Wafā al Būzjānī* desenvolveu também as relações para o seno da soma e da diferença de dois arcos desde que seja conhecido o seno de cada um deles:

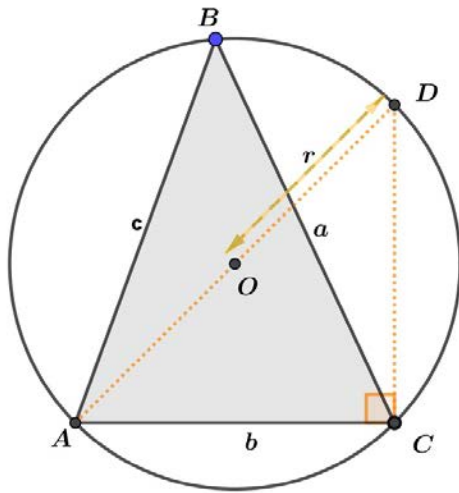
$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a \quad (1)$$

Desenvolveu estudo especial sobre a tangente, introduziu a secante e a cossecante pela primeira vez e tornou-se conhecedor das relações entre as seis linhas Trigonométricas.

O árabe *Nasīr al-Dīn al-Tūsī* ficou conhecido por importante trabalho, *O Tratado sobre Quadriláteros*, que foi a primeira obra que trata da Trigonometria independente da Astronomia. É possível que seus trabalhos tenham chegado a *Regiomontanus* na forma de tradução feita no século XII.

O *Tratado sobre Quadriláteros* contém as seis equações fundamentais para a solução de triângulos retângulos esféricos. Mostra também como resolver para outros triângulos, substituindo, se necessário, a consideração dos ângulos pelos lados e reciprocamente, por meio dos triângulos polares. (MOREY, 2003)

A lei do seno é atribuída a ele em sua versão moderna, ou seja, dado um triângulo plano qualquer ABC então  $\frac{b}{c} = \frac{r \text{ sen } B}{r \text{ sen } C}$  em que  $r$  mede 60 unidades.



Pelo teorema do ângulo inscrito, temos que  $\hat{B} = \hat{D}$ , pois determinam na circunferência uma mesma corda  $\overline{AC}$ .

Podemos relacionar  $\text{sen } \hat{D} = \frac{b}{2r}$ .

$$\Rightarrow b = 2r \text{sen } \hat{B}$$

Fazendo todo este mesmo processo para os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$ , temos as relações :

$$a = 2r \text{sen } \hat{A} \text{ e } c = 2r \text{sen } \hat{C}$$

$$\text{Assim, } \frac{b}{c} = \frac{r \text{sen } \hat{B}}{r \text{sen } \hat{C}}$$

Figura 8: Seno

## 2.4 A TRIGONOMETRIA EUROPEIA

A Matemática Europeia teve entre os séculos XII a XV como um período de assimilação da herança dos matemáticos da Grécia Antiga e do Oriente Hindo-arábico. Este período começou com as traduções para o latim, no século XII, de muitas obras clássicas, como as de *Euclides*, *Arquimedes*, *Al-Khwarizmi* e *Al-Sabi' Thabit ibn al-Harrani Qurra*.

Neste período aparecem as primeiras universidades. Salerno, na Itália, no séculos XI, Bolonha, na Itália, início do século XII, as universidades de Paris e Oxford, criadas no início do século XII, a de Cambridge, no decorrer do século XIV, as de Praga, Cracóvia, Viena e Heidelberg, no início do século XV, entre outras. O ensino nestas primeiras universidades se davam por meio do *Quadrivium*, composto de Aritmética, Geometria, Astronomia e Música, que eram ministradas por professores de Faculdade de Artes de acordo com as necessidades. Nenhuma universidade preparava professores especificamente de Matemática. Um dos primeiros a se especializar no ensino de disciplinas Matemáticas foi *Johann Gmunden*, mestre na Universidade de Viena. Neste período nasceu *Johann Müller Regiomontanus* que teve papel importante para a História da Matemática.

Ligado a Astronomia, *Regiomontanus* sistematizou e generalizou métodos de medição de grandezas geométricas por meio da Trigonometria Plana e Esférica, o aperfeiçoamento dos métodos e instrumentos de cálculo, a elaboração de tabelas matemáticas no sistema decimal, assim como a transformação da Álgebra retórica para a simbólica. Mas muitas de suas obras como *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (1533), *Tabulae directionum et projectionum* (1490), *Tabulae primi mobilis* (1468), estavam ligadas diretamente a Matemática e principalmente a Trigonometria.

Em seu *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* composto de 5 livros, ele sistematiza o conceito de Trigonometria Plana e Esférica, trazendo uma linguagem atual, acarretando seu uso por diversos astrônomos posteriores como *Nicolau Copérnico* (Polônia: 1473 – 1543), *Georg Joachim von Lauchen Réticos* (Áustria: 1514 – 1574) e *Pedro Nunes* (Portugal: 1502 – 1578). Conceitos de seno, lei dos senos, leis dos cossenos, entre outros são citados na obra *De Triangulis*, fazendo um tratamento de aplicação voltado para a Astronomia.(MOREY, 2003)

## TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

---

A Trigonometria Esférica é a parte da Geometria Esférica que estuda os polígonos que se formam sobre a superfície da esfera, em especial, os triângulos. A resolução de Triângulos Esféricos tem especial relevância em Astronomia Náutica e Navegação para determinar a posição de um navio no mar mediante a observação das estrelas, na determinação de coordenadas de referência de objetos/astros na Esfera Celeste.(COUTINHO, 2015)

### 3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 3.1.1 A Esfera

Sejam dados um ponto  $(a, b, c)$  do espaço em um sistema de coordenadas ortogonais  $OXYZ$  e um real positivo  $r$ . A esfera  $\Sigma$ , de **centro**  $(a, b, c)$  e **raio**  $r$ , denotada por  $\Sigma((a, b, c), r)$  é o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam um valor menor ou igual a  $r$  de  $(a, b, c)$ , ou seja, é o lugar geométrico de  $R^3$  definido por: (NETO, 2013)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 | (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^3\}$$

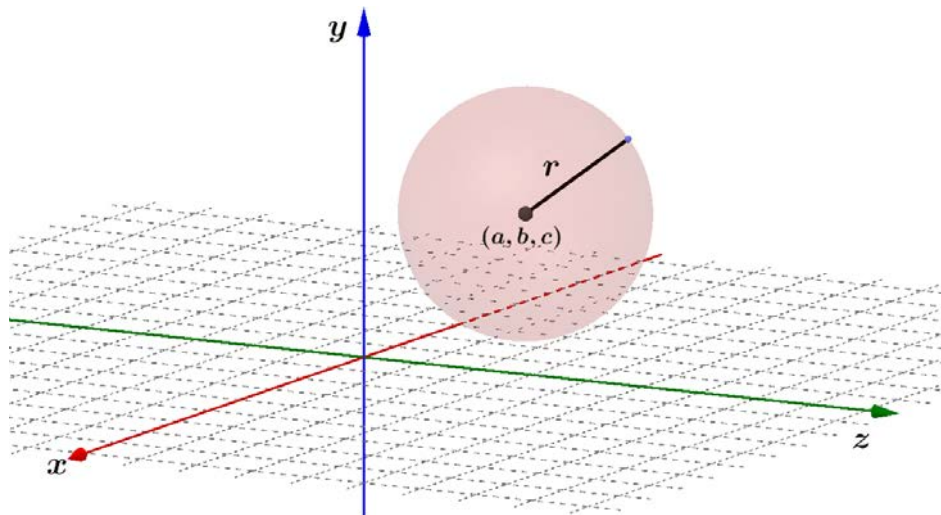


Figura 9: *Esfera*

## 3.1.2 Superfície da Esfera

É chamada de superfície de uma esfera centrada no ponto  $(a, b, c)$  e raio  $r$ , o lugar geométrico de  $R^3$  definido por:(NETO, 2013)

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 | (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^3\}$$

**Teorema 3.1.** *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a superfície esférica.*

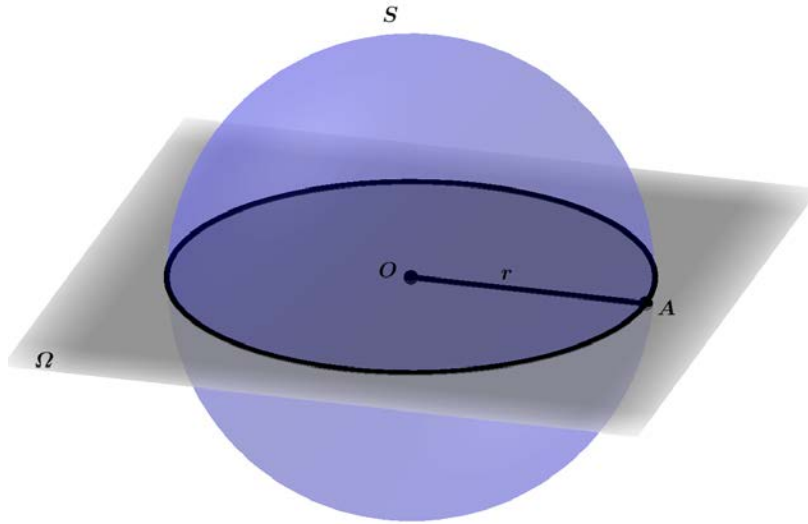


Figura 10: *Interseção da superfície esférica S com um plano  $\Omega$  passando pelo centro O*

*Demonstração.* Seja S a superfície esférica de centro O e raio r, e seja  $\Omega$  o plano que passa por O.  $A' \in S \cap \Omega$ , segue que  $A' \in S$  e  $A' \in \Omega$ , como  $A' \in S$ , então  $d(A', O) = r$ , logo  $A' \in \{A \in \Omega | d(A, O) = r\}$ . E como  $A'$  é um ponto genérico de  $S \cap \Omega$ , segue que

$$S \cap \Omega \subset \{A \in \Omega | d(A, O) = r\}. \quad (2)$$

$\Leftarrow$  Dado  $A' \in \{A \in \Omega | d(A, O) = r\}$ , temos  $d(A, O) = r$ . Logo, além de  $A'$  pertencer a  $\Omega$ , temos que  $A'$  pertence a S, portanto  $A' \in S \cap \Omega$ . E como  $A'$  é um ponto genérico de  $\{A \in \Omega | d(A, O) = r\}$ , segue que

$$\{A \in \Omega | d(A, O) = r\} \subset S \cap \Omega. \quad (3)$$

Das igualdades (2) e (3) segue que:

$$S \cap \Omega = \{A \in \Omega | d(A, O) = r\} \quad (4)$$

Observe que o segundo membro de (4) é a definição, segundo (NETO, 2013), de uma circunferência de centro O e raio r. O que conclui a demonstração.  $\square$

3.1.3 O *Círculo Máximo*

A interseção de um plano com uma esfera forma um círculo. Temos duas situações: se este plano contiver o centro da esfera, tem-se o **círculo máximo**; e se o plano que “corta” a esfera não contém o centro da esfera, tem-se o **círculo menor**.(ABREU; OTTONI, 2015)

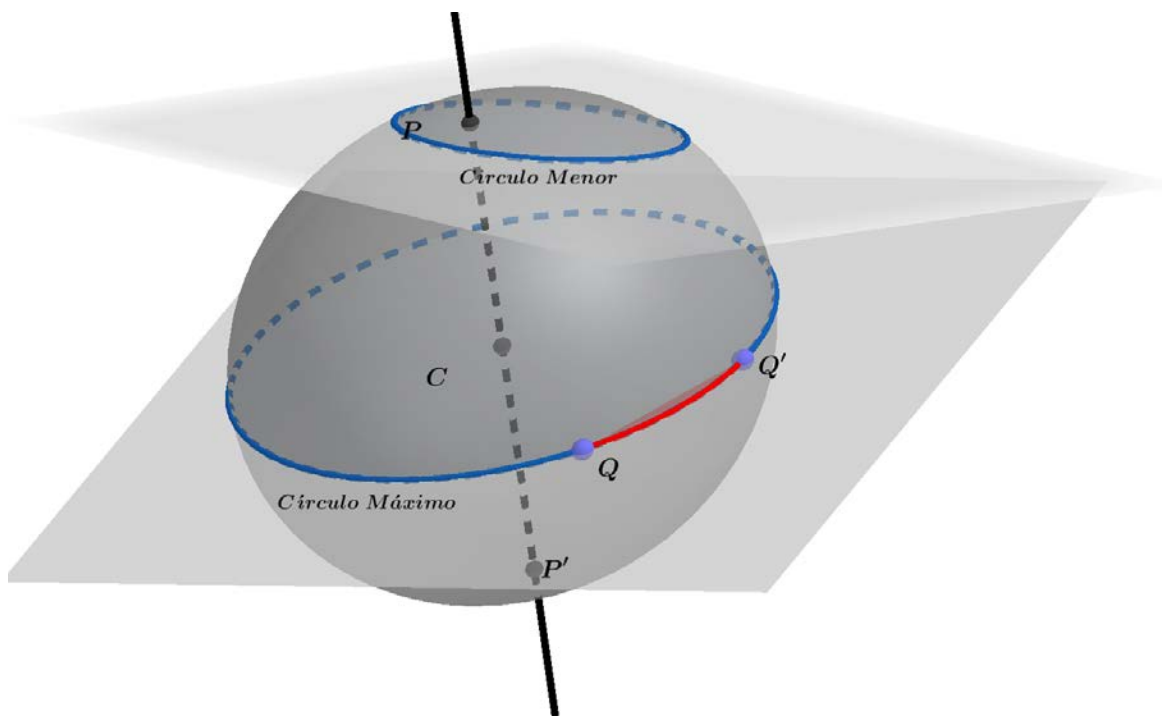


Figura 11: *Círculo Máximo e Círculo Menor*

Uma linha perpendicular ao plano e passando pelo centro da esfera intercepta a esfera nos polos  $P$  e  $P'$ . Existe exatamente um grande círculo passando por dois pontos dados  $Q$  e  $Q'$  (a menos que os pontos sejam antipodais <sup>1</sup>, caso em que todos os círculos que passam por ambos são grandes círculos). O arco  $QQ'$  deste grande círculo é o caminho mais curto na superfície da esfera entre esses pontos.

3.1.4 *Propriedades Elementares*

- 4 pontos do espaço Euclidiano  $R^3$  definem uma esfera e somente uma.

<sup>1</sup>Dados um ponto  $P$  na superfície esférica, seu antípoda  $P'$  é o único ponto da superfície esférica tal que o segmento de reta  $PP'$  contém o centro  $O$  desta superfície.

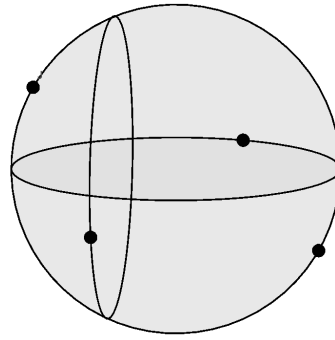


Figura 12: *Esfera por 4 pontos*

- Por um ponto P da superfície de uma esfera passam infinitos círculos máximos. Por dois pontos P e Q da superfície de uma esfera passa um círculo máximo e somente um.

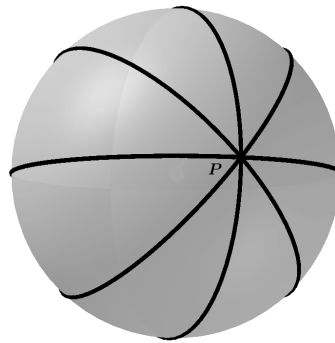


Figura 13: *Círculos Máximos em um ponto*

- Se o comprimento do arco de A a B for  $a$  e o raio da esfera for  $r$ , o ângulo no círculo máximo será  $\alpha = \frac{a}{r}$  ( $\alpha$  em radianos).

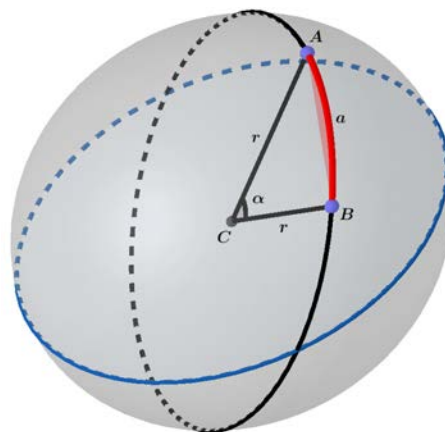


Figura 14: *Ângulo de círculo máximo*



## 3.1.5 Elementos Notáveis de uma Superfície Esférica

- (i) **Eixo:** É qualquer reta que contém o centro  $O$ .
- (ii) **Polos:** São os pontos de interseção do eixo com a superfície esférica.
- (iii) **Meridiano:** É uma semicircunferência cujo plano contém o eixo com a superfície esférica.
- (iv) **Equador:** É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.
- (v) **Paralelo:** É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é paralela ao equador.

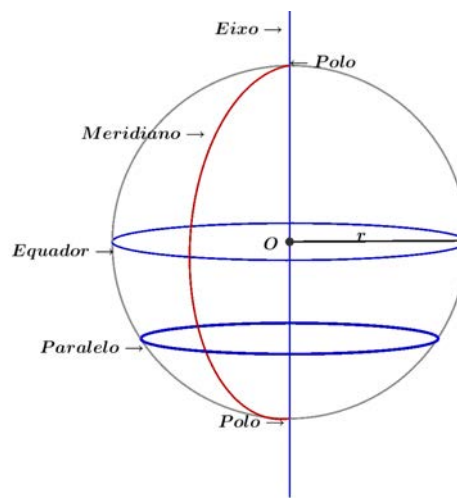


Figura 15: Elementos Notáveis

## 3.1.6 Circunferências Máximas

**Definição 3.2.** *Circunferência Máxima* são as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica e que, portanto, têm os mesmo raio da superfície esférica. Na Geometria Esférica essas circunferências ocupam o lugar das retas na geometria euclidiana e a superfície esférica ocupa o lugar do plano. Podemos verificar o comportamento das circunferências máximas em relação ao Primeiro Postulado de Euclides, ao Postulado das Paralelas e ao Postulado 5, que tratam das retas. (ABREU; OTTONI, 2015)

**Teorema 3.3.** *Por dois pontos distintos de uma superfície esférica  $S$  de centro  $O$  e raio  $r$ , sempre passa uma circunferência máxima.*

*Demonstração.* Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , sobre uma superfície esférica  $S$ , temos duas, e apenas duas possibilidades,  $A$  e  $B$  são antípodas um do outro ou  $A$  e  $B$

não são antípodas.

Caso 1: Supondo que  $A$  e  $B$  sejam antípodas um do outro.

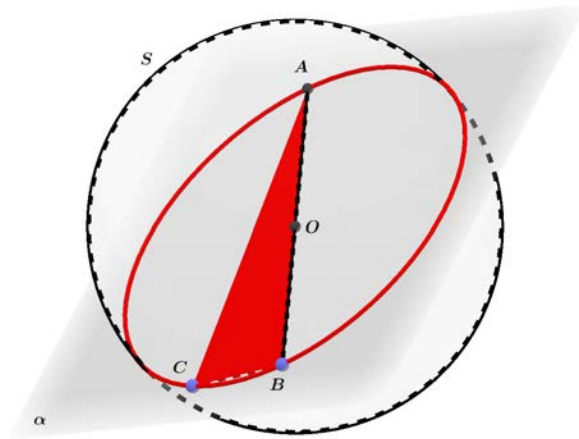


Figura 16: *Circunferência passando por  $A$  e  $B$  antípodas*

Nesse caso, o segmento  $AB$  é um diâmetro e contém o centro  $O$  da superfície esférica. Tomando-se os pontos  $A$ ,  $B$  e um ponto  $C$  sobre  $S$ , distinto de  $A$  e  $B$ , obtemos um plano  $\alpha$  que os contém. Portanto,  $\alpha$  contém o segmento  $AB$  e, conseqüentemente o centro  $O$  de  $S$ , já que  $AB$  é o diâmetro de  $S$ . Pelo teorema 3.1, temos que  $\alpha$  intersecta a superfície esférica formando uma circunferência máxima que contém  $A$  e  $B$ . Assim, se  $A$  e  $B$  são antípodas, existe uma circunferência máxima que passa por esses dois pontos.

Caso 2: Supondo que  $A$  e  $B$  não sejam antípodas um do outro.

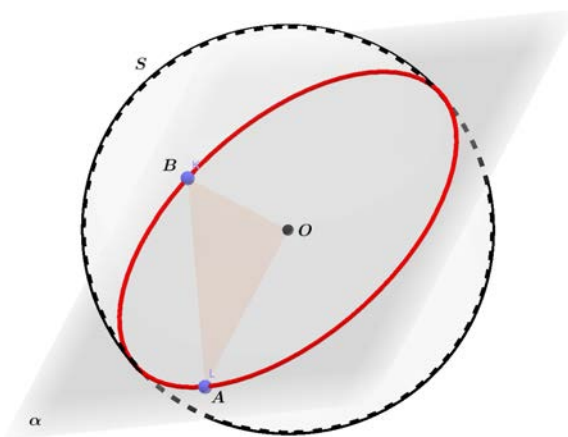


Figura 17: *Circunferência sobre dois pontos quaisquer*

Da Geometria Euclidiana temos que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$ , que é o centro de  $S$ , determinam um único plano  $\alpha$  que os contém. Como  $\alpha$  contém o centro  $O$  da superfície esférica, segue do teorema 3.1, que existe uma circunferência máxima passando por  $A$  e  $B$ .  $\square$

**Definição 3.4.** (*Hemisfério*) Uma circunferência máxima divide a superfície esférica  $S$  em duas regiões chamadas hemisférios, que são as chamadas superfícies semiesféricas.

**Proposição 3.5.** Dada uma circunferência máxima  $C$  e um ponto  $P$  na superfície esférica fora dela, toda circunferência máxima que passa por  $P$  intersecta  $C$ .

*Demonstração.* Seja  $C$  uma circunferência máxima sobre  $S$ . Pela definição 3.4, temos que  $C$  divide  $S$  em dois hemisférios  $H$  e  $H'$ .

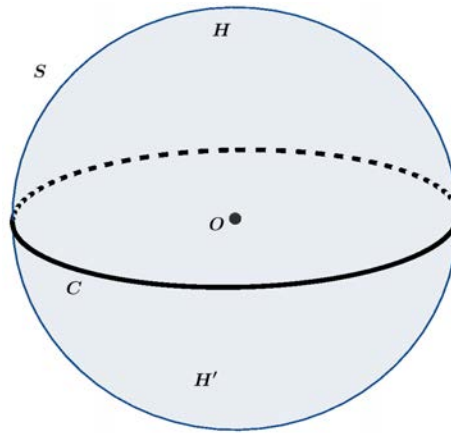


Figura 18: Circunferência  $C$  dividindo  $S$  em dois hemisférios

Tomando sobre  $H$  um ponto arbitrário  $P$ , temos que seu antípoda  $P'$  encontra-se em  $H'$ , pois a corda que os une passa necessariamente pelo centro  $O$  de  $S$ .

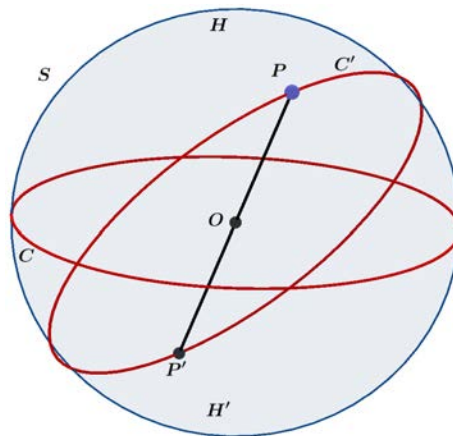


Figura 19: Interseção de duas circunferências máximas

Seja  $C'$  uma circunferência máxima qualquer que passa por  $P$ . Como são antípodas,  $P$  e  $P'$  são diametralmente opostos, portanto  $C'$  contém  $P$  e  $P'$ . Como  $P$  e  $P'$  estão situados em hemisférios diferentes, divididos por  $C$ , temos que  $C'$  intersecta  $C$ .  $\square$

**Proposição 3.6.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos antípodas um do outro sobre uma superfície esférica  $S$  de centro  $O$ . Existem infinitas circunferências máximas em  $S$  passando por  $A$  e  $B$ .

*Demonstração.* Pelo teorema 3.3 existe uma circunferência máxima  $C_1$  que contém os pontos antípodas  $A$  e  $B$ .

Pela proposição 3.5,  $C_1$  intersecta o equador. Seja  $P_1$  um ponto de interseção de  $C_1$  com o equador, então  $P_1$ ,  $A$  e  $B$  determinam um plano  $\pi_1$ .

Tomemos agora um ponto  $P_2$  pertencente ao equador, onde  $P_2 \neq P_1$ . Então  $P_2$ ,  $A$  e  $B$  determinam um plano  $\pi_2 \neq \pi_1$ . Como  $O \in \pi_2$  então  $C_2 \cap S$  é uma circunferência máxima.

