Michel Bernardo Martins de Almeida

O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E
APLICADA

Rio de Janeiro
Abril de 2013

Michel Bernardo Martins de Almeida

O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Eduardo Wagner

Rio de Janeiro
Abril de 2013

À minha esposa, Fabiana, e à Sara, companheiras de todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

AGRADECIMENTOS ACADÊMICOS:

Prof. Eduardo Wagner (orientador)
Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho

AGRADECIMENTOS ADMINISTRATIVOS:

Aos funcionários e alunos das Escolas Municipais Camilo Castelo Branco e Roberto Burle Marx.

AGRADECIMENTOS PESSOAIS:

Anderson da Silva Melo
Fabiana Gonçalves Santos
Helena Maria Monteiro Lima
Laurentina Ventura Martins
Aos professores, monitores e colegas de Mestrado e a todos os amigos que sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS INSTITUCIONAIS:

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

“Como uma pessoa, eu não posso mudar o mundo,
mas eu posso mudar o mundo de uma pessoa” –
Paul Shane Spear

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é equiparar os resultados da aplicação de uma metodologia desenvolvida para o ensino das razões trigonométricas em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da Rede Pública Municipal do Rio de Janeiro que apresentam diferença significativa no ranking classificado pelo IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica). Selecionou-se o software de geometria dinâmica Geogebra para auxiliar na assimilação dos conceitos abordados. Seria possível a utilização de um software de geometria dinâmica como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem das razões trigonométricas? Os resultados de tal utilização seriam satisfatórios no desenvolvimento da abstração dos conceitos trabalhados? Seria possível traçar um paralelo de resultados, ou mesmo reduzir a distância entre duas realidades tão distintas? Para buscar respostas para essas questões, foram ministradas cinco aulas de cem minutos cada, com a aplicação de uma avaliação discursiva na última. A finalidade desta prova foi apurar o grau de entendimento dos alunos em cada etapa do aprendizado das razões trigonométricas, incluindo seu emprego em situações contextualizadas.

Palavras-Chave

Razões trigonométricas, Geogebra, ensino fundamental, escola pública, matemática, aprendizagem

Sumário

1. Introdução...1

2. Referencial Teórico...4

2.1. História da Trigonometria...4

2.2. Origem dos nomes seno, cosseno e tangente....................................5

2.3. Áreas que utilizam a trigonometria 6

2.4. Trigonometria no Triângulo Retângulo 8

2.4.1. Cálculo de comprimentos por triangulação.....................................8

2.4.2. Ângulos Notáveis...10

3. Pesquisa...12

3.1. Clientela...13

3.2. Desenvolvimento da experiência..14

3.2.1. Aula 1 15

3.2.2. Aula 2 23

3.2.3. Aula 3 28

3.2.4. Aula 4 33

3.2.5. Aula 5: Avaliação 36

3.3. Análise do Resultado da Avaliação 38

4. Conclusão...50

5. Referências Bibliográficas 52

6. Anexos...53

1. Introdução[1]

Ensinar Matemática exige mais do que o domínio da matéria. É necessário, dentro de um ambiente com mínimas condições estruturais, aplicar a metodologia correta para atingir todo o corpo discente. Além disso, para ter um aprendizado satisfatório, o aluno deve dispor de um conhecimento prévio de alguns fundamentos básicos e raciocínio lógico.

Nas abstrações mais elevadas, utilizam-se recursos variados, como experiências com formas concretas, técnicas de memorização, programas interativos de computador, aulas expositivas, entre outros. Procura-se inovar, objetivando alcançar a mais ampla capacidade de assimilação dos alunos.

Os autores desta pesquisa, durante o curso de graduação na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, desenvolveram o hábito de dialogar sobre maneiras eficientes de ensinar Matemática. À época, diante da ausência de experiência profissional, se apoiavam nas aulas de Prática de Ensino e nos estágios supervisionados. As discussões ganharam corpo e, mesmo após a conclusão da graduação, tornaram-se rotineiras durante os dois anos em que cursavam o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), no IMPA. Lá, além da ampliação do conhecimento através de estudos aprofundados dos conteúdos, houve uma troca de experiências com os componentes do grupo, uma turma rica em sua diversidade e competência profissional. Soma-se a isso a experiência dos autores de seis anos de trabalho nas redes estadual e municipal de ensino do Rio de Janeiro.

Neste ambiente, surgia a ideia de elaborar uma metodologia de ensino que pudesse ser aplicada em qualquer escola da Rede Pública. No foco das discussões estava o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo, aplicado no 9º ano do Ensino Fundamental, por ser um tema de difícil compreensão pelos alunos e que tem destacada importância devido às suas aplicações em séries mais avançadas, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

---

[1] Em colaboração com Anderson da Silva Melo

Ao não concordar com o ensino por meio da memorização de fórmulas e baterias de exercícios repetitivos, decidiu-se pautar a construção do saber em problemas do cotidiano, em consonância com o que determinam os Parâmetros Curriculares Nacionais. Diante de uma situação-problema, como o cálculo de distâncias inacessíveis, espera-se que o aluno possa fazer uma conjectura para, posteriormente, formalizar o conteúdo apresentado.

> A aprendizagem na área de Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade. (Parâmetros Curriculares nacionais, 1998)

Os PCNs enfatizam a importância de se ensinar matemática através da resolução de problemas. Dá-se significado à aprendizagem e evita-se a reprodução de procedimentos mecânicos e ausentes de sentido para o aluno. Quando a situação hipotética se transforma em um problema propriamente dito, o indivíduo é motivado a transformá-la e, para a Trigonometria – que exige elevado grau de abstração – torna-se necessário utilizar formas dinâmicas de apresentar o conteúdo.

Para um entendimento mais profundo e completo dos conceitos abordados nas diversas situações de variações angulares, selecionou-se o aplicativo Geogebra como instrumento auxiliar de visualização das razões trigonométricas. Desde a graduação já havia um desejo de utilizar um *software* de geometria dinâmica, já que ambos os autores participaram de um curso do programa Cabri Géomètre, ministrado na PUC-RJ.

Por ser um *software* de versão de demonstração com muitas limitações de conteúdo, a implementação do Cabri requereria alto investimento da unidade escolar na compra da licença, já que a instalação no computador pessoal do professor para exibição em projetor seria inviável.

A intenção de utilizar o Cabri foi abandonada e substituída por outra ferramenta – o Geogebra - conhecida nas aulas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática -, nas quais o grupo aprendeu a dominar suas funcionalidades para elaboração dos trabalhos propostos. A partir daí nasceram novas ideias, não só para a Trigonometria como também para as mais diversas áreas da Matemática. E por ser um *software* gratuito que dispensa até mesmo a instalação física, tornou-se a ferramenta ideal para a aplicação da pesquisa.

A experiência foi aplicada nas duas escolas municipais onde os autores lecionam. Com o intuito de aferir os resultados da metodologia desenvolvida, as aulas foram ministradas, de maneira conjunta, em duas realidades escolares distintas, buscando alcançar resultados os mais próximos quanto possível. Obviamente, diversos questionamentos foram suscitados quando da aplicação da experiência. Por isso, procurou-se responder a todas as indagações que ajudaram a traçar as metas desse trabalho, cujo objetivo é dinamizar as aulas de matemática através de estratégias baseadas no uso da tecnologia e da proposição de problemas contextualizados.

2. Referencial Teórico[2]

2.1. História da Trigonometria

A trigonometria surgiu por volta do século IV ou V a.C., com os babilônios, egípcios e os gregos. Sua origem é incerta, porém, sabe-se que nasceu para oferecer respostas às questões geradas pela Astronomia, Agrimensura e Navegações. O principal objetivo era o estudo da trajetória dos corpos celestes.

Hiparco de Nicéia, em grego Hipparkhos (190 - 126 a. C.), é tido como "o pai da trigonometria". Como o mais importante astrônomo da antiguidade, desenvolveu a maior parte de seus estudos na Grécia. Dentre eles estão a elaboração de um catálogo de estrelas, a medida da duração do ano com grande exatidão e a previsão de eclipses. "A trigonometria de Hiparco surge como uma "tabela de cordas" em doze livros, obra que se perdeu com o tempo. Aí teria sido usado pela primeira vez o círculo de 360 graus." (HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA).

