
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Funções trigonométricas sob a ótica das
vibrações mecânicas: uma motivação a mais**

Ismael Soares Madureira Júnior

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos
Mesquita

São José dos Campos
Dezembro, 2019



PROFMAT

Título: *Funções trigonométricas sob a ótica das vibrações mecânicas: uma motivação a mais*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

São José dos Campos
Dezembro, 2019

Madureira Júnior, Ismael Soares

Funções trigonométricas sob a ótica das vibrações mecânicas: uma motivação a mais, Ismael Soares Madureira Júnior – São José dos Campos, 2019.

LVII, 66f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Trigonometric functions from the perspective of mechanical vibrations: one more motivation

1. Função trigonométrica. 2. Equação diferencial ordinária 3. Vibrações mecânicas 4. Ponte de Tacoma Narrows.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

ISMAEL SOARES MADUREIRA JÚNIOR

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SOB A ÓTICA DAS
VIBRAÇÕES MECÂNICAS: UMA MOTIVAÇÃO A MAIS

Cláudia Aline A. S. Mesquita

Presidente da banca: Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu - MAT-CBLU - UFSC

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes - ICT - UNIFESP

Profa. Dra. Kelly Cristina Jorge Sakamoto - ICT - UNIFESP

Data da Defesa: 06 de Dezembro de 2019

*"Nada te perturbe; Nada te espante; Tudo passa; Deus não muda; A paciência tudo alcança; Quem a Deus tem, nada lhe falta: Só Deus basta."
Santa Teresa D'Ávila*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita, pela orientação, apoio e confiança.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação da afetividade da educação no processo de formação profissional, pelo tanto que se dedicaram, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Meus agradecimentos aos amigos, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Entender sobre os vários aspectos analíticos e gráficos das funções trigonométricas é indispensável para compreender o comportamento de fenômenos oscilatórios. Neste trabalho, o principal objetivo é ressaltar que o conhecimento a cerca destes fenômenos pode ser uma fonte a mais de motivação em sala de aula. Para isso, é feita uma abordagem dos principais tópicos que colaboram na compreensão das oscilações mecânicas, destacando-se as funções trigonométricas e as equações diferenciais ordinárias (EDOs) de segunda ordem. Além disso, muitas situações reais, que geram curiosidade, estão diretamente relacionadas a fenômenos desta natureza, como por exemplo, o caso da ponte de Tacoma Narrows. Traçamos este fato histórico intrigante como agente motivador, para exemplificar a correlação importante que pode haver entre a compreensão dos aspectos das funções trigonométricas, a modelagem de oscilações mecânicas, e situações curiosas da vida real.

Palavras-chave: 1. Função trigonométrica. 2. Equação diferencial ordinária
3. Vibrações mecânicas 4. Ponte de Tacoma Narrows.

ABSTRACT

Understanding about the analytical and graphical aspects of trigonometric functions is indispensable to know the behavior of oscillatory phenomena. In this dissertation, the main objective is to emphasize that knowledge about these phenomena can be an additional source of motivation in the classroom. To this, an approach is made to the main topics that collaborate in understanding mechanical oscillations, highlighting the trigonometric functions and the second order ordinary differential equations (ODEs). In addition, many real situations, which generate curiosity are directly related to phenomena of this nature, such as the case of the Tacoma Narrows Bridge. We bring this intriguing historical fact as a motivating agent, to exemplify the important correlation that may exist between understanding aspects of trigonometric functions, the modeling mechanical oscillations, and curious real-life situations.

Keywords: 1. Trigonometric function. 2. Ordinary Differential Equation.
3. Mechanical vibrations. 4. Tacoma Narrows Bridge.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
1 FUNÇÕES SENOIDAIS	5
1.1 Euler	5
1.2 Fourier	6
1.3 A função de Euler e as funções seno e cosseno	7
1.4 Funções senoidais e suas propriedades	10
1.4.1 Translação e Dilatação	12
1.4.2 Derivada das funções senoidais	16
2 MODELANDO ALGUNS SISTEMAS MECÂNICOS OSCILATÓRIOS: DA FÍSICA À MATEMÁTICA	20
2.1 Hooke	20
2.2 Newton	21
2.3 Vibrações mecânicas no sistema massa-mola	23
2.3.1 Vibrações livres não amortecidas	24
2.3.2 Vibrações livres amortecidas	26
2.3.3 Vibração forçada com amortecimento	26
3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: A MATEMÁTICA CONVERSANDO COM A FÍSICA	28
3.1 EDOs lineares de segunda ordem com coeficientes constantes	29
3.1.1 Caso homogêneo	29
3.1.2 Solução da equação de vibração livre não amortecida	33
3.1.3 Solução da equação de vibração livre amortecida	36
3.1.4 Caso não-homogêneo	38
3.1.5 Solução da equação de vibração forçada	41
3.2 A ponte de Tacoma Narrows	44
3.2.1 Qual a relação entre a queda da ponte e o estudo das vibrações mecânicas?	45
4 PROPOSTA DIDÁTICA	47
4.1 O software : Ondas Trigonométricas	47
4.1.1 Atividade 1: A função seno	48
4.1.2 Atividade 2: Brilho estelar	49
4.1.3 Atividade 3: Marés	50
4.1.4 Atividade 4: Roda gigante composta	51
4.2 Alguns exemplos de questões de vestibular	52
4.2.1 Universidade Federal do Rio Grande do sul	53
4.2.2 Universidade de São Paulo	53

4.2.3	ENEM	54
4.2.4	Universidade Federal do Paraná	56
4.2.5	Universidade Federal de Santa Catarina	57
5	CONCLUSÕES	61
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62

INTRODUÇÃO

O estudo das funções senoidais faz parte do novo currículo nacional do Ensino Médio (BNCC) e isso é mencionado na competência específica 3 na habilidade 6: *(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.* [3]. Não é difícil entender o motivo desta escolha, pois tais funções tem papel fundamental no entendimento e modelagem de fenômenos oscilatórios e estes nos rodeiam em toda parte, ainda que já estejamos tão acostumados que nem percebamos.

O estudo das funções que modelam oscilações intriga estudiosos desde o século XVII [1]. Mas, depois do desenvolvimento das equações diferenciais, os fenômenos oscilatórios puderam ser compreendidas com maior clareza. As aplicações destes estudos afetam de modo direto a forma como são tomadas decisões de muitos profissionais nos dias de hoje, por exemplo, um engenheiro, na construção de uma ponte, deve ter conhecimento de como as forças, sob as quais estará sujeito, irão atuar em sua forma de oscilar. Muitas respostas são obtidas entendendo-se as equações que modelam o comportamento destes fenômenos, e analisando suas soluções.

Dada a presença constante de fenômenos oscilatórios em nosso cotidiano, faz-se necessário um conhecimento a cerca das relações que podem nos ajudar a descrever tais fenômenos. Estes conhecimentos vem sendo desenvolvidos a mais 1500 anos antes de cristo. Muitos foram os que se interessaram em entender os seus aspectos e podemos citar, como exemplo, Hiparco de Alexandria, Galileu Galilei, Fourier [8]. Ao final temos funções muito bem definidas no tempo, com comportamento que descreve com precisão as oscilações periódicas, resguardando características importantes destas.

Neste trabalho, pretendemos fazer um estudo sobre como as funções senoidais aparecem de forma natural quando modelamos as oscilações mecânicas usando princípios físicos. Nosso intuito é fazer isso de forma mais interligada, aproveitando conhecimentos prévios, inserindo conteúdos e resgatando enlaces naturais entre conteúdos que aparecem de forma desconectada em sala de aula e em muitos livros paradidáticos. Assim, traremos ao leitor não uma forma de abordagem do conteúdo, mas uma janela de possibilidades.

Para alcançarmos nossos objetivos, organizamos o trabalho da seguinte maneira: no primeiro capítulo apresentamos as funções senoidais, definindo estas e trazendo suas principais propriedades.

No segundo capítulo faremos a modelagem matemática do problema físico que descreve as oscilações mecânicas simples. Buscamos aqui percorrer com o máximo de cuidado o caminho que parte das leis físicas e chega ao modelo matemático.

No terceiro capítulo estudamos o modelo matemático obtido no segundo, a saber, uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Neste capítulo, construiremos de forma mais geral as soluções das EDOs do tipo citado e em seguida apresentaremos as formas de soluções de cada um dos modelos de oscilações obtidos. Além disso, apresentaremos o intrigante caso da ponte de Tacoma Narrows e comentamos sobre uma das possíveis causas das fortes oscilações que atingiram a ponte. Este é um exemplo motivador que permite ao leitor reflexões importantes a cerca do desenvolvimento da ciência e de seu impacto em nosso dia-a-dia. O colapso da famosa ponte ocorreu em 1940 e foi um marco na história da engenharia [10], mas ainda nos dias atuais parece ser intrigante e desafiador.

No quarto capítulo, trazemos alguns exemplos de atividades que podem ser trabalhados em sala de aula, inclusive com o uso de softwares, facilitando assim a compreensão das funções senoidais. Traremos também algumas questões de vestibulares com o objetivo de trazer mais ferramentas ao professor.

É importante que o leitor tenha algum conhecimento sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo e sobre as ferramentas do cálculo para uma leitura mais proveitosa.

FUNÇÕES SENOIDAIS

São chamadas de *oscilações* ou *vibrações* a classe de movimentos que ocorrem em torno de uma posição fixa, chamada de *posição de equilíbrio*. Esse movimento pode ocorrer de maneira ordenada ou não. Se esse movimento se repete regularmente com o passar do tempo, então ele é dito *periódico*, e o tempo necessário para completar uma oscilação é chamado de *período*.

A natureza está repleta de fenômenos físicos oscilatórios e periódicos. Por exemplo, o movimento dos planetas, o som, a corrente elétrica alternada, a circulação sanguínea. Entender como estes fenômenos ocorrem é um interesse de algumas áreas do conhecimento. A Matemática e a Física buscam encontrar formas para modelar, entender e prever tais fenômenos. Neste capítulo, trataremos das funções senoidais, brilhante ferramenta matemática que, entre outras coisas, ajudam a entender e modelar as formas mais simples e complexas de movimento oscilatório.

Segundo LIMA [1], o primeiro indício do tratamento funcional da trigonometria surgiu em 1635, quando Gilles Personne de Roberval, matemático e filósofo francês que viveu de 1602 a 1675, fez o primeiro esboço de uma curva do seno. Porém, este conceito só veio a ser formalizado no século XVIII com Leonhard Euler. Os avanços mais significativos nos estudos das oscilações se deram efetivamente no século XIX, com Fourier. Com o objetivo de retratar um pouco sobre a história e o desenvolvimento de alguns importantes conceitos usados neste texto, traremos um pouco mais sobre dois cientistas que desenvolveram estudos que mudaram o rumo da história da ciência no mundo, e em particular, a forma de estudar fenômenos oscilatórios.

1.1 EULER

Como Euler foi um dos principais nomes nos estudos das funções trigonométricas, então é justo conhecê-lo um pouco mais.

Leonard Euler nasceu em Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707 e morreu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783. Ele foi um homem com uma memória prodigiosa e um poder de concentração fenomenal, Euler teve interesses universais, pois foi teólogo, físico, astrônomo, linguista, psicólogo e principalmente matemático. Euler foi considerado verdadeiro gênio do século. Em Matemática, fez contribuições permanentes para a álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo, equações diferenciais, variável complexa, teoria dos números e topologia. Sua produção matemática parece não ter sido afetada pelos 13 filhos ou pela cegueira que o acometeu em seus 17 últimos anos de vida.

Euler escreveu mais de 700 trabalhos e 32 livros sobre matemática e foi responsável pela introdução de muitos símbolos (tais como e , π e $i = \sqrt{-1}$) e notações usadas até hoje como $f(x)$, \sum , $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$.



Figura 1: Leonard Euler 1707

Uma importante relação, não exatamente provada por Euler, mas que leva seu nome, pois foi o grande responsável por todo o fundamento, é a *Fórmula de Euler* que relaciona exponencial de números complexos e funções trigonométricas.

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\text{sen}(\beta). \quad (1)$$

Esta foi provada pelo matemático inglês Roger Cotes em 1714, e será de grande importância no terceiro capítulo deste trabalho para encontrar soluções para equações diferenciais. Para mais detalhes da vida e do trabalho deste grande cientista veja [8]

1.2 FOURIER

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre em 1768 e faleceu em Paris em 1830. Filho de um alfaiate, ficou órfão aos oito anos de idade e foi educado numa escola militar dirigida por beneditinos, onde veio a ocupar uma cadeira de matemática.



Figura 2: Fourier 1768

Segundo EVES [6], como Fourier ajudou a promover a Revolução Francesa foi recompensado com uma cátedra na Escola Politécnica. Renunciou a essa posição para poder

acompanhar Napoleão na expedição ao Egito. Em 1798 foi indicado governador do Baixo Egito. Após as vitórias britânicas e a capitulação da França em 1801, Fourier retornou à França, tornando-se prefeito de Grenoble. Foi quando de sua estada em Grenoble que começou suas experiências com o calor.

Em 1807, Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que deu início a uma importante parte da história da Matemática. O artigo trata do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. No desenvolvimento do artigo Fourier fez a afirmação de que toda função definida num intervalo finito por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma infinita de funções seno e cosseno. Para ser mais explícito, ele afirmou que uma função qualquer, não importa como seja definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, pode ser representada nesse intervalo por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (2)$$

Hoje, já é conhecida que a afirmação de Fourier de que toda função pode ser expressa por uma série trigonométrica, conhecida como série de Fourier, foi exagerada, e para mais detalhes [8]. As séries de Fourier provaram ser de mais alta utilidade em campos de estudo como a acústica, a óptica, a eletrodinâmica, a termodinâmica e vários outros, e têm um papel fundamental na análise matemática, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais.

1.3 A FUNÇÃO DE EULER E AS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Para a construção da função de Euler, considere o sistema de coordenadas cartesianas XOY (Figura 3) e a circunferência de raio 1 e centro na origem $(0, 0)$ definida por

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \right\}. \quad (3)$$

A maneira de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$, que faz corresponder a todo número real t o ponto $E(t) = (c_t, s_t)$ da circunferência unitária C do seguinte modo

- $E(0) = (1, 0)$
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C , a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento t , sempre no sentido positivo (anti-horário) .
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C de comprimento $|t|$ que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (horário).

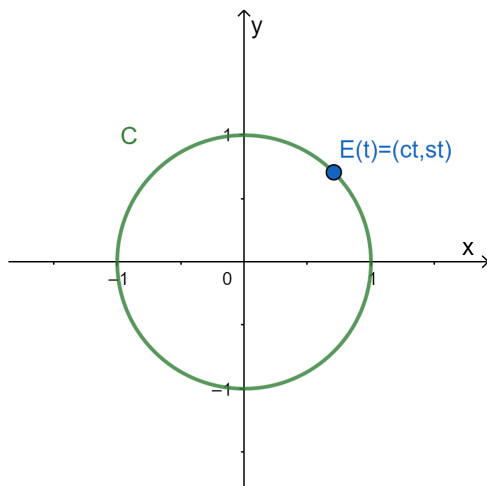


Figura 3: Circunferência Unitária

Explica LIMA [1] que a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ pode ser imaginada como processo de enrolar a reta, identificada em fio inextensível, sobre a circunferência C .

Cada vez que o ponto t descreve na reta um intervalo de comprimento l , sua imagem $E(t+l)$ percorre sobre a circunferência C um arco de igual comprimento l , em particular, como a circunferência unitária C tem comprimento igual a 2π , quando o ponto t descreve um intervalo de comprimento 2π , sua imagem $E(t+2\pi)$ dá uma volta completa sobre C , retornando ao ponto de partida $E(t)$, assim sendo, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$E(t+2\pi) = E(t) \quad (4)$$

e, mais geralmente,

$$E(t+2k\pi) = E(t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Vamos definir as funções trigonométricas seno e cosseno a partir da função de Euler. As funções seno e cosseno são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (\cos t, \sin t) \quad (6)$$

Em outras palavras, $c_t = \cos t$ e $s_t = \sin t$ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Para função seno temos como uma função real de variável real que a cada número real t associa o valor real $\sin t = s_t$, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \sin t = s_t. \quad (7)$$

Para construir o gráfico da função seno, vamos preencher uma tabela com valores de t da 1ª volta positiva.