Como o equador é uma circunferência, possui infinitos pontos, e podemos continuar com o mesmo raciocínio, obtendo infinitos planos.  $\square$

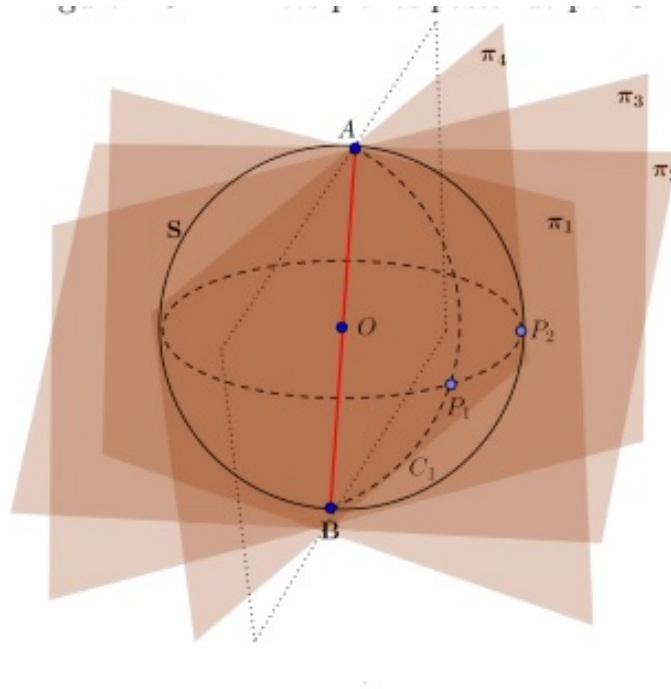


Figura 20: Infinitos planos passando por  $O$

**Observação 3.7.** Um importante fato da geometria esférica pode ser observada pela proposição 3.5. Sendo as circunferências máximas modelos para as retas e a superfície esférica um modelo para o plano, essa proposição garante a não validade do Postulado das Paralelas na geometria esférica, caracterizando-a como uma geometria não euclidiana, pois, dado um ponto  $P$  arbitrário sobre  $S$ , não pertencente a uma circunferência máxima  $C$  dada, qualquer circunferência máxima (reta)  $C'$  que passa por  $P$ , intersecta  $C$ . De maneira que, não existem retas paralelas na geometria esférica.

**Observação 3.8.** Com a proposição 3.6 verificamos a não validade do primeiro Postulado de Euclides na geometria esférica, pois por dois pontos de  $S$  podem passar infinitas “retas”, bastando para isso que os mesmos sejam antípodas um do outro. O único caso que coincide com o primeiro postulado de Euclides acontece quando dois pontos não

forem antípodas um do outro, dado que a circunferência máxima que passa por esses dois pontos é única, pois esses dois pontos mais o centro da esfera é único.

### 3.1.7 Elementos de uma Superfície Esférica

**Definição 3.9.** *Calota esférica é cada parte em que uma superfície esférica fica dividida quando é intersectada por um plano.*

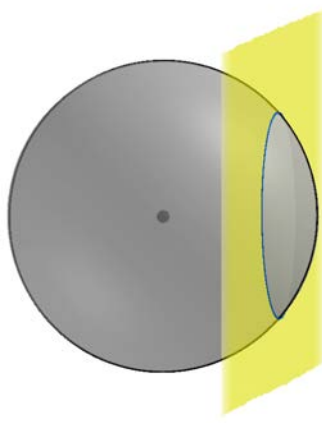


Figura 21: Calota Esférica

**Definição 3.10.** *Zona Esférica é a parte da superfície esférica delimitada por dois planos distintos paralelos não tangentes à superfície esférica, mas que a intersectam.*

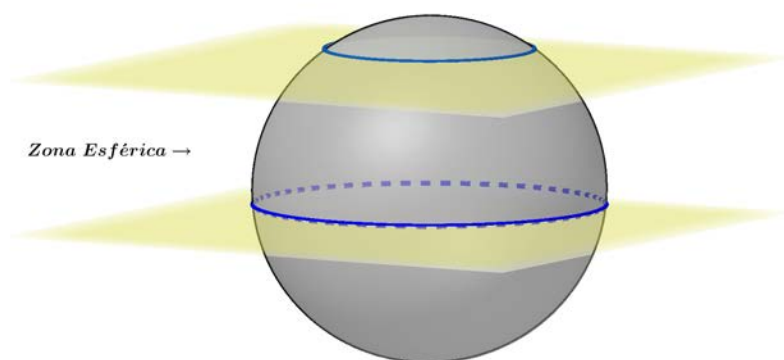


Figura 22: Zona Esférica

**Definição 3.11.** *Ângulo Esférico é o ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas ou o ângulo diédrico entre os planos que cruzam a esfera ao longo das retas*

tangentes dos dois lados reunidos em um vértice. Sua medida é a mesma do ângulo formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.

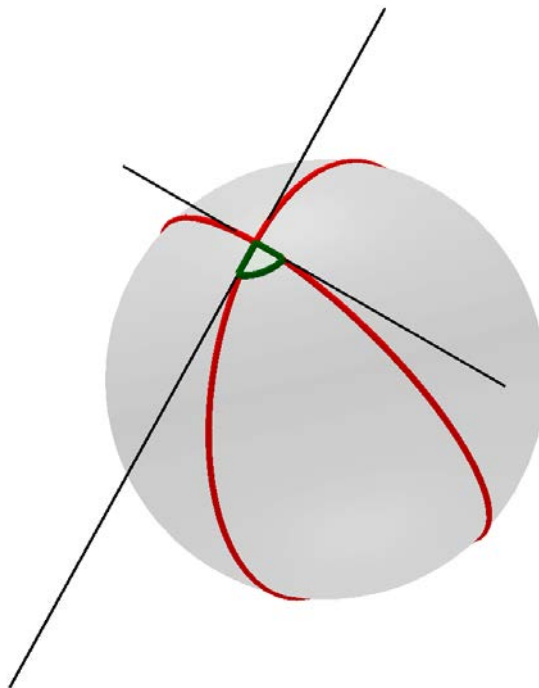


Figura 23: Ângulos Esféricos

**Definição 3.12.** *Geodésica é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos, ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.*

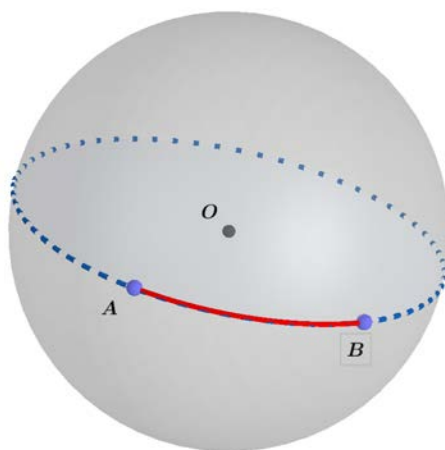
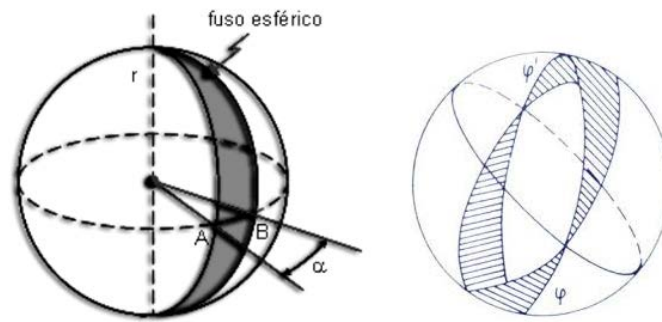


Figura 24: Geodésica

**Definição 3.13.** *Fuso Esférico, também conhecido como biângulo esférico, é a região compreendida entre dois meridianos (figura 25, à esquerda). Duas circunferências máximas determinam um fuso completo ou duplo (figura 25 à direita).*

Figura 25: *Fuso Esférico*

### 3.2 DISTÂNCIAS NUMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A forma como medimos a distância entre dois pontos pode variar, conforme a superfície em que nos encontramos. A distância  $d(A, B)$  entre dois pontos  $A$  e  $B$  é o menor dos comprimentos das trajetórias, que é o percurso realizado por um determinado corpo no espaço, com base em um sistema de coordenadas predefinido, ligando  $A$  e  $B$ . No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta  $\overline{AB}$  e seu comprimento  $AB$  é a distância entre  $A$  e  $B$ . Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta uma vez que ela é curvada em todas as direções.

Quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica  $S$  são as circunferências máximas, é de se entender que a distância em  $S$  entre dois pontos  $A$  e  $B$  seja o comprimento do arco menor  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ .

### 3.3 TRIÂNGULO ESFÉRICO

Um triângulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , é a curva contida na superfície esférica delimitado por três círculos máximos ou geodésicas que são cortados em  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

O triângulo esférico  $ABC$  tem os arcos  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  como seus lados. Se o raio da esfera for  $r$ , o comprimento do arco  $AB$  é, conforme (KARTTUNEN et al., 2016).

$$|AB| = r.c, [c] = \text{rad},$$

onde  $c$  é o ângulo subtendido pelo arco  $AB$  medido a partir do centro. Este ângulo é chamado de *ângulo central* do lado  $AB$ .

Como os comprimentos dos lados e dos ângulos centrais correspondem uns aos outros de uma forma única, utilizam-se os ângulos centrais em vez dos lados em suas relações. Desta forma, o raio da esfera não entra nas equações de trigonometria esférica.

Denotamos os ângulos de um triângulo esférico por letras maiúsculas ( $A, B, C$ ) e os lados opostos, ou, mais corretamente, os ângulos centrais correspondentes, por letras minúsculas ( $a, b, c$ ).

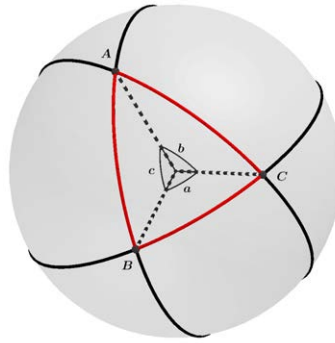


Figura 26: *Triângulo Esférico*

**Teorema 3.14** (Teorema de Girard). *Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico  $ABC$ , então  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$ , em que  $S$  é a área do triângulo esférico e  $R$  é o raio da superfície esférica.*

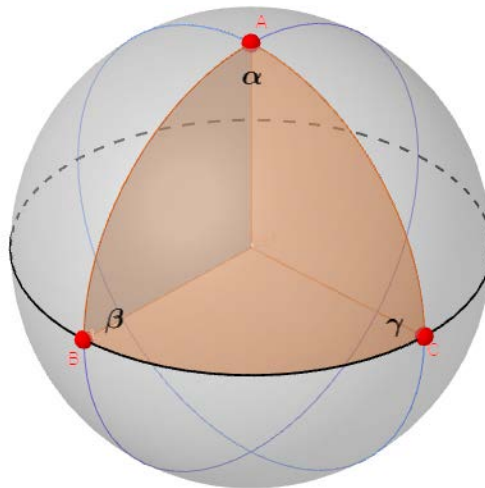


Figura 27: *Área do triângulo esférico  $ABC$*

*Demonstração.* Ao prolongarmos os lados do triângulo esférico, construiremos três fusos esféricos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. As áreas de cada um dos fusos é  $4\alpha.R^2$ ,  $4\beta.R^2$  e  $4\gamma.R^2$ , conforme corolário (A.38). A área de um triângulo esférico  $ABC$  é igual a área do triângulo esférico  $A'B'C'$  formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico  $ABC$ , pois estes triângulos esféricos são congruentes pelo caso *LLL*. Ao somarmos as áreas teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes a área do triângulo esférico  $ABC$ , pois contamos duas vezes a mais a área do triângulo esférico  $ABC$  e duas vezes a mais a área do triângulo esférico  $A'B'C'$ . Então:

$$4\alpha.R^2 + 4\beta.R^2 + 4\gamma.R^2 = 4\pi.R^2 + 4S$$



$$4.R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4.R^2.\left(\pi + \frac{S}{R^2}\right)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$$

□

Este teorema, demonstrado em 1629 pelo francês Albert Girard (1595 - 1632), permite encontrar a área de um triângulo esférico, dados seus ângulos internos e o raio da superfície esférica que o contém.

**Corolário 3.15.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que  $\pi$ .*

*Demonstração.* Sendo  $S$  a área de um triângulo esférico, temos que  $S > 0$ . Deste fato e do teorema 3.14, concluímos que :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

□

**Corolário 3.16.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é menor que  $3\pi$ .*

*Demonstração.* Como todo ângulo do triângulo esférico é menor que  $\pi$ , então:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \pi + \pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\pi$$

□

Pela demonstração dos corolários (3.15)e (3.16), podemos observar que a soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que  $\pi$  e menor que  $3\pi$ . Este valor não é constante, como na geometria plana. O excesso a  $\pi$  é diretamente proporcional à área do triângulo.

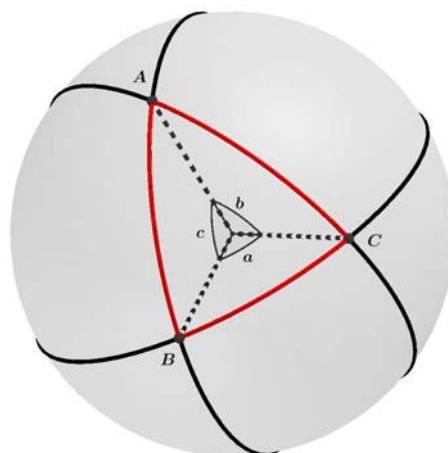
$$S = [\pi(\alpha + \beta + \gamma)].R^2$$

em que  $S$  é a área do triângulo esférico e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos esféricos desse triângulo.

Figura 28: *Albert Girard*

## 3.4 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Triângulo Esférico é a porção de uma esfera, limitada por três arcos de círculos máximos, que se intersectam dois a dois. Os lados do Triângulo Esférico são os três arcos de círculos máximos. Os ângulos do Triângulo Esférico são os ângulos esféricos formados nos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , do Triângulo. Os Triângulos Esféricos possuem 6(seis)elementos, a saber, três ângulos internos ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ) e três lados ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Já verificamos suas características e propriedades. Interessamos agora resolver um Triângulo Esférico, o que significa determinar três de seus elementos, sendo conhecidos os outros três. Na figura a seguir tem-se o Triângulo Esférico  $ABC$ .

Figura 29: *Lados Esféricos*

Na figura (29) é formado um ângulo triedro no centro  $O$  de uma esfera. O ângulo esférico de vértice  $A$  tem por lados os arcos  $AC$  (lado  $b$ ) e  $AB$  (lado  $c$ ) e assim sucessivamente para os vértices  $B$  e  $C$ .

O lado  $a$  é medido angularmente pelo ângulo entre as arestas  $AB$  e  $OC$ , o lado  $b$ , pelo ângulo entre as arestas  $OA$  e  $OC$  e; o lado  $c$ , pelo ângulo entre as arestas  $OA$  e  $OB$ . Os ângulos  $a$ ,  $b$  e  $c$  são ângulos de face do triedro.

O conjunto de Equações Fundamentais para a resolução de um Triângulo Esférico é o que se denomina **Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica**.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proposta pelo MEC, ainda em fase de implementação, apresenta a inserção dos vetores na Matemática do Ensino Médio.

*Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas, aplicando-o em situações da Física. Estabelecer relações entre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e vetores no contexto do plano cartesiano, incluindo o uso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2016, p. 576)*

Dessa forma, apresentamos a dedução das equações da *Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica* via **Geometria Analítica** (ROCHA, 2017), conforme apêndice sobre **Vetores no Plano** (A.1) e **Vetores no Espaço**(A.2), em especial a **Identidade de Lagrange**(A.2.4).

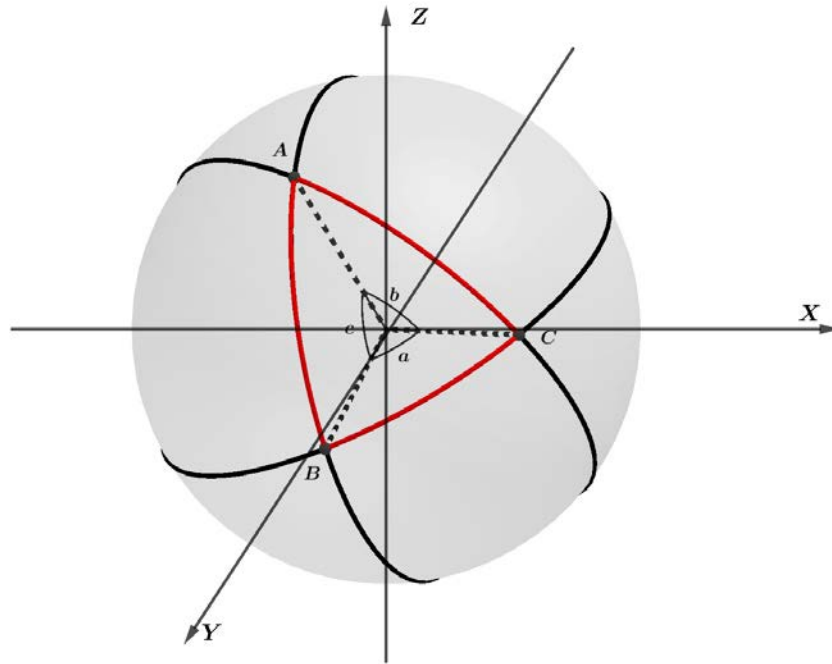
**Teorema 3.17. (Lei dos Cossenos Esféricos)** *Seja um triângulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com ângulos internos medindo  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  e cujos lados opostos medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, como na Figura (29). Então, são verdadeiras:*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

*Demonstração.* Consideremos o Triângulo Esférico  $ABC$  da figura (30). Os planos seccionadores da esfera geradores dos círculos máximos, cujos arcos são os lados do Triângulo Esférico, interceptam-s no centro da Esfera, determinando um triedro com vértice em  $O$ . As linhas  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$  são as arestas e a elas podemos tratar como vetores. Assim temos os vetores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ .

Figura 30: *Triângulo Esférico*

Consideremos o sistema cartesiano triortogonal arbitrário  $XYZ$ , conforme visto na figura (30), com origem no centro  $O$  da Esfera. Pode-se definir as coordenadas dos vetores como:  $\vec{OA} = [X_A \ Y_A \ Z_A]^t$ ,  $\vec{OB} = [X_B \ Y_B \ Z_B]^t$  e  $\vec{OC} = [X_C \ Y_C \ Z_C]^t$ . Os planos formados pelos vetores tomados dois a dois são as faces do triedro e os ângulos  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os ângulos de face do triedro. Os ângulos de face medem angularmente os lados do Triângulo Esférico. Assim, o lado  $a$  é medido pelo ângulo entre os vetores  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ ; o lado  $b$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$  e o lado  $c$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ . Os ângulos entre os vetores podem ser calculados pelo produto escalar entre os vetores. Assim, os lados podem ser calculados através do produto escalar entre os vetores, de acordo com:

$$\cos a = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\|} \quad (5)$$

$$\cos b = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\|} \quad (6)$$

$$\cos c = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \quad (7)$$

Aplicando o cálculo do produto escalar no numerador das equações (4), (5) e (6), temos:

$$\cos a = \frac{X_B X_C + Y_B Y_C + Z_B Z_C}{\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\|} \quad (8)$$

$$\cos b = \frac{X_A X_C + Y_A Y_C + Z_A Z_C}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\|} \quad (9)$$

$$\cos c = \frac{X_A X_B + Y_A Y_B + Z_A Z_B}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \quad (10)$$

Os ângulos esféricos são ângulos entre arcos de círculo máximo, medindo-se através do ângulo diedro entre os planos que contém cada um dos arcos de círculo máximo. Assim, o ângulo de vértice  $A$  é o ângulo entre o plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  e o plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ .

Na Geometria Analítica temos que o ângulo entre dois planos pode ser determinado pelo ângulo entre os vetores normais a cada um destes planos. O vetor normal ao plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  é calculado pelo produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  e o vetor normal ao plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$  é dado pelo produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OC}$ .

Deste modo, o ângulo entre os dois planos é calculado por:

$$\cos A = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \|\vec{OA} \times \vec{OC}\|} \quad (11)$$

Da mesma forma podemos determinar as equações para os ângulos  $B$  e  $C$ .

$$\cos B = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \|\vec{OB} \times \vec{OC}\|} \quad (12)$$

$$\cos C = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| \|\vec{OB} \times \vec{OC}\|} \quad (13)$$

A norma do vetor  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  é dada por:

$$\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \operatorname{sen} c \quad (14)$$

A norma do vetor  $\vec{OA} \times \vec{OC}$  é dada por:

$$\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \operatorname{sen} b \quad (15)$$

Substituindo as equações (13) e (14) na equação (10), temos:

$$\cos A = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \quad (16)$$

Para o cálculo do produto escalar  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})$  procedemos com o uso de uma propriedade de produto misto de vetores.

Utilizando o teorema (A.34) para o produto escalar  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})$  da equação (16) teremos:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \\ &= \frac{(\vec{OA} \cdot \vec{OA})(\vec{OB} \cdot \vec{OC}) - (\vec{OB} \cdot \vec{OA})(\vec{OA} \cdot \vec{OC})}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\cos A = \frac{\|\vec{OA}\|^2 \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos a - \|\vec{OB}\| \cdot \|\vec{OA}\| \cdot \cos c \cdot \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos b}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \quad (18)$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cdot \cos b}{\sin c \cdot \sin b} \quad (19)$$

Rearranjando a equação (19), tem-se:

$$\cos a = \cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos A \quad (20)$$

Duas outras equações podem ser deduzidas seguindo-se os mesmos passos utilizados na dedução da equação (20). Desta forma teremos:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \quad (21)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \quad (22)$$

As equações (20), (21) e (22) formam as **Leis dos Cossenos nos Triângulos Esféricos** (BOCZKO, 1998).  $\square$

A partir das leis dos cossenos para triângulos esféricos, obtém-se o equivalente esférico para a lei dos senos, resultado conhecido da geometria euclidiana.

**Teorema 3.18.** *Em qualquer Triângulo Esférico  $ABC$ , de lados  $a, b$  e  $c$ , a razão entre os senos de qualquer um de seus lados e o seno do seu ângulo oposto tem o mesmo valor numérico.*

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

*Demonstração.* O resultado é consequência da Lei dos Cossenos nos Triângulos Esféricos. Da equação (19), temos que:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cdot \cos b}{\text{sen } c \cdot \text{sen } b}$$

$$\text{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\text{sen}^2 A = 1 - \left( \frac{\cos a - \cos c \cdot \cos b}{\text{sen } c \cdot \text{sen } b} \right)^2$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b - (\cos a - \cos c \cdot \cos b)^2}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{(1 - \cos^2 c) \cdot (1 - \cos^2 b) - (\cos a - \cos c \cdot \cos b)^2}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 c \cdot \cos^2 b}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b}$$

$$\text{sen } A = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 c \cdot \cos^2 b}}{\text{sen } c \cdot \text{sen } b}$$

O radical a direita deve ser tomado com sinal positivo já que  $\text{sen } b, \text{sen } c$  e  $\text{sen } A$  são todos positivos, pois pela definição de Triângulo Esférico  $0 < b, c, A < \pi$ . Assim:

$$\text{sen } A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 c \cdot \cos^2 b}}{\text{sen } c \cdot \text{sen } b} \quad (23)$$

E analogamente:

$$\text{sen } B = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 c \cdot \cos^2 b}}{\text{sen } a \cdot \text{sen } b} \quad (24)$$

$$\text{sen } C = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 c \cdot \cos^2 b}}{\text{sen } a \cdot \text{sen } b} \quad (25)$$

Dividindo  $\text{sen } A$  por  $\text{sen } B$ , conforme igualdades (23) e (24), obtemos:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } c}{\text{sen } b \cdot \text{sen } c}$$

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \quad (26)$$

Analogamente, fazendo  $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}$ , conforme equações (23) e (25), obtemos:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C} \quad (27)$$

E das equações (26) e (27), temos:

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C} \quad (28)$$

□

A equação (28) forma a ***Lei dos Senos nos Triângulos Esféricos***(BOCZKO, 1998).



## A ESFERA CELESTE

---

Desde os tempos pré-históricos, a curiosidade do homem tem despertado o interesse acerca do Universo. Desta forma, a Astronomia é considerada a mais antiga das Ciências. Os mais antigos registros astronômicos se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios, que datam de aproximadamente 3.000 a.C, estudaram os astros com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo, prever a melhor época para o plantio e a colheita, e também com objetivos relacionados à astrologia, como fazer previsões do futuro, pois acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e da vida.

A dedicação e a criatividade de muitos pensadores, que a partir de suas observações do céu, possibilitaram o desenvolvimento do conhecimento, gerando grandes mudanças no modo de pensar o mundo.

Mesmo a ideia de um Universo Geocêntrico permaneceu durante muito tempo, sendo, por volta de 1.500 da nossa era, substituída pela do Universo Heliocêntrico, o que possibilitou uma melhor compreensão do movimento dos astros no céu. Nos dias atuais, temos a consciência de que o Sol não é o centro do Universo e sim o centro do nosso Sistema Solar.

A Astronomia Esférica, ou Astronomia de Posição, estuda as direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância até nós. Essas direções são expressas em termos das posições sobre a superfície de uma esfera: **a Esfera Celeste**. Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações.

Os gregos, conhecedores das culturas antigas, deram um enorme avanço à Astronomia, pois acreditavam ser possível compreender e descrever matematicamente os fenômenos do mundo natural. Tem-se aí os primeiros conceitos de Esfera Celeste, uma esfera rotativa de material cristalino, incrustada de estrelas, já que todos os astros que contemplamos estão muito longe de nós, deixamos de ter a noção de profundidade e parece-nos que todos eles estão dispostos sobre uma esfera muito grande tendo a Terra no centro.

## 4.1 A ESFERA CELESTE

Ao contemplarmos o céu numa noite sem nuvens, temos a impressão de estarmos no interior de uma grande esfera, concêntrica com a Terra e raio indeterminado, em que os astros são pontos luminosos em sua superfície. Esta esfera é denominada **Esfera Celeste**.

O universo antigo estava confinado dentro de uma concha esférica finita. As estrelas fixas nessa concha e, portanto, todas equidistantes da Terra, que estava no centro do universo esférico. Esse modelo simples ainda é, em muitos aspectos, tão útil quanto na antiguidade: ajuda-nos a entender facilmente os movimentos diurnos e anuais das estrelas e, mais importante, a prever esses movimentos de maneira relativamente simples. Portanto, assumimos que todas as estrelas estão localizadas na superfície de uma esfera enorme e que estamos no centro. Como o raio dessa esfera celeste é praticamente infinito, podemos observar os efeitos na posição variável do observador, causada pela rotação e movimento orbital da Terra.