Ptolomeu (83 – 161 d.C) deu continuidade ao trabalho de Hiparco ampliando seus estudos. Sua obra-prima é a *Syntaxis Matematica* - chamado posteriormente de Almagesto pelos árabes - um compêndio de treze livros, cujo primeiro traz uma tabela de cordas dos ângulos de 0 a 180 graus, de meio em meio grau.

> Durante seis séculos, O Almajesto, representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Porém no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os Hindus. (UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA)

O comércio romano com o sul da Índia possibilitou a disseminação de conhecimentos matemáticos babilônios e gregos. Na Índia, se originou a mais antiga tábua de senos, cujos inventores são

[2] Em colaboração com Anderson da Silva Melo

desconhecidos. Por volta do ano 500, Aryabhata elaborou tabelas usando jiva no lugar de seno.

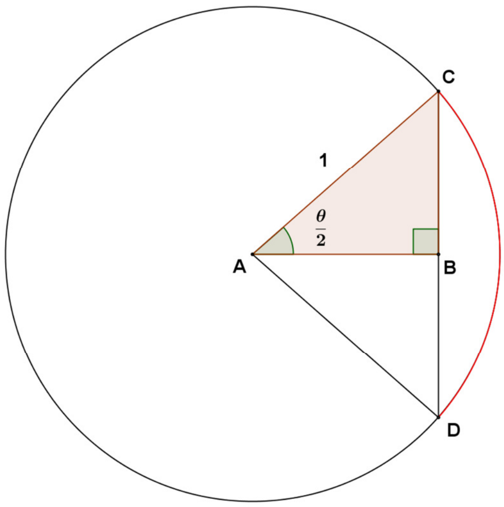
> Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de jiva - de origem hindu - o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe **al-Battani** adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno. (UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA)

Outros conceitos trigonométricos foram desenvolvidos e aprofundados ao longo da história, passando por Bhaskara e, posteriormente, por europeus como Nicolau Copérnico, Galileo Galilei, Johann Bernoulli e Leonhard Euler.

2.2. Origem dos nomes seno, cosseno e tangente

Os conceitos de seno e cosseno são originários dos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, provavelmente, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias inacessíveis.

> O nome seno vem do latim sinus que significa seio, curva, volta, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria jiba, em vez de jaib. Jiba significa a corda de um arco. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. (LIMA, Elon Lages, 1991.)



$$\text{jiba} = \text{CD} = 2 \cdot \text{BC}$$

$$\text{Como sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{\text{BC}}{1}$$

$$\text{Então,} \qquad \text{jiba} = 2 \cdot \text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

Figura 1

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo.

$$\cos\alpha = \text{sen}\,(90 - \alpha)$$

> A tangente veio de um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Era usada para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio solar. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583. (USP – ORIGEM DOS NOMES SENO, COSSENO E TANGENTE)

2.3. Áreas que utilizam a trigonometria

Historicamente desenvolvida para Astronomia, a Trigonometria é utilizada atualmente em diversas áreas de conhecimento. E é importante apresentar ao aluno o universo de possibilidades de aplicação desse conceito para que se possa compreender sua utilidade, aliando a abstração à aplicação prática.

a. Matemática

A Trigonometria é aplicada em toda a Matemática e, uma vez que a esta é utilizada em todas as ciências naturais e sociais, não é difícil constatar sua importância. Cálculo, Álgebra Linear e Estatística são alguns exemplos.

b. Engenharia e Física

A Engenharia faz uso da trigonometria em sua totalidade, desde as Engenharias Civil, Cartográfica, Naval, Eletrônica até a Aeronáutica, especialmente nas construções, tais como prédios, pontes, aviões e etc. Óptica, Estática e Físico-Química são os primeiros ramos da Física a utilizar a Trigonometria.

c. Astronomia, Ciências Náuticas e Cartografia

A Astronomia se beneficia da Trigonometria esférica para o estudo de distâncias e posições dos astros. A técnica da triangulação é usada para estimar a distância das estrelas próximas. Já as navegações tiveram um grande impulso com a utilização da Trigonometria, com a ajuda do uso de instrumentos de medição, como o astrolábio.

Na Cartografia, auxiliava nos cálculos envolvendo latitude e longitude de pontos geográficos em seus mapas.

d. Outras Ciências

Além das ciências precedentes, há aplicações da Trigonometria e das funções trigonométricas em campos diversos: na Geografia, para estimar distâncias entre divisas e em sistemas de navegação por satélite; nas funções periódicas, as quais descrevem as ondas sonoras e luminosas, são fundamentais as funções seno e cosseno; também se aplica à teoria musical, acústica, óptica, análise de mercado, eletrônica, teoria da probabilidade, estatística, biologia, medicina (exames de imagem, como equipamentos de Tomografia Computadorizada e Ultrassom), farmácia, química, teoria dos números (e, portanto, criptologia), sismologia, meteorologia, oceanografia, muitas das ciências físicas, estudo do solo (inspeção e Geodésia), arquitetura, fonética, economia, gráficos computadorizados, cristalografia, desenvolvimento de jogos, compactação de arquivos de músicas em formato .mp3 e fotos em formato .jpg.

2.4. Trigonometria no Triângulo Retângulo

A utilização das razões trigonométricas para calcular distâncias inacessíveis através do método de triangulação e os cálculos necessários para descobrir os ângulos notáveis são temas de relevante importância e pouco explorados nos livros didáticos. Isso cria uma demanda por novos métodos instrucionais que facilitem a compreensão do conteúdo e tornem o assunto mais evidente para o aluno.

2.4.1. Cálculo de comprimentos por triangulação

O método de triângulação é baseado na semelhança de triângulos. Tales[3] usou varetas para calcular a altura de pirâmides, que poderiam ser de qualquer tamanho, uma vez que a razão entre o comprimento da vareta e a medida de sua respectiva sombra sempre possui o mesmo valor como resultado. Da mesma forma, a razão entre a altura da pirâmide e o segmento que liga seu centro à extremidade de sua sombra possui o mesmo valor. As variações das medidas das sombras são decorrentes, apenas, da inclinação dos raios solares.

[3] Tales Mileto foi o primeiro matemático grego, nascido por volta do ano 640 a.C. e falecido em 550 a.C.

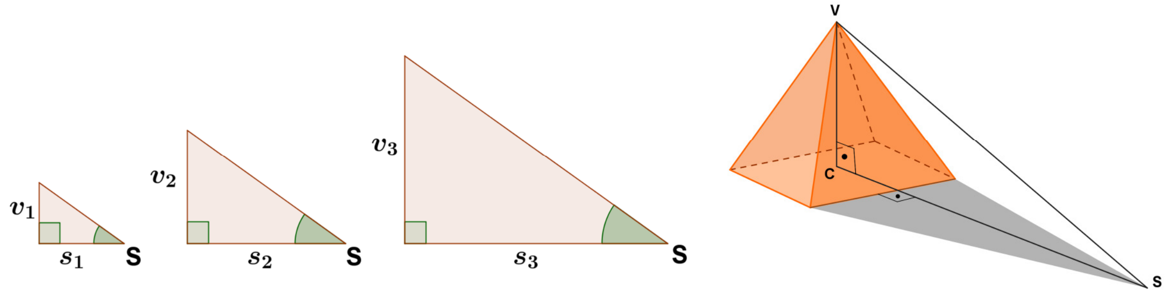


Figura 2

Portanto, não é necessária a construção de um triângulo retângulo semelhante àquele que se pretende calcular algum comprimento. É suficiente saber a razão entre os lados correspondentes de qualquer triângulo semelhante.

Como a inclinação dos raios solares é a mesma para vareta e pirâmide, tem-se que os ângulos em destaque na Figura 2 são congruentes. Logo, as razões dependem apenas dos ângulos, valendo a seguinte proporção:

$$\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2} = \frac{v_3}{s_3} = \cdots$$

Essa proporção fornece uma razão **k** que também é a mesma entre a altura VC da pirâmide e o comprimento CS, perpendicular a uma das arestas da base da pirâmide e calculado no mesmo momento. Como os ângulos destacados nos três triângulos são congruentes, fazendo translações podem-se coincidir os vértices, de modo a obter a figura precedente. Tal figura pode representar várias homotetias de foco em **S** e, da mesma forma, há uma proporcionalidade entre os segmentos verticais, que representam as varetas, e os horizontais, que representam as sombras correspondentes às varetas. Para cada inclinação dos raios solares, as mesmas varetas produzirão sombras de tamanhos distintos. Teremos, então, para um novo ângulo, uma nova razão:

$$\frac{v_1}{s'} = \frac{v_2}{s''} = \frac{v_3}{s'''} = \cdots = \mathrm{k}$$

Os problemas para determinação de distâncias inacessíveis costumavam ser resolvidos indiretamente, através da ideia de triangulação ou com a ajuda das razões trigonométricas, fazendo a medição de um ângulo e de distâncias acessíveis.