Tabela 1: Seno da primeira volta

t	$sen(t)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

A seguir o gráfico da função seno

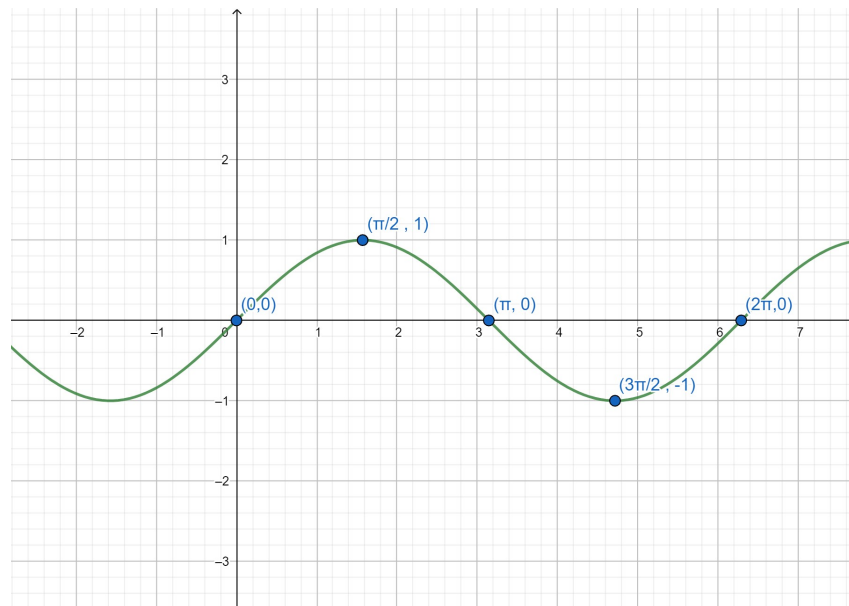


Figura 4: função seno

Observando o gráfico da figura 4 da função seno, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, assim sucessivamente, o que indica que o período da função seno é 2π .

Definimos a função cosseno como a função real de variável real que a cada número real t associa o valor real $c_t = \cos t$, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \cos t = c_t \quad (8)$$

Para construir o gráfico da função cosseno vamos preencher uma tabela com valores de t da 1ª volta positiva.

Tabela 2: Cosseno da primeira volta

t	$\cos(t)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

A seguir o gráfico da função cosseno

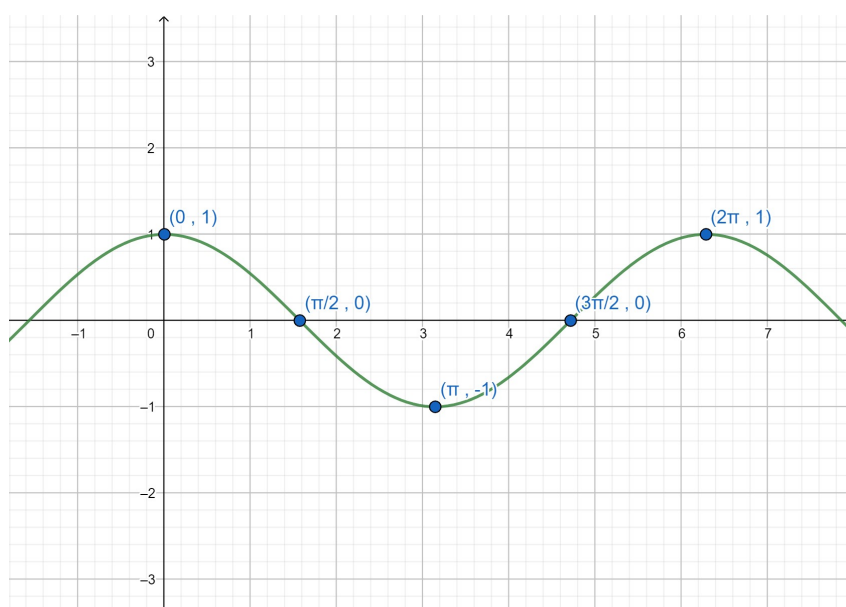


Figura 5: função cosseno

1.4 FUNÇÕES SENOIDAIS E SUAS PROPRIEDADES

Um termo bem comum na Física e nas engenharias é *senoides* ou *funções senoidais*. Estas são uma espécie de generalização das funções seno e cosseno. Mais especificamente, as funções senoidais são funções da forma

$$y = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot t + d) \quad (9)$$

ou

$$y = a + b \cdot \text{cos}(c \cdot t + d), \quad (10)$$

onde a, b, c e d são constantes reais. As funções senoidais mantém algumas características importantes como por exemplo são periódicas. A maneira mais básica de associar as senoides a movimentos periódicos é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferên-

cia trigonométrica. A projeção desse ponto no eixo dos senos ou cossenos descreve um movimento periódico.

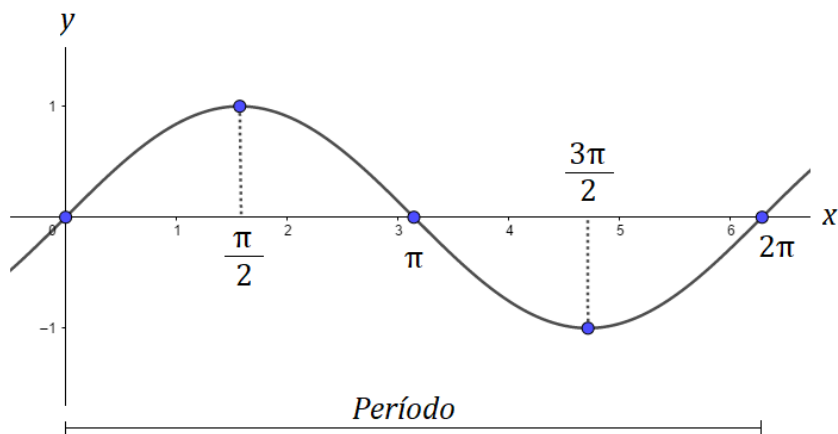


Figura 6: Período da função seno

Observando o gráfico da função seno, vemos que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos $\dots[0, 2\pi], [2\pi, 4\pi]\dots$. Daí dizemos que a função seno é periódica.

Observe no gráfico que:

$$\text{sen } t = \text{sen } (t + 2\pi) = \text{sen } (t + 4\pi) = \dots \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Dizemos então que o período da função seno é 2π e indicamos assim: $p = 2\pi$.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f por isso as funções seno e cosseno são periódicas e com período igual a 2π .

Agora veremos alguns exemplos de senóides e seus períodos: considere as funções f , g e h a seguir

$$f(t) = 2 + \cos t, \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ (} a = 2, b = 1, c = 1 \text{ e } d = 0\text{)}$$

$$g(t) = \text{sen } 2t, \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ (} a = 0, b = 1, c = 2 \text{ e } d = 0\text{)}$$

$$h(t) = 5 - 3 \text{sen } (3t - \pi), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ (} a = 5, b = -3, c = 3 \text{ e } d = -\pi\text{)}$$

O domínio de qualquer senóide é sempre $D = \mathbb{R}$. O que varia é a imagem e o período. Para obter a imagem, basta lembrar que $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$ e $-1 \leq \text{cos } t \leq 1$ e substituir nas funções:

$$\text{O máximo valor de } f(t) = 2 + \cos t \text{ é } 2 + 1 = 3$$

$$\text{O mínimo valor de } f(t) = 2 + \cos t \text{ é } 2 - 1 = 1$$

$$\text{Portanto a imagem é } \text{Im}(f) [1, 3]$$

O máximo valor de $g(t) = \text{sen } 2t$ é 1

O mínimo valor de $g(t) = \text{sen } 2t$ é -1

Portanto a imagem é $\text{Im}(g) = [-1, 1]$

O máximo valor de $h(t) = 5 - 3 \text{sen } (3t - \pi)$ é $5 - 3(1) = 2$

O mínimo valor de $h(t) = 5 - 3 \text{sen } (3t - \pi)$ é $5 - 3(-1) = 8$

Portanto a imagem é $\text{Im}(h) = [2, 8]$

Para obter o período, basta fazer $p = \frac{2\pi}{|c|}$:

Período de $f(t) = 2 + \cos t$ é $p_f = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

Período de $g(t) = \text{sen } 2t$ é $p_g = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

Período de $h(t) = 5 - 3 \text{sen } (3t - \pi)$ é $p_h = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

Existe mais três informações importantes sobre as senoides:

- se $b < 0$, o gráfico fica simétrico ao gráfico com $b > 0$ (simetria em relação ao eixo x);
- antes de desenhar o gráfico, é importante deixar o parâmetro c positivo. Para isso, usamos a paridade de seno e cosseno :

$$\text{sen}(-ct) = -\text{sen}(ct) \text{ e } \cos(-ct) = \cos(ct)$$

- se $d \neq 0$, o gráfico translada $\frac{-d}{c}$ unidades. Mas isso veremos na próxima seção.

1.4.1 Translação e Dilatação

Vamos analisar, separadamente, o efeito de cada parâmetro da função do tipo

$$f(t) = a + b \text{sen}(c t + d) ,$$

com exemplos numéricos, e depois generalizar o efeito do parâmetro.

Parâmetro a

A análise inicia com o gráfico básico $f(t) = \text{sen}(t)$. Para subir todas as ordenadas de

$$g(t) = 2 + \text{sen } (t),$$

todas as ordenadas de $f(t)$ vão deslocar duas unidades para cima:

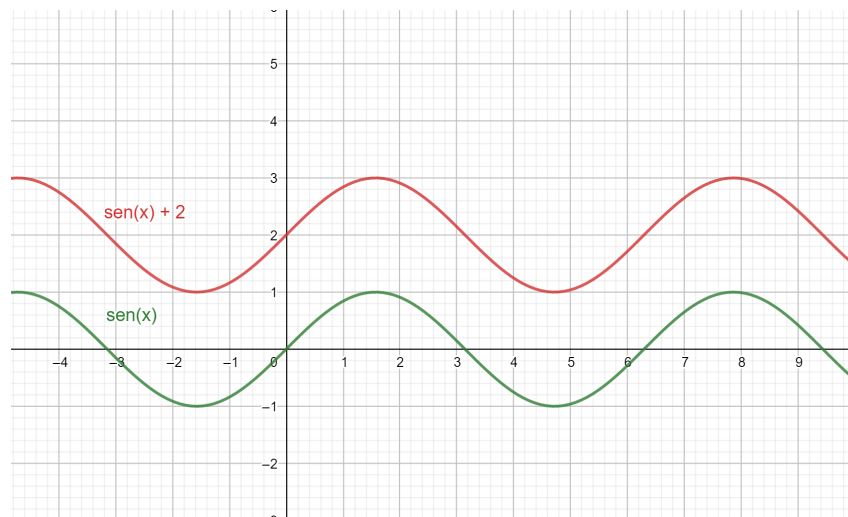


Figura 7: função $\text{sen}(x) + 2$

O parâmetro a desloca o gráfico no eixo y alternando a imagem da função.

A projeção do gráfico no eixo y nos dará a imagem da nova função, assim $\text{Im}(g) [0, 3]$

Parâmetro b

Pelo gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$, queremos construir o gráfico da função

$$g(x) = 2 \text{sen } t.$$

Vamos multiplicar o valor de todas as ordenadas por 2.

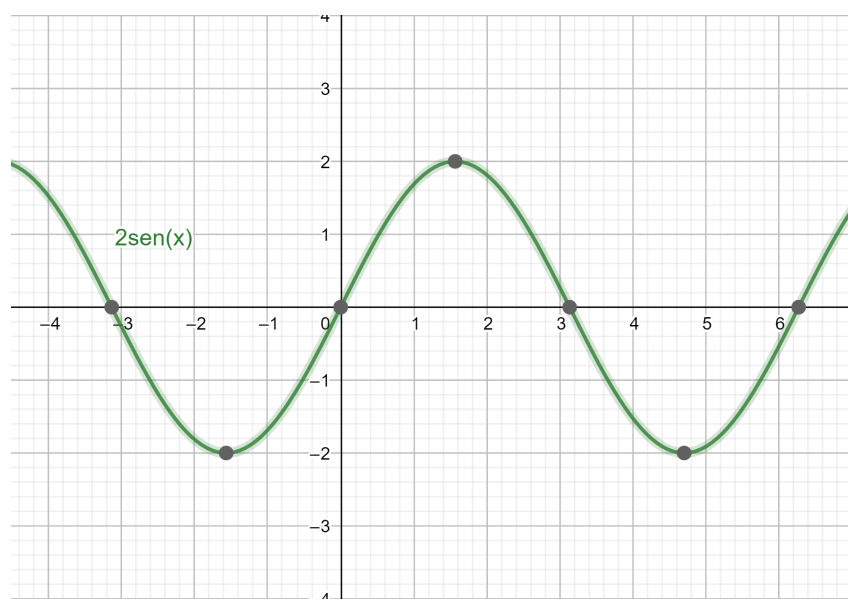


Figura 8: $2 \text{sen}(x)$

O conjunto imagem da função foi alterado e também sua amplitude. Logo $\text{Im}(g) = [-2, 2]$. O parâmetro b modifica a amplitude do gráfico.

Ainda sobre o parâmetro b , vamos fazer uma análise para $b \leq 0$, por exemplo

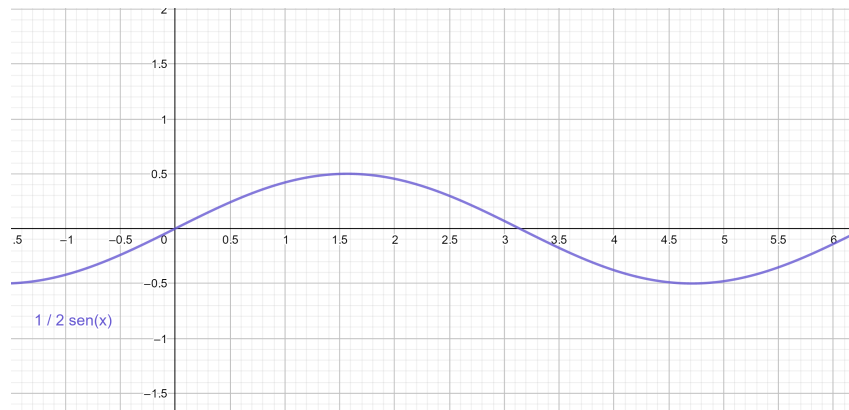


Figura 9: $g(t) = -\frac{1}{2}\text{sen}(x)$

Observe que ocorreu uma inversão do gráfico(devido ao sinal de menos) e uma redução da amplitude(devido a termo $|b| = \frac{1}{2} < 1$).

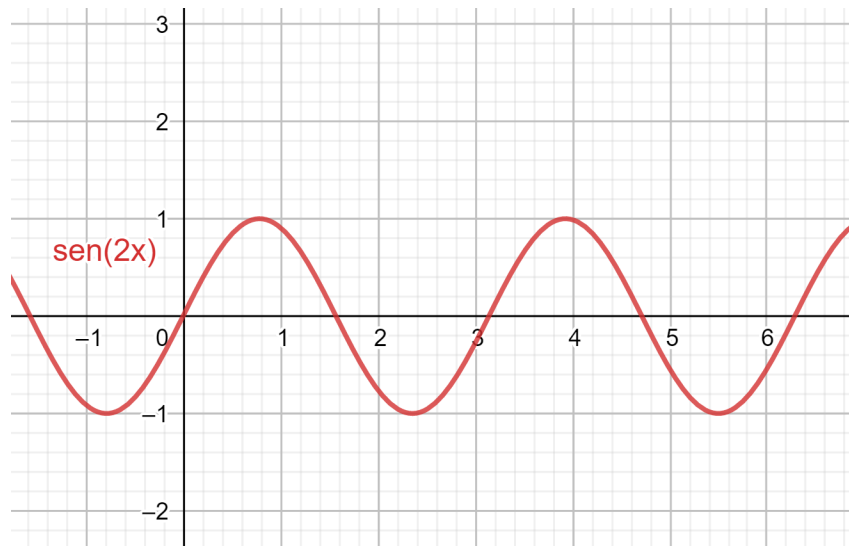
Parâmetro c

Vamos analisar a função $g(t) = \text{sen}(2t)$, observe a tabela 3 :

Tabela 3: $\text{sen}(2t)$

t	2t	sen(2t)
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	-1
2π	4π	0

Observe que na função $g(t) = \text{sen}(2t)$ o novo período é π . Percebemos que o parâmetro c afeta o período da função.