Como as distâncias das estrelas são ignoradas, precisamos apenas de duas coordenadas para especificar suas direções. Cada conjunto de coordenadas possui alguma referência fixa, passando pelo centro da esfera celestial e dividindo a esfera em dois hemisférios ao longo de um grande círculo. Uma das coordenadas indica a distância angular deste plano de referência. Há exatamente um grande círculo atravessando o objeto e cruzando este plano perpendicularmente; a segunda coordenada indica o ângulo entre esse ponto de interseção e alguma direção fixa.

## 4.1.1 Principais pontos e linhas da Esfera Celeste

Alguns planos e pontos na esfera celeste que são úteis e importantes na determinação de um astro/objeto no céu, já definidos desde a antiguidade, são:(BOCZKO, 1998)

**Definição 4.1.** *A **Esfera Celeste** é uma esfera ideal de raio arbitrário, com centro em um ponto qualquer do espaço, sobre uma superfície da qual estão projetadas as posições relativas dos astros.*

**Definição 4.2.** *Os principais pontos, círculos e planos da esfera celeste são:*

- **Eixo Celeste** ou **Eixo do Mundo**: *reta imaginária resultante do prolongamento do eixo terrestre, em torno do qual a esfera celeste executa movimento aparente de rotação.*
- **Polo Norte Celeste** e **Polo Sul Celeste**: *pontos imaginários diametralmente opostos, em que o eixo celeste intersecta a esfera celeste. São as projeções dos*

polos terrestres sobre a esfera celeste, já que o eixo celeste coincide com o eixo de rotação da Terra.

- **Equador Celeste:** círculo máximo resultante da interseção do plano do Equador com a esfera celeste.



Figura 31: A Esfera Celeste

Fonte: [https://sca.profnat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=1451](https://sca.profnat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1451)[acesso 02/01/2020]

- **Plano do Horizonte:** Plano tangente à Terra no lugar em que se encontra o observador. Sendo o raio da Terra desprezível em comparação com o raio da Esfera Celeste, considera-se que o Horizonte é um círculo máximo da Esfera Celeste, ou seja, passa pelo seu centro.
- **Paralelo Celeste:** qualquer círculo menor que resulta da interseção da esfera celeste com um plano paralelo ao plano do equador celeste.
- **Linha do Horizonte ou Horizonte Astronômico ou Horizonte Celeste:** círculo máximo resultante da interseção do plano do horizonte com a esfera celeste. A parte visível da esfera celeste é o hemisfério que está acima do plano do horizonte e o hemisfério invisível localiza-se abaixo do plano do horizonte.
- **Zênite e Nadir:** pontos, diametralmente opostos, da esfera celeste resultado da interseção da vertical do lugar com a esfera celeste. O zênite está situado no

hemisfério visível, enquanto o nadir corresponde ao ponto diametralmente oposto ao zênite.

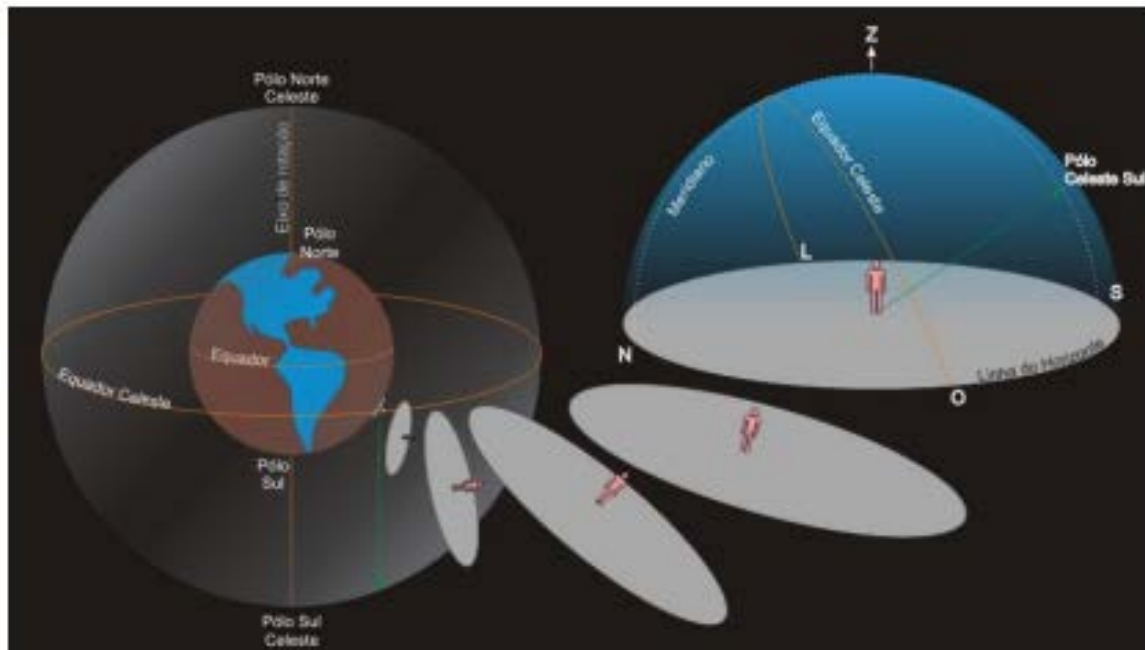


Figura 32: Um observador em um lugar qualquer da Terra

Nesta figura, em um local do hemisfério sul, um observador enxerga apenas a metade da esfera celeste, pois a outra metade fica abaixo de seu horizonte (a elipse cinza claro). A direção do polo celeste elevado (linha verde) faz um ângulo com a direção do zênite que depende do latitude do lugar onde se encontra o observador. Fonte:

<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula2.pdf>

- **Círculo de Altura:** qualquer círculo menor resultado da interseção de um plano paralelo ao plano do horizonte com a esfera celeste. Também denominado **paralelo de altura**.
- **Círculo Vertical:** qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém o zênite e o nadir.
- **Ponto Cardeal Norte:** ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo polo norte celeste intersecta a linha do horizonte.
- **Ponto Cardeal Sul:** ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo polo sul celeste intersecta a linha do horizonte.
- **Linha Norte-Sul:** reta no plano do horizonte que passa pelos pontos geográficos norte e sul.
- **Linha Leste-Oeste:** reta perpendicular à linha norte-sul, sobre o plano do horizonte.

- **Círculo Horário** ou **Meridiano Celeste**: qualquer semicírculo da esfera celeste que contém os dois polos celestes. O círculo horário que contém o zênite chama-se **meridiano local**.
- **Plano Meridiano**: plano que contém o meridiano local e intersecta o plano do horizonte sobre a linha norte sul.

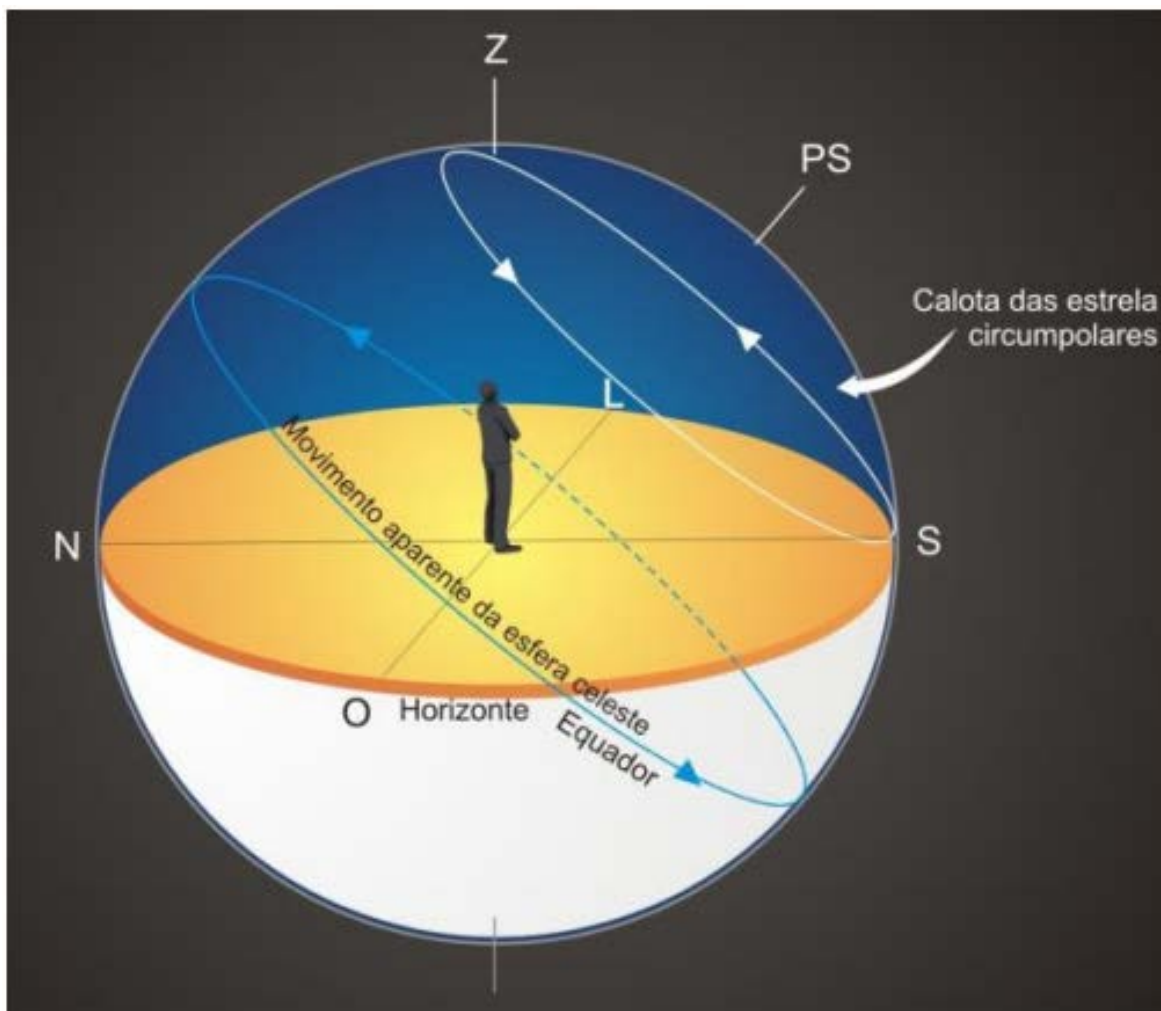


Figura 33: *Esfera Celeste visível no Hemisfério Sul*

Esfera celeste visível para uma certo lugar do hemisfério sul. A calota das estrelas circumpolares compreende a região da esfera celeste entre o polo celeste visível (o polo sul celeste, no hemisfério sul) e o paralelo que, em seu ponto mais baixo, tangencia o horizonte. Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula2.pdf>

## 4.2 A TERRA

Uma posição na Terra é geralmente dada por duas coordenadas esféricas (embora em alguns cálculos as coordenadas retangulares ou outras possam ser mais convenientes). Se necessário, também uma terceira coordenada, por exemplo, a distância do centro, pode ser usada.

O plano de referência é o plano equatorial, perpendicular ao eixo de rotação e que cruza a superfície da Terra ao longo do equador. Pequenos círculos paralelos ao equador são chamados paralelos de latitude. Os semicírculos de pólo a pólo são meridianos. A longitude geográfica é o ângulo entre o meridiano e o meridiano zero que passa pelo Observatório de Greenwich. Usaremos valores positivos para longitudes a leste de Greenwich e valores negativos a oeste de Greenwich. A convenção de sinais, no entanto, varia e as longitudes negativas não são usadas nos mapas; portanto, é melhor dizer explicitamente se o a longitude é leste ou oeste de Greenwich.

Supõe-se que a latitude signifique a latitude geográfica, que é o ângulo entre a linha de prumo e o plano equatorial. A latitude é positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul. A latitude geográfica pode ser determinada por observações astronômicas: a altitude do polo celeste medida a partir da latitude horizontal da latitude geográfica (o polo celeste é a interseção do eixo de rotação da Terra e a esfera celestial infinitamente distante).

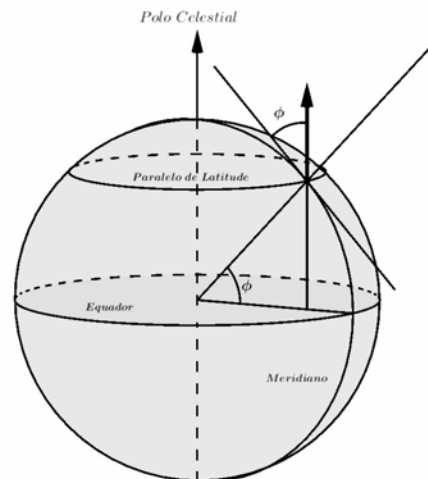


Figura 34: *A latitude*

A latitude  $\phi$  é obtida medindo a altitude do polo celeste. O polo celeste pode ser imaginado como um ponto a uma distância infinita na direção do eixo de rotação da Terra

A Terra está em rotação e ela é ligeiramente achatada. A forma exata é mais complicada, mas a forma mais adequada para ela pode ser aproximada por um esferóide

oblato, cujo eixo menor coincide com o eixo de rotação. Em 1979, a União Internacional de Geodésia e Geofísica (IUGG) adotou o Sistema de Referência Geodésico 1980 (GRS-80), que é usado quando são definidos os quadros de referência global fixados à Terra. A referência do GRS-80 identifica as seguintes dimensões:

Raio equatorial	$a = 6.378.137m$
Raio polar	$b = 6.356.752m$
Achatamento	$f = a - b/a = 1/298,252840776$
Fonte: Sistema de Referência Geodésico GRS-80	

A forma definida pela superfície dos oceanos, chamada geóide, difere desse esferoide no máximo em cerca de 100 m (NETO, 2019). O ângulo entre o equador e a normal ao elipsoide que se aproxima da verdadeira Terra é chamado de latitude geodésica. Como a superfície de um líquido (oceano similar) é perpendicular à linha de prumo, as latitudes geodésicas e geográficas são praticamente as mesmas. Por causa da excentricidade, a linha de prumo não aponta para o centro da Terra, exceto nos polos e no equador. Um ângulo correspondente à coordenada esférica comum (o ângulo entre o equador e a linha do centro até um ponto na superfície), a latitude geocêntrica  $\phi'$  é, portanto, um pouco menor que a latitude geográfica  $\phi$ .

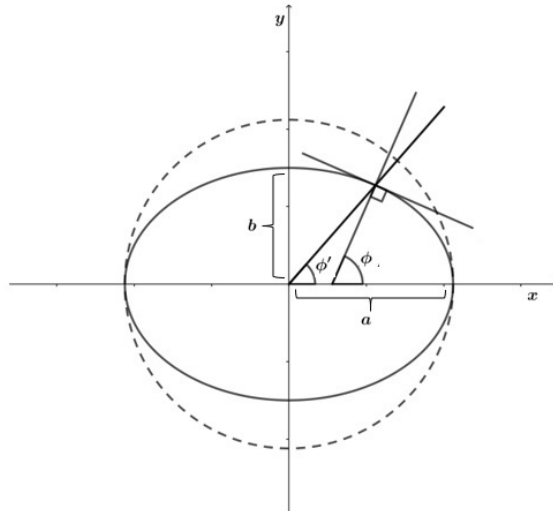


Figura 35: *Achatamento da Terra*

Devido ao achatamento da Terra, a latitude geográfica  $\phi$  e latitude geocêntrica  $\phi'$  são diferentes

Agora derivamos uma equação entre a latitude geodésica e a latitude geocêntrica, assumindo que a Terra seja um esferoide oblato (eixo equatorial maior do que o eixo polar) e as latitudes geográficas e geodésicas sejam iguais. A equação da elipse meridional é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A direção da normal para a elipse em um ponto  $(x, y)$  é dada por:

$$\operatorname{tg} \phi' = - \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 \cdot y}{b^2 \cdot x}$$

A latitude geocêntrica é obtida de  $\operatorname{tg} \phi = y/x$ .

Conseqüentemente

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi, \quad (29)$$

Em que  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  é a excentricidade da elipse. A diferença  $\Delta \phi = \phi - \phi'$  tem um máximo 11,5' na latitude 45°.

Como as coordenadas dos corpos celestes nos almanaques astronômicos são dadas em relação ao centro da Terra, as coordenadas dos objetos próximos devem ser corrigidas de acordo com a diferença na posição do observador, se for necessária alta precisão. Isso significa que é necessário calcular as coordenadas topocêntricas, centralizadas no observador. A melhor maneira de encontrar as coordenadas retangulares do objeto e do observador.

**Definição 4.3.** *Os principais elementos definidores da posição de um lugar na superfície terrestres são:*

- **Eixo Terrestre:** *linha imaginária que passa pelo centro da Terra em torno da qual a Terra executa seu movimento de rotação*<sup>1</sup>.
- **Polos Terrestres:** *pontos, diametralmente, opostos, decorrentes da interseção da superfície da Terra com o eixo terrestre. O polo norte ou boreal situa-se no oceano Ártico e o polo sul ou austral situa-se no continente Antártico.*
- **Equador Terrestre ou Linha do Equador:** *círculo máximo resultante da interseção da superfície terrestre com o plano perpendicular ao eixo terrestre.*
- **Plano do Equador:** *plano que contém o Equador Terrestre.*
- **Hemisfério Norte e Hemisfério Sul:** *cada região que o plano do equador divide a superfície terrestre. O hemisfério norte contém o polo norte e o hemisfério sul, contém o polo sul.*
- **Paralelos Terrestres:** *círculos resultantes da interseção da superfície terrestre com os planos paralelos ao plano do Equador. Entre os paralelos destacam-se o Trópico de Câncer, o Trópico de Capricórnio, o Círculo Polar Ártico e o Círculo Polar Antártico.*

<sup>1</sup> Rotação: é o movimento giratório que a Terra realiza em torno de seu próprio eixo.



- **Vertical do Lugar:** reta suporte do vetor aceleração da gravidade em um ponto da superfície terrestre onde se realiza observação astronômica. A materialização da direção vertical é realizada com instrumento denominado fio de prumo.
- **Plano do Horizonte:** plano perpendicular à vertical do lugar.
- **Meridianos:** semicírculos determinados pelos polo norte e sul através da interseção da superfície terrestre com um semiplano que tem como origem o eixo terrestre. Cada meridiano possui seu antimeridiano ( conjunto de dois meridianos diametralmente opostos formando um círculo máximo ). O meridiano que contém os polos e um dado local na superfície terrestre é denominado **meridiano do lugar**.
- **Meridiano de Greenwich:** estabelecido através de convenção mundial realizada em 1884 na cidade de Washington, meridiano de referência para se estabelecer uma padronização de horários em qualquer ponto da superfície terrestre. Leva esse nome pois passa sobre o Observatório Real de Greenwich situado na cidade de Londres, Inglaterra.
- **Linha Internacional de Mudança de Data:** é o antimeridiano de Greenwich. Quando cruza-se essa linha há uma diferença de um dia no calendário.

#### 4.3 SISTEMA DE REFERÊNCIA

A descrição de processos físicos oriundo de fenômenos observados ou previstos por alguma teoria só é possível através de um *Sistema de Referência*.

Para ilustrar a utilização da Trigonometria Esférica podemos fazer uso na *Astronomia* de sistemas de coordenadas a partir de um sistema de referência. Desde a época da Grécia clássica, há mais de 2 mil anos, isto é realizado por um catálogo fundamental com as posições de objetos astronômicos. Esses objetos eram, até a década de 1980, estrelas e a partir daí, objetos extra-galáticos e isto é importante pelo fato de não participarem da rotação de nossa galáxia.

Desde 1998, o sistema de referência celeste recomendado pela UAI (União Astronômica Internacional) é o ICRS (International Celestial Reference System). Este é um sistema com origem no centro de massa do Sistema Solar (aproximadamente heliocêntrico, muito próximo do centro do Sol), sem rotação em relação ao conjunto de objetos extra-galáticos. Este sistema é realizado pelo ICRF (International Celestial Reference Frame), um conjunto de 212 radiogaláxias <sup>2</sup>. O uso de radiogaláxias é conveniente por

<sup>2</sup>Radiogaláxia é um tipo de galáxia que apresenta forte emissão em frequência de rádio(  $\sim 10$  MHz - 100 GHz), geralmente devido à atividade de um núcleo ativo (acréscimo de matéria em um buraco negro supermassivo no centro da galáxia)

dois motivos: objetos extra-galáticos, à exceção de grupo local de galáxias <sup>3</sup>, têm movimento próprio praticamente nulo e suas posições podem ser determinadas com altíssima precisão através da técnica da interferometria <sup>4</sup>

#### 4.4 SISTEMAS DE COORDENADAS

A posição de um astro qualquer na Esfera Celeste é definido sem ambiguidade através de dois ângulos em relação ao sistema de coordenadas adotado, que por sua vez é definido a partir de um ponto central. A escolha desse sistema de coordenadas associado à Esfera Celeste depende em muito da análise ou problema que se queira resolver.

Os Sistemas de Referencia utilizados são definidos por um *plano principal*, que divide a esfera em duas partes iguais, definindo-se assim um grande círculo. Define-se arbitrariamente um ponto de origem neste círculo principal, por onde passa o *meridiano principal*, outro grande círculo perpendicular ao grande círculo anterior.

Os círculos paralelos ao círculo principal definem as *latitudes* da esfera, enquanto os grandes círculos perpendiculares ao círculo principal definem as *longitudes*.

A escolha da origem do sistema de coordenadas é feito de forma arbitrária e depende do problema astronômico em questão. Se o centro do sistema coincide com o centro da Terra, diz-se que o sistema de coordenadas é *geocêntrico*; se o centro for o Sol, temos então um sistema *heliocêntrico*; se o centro do sistema de coordenadas for um ponto na superfície da Terra, este sistema será *topocêntrico*.

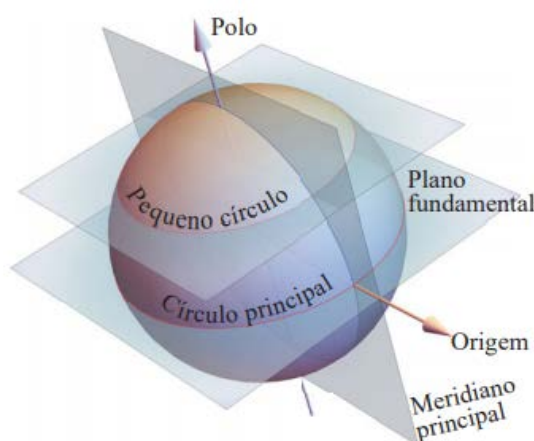


Figura 36: *Coordenadas em uma Esfera*

<sup>3</sup> Grupo Local é o grupo de galáxias onde se encontra a nossa própria galáxia, a Via Láctea

<sup>4</sup> Interferometria: conjunto de técnicas de medida e análise, baseado em fenômenos ópticos de interferência.

A posição de um ponto qualquer de uma esfera pode ser escrita convenientemente em forma matricial, a partir do sistema de coordenadas esféricas polares.

$$I = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda \\ \cos \delta \operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix}$$

Esta matriz é obtida a partir da representação do objeto observado, conforme figura 37 a seguir:

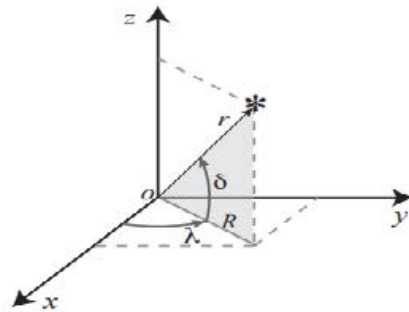


Figura 37: *Coordenadas Polares*

Coordenadas Esféricas Polares,  $\lambda$  e  $\delta$  de um ponto,  $r$  é o raio vetor e  $R$  sua projeção no plano  $xy$ . O ângulo longitudinal é medido a partir do eixo  $x$ .

Da figura 37, temos:

$x$	$y$	$z$
$\cos \delta = \frac{R}{r}$		
$\cos \lambda = \frac{x}{R}$	$\operatorname{sen} \lambda = \frac{y}{R}$	$\operatorname{sen} \delta = \frac{z}{r}$
$x = R \cos \lambda$	$y = R \operatorname{sen} \lambda$	
$x = r \cos \delta \cos \lambda$	$y = r \cos \delta \operatorname{sen} \lambda$	$z = r \operatorname{sen} \delta$

Em que  $\delta$  e  $\lambda$  são a latitude e a longitude em um dado sistema de coordenadas. Neste caso, ignoramos a coordenada radial  $r$ . Esta forma é particularmente útil para o cálculo de transformações de coordenadas.

**Definição 4.4.** *Especificamos a posição dos astros na Esfera Celeste utilizando os seguintes Sistemas de Coordenadas Esféricas:*

- *Sistema de Coordenadas Heliocêntrico - Eclíptico;*
- *Sistema de Coordenadas Geocêntrico - Equatorial;*
- *Sistema de Coordenadas Geográficas;*
- *Sistema de Coordenadas Topocêntrico - Horizontal;*
- *Sistema de Coordenadas Horárias;*
- *Sistema de Coordenadas Galácticas;*

**Definição 4.5. Referências na órbita da Terra**

- ***Eclíptica:*** *é um círculo máximo da esfera celeste resultado da intersecção do plano orbital da Terra com a esfera celeste. Representa a projeção sobre a esfera celeste da trajetória aparente do Sol no decurso de um ano, observada a partir da Terra.*
- ***Plano da Eclíptica:*** *é o plano que contém a eclíptica, isto é, o plano sobre a qual a Terra descreve o movimento de translação<sup>5</sup> ao redor do Sol.*
- ***Eixo Eclíptico:*** *é a reta perpendicular ao plano da eclíptica que passa pelo centro da esfera celeste.*
- ***Polo Norte Eclíptico e Polo Sul Eclíptico:*** *pontos imaginários, diametralmente opostos, onde o eixo eclíptico faz intersecção com a esfera celeste.*
- ***Máximos de Longitude:*** *semicírculos máximos que passam pelos polos eclípticos.*
- ***Paralelos de Latitude:*** *círculos menores paralelos à eclíptica.*
- ***Obliquidade da Eclíptica:*** *representado por  $\epsilon$ , é o ângulo formado entre o plano da eclíptica e o plano do equador, que mede, aproximadamente,  $23^\circ 26' 21''$ .*
- ***Equinócio:*** *Instante em que o Sol, em sua órbita aparente, cruza o equador celeste. A intersecção da eclíptica e do equador determinam, na esfera celeste, dois pontos que correspondem aos equinócios: da primavera e do outono. Durante os equinócios, os dias e as noites têm a mesma duração.*

<sup>5</sup> Translação: movimento que a Terra realiza ao redor do Sol, completando uma volta completa em 1 ano sideral ou 365,256363 dias solares a uma velocidade orbital média de 29,78 km/s.

