**Universidade Federal de São Paulo**

Instituto de Ciência e Tecnologia


# Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# A importância de conteúdos desenvolvidos no ensino básico para o aprendizado das equações diferenciais


**Débora Cervellini Sant Anna**

Orientador: Prof Dr.Luiz Leduino de Salles Neto



**São José dos Campos**

**Janeiro, 2020**

Título: *A importância de conteúdos desenvolvidos no ensino básico para o aprendizado das equações diferenciais*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

**São José dos Campos**
**Janeiro, 2020**

Cervellini Sant Anna, Débora

**A importância de conteúdos desenvolvidos no ensino básico para o aprendizado das equações diferenciais** , Débora Cervellini Sant Anna – São José dos Campos, 2020.

viii, 40f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Title

1. aprendizado. 2. equações. 3. modelagem de problemas . 4. logartimo e exponencial. 5. ensino básico .

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO**

**INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
**PROFMAT**

**Chefe de departamento:**
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

**Coordenador do Programa de Pós-Graduação:**
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

DÉBORA CERVELLINI SANT ANNA

# A IMPORTÂNCIA DE CONTEÚDOS DESENVOLVIDOS NO ENSINO BÁSICO PARA O APRENDIZADO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

**Presidente da Banca:**

Prof.(a) Dr.(a) Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

**Banca Examinadora:**

Michael Macedo Diniz

Prof(a). Dr(a). Michel Macedo Diniz

LfBueno

Prof(a). Dr(a). Luís Felipe César da Rocha Bueno

Prof(a). Dr(a). Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos

**Data da Defesa:** 31 de janeiro de 2020

*O Senhor é meu Pastor e nada me faltará. Salmos 23:1*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me capacitou, me deu força e entendimento para poder realizar meus sonhos. Agradeço aos meus pais Luiz e Lídia que sempre incentivaram a mim e meus irmãos a estudar e correr atrás de seus sonhos e desejos. Agradeço aos meus filhos Davi e Yuri que foram pacientes e sempre me auxiliaram no que podiam para deixar as coisas em ordem. Agradeço aos professores que durante esses dois anos nos transmitiu ensinamentos e nos incentivou a sempre estudar mais, em especial, agradeço ao professor Doutor Luiz Leduino de Salles Neto que me orientou neste projeto. Agradeço ao meu marido Adriano, sem duvida a pessoa mais importante na minha vida , por aguentar meu choro, meu mau humor, minhas inseguranças e por me incentivar a continuar mesmo com todas as adversidades que apareciam.

## RESUMO

Nesta dissertação estudamos as equações diferencias de 1º e 2º ordens, destacando os conteúdos do ensino básico que são de extrema importância para o aprendizado das equações diferenciais. Apresentamos situações problema, modelando-as e as revolvendo usando as equações diferenciais. Acreditamos que este trabalho possa ajudar e esclarecer aos professores de ensino básico o quão importante são os conteúdos ensinados por eles na formação do profissional na área das ciências exatas.



**Palavras-chave:** 1. aprendizado. 2. equações. 3. modelagem de problemas . 4. logartimo e exponencial. 5. ensino básico .



## ABSTRACT

In this project we will study the differential equations of firts and seond orders, highlighting the contents of basic education that are extremely important for the learning of differential equations. We will approach problem situations differential equations. I hope that at the end of this work you can help and clarify the elementary school teachers how important are the contents taught by them in the education of the exact sciences professional.



**Keywords:** 1. learning. 2. equations. 3. problem modeling. 4. logarithm and exponential. 5. basic education.

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia surgiram novos problemas e novas ferramentas para resolvê-los, contudo a modelagem continua sendo uma etapa essencial para a resolução destes problemas. As equações diferenciais são usadas para modelagem em diversas áreas. Por que é tão difícil um aluno do ensino superior entender e aprender as equações diferenciais ? Neste projeto iremos fazer a ligação entre os conteúdos básicos e as equações diferenciais. O objetivo geral é desenvolver uma proposta de trabalho que estimule um ambiente favorável à compreensão da matemática básica envolvida nas equações diferenciais, desta forma iremos: Apresentar um estudo sobre as equações diferenciais de primeira e segunda ordens , trazendo propriedades e definições; apresentar os conteúdos da matemática básica que podem auxiliar os alunos na compreensão e resolução das equações diferenciais; apresentar uma proposta de trabalho para os professores do ensino básico que podem auxiliá-los no trabalho com seus alunos para uma melhor compreensão do tema . No primeiro capítulo iremos abordar as definições de equações diferenciais homogêneas, não homogêneas, lineares, 1ª ordem e 2ª ordem. No segundo capítulo estudaremos as equações diferenciais de 1ª ordem, destacando propriedades de potência e logaritmo, equações logarítmicas e exponenciais. No terceiro capítulo estudaremos as equações diferenciais de 2ª ordem, dando destaque aos sistemas de equações lineares, equação do 2º grau e números complexos. No quarto capítulo iremos resolver alguns problemas contextualizados em diversas áreas, que serão modelados e resolvidos pelas equações diferenciais e no último capítulo uma proposta didática bem interessante.

1

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo iremos abordar as definições e exemplos das equações diferenciai. Para iniciar o capítulo e mostrar a importância das equações no campo das ciências de citaremos a definição de Edwards e David (1993 , p.02):

*As leis do universo estão em grande parte escritas em linguagem matemática . A álgebra é suficiente para resolver muitos problemas estáticos , mas os fenômenos naturais mais interessantes envolvem mudanças , e são melhor descritos por equações que relacionam quantidades variáveis*

A história sobre as equações diferenciais é rica em seu desenvolvimento ,começou com o matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler(1707-1783), porém para que ele pudesse desenvolver as ideias fundamentais sobre as equações foi necessário entender de cálculo e suas análises. Depois de Euler tivemos homens que contribuíram com ideias que refinaram o trabalho de Euler e também ideias inovadoras.

Figura 1: Leonhard Paul Euler

Para que Euler pudesse desenvolver seu trabalho contou com as brilhantes descobertas de Pierre Fermat (1607-1665),Isacc Newton (1643-1727) e Gottfried Wlhelm Leibniz (1646-1716), que foram os inventores do cálculo.

## 1.1 DEFINIÇÃO

Como a derivada $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ da função f pode ser vista como a taxa na qual a quantidade x = f(t) varia em relação à variável independente t, é natural que equações envolvendo derivadas sejam frequentemente usadas para descrever o universo de mudanças. Uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas é chamada uma equação diferencial.

Dizemos que uma equação é diferencial de ordem n, quando ela for do tipo F(t,y(t), y'(t) , y"(t) ...$y^n(t)) = 0$, onde y = y(t) e y'(t) é a função derivada.A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da equação. Uma equação diferencial estabelece uma relação entre a variável independente , a função desconhecida e suas derivadas. Se a função desconhecida for dependente de uma única variável independente então a equação denomina equação diferencial ordinária (EDO)

**Exemplo 1.1.** $y' - 2xy^2 = o$ *equação de 1ª ordem*

**Exemplo 1.2.** *y' – 1 =0 equação de 1ª ordem*

**Exemplo 1.3.** *y" + y' – 2y =0 equação de 2ª ordem*

**Exemplo 1.4.** *y"t + y"x = 0 equação diferencial de 2ª ordem , porem não é ordinária , pois a função desconhecida y depende de duas variáveis t e x.*

## 1.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL HOMOGÊNEA

**Definição 1.5.** *Segundo Hughes-Hallet,Débora, dizemos que uma equação diferencial A(t,y)t' + B(t,y)y' = 0 é homogênea quando A(t,y) e B(t,y) forem homogênea de mesmo grau .*

**Exemplo 1.6.** $(x^2 - 2xy)x' + 3y^2y' = 0$ *é homogênea pois* $x^2 - 2xy$ *e* $3y^2$ *são homogêneas de grau 2 .*

**Exemplo 1.7.** $(x^3 - 2xy)x' + 3y^2y' = 0$ *não é homogênea pois* $x^3 - 2xy$ *e* $3y^2$ *são de graus diferentes .*

**Exemplo 1.8.** $(4y + 5t)t' + (5y + 7t)y' = 0$ *é homogênea pois 4y+5t e 5y+7t são homogêneas de grau 1*

## 1.3 EQUAÇÕES LINEARES DE 1ª ORDEM

A equação diferencial $\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$ onde $\frac{dy}{dt} = y'$ e f(t,y) = b(t) – a(t)y é chamada de linear de primeira ordem.

**Exemplo 1.9.** $\frac{dp}{dt} = 2p - 2pt$

**Exemplo 1.10.** $\frac{dH}{dt} = -k(H - 20)$

**Exemplo 1.11.** $\frac{dy}{dt} + y = te^t$

## 1.4 EQUAÇÕES LINEARES DE $2^{A}$ ORDEM

As equações do tipo y”(t) = f ( t,y(t), y’(t) ) ou seja ax(y)"+b(x)y’ + (c) = r(x) são equações diferenciais de segunda ordem.

**Exemplo 1.12.** *y” -5y’ +6y = 0*

**Exemplo 1.13.** $y''(t) = t.cos(y) + [y(t)]^2$

**Exemplo 1.14.** *y”(t) – y’(t) – 2y(t) = 0*

2

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo iremos estudar a resolução das equações diferenciais de 1º ordem pelo método da separação de variáveis, porém é necessário recordar conteúdos do ensino fundamental e médio, a saber, propriedades de potência ,equações exponencial ,função logarítmica, $\epsilon$ ( número de Euler), logaritmo decimais e Neperianos e equações logarítmicas.

## 2.1 PROPRIEDADE DE POTÊNCIA

Se $a \in \mathbb{R}, b \in R, m \in N$ e $n \in N$ então valem as seguintes propriedades.

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , $a \neq 0$ e $m \geq n$

P3) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P4 ) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,$b \neq 0$

P5)$(a^m)^n = a^{m.n}$

Para o nosso estudo iremos destacar e demonstrar a propriedade P1.

**Demonstração :**

Iremos demostrar usando indução sobre n e considerando m fixo .

1ª) A propriedade é verdadeira para n=0, veja:

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0 \tag{1}$$

2ª) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para n =k, isto é ,$a^{m+k} = a^m \cdot a^k$ e mostraremos que ela é verdadeira para n= k+1, isto é, $a^{m+(k+1)} = a^m \cdot a^{k+1}$.