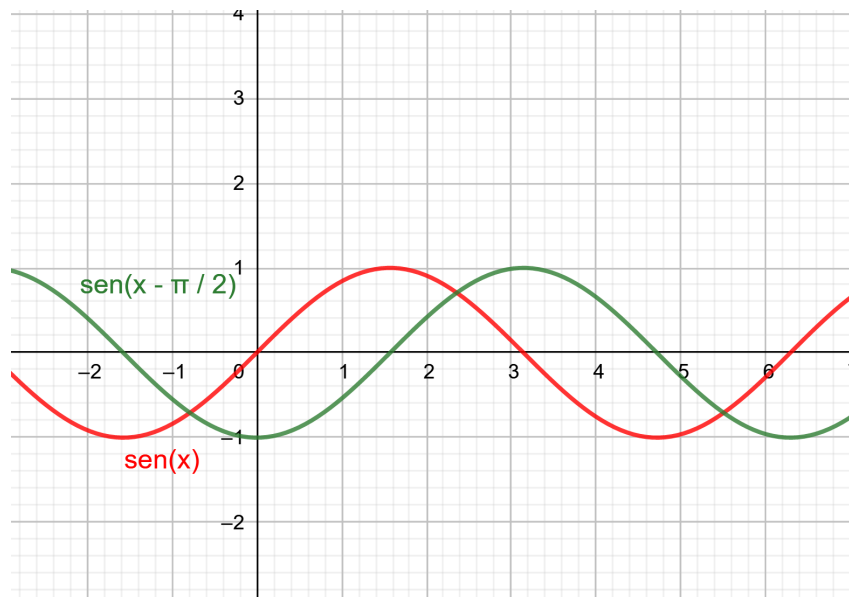
Figura 10: $\text{sen}(2x)$

Parâmetro d

Vamos analisar os gráficos $f(t) = \text{sen}x$ e $g(t) = \text{sen}(t - \frac{\pi}{2})$ com os dados descritos na tabela 4

Tabela 4: $\text{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

$(t - \frac{\pi}{2})$	$\text{sen}(t - \frac{\pi}{2})$	t
0	0	$(t - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	$(t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \pi$
π	0	$(t - \frac{\pi}{2}) = \pi \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$(t - \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 2\pi$
2π	0	$(t - \frac{\pi}{2}) = 2\pi \Rightarrow t = \frac{5\pi}{2}$

Figura 11: $\text{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

Observe a comparação entre as tabelas e perceba o acréscimo de $\frac{\pi}{2}$ nas abscissas do novo gráfico $\text{sen}(t - \frac{\pi}{2})$. O parâmetro d provoca o deslocamento do gráfico no eixo das abscissas.

1.4.2 Derivada das funções senoidais

Uma propriedade interessante das funções seno e cosseno versa sobre o comportamento da taxa de variação instantânea destas funções, mais conhecida como *derivada*. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, a derivada de f no ponto $t_0 \in I$ é a taxa de variação instantânea de f em relação a t no ponto t_0 (quando é possível calcular esta), e pode ser denotada de várias formas:

$$f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0) = \dot{f}(t_0).$$

Optaremos por usar a notação: $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Assim, usando limite para o cálculo da taxa de variação instantânea de f em t_0 temos que:

$$\frac{df}{dt}(t_0) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

quando este limite existe.

A derivada recebe alguns nomes diferentes a depender da função envolvida e suas derivadas, como por exemplo, a velocidade instantânea de um objeto no instante t_0 , denotada por $v(t_0)$, é a variação da posição $S(t)$ em relação ao tempo, no instante t_0 :

$$v(t_0) = \frac{dS}{dt}(t_0).$$

Também, a aceleração instantânea de um objeto no instante t_0 , denotada por $a(t_0)$, é a variação da velocidade $v(t)$ em relação ao tempo, no instante t_0 :

$$a(t_0) = \frac{dv}{dt}(t_0) = \frac{d^2S}{dt^2}(t_0).$$

Para maiores detalhes consultar [18].

A seguir vamos mostrar o seguinte lema:

Lema 1.1. *As funções $\text{sen } t$ e $\text{cos } t$ são bem definidas em \mathbb{R} e deriváveis em todo ponto $t_0 \in \mathbb{R}$. Além disso,*

$$\frac{d}{dt}[\text{sen } t](t_0) = \text{cos } t_0 \text{ e } \frac{d}{dt}[\text{cos } t](t_0) = -\text{sen } t_0$$

Demonstração: Por definição,

$$\frac{d}{dt}[\text{sen}(t)](t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t_0 + h) - \text{sen}(t_0)}{h} \quad (11)$$

Usando o fato de que

$$\text{sen}(t_0 + h) = \text{sen}(t_0)\text{cos}(h) + \text{cos}(t_0)\text{sen}(h),$$

e os limites fundamentais trigonométricos $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} = 0$ (ver [19]) e substituindo em (11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\text{sen}(t)](t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t_0)\text{cos}(h) + \text{cos}(t_0)\text{sen}(h) - \text{sen}(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t_0)\text{cos}(h) - \text{sen}(t_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(t_0)\text{sen}(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t_0)(\text{cos}(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(t_0)\text{sen}(h)}{h} \\ &= \text{sen}(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{cos}(h) - 1)}{h} + \text{cos}(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\ &= \text{cos}(t_0). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\text{cos}(t)](t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(t_0)\text{cos}(h) - \text{sen}(t_0)\text{sen}(h) - \text{cos}(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(t_0)\text{cos}(h) - \text{cos}(t_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}(t_0)\text{sen}(h)}{h} \\ &= \text{cos}(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{cos}(h) - 1)}{h} - \text{sen}(t_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\ &= -\text{sen}(t_0). \end{aligned}$$

Usando o que foi provado acima, obtemos derivadas de várias ordens para as funções seno e cosseno, de modo particular

$$\frac{d^2}{dt^2}[\text{sen } t](t_0) = \frac{d}{dt}[\text{cos } t](t_0) = -\text{sen}(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (12)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}[\text{cos } t](t_0) = \frac{d}{dt}[-\text{sen } t](t_0) = -\text{cos}(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

De forma mais geral, usando a definição de derivada é possível mostrar que a derivação é uma operação linear (para maiores detalhes [19]), e com isso já conseguimos ampliar nossos horizontes e obter a derivada das funções senoidais. O resultado será apresentado por meio de um lema:

Lema 1.2. *Considere as funções senoidais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$f(t) = a + b \text{sen}(c t + d), \quad (14)$$

$$g(t) = a + b \text{cos}(c t + d). \quad (15)$$

Estas são deriváveis em todo ponto do seu domínio e suas derivadas são dadas por:

$$\frac{df}{dt}(t_0) = b c \text{cos}(c t_0 + d), \quad (16)$$

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = -b c \text{sen}(c t_0 + d), \quad (17)$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se considerarmos nas funções f e g as seguintes constantes: $a = 0, b = 1, c = \omega, d = 0$, teremos que

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \omega g(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = -\omega f(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Derivando novamente estas funções, obtemos uma importante propriedade das funções senoidais:

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t_0) = \frac{d}{dt}[\omega g](t_0) = -\omega^2 f(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 g}{dt^2}(t_0) = \frac{d}{dt}[-\omega f](t_0) = -\omega^2 g(t_0), \forall t_0 \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Esta propriedade é o que torna estas funções excelentes ferramentas para modelar o tipo mais simples de movimento oscilatório: o *Movimento Harmônico simples*. No próximo capítulo trataremos das características deste tipo de oscilação mecânica.

MODELANDO ALGUNS SISTEMAS MECÂNICOS OSCILATÓRIOS: DA FÍSICA À MATEMÁTICA

A *mecânica clássica* é a área da Física que estuda o movimento dos corpos materiais. Neste busca-se entender como as leis físicas se aplicam aos objetos em movimento. Este fato torna este ramo muito rico em aplicações das ferramentas matemáticas.

Para concretizar o objetivo, em geral são seguidos os seguintes passos:

1. Transcrição das leis físicas que regem o fenômeno de interesse em equações matemáticas;
2. Resolução destas equações usando o conhecimento matemático disponível;
3. Interpretação do resultado e conclusões físicas destas.

Neste capítulo, nosso objetivo é dar o primeiro passo para um tipo específico de sistema mecânico oscilatório: o sistema massa-mola unidimensional. Iremos transcrever as leis físicas que regem este tipo de vibração mecânica, considerando ou não a ação de forças externas. Mais especificamente, consideraremos as vibrações livres não amortecidas, depois consideraremos as vibrações livres amortecidas e em seguida consideraremos vibrações forçadas. As equações obtidas dependem de funções e suas derivadas, isto é, são *equações diferenciais*.

Antes de nos debruçarmos sobre a dedução dos modelos matemáticos, vamos conhecer um pouco da história de dois grandes nomes da Física, Hooke e Newton, e sobre suas contribuições para os estudos do nosso objeto de interesse.

2.1 HOOKE

Robert Hooke viveu entre os anos de 1635 e 1703. Era um cientista inglês, essencialmente mecânico e meteorologista, nascido em Freshwater, na Isle of Wight. Formulou a teoria do movimento planetário e a primeira teoria sobre as propriedades elásticas da matéria. Filho de um humilde pastor protestante, iniciou-se, em 1653, como corista da Igreja de Cristo de Oxford e foi estudar em Oxford University, onde, em 1655, começou como assistente de laboratório de Robert Boyle, e posteriormente seu colaborador nos estudos sobre gases, mostrando-se ser um exímio experimentador e ter forte inclinação para a mecânica.

Hooke publicou a lei que leva seu nome em 1658, segundo a qual as deformações sofridas pelos corpos são, em princípio, diretamente proporcionais às forças que se aplicam sobre eles. Usando notações físico-matemáticas, a lei pode ser expressa por

$$F = kS,$$

onde k é a constante de elasticidade da mola e S é a distensão ou deslocamento da massa. Esta lei é fundamental para a modelagem de oscilações mecânicas em um sistema massa-mola.

Segundo PERCILIA [?], ao Hooke também é atribuída a ideia de atar uma mola a um volante de relógio, causando movimento oscilatório que permite a um relógio marcar unidades de tempo. Em 1674, Christian Huygens inventou o relógio de bolso baseado no conceito da mola de equilíbrio e isso deixou Hooke tão irritado, que o acusou de ter roubado sua invenção. Hooke acusou muitos colegas seus, especialmente Isaac Newton, de plagiadores.



Figura 12: Robert Hooke 1635

Sua habilidade com experimentos valeu-lhe a eleição como membro e nomeação como curador de experiências da Royal Society em 1662. Foi, também, professor de geometria do Gresham College. Foi o sucessor de Oldenburg como secretário da Royal Society entre os anos de 1677 e 1682 e faleceu em Londres, Inglaterra.

2.2 NEWTON

Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia de natal em 1642, ano da morte de Galileu. Aos 18 anos de idade, no Trinity College, Cambridge. Segundo EVES [6] Newton teve contato com um livro de astrologia e sua atenção se voltou para a matemática e desse novo interesse começou a ler primeiro os Elementos de Euclides, e depois La geometrie de Descartes. Leu também a Clavis de Oughtred, trabalhos de Kleper e Viete e a Arithmetica infinitorum de Wallis. Logo criou sua própria matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial.

Provavelmente foi em 1665 que Newton desenvolveu as ideias do Cálculo, se interessou por várias questões físicas, fez suas primeiras experiências em óptica e formulou os princípios básicos de sua teoria da gravitação.

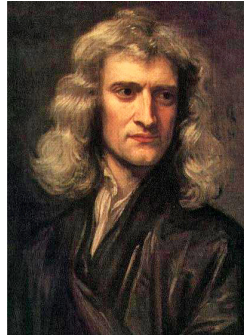


Figura 13: Sir Isaac Newton 1642

Mas Newton não publicou nenhuma de suas descobertas antes de 1684. Newton escreveu o primeiro livro de seus, *Principia*, por volta do verão de 1685. Um ano mais tarde, também o segundo estava pronto e o terceiro iniciado. Hooke acusava Newton de plágio e isso quase o fez abandonar o terceiro livro. O tratado completo, intitulado *Philosophiae naturalis principia mathematica*, foi publicado, na metade de 1687, sendo impressionante sua repercussão na Europa.

Para EVES [6] O *Principia* é a obra-prima de Newton. Nela se encontra a primeira sistematização completa da dinâmica e uma formulação completa dos principais fenômenos de movimento, terrestres e celestes. Mostrou-se o mais influente e admirado trabalho na história da ciência.

Isaac Newton, no bem da verdade, dispensa apresentação. Nesse trabalho, além de usarmos muitos conceitos fundamentais do Cálculo criado por Newton, estamos interessados em sua segunda lei. Essa lei será relacionada com a lei de Hooke e veremos mais detalhes adiante.

A segunda lei de Newton trata de como uma força afeta a velocidade constante ou como ela afeta o estado inercial de um objeto. Também chamada de princípio fundamental da dinâmica, esta lei afirma que a força resultante F em uma partícula é igual à taxa de variação do seu momento linear $p(t) = mv(t)$ em relação ao tempo, onde m é a massa do objeto e $v(t)$ é a velocidade, no instante t .

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Esta lei vale também para sistemas onde a massa é uma constante, o que resulta na expressão que é conhecida no ensino médio

$$F = m \frac{dv}{dt} = m a(t)$$

onde $a(t)$ é a aceleração do corpo no instante t . A força resultante aplicada a um corpo produz uma aceleração a ela diretamente proporcional.

Nas próximas sessões nos empenharemos em modelar as vibrações mecânicas no sistema massa-mola vertical.

2.3 VIBRAÇÕES MECÂNICAS NO SISTEMA MASSA-MOLA

Algo que nem sempre é claro aos estudantes que não são necessariamente da área de engenharia é o motivo pelo qual considera-se em muitos modelos físicos os sistemas do tipo massa-mola, mesmo que não tenhamos exatamente uma mola e um objeto preso a esta, envolvidos no fenômeno. Basta uma pesquisa rápida na internet para verificar que em trabalhos mais específicos da área de engenharia como por exemplo, para construções de pontes, aviões, edifícios, automóveis, máquina de lavar roupas, máquinas em geral, há sempre uma referência ao sistema massa-mola (ver [20] [21]).

O principal motivo é a forma simples com a qual os modelos obtidos neste sistema consegue representar os fenômenos oscilatórios que ocorrem nestes objetos ou construções. Com isso, mesmo não tendo exatidão nas dimensões e nas variáveis a serem consideradas, é possível fazer boas previsões de como as oscilações nestes irá se comportar mediante as forças que naturalmente estarão sujeitos.

O que é um sistema massa-mola ideal? Este é composto por uma mola de massa desprezível e que não perca suas propriedades elásticas quando sofre deformação, e por um corpo de massa m constante, que não se deforme sob a ação de qualquer força.

Este sistema ideal não é fisicamente possível, mas ainda assim, muito eficiente sob algumas condições. Quanto mais a realidade se aproxima desta hipótese, mais eficiente este modelo se torna.

O sistema massa-mola pode ser vertical ou horizontal. Consideraremos neste trabalho apenas o caso vertical. O caso horizontal é bastante similar (ver[22]).

Agora a partir das leis de Newton e Hooke vamos apresentar um modelo para o movimento de massa, isto é, as equações matemáticas de um modelagem do movimento oscilatório.

Dado um objeto com massa m_1 atado a uma mola flexível suspensa por um suporte rígido. Quando o objeto é substituída por outro de massa diferente m_2 , o alongamento da mola será diferente. como ilustrado na figura na figura 14.