2.4.2. Ângulos Notáveis

Utilizando um triângulo equilátero e um quadrado podemos obter os valores de senos, cossenos e tangentes para os ângulos de 30°, 45° e 60°.

Na figura a seguir, observa-se um triângulo retângulo AHC obtido da divisão do triângulo equilátero ABC por sua altura AH. Aplicando o teorema de pitágoras, temos: $x^2 = y^2 + h^2$.

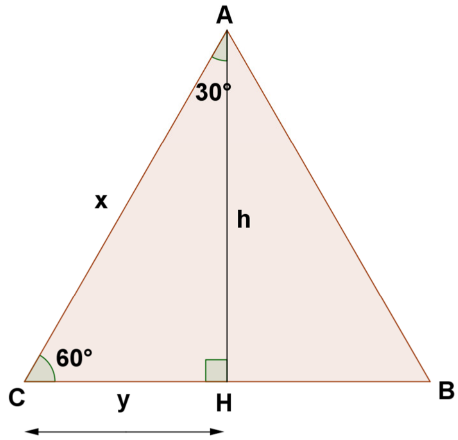


Figura 3

Como $y = \frac{x}{2}$, então $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$. Daí tem-se que: $h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

E, de acordo com a figura 3, tem-se:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{y} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Como os ângulos 30° e 60° são complementares, resulta:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{sen}30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para obter os valores do ângulo de 45°, considera-se o triângulo retângulo ADC obtido da divisão do quadrado ABCD por sua diagonal AC. De acordo com a figura, temos:

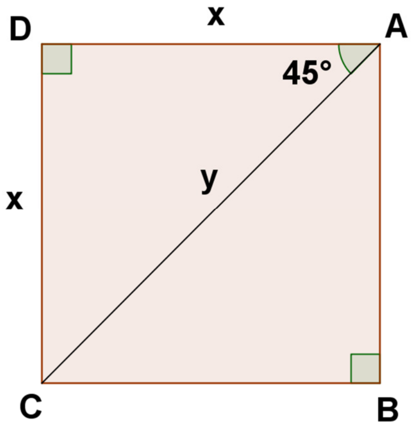


Figura 4

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$y^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2}$$

Logo:

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{x}{x} = 1$$

Os resultados obtidos podem ser organizados na seguinte tabela:

Tabela 1

	α = 30°	α = 45°	α = 60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. Pesquisa[4]

A presente pesquisa propõe um método diferenciado para ensinar a trigonometria por meio da resolução de problemas com o auxílio do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Diante da dificuldade de se transmitir os conceitos de trigonometria, sugerem-se algumas atividades específicas para que os alunos construam seu próprio conhecimento, visando a não mecanização da aprendizagem.

[4] Em colaboração com Anderson da Silva Melo, exceto a Análise Individual

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na solução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível poderão gerar gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1978).

A experiência foi aplicada nas duas escolas do município do Rio de Janeiro em que os autores desta pesquisa lecionam. A mesma metodologia de ensino foi utilizada, em conjunto, em ambas as escolas, assim como os mesmos exercícios e a mesma avaliação final. Traçou-se como propósito principal a obtenção de um paralelo de resultados entre as duas realidades escolares.

3.1. Clientela

A experiência foi aplicada em três turmas de 9° ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal do Rio de Janeiro. Duas delas foram as turmas 1901 e 1902 da E.M. Roberto Burle Marx - primeira colocada no ranking das escolas públicas do município do Rio de Janeiro no último IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) em 2011, com nota 6,6 -, localizada no bairro de Jacarepaguá, da qual Anderson Melo é professor. As turmas possuem em sua totalidade 60 alunos com idades que variam entre 14 e 15 anos. Segundo estimativas da escola, os alunos são oriundos de bairros e comunidades próximas.

A terceira turma é a 1902, da E. M. Camilo Castelo Branco, na qual o professor Michel Martins leciona. A escola localiza-se no bairro Jardim Botânico e possui apenas uma turma de 9º ano, que conta com 34 alunos de faixa etária semelhante às das primeiras. Cabe ressaltar que, no decorrer do período de três semanas de aplicação da experiência, seis novos alunos ingressaram na turma. Uns recém-matriculados, e outros transferidos do turno da tarde. Com nota 4,2 na última avaliação do IDEB, ficou com classificação inferior à recomendada pelo MEC como escola de qualidade.

Segundo estimativas da escola, aproximadamente 80% dos alunos são oriundos da comunidade da Rocinha; os demais, da região do Horto, próxima à escola.

A figura a seguir aponta as notas de Matemática dessas escolas na Prova Rio (avaliação externa aplicada aos alunos do 3º e 7º anos) nos anos de 2011 e 2012 e também a média da Rede Municipal. Estes dados foram coletados do material fornecido pela Secretaria Municipal de Educação no Seminário de Divulgação dos Resultados da Prova Rio – 2011 e 2012, realizado no dia 02 de abril de 2013, para o qual o professor Michel foi convidado.

Os alunos das turmas participantes dessa experiência, hoje cursando o 9º ano, são os mesmos que em 2011 e 2012 cursavam os 7º e 8º anos, respectivamente. Neste gráfico, pode-se observar que a E. M. Camilo Castelo Branco apresentou notas similares à média da Rede, bem como o destaque da E. M. Roberto Burle Marx, com notas muito superiores.

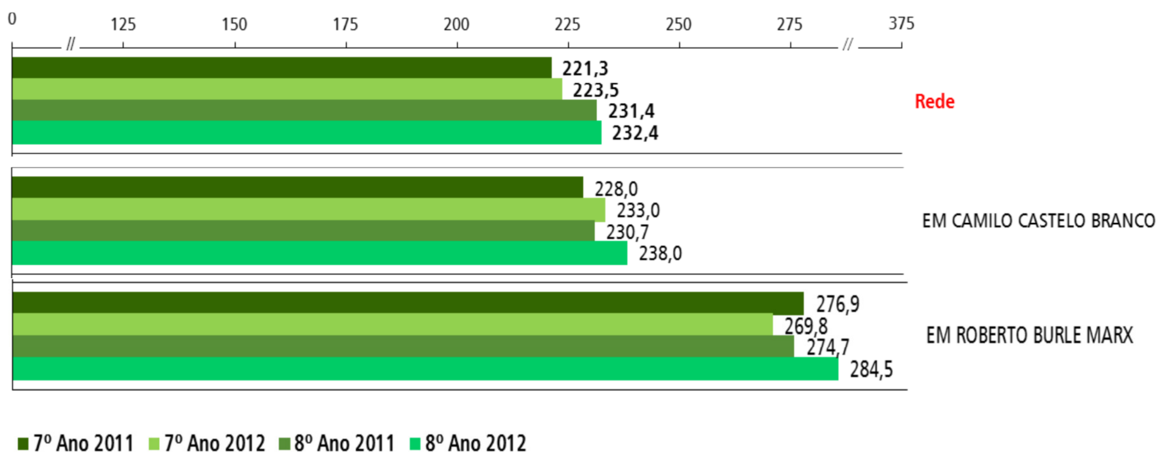


Figura 5

3.2. Desenvolvimento da experiência

Foram ministradas cinco aulas expositivas e práticas, com duração de cem minutos cada. Posteriormente, foi aplicada uma avaliação formativa. Na Escola Municipal Roberto Burle Marx, as aulas foram ministradas nas segundas e quartas-feiras, enquanto na Escola Municipal

Camilo Castelo Branco, nas terças e quintas-feiras, respeitando-se os horários habituais das aulas de Matemática.

3.2.1. Aula 1

A aula inicial objetivou contextualizar a aplicação das razões trigonométricas em situações cotidianas e abstratas vivenciadas pelos alunos. A fim de despertar o interesse do grupo pelo assunto, foi abordada a história da trigonometria e citados exemplos de situações reais, áreas de estudo e profissões que se utilizam dos conceitos explorados na aula.