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a^1) = (a^m \cdot a^k) \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1} \tag{2}$$

Logo a propriedade é válida para qualquer m e $n \in N$.

## 2.2 EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

**Definição 2.1.** *Segundo Iezzi e Hazzan, As equações exponenciais são equações com incógnitas no expoente.*

Estudaremos o método da redução a uma base comum, na qual consiste em deixar ambos os membros da equação em uma única base, aplicando propriedades convenientes para isso . Como a função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora, podemos concluir que potências iguais que possuem a mesma base tem expoentes iguais, veja:

$$a^x = a^y \longleftrightarrow x = y \tag{3}$$

$para(0 < a \neq 1)$

No caso das equações diferencias de 1ª ordem iremos usar a volta do método.

**Exemplo 2.2.** $2^x = 64 \longleftrightarrow 2^x = 2^6 \longleftrightarrow x = 6$ *( ida)*

**Exemplo 2.3.** $X = 7 \longleftrightarrow 2^x = 2^7 \longleftrightarrow 2^x = 128$ *(volta)*

## 2.3 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

**Definição 2.4.** *Dado um número real a* $(a > 0$ *e* $a \neq 1)$ *e* $f(x) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *, se cada x associa o número* $log_a^x$*, dizemos que é função logarítmica de base a.*

**Exemplo 2.5.** $log_2^x = f(x)$

**Exemplo 2.6.** $g(x) = log_{1/2}^x$

***Propriedade**

Se $a > 0$ e $a \neq 1$ , então as funções $f(x) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a^x$ e g(x) : R $\longrightarrow R_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas.

**Demonstração:**

Iremos provar que fog = $\mathbb{R}$ e gof = $\mathbb{R}_+^*$ logo:

$fog = f(g(x)) = log_a^{g(x)} = log_a^{a^x} = x$ e

$gof = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{log_a^x} = x$

Portanto fog=gof

**Exemplo 2.7.** $3^{log_3^2} = 3$

**Exemplo 2.8.** $e^{ln10} = 10$

## 2.4 NÚMERO DE EULER

O número de Euler, que é a base do sistema neperiano de logaritmo, é o número irracional 2,7182818284590... Ele pode ser obtido pela sequência de Euler, cujo termo geral é :

$$a_n = (1 + 1/n)^n \tag{4}$$

Observe:

$a_1 = (1 + 1/1)^1 = 2$

$a_2 = (1 + 1/2)^2 = 2,25$

$a_3 = (1 + 1/3)^3 = 2,370$

$\vdots$

$a_{100} = (1 + 1/100)^{100} = 2,704$

Percebemos que quanto maior o valor n mais o valor se aproxima de e, logo:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a^n = e \tag{5}$$

Este número também é conhecido como número de Neper ou Napier, constante de Neper, constante matemática, número exponencial e outros.

## 2.5 LOGARITMOS DECIMAIS E NEPERIANOS

Os logaritmos decimais também conhecidos como logaritmos de Briggs, é o qual tem base 10, ele foi de grande importância na simplificação de cálculos, o matemático inglês Henry Briggs (1561-1639) foi o primeiro a utilizá-lo nas "tábuas" logarítmicas. No estudo deste trabalho, queremos destacar o logaritmo Neperiano, que recebe este nome em homenagem ao inglês John Nepper ( 1550-1617) o primeiro estudioso de logaritmo.

O logaritmo Neperiano possue a base $e$ é muito utilizado na física, química, biologia e economia. Também é conhecido como logaritmo natural. A representação do logaritmo neperiano de um número real positivo é dada por ln x.

Tanto o número de Neper quanto o logaritmo neperiano não tem sido abordado de maneira adequada no ensino médio de algumas escolas particulares e muito menos na rede pública de ensino, o que acarreta um déficit no aprendizado do aluno e consequentemente irá ter dificuldades no aprendizado das equações diferenciais.

## 2.6 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

**Definição 2.9.** *Sendo $a$ e $b$ número reais e positivos, com $a \neq 1$ chama-se logaritmo de $b$ na base $a$, o expoente que se deve dar a base de modo que a potência obtida seja igual a $b$.*

$$\log_a^b = x \longleftrightarrow a^x = b \tag{6}$$

**Exemplo 2.10.** $log_2{}^{16} = 4$,*pois* $2^4 = 16$

**Exemplo 2.11.** $log_5^{25} = 2$, *pois* $5^2 = 25$

## 2.7 SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 1ª ORDEM

Iremos estudar neste trabalho a solução da equação diferencial de 1ª ordem usando o método de separação de variáveis, o qual foi desenvolvido pelo matemático Jacob Bernoulli (1655-1705) e generalizado por Leibniz.

Figura 2: Jacob Bernoulli

**Definição 2.12.** *Segundo Stewart, uma equação diferencial de 1º ordem é dita separável, se for escrita na forma:* $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$*.O nome separável vem do fato de que podemos "separar"no lado direito da expressão uma função de x e uma função de y. Se f(y)≠ 0, podemos escrever:* $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ *, onde* $h(y) = \frac{1}{f(y)}$*, podemos reescrever a equação na forma diferencial* $h(y)dy = g(x)dx$ *assim todos os y estão de um lado da equação e todos os x estão do outro lado da equação.*

**Teorema 2.13.** *Seja F uma função tal que* $\frac{dF}{dt} = f(y) \cdot \frac{g(y)}{f(t)}$*. Segue, então, que* $\frac{dF}{dt} = \frac{d}{d(t)} \int g(t)dt$ *pois, pelo Teorema fundamental do cálculo,*

$$\frac{d}{dt} \int g(t)dt = g(t) = f(y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

*logo*

$$F(y(T)) = \int g(t)dt + C$$

*Que define implicitamente a solução geral da equação dada.*

**Exemplo 2.14.** *Dada a equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = ky$ *faremos a separação das variáveis resultando em* $\frac{dy}{y} = k.dx$*, integrando ambos os lados da equação, temos:*

$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Rightarrow \ln y = kx + c$

*Usando o número de Euler com base e propriedades de potência e logaritmo , temos :*

$$e^{\ln y} = e^{kx+c} \Rightarrow$$

$$y = e^{kx} \cdot e^{c} \Rightarrow$$

$y = e^{kx} \cdot B$*, onde esta é a solução geral da equação*

**Exemplo 2.15.** *Dada a equação* $\frac{dp}{dt} = 2p - 2pt$ *para p(0)=5*

$$\frac{dp}{dt} = 2p - 2pt \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = p(2-2t) \Rightarrow \frac{1}{p} dp = (2-2t)dt$$

-

$$\longrightarrow \int \frac{1}{p} dp = \int (2-2t) dt \Rightarrow$$

$$\ln p = 2t - t^2 + c \Rightarrow e^{\ln p} = e^{2t-t^2+c}$$

$$p = e^{2t-t^2}.B \tag{7}$$

*Onde a equação (7) é a solução geral , para todo t= 0 e p = 5 , temos :*

$5 = e^{0} \cdot B \Rightarrow B = 5$ *logo temos uma solução específica:* $p = 5.e^{t-t^2}$

### 2.7.1 *Aquecimento e resfriamento de Newton*

A temperatura de um corpo frio se aquece a uma taxa proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do ambiente onde o corpo está, esta afirmação pertence a Newton. Analogamente um corpo quente esfria a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do ambiente.

Por exemplo, um prato de sopa quente em cima de uma mesa esfria segundo uma taxa proporcional à diferença da temperatura da sopa e a temperatura do ar que esta no ambiente. Quando a sopa vai se esfriando, a taxa de resfriamento vai diminuindo, pois a diferença entre a temperatura da sopa e o ar diminui, a taxa de resfriamento zera quando a temperatura da sopa e do ar se aproxima.

A fórmula do resfriamento e do aquecimento de Newton é dada pela equação diferencial de $1^{o}$ ordem.

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha(H - h) \tag{8}$$

Onde :

H é a temperatura instantânea do corpo

h é a temperatura instantânea do ambiente

$\alpha$ é uma constante que pedente do material, do tamanho e das condições externas do corpo.

O sinal negativo da fórmula indica que o corpo esta perdendo temperatura com o passar do tempo, caso seja usada para o aquecimento então esse sinal será positivo.

Observe o gráfico abaixo :

Uma das utilizações da Lei do Resfriamento de Newton é nas investigações criminais, onde é possível descobrir a hora aproximada do óbito de um indivíduo, analisando a temperatura do corpo na hora que foi encontrado, depois na hora seguinte, a temperatura do ambiente e se houve perda de sangue, pois essa perda interfere na aferição do tempo.

**Exemplo 2.16.** *Quando um assassinato é cometido, o corpo da vítima, originalmente a $37°$ $C$ ( graus Celsius), esfria de acordo com a Lei do Resfriamento de Newton. Suponha que duas horas depois a temperatura seja de $35°C$ e que a temperatura ambiente seja constante e igual a $20°C$.*

*a) Encontre a temperatura H, do corpo em função de t, o tempo em horas desde que o crime foi cometido.*

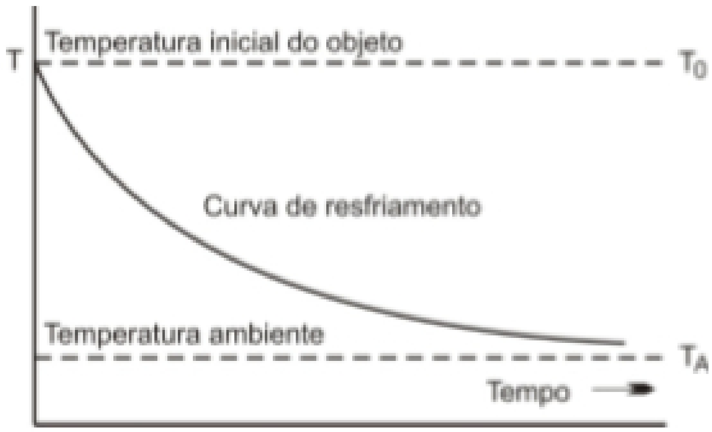



Figura 3: curva de resfriamento

*A diferença entre as temperaturas é H-20, logo a relação entre H e t é dada pela equação.*