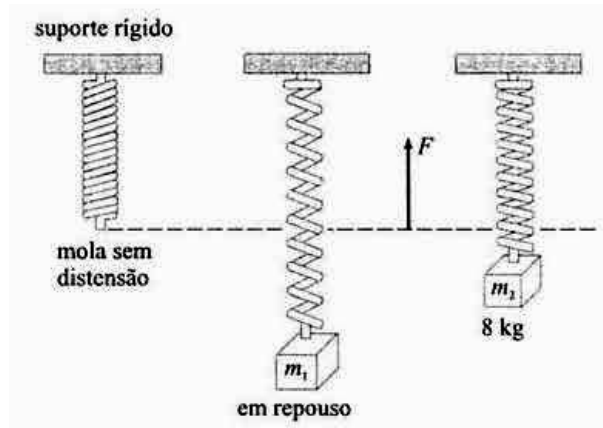


Figura 14: Alongamento da mola

Pela lei de Hooke, a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção do alongamento e proporcional à distensão S . Simplesmente enunciada $F = kS$, em que k é uma constante de proporcionalidade. Embora massas com pesos diferentes distendam a mola com alongamentos diferentes, a mola é caracterizada pelo número k . Por exemplo, se uma massa pesando 10 kg provoca uma distensão de 2 cm na mola, então

$$98 = 2k \Rightarrow k = 49\text{ N/cm}$$

Necessariamente então uma massa pesando 8 kg provoca uma distensão na mesma mola de $1,6\text{ cm}$.

Com a segunda lei de Newton temos que após uma massa m ser atada a uma mola, ela provoca uma distensão L na mola e atinge sua posição de equilíbrio na qual a força peso $P = mg$ é igual à força restauradora $k \cdot L$, onde $g = 9,8\text{ m/s}^2$ é a constante gravitacional na terra. Assim, a condição de equilíbrio é $mg = kL$ ou $mg - kL = 0$.

Se a massa for deslocada por uma quantidade x_0 de sua posição de equilíbrio e for solta, o objeto irá oscilar com deslocamento dado por uma função $x(t)$, medida positivamente no sentido para baixo e tal que $x(0) = x_0$. A força resultante nesse caso de dinâmica é dada pela segunda lei de Newton $F = m a(t)$, em que $a(t)$ é a aceleração da massa no instante t , isto é, $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$.

A partir daqui, apresentamos alguns modelos obtidos mediante algumas condições físicas.

2.3.1 Vibrações livres não amortecidas

Supondo que não haja força de retardamento agindo sobre o sistema (não temos resistência do ar por exemplo) e supondo que a massa vibre sem influência de outras forças externas (movimento livre), teremos então pela segunda lei de Newton e pela igualdade no equilíbrio que:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -k(L + x(t)) + mg = -k x(t). \quad (22)$$

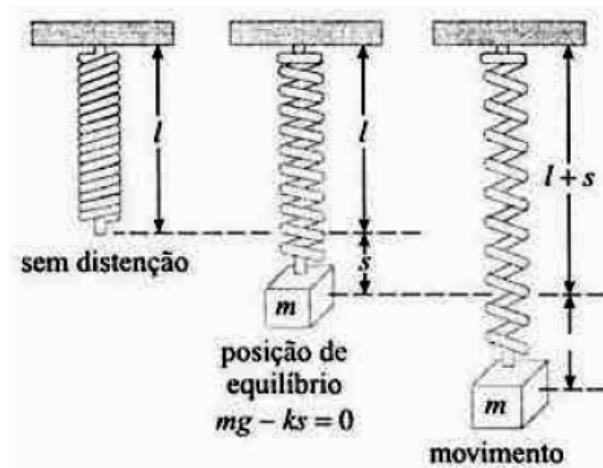


Figura 15

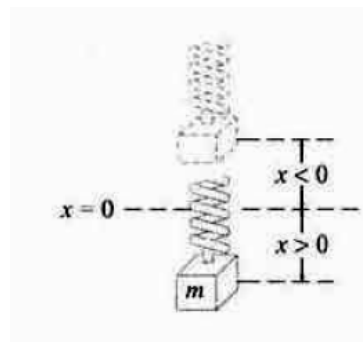


Figura 16

Agora, para que matematicamente seja mais simples trabalhar com a equação obtida em (22), podemos dividi-la por m e obteremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (23)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Dizemos então que a equação $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, com $\omega^2 > 0$ descreve o movimento livre sem amortecimento. Este é um exemplo de modelo para o *movimento harmônico simples* (MHS), que é o tipo mais simples de movimento oscilatório, pois não considera a ação de forças externas ao sistema, apenas um deslocamento inicial.

Note que, já temos condições de encontrar duas soluções para esta equação. Pelo Lema 1.2, constatamos que as funções

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) \text{ e } g(t) = \text{cos}(\omega t),$$

satisfazem esta equação diferencial. Estas funções são as soluções fundamentais desta equação diferencial. Aqui encontramos o ápice desta relação entre modelos para fenômenos oscilatórios e funções senoidais, aprendidas no ensino médio. Estas resolvem o modelo mais simples de vibração.

Os próximos modelos serão apresentados, porém só iremos explorar suas soluções de forma sistemática no próximo capítulo.

2.3.2 *Vibrações livres amortecidas*

A discussão sobre o movimento harmônico livre é irrealista, pois supõe que não haja força de retardamento agindo sobre a massa móvel. A menos que a massa esteja suspensa em um vácuo perfeito, haverá pelo menos uma força de resistência devida ao meio ambiente.

Em mecânica, forças de amortecimento agindo em um corpo são consideradas como sendo proporcionais a uma potência de velocidade. Considerando que o deslocamento da massa seja dado pela função $x(t)$, teremos que a velocidade será dada por $\frac{dx}{dt}(t)$. Quando consideramos apenas forças de amortecimento desta natureza agindo sobre o sistema, segue da segunda lei de Newton que

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx - \beta \frac{dx}{dt}(t),$$

em que β é uma constante de amortecimento positiva e o sinal de subtração indica que a força de amortecimento atua em direção oposta ao movimento. Dividindo a equação anterior por m , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (24)$$

onde $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Esta é a equação que modela o comportamento do objeto em uma vibração livre amortecida. Para buscar soluções para esta equação, precisamos entender melhor a teoria sobre as equações diferenciais envolvidas, o que faremos no próximo capítulo.

2.3.3 *Vibração forçada com amortecimento*

Consideremos agora uma força externa $f(t)$ agindo em sistema vibratório massa-mola. Este é o modelo mais realista em muitos casos, por exemplo, se tivermos considerando as

oscilações em uma ponte, esta força externa pode ser a força do vento ou dos passos dos pedestres que nela circulam, ou ainda a força peso dos carros que nela passam.

No geral a força externa $f(t)$ é considerada como uma função periódica que funciona como uma oscilação na barra fixa que sustenta a mola.

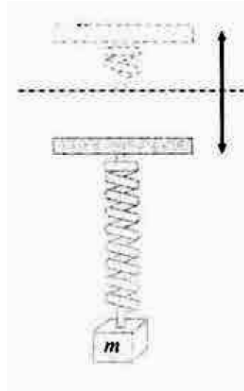


Figura 17

Nós já temos um modelo com amortecimento, agora, a força externa irá compor também a força resultante no sistema massa-mola. Aplicando novamente a segunda lei de Newton obtemos

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}(t)\right) = -kx - \beta\frac{dx}{dt}(t) + f(t),$$

de onde segue que a equação diferencial obtida para o movimento de vibração forçada com amortecimento é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2\lambda\frac{dx}{dt}(t) + \omega^2x(t) = F(t) \quad (25)$$

onde $2\lambda = \frac{\beta}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ e $F(t) = \frac{f(t)}{m}$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: A MATEMÁTICA CONVERSANDO COM A FÍSICA

Como já pudemos verificar, os modelos matemáticos que são usados para descrever o movimento de um objeto no sistema massa-mola são compostos de equações diferenciais, isto é, equações que envolvem uma função e suas derivadas. Neste capítulo faremos um estudo do tipo específico que aparece nos modelos, expondo a forma como estas são resolvidas e de forma particular encontrando a forma das soluções dos modelos obtidos no capítulo anterior. Vale ressaltar que estas equações que estudaremos aparecem também em outros contextos, por exemplo, elas também modelam vibrações elétricas, e aparecem em meio a modelos mais complexos da mecânica quântica (ver [4]). Ao final pretendemos também fazer a análise das soluções obtidas, verificando em alguns exemplos, o comportamento de um objeto em cada um dos casos considerados no capítulo anterior.

Para esta parte do trabalho nos baseamos em [4] e [5]. Vamos prosseguir com algumas definições. Uma equação diferencial na qual a função incógnita é uma função de apenas uma variável, e portanto a derivada que aparece na equação é a derivada total desta função, é chamada de *equação diferencial ordinária* (EDO). A partir daqui será suprimido o ponto de aplicação da função incógnita e de suas derivadas, isto é escreveremos apenas x em vez de $x(t)$.

Classificamos a ordem de uma EDO como sendo a maior ordem de derivação da função incógnita presente na equação. Neste caso, todas as EDOs obtidas nos modelos apresentados nos capítulos anteriores são de segunda ordem.

Uma EDO de ordem n qualquer é dita linear quando, escrita na forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

o termo $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$ é linear em x e suas derivadas. Podendo então ser escrita na forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2(t) \frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} = g(t), \quad (26)$$

onde as funções reais a_1, a_2, \dots, a_{n-1} são os coeficientes da equação.

Caso $g(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos uma EDO linear *homogênea*, do contrário esta é dita *não-homogênea*.

3.1 EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

3.1.1 *Caso homogêneo*

A classe que estudaremos com cuidado é a classe de EDOs de segunda ordem lineares com coeficientes constantes, que escreveremos de forma geral como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = g(t). \quad (27)$$

Para este tipo de equação é possível obtermos soluções analíticas explícitas. Este é um dos poucos casos em que isso é possível.

Para um estudo mais completo das EDOs de primeira e segunda ordem, e mais análises de como estão presentes em contextos físicos estudados no ensino médio veja [18]

Consideraremos primeiramente o caso homogêneo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (28)$$

Vale a pena notar que a última equação pode, também, ser reduzida a um sistema de equações de primeira ordem. De fato, introduzindo $p = \frac{dx}{dt}$, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -cx - bp \end{cases}$$

E neste caso o caminho seria a resolução de sistemas de EDOs de primeira ordem. Não seguiremos por este caminho, iremos buscar soluções para a equação em (28) por meio de hipóteses assertivas que se baseiam na forma da equação e no conhecimento prévio a cerca do comportamento da derivada da função exponencial.

Para que possamos tirar boas conclusões a respeito das soluções é importante conhecer os teoremas que nos ajudam nesta tarefa. Abaixo enunciaremos alguns importantes resultados a respeito das equações diferenciais ordinárias. O primeiro garante que a combinação linear de soluções de EDOs lineares homogêneas é também uma solução

Teorema 3.1. (*Princípio da superposição*) *Se x_1 e x_2 são soluções de uma EDO linear homogênea de ordem n como em (26), então as combinações lineares destas $x(t) = c_1x_1 + c_2x_2$ também serão.*

O segundo teorema garante que, com condições iniciais bem definidas, é possível garantir a existência e unicidade de solução para uma EDO de segunda ordem como as que estamos interessados

Teorema 3.2. (Teorema de existência e unicidade) *Considere o problema de valor inicial*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = g(t), \text{ com } x(t_0) = x_0, \frac{dx}{dt}(t_0) = x'_0,$$

onde b, c e g são funções contínuas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Então, existe exatamente uma solução $x(t)$ para o problema e a solução está definida em todo intervalo I .

O próximo teorema garante condições para que todas as soluções da equação possam ser escritas como combinação linear de duas soluções. Para que este possa ficar enunciado de forma completa precisamos de uma definição. Sejam x_1 e x_2 soluções de uma EDO linear de segunda ordem homogênea. Então, o determinante Wronskiano de x_1 e x_2 , no ponto t é dado por

$$W = W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} \end{vmatrix}.$$

Teorema 3.3. *Sejam x_1 e x_2 soluções da equação diferencial*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = 0,$$

onde b e c são funções contínuas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Se existir um ponto $t_0 \in I$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$, então todas as soluções da equação podem ser escritas na forma

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

com c_1, c_2 constantes que dependem das condições iniciais.

Para que o método de solução não pareça artificial, vamos relembrar alguns aspectos sobre a função exponencial

$$f(t) = e^{rt}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{C}.$$

Esta é uma função cuja taxa de variação é proporcional a ela, mais especificamente,

$$\frac{df}{dt} = re^{rt} = rf(t).$$

Da mesma forma, derivando a função novamente temos

$$\frac{d^2f}{dt^2} = r^2e^{rt} = r^2f(t).$$

Esta propriedade pode ser representada de forma mais geral como

$$\frac{d^n f}{dt^n} = r^n e^{rt} = r^n f(t), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta propriedade nos diz que estas funções são boas candidatas a soluções da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (29)$$

Suponha que $y = e^{rt}$ é solução, onde r é um parâmetro a ser determinado, então substituindo y e suas derivadas na equação acima obtemos

$$r^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(r^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

como $e^{rt} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$r^2 + br + c = 0$$

A equação $r^2 + br + c = 0$ é chamada de equação característica da equação diferencial 29. Esta é uma equação de segundo grau e portanto pode possuir duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais ou duas raízes complexas que serão conjugadas. Vamos analisar cada caso.

Dois raízes reais e distintas

Supondo o discriminante da equação dado por $b^2 - 4c > 0$, as duas raízes da equação característica são distintas e denotadas por r_1 e r_2 , teremos então duas soluções para a equação em (29), $x_1 = e^{r_1t}$ e $x_2 = e^{r_2t}$, tais que $W(x_1, x_2)(t) = (r_2 - r_1)e^{r_1t+r_2t} \neq 0$. Logo, pelo teorema 3.3, todas as soluções da equação podem ser escrita como combinação linear dessas $x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$. Além disso, existe apenas uma escolha possível de c_1 e c_2 para cada conjunto dado de condições iniciais, isto é, existe uma única escolha de c_1 e c_2 tais que a expressão $y = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$ é solução do problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx &= 0 \\ x(t_0) &= x_0, \\ x'(t_0) &= x'_0. \end{aligned}$$

Como $r_1 \neq r_2$ as equações fazem sentido e não importa que condições iniciais sejam dadas, sempre é possível determinar c_1 e c_2 .

Duas raízes reais e iguais

Se na equação característica $r^2 + br + c = 0$, temos que o discriminante satisfaz $b^2 - 4c = 0$, então as raízes da equação são reais e iguais: por $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$, Neste caso teremos apenas uma solução da forma exponencial

$$x_1 = e^{-\frac{bt}{2a}}.$$

E nesse caso não é tão simples encontrar a segunda solução. Usaremos um método devido a D'Alembert, conhecido por redução de ordem. Para isso, supomos que $x_2(t) = u(t)x_1(t)$ é solução da equação característica. Assim, derivando x_2 e substituindo na equação obtemos

$$\frac{dx_2}{dt} = e^{-\frac{bt}{2}} \left(\frac{du}{dt} - \frac{b}{2}u(t) \right)$$

e

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = e^{-\frac{bt}{2}} \left(\frac{d^2u}{dt^2} - b\frac{du}{dt} + \frac{b^2}{4}u(t) \right)$$

Substituindo na equação 29 obtemos

$$e^{-\frac{bt}{2}} \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2} - b\frac{du}{dt} + \frac{b^2}{4}u(t) \right) + b \left(\frac{du}{dt} - \frac{b}{2}u(t) \right) + cu(t) \right] = 0$$

Como $e^{-\frac{bt}{2a}} \neq 0$, pode se concluir após reorganizar os termos restantes que

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c \right) u(t) = 0.$$

O coeficiente de $u(t)$, $[c - (\frac{b^2}{4})]$, é zero, então se reduz a $v''(t) = 0$, logo $u(t) = c_1t + c_2$, Portanto,

$$x(t) = c_1 \cdot t \cdot e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 \cdot e^{-\frac{bt}{2a}}$$

Percebe-se que escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$, x é uma combinação linear de duas soluções

$$x_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}$$

$$x_2(t) = te^{-\frac{bt}{2a}}.$$

Raízes Complexas

Note que as raízes da equação característica, $r^2 + br + c = 0$, só serão complexas se o discriminante $b^2 - 4c < 0$. Desde que as soluções complexas para equações polinomiais só ocorrem aos pares e estas são conjugadas, suponha então que as raízes da equação são complexas e que serão denotadas por

$$r_1 = \alpha + \beta i$$

$$r_2 = \alpha - \beta i$$

onde α e β são números reais. As expressões para as soluções são:

$$x_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t}$$

$$x_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t}.$$

Usando a fórmula de Euler apresentada em (1), teremos que

$$x_1(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)]$$

$$x_2(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t)].$$

As soluções obtidas são complexas. Se combinarmos estas, é possível obter soluções reais

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)] + e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t)] = 2e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

e

$$x_1(t) - x_2(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\text{sen}(\beta t)] - e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\text{sen}(\beta t)] = 2ie^{\alpha t}\text{sen}(\beta t),$$

de onde segue que $u_1(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$ e $u_2(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i}$ são também soluções da equação, e estas são reais. Portanto, a solução geral da equação é dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t), \quad (30)$$

onde c_1 e c_2 são constante arbitrárias determinadas pelas condições iniciais.