3.2.1.1. Aprendendo as Razões Trigonométricas com o Geogebra

Propôs-se um exemplo simples e do interesse dos alunos. Através dele reforçou-se a ideia do cálculo por triangulação e utilizou-se a teoria da semelhança de triângulos para, posteriormente, ser resolvido com as razões trigonométricas.

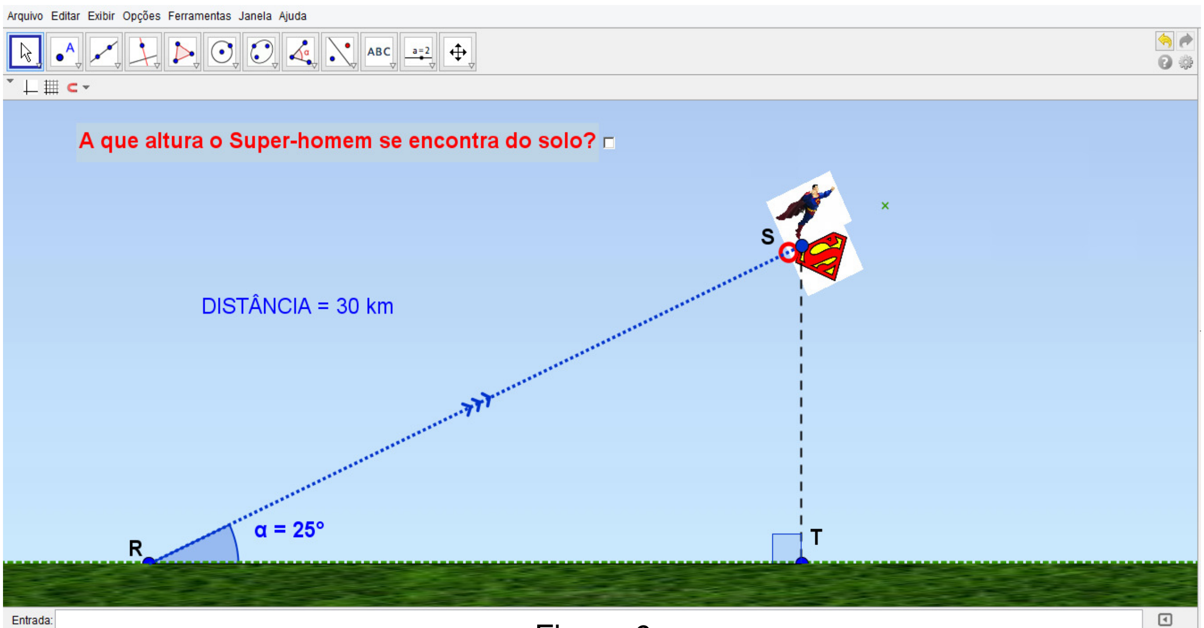


Figura 6

Em seguida, usaram-se dez triângulos semelhantes ao ΔRST com medidas quaisquer, divididos em cinco folhas diferentes contendo dois dos triângulos cada, com a finalidade de descobrir o valor da razão ST/RS do problema proposto.

A turma foi distribuída em duplas e cada uma recebeu uma folha de papel contendo dois triângulos semelhantes ao da Figura 6. A fim de garantir que toda a turma realizasse a atividade, foram fornecidas régua e calculadora. Pediu-se, então, que cada grupo fizesse as medições dos lados e calculasse as razões propostas na atividade com a calculadora. Expôs-se o método de aproximação das casas decimais para a turma, com a própria calculadora do *Windows,* reproduzida por meio do projetor de imagens para, posteriormente, compará-las com os cálculos efetuados pelo restante da turma.

Foi esclarecido aos alunos que, devido à falta de precisão da régua e às aproximações feitas nas divisões, os resultados tendem a ficar ligeiramente diferentes. Portanto, propôs-se que cada dupla calculasse a média aritmética de suas razões. Ao fim desta etapa, cada dupla expôs o resultado da média de cada razão e o professor os computou na planilha do *Excel* reproduzida no projetor de imagens. Desta maneira, toda a turma pode observar os valores obtidos por cada dupla, além da média final calculada. Este valor foi transcrito para a folha de cada dupla, de forma que estas pudessem fazer as devidas comparações.

Ao fim do trabalho prático realizado pelos alunos, apresentou-se no Geogebra o arquivo da Figura 7. O arquivo produzido nesse *software* possibilita a verificação imediata e prática de que a razão procurada independe das medidas dos lados dos triângulos. Posteriormente, foram criadas situações angulares distintas de modo a observar melhor este fato.

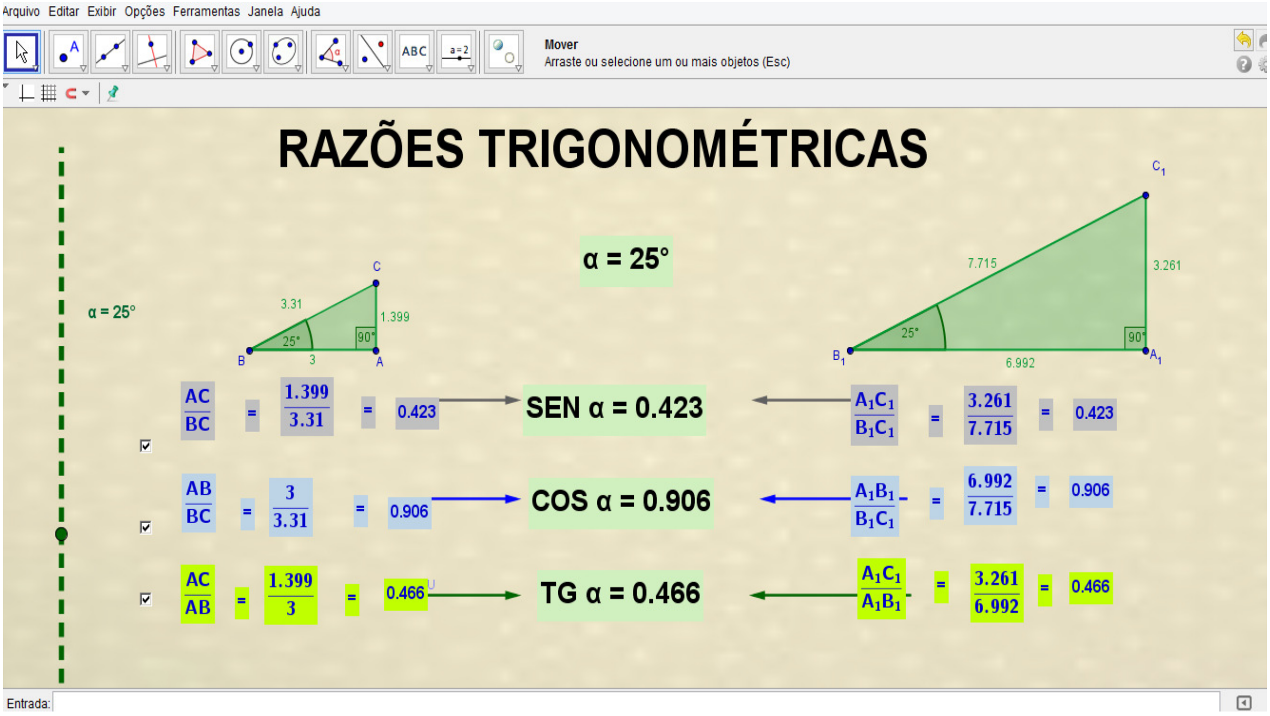


Figura 7

O verso da folha de atividades continha a imagem do Geogebra da Figura 6 e, logo abaixo, a formalização das razões com suas simbologias. Essa disposição trazia o propósito de retomar o problema inicial para, finalmente, solucioná-lo com o conhecimento recentemente adquirido.

Concluiu-se, portanto, que o quociente encontrado será sempre o mesmo em qualquer triângulo retângulo que possua um ângulo de 25°, não importando os comprimentos dos seus lados.