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha(H - 20)$$

*para algum* $\alpha > 0$

*Iremos resolver a equação acima usando o método da separação de variáveis visto na secção 2.7.*

*Iniciaremos separando as variáveis e obtemos*

$$\frac{dH}{H - 20} = -\alpha \cdot dt$$

*Integrando ambos os lados temos :*

$$\ln{(H-20)} = -\alpha \cdot t + c$$

*Colocando ambos os lados na base e, temos:*

$$e^{\ln{(H-20)}} = e^{-\alpha \cdot t + c}$$

*Usando regras de potência e logarítimo, obtemos:*

$$H - 20 = B \cdot e^{-\alpha t}$$

*Iremos calcular B substituindo H=37 quanto t=0*

$$37 - 20 = B \cdot e^{-\alpha .0} \Rightarrow 17 = B$$

*Para encontrarmos $\alpha$ iremos substituir as 2 horas de se decorreram e a temperatura de $35°C$ que estava no ambiente.*

$$35 - 20 = 17 \cdot e^{-\alpha 2} \Rightarrow \frac{15}{17} = e^{-\alpha 2}$$

*Para resolver esta equação, iremos aplicar ln em ambos os lados:*

$$\ln \frac{15}{17} = \ln{(e^{-\alpha 2})}$$

*Logo , temos :*

$$-0,125 = -2\alpha \Rightarrow \alpha \approx 0,063$$

*Portanto a temperatura H em função de t é dada por*

$$H = 17 \cdot e^{-0,063 \cdot t} + 20 \tag{9}$$

*b) Em que hora o crime foi cometido se o corpo foi encontrado às 4 horas da tarde com a temperatura de $30°$ $C$ ?*

*Vamos substituir H=30 e calcular t na equação (11) .*

$$30 = 20 + 17e^{-0,063 \cdot t}$$

$$\frac{10}{17} = e^{-0,063 \cdot t}$$

*Tomando logaritmos naturais , temos*

$$-0,531 = -0,063 \cdot t \Rightarrow t \approx 8,4 horas$$

*Se o corpo foi encontrado as 16:00 horas e aproximadamente o crime foi cometido 8,4 horas antes então o crime aconteceu aproximadamente as 7:30 h da manhã.*

*c) Esboço o gráfico da temperatura em função do tempo.*

*O gráfico intercepta H= 37 pois a temperatura inicial do corpo era* $37°C$ *e depois cai exponencialmente com a assintota horizontal H=20, observe no gráfico :*

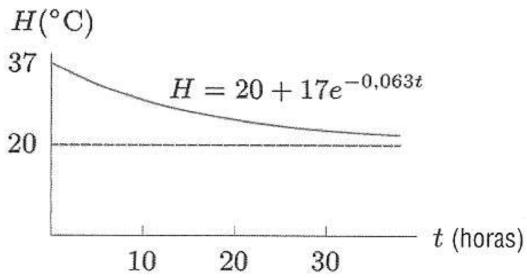



Figura 4: curva de resfriamento , temperatura em função do tempo

# 3

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Neste capítulo iremos estudar a resolução das equações diferenciais de 2ª ordem , neste momento é onde percebemos uma maior dificuldade nos alunos em recordar ou até mesmo aprender conteúdos básicos e que deveriam ter esses pré-requisitos para tal resolução. Como este trabalho tem como objetivo mostrar a importância dos conteúdos básicos na resolução das equações diferenciais , na resolução da EDO de 2ª ordem não será diferente , iremos estudar os conteúdos básicos necessários para sua resolução e depois os casos de resolução das equações diferenciais de 2ª ordem . Os conteúdos básicos estão distribuídos entre os ensinos fundamentais II e médio, a saber : sistemas de equações lineares , resolução de equações de 2º grau, números complexos, relações trigonométricas.

## 3.1 SISTEMAS DE EQUAÇÃO LINEARES

O sistema de equações lineares é um conteúdo abordado inicialmente no ensino fundamental e depois aprofundado no ensino médio ,é de extrema importância para o desenvolvimento de vários exercícios , infelizmente muitos alunos chegam ao ensino médio e até mesmo a faculdade sem saber resolver um sistema simples de equações lineares.

Foram poucas as aparições dos sistemas lineares na matemática ocidental antiga, contudo , o assunto recebeu maior atenção no Oriente. Os chineses apresentam os sistemas por meio de barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro e desta forma acabaram descobriram o método de resolução por eliminação , que consiste em anular coeficientes por meio da adição e subtração.

O livro "Chui Chang Suan Shu"(nove capítulos sobre a arte da matemática ) escrito em torno 1200 A.C. possui alguns exemplos deste procedimento.

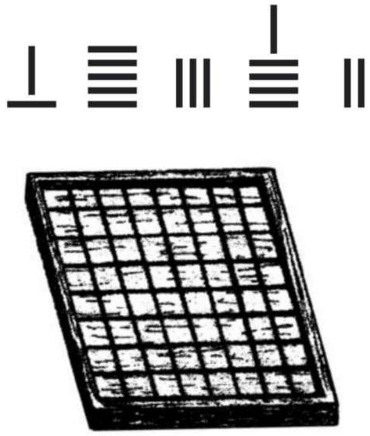


Figura 5: Tabuleiro de calculo com barras de bambu

Porém em 1683 , o japonês Seki Kowa sistematizou um sistema de duas equações a um determinante , no ocidente o determinante só apareceu 10 anos depois com Leibniz , num trabalho também ligado a sistemas lineares .

Não iremos abordar determinantes neste trabalho , pois o mesmo não é utilizado na resolução das equações diferenciais de 1ª e 2ª ordens. Para o nosso estudo das equações diferencias iremos estudar apenas os sistemas de duas equações e duas incógnitas , para isso veremos os casos de resolução por adição , substituição e comparação.

**Definição 3.1.** *Um sistema linear é um conjunto de n equações lineares,* $n \geq 1$*, com m incógnitas. Ou seja:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.** $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

**Exemplo 3.3.**
$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 3 \\ 4x + y + z = 5 \\ 3x - y - z = 10 \end{cases}$$

### 3.1.1 *Solução de um sistema linear*

Dizemos que a sequência $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ é solução do sistema linear S , se for solução de todos as equações do sistema.

**Exemplo 3.4.**
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
*Admite como solução ( 3,3) , pois:*

*3 +3 = 6 ( sentença verdadeira)*

*2.3 -3 = 3 ( sentença verdadeira)*

*Porém não admite a solução (5,1), pois:*

*5 +1 = 6 ( sentença verdadeira)*

*2.5 + 1 = 3 ( sentença falsa)*

*Observe o gráfico abaixo:*

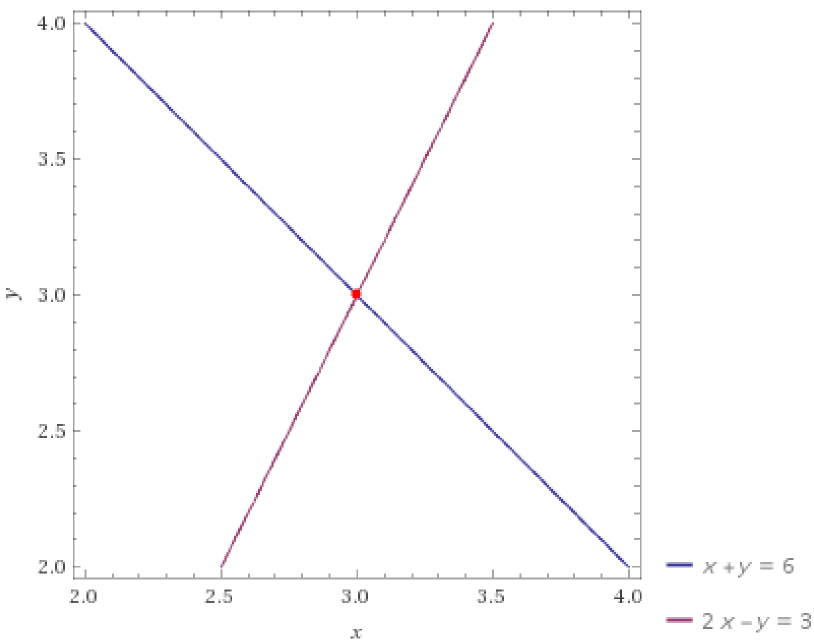



Figura 6: exemplo 3.4

**Exemplo 3.5.** *O sistema linear* $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ *não admite solução , pois não encontramos um para ordenado (x,y) que satisfaz as duas equações equação.*

*Observe o gráfico abaixo:*

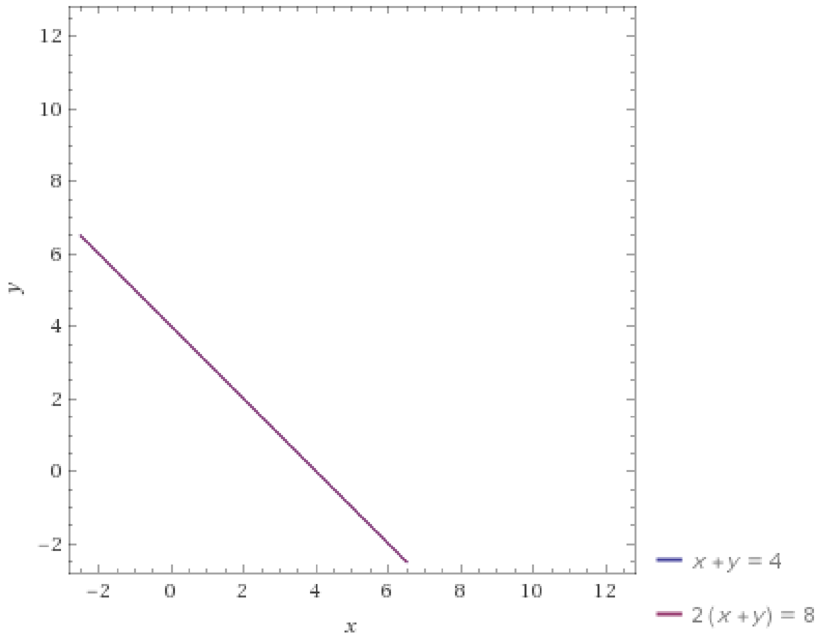



Figura 7: exemplo 3.5

**Exemplo 3.6.** *No caso do sistema* $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$ *temos infinitas soluções do tipo (x, 4-x) , veja:*

*se x= 1 , temos (1,3)*

*se x= 2 , temos (2,2)*

*genericamente se x= m , temos ( m, 4-m)*

*observe o gráfico da figura 8 :*

Um sistema pode ter uma única solução e dizemos que ele é possível e determinado, como no exemplo 3.4; pode não ter solução então será chamado de sistema impossível, como no exemplo 3.6; ou ainda pode ter infinitas soluções e será chamado de sistema possível e indeterminado, como no exemplo 3,5.