- **Equinócio Vernal:** é o ponto da esfera celeste correspondente ao equinócio da primavera. O Sol estando neste ponto tem-se início o outono no hemisfério Sul e da primavera no hemisfério Norte. Hoje localiza-se na constelação de peixes, mas devido à precessão.<sup>5.4</sup> dos equinócios, é também conhecido como ponto de Áries, denotado por  $\Upsilon$ .
- **Trópico de Câncer e Capricórnio:** são, respectivamente, paralelos terrestres de latitude  $+\varepsilon$  e  $-\varepsilon$ .
- **Círculo Polar Ártico e Antártico:** são, respectivamente, os paralelos terrestres de colatitude <sup>6</sup> $+\varepsilon$  e  $180^\circ - \varepsilon$

#### 4.4.1 Sistema de Coordenadas Heliocêntrico - Eclíptico

- **Origem:** Centro do Sol.
- **Plano Principal:** plano de órbita da Terra em torno do Sol, plano da eclíptica.
- A inclinação da eclíptica em relação ao equador celeste é  $\varepsilon$  que vale aproximadamente  $23^\circ 26' 21''$ , atualmente.
- **Direção Principal:** direção definida a partir do centro da Terra e o ponto vernal  $\Upsilon$ , correspondente ao eixo  $x$ .
- Sistema útil no estudo dos corpos celestes do Sistema Solar.
- As coordenadas neste sistema são a *longitude eclíptica*,  $\lambda$ , medida a partir do ponto vernal, ponto em que o Sol parece cruzar o equador de sul para o norte, o primeiro ponto de Áries, ou equinócio vernal, denotado por  $\Upsilon$ ; e a *latitude eclíptica*,  $\beta$ , medida a partir da eclíptica, sendo positiva em direção ao polo norte da eclíptica e negativa em direção ao Sul. Escolhido arbitrariamente como sendo a interseção em que o Sol cruza o equador celeste de Sul para Norte. Este ponto é chamado de *equinócio vernal* ou *primeiro ponto de Áries*, denotado por  $\Upsilon$ . O Sol neste ponto marca o início do outono no hemisfério Sul e a primavera no hemisfério Norte. A palavra *equinócio* vem do latim e significa "noites iguais". A interseção entre o equador celeste e a eclíptica a  $180^\circ$  do equinócio vernal, quando o Sol passa de Norte para Sul, é chamada *ponto de Libra*,  $\underline{\sphericalangle}$ , ou equinócio de setembro.

<sup>6</sup> Colatitude é o arco medido sobre o meridiano do lugar entre o polo Norte e o paralelo do lugar

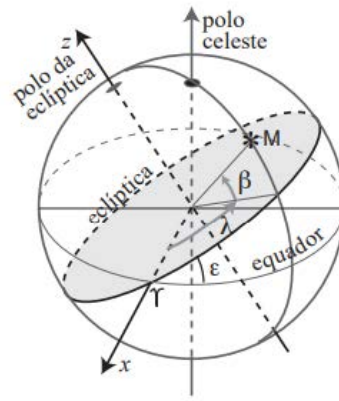


Figura 38: *Sistema de Coordenadas Heliocêntrico - Eclíptico*

#### 4.4.2 *Sistema de Coordenadas Geocêntrico - Equatorial*

- *Origem*: Centro da Terra.
- *Plano Principal*: Projeção do equador terrestre na esfera celeste, chamado *equador celeste*. As projeções dos polos terrestres na esfera celeste definem os polos celestes Norte e Sul.
- *Direção Principal*: é definido pela interseção do equador celeste com a eclíptica.
- *Declinação*,  $\delta$ : é a distância angular de um ponto  $M$  medida sobre o meridiano que passa por este ponto a partir do equador celeste.  $\delta > 0$  quando medida na direção do polo norte celeste, caso contrário, a declinação é negativa.
- *Ascensão reta*,  $\alpha$ : é o ângulo entre o ponto vernal e o meridiano do astro  $M$ , medido na direção Leste. Por convenção, a ascensão reta é medida em horas, minutos e segundos como o tempo( ao invés de graus, minutos e segundos de arco). A relação  $1^h = 15^\circ$ .

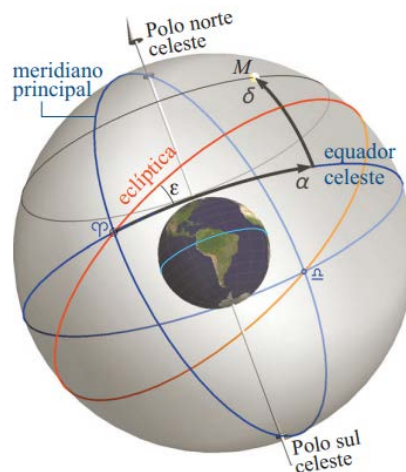


Figura 39: *Sistema de Coordenadas Geocêntrico - Equatorial*

- Em notação matricial, a posição de um astro de declinação  $\delta$  e ascensão  $\alpha$  é:

$$I = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

- A ascensão reta e a declinação de uma estrela não se alteram devido ao movimento diurno de rotação da Terra.

#### 4.4.3 Sistema de Coordenadas Geográficas

- Considera-se que a Terra é esférica.
- Um ponto sobre a superfície é determinado por duas coordenadas angulares.
- *Latitude*,  $\varphi$ : ângulo medido ao longo do meridiano local a partir do equador:  $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$  para pontos localizados no hemisfério norte e  $-90^\circ \leq \varphi < 0^\circ$  para pontos localizados no hemisfério sul.
- *Longitude*,  $\lambda$  de um dado ponto  $O$  sobre a superfície da Terra é medida a leste ou oeste ao longo do equador a partir do ponto de interseção entre o meridiano de *Greenwich* e o equador, em direção ao ponto determinado pela interseção do meridiano que passa pelo observador  $O$  e o equador, definida entre  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$ , ou equivalentemente, entre  $-12^h$  e  $+12^h$ , sendo negativa pontos localizados a leste de Greenwich e positiva para os localizados a oeste (BOCZKO, 1998).

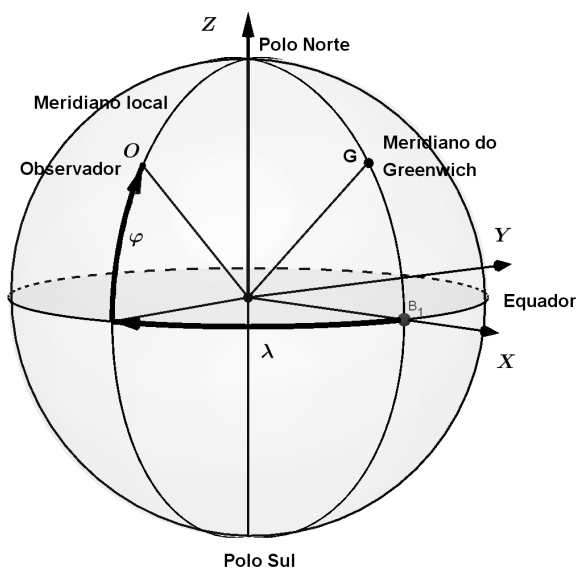


Figura 40: *Sistema de Coordenadas Geográficas*

- Sistema não inercial, já que gira juntamente com a Terra, percorrendo  $360^\circ$  em 24 horas solares médias.

- *Tempo Sideral*,  $\Theta$ : ângulo formado pelo meridiano de um observador sobre a superfície da Terra, medido de leste para oeste no plano equatorial a partir do meridiano local para o equinócio vernal - ponto de Áries,  $\Upsilon$ , variando de  $0^h$  a  $24^h$ , ou equivalentemente, de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

A Terra não é perfeitamente esférica e para tanto adota-se modelo geométrico que melhor a represente, como já discutido em (4.2): o *elipsóide* formado pela revolução círculos paralelos ao plano do equador em torno do eixo menor (coincidente com o eixo polar).

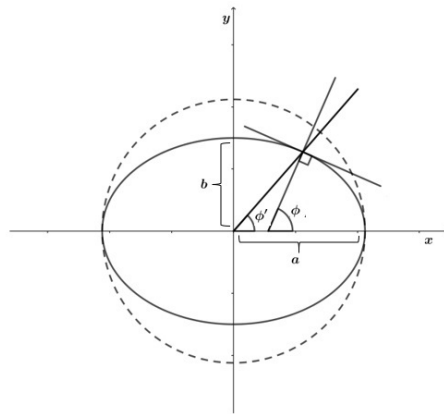


Figura 41: *Observador sobre o elipsóide*

Um ponto  $O$  sobre a superfície do elipsóide de revolução ilustrado a seguir, tem posição definida pelo vetor  $R$ , cujas componentes cartesianas são expressas em termos de latitude geocêntrica,  $\varphi'$  e do tempo sideral,  $\Theta$ , por:

$$\begin{cases} x_0 = R \cos \varphi' \cos \Theta \\ y_0 = R \cos \varphi' \sin \Theta \\ z_0 = R \sin \varphi' \end{cases}$$

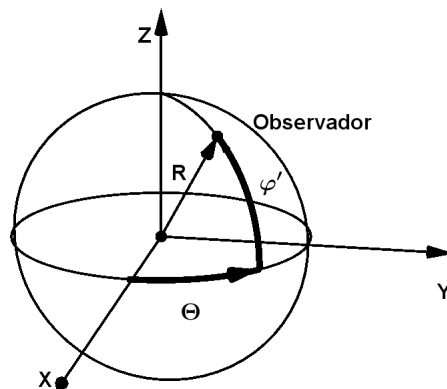


Figura 42: *Latitude Geocêntrica e Tempo Sideral*



## 4.4.4 Sistema de Coordenadas Topocêntrico - Horizontal

- *Plano principal*: definido como sendo o plano que contém o horizonte do observador.
- *Altura*( $h$ ) e *Azimute* ( $A$ ): ângulos que definem a posição de um astro qualquer.
- *Horizonte Astronômico*: círculo centrado no observador, perpendicular à sua vertical (definida como paralela ao campo gravitacional), independentemente de acidentes geográficos. A interseção desta vertical com a esfera celeste define o **zênite** e o **nadir**.
- A **Direção Principal** aponta para o sul ao longo do meridiano local.
- A **altura** de um astro é medida a partir do horizonte astronômico, sendo positivo quando o astro está acima do horizonte e negativo em caso contrário. O zênite tem por definição uma altura de  $90^\circ$  e o nadir,  $-90^\circ$ . O pequeno círculo paralelo ao horizonte, de altura constante, é chamado de *Almuncântara* ou *Almucântar*.
- *Meridiano Principal* ou *Meridiano Local*: grande círculo que passa pelo zênite na direção norte-sul, perpendicular ao horizonte. Definimos também de **Primeiro Vertical** o grande círculo que passa pelo zênite porém na direção leste-oeste.
- O **Azimute** é medido no plano do horizonte a partir do norte para leste até o meridiano do objeto e varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .
- Em notação matricial, a posição de um astro de altura  $h$  e azimute  $A$  é

$$I = \begin{pmatrix} -\cos h \cos A \\ \cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}$$

- Neste sistema, as coordenadas de um astro variam com o tempo devido sobretudo ao movimento de rotação da Terra. Para um observador no hemisfério Norte olhando para o Sul, o azimute de um astro (que não seja circumpolar) sempre aumenta durante o decorrer de um dia. Já o observador no hemisfério Sul, olhando para o Norte, observará o azimute de um astro (que não seja circumpolar) diminuir com o passar do tempo.

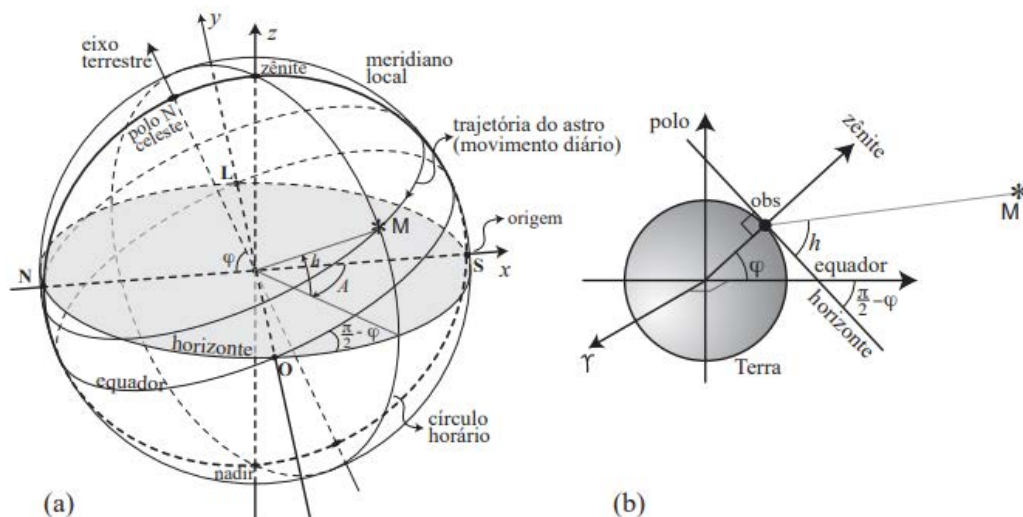


Figura 43: *Sistema de Coordenadas Horizontais*

#### 4.4.5 Sistema de Coordenadas Horárias

- Semelhante ao Sistema de Coordenadas Equatoriais.
- *Círculo Principal*: projeção do equador terrestre na esfera celeste.
- *Declinações*: Medidas da mesma forma que no Sistema de Coordenadas Equatoriais.
- *Direção Principal*: é o **meridiano local** (ou meridiano principal) do observador, como no sistema de coordenadas horizontal. Este ângulo é chamado **ângulo horário, H**, medido no sentido oposto à ascensão reta.
- *Trânsito*: quando um astro passa pelo meridiano local do observador.
- O *ângulo horário* varia com o movimento diurno da esfera celeste, enquanto a ascensão reta não varia. A relação entre estas duas coordenadas está diretamente ligada ao movimento diurno da origem do sistema de coordenadas equatoriais, o ponto vernal  $\Upsilon$ . A soma da ascensão reta com o ângulo horário resulta em  $\Theta = H + \alpha$ , em que  $\Theta$  é o tempo sideral local e  $\alpha$  é a ascensão reta.  $\Theta$  também pode ser interpretado como um ângulo, o *ângulo horário* vernal.
- No sistema de coordenadas horizontais, um astro M tem como coordenadas o ângulo horário (H) e a declinação ( $\delta$ ).

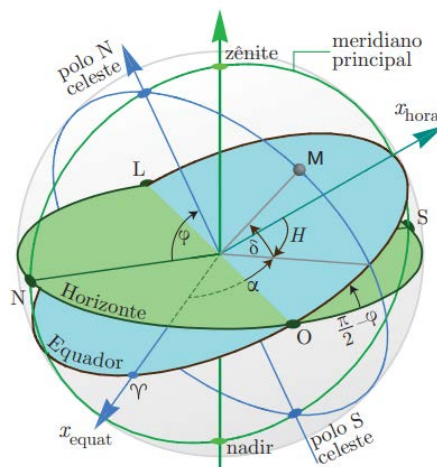


Figura 44: *Sistema de Coordenadas Horárias*

- Na figura (44), a latitude do observador é  $\varphi$ , portanto o ângulo entre o equador celeste e o horizonte é  $\pi/2 - \varphi$ . Os eixos  $x_{hora}$  e  $x_{equat}$  correspondem aos sistemas horários e equatoriais, respectivamente. Como o polo Norte celeste está acima do horizonte, este exemplo é de um observador no hemisfério Norte.
- Em notação matricial, a posição em coordenadas cartesianas de um astro com ângulo horário  $H$  e declinação  $\delta$  é dada por:

$$I = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

#### 4.4.6 *Sistema de Coordenadas Galácticas*

- *Plano Principal*: plano do disco da Via Láctea (nossa galáxia é uma espiral, provavelmente barrada, com distribuição da maioria das estrelas em um disco), o *Equador Galáctico*.
- *Origem do Sistema de coordenadas*: dada pela direção do centro galáctico, que se encontra na constelação de Sagitário, com coordenadas  $\alpha = 17^h 45,62^m$  e  $\delta = -26^\circ 56,17'$  (J2000) <sup>7</sup>

<sup>7</sup> J2000: instante de tempo usado como referência para medida de tempo em Astronomia. Para tornar os cálculos mais simples, os astrônomos normalmente usam o número de dias decorridos desde um determinado momento no tempo, como forma de representar o tempo nos cálculos astronômicos. Este "ponto de partida" escolhido arbitrariamente é chamado de época. A época mais usada atualmente é a J2000.0, (o ano Juliano 2000.0), que corresponde (quase exatamente) a 1 de janeiro de 2000, meio-dia UTC. O Dia Juliano (DJ) é uma contagem sucessiva de dias e frações, a partir do ano astronômico -4712 (ano histórico 4713 a.C.). Por tradição, o DJ começa ao meio-dia GMT. Não confunda o Dia Juliano com Calendário Juliano! É apenas coincidência, pois quem introduziu o Dia Juliano, o filólogo francês Giuseppe Giusto Scaliger (1540-1609), assim o denominou em homenagem a seu pai, o humanista italiano Julius Caesar Scaliger (1484-1558).

- O *Polo Norte Galáctico* se encontra em  $\alpha = 12^h 51,44^m$  e  $\delta = 27^\circ 07,7'$ . Também é comum definir e usar a inclinação do equador galáctico em relação ao equador celeste, o ângulo  $i = 90^\circ - \delta \cong 62,872^\circ$  e a linha dos nodos (interseção do equador celeste com o equador galáctico) localizado em  $\alpha_{nodo} = 282,25^\circ$ .

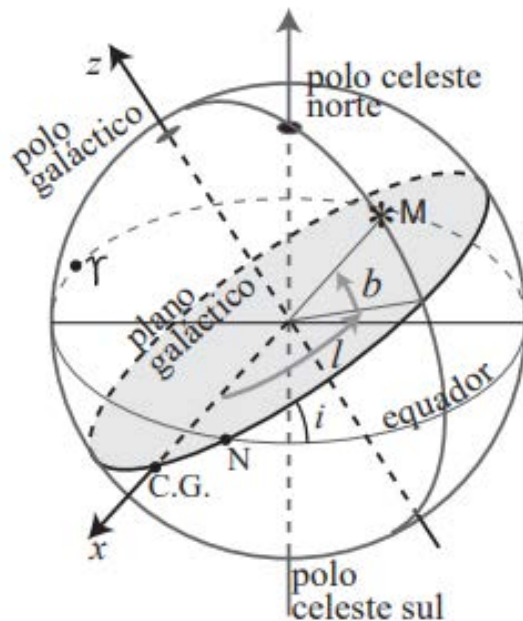


Figura 45: *Sistema de Coordenadas Galácticas*

- Na figura (45), o astro M tem coordenadas longitude galáctica ( $l$ ) e latitude ( $b$ ). O ponto N é a interseção do plano galáctico com o equador celeste (o nodo). C.G. é a direção do centro da Galáxia (que fica na constelação de Sagitário) e  $i$  é a inclinação do plano galáctico em relação ao equador celeste.
- Este sistema é utilizado principalmente em astronomia extragaláctica (como o estudo do Grupo Local de galáxias, no qual a Via Láctea e a galáxia de Andrômeda são os principais membros) ou em problemas ligados à nossa galáxia como um todo (por exemplo, o movimento das estrelas do disco da Via Láctea).
- Antes de 1959, a origem do sistema de coordenadas galácticas coincidia com o nodo (intersecção do plano galáctico com o equador celeste). Com a adoção do novo sistema, foram introduzidos os expoentes  $I$  e  $II$  para indicar o sistema antigo e o novo, isto é,  $(l^I, b^I)$  e  $(l^{II}, b^{II})$ . A diferença dos dois sistemas é simplesmente  $l^I = l^{II} - 33,0^\circ$ .
- *Coordenadas Supergalácticas*: Para o estudo de fenômenos ligados à estrutura em grande escala do Universo, foi introduzido o sistema de coordenadas Supergalácticas por *Gérard de Vaucouleurs* (1918 ~ 1995, astrônomo francês), no início dos anos 1950. O plano principal é definido pelo plano onde se encontram uma grande

#### 4.5 TABELA COMPARATIVA ENTRE VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS 60

concentração de galáxias do Superaglomerado Local, com centro no aglomerado de Virgo (Constelação da Virgem). A origem deste sistema de coordenadas é, aproximadamente, na direção  $\alpha = 2^h 49^m e \delta = +59^\circ 32' (J2000)$ .

#### 4.5 TABELA COMPARATIVA ENTRE VÁRIOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Para uma melhor análise e comparação, apresentamos a seguinte tabela que mostra de forma condensada todas as informações sobre os diversos Sistemas de Coordenadas para localização de um objeto/astro na Esfera celeste.

Sistemas de Coordenadas	Helioentríco Eclíptico	Geocêntrico Equatorial	Topocêntrico Horizontal	Horárias
<b>Origem</b>	Centro do Sol	Centro da Terra	Centro da Terra	Centro da Terra
<b>Orientação</b>	Dextrogiro	Dextrogiro	Dextrogiro	Levogiro
<b>Plano Fundamental</b>	Eclíptica	Equador Celeste	Horizonte Astronômico	Equador Celeste
<b>Eixos</b>	X – centro da Terra e ponto vernal Y – Geral Sistema dextrogiro Z – eixo da Eclíptica	X – Equador Celeste com a Eclíptica Y – Sistema dextrogiro Z – Polo Norte Celeste	X – Meridiano Celeste com Horizonte Astronômico Y – linha leste oeste Z – Vertical do observador	X – Meridiano Celeste do observador com o Equador Celeste Y – linha leste – oeste Z – Polo Norte Celeste
<b>Coordenadas</b>	Longitude Eclíptica: $\lambda$ Latitude Eclíptica: $\beta$	Declinação: $\delta$ Ascensão reta: $\alpha$	Azimute: A Altura: h	Ângulo Horário: H Declinação: $\delta$
<b>Caráter</b>	Geral, nenhuma coordenada depende do observador	Geral, nenhuma coordenada depende do observador	Tipicamente local, pois as coordenadas dependem da posição do observador	Misto, a declinação não depende da posição do observador, porém o ângulo horário sim

Figura 46: Comparativo entre os Sistemas de Coordenadas

## TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Para que possamos descrever um fenômeno físico, nós devemos estabelecer um sistema de referência. Referenciais ditos inerciais são aqueles em que a primeira lei de *Newton* (Isaac Newton, 1643 ~ 1727, astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês), ou seja, *todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele*, é verificada. Este conceito pode ser estendido lembrando que todo referencial que se move com velocidade constante em relação a um referencial inercial, é também um referencial inercial. Dessa forma, devemos ser capazes de transformar essas coordenadas de um referencial no qual o observador encontra-se em repouso, em coordenadas de um observador em um referencial que se move com velocidade constante comparado ao primeiro. Nesta seção, realizamos estudo das transformações entre coordenadas. Os Sistemas de Coordenadas Horizontal, Equatorial, Eclíptico e Galáctico são comparados na figura (47). Dentre estes sistemas, o Horizontal é fixo para um dado observador, isto é, as linhas de azimute e altura que vemos na figura são as mesmas sempre independentemente do dia ou hora de observação. Os demais, acompanham o movimento diurno da esfera celeste.

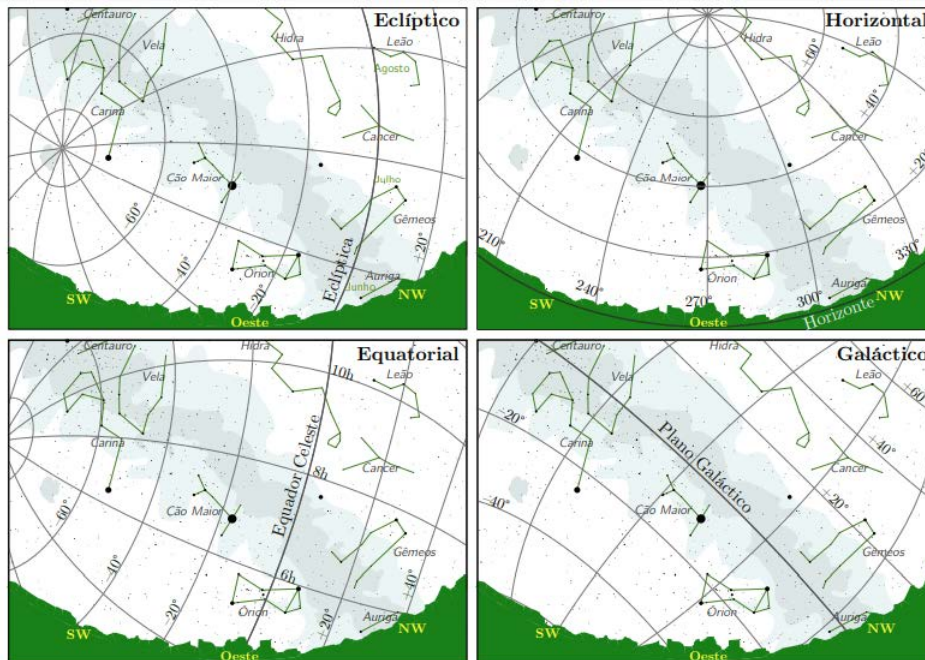


Figura 47: *Exemplo dos sistemas de coordenadas*

Para um observador em São Paulo no início de outono, por volta de 22 h, olhando para a direção Oeste.