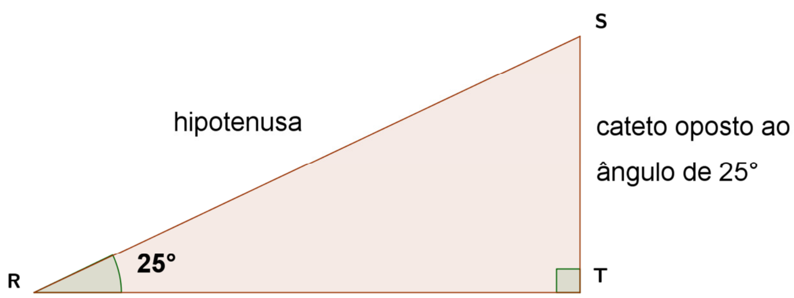


Figura 8

Conclusão:

$$\frac{ST}{RS} = \frac{ST}{30} \approx 0{,}42$$

Logo, $\text{ST} \approx 0{,}42 \cdot 30 = 12{,}6\ \text{km}$

Portanto, a altura do Super-homem em relação ao solo é de 12 km e 600 m.

3.2.1.2. Formalizando o Aprendizado

A partir da experiência, o aluno é capaz de compreender que toda razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, em qualquer triângulo retângulo com ângulos iguais, é a mesma. Entendido o conceito, iniciou-se a introdução da simbologia para completar a construção do conhecimento, mencionando que os matemáticos denominaram essa razão de **seno**. Como o ângulo era o de 25°, trabalhou-se com o seno de 25°, cuja notação se dá por *sen 25°* ou, simplesmente, seno de 25°. As outras razões em questão foram relacionadas aos nomes **cosseno** e **tangente**, que somadas às suas razões inversas são chamadas de razões trigonométricas no triângulo retângulo, como citado no referencial teórico.

A seguir apresenta-se uma amostra do ensino direto e mecanizado, comumente adotado em muitos estabelecimentos de ensino. Dessa maneira, é ocultado o método de triangulação e a resolução de problemas contextualizados, e priorizam-se somente conceitos e massificação de exercícios repetitivos, em detrimento da busca da construção do pensamento.

$$\text{Tangente de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\text{a}}{\text{c}}$$

$$\text{Seno de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{a}}{\text{b}}$$

$$\text{Cosseno de } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{c}}{\text{b}}$$

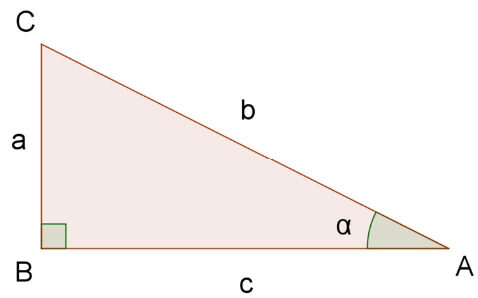


Figura 9

3.2.1.3. Análise individual dos resultados

a. E.M. Roberto Burle Marx

O dia da primeira aula na Escola Municipal Roberto Burle Marx foi o mesmo em que conheci a escola. Até esse momento, só possuía algumas referências, como seus índices nas avaliações do IDEB.

Fui apresentado a todas as dependências pela Diretora, a qual me transmitiu um apurado senso de organização e cuidado com a manutenção da escola.

Acompanhado do professor Anderson, que leciona às turmas nas quais a experiência foi aplicada, entrei na sala com 10 minutos de antecedência a fim de prepará-la e ligar os aparelhos eletrônicos. A sala, limpa, organizada e climatizada, compôs um ambiente ainda mais agradável, tanto para os professores quanto para os alunos, que chegaram todos juntos e no horário correto. Como todos possuem lugares pré-definidos para se sentar, a organização foi rápida e logo demos início à aula, começando pela minha apresentação à turma.

Exibimos, por meio do projetor de imagens e em forma de *slides,* uma breve introdução à Trigonometria e explicamos a origem e o significado da palavra, além de citar as diversas áreas que utilizam a Trigonometria. Era nítida a atenção da turma, que deu opiniões pessoais na área da Medicina, Óptica e Estatística. Demos enfoque no campo da Criptologia, Engenharias, Astronomia e Sismologia e, ao fim da apresentação, exemplificamos as aplicações práticas, com ênfase nas distâncias inacessíveis, que trabalharíamos posteriormente em forma de exercícios.

O primeiro exercício construído no Geogebra, no qual foi criada uma situação hipotética baseada no voo do Super-homem, foi exposto através do projetor de imagens. Apresentamos o problema e, em seguida, posicionamos o Super-homem de diversas maneiras diferentes, cada qual com uma variação angular distinta. Nesse momento, a turma interagia bastante, parecendo se divertir com a movimentação do personagem.

Ao serem questionados sobre como seria possível resolver o problema, ou seja, calcular a altura do super-homem em relação ao solo, sabendo que este percorreu 30 km com uma inclinação de 25°, a maioria (de forma idêntica na segunda turma da escola onde ministramos a aula) sugeriu o Teorema de Pitágoras. Percebi que a maioria da turma possuía certo domínio sobre os elementos do triângulo retângulo, pois identificaram rapidamente a hipotenusa. Portanto, a sugestão era a solução da seguinte equação: $30^2 = AC^2 + 25°^2$. Explicamos que eles estavam confundindo ângulos com lados e esboçamos outras situações no quadro. A turma então percebeu que o Teorema de Pitágoras oferecia uma equação e duas incógnitas, impossibilitando a resolução do problema. Apresentávamos, neste momento, o cálculo envolvendo as razões trigonométricas do triângulo retângulo.

Dispomos as cadeiras de forma que os alunos pudessem sentar-se em duplas e entregamos a folha de atividades. Praticamente todos levaram suas réguas e calculadoras, conforme havia sido solicitado com antecedência pelo professor Anderson. Como existiam dois triângulos semelhantes por folha, sugerimos que cada componente da dupla fizesse as medidas e os cálculos das razões respectivas a cada um deles. Percebi neste momento que a presença de dois professores em sala acelerava o processo de elucidar as dúvidas e, enquanto isso, toda a turma realizava a tarefa. Não observei nenhum aluno enfrentando dificuldades nas medições.

Para o cálculo das razões com aproximação de três casas decimais, projetamos a calculadora do *Windows* para que a turma visualizasse as regras. Além disso, pedimos que fossem calculadas as médias aritméticas das razões de forma que este resultado assumisse o valor da razão da dupla em questão. Ao final desse cálculo, seria necessário, novamente, aproximar os valores obtidos. Nesta etapa, fomos chamados por muitos alunos para solucionar dúvidas.

Finalizada a atividade, um integrante de cada dupla (um por vez) dirigiu-se à mesa do professor para que pudéssemos computar os valores na planilha e, ao fim, calcularmos a média aritmética da turma. A seguir, a tabela com dados inseridos.

Tabela 2

	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4	Dupla 5	Dupla 6	Dupla 7	Dupla 8	Dupla 9	Dupla 10	Dupla 11	Dupla 12	Dupla 13	Dupla 14	Média Turma
$\frac{AC}{BC}$	0,423	0,426	0,418	0,423	0,420	0,424	0,444	0,425	0,420	0,418	0,446	0,420	0,423	0,418	0,425
$\frac{AB}{BC}$	0,899	0,903	0,911	0,908	0,903	0,905	0,894	0,907	0,903	0,905	0,911	0,903	0,908	0,903	0,905
$\frac{AC}{AB}$	0,471	0,471	0,459	0,466	0,465	0,469	0,469	0,472	0,465	0,462	0,466	0,465	0,466	0,463	0,466

Efetuado o cálculo, pedimos que cada dupla anotasse o valor da média da turma no campo correspondente e comparasse com seus próprios valores. Alguns alunos que alcançaram valores próximos ou iguais à média da turma se manifestaram. Explicamos que todos estavam corretos e que as diferenças ocorriam devido às aproximações e à imprecisão da régua como instrumento de medida de três casas decimais. Em seguida, com o arquivo do Geogebra das razões trigonométricas da Figura 7 projetado, fizemos de maneira dinâmica uma analogia à atividade prática realizada pelos alunos. Variamos os triângulos em diversos tamanhos de modo que os alunos, aparentemente sem exceção, perceberam que as razões mantêm-se inalteradas. Aproveitando a praticidade do arquivo, trocamos o ângulo agudo de 25° por configurações angulares distintas de modo a enriquecer o entendimento do aluno. A aceitação da turma foi excelente e não houve dúvidas.