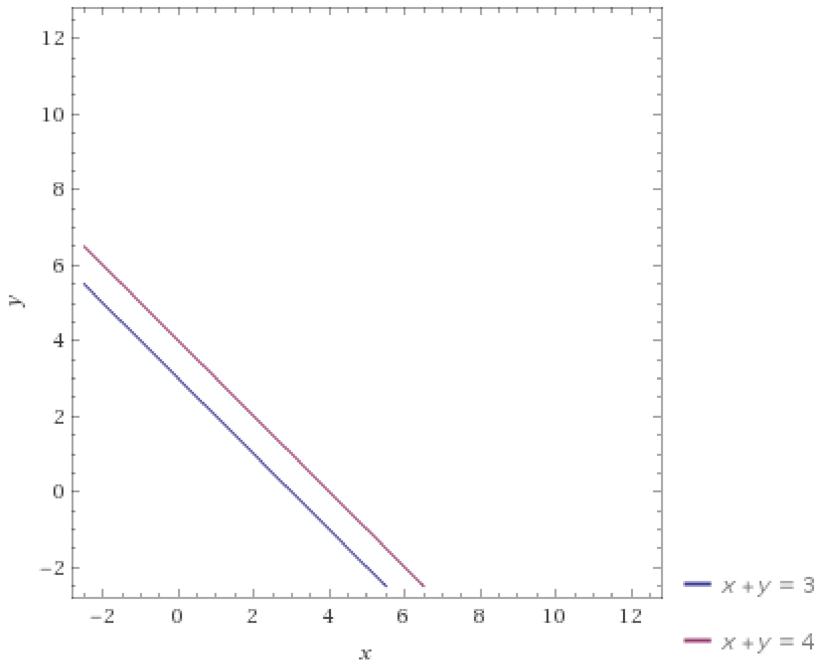



Figura 8: exemplo 3.6

### 3.1.2 *Método da adição*

Este método consiste em somar as duas equações de forma que eliminemos uma incógnita e assim descobrimos o valor da outra incógnita, fazendo as devidas substituições descobrimos o valor da incógnita eliminada na primeira etapa.

**Exemplo 3.7.** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *multiplicando a segunda equação por (-2), temos:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -2x - 2y = -4 \end{cases}$$

*somando a primeira e a segunda equação,temos:* $5y = 0 \Rightarrow y = 0$

*substituindo y=0 na primeira equação:*

$2.x + 3.0 = 4$

$2x = 4$

$x=2$

*Portanto* $S = \{(2,0)\}$

### 3.1.3 *Método da comparação*

Este método consiste em comparar as duas equações:

1º : Isola-se uma incógnita na 1ª equação

2º : Isola-se a mesma incógnita na 2ª equação

3º : compare as equações

**Exemplo 3.8.** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

*Isolando a incógnita x na 1ª equação temos:* $x = \frac{4-3y}{2}$

*Isolando a incógnita x na 2ª equação temos:* $x = 2 + y$

*Comparando essas duas equações :* $2 + y = \frac{4-3y}{2}$

*4- 3y = 2(2 + y )*

*-3y -2y = 4-4*

*y = 0*

*substituindo y =0 na primeira equação obtemos x = 2 Portanto S =* $\{(2, 0)\}$

### 3.1.4 *Método da substituição*

Este método consiste em isolar uma incógnita em uma das equações e substituir na outra equação.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Isolando a incógnita x na primeira equação: $x = \frac{4-3y}{2}$

Substituindo na segunda equação, temos:

$\frac{4-3y}{2} - y = 2$

$\frac{4-3y-2y}{2} = \frac{4}{2}$

$-5y = 0$

y=0

Portanto S = $\{(2, 0)\}$

## 3.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO $2^{o}$ GRAU

Quando se fala de equação do 2º grau logo nos vem a mente a resolução por Bhaskara , porém iremos estudar as diferentes formas de resolução, inclusive pela fórmula de Bhaskara.

A função quadrática ou função do 2º grau associa para cada x$\epsilon\mathbb{R}$ o elemento $ax^2 + bx + c$ $\epsilon\mathbb{R}$ em que a,b e c $\epsilon\mathbb{R}$, logo a função é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{10}$$

para todo $a \neq 0$

Quando falamos em resolver a equação , estamos procurando os zeros da função ou raízes da função quadrática , isto é f(x)= 0 , logo temos: $ax^2 + bx + c = 0$ uma equação do 2º grau

### 3.2.1 *Seja* $b = 0$ *e* $a \neq 0$ *e* $c \neq 0$

Para este tipo de equação temos a seguinte resolução:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

logo $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ e $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ são raizes desta equação.

**Exemplo 3.9.** $5x^2 - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{10}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

*Logo temos* $S = \left\{+\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right\}$

**Exemplo 3.10.** $-2x^2 + 200 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x^2 = -200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{200}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm 10$

*Logo temos ,* $S = \{+10,\ -10\}$

**Exemplo 3.11.** $9x^2 + 81 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 = -81 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \frac{-81}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{-9}$

*Como* $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$*, diremos que a solução é vazia, porém na secção 3.3 estudaremos os números complexos, então voltaremos neste exemplo para resolve-lo no universo dos complexos .*

### 3.2.2 *Seja c=0 e* $a \neq 0$ *e* $b \neq 0$

Temos a seguinte resolução:

$$ax^2 + bx = 0$$

Colocando o termo x em evidência, temos:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Temos x=0 ou ax+b=0, resolvendo esta segunda equação:

$$ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Portanto a solução da equação é, $S = \{0,\ \frac{-b}{a}\}$

**Exemplo 3.12.**

$$3x^2 = 5x = o$$

$$x(3x+5) = 0$$

*x=0 ou* $x = \frac{-5}{3}$

*Portanto a solução da equação é,* $S = \{0,\ \frac{-5}{3}\}$

**Exemplo 3.13.**

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$x(2x-4) = 0$$

*x=0 ou* $x = \frac{4}{2} = 2$

*Portanto a solução da equação é,* $s = \{0, 2\}$

### 3.2.3 *Seja a, b e c* $\neq 0$ *e* $\epsilon$ *R*

Neste caso temos uma equação completa, que podemos resolver pela fórmula de Bhaskara

.

$$\Delta = b^2 - 4a.c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

**Demonstração:**

Dada a equação $ax^2 = bx + c$ iremos dividir todos os termos da equação por a, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

completando quadrados, temos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4.a^2}\right) - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4.a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4.a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \Rightarrow$$

Chamando a expressão $b^2 - 4.a.c$ de discriminante e usando a letra grega $\Delta$ para representa-la, temos $\Delta = b^2 - 4.a.c$, logo :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{11}$$

Temos então duas soluções:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{12}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{13}$$

Muitos alunos depois que aprendem a usar a formula de Bhaskara acabam por optar em resolver qualquer equação de $2^o$ grau por ela, mesmo que a equação seja incompleta, esse hábito acaba levando a uma lentidão na resolução dos exercícios e a mecanização dos mesmo.

**Exemplo 3.14.** *Encontre a solução da equação* $x^2 - 12x + 35 = 0$

*Substituindo os valores de a, b e c na formula do discriminante , temos :*

$$\Delta = (-12)^2 - 4.1.35$$

$$\Delta = 144 - 140$$

$$\Delta = 4$$

*Substituindo os valores na equação 13 , temos :*

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2}$$

*logo :*

$x_1 = 7$ *e* $x_2 = 5$

*Portanto* $S = \{7, 5\}$

**Exemplo 3.15.** *Encontre a solução da equação* $x^2 - 10x + 55 = 0$

*Substituindo os valores de a, b e c na formula do discriminante , temos :*

$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.25$$

$$\Delta = 100 - 100$$

$$\Delta = 0$$

*Substituindo os valores na equação 13 , temos :*

$$x = \frac{-\left(-10\right) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2}$$

*logo :*

$x_1 = 5$ *e* $x_2 = 5$

*Neste exemplo temos duas soluções iguais ,portanto* $S = \{5\}$

**Exemplo 3.16.** *Encontre a solução da equação* $x^2 + 2x + 10 = 0$

*Substituindo os valores de a, b e c na formula do discriminante , temos :*

$$\Delta = \left(2\right)^2 - 4.1.10$$

$$\Delta = 4 - 40$$

$$\Delta = -36$$

*Como* $\sqrt{-36} \notin \mathbb{R}$ *não iremos continuar a resolução da equação , voltaremos a resolver este exemplo na secção 3.3 quando abordaremos os números complexos , por enquanto considerando o universo os Reais , temos* $S = \{\}$

Observando os exemplos acima , concluímos a seguinte relação entre o discriminante e as raízes da equação :

- Se $\Delta = 0$ temos duas raízes reais e iguais
- Se $\Delta > 0$ temos duas raízes reais e diferentes
- Se $\Delta < 0$ não temos raízes reais

### 3.2.4 *Relação entre as raízes e os coeficientes da equação*

Dada as equações (14) e (15) , iremos fazer a adição dessas equações :

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}\right) + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a}$$

Portanto

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \tag{14}$$

Esta é a relação entre a soma das raízes da equação e seus coeficientes

Vamos agora multiplicar as equações (14) e (15) :

$$x_1.x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}\right) . \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}\right) \Rightarrow$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 + b.\sqrt{\Delta} - b.\sqrt{\Delta} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2.a)^2} \Rightarrow$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4.a^2} \Rightarrow$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4.a.c\right)}{4.a^2} \Rightarrow$$

$$x_1.x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4.a.c}{4.a^2} \Rightarrow$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} \tag{15}$$

Esta é a relação entre o produto das raízes e seus coeficientes

As equações (14) e (57) nos ajuda a resolver algumas equações de 2º grau com mais facilidade , veja alguns exemplos :

**Exemplo 3.17.** $x^2 - 12x + 35 = 0$

*soma :* $-\frac{b}{a} = 12$

*produto :* $\frac{c}{a} = 35$

*Logo as raízes são* $x_1 = 7$ *e* $x_2 = 5$ *, pois :*

*7 + 5 = 12 ( soma)*

*7 . 5 = 35 ( produto)*

### 3.2.5 *Forma fatorada*

A forma fatorada de uma equação do segundo grau é dada pela fórmula :

$$y = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

**Exemplo 3.18.** *Dada a equação* $x^2 - 12x + 35 = 0$ *exemplo 3.6 , escreva na forma fatorada.*

*Temos que* $x_1 = 7$ *e* $x_2 = 5$ *, portanto :*

$$y = 1.(x - 7).(x - 5)$$

*É a forma fatorada da equação dada.*

## 3.3 NÚMEROS COMPLEXOS

Os matemáticos quando se deparavam com os números não reais simplesmente os rejeitavam até que o matemático, físico, filósofo, médico, astrônomo e astrólogo Girolamo Cardano (1501-1576) resolveu o problema provando que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram raízes da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$ . O matemático polonês Rafael Bombelli (1530-1579) foi o primeiro a registar os números complexos de forma razoavelmente estruturada. Em sua Álgebra( 1572) ele usa notação específica :

O número 2i ,por exemplo, era representado por $R\,[om.4]$ ( R de raiz e m de menos) ou seja , $R\,[om.4] = \sqrt{0-4}$.