As transformações entre dois sistemas de coordenadas quaisquer de mesma origem podem ser realizadas por rotações com o uso de matrizes.

Supondo que tenhamos dois sistemas de coordenadas retangulares  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$ , conforme figura (48), de modo que o sistema  $x'y'z'$  seja obtido do sistema  $xyz$ , girando-o em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\chi$  ao redor do eixo  $x$ .

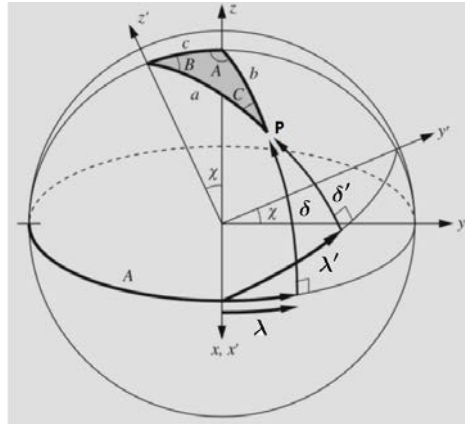


Figura 48: Transformação de Coordenadas  $Oxyz$  para  $Ox'y'z'$  obtido pela rotação pelo ângulo  $\chi$  em torno do eixo  $x$ .

A posição de um ponto  $P$  em uma esfera de raio  $R$  é determinada exclusivamente por meio de dois ângulos. O ângulo  $\lambda$  é medido no sentido anti-horário a partir do eixo  $x$  positivo ao longo do plano  $xy$ ; o outro ângulo  $\delta$  indica a distância angular ao plano  $xy$ . As coordenadas retangulares do ponto  $P$  como funções desses ângulos, de acordo com a figura 49, são assim obtidas:

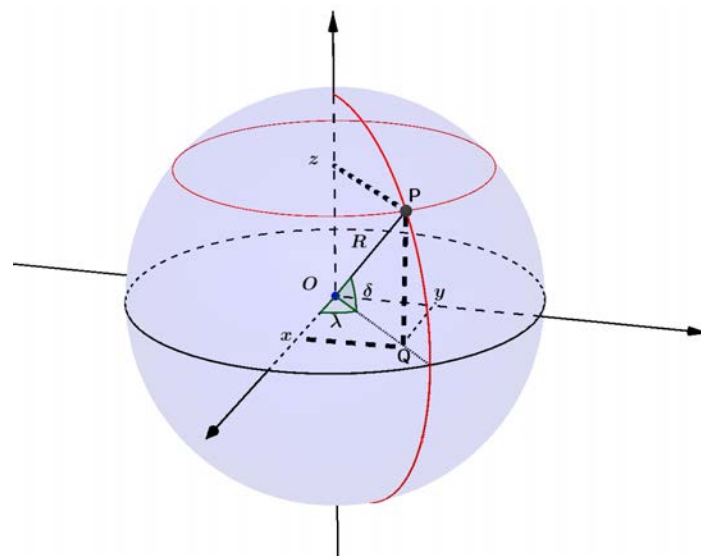


Figura 49: Coordenadas do ponto  $P$  em rotação em torno do eixo  $x$ .

$$\cos \delta = \frac{OQ}{R}$$

$$OQ = R \cos \delta$$

Como  $\cos \lambda = \frac{x}{OQ}$ , resulta em:

$$x = OQ \cos \lambda$$

$$x = R \cos \lambda \cos \delta$$

Ainda na figura 49, temos:

$$\sin \lambda = \frac{y}{OQ}$$

O que resulta em:

$$y = R \sin \lambda \cdot \cos \delta$$

Finalizando temos que  $\sin \delta = \frac{z}{R}$ , e daí,  $z = R \sin \delta$

De uma maneira análoga, podemos definir os ângulos  $\lambda'$  e  $\delta'$ , que fornecem a posição do ponto  $P$  no sistema  $x'y'z'$  e as coordenadas retangulares no sistema  $x'y'z'$  será dado por:

$$x' = R \cos \lambda' \cdot \cos \delta'$$

$$y' = R \sin \lambda' \cdot \cos \delta'$$

$$z' = R \sin \delta'$$

Podemos ainda escrever as coordenadas em relação ao plano obtido pela rotação em torno do eixo  $yz$ , neste caso ignorando a coordenada radial  $R$ , conforme descrevemos a seguir:

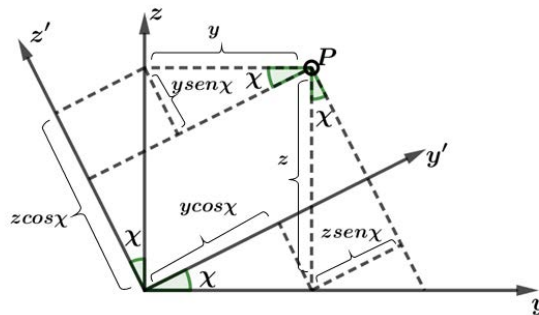


Figura 50: As coordenadas do ponto  $P$  no sistema de rotação  $x'y'z'$



Escrevemos em relação a figura 50:

$$\begin{cases} x' = 1.x + 0.y + 0.z \\ y' = 0.x + y \cdot \cos \chi + z \cdot \text{sen } \chi \\ z' = 0.x - y \cdot \text{sen } \chi + z \cdot \cos \chi \end{cases}$$

Tomando dois sistemas de coordenadas  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$ , ortogonais, de mesma origem  $O$ , relacionados por uma rotação em torno do eixo  $z$ , conforme figura , em que o ângulo de rotação é dado por  $\alpha$ . Considere o sentido positivo de rotação definido pela regra da mão direita. Seja o ponto  $P = (x, y, z)$  uma rotação a duas dimensões, ao redor de um dos eixos. As rotações básicas ao redor dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , cada uma de um valor angular  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_z$  são dadas pelas matrizes dos cossenos diretores:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \text{sen } \alpha_x \\ 0 & -\text{sen } \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\text{sen } \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix} \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \text{sen } \alpha_z & 0 \\ -\text{sen } \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essas são as matrizes de transformação associada a uma rotação ao redor dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Dado um par de coordenadas em um sistema qualquer, devemos encontrar a ou as rotações necessárias para transformá-las em outro sistema de coordenadas. Genericamente, podemos escrever  $I(\alpha, \delta) = R_x R_y R_z I(l, b)$ .

Para transformarmos um dado ponto de uma coordenada para outra, devemos lembrar que a ordem das operações são muito importante e que o produto de uma matriz por um vetor é dado por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

## 5.1 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ECLÍPTICAS PARA EQUATORIAIS

Para realizarmos a transformação de um dado ponto em coordenadas eclípticas para coordenadas equatoriais, devemos observar que temos uma única rotação necessária do plano fundamental (equador celeste  $\rightarrow$  eclíptica) em torno do eixo  $x$ .

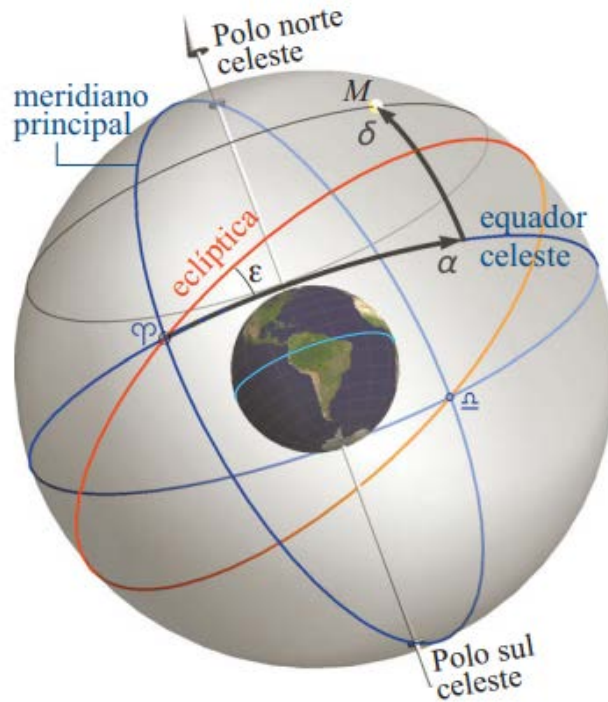


Figura 51: Ângulo  $\varepsilon$  de inclinação entre a eclíptica e o equador celeste

O ângulo desta rotação é a inclinação da eclíptica,  $\varepsilon$ , que vale aproximadamente  $23^{\circ} 26' 21''$ . Usando a notação vetorial, temos (o ângulo  $\varepsilon$  será negativo nesta situação):

$$I(\delta, \alpha) = R_x^{-1}(\varepsilon) \cdot I(\lambda, \beta) \implies I(\delta, \alpha) = R_x^T(\varepsilon) \cdot I(\lambda, \beta)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = R_x^{-1}(\varepsilon) \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

Vale lembrar que no sistema de coordenadas eclípticas suas coordenadas são dadas pela latitude  $\beta$  e longitude  $\lambda$ ; e no sistema de coordenadas equatoriais, temos a ascensão reta  $\alpha$  e a declinação  $\delta$  como suas coordenadas.

Escrevendo explicitamente a matriz de rotação em relação ao eixo  $x$ , temos:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

Em que utilizamos a relação  $\cos(-\varepsilon) = \cos(\varepsilon)$  e  $\sin(-\varepsilon) = -\sin(\varepsilon)$ . Realizando a multiplicação matricial, obtemos 3 equações:

$$\begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha = \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta \\ \sin \delta = \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \beta \end{cases}$$

As duas primeiras equações fornecem a relação entre a ascensão reta,  $\alpha$  e as coordenadas eclípticas  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\varepsilon$ :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta}{\cos \beta \cos \lambda}$$

A última equação dá a declinação  $\delta$  em função da longitude eclíptica  $\lambda$  e latitude eclíptica  $\beta$ .

A transformação no sentido inverso, de coordenadas equatoriais em eclíptica é simplesmente:

$$I(\delta, \alpha) = R_x^{-1}(\varepsilon).I(\lambda, \beta) \implies I(\delta, \alpha) = R_x^T(\varepsilon).I(\lambda, \beta)$$

Observe a resolução para este caso:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \lambda = \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \varepsilon \sin \delta \\ \sin \beta = -\sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \varepsilon \sin \delta \end{cases}$$

## 5.2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EQUATORIAIS EM HORIZONTAIS

A mudança entre coordenadas equatoriais e horizontais é mais delicada. Como as coordenadas horizontais possuem um movimento diário, é mais conveniente utilizarmos as coordenadas horárias do que as coordenadas equatoriais diretamente. A passagem

de um sistema para outro se efetua por uma rotação em torno do eixo cartesiano  $y$ . A rotação empregada corresponde ao complemento da latitude do observador,  $90^\circ - \varphi$ .

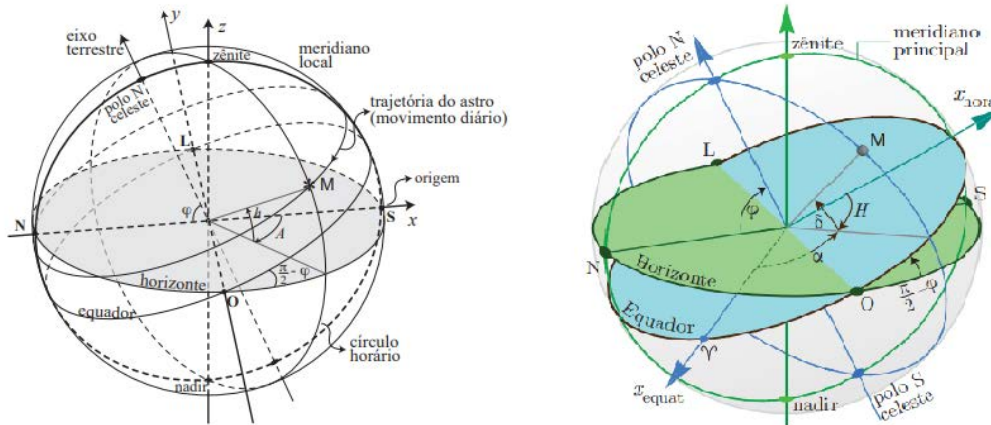


Figura 52: *Coordenadas Horizontais (esquerda) e Horárias (direita)*

Usando a notação vetorial, temos:

$$I(H, \delta) = R_y^{-1}([90^\circ - \varphi]).I(A, h)$$

Em que,  $(H, \delta)$  são as coordenada do objeto no sistema de coordenadas horárias e  $(A, h)$  as coordenadas do objeto no sistema de coordenadas horizontais.

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} = R_y^{-1}(90^\circ - \varphi) \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos [-(90^\circ - \varphi)] & 0 & -\sin [-(90^\circ - \varphi)] \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin [-(90^\circ - \varphi)] & 0 & \cos [-(90^\circ - \varphi)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}$$

Lembrando que  $\cos [-(90^\circ - \varphi)] = \sin \varphi$  e  $\sin [-(90^\circ - \varphi)] = -\cos \varphi$ , obtemos:

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{pmatrix}$$

O que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \cos \delta \cos H = \cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \\ \cos \delta \sin H = \sin A \cos h \\ \sin \delta = -\cos h \cos A \cos \varphi + \sin h \sin \varphi \end{cases}$$

As duas primeiras equações fornecem a relação entre o ângulo horário,  $H$ , e o azimute,  $A$ , a altura,  $h$  e ascensão reta,  $\alpha$ .

$$\frac{\cos \delta \cos H}{\cos \delta \sin H} = \frac{\cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi}{\sin A \cos h}$$

$$\cotg H = \frac{\cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi}{\sin A \cos h}$$

A última equação nos dá a declinação  $\delta$  em função da altura,  $h$ , do azimute,  $A$  e da ascensão reta,  $\alpha$ . A transformação inversa se faz pela rotação no sentido contrário:

$$I(A, h) = R_y(90^\circ - \varphi) I(H, \delta)$$

### 5.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EQUATORIAIS PARA GALÁCTICAS

Neste caso, as origens dos sistemas não coincidem. A transformação deve ser realizada considerando três rotações distintas. Em primeiro lugar devemos deslocar a origem das coordenadas galácticas até a interseção dos planos equatorial e galáctico, o nodo  $N$  da figura 53.

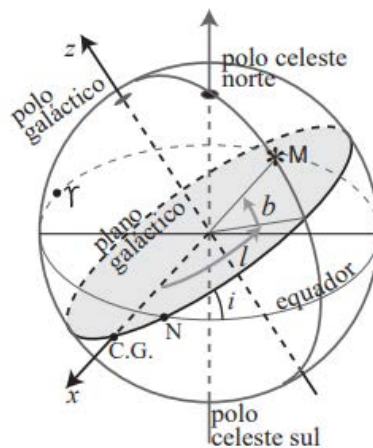


Figura 53: Interseção do plano equatorial e galáctico

Em coordenadas galácticas, esta rotação é representada por  $l' \rightarrow l - l_{CG}$ . Em seguida, efetuamos a rotação do nodo  $N$  até a origem do sistema equatorial, o ponto vernal,  $\Upsilon$ . Isto acontece em coordenadas equatoriais,  $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_N$ . Finalmente, realizamos a rotação do plano galáctico em torno do eixo cartesiano  $x$ , já que as duas rotações anteriores fazem com que as origens coincidam.

Em resumo, temos:

$$I(l - l_{CG}, b) = R_x(i) I(\alpha - \alpha_N, \delta)$$

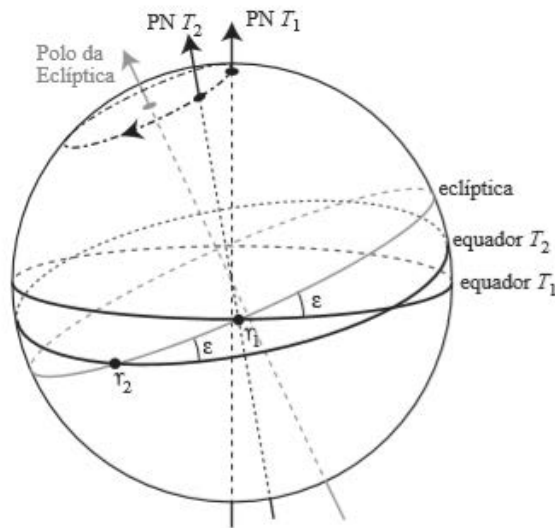
$$\begin{pmatrix} \cos b \cos (l - l_{CG}) \\ \cos b \sin (l - l_{CG}) \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos (\alpha - \alpha_N) \\ \cos \delta \sin (\alpha - \alpha_N) \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Em que  $i$  é a inclinação do plano galáctico, sendo  $i = 62,8717^\circ$ ,  $l_{CG} = 32,9319^\circ$  e  $\alpha_N = 18^h 51,44^m = 282,8595^\circ$  (valores por definição exatos, válidos para  $J2000$ , definidos em (4.4.6)).

#### 5.4 PERTURBAÇÕES EM COORDENADAS

Mesmo que uma estrela permaneça fixa em relação ao Sol, suas coordenadas podem mudar, devido a vários efeitos perturbadores. Naturalmente, sua altitude e azimute mudam constantemente por causa da rotação da Terra, mas mesmo sua ascensão e declinação não estão livres de perturbações.

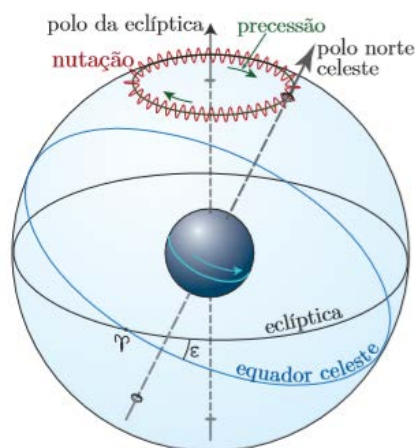
- **Precessão:** Como a maioria dos membros do sistema solar orbita perto da eclíptica, eles tendem a puxar a protuberância equatorial da Terra em sua direção. A maior parte desse torque de "flexão" é causada pela lua e pelo sol. Mas a Terra está girando e, portanto, o torque não pode mudar a inclinação do equador em relação à eclíptica. Em vez disso, o eixo de rotação gira em uma direção perpendicular ao eixo e ao torque, descrevendo um cone uma vez em aproximadamente 26.000 anos. Esse giro lento do eixo de rotação é chamado de **Precessão Luni-Solar**. Os outros corpos do Sistema Solar interagem entre si gravitacionalmente. Júpiter, por exemplo, atrairá a Terra, mudando o plano da Eclíptica. A esse efeito do deslocamento do plano da Eclíptica por ação de outros astros (geralmente os planetas) do Sistema Solar é chamado de **Precessão Planetária**. O efeito combinado da Precessão Luni-Solar e Planetária é chamado de **Precessão Geral**. Atualmente, o eixo de rotação aponta cerca de um grau para longe da estrela *Polar*, mas daqui a 12.000 anos, o polo celeste estará aproximadamente na direção da estrela *Vega* (BOCZKO, 1998).

Figura 54: *Precessão*

O equador celeste em dois momentos  $T_1$  e  $T_2$ , mostrando o deslocamento do ponto vernal,  $\Upsilon$  (origem dos sistemas equatorial e eclíptico de coordenadas) sobre a eclíptica.

PN significa polo norte celeste e PE polo norte da eclíptica.

- **Nutação:** A ação da Lua sobre o eixo de rotação da Terra ocasiona, também, um movimento de curto período que se sobrepõe à precessão, movimento esse com período de 18,6 anos e de amplitude máxima de aproximadamente  $9''$ . Esse movimento, descoberto por Bradley em 1725 ao estudar o movimento da estrela  $\gamma$  - Draconis é chamado de **Nutação** (FERNANDES; ZANARDI, 2018). As causas principais da nutação são as mesmas da precessão e estão relacionadas com os movimentos periódicos da Terra ao redor do Sol e da Lua ao redor da Terra, cujas órbitas não são circulares e o fato da Terra não ser perfeitamente esférica e homogênea (BOCZKO, 1998).

Figura 55: *Nutação*

O eixo de rotação da Terra oscila (em vermelho) em torno de sua posição média (trajetória da precessão, em verde escuro).

- **Paralaxe:** Se observamos um objeto de diferentes pontos, o vemos em diferentes direções. A diferença das direções observadas é chamada de **Paralaxe**. Como a quantidade de paralaxe depende da distância do observador ao objeto, podemos utilizar o paralaxe para medir distâncias. A visão estereoscópica humana é baseada (pelo menos até certo ponto) nesse efeito. Para fins astronômicos, precisamos de linhas de base muito mais longas do que a distância entre nossos olhos (cerca de 7 cm). Bases convenientemente grandes e convenientes são o raio da Terra e o raio de sua órbita. As distâncias próximas às estrelas podem ser determinadas a partir da paralaxe anual, que é o ângulo subtendido pelo raio da órbita da Terra (chamada de unidade astronômica, AU), vista da estrela.

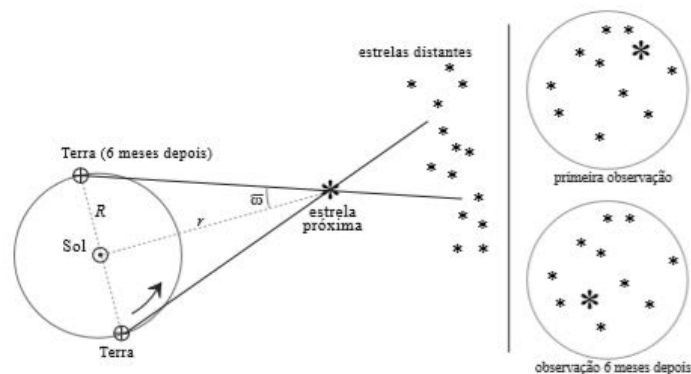
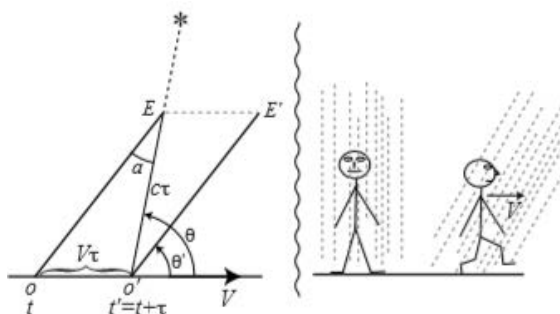


Figura 56: *Efeitos da Paralaxe na posição de estrelas mais próximas*

Observando-se uma estrela próxima com 6 meses de intervalo, a posição aparente desta se desloca em relação ao fundo de estrelas distantes. O ângulo  $\omega$  é a paralaxe da estrela,  $r$  é a distância da estrela e  $R$  a distância Terra-Sol.

- **Aberração:** Devido à velocidade finita da luz, um observador em movimento observa que os objetos se deslocam na direção de seu movimento. Essa mudança de direção aparente é chamada **Aberração**.

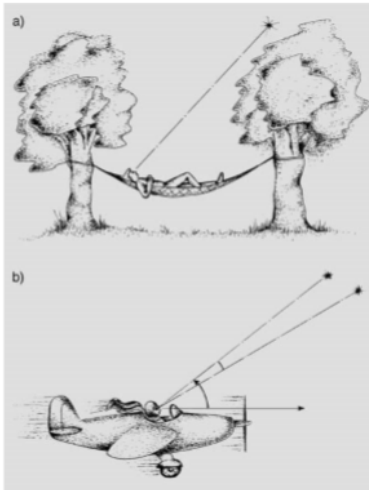


Esquerda: Aberração devida à velocidade  $V$  do observador.

A diferença  $\theta - \theta' = a$  é devida à aberração. Direita: Este efeito é análogo à mudança de direção aparente da chuva quando corremos ou ficamos parado.

Figura 57: *Aberração*





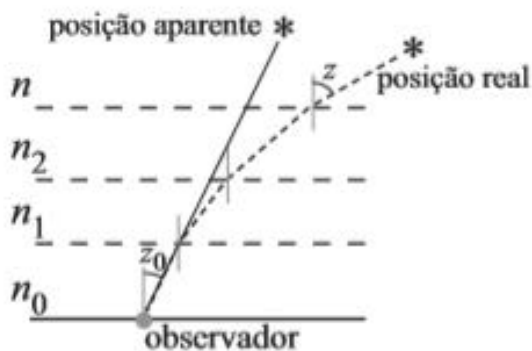
O efeito da distorção na direção diferente de um objeto.

a) Observador em repouso.

b) Observador em movimento.

Figura 58: *Os efeitos da distorção na direção diferente de um objeto*

- **Refração:** Como a luz é refratada pela atmosfera, a direção de um objeto difere da direção verdadeira, dependendo das condições atmosféricas ao longo da linha de visão. Como essa refração varia com a pressão e a temperatura atmosféricas, é muito difícil determinar com precisão. No entanto, uma aproximação suficientemente boa para a maioria dos propósitos práticos é facilmente derivada. Se o objeto não estiver muito longe do zênite, a atmosfera entre o objeto e o observador pode ser aproximada por camadas planas paralelas, cada uma das quais tem um índice de refração  $n_i$ . Fora da atmosfera, temos  $n = 1$ .



Refração atmosférica na aproximação de planos paralelos. Os índices de refração variam de  $n = 1$  (vácuo) a  $n_0$ , o índice à altitude do observador, igual a 1,00028 ao nível do mar, a  $0^\circ C$ , para a luz visível (centro do filtro  $V$ , igual a  $5500\text{rA}$ ).