Com um novo arquivo do Geogebra projetado, igual ao que consta no verso da folha de atividades, formalizamos o aprendizado. Ensinamos as simbologias das razões e comentamos significado dos nomes. Ao indagar se alguém já tinha ouvido falar sobre os nomes aprendidos, nenhum aluno se manifestou.

De volta ao problema do Super-homem perguntamos à turma qual a razão que deveríamos usar. Percebendo certa dificuldade dos alunos para responder, fizemos perguntas sobre os elementos do triângulo retângulo formado, ou seja, que dados possuíamos e o que desejávamos obter. Muitos responderam corretamente e mencionaram que o seno seria a razão correta. Efetuamos os devidos cálculos e, no fim, cada aluno copiou a solução em sua folha de atividades.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Na Escola Municipal Camilo Castelo Branco, na qual leciono, a metodologia aplicada na primeira aula foi exatamente igual à aplicada na outra escola.

Iniciada a aula, estavam presentes apenas 24 alunos, de um total de 34, e poucos demonstravam interesse na apresentação de *slides*. Um agravante para a desatenção do grupo é o fato de que a arrumação da sala estimula a conversa em momentos indevidos, já que as cadeiras são dispostas aos pares, criando uma proximidade muito grande entre os alunos. Após chamar a atenção de alguns deles, foi dada sequência à introdução do conteúdo.

Ao questionarmos sobre uma maneira de solucionar o problema inicial do Super-homem, dois alunos sugeriram a aplicação do Teorema de Pitágoras. Experimentando a aplicação da sugestão ao problema, no quadro, mas em conjunto com a turma, pude perceber que a grande maioria não possuía o domínio sobre os elementos do triângulo retângulo. Nesse momento, interrompemos a aula para explicar, de forma breve, a aplicação do Teorema e a identificação dos elementos do triângulo retângulo.

Retomando o problema, a turma, em sua maioria, sugeriu a mesma equação da Burle Marx: $30^2 = AC^2 + 25°^2$. Demonstramos, da mesma maneira, onde se encontrava o erro e demos sequência à atividade prática.

Embora avisados com antecedência da necessidade de levar o material no dia da aula, poucos alunos portavam régua e apenas dois, a calculadora. Muitos alegaram que usariam seus telefones celulares, mas, conforme planejado, fornecemos o material para o início da atividade. Solicitamos que começassem a medir os lados e poucos alunos esboçavam alguma reação. Porém, no decorrer da atividade, progressivamente foram nos chamando para obter explicações, o que ocorreu até o fim da atividade.

Pude perceber que alguns alunos apresentavam dificuldades com a medição, principalmente para posicionar o zero da régua de forma correta no início do segmento. Mesmo os que sabiam fazer a atividade apresentavam elevado grau de dependência e sentiam-se inseguros com o resultado.

Essa atividade serviu, principalmente, para inserir o professor Anderson no ambiente da turma, pois os alunos chamavam qualquer um dos professores, sem distinção.

No início do segundo tempo de aula, quatro alunos chegaram e começaram a realizar a atividade e por isso a tabela a seguir apresenta os dados inseridos com as médias de quatorze duplas.

Tabela 3

	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4	Dupla 5	Dupla 6	Dupla 7	Dupla 8	Dupla 9	Dupla 10	Dupla 11	Dupla 12	Dupla 13	Dupla 14	Média Turma
$\frac{AC}{BC}$	0,421	0,426	0,43	0,44	0,443	0,421	0,424	0,422	0,421	0,439	0,418	0,422	0,423	0,450	0,429
$\frac{AB}{BC}$	0,909	0,923	0,903	0,916	0,905	0,908	0,913	0,909	0,906	0,902	0,893	0,916	0,917	0,913	0,910
$\frac{AC}{AB}$	0,464	0,462	0,475	0,456	0,438	0,464	0,464	0,463	0,465	0,486	0,468	0,460	0,462	0,471	0,464

Após a visualização do arquivo da Figura 7 com as razões trigonométricas, muitos alunos disputaram entre si para saber quais teriam alcançado o resultado mais próximo do correto. Explicamos que não havia resultado mais certo do que outro e, quanto a isso, não houve manifestações de dúvida.

Notei que os alunos apresentavam ansiedade quanto ao fim da aula, uma vez que a aula seguinte era de Educação Física.

3.2.2. Aula 2

3.2.2.1. Construção Prática da Tabela Trigonométrica

A segunda aula objetivou a construção, pelos alunos, de uma tabela trigonométrica.

Inicialmente, apresentou-se o método para calcular os arcos notáveis de 30°, 45° e 60° conforme citado na fundamentação teórica. Na primeira metade da aula, cada aluno recebeu uma folha contendo parcialmente as demonstrações das razões dos arcos notáveis. Foi reproduzido o mesmo material no projetor de imagens, para que os alunos acompanhassem, participassem e anotassem todos os passos das demonstrações, para que, no final, pudéssemos ensiná-los a completar a tabela das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

Na segunda metade da aula, pediu-se aos alunos que construíssem uma tabela contendo as razões trigonométricas dos ângulos de 80°, 70°, 50°, 40°, 20° e 10°. A escolha destes ângulos deve-se à facilidade de, em uma mesma experiência concreta, obtê-los através de três triângulos retângulos sobrepostos e apoiados no mesmo ângulo reto. A Figura 10 mostra os triângulos separados, visualizados no Geogebra. De maneira prática e dinâmica, movimentaram-se os triângulos para que os alunos se acostumassem com suas imagens e, posteriormente, retornou-se à posição encontrada na folha de atividades.

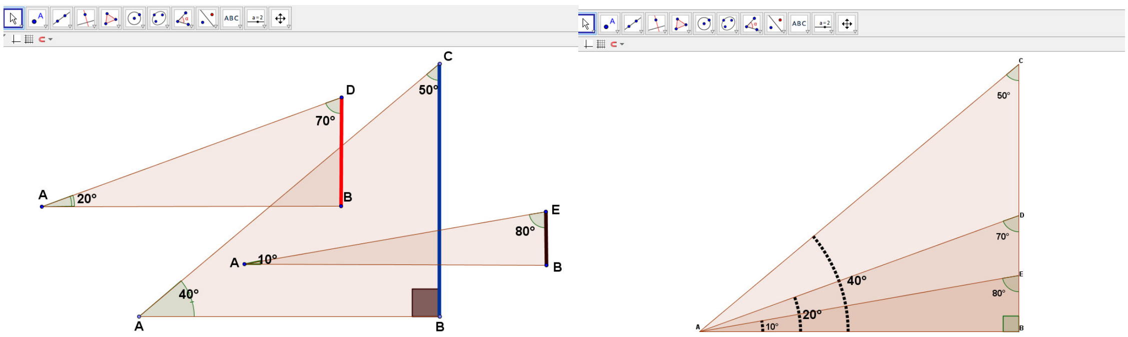


Figura 10

As turmas foram divididas em 3 grupos, subdividindo-os em dupla. Cada grupo foi responsável pela medição e cálculo de uma das razões trigonométricas: seno, cosseno ou tangente. Para a realização da atividade, cada dupla utilizou uma régua e uma calculadora simples.

Após a tarefa, cada dupla revelou seus resultados e o professor calculou, com a ajuda do Excel - cuja imagem estava projetada no quadro -, a média aritmética dos valores para obtenção de uma melhor aproximação com três casas decimais na tabela.

No verso da folha de atividades consta a tabela a seguir, completa com os valores reais e aproximados com três casas decimais das razões trigonométricas. Discutiu-se com a turma os resultados calculados na atividade e os valores precisos obtidos no Geogebra.

Tabela 4

ÂNGULOS	SENO	COSSENO	TANGENTE
10°	0,174	0,985	0,176
20°	0,342	0,940	0,364
30°	$\frac{1}{2}$ = 0,500	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,577
40°	0,643	0,766	0,839
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	1
50°	0,766	0,643	1,192
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	$\frac{1}{2}$ = 0,500	$\sqrt{3}$ = 1,732
70°	0,940	0,342	2,747
80°	0,985	0,174	5,671

Após o debate, regressou-se ao Geogebra, para o arquivo das razões trigonométricas da Figura 7. Variou-se de forma prática e rápida o ângulo, permitindo que os alunos comprovassem os valores das razões que foram calculados. Foi sugestionado aos alunos que não havia a necessidade de construir um triângulo semelhante para obter-se o valor das razões, pois será utilizada nas aulas seguintes a tábua das razões trigonométricas.