Porém os números complexos ainda se mantiveram misteriosos até a virada o século XVIII para o XIX , quando Caspar Wessel ( 1745-1818) , Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean Robert Argand (1786-1822) descobriram que esses números tinham uma representação geométrica , tal descoberta foi feita de forma independente.

Hoje chamamos de Argand-Gauss o plano cartesiano usado para representar os números complexos . Argand considerava o número complexo c + di como uma combinação geométrica OD de c e di , observe na figura 9 , usando a idéia de rotação e fornecia a representação trigonométrica $r(cos\alpha + i.sen\alpha)$ .

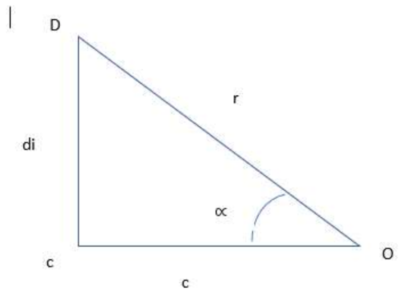



Figura 9: Combinação Geométrica

Porém , algebricamente tinha um problema : como entender a soma c + di , considerando que as parcelas c e di são diferentes ? Foi Rowan Hamilton (1805-1865) , num artigo apresentado na Academia Irlandesa em 1833 , que segundo suas idéias , passava o número complexo para o par ordenado (c, d) , desta forma se opera segundo as leis:

$$(a+b)+(c+d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)\,.\,(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Assim : O par (0,a) equivale o número complexo a

O par (-1, 0) equivale o número real -1

Logo fazendo (0,1) = i , temos :

$$i^2 = (0,1)\,.\,(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) \Rightarrow$$

$$i^2 = (-1,0) \Rightarrow$$

$$i^2 = -1$$

Desta forma chamando i de unidade imaginário e $i^2 = -1$ , temos :

$$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$$

$$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$$

Generalizando , para todo $n \in \mathbb{R}$ , temos :

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n}.i^1 = 1.i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = 1.(-1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = 1.(-i) = -i$$

Com essas descobertas conseguimos terminar o exemplo 3.8.

**Exemplo 3.19.** *Dada a equação $x^2 + 2x + 10 = 0$ e resolvendo pela fórmula de Bhaskara , temos :*

$$\Delta = \sqrt{-36} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1).36} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{i^2.36} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 6i$$

*logo :*

$$x = \frac{-2 \pm 6i}{2.1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 6i}{2} \Rightarrow x_1 = -1 + 3i$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6i}{2} \Rightarrow x_2 = -1 - 3i$$

*Portanto* $S = \{-1 - 3i, -1 + 3i\}$

### 3.3.1 *Adição de números complexos*

**Teorema 3.20.** *A operação de adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:*

*I) propriedade associativa*

*II) propriedade comutativa*

*III) existência do elemento neutro*

*IV) Existência do elemento simétrico*

**Demonstração :**

Seja quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , tais que :

$z_1 = a + bi = (a, b)$

$z_2 = c + di = (c, d)$

$z_3 = e + fi = (e, f)$

I ) Temos :

$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) =$

$= (a + c, b + d) + (e, f) =$

$= [(a + c) + e, (b + d) + f] =$

$= [a + (c + e), b + (d + f)] =$

$= (a, b) + [(c + e) + (d + f)] =$

$= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] =$

$= z_1 + (z_2 + z_3)$

II) Seja quaisquer $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$ , tais que :

$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1$

III) Para quaisquer $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , existe um elemento neutro $A \in \mathbb{C}$ , tal que z + A = z

Provaremos que existe $A = (x, y) \in \mathbb{C}$ tal que z + A = z

$z + A = z \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) + (x, y) = (a, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + x, b + y) = (a, b) \Rightarrow$

$\begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Rightarrow x = 0$ e y = 0

Logo temos que A =(0,0)

IV) Para quaisquer z $\in \mathbb{C}$ , provaremos que existe $z' \in \mathbb{C}$ , onde $z + z' = A$ logo :

$z + z' = A \Rightarrow (a, b) + (x, y) = (0, 0) \Rightarrow (a + x, b + y) = (0, 0) \Rightarrow$

$\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ -a = x e -b =y

Logo existe z' = (-a,-b) e chamamos de simétrico de z .

### 3.3.2 *Subtração de números complexos*

Do teorema 3.20 decorre que dados $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ , existe um único z $\in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + z = z_2$ , pois :

$z_1 + z = z_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1' + (z_1 + z) = z_2 + z_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow (z_1' + z_1) + z = z_2 + z_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow A + z = z_2 + z_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow z = z_2 + z_1' \Rightarrow z = z_2 - z_1$ é a diferença entre $z_1$ e $z_2$

Portanto $z_2 - z_1 = (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$

**Exemplo 3.21.** *Sejam* $z_1 = 7+4i = (7,4)$ *e* $z_2 = 3-2i = (3,-2)$

$z_1 - z_2 = (7,4) - (3,-2) = (7-3, 4+2)$

$z_1 - z_2 = (4,6) = 4+6i$

### 3.3.3 *Conjugado*

Dado z = a+ bi um número complexo , chamamos $\overline{z} = a - bi$ seu conjugado.

**Exemplo 3.22.** *seja z= 5 + 3i , logo* $\overline{z} = 5 - 3i$

Nota-se $\overline{\overline{z}} = z$ , observe :

$(\overline{\overline{z}}) = \left(\overline{a-bi}\right) = a+bi = z$

Logo z e $\overline{z}$ são conjugados um do outro .

### 3.3.4 *Propriedades do conjugado*

**Teorema 3.23.** *Se* $z_1$ *e* $z_2$ *são números complexos quaisquer , temos :*

*I)* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*II)* $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

**Demonstração :**

Fazendo $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ , temos :

I) $z_1 + z_2 = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$

Logo temos :

$\overline{z_1 + z_2}$ = (a+c) - (b+d) i = (a-bi) + (c-di) = $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

II) Seja $z_1.z_2$ = (a+bi) . (c+di) = ac + adi + bci - bd = (ac-bd)+( ad +bc)i

Logo temos :

$\overline{z_1.z_2}$ = (ac-bd) - (ad +bc)i = ac - bd- adi- bci = ac- adi +(-bci -bd) = ac-adi +(-bci + bd $i^2$ ) = a(c-di) -bi(c-di) = (c-di) .(a-bi) = $\overline{z_1}.\overline{z_2}$

**Teorema 3.24.** *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número z=a+bi ( b≠ 0) , então essa equação também admite como raiz o conjugado de z,* $\overline{z} = a - bi$

***Demonstração :***

*Seja a equação* $p\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ *de coeficientes reais e p(z)= 0, isto é, admite z como raiz.*

*Iremos provar que* $P(\overline{z}) = 0$ *, ou seja , que z também é raiz do polinômio.*

$p\left(\overline{z}\right) = a_n \left(\overline{z}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\overline{z}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 =$

$= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + a_1\overline{z} + a_0 =$

$= \overline{a_n}.\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}.\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}.\overline{z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1}.\overline{z} + \overline{a_0} =$

$= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$

$= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{P\left(z\right)} = \overline{0} = 0$

Podemos observar o Teorema 3.24 no exemplo 3.19.

## 3.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE $2^{A}$ ORDEM

Dada ay"+by'+cy= 0 uma equação diferencial de 2ª ordem, onde a,b e c são constantes. Chamamos de equação característica a equação $ax^2 + bx + c = 0$ , onde $x^2, x, x^0$ são substituídos por y", y' e y respectivamente.