Figura 59: *Refração atmosférica*

## 5.5 SISTEMA GLOBAL DE NAVEGAÇÃO POR SATÉLITES

O Sistema Global de Navegação por Satélite – ou GNSS, sigla em inglês para Global Navigation Satellite System – além da navegação, é utilizado para determinar a

posição de um objeto na Terra (coordenadas). Para tanto, são necessários no mínimo 04 satélites para se determinar as seguintes variáveis:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e tempo. A precisão dessa coordenada é definida de acordo com a técnica de posicionamento utilizada durante a coleta de dados. O GNSS é visto como uma evolução natural do já popular sistema de posicionamento americano, o GPS. Atualmente fazem parte do GNSS além do GPS, o sistema russo GLONASS, o europeu GALILEO e o chinês BEIDOU. Com vários sistemas de satélites, melhora-se a geometria das constelações e disponibilidade de sinal, garantindo assim uma maior integridade e confiança aos usuários do sistema.

- *Sistema GPS (Global Positioning System)*: Sistema americano de posicionamento, mais conhecido e utilizado ao redor do mundo, formado por uma constelação de 24 satélites (6 planos com 4 satélites cada). O GPS conta com dois tipos de serviço:
  - Standard Positioning Service (SPS): oferecido de maneira gratuita para usuários do mundo inteiro – e nível de confiança de 95%.
  - Precise Positioning Service (PPS): oferece resultados ainda mais precisos, porém seu uso é restrito a militares e usuários autorizados.

Quando falamos em tecnologia de GPS estamos concentrando a maioria do seu uso no modelo Standard Positioning Service, que também se divide em mais 3 segmentos:

- Segmento espacial: o sinal é transmitido por satélites, que apontam o posicionamento desejado;
  - Segmento de controle: funciona para a manutenção do sistema;
  - Segmento de usuários: concentra todas as aplicações desse tipo de sistema global de navegação por satélite e os seus respectivos receptores.
- *Sistema GLONASS*: O GLONASS é a abreviatura de Global'naya Navigatsion-nay Sputnikovaya Sistema (ou Sistema de Navegação Global por Satélite, simplesmente) foi inicialmente desenhado pela ex-URSS, em meados da década de 1970. São usados dois tipos de sinais de navegação:
    - Sinal de precisão padrão (SP – Standard Precision): oferecido a usuários da comunidade civil
    - Sinal de alta precisão (HP – High Precision): possui uso restrito. O sistema também é formado por 24 satélites, sendo 3 planos orbitais, cada um com 8 satélites, além dos 03 segmentos: espacial, controle e monitoramento e usuário.
  - *Sistema GALILEO*: O sistema GALILEO é um sistema global de navegação por satélite sob a chancela dos países europeus. A parte interessante desse tipo de

produto é que ele vai apresentar compatibilidade tanto com o GPS quanto com o GLONASS, oferecendo ambas as frequências como padrão. Ao total serão 30 satélites (3 planos orbitais com 10 satélites cada) disponibilizando um serviço preciso e ágil, todos eles a 23.616 km de altitude. O motivo para tanta estrutura espacial se explica facilmente: caso um satélite apresente problema, os usuários não sentirão os efeitos disso enquanto usam o seu sistema global de navegação por satélite. Outras características do sistema GALILEO:

- A integração com os outros sistemas traz mais amplitude de cobertura desse sistema global de navegação por satélite;
  - Vai dispor de ampla cobertura em latitudes mais elevadas;
  - Coloca a Europa como um grande player no segmento de navegação por satélite, acirrando a concorrência do mercado.
- *BEIDOU*: Compass ou Beidou-2 é o sistema chinês de posicionamento global por satélite. A China está implementando o seu próprio sistema global de navegação por satélites, similar ao GPS norte-americano e ao GLONASS russo; contará com 35 satélites: cinco geoestacionários e trinta em órbita média:
    - Cobertura: global
    - Situação: Operacional
    - Satélites em órbita: 33
    - Total de lançamentos: 57
    - Primeiro lançamento: 30 de outubro de 2000
    - Precisão: 3,6 m (público); 2,6 m (Ásia-Pacífico, publico); 10 cm (criptação)
    - Último lançamento: 16 de dezembro de 2019
  - *APLICAÇÕES*: Existe uma gama enorme de aplicações para o posicionamento via GNSS. Dentre elas, podemos citar:
    - Mapeamento/levantamento topográfico
    - Locação de obras
    - Georreferenciamento
    - Controle de frotas
    - Agricultura de precisão
    - Cadastro

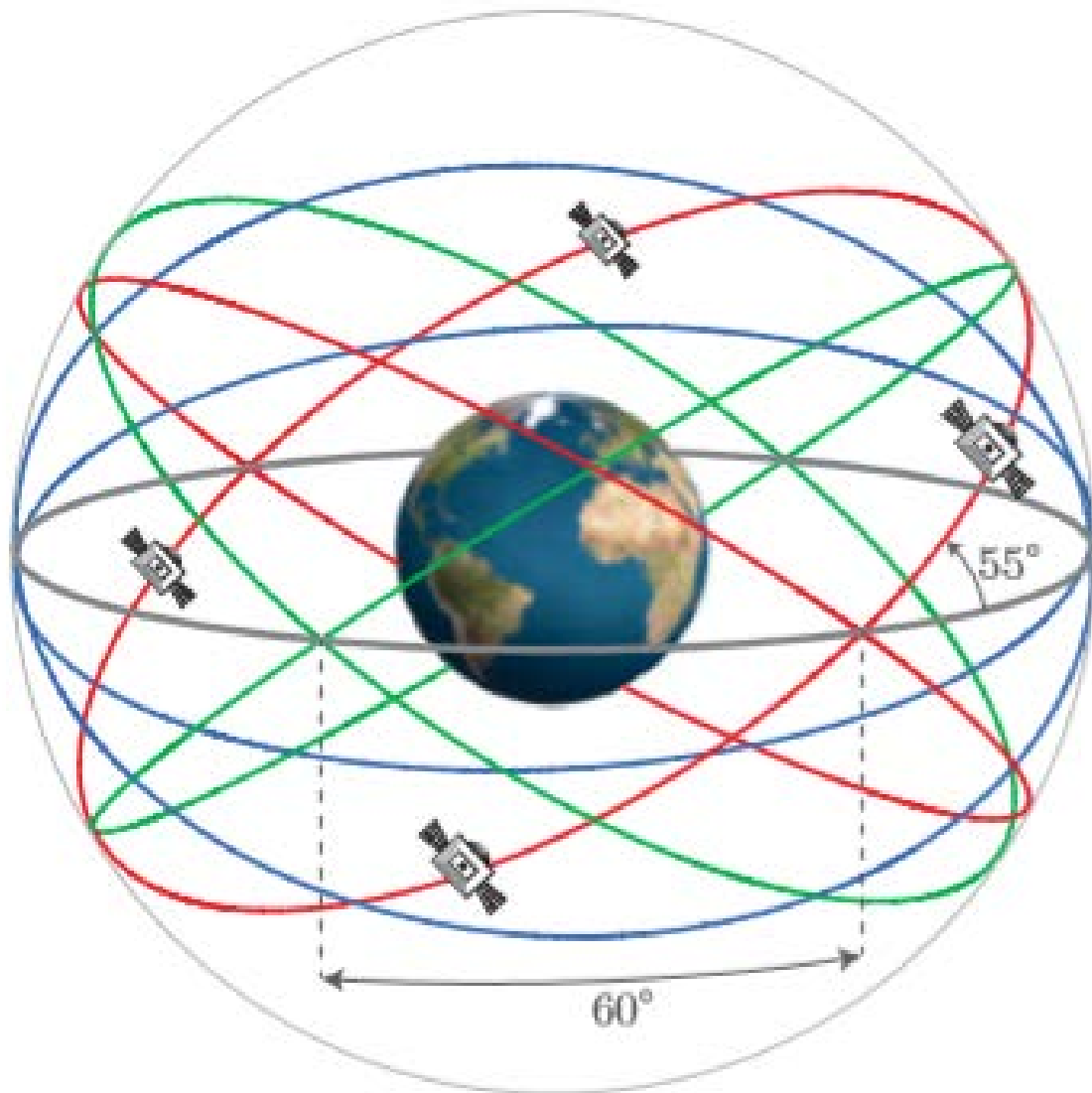


Figura 60: Representação esquemática das órbitas praticamente circular com 4 satélites GPS

## PROPOSTA DIDÁTICA

---

Na perspectiva assumida pelo Currículo Paulista em vigência, o ensino deve considerar a necessidade de vincular a escola e a vida, envolvendo todos os componentes curriculares. No Ensino Médio, os diferentes campos da Matemática são integrados de forma consistente. Para tanto, são definidos, nessa etapa, um conjunto de pares de ideias fundamentais que produzem articulações entre os vários campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas – e que são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático. Estes são os pares de ideias fundamentais adotados: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações (NACIONAIS, 1997).

[...]

**Movimento e posição** estão presentes na localização de números em retas, de figuras ou configurações no plano cartesiano e no espaço tridimensional; direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularidade, transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas) e padrões das distribuições de dados. O uso de mapas, GPS e de outros recursos implica a observação e estudo desse par de ideias.

[...]

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história.

Assim, as habilidades previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa.

Em articulação com as competências gerais da Educação Básica e com as da área de Matemática do Ensino Fundamental, no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas, tais como (BRASIL, 2016)

[...]

2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

[...]

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Desta forma, apresentamos uma proposta didática para, principalmente para alunos do terceiro ano do ensino médio, reconheçam que existe outros tipos de geometrias além da habitualmente trabalhada ao longo das séries do ensino fundamental e ensino médio.

A Geometria Esférica, que tem diversas aplicações na Astronomia e Geografia, é apresentada através de situações problemas, seguindo a linha de *Seymour Papert* (1928 - 2016), matemático e educador estadunidense nascido na África do Sul, pioneiro da inteligência artificial e criador da linguagem de programação LOGO, e na educação do termo construtivismo, técnica que permite ao educando construir seu próprio conhecimento por intermédio de alguma ferramenta, como por exemplo um computador.

## 6.1 ATIVIDADE 1

A seguir, apresentamos uma sequência didática com o objetivo de levar alunos do ensino médio a tomar contato com os elementos de uma superfície esférica de forma lúdica, desenvolvendo o raciocínio lógico através da observação e manipulação de materiais concretos, levando-os a compreender as transformações que podem ser realizadas nas mais diversas coordenadas.

### 6.1.1 1<sup>o</sup> Momento

A atividade se desenvolve como uma oficina em que o estudante, durante o tempo de 3 horas aula, tomará contato com material manipulável para construção de conceitos importantes da Geometria Esférica.

O aluno deverá fazer circunferências utilizando barbante sobre uma bola de isopor. O aluno será capaz de observar que esses círculos apresentam diversos tamanhos e aquele que apresentar a circunferência máxima, na Geometria Esférica, passa a ser considerado a reta. Pequenas circunferências não são consideradas retas.

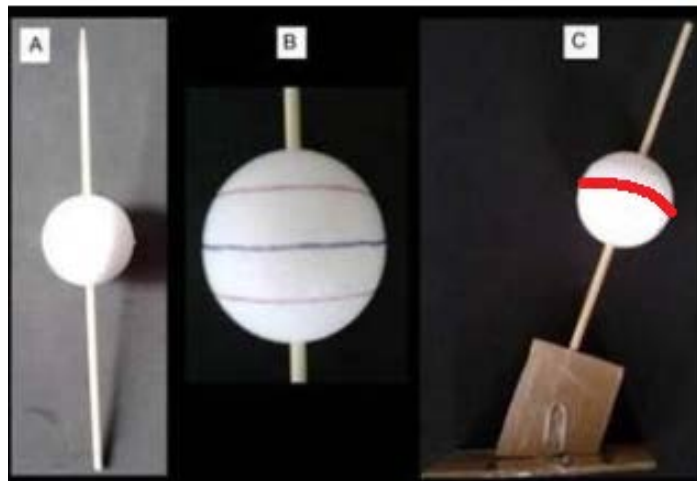


Figura 61: *Fazendo circunferências em isopor*

Em A) detalhe da bola de isopor, em B) representação de circunferências sobre o isopor com o uso de material concreto, em C), observação de uma circunferência máxima.

### 6.1.2 2º Momento

Os alunos devem escolher um ponto sobre a bola de isopor e traçar retas (circunferências máximas), passando por esse ponto. Refletir com os alunos para que descubram que naquele ponto passam infinitas retas (circunferências máximas), da mesma forma como ocorre na Geometria Euclidiana.



Figura 62: *Quantos retas passam por um ponto?*

6.1.3 3<sup>o</sup> Momento

Os alunos deverão traçar duas retas paralelas sobre o isopor, ou seja, duas circunferências máximas paralelas. Desta forma pode-se iniciar a discussão sobre o conceito de retas paralelas para que percebam que não há circunferências máximas paralelas.



Figura 63: *Duas retas paralelas?*

6.1.4 4<sup>o</sup> Momento

Apresentar aos alunos a definição de pontos antípodas e pedir que marquem na bola de isopor dois pontos antípodas. Refletir com os alunos que, se na Geometria Plana, dois pontos definem uma única reta, o que se pode afirmar com a Geometria Esférica.



Figura 64: *Pontos Antípodas*

6.1.5 5<sup>o</sup> Momento

Neste momento, os alunos estão prontos para medir ângulos na Esfera (bola de isopor). Propor a eles que com barbante façam duas circunferências máximas e com o auxílio de canudinhos ou palitos de madeira, representem as paralelas que passam pelo ponto onde há formação de ângulo e façam a medição com o auxílio de transferidor.





Figura 65: *Paralelas pelo ponto de formação do ângulo*



Figura 66: *Uso do transferidor para medir ângulos entre circunferências máximas*

#### 6.1.6 6<sup>o</sup> Momento

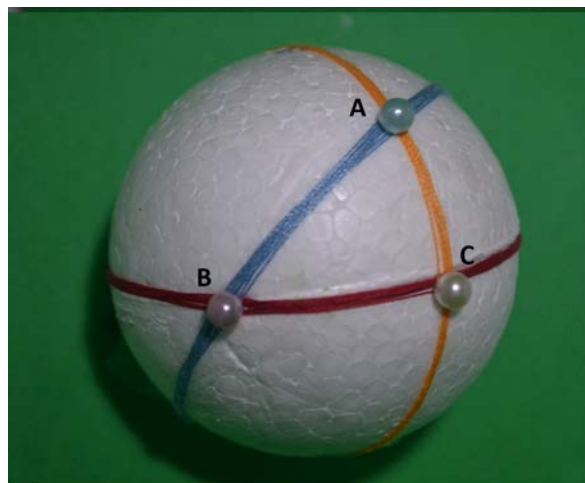
Agora que os alunos já sabem como determinar o ângulo entre duas circunferências máximas, vamos pensar como determinar em graus a distância entre dois pontos. Para isso oriente-os a marcar dois pontos sobre a bola de isopor, em primeiro momento dois pontos antípodas e em seguida tentar determinar dois pontos que tenham distância de  $90^\circ$ .

6.1.7 7<sup>o</sup> Momento

Explicar aos alunos o que é fuso esférico e lembrando como se determina a área da superfície esférica, pedir que determinem uma forma de encontrar a área desse fuso esférico, observando que é proporcional ao ângulo esférico do fuso.

Figura 67: *Fuso Esférico*6.1.8 8<sup>o</sup> Momento

Na bola de isopor, pedir aos alunos que escolham três pontos não alinhados, isto é, que não pertençam à mesma circunferência máxima, e que estejam no mesmo hemisfério. Como dois pontos determinam pelo menos uma circunferência máxima, pedir aos alunos que tracem três geodésicas (arcos de circunferência), nomeando esses três pontos de *A*, *B* e *C* e solicitar que façam a medição dos ângulos e verificando a soma desses três ângulos. Levá-los a fazer uma comparação como os ângulos de um triângulo de uma superfície plana.

Figura 68: *Triângulo Esférico*

6.1.9 9<sup>o</sup> Momento

Após realizados todos os momentos da atividade 1, definir junto com os alunos a esfera celeste e seus elementos, já preparando os alunos para uma nova atividade de criação na bola de isopor os sistemas de coordenadas horizontal, equatorial e horária.

## 6.2 ATIVIDADE 2

Representação em bolas de isopor dos sistemas de coordenadas: horizontal, equatorial e horário. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (NACIONAIS, 1997) também destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Contudo, Magina e Spinillo (MAGINA; SPINILLO, 2004) destacam que:

*o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão matemática.*

Durante o tempo de 2 horas aula, os alunos poderão através de manipulação de materiais de fácil acesso, realizar as representações dos Sistemas de Posições na bola de isopor, destacando os elementos principais, com o objetivo de possam assimilar os conceitos na prática com a utilização do material.

## 6.3 ATIVIDADE 3

Nesta atividade, com duração de 1 hora aula, podemos mostrar aos alunos a aplicação da Trigonometria Esférica na Astronomia. Não se espera que os alunos decorem as Leis dos Cossenos e Senos, mas que possam atribuir significado aos conteúdos que já têm conhecimento quando trabalharam com a Trigonometria no Triângulo Retângulo e na Circunferência Trigonométrica e sua relação com outras áreas do conhecimento. Apresentar aos alunos a figura a seguir e pedir que apliquem a Lei dos Cossenos (3.17) para Triângulos Esféricos.

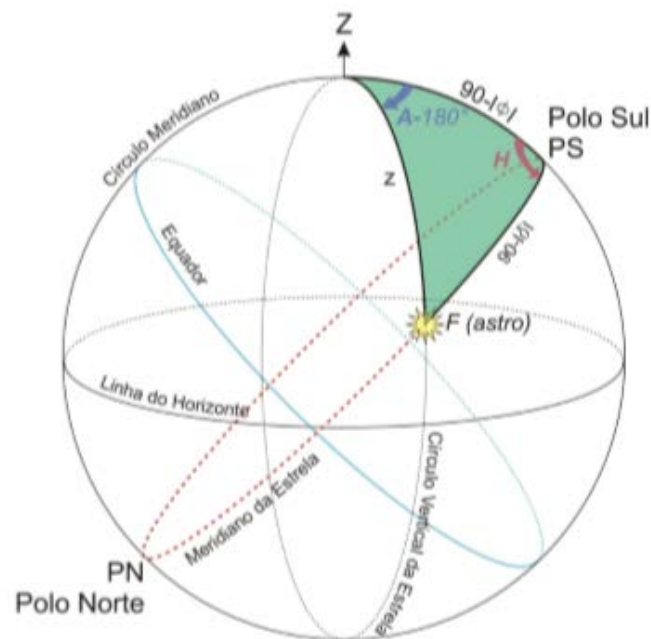


Figura 69: *Triângulo de Posição*

#### 6.4 ATIVIDADE 4

Para explorar a utilização das Leis do Cosseno Esférico (3.17), propomos a atividade a seguir para que os alunos tenham condições de localizar numa Esfera as cidades envolvidas e tracem a distância em que se encontram e assim realizar os cálculos necessários para determinação da distância entre elas.

As cidades a seguir estão situadas nas coordenadas (longitude, latitude) com valores aproximados para simplificar os cálculos. Considerando o raio da Terra de 6400 km e usando  $\pi = 3,14$ , determine a distância entre as cidades de Natal ( $35^\circ$  W,  $6^\circ$  S) e Campo Grande, MS ( $55^\circ$  W,  $20^\circ$  S). Orientar os alunos na identificação do triângulo esférico e seus elementos para que se possa escrever a relação entre os ângulos e assim determinar a distância pedida. Pode-se propor o seguinte roteiro para ajudar aos alunos na exploração da situação problema.

- Considere o triângulo esférico  $ABC$ , de modo que Natal/RN seja representado por  $A$ , Campo Grande/MS, por  $B$  e o Polo Sul, por  $C$ . O que se deseja é determinar o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ , o que nada mais é do que a distância entre as duas cidades, conforme figura a seguir:

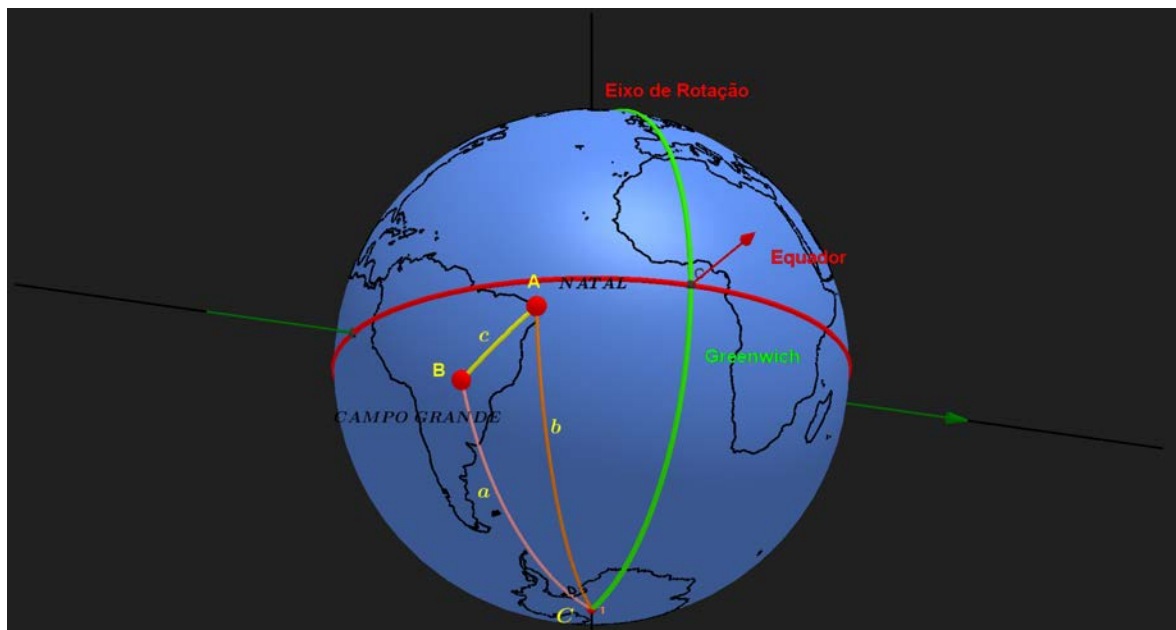


Figura 70: *Triângulo Esférico ABC*  
Aplicativo desenvolvido pelo autor em GEOGEBRA.

- Para resolver a questão, o aluno pode ser orientado a utilizar a Lei dos Cossenos para Triângulos Esféricos, pois os cálculos são simples, passível de utilizarem conceitos já trabalhados na Trigonometria Plana e pelo fato de não necessitarem de transformação do Sistema Geográfico para o Sistema Cartesiano.
- O ângulo  $\hat{C}$  pode ser calculado pela diferença (em módulo) das longitudes dos pontos  $A$  e  $B$ . Assim,

$$\hat{C} = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$$

- O lado  $b$  é um arco de meridiano determinado pelo ângulo  $A\hat{O}C$ , o qual pode ser determinado pela diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos  $A$  e  $C$ . Assim:

$$b = A\hat{O}C = 90^\circ - 6^\circ = 84^\circ$$

- O lado  $a$  é um arco de meridiano determinado pelo ângulo  $B\hat{O}C$  e é determinado pela diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos  $B$  e  $C$ . Temos:

$$a = B\hat{O}C = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

- Pode-se então utilizar a Lei dos Cossenos. Assim:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}$$

$$\cos c = \cos 70^\circ \cos 84^\circ + \sin 70^\circ \sin 84^\circ \cos 20^\circ$$

$$\cos c = 0,34202 \cdot 0,1045 + 0,9396 \cdot 0,9945 \cdot 0,9396$$

$$\cos c = 0,03574109 + 0,87799249512$$

$$\cos c = 0,914$$

$$c = \arccos 0,914$$

$$c = 23,94^\circ$$

- Para calcular a medida do lado  $c$ , fazemos:

$$c = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} = \frac{3,14 \cdot 6400 \cdot 23,94}{180} \approx 2.674,12 \text{ km}$$

- O valor calculado é bem compatível com o valor encontrado quando se utiliza um modelo construído em GEOGEBRA de cálculo da distância entre dois pontos situados na superfície da Terra, utilizando para isso suas coordenadas geográficas.

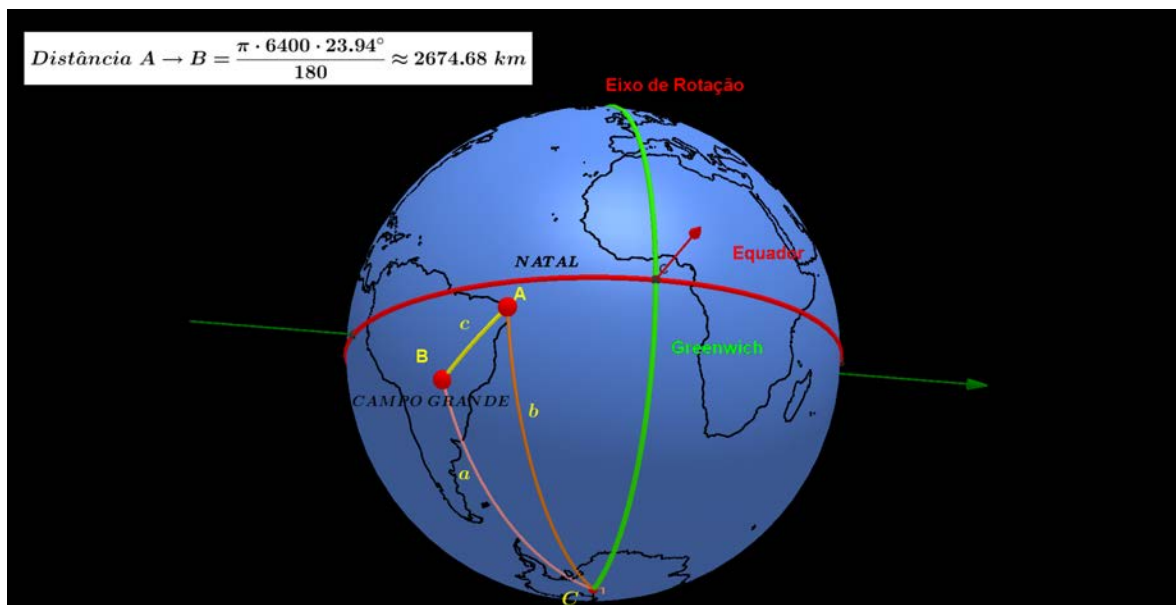


Figura 71: *Distância de Natal a Campo Grande usando GEOGEBRA*  
Aplicativo desenvolvido pelo autor em GEOGEBRA.