Próximo do fim da aula mostrou-se aos alunos a relação entre ângulos complementares e seus respectivos valores de seno e cosseno, bem como a tangente, que pode ser calculada pela razão entre o seno e o cosseno.

3.2.2.2. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Antes de iniciarmos a aula 2, recapitulamos brevemente o que tinha sido abordado na aula anterior. Quando questionados se recordavam dos valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 25°, alguns alunos responderam, de forma correta, os valores com aproximações de três casas decimais. Além de apresentar ótimo rendimento na aula anterior, os alunos também transmitiram a impressão de ter estudado em casa. Essa análise foi mais perceptível quando iniciamos as demonstrações das razões dos arcos notáveis. A turma, em sua maioria, conhecia o valor da diagonal do quadrado em função do seu lado e, também, o valor da altura do triângulo equilátero em função do seu lado.

Durante a aula, algumas dúvidas surgiram nas racionalizações. No cálculo da tangente de 45°, a maioria da turma respondeu que a razão $\frac{1}{1}$ dava como resultado l. Já nas passagens em que ocorriam divisões de frações, alguns alunos não sabiam responder que o denominador de números inteiros é o número 1.

Antes da conclusão dessa aula, completamos a tabela dos arcos notáveis cantando, de forma divertida, uma música que os auxiliasse em sua memorização. No intervalo, testemunhei alunos ensinando a tabela aos integrantes de outra turma. Após ter a certeza de que os alunos haviam assimilado o conteúdo da primeira aula, sugerimos a associação da palavra “sohcahtoa” para o uso correto da posição dos elementos do triângulo retângulo nas razões trigonométricas.

Na segunda parte da aula, entregamos a folha na qual os alunos efetuaram as medidas, calcularam as razões e construíram a tabela trigonométrica que serviria de consulta nas próximas aulas. Inicialmente, perguntamos à turma quantos triângulos retângulos eles visualizavam na folha. Muitos não arriscaram e poucos disseram haver três. Então, com o arquivo da Figura 10 visualizado na imagem projetada, mostramos aos alunos os três triângulos separados. Após variar suas posições, recolocamos exatamente da maneira como estava sendo visto na folha de atividades. A partir daí, seguiram fazendo as medidas.

Nessa aula, a turma solicitou mais ajuda do que na primeira, porém, as dúvidas se restringiram à confirmação dos lados medidos e não houve observações significantes. Ao término, de maneira similar à aula anterior, utilizamos uma planilha para calcular a média dos grupos. Com a tabela completa, os alunos puderam fazer as devidas comparações, principalmente na questão dos ângulos complementares, que havíamos acabado de discriminar.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Antes de iniciarmos a aula, percebi que os alunos estavam em maior número e ligeiramente mais à vontade do que na aula anterior. E, pensando nas possíveis dificuldades dos alunos desta escola em assimilar a demonstração das razões dos arcos notáveis, resolvemos fazê-la de forma lenta e detalhada. Como cada aluno deveria preencher os campos em branco imediatamente após os completarmos no quadro, conseguimos garantir a sua atenção até o fim.

Houve pouquíssimas dúvidas no caso do quadrado. Por conta disso, tive a confirmação de que a maneira como eu e o professor Anderson decidimos nos referir aos ângulos (pelos três vértices que o compõem) foi a mais acertada. Os alunos, em ambas as escolas, conseguiram verificar a localização dos ângulos sem qualquer problema. Porém, na demonstração no triângulo equilátero, a fisionomia dos alunos transparecia as dúvidas a cada passagem. Somente após repetir os cálculos, tive segurança necessária para prosseguir.

No momento de completar a tabela das razões dos arcos notáveis, a turma atingiu seu grau máximo de descontração. Pedimos aos alunos que repetissem o conteúdo da tabela, todos juntos e em diversas entonações. Após alguns eventos, passamos para medição dos três triângulos sobrepostos.

Nessa atividade, trabalhamos intensamente com a turma. Mesmo depois da visualização dos triângulos separados no Geogebra, as dúvidas quanto às medições ainda eram constantes. Próximo do fim da aula verifiquei uma dupla de alunas ao fundo, que não haviam conseguido começar a atividade. Enquanto o professor Anderson auxiliava os demais alunos, pude dedicar toda atenção a elas até que conseguissem prosseguir com as demais medidas sozinhas.

Para terminar a aula sem pendências, foi necessário solicitar a concessão de 20 minutos do tempo da professora de Geografia. Concluímos a aula e, apesar da intensa dependência da turma, notei que alguns alunos estavam mais atenciosos e cuidadosos na atividade prática.

3.2.3. Aula 3

Na terceira aula, o principal objetivo era aplicar os conhecimentos adquiridos em duas situações-problema distintas visualizadas no Geogebra por meio do projetor de imagens. Nas duas situações foram exploradas cada uma das razões trigonométricas; os valores das razões utilizadas foram consultados na tábua construída na Aula 2.

3.2.3.1. O problema da caixa d'água

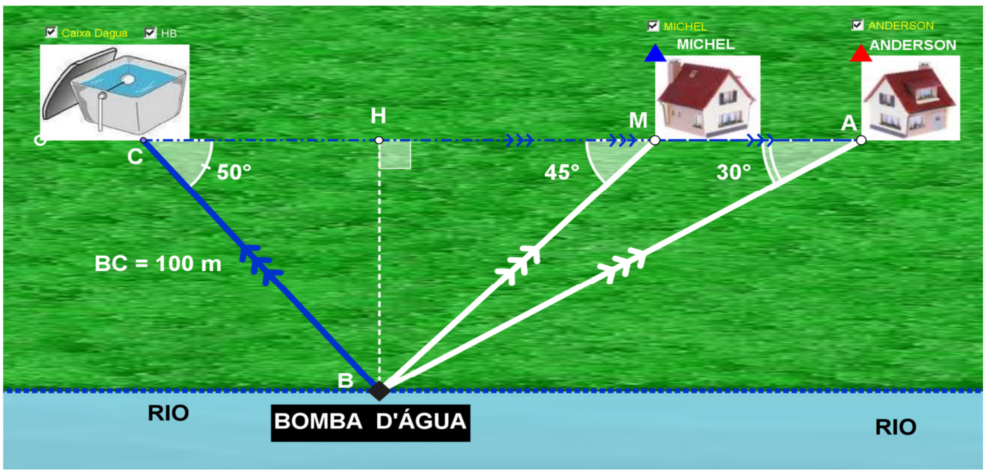


Figura 11

Essa situação contextualizada foi apresentada da seguinte maneira: a água utilizada nas casas M e A é colhida do rio e bombeada para uma caixa d'água a 100 m de distância do ponto de captação. Portanto, para chegar até A, a água percorre, nesta ordem, os caminhos BC e CA.

Pediu-se aos alunos que calculassem as distâncias CM (item a) e AB (item b), que representa um encanamento feito diretamente da bomba d'água B até a casa A.

Inicialmente, foi solicitado aos alunos que observassem a existência de triângulos retângulos, uma vez que a altura BH encontrava-se oculta. Em seguida, para o cálculo do item a), exibiu-se a altura BH do triângulo BCM, mostrando que este subdivide-se em dois triângulos retângulos: BHC e BHM. Reforçou-se, então, que o segmento CM desejado deve sua origem à soma dos catetos CH e HM.

Posteriormente, analisou-se a necessidade de calcular a altura BH, que representa um lado comum dos triângulos BHC e BHM, e o uso das razões trigonométricas corretas. Para o cálculo de BH, usou-se sen 50°. No entanto, para o cálculo de CH utilizou-se cos 50° (dada a facilidade do cálculo com 100 m) e, para HM, tg 45°.

Para o cálculo do item b, ocultou-se, clicando nas respectivas caixas localizadas acima de cada objeto, a caixa d'água e os segmentos BC e CH, bem como a casa M e o segmento BM. Por conseguinte, o aluno visualizou o problema conforme a figura a seguir.