**Teorema 3.25.** *Solução geral de uma equação linear homogenia*

∗ *raízes reais e distintas.*

*Se temos duas raízes reais e distintas da equação característica, ou seja* $r_1 \neq r_2$*, então a solução da EDO será :*

$$y = C_1.e^{rt} + C_2.e^{rt} \tag{16}$$

∗ *raízes reais e distintas.*

*Seja* $r_1 = r_2$ *duas raízes reais e iguais da equação característica, logo a solução da EDO , será :*

$$y = C_1.e^{rt} + C_2.t.e^{rt} \tag{17}$$

$*$ *raízes complexas*

*Seja* $r_1$ *e* $r_2$ *raízes complexas da equação característica, onde* $r_1 = \alpha + \beta i$ *e* $r_2 = \alpha - \beta i$*, logo a solução da EDO será :*

$$y = C_1 e^{\alpha t}.cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}.sen\beta t \tag{18}$$

**Exemplo 3.26.** *Dada a equação diferencial y'' - 12y' + 35y = 0 encontre a solução geral .*

*Temos* $x^2$ *-12x +35 = 0 a equação característica da EDO,então :*

*soma :* $-\frac{b}{a} = 12$

*produto :* $\frac{c}{a} = 35$

*Logo as raízes são* $r_1 = 7$ *e* $r_2 = 5$

*Como as raízes são reais e distintas, a solução geral da EDO, de acordo com a equação (18) , será :* $y = C_1.e^{7t} + C_2.e^{5t}$

**Exemplo 3.27.** *Resolva a equação y'' + 3 y' + 2y = 0 , com as condições iniciais y(0) = -0,5 e y'(0)= 3*

*Temos* $x^2$ *+3x + 2 = 0 a equação característica da EDO ,então :*

*soma :* $-\frac{b}{a} = -3$

*produto :* $\frac{c}{a} = 2$

*Logo as raízes são* $r_1 = -1$ *e* $r_2 = -2$

*Como as raízes são reais e distintas , a solução geral da EDO, de acordo com a equação (18) , será :* $y = C_1.e^{-1t} + C_2.e^{-2t}$

*Iremos encontrar a solução específica para y(0) = -0,5 e y'(0)= 3*

*Se y(0) = -0,5 , temos :* $-0,5 = C_1.e^{-1.0} + C_2.e^{-2.0}$ *, logo :*

$$-0,5 = C_1 + C_2 \tag{19}$$

*Derivando a solução geral da equação , temos :*

$y' = -1C_1.e^{-1t} - 2C_2.e^{-2t}$

*Substituindo y'(0)= 3 :* $3 = -1C_1.e^{-1.0} - 2C_2.e^{-2.0}$ *, temos :*

$$3 = -1C_1 - 2C_2 \tag{20}$$

*Resolvendo o sistema das equações (21) e (22) :*

$$\begin{cases} -0,5 = C_1 + C_2 \\ 3 = -1\ C_1 - 2C_2 \end{cases}$$

*Temos* $C_1 = 2,0$ *e* $C_2 = -2,5$ *, logo :* $y = 2.e^t - 2,5.e^{-2t}$

**Exemplo 3.28.** *Dada a equação diferencial* $y''$ *-10y' + 25y = 0 encontre a solução geral*

.

*Temos* $x^2$ *-10x +25 = 0 a equação característica da EDO, então :*

*soma :* $-\frac{b}{a} = 10$

*produto :* $\frac{c}{a} = 25$

*Logo as raízes são* $r_1 = 5$ *e* $r_2 = 5$

*Como as raízes são reais e iguais, a solução geral da EDO, de acordo com a equação (19), será :* $y = C_1.e^{5t} + C_2.e^{5t}t$

**Exemplo 3.29.** *Resolva a equação* $y''$ *+ 4 y' + 4y = 0 , com as condições iniciais y(0) = -0,5 e y'(0)= 3*

*Temos* $x^2$ *+4x + 4 = 0 a equação característica da EDO,então :*

*soma :* $-\frac{b}{a} = -4$

*produto :* $\frac{c}{a} = 4$

*Logo as raízes são* $r_1 = -2$ *e* $r_2 = -2$

*Como as raízes são reais e iguais , a solução geral da EDO, de acordo com a equação (19) , será :* $y = C_1.e^{-2t} + C_2.e^{-2t}t$

*Iremos encontrar a solução específica para y(0) = -0,5 e y'(0)= 3*

*Se y(0) = -0,5 , temos :* $-0,5 = C_1.e^{-2.0} + C_2.e^{-2.0}.0$ *, logo :*

$$-0,5 = C_1 \tag{21}$$

*Derivando a solução geral da equação, temos:*

$y' = -2C_1.e^{-2t} - 2C_2.e^{-2t}t + C_2.e^{-2t}$

*Substituindo y'(0)= 3 e* $C_1 = -0,5$ *:* $3 = -2(-0,5).e^{-2.0} - 2C_2.e^{-2.0}.0 + C_2.e^{-2.0}$ *, temos :*

$$2 = C_2 \tag{22}$$

*Logo :* $y = -0,5.e^{-2t} + 2.e^{-2t}t$

**Exemplo 3.30.** *Dada a equação diferencial* $y''$ *+ 2 y' + 2y = 0 encontre a solução geral e com condições iniciais y(0) = 2 e y'(0) = 0 .*

*Temos* $x^2$ *+2x + 2 = 0 a equação característica da EDO,então :*

$\Delta = 2^2 - 4.1.2 = -4$

$x = \frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$

*Logo as raízes são* $r_1 = -1 + 1i$ *e* $r_2 = -1 - 1i$

*Onde* $\alpha - 1$ *e* $\beta = 1$

*Como as raízes são complexas , a solução geral da EDO, de acordo com a equação (20) , será:* $y = C_1.e^{(-1)t}.cost + C_2.e^{(-1)t}sent$

*Iremos encontrar a solução específica para y(0) = 2 e y'(0)= 0*

*Se y(0) = 2 , temos :* $2 = C_1.e^{(-1)0}.cos0 + C_2.e^{(-1)0}sen0$ *, logo :*

$$2 = C_1 \tag{23}$$

*Derivando a solução geral da equação, temos :*

$y' = -1C_1.e^{-1t}.cost - 1C_1.e^{-1t}.sent - C_2.e^{-1t}.sent + C_2.e^{-1t}.cost$

*Substituindo y'(0)= 0 :* $0 = -1C_1.e^{-1.0}.cos0 - 1C_1.e^{-1.0}.sen0 - C_2.e^{-1.0}.sen0 + C_2.e^{-1.0}.cos0$ *, temos :*

$$0 = -1C_1 + C_2 \tag{24}$$

*Substituindo* $2 = C_1$ *temos :* $C_2 = 2$ *, logo :*

$y = 2.e^{(-1)t}.cost + 2.e^{(-1)t}sent$ *é a solução com as condições iniciais dadas.*

# 4

# EXEMPLOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS CONTEXTUALIZADOS EM DIVERSAS ÁREAS

Neste capítulo iremos estudar alguns exemplos de equações diferenciais de 1ª e 2ª ordens contextualizadas em diversas áreas e disciplinas curriculares. Começaremos abordando quatro exemplos muito trabalhados no ensino médio , porém quando feito, já se fornece a equação modelada e a solução da equação diferencial para o aluno, aonde ele irá aplicar as condições do problema na equação dada. Em seguida estudaremos exemplos aplicados na física,química e biologia.

**Exemplo 4.1.** *Dado inicialmente 30 miligramas de um material radioativo, cujo decaimento tem uma taxa proporcional à quantidade presente, se após 3 horas, o material perdeu 20 % de sua massa original, determine :*

*a) Expressão da massa restante no instante t*

*Seja P a quantidade de material inicial no instante t e k a razão de proporcionalidade , temos :*

$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = k \Rightarrow \frac{dp}{dt} = pk \Rightarrow \frac{dp}{dt} - pk = 0$ *é uma equação diferencial linear e separável onde a solução* $P = P_0 e^{kt}$

*Como t=0 para P = 30, temos:* $30 = P_0.e^{0.k} \Rightarrow P_0 = 30$

*Se t= 3, houve uma perda de 20% da massa original , logo P = 30-30.0,2 = 24 mg , então :*

$24 = 30e^{3k} \Rightarrow 0,8 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{ln8}{3} = -0,074$

*Portanto a equação é :* $P = 30.e^{-0,074t}$

*b) A massa do material após 4 horas*

*Queremos P para t= 4 horas, então substituindo em* $P = 30.e^{-0,074t}$ *, temos :*

$P = 30.e^{-0,074.4} = 30.e^{-0,296} = 22,31mg$

*c) O tempo para o qual o material se reduzirá a metade*

*Se o material se reduzirá a metade, então P= 15 mg, substituindo em* $P = 30.e^{-0,074t}$ *, temos :*

$15 = 30.e^{-0,074t} \Rightarrow 0,5 = e^{-0,074t} \Rightarrow t = \frac{ln0,5}{-0,074} \Rightarrow t = 9,3horas$

**Exemplo 4.2.** *A população de certa bactéria cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias iniciais. Se após 2 meses a população duplicou e após 3 meses a população é de 20.000 bactérias, estime o valor inicial .*

*seja : N= número de bactérias no instante t*

$N_0$ *= número de bactérias iniciais*

*K= constante de proporcionalidade*

*Seja :* $\frac{dN}{dt} - Nk = 0$ *a equação do problema e* $N = C.e^{kt}$ *a sua solução .*

*Fazendo t=0 , temos* $N = N_0$, *logo* $N = N\,_0.e^{kt}$

*fazendo t = 2 , temos N = 2.* $N_0$, *logo* $N = 2\ N\,_0.e^{kt} \Rightarrow ln2 = 2.K \Rightarrow K = 0,347$

*Logo :* $N = N_0.e^{0,347}$

*Em t= 3 , N= 20.000, logo :*

$20.000 = N_0.e^{0,347} \Rightarrow 20.000 = N_0.2,832 \Rightarrow N_0 = 7062$ *bactérias*

**Exemplo 4.3.** *Um termômetro é retirado de dentro de uma sala e colocado do lado de fora em que a temperatura de 4 C. Após 2 minutos o termômetro marcou 16 C, após 4 minutos 12C. Qual a temperatura da sala ?*

*Usando a Lei de Resfriamento de Newton, visto no capítulo 2, temos a equação diferencial:* $\frac{dT}{dt} = -k\,(T - 4)$, *resolvendo a equação temos a seguinte solução:* $T = C.e^{-2kt} + 4$ .

*Usaremos as condições dadas do exercícios.*

*Para T= 16 C e t= 2 minutos :*

$16 = C.e^{-2k} + 4 \Rightarrow 12 = c.e^{-2k} \Rightarrow c = \frac{12}{e^{-2k}}$

*Para T = 12C e t = 4 minutos :*

$12 = C.e^{-4k} + 4 \Rightarrow 8 = c.e^{-4k} \Rightarrow c = \frac{8}{e^{-4k}}$

*Igualando as duas equações acima, temos :*

$$\frac{12}{e^{-2k}} = \frac{8}{e^{-4k}} \Rightarrow 12.e^{-4k} = 8.e^{-2k} \Rightarrow$$

$\dfrac{e^{-4k}}{e^{-2k}} = \dfrac{8}{12} \Rightarrow e^{-2k} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$
$ln\ e^{-2k} = ln\frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{ln\frac{2}{3}}{-2} \Rightarrow k = 0,20$

*Logo* $C = \frac{8}{e^{-0,80}}$

*Temos então :* $C.e^{0,20t} + 4 \Rightarrow T = \frac{8}{e^{-0,80}}.e^{0,20t} + 4$

*Para t= 0 a temperatura no quarto será* $21,7C$.