3.1.2 Solução da equação de vibração livre não amortecida

No caso de nosso interesse, vibrações mecânicas, teremos naturalmente a ocorrência de raízes complexas na equação característica da EDO, e por conseguinte, é importante percebermos e definirmos alguns termos que aparecem nas soluções. Abaixo apresentaremos a resolução da equação da vibração livre não amortecida. Já conhecemos algumas soluções para esta, mas agora podemos obter todas as possíveis soluções desta equação.

Exemplo 3.4. (Resolução da equação da vibração livre não amortecida) Na seção 2.3.1 mostramos que uma boa equação para modelar as vibrações livres não amortecidas é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ sendo k a constante elástica da mola e m a massa do objeto fixado na parte livre da mola. Agora encontraremos todas as soluções desta equação e analisaremos as características das soluções desta.

Supondo que a solução desta é da forma exponencial $x(t) = e^{rt}$ e substituindo x e suas derivadas na equação, obtemos a seguinte equação característica

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

que tem como solução os números complexos $r_1 = \omega i$ e $r_2 = -\omega i$ e portanto, as soluções reais referentes a estas raízes serão $x_1(t) = \cos(\omega t)$ e $x_2(t) = \sin(\omega t)$. Agora, note que o determinante wronskiano destas soluções é dado por

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{vmatrix} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1,$$

e pelo Teorema 3.3, estas formam um conjunto fundamental de soluções e todas as soluções desta equação são da forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

As constantes podem ser determinadas mediante condições iniciais.

Esta forma de escrever a solução não explicita algumas boas características desta. Para que possamos discutir o comportamento destas de forma mais direta, é conveniente reescrever na forma de função senoidal. Para isso, consideremos $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, e γ um arco tal que $\tan(\gamma) = \frac{c_2}{c_1}$. Assim, teremos que

$$x(t) = A \cos(\gamma) \cos(\omega t) + A \sin(\gamma) \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \gamma).$$

Esses novos parâmetros trazem características da função e da vibração modelada por esta. Mas para isso precisamos deixar claro o que cada parâmetro identifica:

1. O período de vibrações, isto é, o tempo necessário para completar uma oscilação, é $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
2. A frequência circular ω , medida em radianos por unidade de tempo, é chamada de *frequência natural* da vibração;
3. O deslocamento máximo da massa a partir de sua posição de equilíbrio é dado por A e é chamado amplitude do movimento;
4. O parâmetro adimensional γ é chamado de *fase* ou *ângulo de fase* e mede o deslocamento da onda senoidal a partir de sua posição inicial, dada quando $\gamma = 0$.

Algumas observações podem ser obtidas sobre o comportamento da solução obtida por meio destes parâmetros:

1. As oscilações previstas modeladas por $x(t)$ são periódicas;
2. A amplitude da vibração livre não amortecida é constante;

3. O sistema oscila sempre com uma mesma frequência natural, esta não depende da posição inicial do objeto ($x(0)$) e nem de sua velocidade inicial, $\frac{dx}{dt}(0)$, somente da mola e da massa do objeto;

Exemplo 3.5. *Supondo que o movimento obtido para um sistema massa-mola é modelado pela seguinte equação e com as seguintes condições iniciais:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

$$x(0) = 10$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0$$

Determine a posição da massa em qualquer instante posterior, e também, o período, a frequência natural, a amplitude e a fase do movimento.

Solução:

O problema é equivalente a puxar uma massa atada a uma mola para baixo 10 unidades abaixo da posição de equilíbrio, $x(0) = 10$, e então soltá-la a partir do repouso,

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

A solução geral da equação é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

Aplicando as condições iniciais à solução $x(0) = 10 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0$ obtemos $c_1 = 10$ e

$$x(t) = 10 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -40 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t)$$

de onde segue que

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0 = 4c_2 \cdot 1, \text{ e portanto, } c_2 = 0$$

Logo a função que descreve o movimento do objeto é $x(t) = 10 \cos(4t)$. A solução mostra que, uma vez que o objeto seja colocado em movimento, ele permanece em movimento com a massa oscilando para cima e para baixo, com amplitude de 10 unidades de medida. O período de oscilações é $\frac{\pi}{2}$ segundos, e a frequência natural de oscilação é $\omega = 4$ radianos por segundo. A fase é $\gamma = 0$ radianos. Veja a figura abaixo:

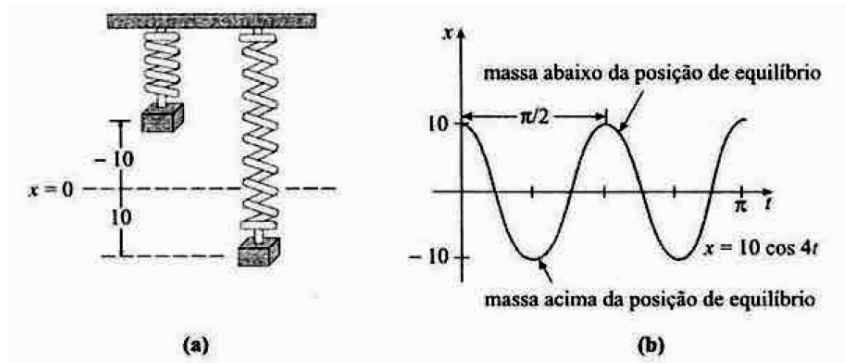


Figura 18

3.1.3 Solução da equação de vibração livre amortecida

Aqui pretendemos apresentar as soluções das equações obtidas para vibrações livres amortecidas, e apresentar alguns exemplos para podermos ilustrar a análise do comportamento das soluções.

Considere a equação (31) que modela o movimento livre amortecido no sistema massa-mola

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0, \quad (31)$$

Esta é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. O símbolo 2λ é usado somente por conveniência algébrica, pois a equação característica obtida é $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ e as raízes correspondente são, portanto

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Podemos agora distinguir três casos possíveis, dependendo do sinal de $\lambda^2 - \omega^2$. Cada solução contém o fator de amortecimento $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, o deslocamento da massa torna-se desprezível após um longo período de tempo.

Caso I - $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

Nesse caso dizemos que o sistema é superamortecido, pois o coeficiente de amortecimento β é grande quando comparado com a constante de elasticidade k . A solução para a equação é dada por

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t})$$

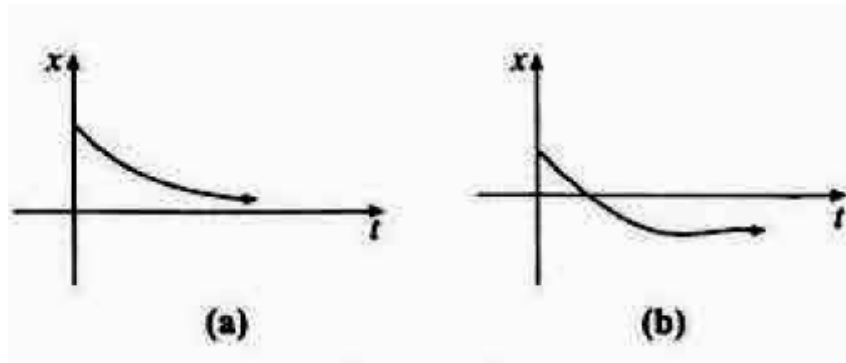


Figura 19

Caso II - $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

Dizemos que o sistema é criticamente amortecido, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

ou

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t)$$

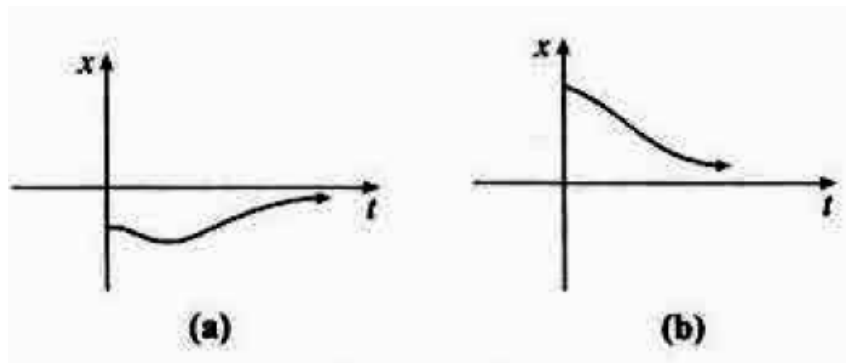


Figura 20

Caso III - $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

Sistema subamortecido tem o coeficiente pequeno se comparado à constante de elasticidade. As raízes r_1 e r_2 são complexas:

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

Portanto a solução geral é

$$y = e^{-\lambda t} [c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t]$$

O movimento é oscilatório, mas por causa do fator $e^{-\lambda t}$, a amplitude de vibração converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$

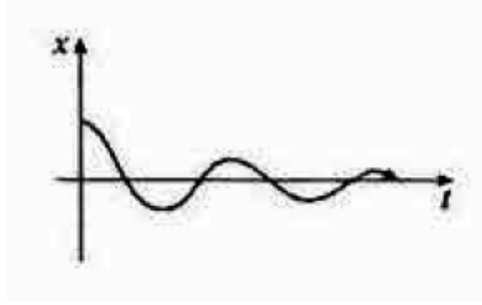


Figura 21

Neste não apresentaremos um exemplo com dados específicos. Deixaremos para tratar este em um exemplo mais completo ao final da próxima seção.

3.1.4 Caso não-homogêneo

No modelo obtido para o sistema massa-mola forçado obtemos uma EDO de segunda ordem linear não-homogênea e com coeficientes constantes. Passaremos a analisar este tipo de equação e as formas de buscar soluções. Considere uma equação da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = g(t), \quad (32)$$

onde b , c e g são funções contínuas em um intervalo aberto I . Os resultados a seguir descrevem a estrutura de solução da equação não-homogênea e fornecem uma base para se construir sua solução geral. Podemos nos perguntar se as soluções desta equação tem relação com as soluções de alguma equação homogênea. Passamos a esta investigação.

Considere a equação sem o termo não-homogêneo $g(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x = 0. \quad (33)$$

Esta é chamada *equação homogênea associada da equação (32)*. Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não-homogênea, então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(Y_1 - Y_2)}{dt^2} + b(t)\frac{d(Y_1 - Y_2)}{dt} + c(t)(Y_1 - Y_2) \\ &= \left[\frac{d^2Y_1}{dt^2} + b(t)\frac{dY_1}{dt} + c(t)Y_1 \right] - \left[\frac{d^2Y_2}{dt^2} + b(t)\frac{dY_2}{dt} + c(t)Y_2 \right] = g(t) - g(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim, se x_1 e x_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada, então

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais, e

$$Y_1(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + Y_2(t),$$

e de forma mais geral, podemos concluir que as soluções das equações lineares não-homogêneas são escritas como

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t),$$

onde x_c é a solução geral da equação homogênea associada e x_p é uma solução particular da equação não-homogênea. Com isso nossa tarefa passa a ser buscar uma solução particular para a equação. Dois métodos usados para encontrar uma solução particular para uma equação não-homogênea são: coeficientes indeterminados e variação de parâmetros.

Neste trabalho nos restringiremos ao método dos coeficientes indeterminados. Será suficiente ao nosso objetivo específico que é analisar um sistema massa-mola forçado, com termo força sendo uma função periódica. Recomendamos [4] para uma leitura mais completa.

O método dos coeficientes indeterminados é baseado em uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $x_p(t)$, que tem forte relação com a forma da função $g(t)$, mas com coeficientes em aberto. Substituindo então, a expressão hipotética na equação homogênea, tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação diferencial e podemos usá-la como solução particular. Se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma suposta. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo.

Dado que o método é baseado em hipóteses iniciais, temos a ele algumas limitações: só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não-homogêneo $g(t)$ consiste em polinômios, funções exponenciais, senos e cossenos. De forma mais específica, considere uma equação da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + c x = g(t). \quad (34)$$

Para esta temos

1. Se $g(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n = P_n(t)$ então, a solução particular é da forma

$$x_p(t) = t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n);$$

2. Se $g(t) = P_n(t)e^{\alpha t}$ então, a solução particular é da forma

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t} (A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n);$$

3. Se $g(t) = P_n(t)e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t)$ ou $g(t) = P_n(t)e^{\alpha t} \text{cos}(\beta t)$ então, a solução particular é da forma

$$x_p(t) = t^s \left[(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n) \text{sen}(\beta t) + (B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_n) \text{cos}(\beta t) \right],$$

onde a potência s é o menor valor natural que faz com que nenhuma das parcelas de $x_p(t)$ seja solução da equação homogênea associada.

Além disso, $g(t)$ pode ser uma soma de funções da forma apontada acima, neste caso o seguinte lema nos garante uma forma de obter a solução particular:

Lema 3.6. *Seja x_{p1} uma solução particular de (32) com $g(t) = g_1(t)$ e x_{p2} solução particular de (32) com $g(t) = g_2(t)$. Então, $x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$ é solução de (32) com $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$.*

Apresentaremos a seguir um exemplo para ilustrar o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 3.7. *Encontre uma solução particular para o problema de valor inicial abaixo:*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 4e^{-t} \text{cos}(2t), x(0) = 1, \frac{dx}{dt}(0) = 0,$$

Solução: O primeiro passo é encontrar as soluções da equação homogênea associada dada por

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Supondo que esta possui solução da forma $x(t) = e^{rt}$ chegamos que r satisfaz a equação característica $r^2 + 2r + 5 = 0$, e portanto $r = -1 + 2i$ ou $r = -1 - 2i$. Assim, segue que $x_1(t) = e^{-t} \text{cos}(2t)$ e $x_2(t) = e^{-t} \text{sen}(2t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação e a solução geral desta é dada por

$$x_c(t) = c_1 e^{-t} \text{cos}(2t) + c_2 e^{-t} \text{sen}(2t).$$

Agora, desde que o termo não-homogêneo da equação é $g(t) = 4e^{-t} \text{cos}(2t)$, a nossa hipótese sobre a solução particular é $x_p(t) = t(A e^{-t} \text{cos}(2t) + B e^{-t} \text{sen}(2t))$, pois $s = 1$ é o menor natural para o qual nenhuma das parcelas é solução da equação homogênea associada. Derivando x_p encontramos

$$\frac{dx_p}{dt} = A e^{-t} (\text{cos}(2t) - t \text{cos}(2t) - 2t \text{sen}(2t)) + B e^{-t} (\text{sen}(2t) - t \text{sen}(2t) + 2t \text{cos}(2t)),$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_p}{dt^2} = & Ae^{-t}(-2\cos(2t) - 3t\cos t + 4t\operatorname{sen}(2t) - 4\operatorname{sen}(2t)) \\ & + Be^{-t}(-2\operatorname{sen}(2t) - 3t\operatorname{sen}(2t) - 4t\cos(2t) + 4\cos(2t)). \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação encontramos:

$$Be^{-t}(4\cos(2t)) - Ae^{-t}(4\operatorname{sen}(2t)) = 4e^{-t}\cos(2t),$$

de onde segue que $A = 0$ e $B = 1$, e

$$x_p(t) = e^{-t}t\operatorname{sen}(2t)$$

é uma solução particular para a equação.

3.1.5 Solução da equação de vibração forçada

Nesta seção iremos apresentar soluções para alguns modelos de vibração forçada, e faremos uma pequena análise de algumas características da solução. Primeiro apresentaremos um problema específico e depois faremos um estudo de caso em uma equação mais simples, mas sem prejuízo de perdermos detalhes importantes.