## CONCLUSÕES

---

O tema do presente trabalho surgiu já no final das aulas regulares do PROFMAT, após consulta a vários professores sobre temas para uma dissertação: Cálculo, Geometria Analítica, Funções, Geometria plana e por fim, em conversa com o professor Dr. Rodolpho Vilhena, a ideia de se trabalhar voltado para Geometria Esférica me motivou, pois já tenho desde a graduação um fascínio pelas funções trigonométricas e como isso pode ser aplicado no nosso dia a dia.

Nas atividades com alunos do ensino fundamental e ensino médio, os conteúdos que abordam o uso da Trigonometria me possibilitam desenvolver todas as habilidades que meus alunos necessitam, pois é um campo em que o aluno pode desenvolver todo seu pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificação da relação entre grandezas e formas de comunicar cada fato em diferentes escritas algébricas, além de resolver situações problemas por meio de equações e inequações.

Também é importante a visão da Trigonometria para desenvolvimento do pensamento geométrico, no tocante que desenvolve no aluno a habilidade de interpretar e representar localização e deslocamento de figuras no plano cartesiano e na circunferência trigonométrica, identificando transformações, no qual o aluno é desafiado a formular e resolver problemas em contextos diversos.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) propõe aos estudantes a utilização de tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, estimulando o desenvolvimento do pensamento computacional. A Geometria Esférica dá essa possibilidade, pois existem uma gama de aplicativos voltados para construções geométricas como Geogebra, iGeom, Geotouch, Euclidean, Cabri-Geometry, Cinderella, Geoplan, Régua e Compasso, Shapari.

O trabalho realizado, com início logo após término das aulas regulares do PROFMAT, concentraram-se em pesquisa a livros de divulgação científica, artigos científicos e leituras de diversas dissertações disponibilizadas no site do PROFMAT, que possibilitaram uma ampliação em meu campo de visão sobre o que o tema escolhido tem de colaboração com minhas atividades diárias como professor da Secretaria do Estado da Educação de São Paulo.

Em consulta a livros didáticos utilizados nas escolas públicas e privadas, pude constatar que não há uma abordagem tão intensa sobre a Geometria Esférica, bem como a Geometria de Posição tão utilizada na Astronomia e que foi meu alvo de estudo, alimentado pelas excelentes explanações sobre o conteúdo, que agora apresento, pelo meu orientador, a quem faço meus agradecimentos a sua dedicação e entusiasmos contagiantes.

O trabalho iniciou com pesquisa sobre a História da Trigonometria relatando os principais fatos de forma concisa e de fácil leitura e interpretação, com dados sobre as principais descobertas e aqueles que se debruçaram sobre os temas e nos deixaram uma rica quantidade de fatos e descobertas.

A seguir, passamos a definir a Trigonometria Esférica e nesse momento nos passou a ideia de que algo novo pudesse surgir sobre o tema, algo inédito, mas com o decorrer dos estudos e leituras observamos apenas que várias são as formas com que o tema veio se desenvolvendo e aprimorando com os diversos autores e estudiosos do assunto.

A diversidade de caminhos para abordagem do tema e a amplitude de assuntos que a partir dele podem surgir, nos colocou em determinação a linha de pensamento que abordamos. Focamos o estudo em colocar uma sequência de fatos que bem definissem o que é a Trigonometria Esférica e daí concentramos nossos estudos para a Esfera Celeste.

Com as dificuldades de conciliar o tempo destinado às pesquisas, leituras e estudos, divididos com minha atividade profissional, já que com a implantação da nova Base Nacional Curricular Comum (BNCC), ocorrendo bem na definição do tema da minha dissertação, concentrei-me em além de elaborar o presente trabalho, também realizar adaptações no currículo da disciplina que leciono na Rede Estadual de São Paulo.

Aliado a isso, problemas particulares nos afastaram por vezes de um estudo mais aprofundado sobre o tema. Mas isso foi importante também para que as ideias fossem surgindo e a direção a que deveria tomar fosse ficando cada dia mais claro e aquela dúvida inicial de buscar algo inédito fosse substituída por um sentimento de que o novo não surgiria apenas com as leituras e estudos que fiz, mas demandaria muito mais dedicação e investimento e definição mais precisas de meu propósito.

A partir daí concentrei-me em realizar um trabalho que, verificado que há poucos temas em nossa literatura com abordagem semelhante, mostra uma sequência daquilo que acredito ser importante e de fácil acompanhamento por quem tem alguma bagagem ou até nenhuma, e bastante curiosidade sobre Astronomia.



A abordagem dos vários Sistemas de Coordenadas para caracterização de um objeto celeste em muito contribui para os estudos de matrizes e transformações de coordenadas, que tem seu início de estudo na 2ª série do Ensino Médio, porém muitas vezes sem um significado para os alunos de onde se utilizar tais conceitos.

As maiores dificuldades foram apresentadas nas construções das figuras que acompanham a dissertação, pois mesmo tendo um conhecimento razoável sobre o GEOGEBRA, muitas das ferramentas que o programa me oferecia, tive que aprender ou até criar uma sequência de construções, para ai sim, ter algo inédito e que pudesse ter uma biblioteca de aplicativos destinados a aplicar com os alunos, de fácil entendimento e possível de utilização na várias plataformas: sala de informática nas escolas, celulares, tablets e até mesmo repassados em programas de apresentações como data show.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir como fonte de consulta para docentes e alunos em muitas áreas, pois utilizamos ferramentas diversas, desde cálculo com variáveis, estudo de vetores, Geometria Analítica, elementos da Trigonometria, demonstrações, além de explorar a geometria tanto plana quanto espacial, já que podemos utilizar dos vários aplicativos que temos a nossa disposição para as mais diversas construções e criação de novas ferramentas de exploração a serem utilizadas em sala de aula e que de uma forma ou de outra recordam muitos temas importantes da Matemática.

## APÊNDICES

---

A seguir, realizamos um estudo sobre **Vetores no Plano** e **Vetores no Espaço**, apresentando suas propriedades e operações, em especial a **identidade de Lagrange**, que nos possibilitou apresentar a dedução da **Lei dos Cossenos** para Triângulos Esféricos (3.17).(DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017) Também fazemos uma abordagem sobre alguns conceitos da **Geometria Espacial** com enfoque nos **Sólidos de Revolução**, definindo a **Área** e o **Volume** da **Esfera** e seus elementos mais importantes.(NETO, 2013)

### A.1 VETORES NO PLANO

**Definição A.1** (Segmentos Equipolentes). *Seja  $AB$  um segmento orientado de origem em  $A$  e extremidade  $B$  e  $CD$  um segmento orientado de origem em  $C$  e extremidade  $D$ . Dizemos que os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são **equipolentes**, e escrevemos  $AB \equiv CD$ , quando satisfazem às seguintes três propriedades:*

- (a) têm o mesmo comprimento;
- (b) são paralelos ou colineares;
- (c) têm o mesmo sentido;

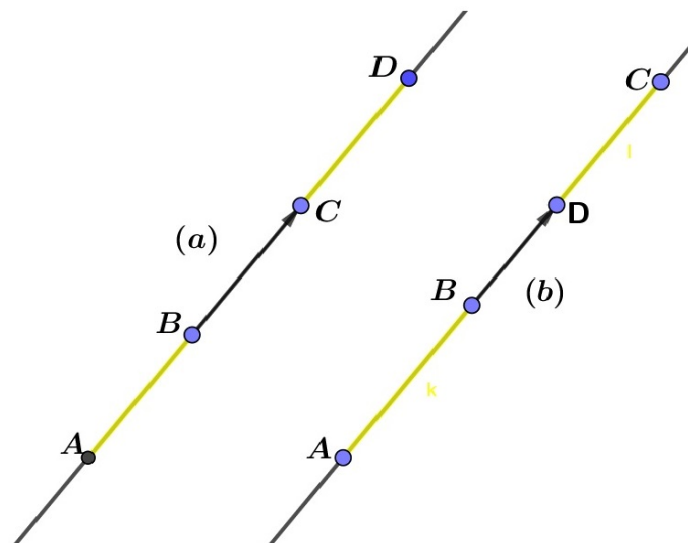


Figura 72: Segmentos colineares  $AB$  e  $CD$   
 (a) mesmo sentido (b) sentidos opostos

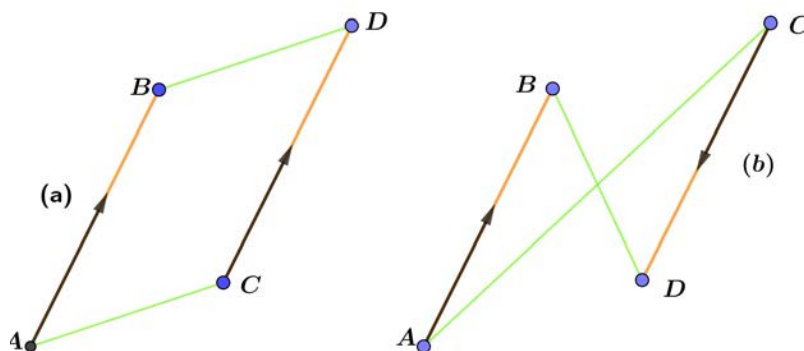


Figura 73: *Segmentos Equipolentes*

(a)  $AB \equiv CD$  (b)  $AB \neq CD$

**Definição A.2** (Vetores no Plano). *Sejam  $A$  e  $B$  pontos no plano. O **vetor**  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a  $AB$ . Cada segmento equipolente a  $AB$  é um **representante** do vetor  $\overrightarrow{AB}$ .*

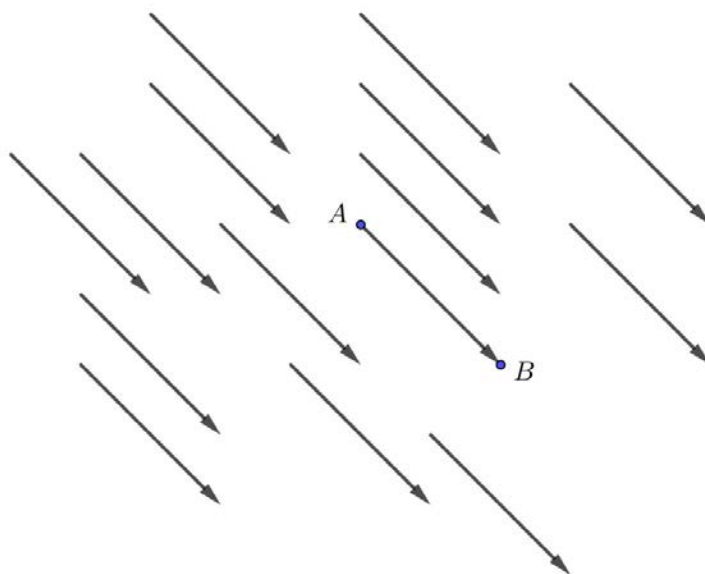


Figura 74: *Representantes do vetor*

**Observação A.3.** *Os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes se e somente se representam o mesmo vetor. Isto é,  $AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .*

**Observação A.4.** *Dado um ponto  $A$  do plano, o vetor  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$  é o **vetor nulo**.*

**Observação A.5.** *Dado um vetor  $\vec{v}$  e um ponto qualquer  $C$ , existe um único ponto  $D$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ . Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor  $\vec{v}$ .*

**Definição A.6.** Dados os pontos  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$ , os números  $b_1 - a_1$  e  $b_2 - a_2$  são as **coordenadas do vetor**  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , e escrevemos  $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

**Proposição A.7.** Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais do plano. Para todo vetor  $\vec{v}$  existe um único ponto  $P$  tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ . Além disso, as coordenadas do ponto  $P$  coincidem com as coordenadas do vetor  $\vec{v}$ .

### A.1.1 Operações com Vetores

**Definição A.8.** A **adição de vetores** é a operação que a cada par de vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  associa o vetor  $\overrightarrow{AC}$ , designado por  $\vec{u} + \vec{v}$  e chamado **soma dos vetores**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

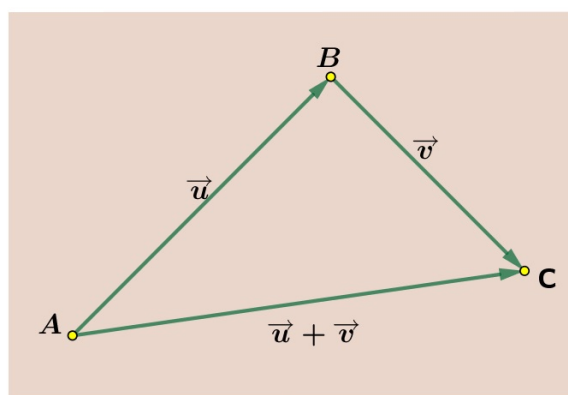


Figura 75: Adição de Vetores

**Observação A.9.** Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  vetores no plano,  $P$  um ponto escolhido do plano e  $Q$  e  $R$  os pontos tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ . Se os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não são colineares, então o vetor soma  $\vec{u} + \vec{v}$  é  $\overrightarrow{PS}$ , em que  $PS$  é a diagonal, com origem no vértice  $P$ , do paralelogramo  $PQSR$  de lados adjacentes  $PQ$  e  $PR$ .

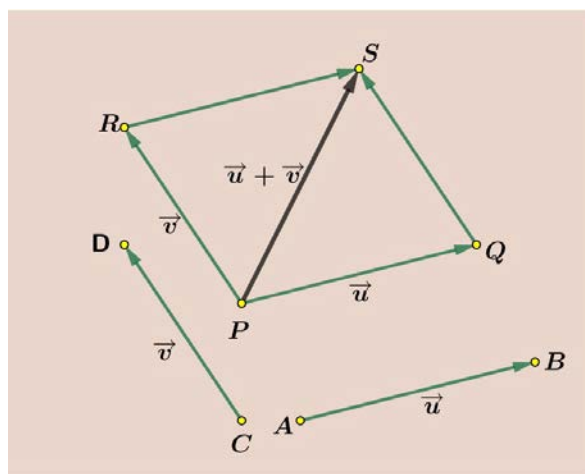


Figura 76: Soma de Vetores

**Proposição A.10.** Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  vetores do plano expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$ . Então,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

*Demonstração.* Sejam os pontos  $P = (u_1, u_2)$  e  $Q = (v_1, v_2)$  tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ , e seja  $S = (w_1, w_2)$  o ponto tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$

Então,

$$(v_1 - 0, v_2 - 0) = (w_1 - u_1, w_2 - u_2)$$

Logo,

$$S = (w_1, w_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

Portanto,

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

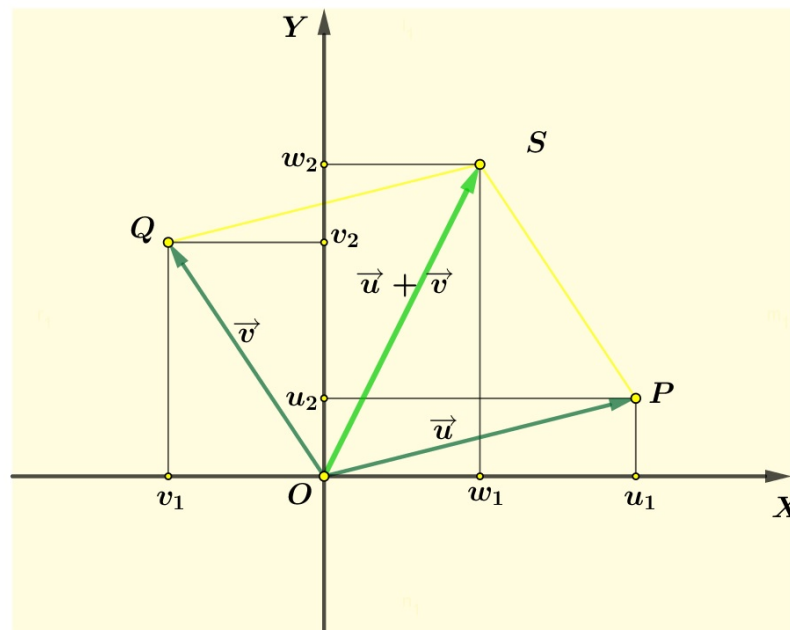


Figura 77: Adição de vetores em coordenadas

□

**Definição A.11.** O produto de  $\lambda \in \mathbb{R}$  por  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  é o vetor  $\lambda\vec{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$ , representado pelo segmento orientado  $AC$ , tal que:

- (a)  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares;
- (b)  $d(A, C) = |\lambda|d(A, B)$ ;
- (c)  $C = A$  se  $\lambda = 0$ ;

(d) os segmentos  $AC$  e  $AB$  têm igual sentido se  $\lambda > 0$ , e sentidos opostos se  $\lambda < 0$ .

Essa operação de **multiplicação de um vetor por um número real** também é chamada de **produto do escalar  $\lambda$  pelo vetor  $\vec{v}$** .

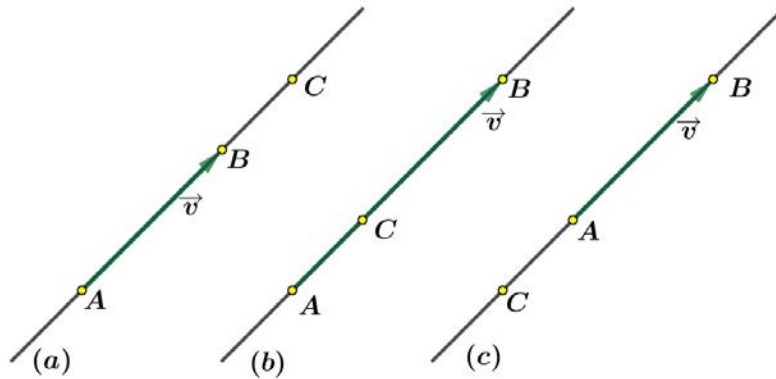


Figura 78: *Produto do Escalar*

(a)  $\lambda > 1$ ; (b)  $0 < \lambda < 1$ ; (c)  $\lambda < 0$

### A.1.2 Propriedades das Operações com Vetores

A adição de vetores e a multiplicação de escalares por vetores satisfazem propriedades similares às propriedades aritméticas das operações numéricas, o que permite converter problemas geométricos em problemas algébricos.

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do plano. Valem as seguintes propriedades:

- **comutatividade:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ;
- **associatividade:**  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ ;
- **existência do elemento neutro aditivo:** o **vetor zero**  $\vec{0}$  ou **vetor nulo** é tal que  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}$ ;
- **existência do inverso aditivo:** para cada vetor  $\vec{u}$  existe um único vetor, o **inverso** ou **simétrico aditivo** de  $\vec{u}$ , denotado por  $-\vec{u}$ , tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .

### A.1.3 Combinação Linear de Vetores

Um **múltiplo do vetor  $\vec{v}$**  é um vetor da forma  $\lambda \vec{v}$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Uma **Combinação Linear** dos vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$  é uma expressão da forma  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$ , em que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

## A.1.4 Produto Interno ou Produto Escalar

**Definição A.12.** A **norma** ou **comprimento** de um vetor  $\vec{v}$  é o número denotado por  $\|\vec{v}\|$  dado pelo comprimento de um segmento representante de  $\vec{v}$ .

**Observação A.13.** Dados os pontos  $A, B, C, D$  e o vetor  $\vec{v}$ , temos que:

- (a) A norma de um vetor independe da escolha de segmento representante. Se  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , então  $AB \equiv CD$ . Portanto,

$$d(A, B) = d(C, D) = \|\vec{v}\|.$$

- (b) Se  $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

- (c) Se  $\vec{v} = (x, y)$  e  $P = (x, y)$  é o ponto tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , então

$$\|\vec{v}\| = d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- (d) Temos  $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ . Além disso,  $\vec{v} \neq \vec{0} \iff \|\vec{v}\| > 0$ .

- (e) Se  $\vec{v}$  é um vetor e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$ .

- (f) Um vetor é chamado **unitário** se sua norma é igual a 1.

- (g) Se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , o vetor  $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  é um vetor unitário, chamado **normalizado** do vetor  $\vec{v}$ , com a mesma direção e o mesmo sentido do vetor  $\vec{v}$ .

- (h) Se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , o vetor  $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  é também unitário com a mesma direção do vetor  $\vec{v}$ , mas tem sentido oposto.

**Definição A.14.** O **ângulo** entre os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é o menor ângulo entre os segmentos representante  $AB$  e  $AC$  de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Designamos  $\angle(\vec{u}, \vec{v})$  a medida do ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

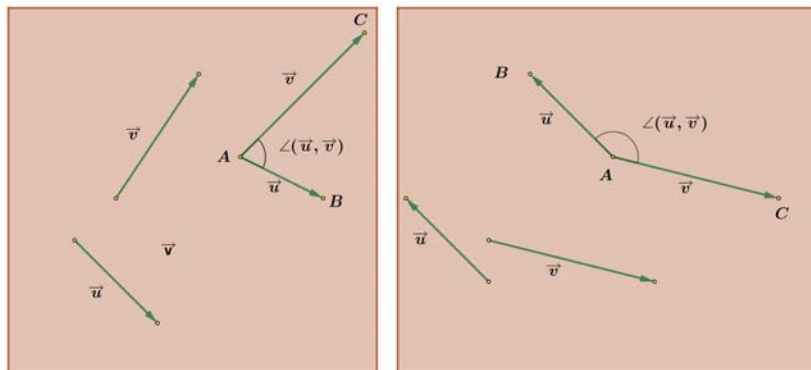


Figura 79: Ângulo entre dois vetores

**Definição A.15.** O **produto interno** ou **produto escalar** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do plano é o número real denotado por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  e dado por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta, & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \text{ e } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}). \end{cases}$$

**Observação A.16.** São válidas as seguintes observações sobre o produto interno:

(A) O produto interno ou produto escalar é comutativo, isto é:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

(B) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  temos que:

$$\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$$

Logo,

$$\left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| \cos \theta = \cos \theta \implies \theta = \arccos \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle$$

O produto interno ou produto escalar mede essencialmente o ângulo entre dois vetores no plano.

(C) O produto interno ou produto escalar de um vetor com ele mesmo é não negativo. Com efeito, sendo  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ ,

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\vec{u}\|^2 \geq 0.$$

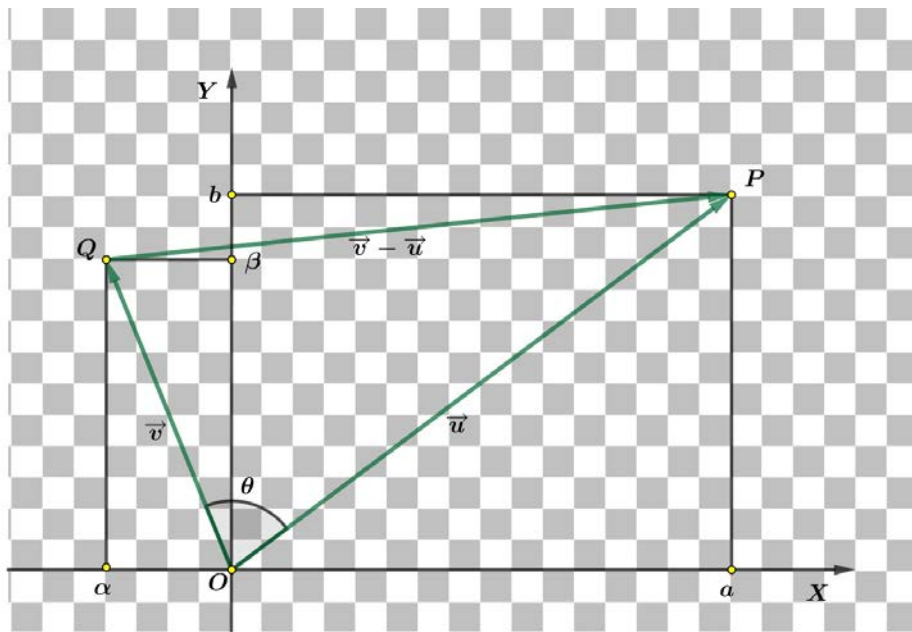
**Proposição A.17.** Sejam  $\vec{u} = (a, b)$  e  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$  dois vetores do plano. Então,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a\alpha + b\beta \tag{30}$$

*Demonstração.* Se um dos vetores  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é nulo, temos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e, também,  $a\alpha + b\beta = 0$ . Logo, a identidade (30) é satisfeita. Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$  vetores não nulos, com  $P = (a, b)$  e  $Q = (\alpha, \beta)$ . Então,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (\alpha - a, \beta - b)$$



Figura 80: *Diferença entre vetores*

Supondo que  $O$ ,  $P$  e  $Q$  não são colineares e aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo  $OPQ$ , obtemos:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

em que  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ . Daí:

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - [(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2] \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 + \beta^2 - 2\beta b + b^2) \\ &= a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha a - a^2 - \beta^2 + 2\beta b = b^2 \\ &= 2\alpha a + 2\beta b = 2(\alpha a + \beta b). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = a\alpha + b\beta.$$

No caso em que  $O$ ,  $P$  e  $Q$  são colineares, temos que existe um número real  $\lambda \neq 0$  tal que  $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OQ} = \lambda\vec{v}$ . Então,  $a = \lambda\alpha$ ,  $b = \lambda\beta$  e

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\lambda\vec{v}\|\|\vec{v}\|\cos\angle(\lambda\vec{v}, \vec{v}) = |\lambda|\|\vec{v}\|^2\cos\angle(\lambda\vec{v}, \vec{v}).$$

Como  $\cos\angle(\lambda\vec{v}, \vec{v}) = 1$  se  $\lambda > 0$  e  $\cos\angle(\lambda\vec{v}, \vec{v}) = -1$  se  $\lambda < 0$ , segue que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda\|\vec{v}\|^2$ . Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = (\lambda\alpha)\alpha + (\lambda\beta)\beta = a\alpha + b\beta.$$

□

**Proposição A.18.** *Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores arbitrários do plano e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então:*

$$(a) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0;$$

$$(b) \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0};$$

$$(c) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle;$$

$$(d) \langle \lambda \vec{u}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle;$$

$$(e) \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle;$$

$$(f) \langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle;$$

$$(g) \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle.$$

## A.2 VETORES NO ESPAÇO

A noção de **Vetores no Espaço** é definida da mesma forma que no plano, continuando válidas as principais propriedades, salvo alguns acréscimos.