**Exemplo 4.4.** *Este exemplo é bem interessante , pois o aluno do ensino médio estudo esta situação problema porém a equação diferencial já está modelada e resolvido ,ficando apenas a resolução com os dados específicos do problema .*

*(UEL -PR) O processo de decomposição do corpo começa alguns minutos depois da morte. Quando o coração para, ocorre o algor mortis ou o frio da morte, quando a temperatura do corpo diminui até atingir a temperatura ambiente. (Adaptado de: <http://diariodebiologia.con que-acontece-como-corpo-logo-apos-a-morte/>. Acesso em: 29 maio 2017.)*

*Suponha que um cadáver é analisado por um investigador de polícia às 5 horas da manhã do dia 28, que detalha as seguintes informações em seu bloco de anotações:*


Figura 10: UEL

*Imediatamente após escrever, o investigador utiliza a Lei de Resfriamento :*
$T = (T_n - T_s)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t} + T_s$

*para revelar a todos os presentes que faz t horas que a morte ocorreu. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a hora e o dia da morte, segundo o investigador.*

*a) 11 horas da noite do dia 27*

*b) 8 horas da noite do dia 27*

*c) 2 horas da manhã do dia 28*

*d) 4 horas da manhã do dia 28*

*e) 10 horas da manhã do dia 27*

*Resolução :*

*Substituindo os valores de $T$ ,$T_n$ , $T_s$ na equação do resfriamento de Newton , temos :*

$$31 = (37 - 25)\left(\sqrt[6]{2}\right)^{-t} + 25$$

$$\frac{31-25}{12} = (2)^{\frac{-t}{6}}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{\frac{-t}{6}}$$

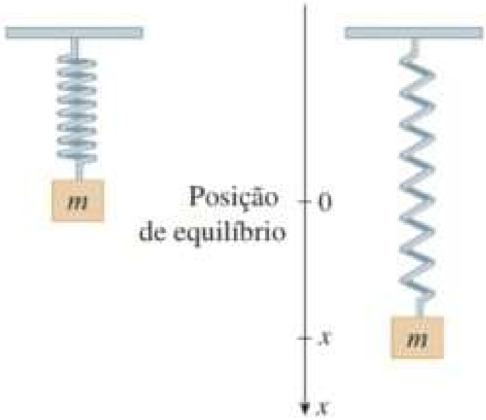
$$2^{-1} = 2^{\frac{-t}{6}} \Rightarrow -1 = \frac{-t}{6} \Rightarrow t = 6$$

*Logo 6 horas antes do corpo ser investigado o assassinato foi cometido, portanto as 11:00 da noite do dia 27. Alternativa A.*

**Exemplo 4.5.** *Suponha que uma mola de massa 2 Kg cuja constante é P= 128 esteja imersa em uma líquido com constante de amortecimento K=40. Se a mola iniciar na posição de equilíbrio, determine a posição em qualquer instante, sabendo a velocidade inicial é 0,6 m/s.*

*Este é um modelo de uma força de amortecimento fornecida pelo amortecedor de um carro ou bicicleta, que é proporcional a velocidade da massa que atua em direção oposta ao movimento.*

$$F_{amortecimento} = -k\frac{dx}{dt}$$




amortecida.pdf

Figura 11: mola amortecida

*Onde K é a constante de amortecimento.*

*Pela 2 lei de Newton , temos :*

$m\frac{d^2x}{dt^2}$ = *força restauradora + força amortecida*

$m\frac{d^2x}{dt^2}$ = - *PX* - $k\dfrac{dx}{dt}$

*Logo :* $m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + px = 0$ *é a equação diferencial*

*Usando os dados do exemplo na equação modelada, temos :* $2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$, *simplificando ambos os lados da equação por 2 ,* $\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$

*Seja* $y^2 + 20y + 64 = 0$ *a equação característica e resolvendo esta equação encontramos* $y^{'} = -4$ *e* $y'' = -16$.

*Portanto a solução do movimento superamortecido é :* $X(T) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-16t}$

*temos x(0) =0 logo* $C_1 + C_2 = 0$, *se derivarmos a equação horária, temos a velocidade, logo* $x^{'} = 0,6$

*Então* $x^{'}(t) = -4C_1 e^{-4t} + -16C_2 e^{-16t} \Rightarrow -4C_1 - 16C_2 = 0,6$

*Resolvendo o sistema :*

$$\begin{cases} -0,6 = -4C_1 - 16C_2 \\ \mathit{0} = C_1 + C_2 \end{cases}$$

$C_1 = 0,005$ *e* $C_2 = -0,05$

*Portanto a posição em qualquer instante é dada pela equação:* $X = 0,005e^{-4t} - 0,005e^{-16t}$

**Exemplo 4.6.** *Um tanque contém 30 Kg de sal dissolvido em 6000 L de água . Esta água entra no tanque a uma taxa de 30L/minuto e a água salgada tem 0,030Kg de sal por litro. Saindo do tanque a mistura de água e sal possui a mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque após 30 minutos?*

*Seja* $\frac{dz}{dt}$ *a taxa de variação da quantidade de sal e temos z(0)= 30 e iremos procurar z(30).*

*Logo :* $\dfrac{dz}{dt} =$ *(taxa de entrada do sal do tanque )- (taxa de saída do sal do tanque)*

*Seja a taxa de entrada :* $\left(0,03\frac{kg}{L}\right).\left(30\frac{L}{minuto}\right) = 0,90\frac{kg}{minuto}$

*Seja a taxa de saída :* $\left(\frac{z(t)kg)}{6000L}\right).\left(\frac{30L}{minuto}\right) = \frac{z(t)Kg}{200minuto}$

*Logo :*

$$\frac{dz}{dt} = 0,9\frac{z(t)}{200}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{180 - z(t)}{200}$$

*200dz = 180 - z(t) dt*

$$\int \frac{1}{180 - z(t)}dz = \int \frac{dt}{200}dt$$

$$-ln\ (180\ -z) = \frac{t}{200} + c$$

$$180\ -\ z = e^{\frac{-t}{200}}$$

$$z = 180\ -\ C_1 e^{\frac{-t}{200}}$$

*como Z(0)= 30 , temos* $C_1 = 150$

*Logo* $z = 180 - 150e^{\frac{-t}{200}}$

$z(30) = 180 - 150e^{\frac{-30}{200}}$

$z(30) = 50,89kg$

**Exemplo 4.7.** *Vamos supor que a população de sapos e gafanhotos , seja descrita pela equação de Lotka-Volterra , onde K = 0,08, a= 0,002, r = 0,03, b = 0,00001 e o tempo é medido em t. Encontre a solução de equilíbrio.*

*As equações de Lotka-Volterra foi desenvolvida pelo na temático Vito Volterra ( 1860-1940) e propos um modelo matemático para explicar as variações de tubarões e peixes no mar Adriático. Este modelo também é chamada "presa-predador", onde na ausência do predador a presa cresce exponencialmente, logo :* $\frac{dc}{dt} = Ks$*, sendo s(t) número de presas K constantes.*

*Porém na ausência da presa , o predador decresce a uma taxa proporcional a mesma , ou seja ,* $\frac{dg}{dt} = -rg$ *, onde g(t) é o número de predador r constante.*

*Vamos supor que a principal causa de mortes entre as presas é que elas sejam comidas pelo predador e que as taxas de sobrevivência do predador e natalidade dependem das presas , ou seja , comida disponível . Suponha ainda que quando mais indivíduos houverem* *de cada população , mais encontros serão possíveis , ou seja , que a taxa de encontro é proporcional a ambas as populações , logo proporcional a s.g .*

*Portanto temos duas equações :*

$\dfrac{ds}{dt} = ks - asg$ *e* $\dfrac{dg}{dt} = -rg + bsg$

*Vamos agora considerar nosso exemplo , logo as equações serão :*

$\dfrac{ds}{dt} = 0,08s - 0,002sg$ *e* $\dfrac{dg}{dt} = -0,03g + 0,00001sg$

*Como s e g são constante, se derivarmos , o resultado é zero, logo :*

$s^{'} = s(0,08 - 0,002g) = 0$

*Resolva a equação temos :*

*s=0 ou* $0,08 - 0,002g = 0 \Rightarrow g = 40$

$g^{'} = g(-0,03 + 0,00001s) = 0$

*Resolva a equação temos :*

*g=0 ou* $-0,03 + 0,00001s = 0 \Rightarrow s = 3000$

*Logo se s=0 e g=0 , significa que se não houver gafanhotos não tem sapo .*

*Assim a solução de equilíbrio , ou população de equilíbrio é 40 sapos e 3000 gafanhotos, ou seja m 3000 gafanhotos são suficientes para manter uma população de 40 sapos.*

# 5

# PROPOSTA DIDÁTICA

Com o objetivo de incentivar os alunos do ensino médio a conhecer um pouco sobre as equações diferenciais, vamos propor uma atividade usando o método de Euler ou método da reta tangente, já que os alunos do 3º ano aprenderam a geometria analítica.

A ideia de Euler consiste em enxergar o campo direcional como sendo um conjunto de pontos "destaques"que guiam o plano. Escolha um valor inicial ( um ponto "destaque"de saída) e calcule a inclinação nesse ponto usando a equação diferencial, esta inclinação será o ponto que indicará a direção que se deve seguir. Caminhe uma pequena distância nessa direção, pare e olhe um novo ponto "destaque", recalcule a inclinação da reta, usando as novas coordenadas, caminhe uma pequena distância novamente e prossiga o mesmo procedimento.

Para isso apresentamos aos alunos a equação da reta tangente à curva no ponto $(x_0, y_0)$

$$y = y_0 + f\left(x_o, y_0\right) \Delta x \tag{25}$$

onde : $f(x, y) = y$ é o coeficiente angular e $y_0 = y\left(x_0\right)$

## 5.1 ORIENTAÇÕES INICIAS

Em primeiro lugar faremos uma revisão da geometria analítica associando a equação (25), logo em seguida se apresenta a equação diferencial explicando o seu uso, a sua importância e apresenta-se neste momento a resolução pelo método de Euler. É importante também verificar se os alunos sabem usar o transferidor, se os mesmos não souberem, ensinar a utilizar nesta etapa inicial. Explicar também como se acha um ângulo sabendo quem é sua tangente, usando a calculadora, para que o aluno entenda e se sinta encantado use valores conhecidos como por exemplo: tg 45° , tg 30° e tg 60° .