Abaixo apresentaremos a solução de um modelo particular de vibração forçada amortecida. Ao final faremos uma análise do comportamento da solução obtida.

Exemplo 3.8. *Considere o seguinte modelo de vibração forçada com as seguintes condições iniciais:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + 1,2 \frac{dx}{dt} + 2x &= 5\cos 4t \\ x(0) &= \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 0 \end{aligned}$$

Solução: O problema representa um sistema vibrante que consiste em uma massa ($m = \frac{1}{5}\text{kg}$) atada a uma mola ($k = 2\text{ N/m}$). A massa parte do repouso, $\frac{1}{2}$ metro abaixo da posição de equilíbrio. O movimento é amortecido ($\beta = 1,2$) e está sob a ação de uma força externa periódica ($T = \frac{\pi}{2}\text{seg}$). Intuitivamente, esperamos que, mesmo com amortecimento, o sistema permaneça em movimento enquanto a força externa estiver atuando. Primeiro, multiplicamos por 5 a equação e resolvemos a equação homogênea associada

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

Resolvendo a equação característica, obtemos duas raízes complexas $r_1 = -3 + i$ e $r_2 = -3 - i$, de onde segue que

$$x_c(t) = e^{-3t}[c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)]$$

é a solução da equação homogênea associada. Usando o método dos coeficientes indeterminados, buscamos encontrar uma solução particular que podemos supor da forma

$$x_p(t) = A \cos(4t) + B \sin(4t).$$

Derivando x_p duas vezes e substituindo na equação não-homogênea obtemos

$$\begin{aligned} -16A \cos(4t) - 16B \sin(4t) - 24A \sin(4t) + 24B \cos(4t) + 10A \cos(4t) + 10B \sin(4t) = \\ (-6A + 24B) \cos(4t) + (-24A - 6B) \sin(4t) = \\ 25 \cos(4t) \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} -6A + 24B &= 24 \\ -24A - 6B &= 0 \end{aligned}$$

e resolvendo este sistema linear obtemos $A = \frac{-25}{102}$ e $B = \frac{50}{51}$. Assim, segue-se que

$$x(t) = e^{-3t}[c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)] - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t.$$

Fazendo $t = 0$, na equação acima obtemos $c_1 = \frac{38}{51}$. Derivando a expressão e substituindo novamente $t = 0$, encontramos $c_2 = \frac{-86}{51}$. Portanto, a função que rege o movimento é

$$x(t) = e^{-3t} \left[\frac{38}{51} \cos(t) - \frac{86}{51} \sin(t) \right] - \frac{25}{102} \cos(4t) + \frac{50}{51} \sin(4t)$$

Passamos a analisar o comportamento desta função. Observe que

$$x_c(t) = e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \sin t \right),$$

no exemplo acima, possui a seguinte propriedade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = 0$$

Como $x_c(t)$ se torna desprezível quando t cresce infinitamente, dizemos que ele é um termo transitório ou uma solução transitória. Logo, após um longo período de tempo, os deslocamentos do peso no problema precedente são descritos aproximadamente pela solução particular $x_p(t)$. Esta última função é também chamada de solução estacionária, ou solução do estado estacionário. Isto nos diz que com o passar do tempo as oscilações permanecem, mas estão controladas pela solução estacionária.

Exemplo 3.9. (Resolução de um modelo de vibração forçada não amortecida)

Considere a equação abaixo, que modela uma vibração forçada não amortecida com a ação de uma força externa periódica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = F_0 \operatorname{sen}\gamma t$$

onde F_0 é uma constante. Encontre as soluções desta, analisando os vários valores possíveis para γ .

A solução da equação homogênea associada é dada por $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$. Para obter uma solução particular, supomos $x_p(t) = A \cos(\gamma t) + B \operatorname{sen}(\gamma t)$, assim, derivando x_p duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dt} &= -A\gamma \operatorname{sen}(\gamma t) + B\gamma \cos(\gamma t) \\ \frac{d^2x_p}{dt^2} &= -A\gamma^2 \cos(\gamma t) - B\gamma^2 \operatorname{sen}(\gamma t). \end{aligned}$$

Substituindo estas na equação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_p}{dt^2} + \omega^2x_p &= A(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2)\operatorname{sen}\gamma t \\ &= F_0\operatorname{sen}(\gamma t) \end{aligned}$$

Segue que $A(\omega^2 - \gamma^2) = 0$, $B(\omega^2 - \gamma^2) = F_0$ e então $A = 0$ e $B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}$ ($\gamma \neq \omega$).

Portanto, $x_p = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t)$. Juntando esta à solução da equação homogênea associada temos

$$x_\gamma(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t).$$

Das condições iniciais obtemos $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{-\gamma F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}$. Logo, a solução do problema é

$$x_\gamma(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} (-\gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\gamma t)), \quad \gamma \neq \omega.$$

Assim, a solução obtida tem comportamento periódico para $\gamma \neq \omega$.

Um interessante fenômeno chamado *Ressonância* ocorre quando γ converge para ω , isto é, a frequência da força externa aplicada se aproxima da frequência natural de vibração do sistema. Para entendermos melhor os efeitos desta aproximação, vamos verificar matematicamente o que ocorre com o comportamento da solução $x(t)$ obtida no problema anterior. Para isso, usaremos a regra de L'Hospital (para detalhes ver [19]):

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \rightarrow \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\gamma t)}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\gamma t))}{\frac{d}{d\gamma} \omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{-\operatorname{sen}(\omega t) + \omega t \cos(\gamma t)}{-2\omega\gamma} \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega} t \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Analisando a função obtida podemos ver que os deslocamentos se tornam grandes quando $t \rightarrow \infty$; na verdade, $|x(t)| \rightarrow \infty$. Esta é a principal característica da ressonância.

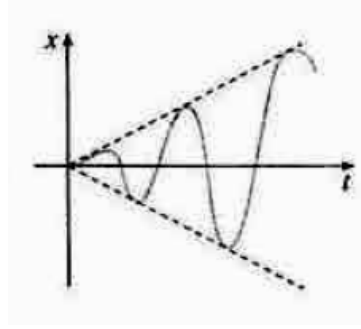


Figura 22

Como vemos, com o passar do tempo, o deslocamento do corpo em relação a sua posição de equilíbrio torna-se grande. Isto ocorrerá até chegar a amplitude limite na qual o sistema se rompe. Nos osciladores reais, sempre existe um pequeno atrito, mas, mesmo neste caso, a amplitude pode se tornar muito grande, e o sistema pode não resistir e quebrar. No projeto de estruturas, prédios, pontes esta deve ser levada muito a sério pelos projetistas, caso contrário, este efeito pode trazer falhas catastróficas na estrutura.

No caso de vibrações subamortecidas, a solução geral para equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \text{sen}(\gamma t)$$

A ideia é essencialmente a mesma.

3.2 A PONTE DE TACOMA NARROWS

Em 1940, mais precisamente no dia 7 de novembro de 1940, a famosa Ponte de Tacoma Narrows teve um colapso e desabou apenas quatro meses após sua inauguração. É possível imaginar a preocupação que recaiu sobre os engenheiros do mundo inteiro.

Sua construção se iniciou em 1938 e foi orçada em 11 milhões de dólares pelo engenheiro Eldridge, mas os setores públicos pediram uma revisão dos custos e Eldridge, não concordando com os cortes nos gastos, abandonou o projeto e em seu lugar assumiu o engenheiro Leon S. Moisseiff que apresentou um orçamento de 7 milhões de dólares.

Mesmo durante as construções foi possível ser observada, pelos técnicos, uma oscilação transversal de amplitude extraordinária. Depois de inaugurada virou atração turística, pois as pessoas achavam divertido dirigir por uma ponte e ter uma sensação de montanha russa.

A ponte Tacoma Narrows era extraordinariamente longa e estreita em comparação com outras pontes suspensas previamente construídas. O design original pedia rigidez na estrutura suspensa com treliças. Contudo, não havia fundos disponíveis, e um endurecimento mais barato foi adotado usando vigas de dois metros e meio de comprimento de cada lado da ponte. Infelizmente, o enrijecimento foi inadequado.



Figura 23

3.2.1 Qual a relação entre a queda da ponte e o estudo das vibrações mecânicas?

Um laudo na época da queda, relatou que o principal motivo do desmoronamento foi *ressonância*. Este afirmava que “o vento era separado pela parte lateral da ponte, que acarreta a formação de vórtice na parte contrária a incidência, implicando força na direção vertical com a mesma frequência das produzidas da ponte” [SOARES, 2012][13].

Pelo que estudamos ao longo do trabalho, é perfeitamente aceitável a ideia de que essa tenha sido uma das razões pelas oscilações que atingiram a ponte e a levaram ao colapso. Segundo RODRIGUES [16], a equação que rege o movimento vertical da ponte é uma equação da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b\frac{dy}{dt} - cy + w(t),$$

onde w é a função que modela a força do vento, $b > 0$ é o coeficiente de amortecimento, e c é a medida de resistência do cabo de sustentação. Assim, já sabemos que se a força do vento produzir ondas de frequências muito próximas da frequência natural da ponte, o efeito é o de ressonância.

Mas em 1990, Lazer e Mckenna publicaram o artigo Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis (Oscilações periódicas de grande amplitude em pontes suspensas: algumas novas conexões com análises não lineares) [10], e nesse eles defendem que a ressonância não pode ter sido a causa principal, pois dependeria de uma frequência natural que não ocorria na região e a ponte oscilava mesmo com a falta de ventos constantes e de mesma velocidade.

Lazer e Mckenna apontam que a ressonância é um fenômeno linear e é mais provável que o ocorrido com a ponte foi um fenômeno não linear e suas interações com o vento. Quando a ponte oscilou os cabos de aço não estariam sempre sob a mesma tensão e com isso a única força atuante era a gravidade. Segundo Lazer-Mckenna a não linearidade estava no fato de vários cabos diferentes estarem em tensões diferentes um do outro e isso

levaria a oscilações de grande amplitude, somando a não linearidade dos cabos, os ventos e uma estrutura frágil, a ponte desabou.



Figura 24

Este incidente foi um marco na história da engenharia, ressonância ainda não parecia ser uma preocupação da engenharia civil até então. Acredita-se que este foi o primeiro momento em que a engenharia civil buscou com mais cuidado verificar as ação da força do vento, e para isso buscou ajuda dos estudiosos da área da aerodinâmica.

Mesmo tendo vários registros do que ocorreu com a ponte de Tacoma na internet (vídeos e fotos reais), é comum encontrar professores e estudantes que nunca ouviram falar sobre o ocorrido. E que ao ver as fortes oscilações da ponte ficam muito surpresos e curiosos. Acreditamos que trazer fatos como esse para a sala de aula, contando um pouco sobre sua história e sua relação com os tópicos estudados, é uma excelente forma de motivar os estudantes ao aprendizado e aprofundamento dos conteúdos.

PROPOSTA DIDÁTICA

Como apresentado nesse trabalho nosso objeto de estudo são as funções trigonométricas sob os aspectos dos fenômenos oscilatório, então para completar esse trabalho vamos apresentar uma proposta de atividade para ser aplicada em sala de aulas.

Além de fornecer ferramentas geométricas e resultados matemáticos importantíssimos, a trigonometria dá origem a funções que são usadas em muitos ramos das ciências e das tecnologias. Apesar dessa importância, os alunos do ensino médio usualmente não entendem o significado ou o papel das funções trigonométricas no mundo moderno.

A proposta é a utilização do software "Ondas Trigonométricas" desenvolvido pela UNICAMP e pode ser encontrado no site da coleção Matemática Multimídia [17] que é um conjunto com mais de 300 recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio.

Este software não cobre todas as funções trigonométricas e usa apenas alguns exemplos de aplicações da trigonometria, mas já é um ponto de partida para os alunos entenderem as muitas implicações das funções trigonométricas. A seguir vamos ver um roteiro proposto pelo próprio autor. E logo depois veremos alguns exemplos de questões que compuseram alguns vestibulares do Brasil inclusive o ENEM, o maior exame do país.

4.1 O SOFTWARE : ONDAS TRIGONOMÉTRICAS

Sinopse: No software "Ondas trigonométricas", é estudado fenômenos periódicos e aprendemos a modelar tais fenômenos usando a função seno. Ao longo das atividades, aprendemos como cada parâmetro a , b , c e d , da função $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ pode ser ajustado ao fenômeno observado. Os alunos verão que essa função pode ser aplicada para modelar as mais diversas situações, como, por exemplo, a rotação de uma roda gigante, as oscilações da maré ou o brilho de uma estrela.

Conteúdo: Trigonometria, função seno, função cosseno e funções periódicas.

Objetivos: Mostrar alguns fenômenos descritos por funções trigonométricas; Usar dados experimentais ou observacionais e fazer ajustes aproximados a funções elementares. Sobre este software trata de algumas aplicações de funções trigonométricas e, portanto, os alunos já devem conhecer os princípios das funções seno e cosseno. Embora as atividades possam ser feitas em qualquer ordem, deve-se sugerir ao aluno que execute a sequência indicada no software. Além disso, é importante que os alunos se dirijam ao ambiente informático munidos de caderno de rascunho e de lápis ou caneta para anotações.

Material relacionado: Experimentos: Roda Gigante; Vídeos: Os ângulos e as Torres, Um caminho para o Curral, Transportando, Alice e as relações trigonométricas; Software: Trigonometria e Raios Luminosos.

A atividade 1 é uma revisão da função $asen(b \cdot x + c) + d$. Nas quatro primeiras partes, permite-se a variação de um parâmetro por vez, e, na quinta e última parte, o aluno pode variar os quatro parâmetros à vontade.

As atividades 2, 3 e 4 são aplicações interessantes, envolvendo fenômenos ou situações periódicas nas quais a função $asen(b \cdot x + c) + d$ é útil para a descrição do brilho de uma estrela variável, da altura das marés e de uma roda gigante composta. Não é necessário que os alunos resolvam todas essas atividades, ficando a critério do professor decidir quais devem ser resolvidas.

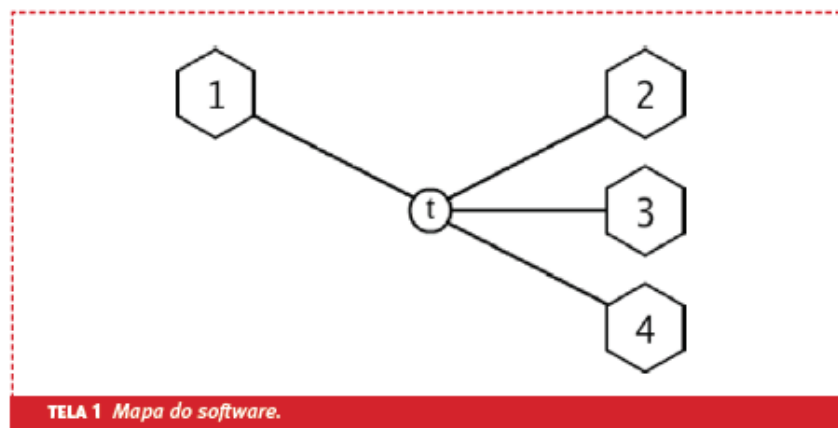


Figura 25

Os valores digitados por um aluno ficam armazenados no computador que ele usar. Assim, se o aluno voltar ao mesmo computador, os dados que ele usou no software estarão disponíveis, a não ser que outro aluno utilize o mesmo computador para estudar o mesmo software. Estes valores podem ser apagados no canto superior direito da página do mapa do software, para que outro aluno também possa desenvolver a atividade plenamente.

4.1.1 Atividade 1: A função seno

A Atividade é composta por cinco partes, e é nelas que o aluno vai se familiarizar com a abordagem matemática do assunto. Esta atividade é longa em relação as demais, mas é fundamental para que as aplicações sejam significativas em termos de aprendizagem.

A unidade usada para os argumentos destas funções é radianos.

A estrutura sugerida é a seguinte:

- Primeira parte, o aluno vai estudar o comportamento da função $sen(x + c)$, sendo possível variar o parâmetro c , que é chamado de “fase”. nesta parte, o aluno vai aprender que as funções seno e cosseno estão relacionadas apenas por uma diferença de fase.