**Definição A.19.** *Os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  no espaço são **equipolentes**, e escrevemos  $AB \equiv CD$ , quando satisfazem às seguintes condições:*

- $AB$  e  $CD$  têm igual comprimento:  $|AB| = d(A, B) = d(C, D) = |C, D|$ ;
- $AB$  e  $CD$  estão contidos em retas paralelas ou na mesma reta;
- $AB$  e  $CD$  têm o mesmo sentido.

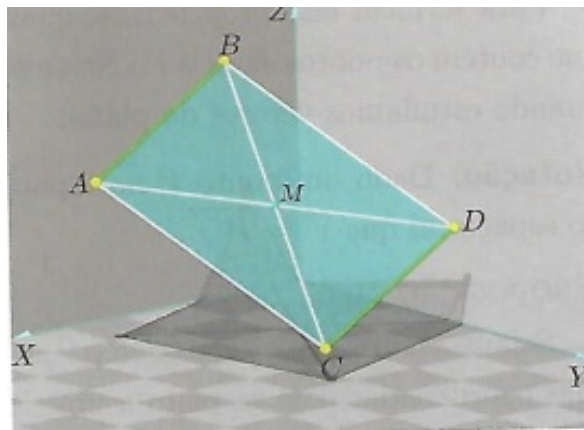


Figura 81: Paralelogramo  $ABCD$ :  $AB \equiv CD$

A relação de equipolência entre segmentos do espaço é uma **relação de equivalência**, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Reflexividade:** Todo segmento é equipolente a si próprio:  $AB \equiv AB$ .
2. **Simetria:** Se  $AB \equiv CD$ , então  $CD \equiv AB$ .
3. **Transitividade:** Se  $AB \equiv CD$  e  $CD \equiv EF$ , então  $AB \equiv EF$ .

Podemos, então, dividir o conjunto dos segmentos orientados do espaço em subconjuntos chamados **classes de equivalência pela relação de equipolência** ou simplesmente, **classe de equipolência**. Cada classe de equipolência é denominada um **vetor no espaço**. Usando a mesma denotação para vetores no plano, temos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \{CD \mid AB \equiv CD\}$$

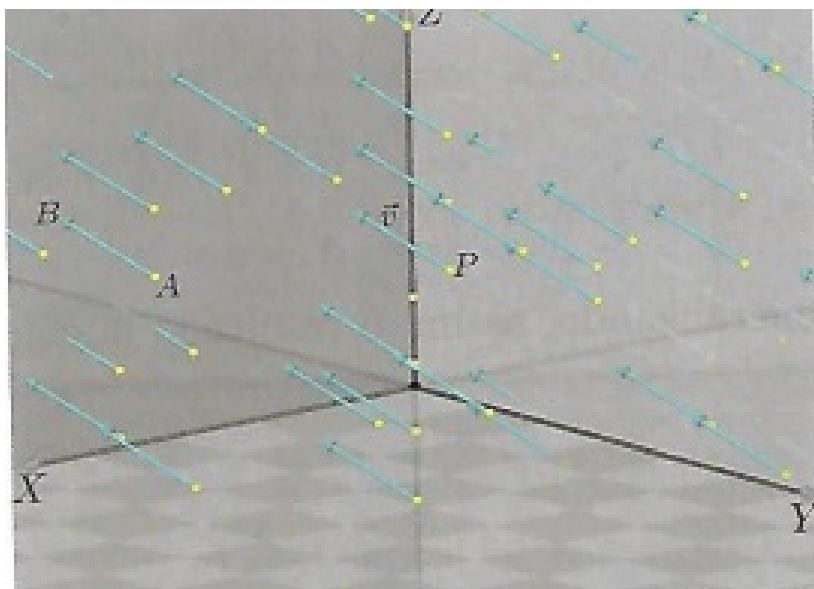


Figura 82: Segmentos equipolentes ao segmento  $AB$

**Observação A.20.** Note que:

- $AB \equiv CD \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- O vetor representado por um segmento cuja origem é igual à extremidade é chamado **vetor nulo** ou **vetor zero**:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$$

**Proposição A.21.** *Sejam  $A = (a, b, c)$ ,  $B = (a', b', c')$ ,  $C = (x, y, z)$  e  $D = (x', y', z')$  pontos no espaço dados por suas coordenadas com respeito a um sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$ . Então,  $AB \equiv CD$  se e somente se*

$$a' - a = x' - x, \quad b' - b = y' - y \quad \text{e} \quad c' - c = z' - z$$

**Definição A.22.** *Sejam  $A = (a, b, c)$  e  $B = (a', b', c')$  pontos do espaço. Os números reais  $a' - a$ ,  $b' - b$  e  $c' - c$  são as **coordenadas** do vetor  $\overrightarrow{AB}$  no sistema de eixos ortogonais  $OXYZ$ . Escrevemos:*

$$\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c).$$

*Em particular, se  $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma) = \overrightarrow{OP}$ , então  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ . O vetor  $\overrightarrow{OP}$  é o **representante na origem** do vetor  $\vec{v}$ .*

### A.2.1 Operações com Vetores no Espaço

O processo de definição das operações de adição de vetores no espaço e multiplicação de um número por um vetor no espaço é análogo ao efetuado para definir essas operações para vetores no plano e suas propriedades são praticamente as mesmas.

**Definição A.23** (Adição de vetores no espaço). *Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores do espaço  $\mathcal{E}$ . Seja  $A$  um ponto qualquer do espaço e sejam  $AB$  e  $BC$  segmentos orientados representantes dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. O **vetor soma** dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , que designamos por  $\vec{u} + \vec{v}$ , é o vetor representado pelo segmento orientado  $AC$ .*

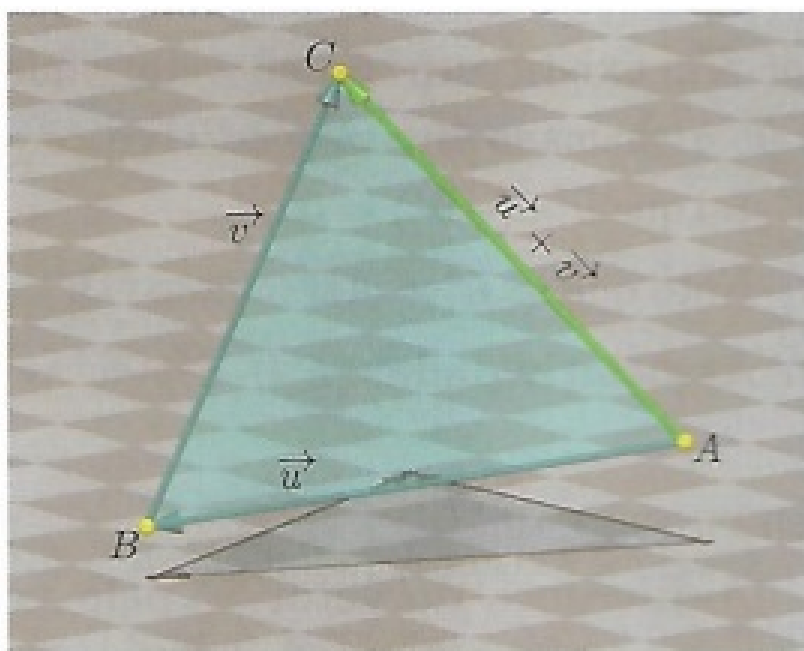


Figura 83: Soma de Vetores no Espaço

Na prática, a adição de vetores é efetuada em relação às coordenadas dos vetores parcelas em um sistema de eixos ortogonais fixado. Seja  $OXYZ$  um sistema de eixos ortogonais e os vetores  $\vec{u} = (a, b, c)$  e  $\vec{v} = (a', b', c')$ . Então, o vetor soma  $\vec{u} + \vec{v}$  é dado em termos de coordenadas como:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c').$$

**Observação A.24.** As propriedades da adição de vetores no espaço, sendo esses vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , são:

1. **Comutatividade:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ ;
2. **Existência de elemento neutro:** O vetor zero é o único vetor tal que  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$  qualquer que seja o vetor  $\vec{u}$ .
3. **Existência de inverso aditivo:** Dado um vetor  $\vec{u}$ , existe um único vetor, designado por  $-\vec{u}$  e chamado **inverso aditivo ou simétrico** de  $\vec{u}$ , tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .
4. **Associatividade:**  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .

**Definição A.25** (Multiplicação de um número real por um vetor no espaço). Sejam  $\vec{AB}$  um vetor do espaço e  $\lambda$  um número real. O produto de  $\lambda$  por  $\vec{AB}$  é o vetor  $\vec{AB}' = \lambda\vec{AB}$  tal que:

- $A$ ,  $B$  e  $B'$  são colineares;
- $|AB'| = d(A, B') = |\lambda|d(A, B) = |\lambda||AB|$ ;
- Os segmentos  $AB$  e  $AB'$  têm o mesmo sentido se  $\lambda > 0$  e sentidos opostos se  $\lambda < 0$ .

**Observação A.26.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do espaço e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . A multiplicação de um escalar por um vetor satisfaz às seguintes propriedades:

1. **Associatividade:**  $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
2. **Distributividade:** 
$$\begin{cases} \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \\ (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \end{cases}$$
3. **Elemento neutro multiplicativo:**  $1\vec{u} = \vec{u}$ .

### A.2.2 Produto Interno ou Produto Escalar

**Definição A.27.** O **Produto Interno** ou **Produto Escalar** entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço é o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta & , \text{ se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ em que } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

Como o ângulo que um vetor  $\vec{u} \neq \vec{0}$  faz com ele mesmo é igual a zero, segue que:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$$

Para qualquer vetor  $\vec{u}$  do espaço. Esse número é sempre não negativo e é igual a zero se e somente se  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**Proposição A.28.** Se  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$  e  $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$  são vetores do espaço, então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

**Proposição A.29.** O Produto Interno ou Produto Escalar de vetores no espaço satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ;
2.  $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ;
3.  $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ;
4.  $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ ;
5. (g)  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ .

Para quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  do espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição A.30.** O vetor  $\vec{u}$  é **perpendicular ou ortogonal** ao vetor  $\vec{v}$ , e escrevemos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , quando um dos vetores é o vetor nulo ou quando o ângulo eles é reto. Da definição de produto interno ou produto escalar, temos que:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

### A.2.3 Produto Vetorial

**Definição A.31.** Seja  $OXYZ$  um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideremos os vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ . O **Produto Vetorial** de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  é o vetor, denotado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , tal que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

Um dispositivo prático para determinar o produto vetorial consiste em calcular o "determinante simbólico" da matriz  $3 \times 3$  cujos elementos da primeira linha são os vetores  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , os elementos da segunda linha são as coordenadas do vetor  $\vec{u}$  e os da terceira são as coordenadas do vetor  $\vec{v}$ :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

**Proposição A.32. Propriedades do Produto Vetorial:** Para todos  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , valem as seguintes propriedades:

- (1)  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ , isto é,  $\vec{u} \times \vec{v}$  é um vetor ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ;
- (2)  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  se e só se um dos vetores  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é múltiplo do outro. Ou seja,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são múltiplos se e só se  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ ;
- (3)  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ , onde  $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ ;
- (4) Se  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$  são **linearmente independentes**, ou seja, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$  não são combinações lineares uns dos outros;
- (5)  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ ;
- (6)  $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ ;
- (7)  $(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}$  e  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ ;
- (8)  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , onde

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

é a matriz  $3 \times 3$  cujas linhas são as coordenadas dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , na ordem em que são listados.

- (9)  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$  se e somente se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores **linearmente dependentes**, isto é, se os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são combinações lineares uns dos outros. Assim,  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$  se e somente se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores **linearmente independentes**.

#### A.2.4 Identidade de Lagrange

**Definição A.33.** Se  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  e  $\vec{D}$  são quatro vetores, o produto  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D})$ ,  $(\vec{A} \times \vec{D}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ , etc. são chamados de **produtos escalares de quatro vetores**.

**Teorema A.34.** Dados os vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  e  $\vec{D}$ , vale a identidade:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

*Demonstração.* Fazendo  $(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{P}$ , temos que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{P} \cdot (\vec{C} \times \vec{D})$$

No produto misto, a posição dos produtos escalar e vetoriais podem ser trocados sem alteração do valor do produto. Portanto

$$\vec{P} \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{P} \times \vec{C}) \cdot \vec{D}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= [(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}] \cdot \vec{D} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= [(\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}] \cdot \vec{D} \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{C} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{C} \cdot \vec{B})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \end{aligned}$$

□

Esta relação é conhecida como **Identidade de Lagrange**. (ROCHA, 2017)

### A.3 SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Sejam  $a < b$  números reais dados e  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva e diferenciável, com derivada  $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Fixando, em um plano do espaço, um Sistema Cartesiano com eixo das abscissas  $\epsilon$ , e seja  $\mathfrak{G}$  o gráfico de  $f$ . A **superfície de revolução** de eixo  $\epsilon$  e geratriz  $\mathfrak{G}$  é o conjunto  $S(\epsilon, \mathfrak{G})$  dos pontos do espaço, obtidos pela *rotação* de  $\mathfrak{G}$  em torno de  $\epsilon$ , de tal forma que, para  $x \in (a, b)$ , o ponto  $(x, f(x)) \in \mathfrak{G}$  descreve o círculo de raio  $f(x)$ , centrado no ponto de  $\epsilon$  com abscissa  $x$  e contido no plano que passa por  $x$  e é perpendicular a  $\epsilon$ .

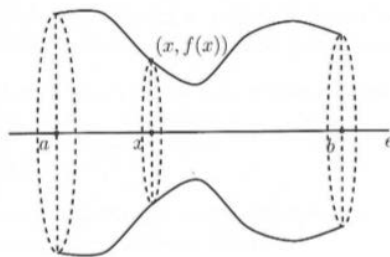


Figura 84: Superfície de Revolução  $S(\epsilon, \mathfrak{G})$



Para números reais  $c, d \in (a, b)$ , com  $c < d$ , seja  $S_{[c,d]}$  a porção de  $S(\epsilon, \mathcal{G})$  situada entre os planos perpendiculares ao eixo  $\epsilon$  nos pontos de abscissas  $c$  e  $d$ . Para definirmos a área de  $S_{[c,d]}$ , consideramos números reais  $c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d$ , tais que  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  seja igual a  $\frac{d-c}{n}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Para  $n$  suficientemente grande, é razoável supor que o tronco de cone de raios  $f(x_{i-1})$  e  $f(x_i)$  e altura  $\Delta x_i$  seja uma aproximação bastante satisfatória para a porção de  $S_{[c,d]}$  situada entre os planos que passam por  $x_{i-1}$  e  $x_i$ . Desta forma, é também razoável que a área lateral  $A_i$  de um tal tronco de cone se constitua numa aproximação razoável para a área da porção de  $S_{[c,d]}$  situada entre os planos em questão.

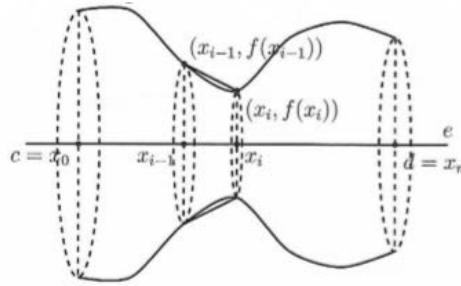


Figura 85: Aproximando a área de uma superfície de revolução

Temos que a área é dada por:

$$A_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \quad (31)$$

Pelo teorema do valor médio, existe  $\varepsilon_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\varepsilon_i)$ . Levando-se em conta que  $f$  varia muito pouco em  $[x_{i-1}, x_i]$  para  $n$  suficientemente grande, temos que  $f(x_{i-1}), f(x_i) \cong f(\varepsilon_i)$  e daí temos que:

$$A_i = 2\pi f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)^2} \Delta x_i$$

Adicionando as aproximações para as áreas dos  $n$  troncos de cone obtidos, concluímos que

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)^2} \Delta x_i$$

seja uma aproximação razoável para o que definimos como área de  $S_{[c,d]}$ . Além disso, tal aproximação se torna cada vez melhor, à medida que  $n \rightarrow +\infty$ .

À medida que  $n \rightarrow +\infty$ , temos que:

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)^2} \Delta x_i \rightarrow 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Desta forma, definimos a área  $A$  de  $S_{[c,d]}$  colocando:

$$A = 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

A integral tem sentido já que as hipóteses feitas para  $f$  garantem a continuidade de seu integrando.

**Teorema A.35.** *A área  $A$  de uma superfície esférica é igual a  $A = 4\pi R^2$ , onde  $R$  é o raio da superfície esférica.*

*Demonstração.* A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função  $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , de sorte que  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$  para  $x \in (-R, R)$ . Então,  $S(\mathfrak{e}, \mathfrak{G})$  é uma esfera  $\Sigma$ , de raio  $R$ , com dois pontos antípodas  $N$  e  $S$  removidos. Como:

$$\Sigma \setminus \{N, S\} = \bigcup_{0 < \varepsilon < R} S_{[-R+\varepsilon, R+\varepsilon]}$$

e  $S_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]} \subset S_{[-R+\varepsilon^t, R-\varepsilon^t]}$ , para  $0 < \varepsilon < \varepsilon^t$ , temos:

$$\begin{aligned} A(\Sigma \setminus \{N, S\}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(S_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\pi \int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\pi R \int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} dx = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Assim, definimos a área  $A$  de uma esfera de raio  $R$  como:

$$A = 4\pi R^2$$

□

**Corolário A.36.** *A área  $A_C$  de uma calota esférica, onde  $R$  é o raio da superfície esférica e  $h$  a altura da calota é igual a*

$$A = 2\pi R h$$

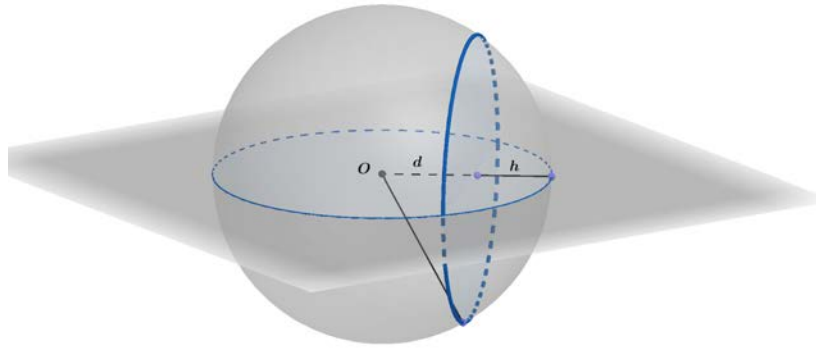


Figura 86: Calota Esférica

*Demonstração.* Seja  $d$ , a diferença entre o raio  $R$  e a altura  $h$  da calota esférica, conforme figura acima. Da mesma forma que a demonstração da área da superfície esférica, temos:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_d^R f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_d^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi R \int_d^R dx = 2\pi R(x) \Big|_d^R \\ &= 2\pi R^2 - 2\pi R d = 2\pi R(R - d) = 2\pi R h \end{aligned}$$

□

**Corolário A.37.** A área  $A_Z$  de uma zona esférica é  $A = 2\pi R h$ , em que  $R$  é o raio da superfície esférica e  $h$  é a distância entre os planos paralelos.

*Demonstração.* A zona esférica fica situada entre duas calotas esféricas. Logo a área da zona esférica será a área da superfície esférica menos a área das calotas.

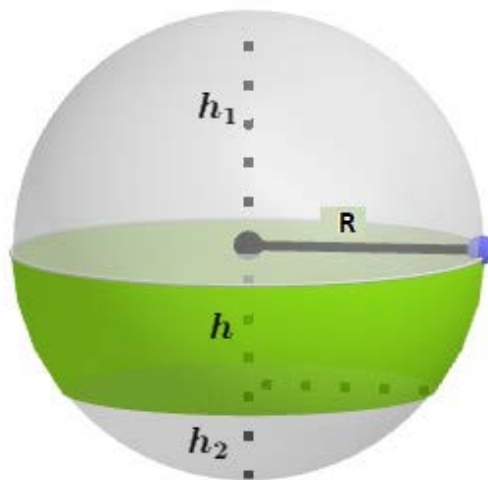


Figura 87: Área da zona esférica

A área das calotas é dado por  $2\pi.R.h_1 + 2\pi.R.h_2$ , em que  $h_1$  e  $h_2$  são as alturas de cada calota. Então, a área da zona esférica será:

$$4\pi.R^2 - (2\pi.R.h_1 + 2\pi.R.h_2) = 2\pi.R.(2R - h_1 - h_2) = 2\pi.R.h$$

□

**Corolário A.38.** A área  $A_f$  de um fuso esférico é  $A_f = 2\alpha R^2$ , onde  $R$  é o raio da superfície esférica e  $\alpha$  é o ângulo do fuso.

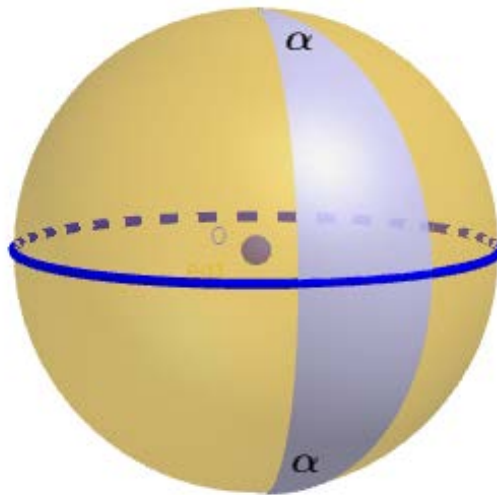


Figura 88: Fuso Esférico

*Demonstração.* Utilizando uma regra de três simples, temos que a área do fuso esférico  $A_f$  está para a área da superfície esférica que é  $4\pi R^2$ , assim como o ângulo  $\alpha$  do fuso está para  $2\pi$ .

$$\frac{A_f}{4\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$A_f = \frac{4\pi R^2 \alpha}{2\pi} = 2\alpha R^2$$

□

**Teorema A.39.** O volume de uma esfera, onde o raio da esfera é  $R$ , é:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

*Demonstração.* O volume  $V$  de um sólido obtido pela revolução de uma região sob o gráfico da função contínua positiva,  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  em torno do eixo  $Ox$  é:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Para obtermos o volume da esfera, consideramos a função  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \geq 0$ , definida no intervalo  $[-R, R]$ . Então:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R \\ &= \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

□

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- AABOE, A. Episódio da história antiga da matemática (sbm). *Brasília. Editora PAX*, 1984.
- ABREU, S. M. D.; OTTONI, J. E. *Geometria Esférica e Trigonometria Esférica aplicadas à Astronomia de Posição*. Tese (Doutorado) — Tese de Dissertação PROFMAT, 2015.
- BLUMENTHAL, L. M. *A modern view of geometry*. [S.l.]: Courier Corporation, 1980.
- BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. [S.l.]: Editora Edgard, 1998.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.
- BRASIL, B. Base nacional curricular comum (proposta). *Ministério da Educação, Brasília*, 2016.
- BRUMMELEN, G. V. *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009.
- COUTINHO, L. *Trigonometria Esférica: a matemática de um espaço curvo*. [S.l.]: Rio de Janeiro, Interciência, 2015.
- COXETER, H. S. M. *Non-euclidean geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica: Coleção PROFMAT*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- FERNANDES, S. da S.; ZANARDI, M. *Fundamentos de astronáutica e suas aplicações*. [S.l.]: Editora da UFABC, 2018.
- KARTTUNEN, H. et al. *Fundamental astronomy*. [S.l.]: Springer, 2016.
- KLINE, M. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. [S.l.]: Oxford University Press USA, 1990. v. 3.
- MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. Alguns mitos sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental. *Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula*, v. 1, p. 7–36, 2004.
- MAOR, E. *Trigonometric delights*. [S.l.]: Universities Press, 1998.
- MOREY, B. Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes. *Editora SBHMat, Rio Claro*, 2003.
- NACIONAIS, P. C. matemática. *Brasília: MEC/SEF*, p. 142, 1997.
- NETO, A. C. M. *Geometria: Coleção PROFMAT*. [S.l.]: Rio de Janeiro:SBM, 2013.
- NETO, G. B. L. *Astronomia de posição. São Paulo: Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo*, 2019.

PAPERT, S. Constructivist theories. *Mennta. hi. is*, 2016.

PEREIRA, A. C. C. A obra de triangulis omnimodis libri quinque de johann müller regiomontanus (1436 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010.

PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. B. Um ensaio sobre a história da trigonometria antes do século xv. *Conexões-Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 4, p. 143–152, 2016.

ROCHA, C. H. O. da. Revista brasileira de geomática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2017.

ROSA, A. P. *Geometrias não euclidianas*. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 2010.

ROSENFELD, B. A. *Uma história da geometria não euclidiana: evolução do conceito de espaço geométrico*. [S.l.]: Springer Science e Midia comercial, 2012.

USUI, T. O globo terrestre e a esfera celeste: uma abordagem interdisciplinar de matemática, geografia e astronomia. 2014.

WILLIAN, D. R. Earth fact sheet. 2010. Disponível em: <<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>>.