Depois de todas as orientações dadas os alunos irão se separar em grupos de 4 a 5 alunos para começar a atividade .

## 5.2 DESENVOLVIMENTO

Passar aos alunos a proposta didática e os grupos irão resolver 10 pontos: Para a equação diferencial y'= y - x e com aproximação de $\Delta x = 0,1$, encontre a solução geométrica aproximada usando o método de Euler iniciando y(0)=2.

Para este caso , temos : f(x,y) = y - x

• Em $x = 0$ e $y = 2$, temos :

f(0,2) = 2-0 =2 e $y_1' = 2 + 2.0,1 = 2,2$

• Em $x_1 = 0,1$ e $y_1' = 2,2$, temos :

f(0,1;2,2) = 2,2-0,1 =2,1 e $y_2' = 2,2 + 2,2.0,1 = 2,41$

• Em $x_2 = 0,2$ e $y_2' = 2,41$, temos :

f(0,2;2,41) = 2,41-0,2 =2,21 e $y_3' = 2,41 + 2,21.0,1 = 2,631$

• Em $x_3 = 0,3$ e $y_3' = 2,631$, temos :

f(0,3;2,631) = 2,631-0,3 =2,331 e $y_4' = 2,631 + 2,331.0,1 = 2,86$

• Em $x_4 = 0,4$ e $y_4' = 2,86$, temos :

f(0,3;2,86) = 2,86-0,4 =2,46 e $y_5' = 2,86 + 2,46.0,1 = 3,106$

• Em $x_5 = 0,5$ e $y_5' = 3,106$, temos :

f(0,3;3,106) = 3,016-0,5 =2,606 e $y_6' = 3,106 + 2,606.0,1 = 3,366$

• Em $x_6 = 0,6$ e $y_6' = 3,366$, temos :

f(0,6;3,366) = 3,366-0,6 =2,766 e $y_7' = 3,366 + 2,766.0,1 = 3,642$

• Em $x_7 = 0,7$ e $y_7' = 3,642$, temos :

f(0,7;3,642) = 3,642-0,7 =2,942 e $y_8' = 3,642 + 2,942.0,1 = 3,936$

• Em $x_8 = 0,8$ e $y_8' = 3,936$, temos :

f(0,8;3,936) = 3,936-0,8 = 3,136 e $y_9' = 3,936 + 3,136.0,1 = 4,25$

• Em $x_9 = 0,9$ e $y_9' = 4,25$, temos :

f(0,9;4,25) = 4,25 -0,9 = 3,35 e $y_{10}' = 4,25 + 3,35.0,1 = 4,585$

Terminado todos os cálculos propor aos alunos construir uma tabela para melhor visualização, nela conterá os valores de $(x_0, y_0)$, o coeficiente angular(m) e o ângulo($\alpha$).

O aluno deverá colocar na primeira coluna os valores de $x_0$ encontrados nas operações anteriores , na segunda coluna os valores de $y_0$ , na terceira os valores de f(x,y) que é o coeficiente angular e na última coluna irão usar a calculadora científica e encontrar o angulo usando a tecla arc tang.

| $x_0$ | $y_0$ | m | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 63,5° |
| 0,1 | 2,2 | 2,1 | 64,5° |
| 0,2 | 2,41 | 2,21 | 65,6° |
| 0,3 | 2,63 | 2,33 | 66,77° |
| 0,4 | 2,86 | 2,46 | 67,8° |
| 0,5 | 3,106 | 2,6 | 68,9° |
| 0,6 | 3,36 | 2,7 | 69,6° |
| 0,7 | 3,64 | 2,9 | 70,9° |
| 0,8 | 3,93 | 3,13 | 72,28° |
| 0,9 | 4,25 | 3,35 | 73,37° |

Nesta próxima etapa oriente o aluno a marcar os pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ no papel quadriculado e com o auxílio de um transferidor marcar os ângulos em cada ponto. Terminada as marcações o aluno ligará os pontos e terá construído a solução geométrica aproximada da equação diferencial dada.

Levar os alunos ao laboratório de informática para verificarem através do site :

https://pt.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator, como ficou a plotagem do gráfico. Explicar para o aluno que plotar um gráfico significa transpor a imagem do gráfico gerado pelo computador e que existem vários sites possiveis para fazer isso , escolhemos um deles com sugestão por ser facil de usar , basta inserir a equação e clicar em gerar gráfico que ele estará plotado.

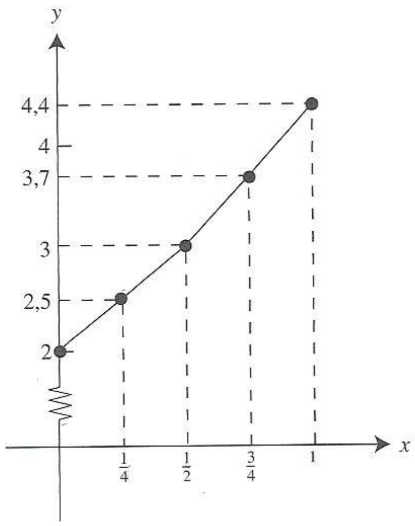



Figura 12: gráfico obtido como resultado dos cálculos realizados na atividade proposta

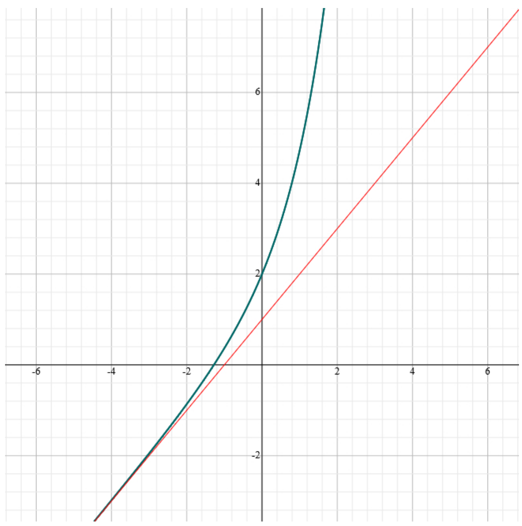



Figura 13: gráfico plotado

## 5.3 CONCLUSÃO

Nesta etapa final, conclua que a solução geométrica encontrada é muito próxima a real e que nesta atividade permite ao professor abordar, além da equação diferencial, a geometria analítica e a trigonometria como $tg^{-1}x$, permitindo ao aluno conhecer melhor a calculadora científica, o desenho geométrico com a construção dos ângulos.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante esse 20 ano de profissão, sendo 7 deles no nível superior, observei que a maioria dos alunos não gostam ou não sabem matemática por falta de conhecimento de conteúdos aprendidos em anos anteriores.Isso não é diferente no nível superior. Nossos alunos chegam até nós com um deficit muito grande e não podemos ignorar, a solução é sanar essas dificuldades, fazendo cursos de revisão por exemplo, para que eles possam continuar no curso escolhido de forma mais adequada. O ideal é que o professor do ensino médio já identifique tais problemas de pré- requisito e tente saná-los para que não se agrave chegando até o nível superior.

Este trabalho procurou mostrar o quanto importante são os conteúdos básicos para o aprendizado das equações diferenciais, e não só para as equações, mas para todo o ensino da matemática. Com ele pude aprender um pouco mais sobre a história da matemática e também algumas regras que usava em sala de aula e não sabia sua origem e demonstrações, sendo assim, melhorei minhas aulas enriquecendo com informações pertinentes ao conteúdo. Espero que este trabalho possa ajudar aos colegas professores, assim como me ajudou, inspirando os mesmos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] C.H.Edwards Jr; Penney,David E. Equações Diferenciais Elementares com problemas de contorno , 1995, Prentice Hall do Brasil.

[2] STEWART, James. Cálculo. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, v.,2, p.525-569 , Tradução : ES2 Translate.

[3] Iezzi ,Gelson; Hazzan, samuel : Fundamentos de matemática elementar , v. 1 , 7.ed. São Paulo , Atual 2004

[4] Iezzi ,Gelson; Hazzan, samuel : Fundamentos de matemática elementar , v. 2 , 7.ed. São Paulo , Atual 2004

[5] Iezzi ,Gelson; Hazzan, samuel : Fundamentos de matemática elementar , v. 4 , 7.ed. São Paulo , Atual 2004

[6] Iezzi ,Gelson; Hazzan, Samuel : Fundamentos de matemática elementar , v. 6 , 7.ed. São Paulo , Atual 2004

[7] BOYCE, Willian ; DIPRIMA Richard C. : Equações Elementares e Problemas de valores de contorno, Rio de Janeiro , editota LTD , 2010.

[8] Hughes-Hallett,Débora: Cálculo de uma varável , tradução Rafael José Iório Junior , Valéria de Magalhães Iório, 3.ed. Rio de Janeiro , LTC 2011.

[9] LEITHOLD, Lous. O cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 2 v. P.1131-1174.

[10] Site Indagação

Disponível : `https://www.indagacao.com.br/2018/08/uel-2018-assinale-alternativa-que-apresenta-corretamente-hora-dia-da-morte-seg` `html`

Acesso em : 20/11/2019

[11] Site Wikipedia, Leonhard Paul Euler.

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Acesso em : 13/12/2019

[12] Site Wikipedia, Pierre Fermat

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

Acesso em : 13/12/2019

[13] Site Wikipedia, Isacc Newton

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Acesso em : 13/12/2019

[14] Site Wikipedia, Gottfried Wilhelm Leibniz

Disponível : ttps://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

Acesso em : 13/12/2019

[15] Site Wikipedia, Girolimo Cardano

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

Acesso em : 13/12/2019

[16] Site Wikipedia, Rafael Bombelli

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli

Acesso em : 13/12/2019

[17] Site Wikipedia, Pierre Fermat

Disponível : https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Acesso em : 13/12/2019

[18] Site Symbolab , calculadora de equações diferenciais ordinárias

Disponível : https://pt.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator

Acesso em : 20/11/2019