- Segunda parte, a função $a \cdot \text{sen}(x)$ é estudada, para o aluno entender a amplitude a .
- Terceira parte, é a vez de estudar a função $\text{sen}(b \cdot x)$, para a compreensão da frequência e do período desta função trigonométrica. Desta vez, o aluno deverá variar o parâmetro b .
- Quarta parte, é a vez da função $a \cdot \text{sen}(x) + d$, para o aluno ter uma noção de magnitude de uma função oscilatória variando o parâmetro d .
- Quinta parte é o fechamento da atividade. Nela, o aluno pode variar todos os parâmetros da função $a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$, para encontrar a curva que melhor se ajuste à curva previamente dada. Essa curva é gerada randomicamente pelo software, assim, os alunos podem ter curvas distintas para fazer os ajustes.

As questões para serem respondidas na Atividade 1 são simples, mas exigem o uso da calculadora em algumas delas. Os alunos podem usar a calculadora incluída no software ou outra calculadora científica. Para os propósitos da atividade, a aproximação decimal $\pi = 3,14$ é suficiente.

4.1.2 Atividade 2: Brilho estelar

Quando vemos as estrelas em um céu claro, podemos ter a impressão de que o brilho delas varia um pouco. Geralmente, essa variação se deve a flutuações de transparência da atmosfera. Mas a variação de que trata esta atividade só é observada por sensíveis telescópios profissionais. Os astrônomos descobriram que algumas estrelas brilham com intensidade que varia com frequências muito regulares e permanentes. Essas estrelas foram classificadas como “estrelas variáveis”, e são muito importantes, pois servem de referências para medir distâncias intergalácticas.

Esta atividade tem duas partes.

- Primeira, os alunos são desafiados a encontrar a função $a \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ que melhor se ajusta ou se aproxima às observações dadas.
- Segunda parte, os alunos verão que a curva de luminosidade mais realista tem alguns aspectos similares à função estudada, $a \text{sen}(b \cdot x + c) + d$, mas tem algumas características diferentes também.

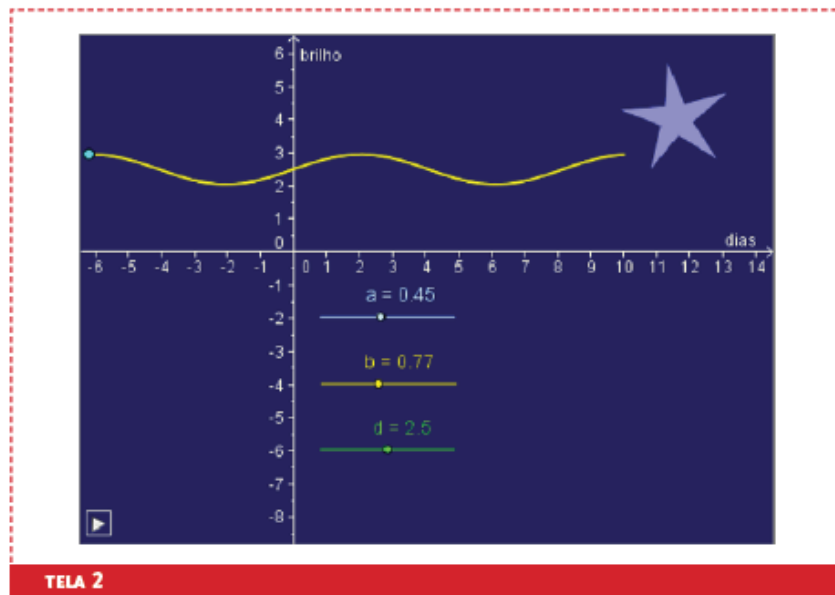


Figura 26

As questões e as respostas da primeira parte desta atividade são as seguintes:

A · Quais valores devem ser atribuídos aos parâmetros a , b e d , e na função $f(t) = a \cdot \text{sen}(bt) + d$, de modo que ela descreva o brilho da estrela Delta Cephei?

Resposta esperada: Com base nas informações dadas, encontramos $a = 0,36; b = 1,16; d = 4,00$.

B · Ajuste o valor de c para que o brilho da estrela seja máximo quando $t = 0$.

Resposta esperada: Pela curva do gráfico, obtemos aproximadamente $c = 1,50$.

4.1.3 Atividade 3: Marés

Os fenômenos das marés altas e baixas estão relacionados à interação gravitacional da Terra, que pode ser analisada como um corpo elástico e fluido (em contraste com um ponto matemático ou com um corpo rígido, como a Lua e o Sol). No entanto, mesmo não conhecendo as causas das marés altas e baixas, temos os dados observados, aos quais podemos ajustar a função $a \text{sen}(b \cdot x + c) + d$.

Os alunos devem ajustar os parâmetros para os dados plotados no gráfico. Observe que o valor aproximado para o parâmetro b será $b = 12,2$.

O valor com maior precisão é 12,26. Isto implica no período da função ser $2\frac{\pi}{b} = 0,5125$. A unidade utilizada foi dia e, portanto, 0,5125 dia equivale a 12,3 horas, ou seja, o período entre as marés é de 12 horas e 20 minutos (de acordo com estes dados e com esta precisão). A parte 2 desta atividade apenas apresenta os dados de alguns meses em que outras variações aparecem.

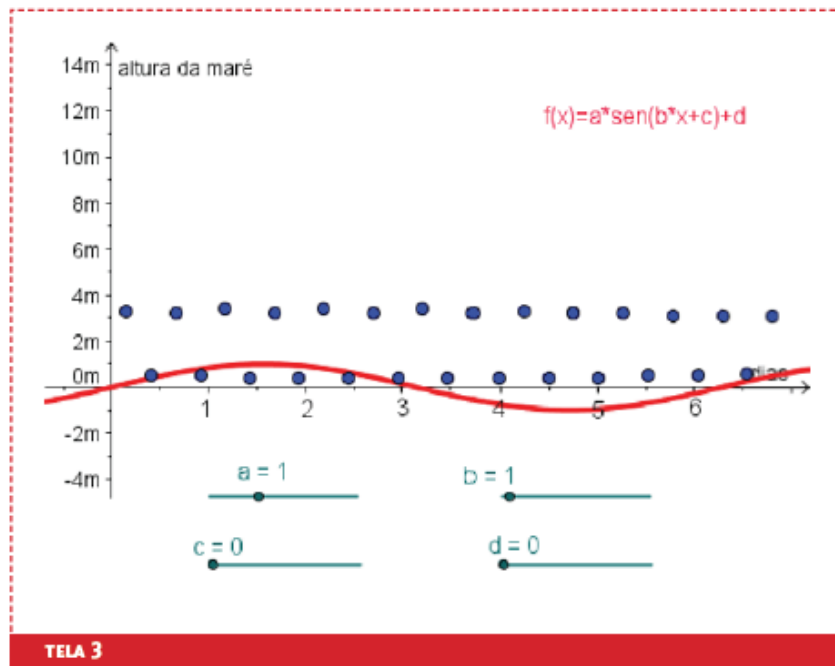


Figura 27

4.1.4 Atividade 4: Roda gigante composta

A composição de engrenagens, em especial as de rodas, é comum em máquinas e em ferramentas desde a revolução industrial. Nesta atividade, os alunos podem ver, de maneira lúdica, a composição de duas rodas no modelo de uma roda gigante.

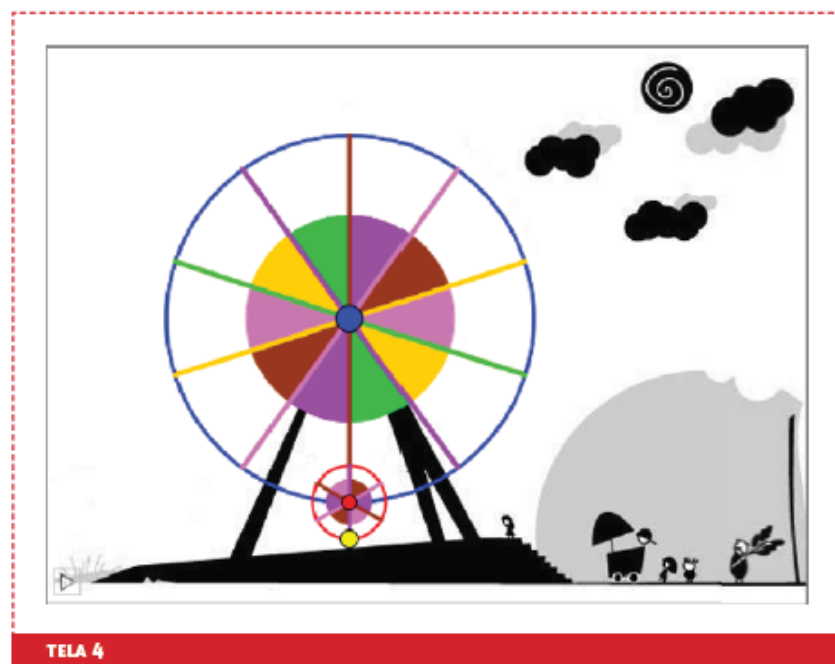


Figura 28

Na parte 1, ajustamos os parâmetros da função

$$h_1(t) = a_1 \cdot \text{sen}(b_1 \cdot t + c_1) + d_1$$

para a descrição da altura de um ponto P na circunferência maior. Com auxílio das informações e da animação, os alunos devem obter $a_1 = 20$; $b_1 = 0,052$; $c_1 = -1,62$; $d_1 = 24$.

Na parte 2, ajustamos os parâmetros da função

$$h_1(t) = a_2 \cdot \text{sen}(b_2 \cdot t + c_2) + d_2$$

para que ela descreva a altura da cadeira (ponto amarelo) em relação ao ponto P . Os alunos devem obter $a_2 = 4$; $b_2 = 0,26$; $c_2 = 0$; $d_2 = 0$.

Finalmente, na parte 3, os alunos poderão perceber que a altura do ponto P em relação ao chão no momento t é dada por $h_1(t) + h_2(t)$.

A · Qual é a altura máxima em metros que a cada cadeira pode atingir?

Resposta esperada 48.

B · De quanto em quanto tempo em segundos uma pessoa pode descer da cadeira?

Note que uma pessoa só pode descer quando a cadeira está na altura mínima.

Resposta esperada: 120, que é o mínimo múltiplo comum de 24 e 120.

Este software vai dar uma noção aos alunos das possibilidades de usar as funções da classe $a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$, em que a , b , c e d são parâmetros ajustáveis, e x é a variável. Esperamos que, com este software, os alunos possam entender vários movimentos ou fenômenos periódicos. Uma das principais características destas funções é a periodicidade. Uma função periódica se repete a cada período, ou melhor, seja $f(x)$ o valor da função para algum x , então a função é periódica de período p se $f(x + np) = f(x)$ para qualquer número inteiro n . As funções trigonométricas $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$ e $\text{tg}(x)$ são exemplos de funções periódicas de período 2π radianos.

Professor, aproveite para chamar a atenção dos alunos para vários fenômenos periódicos ou quase periódicos que acontecem todos os dias: o Sol nasce e se põe periodicamente, assim como a Lua; o nosso coração se expande e se contrai muitas vezes a cada minuto; nós inspiramos e expiramos algumas vezes por minuto; os processadores dos computadores fazem suas operações dentro de um ciclo de microssegundos; o som é a vibração do ar no qual a pressão oscila em um período de milissegundos; a luz é a vibração de campos eletromagnéticos que variam periodicamente a cada 10^{-15} segundos dependendo da cor, etc.

4.2 ALGUNS EXEMPLOS DE QUESTÕES DE VESTIBULAR

Nesta seção vamos trazer algumas questões de vestibulares brasileiros para que o professor possa utilizar em suas aulas e, também, para exemplificar a forma como o assunto é abordado em exames nacionais.

4.2.1 *Universidade Federal do Rio Grande do sul*

A primeira questão é do vestibular da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Questão 4.1. (Ufrgs 2019) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5 \operatorname{sen}(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de são, respectivamente,

- a) $-2, 8, \pi$
- b) $8, -2, \pi$
- c) $\pi, -2, 8$
- d) $\pi, 8, -2$
- e) $8, \pi, -2$

Resposta da questão 4.1: [B]

Sabemos que $\operatorname{sen}(2x + 4) = \pm 1$, então $f(x) = 3 + 5$, se $\operatorname{sen}(2x + 4) = -1$, então $f(x) = 8$ que é o valor máximo. Ou ainda, $f(x) = 3 - 5$, se $\operatorname{sen}(2x + 4) = 1$, então $f(x) = -2$ que é o valor mínimo.

E para o cálculo do período, temos

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

4.2.2 *Universidade de São Paulo*

Agora uma questão da fuvest, órgão que organiza o vestibular da USP.

Questão 4.2. (Fuvest 2018)

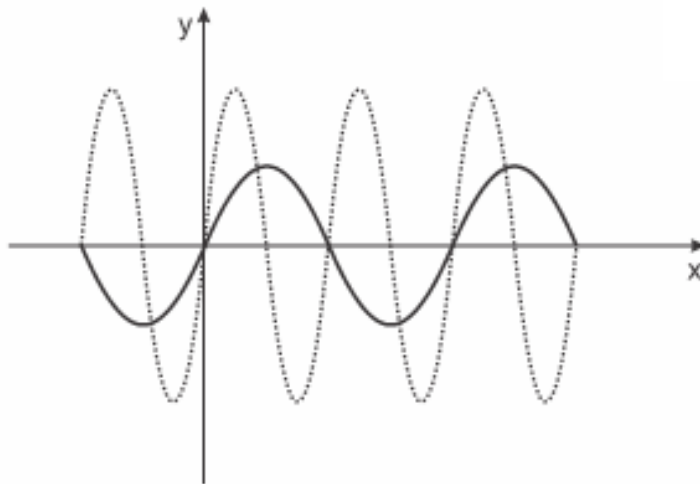


Figura 29

Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e que a linha contínua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha \operatorname{sen} \beta x$ segue que

- a) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.
 b) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.
 c) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$
 d) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$
 e) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$

Resposta da questão 4.2:[A]

Vamos supor que α e β sejam reais positivos. Sabendo que $Im_f = [-1, 1]$ e $P_f = 2\pi$, dos gráficos, temos $Im_g = [-\alpha, \alpha]$ com $0 < \alpha < 1$ e $P_g = 4\pi$. Assim, vem $0 < \beta = \frac{1}{2} < 1$.

4.2.3 ENEM

Os próximos dois exemplos são do exame mais importante do Brasil, o ENEM.

Questão 4.3. (Enem 2019) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

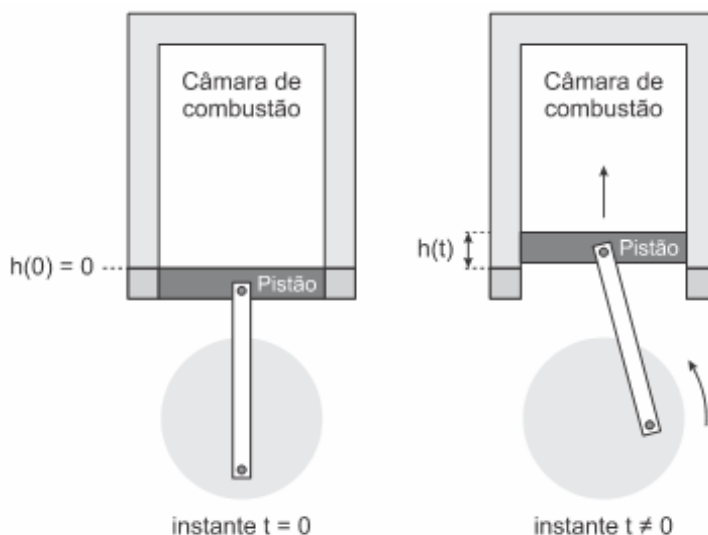


Figura 30

A função $h(t) = 4 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro β que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$) a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

- a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resposta da questão 4.3:[D]

Se $h(t) = 6$ então $6 = 4 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$

Logo, sendo $t \geq 0$ temos $\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \in \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \dots$

Portanto, como a altura de 6cm deve ser atingida 3 vezes, vem

$$\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}.$$

Ademais, sabendo que a altura de 6cm deve ser alcançada pela terceira vez antes de 4 segundos, temos

$$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \Rightarrow \beta > \frac{4\pi}{3} \cong 4,$$

ou seja, o menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β é 5.

Questão 4.4. (Enem 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

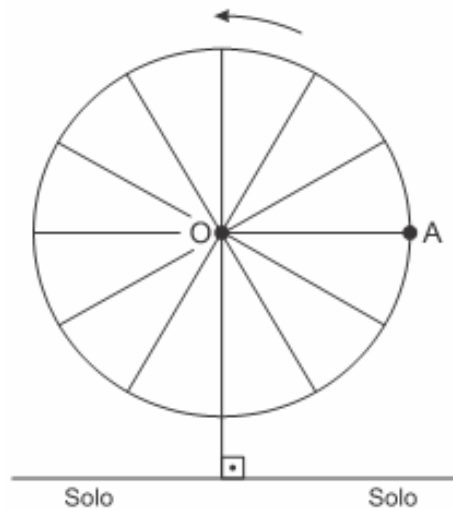


Figura 31

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A em relação ao solo, em função de t .

Após duas voltas completas, t tem o seguinte gráfico:

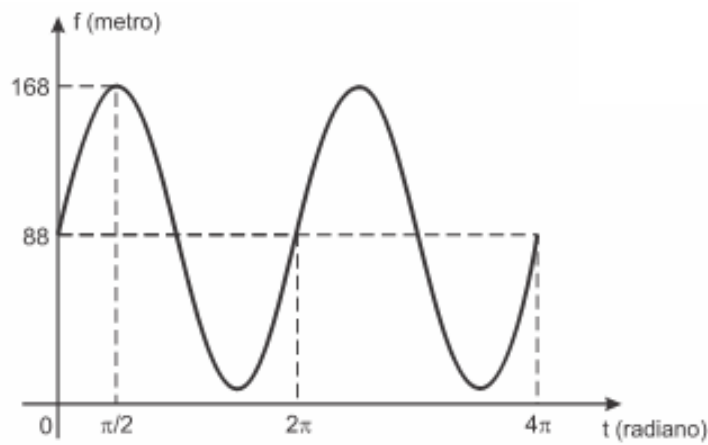


Figura 32

A expressão da função altura é dada por

- a) $f(t) = 80 \operatorname{sen}(t) + 88$
- b) $f(t) = 80 \operatorname{cos}(t) + 88$
- c) $f(t) = 80 \operatorname{cos}(t) + 168$
- d) $f(t) = 168 \operatorname{sen}(t) + 88 \operatorname{cos}(t)$
- e) $f(t) = 88 \operatorname{sen}(t) + 168 \operatorname{cos}(t)$

Resposta da questão 4.4:[A]

A função f é do tipo $f(t) = a + b \operatorname{sen}(mt)$.

Logo, sendo $f(0) = 88$ temos $a = 88$.

Pelo gráfico, sabemos que o período de f é 2π e, portanto, vem $m = 1$.

Finalmente, como $f(\frac{\pi}{2}) = 168$ obtemos $168 = 88 + b \Leftrightarrow b = 80$.

A resposta é $f(t) = 88 + 80 \operatorname{sen} t$

4.2.4 Universidade Federal do Paraná

Questão 4.5. (Ufpr 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura.

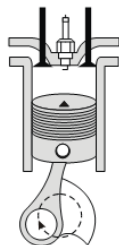


Figura 33

Suponha que em um instante t , em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{0,05} \right) + 4$$

- a) Determine a altura máxima e mínima que o pistão atinge.
 b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

Resposta da questão 4.5:

- a) A altura máxima ocorre quando o valor do seno é máximo, ou seja, $\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{0,05} \right) = 1$
 e $h_{\text{máximo}} = 4 \cdot 1 + 4 = 8\text{cm}$

A altura mínima ocorre quando o valor do seno é mínimo, ou seja, $\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{0,05} \right) = -1$.
 $h_{\text{mínima}} = 4 \cdot (-1) + 4 = 0\text{cm}$;

- b) Determinando o período P da função, temos:

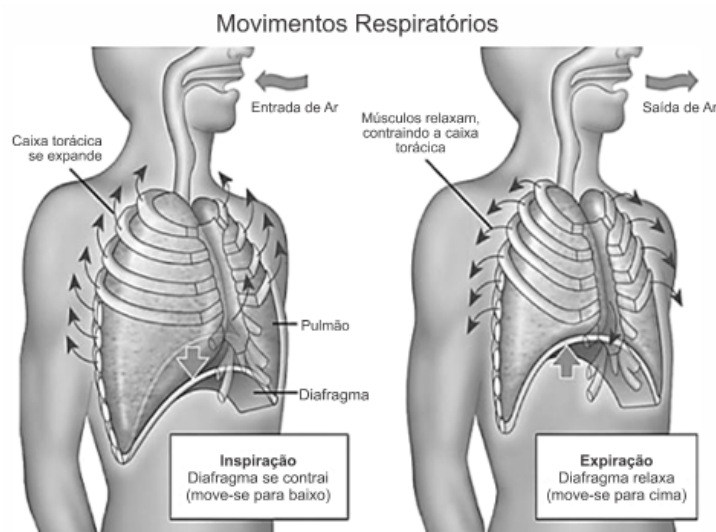
$$P = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0,05}} = 0,05\text{s}.$$

1 ciclo se realiza em 0,05s e em 60s teremos 1200 ciclos completos.

4.2.5 Universidade Federal de Santa Catarina

Questão 4.6. (Ufsc 2018) Entre as doenças causadas pelo uso de cigarros, estão o câncer e outras doenças cardiovasculares. Sendo Maria fumante, resolveu consultar um médico para verificar a existência de algum problema de saúde. Em sua primeira consulta, o médico recomendou que Maria realizasse vários exames, entre eles um que faz o mapeamento do volume de ar nos pulmões. Após Maria realizar esse exame, o especialista informou que o volume de ar em litros, nos pulmões de Maria variou em função do tempo em segundos, de acordo com a função

$$V = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{5} \right)$$



Disponível em: <<https://www.sobiologia.com.br>>. Acesso em: 14 maio 2018.

Figura 34

a) Com base na função dada, determine, na forma decimal, os valores de máximo e de mínimo do volume de ar, em litros, dos pulmões de Maria.

b) Com base na função dada, determine quanto tempo, em segundos, Maria leva para realizar um ciclo respiratório completo.

c) Considerando o primeiro ciclo respiratório descrito na função dada, qual é o tempo, em segundos, que fornece o volume máximo de ar nos pulmões de Maria? (Expresse o resultado na forma decimal)

d) Os exames de sangue de Maria revelaram a carência das seguintes vitaminas: e Em um segundo momento, Maria consultou uma nutricionista, que definiu uma dieta diária contendo exatamente unidades de vitamina unidades de vitamina e unidades de vitamina Essas vitaminas são encontradas em quantidades variadas em três alimentos: e . A tabela abaixo fornece o número de unidades das vitaminas e encontrado em cada um dos três alimentos.

	A ₁	A ₂	A ₃
A	1	2	3
B	2	1	1
C	1	2	1

Figura 35

Determine as quantidades de cada tipo de alimento que a nutricionista deve incluir na dieta diária de Maria.

Resposta da questão 4.6:

a) Teremos: $V = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$;

e

$$V_{\text{máximo}} = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) = 1 \Rightarrow V_{\text{máximo}} = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} = \frac{30}{10}L \Rightarrow V_{\text{máximo}} = 3L$$

b) Para $t = 0 \Rightarrow \frac{2\pi t}{5} = 0$. O primeiro ciclo completa-se quando $\frac{2\pi t}{5} = 2\pi$ e o tempo é o período (T). Assim: $\frac{2\pi}{5}T = 2\pi \Rightarrow T = 5s$;

c) Sempre que $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right) = 1$, ocorre um máximo. O primeiro é, então, para $\frac{2\pi t}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{4}s \Rightarrow t = 1,25s$. O gráfico mostra o comportamento da função $V = f(t)$ para o primeiro ciclo

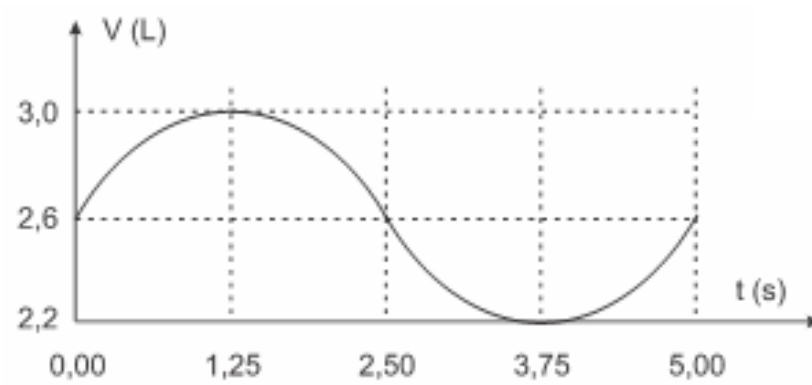


Figura 36

d) Teremos:

	A_1	A_2	A_3	Total
A	1a	2b	3c	15
B	2a	1b	1c	14
C	1a	2b	1c	11

Figura 37

A nutricionista deve incluir a quantidade de A_1 , b quantidade de A_2 e c quantidade de A_3 . Montando o sistema:

$$a + 2b + 3c = 15 \quad (I)$$

$$2a + b + c = 14 \quad (II)$$

$$a + 2b + c = 11 \quad (III)$$

Fazendo

$$(I) - (III) : 3c - c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$(I) - (II) + (III) : 3b + 3c = 12 \Rightarrow 3b + 3(2) = 12 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2.$$

$$(I) : a + 2(2) + 3(2) = 15 \Rightarrow a + 10 = 15 \Rightarrow a = 5$$

Portanto

$$A_1 \rightarrow 5$$

$$A_2 \rightarrow 2$$

$$A_3 \rightarrow 2$$

Essas seis questões selecionadas mostram como o assunto tem sido trazido em exames de acesso as universidades mais renomadas do país. Mais um sinal do cuidado que devemos ter com o ensino das funções senoidais no ensino médio, e de maneira especial, na série final.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre funções senoidais e como estas estão intimamente ligadas a modelagem de sistemas mecânicos vibratórios. Para que fosse possível analisar as soluções do modelo e concluir algo, precisamos conhecer um pouco sobre EDOs lineares de segunda ordem. O estudo deste tipo de equação é repleto de detalhes e ajuda a compreender melhor os conceitos que nele se cruzam. Também trouxemos um pouco da história de grande gênios da Física e da Matemática, com o objetivo de trazer o olhar do leitor para este tipo de incremento que nos ajuda a entender melhor as motivações de conceitos e métodos. Ao final apresentamos alguns exemplos de atividades por meio de um software, no formato de proposta de atividade, que busca aproximar os aluno, e o professor, do tema.

Existe uma carência de estudo no ensino médio sobre funções trigonométricas, por vezes o motivo é a falta de exemplos motivadores que sempre levam o aluno a se questionar o porquê de estar aprendendo tal assunto. Hoje o BNCC é claro na exigência do aluno dominar algumas competências, e esse trabalho propõe ao professor leitor um olhar sobre o assunto, além de provocar um interesse em novas pesquisas, assim poderemos diminuir essa distância entre a matemática e vida cotidiana.

No decorrer dos estudos sobre as EDOs de segunda ordem o principal objetivo foi reconhecê-las como uma ferramenta para modelagem de fenômenos vibratórios, e convidar o professor leitor a fazer um aprofundamento sobre o assunto. Este de fato não faz parte das competências do ensino médio, porém ao estudar estas e suas aplicações, o professor estará aprendendo um pouco mais sobre os aspectos das funções e certamente isso terá reflexo na forma como aborda o conteúdo em sala de aula.

A importância das funções senoidais e das EDOs para inúmeras profissões, deveria fazer deste tópico um dos mais estudados em sala de aula, tanto no ensino médio (funções senoidais) quanto na graduação (EDOs), mas não percebemos isto refletido em nenhuma destas etapas. Esperamos que a leitura desse trabalho tenha colaborado para que o professor e o aluno tenham mais interesse sobre os assuntos e possa cada vez fazer mais sentido o estudo de tais conteúdos .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LIMA, Elon Lages; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Eduardo Vagner; Augusto César Morgado. A Matemática do Ensino Médio. 11 ed. Rio de Janeiro, rj: SBM, 2016.
- [2] Revista Mathematical Reviews. the American Mathematical Society (AMS) <http://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews>
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: novembro de 2019.
- [4] BOYCE, Willian E.; C.DIPRIMA, Richard. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8. ed. Rio de Janeiro,rj: Ltc, 2006. Tradução de: Valéria de Magalhães Iorio.
- [5] ZILL, Dennis G.;Michael R.Cullen. Equações Diferenciais, volume 1. 3. ed. São Paulo,sp: Pearson Makron, 2001. Tradução de: Antonio Zumpano.
- [6] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 5 ed. Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de: Hygino H. Domingues.
- [7] Mol, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013. 138 p.
- [8] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo,sp: Edgard Blücher, 1974. 487 p. Tradução de: Elza F. Gomide.
- [9] DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo,sp: ática, 2014. 424 p. 2 v.
- [10] LAZER, A.C.; MCKENNA, P.J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis. SIAM Review, v.32, n.4, p.537-578, dec. 1990.
- [11] GIES, Joseph. Bridges and Men: Doubleday. Bridges and Men, Twin Views of the TACOMA NARROWS BRIDGE COLLAPSE. Garden City, New York, 1963. Disponível em: https://www.aapt.org/Store/upload/tacoma_narrows2.pdf. Acesso em: 1 dez. 2019.
- [12] CAVALCANTI. Ponte Tacoma Narrows, 1940 – Um estudo dos efeitos não-lineares. 2015. Disponível em: <http://www.astropt.org/2015/04/06/ponte-tacoma-narrows-1940-um-estudo-dos-efeitos-nao-lineares/>. Acesso em: out. 2019.

- [13] SOARES, R.A.L.; BARBOSA F.R. O uso de equações diferenciais na justificativa do desabamento da ponte Tacoma Narrows. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, 2012.
- [14] PERCÍLIA, Eliene. "Robert Hooke"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/biografia/robert-hooke.htm>. Acesso em setembro de 2019.
- [15] MILLER Jr, FRANKLIN. Tacoma Narrows Bridge Collapse. Garden City, New York, 1963. Disponível em: https://www.aapt.org/Store/upload/tacoma_narrows2.pdf. Acesso em: 1 dez. 2019.
- [16] Rodrigues, Allyson S.; Matheus M. G. Mergulhão; Thiago C. Oliveira; Aislan primo; Maria Anita s. S. De Mendonça. EFEITOS NÃO-LINEARES LIGADOS À QUEDA DA PONTE DE TACOMA NARROWS. Aracaju, SE. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernoexatas/article/view/4030>. Acesso em: 1 dez. 2019.
- [17] Leonardo Barichello, Samuel Rocha de Oliveira. Matemática Multimídia. Disponível em <https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1240/>. Acesso novembro de 2019
- [18] Silva, Rodrigo. Uma introdução sobre EDOs e suas contribuições no ensino de tópicos de Ciências Exatas no Ensino Médio – São José dos Campos, 2018.
- [19] STEWART, James. CÁLCULO. 7. ed. São Paulo, sp: Cengage Learning, 2013. 1 v.
- [20] Santos Junior, Jailson dos. IMPORTÂNCIA DOS ESTUDOS DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS PARA A FORMAÇÃO DO ENGENHEIRO MECÂNICO. Alagoinhas, BA 2018
- [21] da Silva, Emilly Dias; del Prado, Zenón José Guzmán Núñez. Controle de Vibrações de Pontes Sujeitas a Cargas Dinâmicas Utilizando Amortecedor Móvel. Universidade Federal de Goiás. 2018
- [22] Assao, Denny Yuti ; Gabriela de Arruda Ribeiro; Heloísa Magno. Física ondulatória: conceitos massa-mola. UFPB. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/Rived/130ndas/html/conceitosMassamola.html>. Sorocaba, SP. Acesso em novembro de 2019.