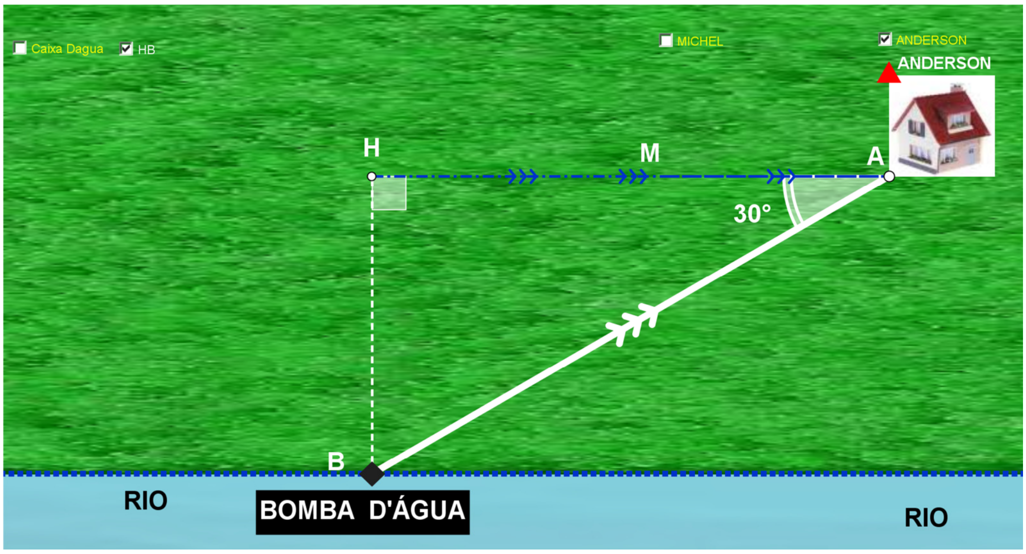


Figura 12

Finalmente, foi utilizado o seno de 30° para obter o valor do segmento CA.

3.2.3.2. O problema do veleiro

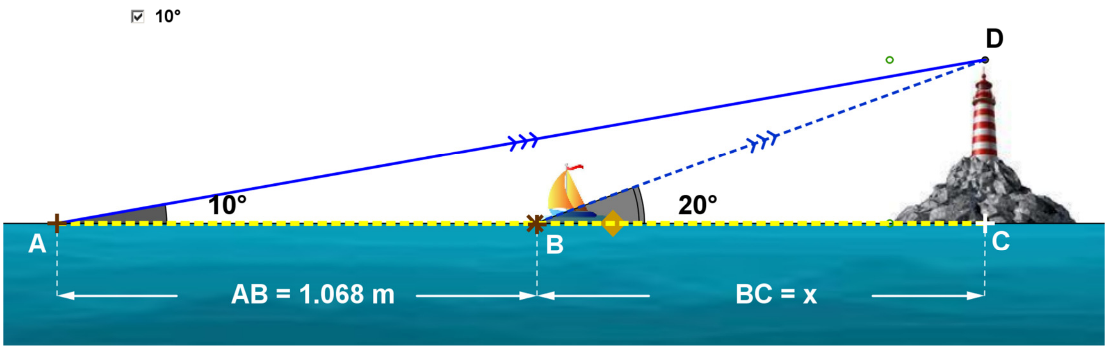


Figura 13

Essa situação contextualizada foi apresentada da seguinte maneira: um veleiro encontra-se à deriva no ponto A e avista o topo D de um farol localizado no alto de uma montanha, sob um ângulo de 10°. Depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto B, distante 1.068 m do ponto A, e avista o topo do farol sob um ângulo de 20°.

Pediu-se aos alunos que calculassem a distância restante até a base do farol (item a) e a altura do farol em relação ao nível do mar (item b).

Primeiramente, variou-se a posição do veleiro para que os alunos observassem as diferentes posições e suas respectivas variações angulares. Em seguida, solicitou-se a eles que verificassem a existência dos triângulos retângulos, uma vez que a altura CD do farol encontrava-se oculta. Nesse momento, foi introduzida a ideia do cálculo das distâncias inacessíveis, em razão da impossibilidade do veleiro atingir o ponto C, isto é, o pé do segmento que representa a altura do farol em relação ao nível do mar.

Desmembrou-se o problema nos triângulos retângulos ADC e BDC, observando os dois segmentos que receberam variáveis. No caso, BC = x e CD = h.

Foi sugerido para este problema o uso das razões trigonométricas com aproximação de três casas decimais. Preliminarmente, no triângulo BDC, empregou-se tg 20° para encontrar a relação: h = 0,364x. No triângulo ADC, utilizou-se tg 10° para alcançar a relação: h = 188 + 0,176x.

Igualando as duas relações obteve-se x = 1000 m e, substituindo o valor de x em uma das relações anteriores, encontrou-se a altura do farol em relação ao nível do mar. Portanto, BC = h = 364 m.

No desfecho da aula, propôs-se um exercício extra, similar ao problema do Super-homem apresentado na Aula 1. Nesse, um foguete é lançado da cidade A com uma inclinação de 40° e, após percorrer 13 km em linha reta, atinge o ponto C exatamente acima da cidade B. Pediu-se, portanto, a distância AB entre as cidades.

Para o cálculo deste problema bastava empregar o cos 40° para encontrar o valor solicitado.

3.2.3.3. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

A aula transcorreu sem observações significativas na exploração do problema da caixa d'água. Em parte porque foi uma aula expositiva, na qual os alunos deveriam concentrar a atenção nas explicações. Somente ao fim da solução, concedemos tempo para que copiassem o desenvolvimento da questão em suas folhas de atividades. Quando solicitados, os alunos respondiam aos questionamentos dos professores e, nesse momento, já apresentavam um bom domínio sobre os conceitos aprendidos.

No problema do veleiro, ao mencionarmos a impossibilidade efetuar a medição através da montanha, pude perceber que alguns alunos se sentiram um pouco incomodados com o surgimento de duas variáveis. Por isso, desenvolvemos a questão com bastante cautela, de modo a assegurar que o máximo de alunos havia entendido. Contudo, ficou claro que uma parte significativa da turma não estava segura.

Terminamos a aula no horário e, ao terminar os cálculos, perguntamos à turma como eles classificariam este exercício e todos consideraram a questão muito difícil.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Conduzimos a aula de maneira similar à aplicada no dia anterior na E. M. R. Burle Marx. Embora alguns alunos ainda demonstrassem total desinteresse pela aula, um grupo cada vez maior passou a interagir. É possível atribuir esse fato à contextualização dos problemas, pois a assimilação tornou-se claramente mais fácil. Muitos alunos opinaram sobre o enunciado e concluíram a real necessidade de se fazer uma ligação direta até a casa A. Ouvi sugestões para construir a casa em outro lugar ou até mesmo de fazer um encanamento paralelo àquele que vai à casa M, diretamente a A. Enfim, percebi que a turma, em sua maioria, estava inserida no contexto do problema e certamente isso facilitou no desenvolvimento da questão.

Já no problema do veleiro, posso afirmar que as dúvidas foram unânimes, principalmente na resolução das equações com duas variáveis. Notei que a turma acompanhou o raciocínio somente até a separação nos dois triângulos retângulos; aparentavam não ter dúvidas quanto à utilização da tangente como a razão correta. Todo o tempo restante da aula foi utilizado para reforçar os cálculos que fizemos, mas, mesmo assim, ouvi muitos alunos dizendo que não haviam compreendido.

Depois da aula, o professor Anderson e eu nos reunimos para decidir como seria a aula seguinte, pois teríamos que dedicar toda a nossa atenção ao exercício similar, elaborado para a lista de exercícios. Precisávamos de mais tempo e mais detalhes para entender onde estavam as dúvidas.

3.2.4. Aula 4

Com esta aula almejou-se reunir os conhecimentos adquiridos nas três aulas anteriores e aplicá-los em diversas situações-problema apresentadas em forma de lista de exercícios. Foi estimado um tempo aproximado de 10 minutos para que cada aluno tentasse resolver cada questão. Findo o tempo, o professor corrigiu a questão visualizada por meio projetor de imagens. Seguiu-se assim, sucessivamente, até a correção completa da lista. A seguir, apresenta-se a tabela com a temática, as habilidades relacionadas e o material utilizado para a solução de cada questão.

Tabela 5

Q.	Temática	Habilidade relacionada	Material
1	Cálculo da altura de um prédio	Uso da razão correta: tangente Consulta à tabela dos arcos notáveis	Lápis Borracha Calculadora
2	Cálculo da altura da escada do Corpo de Bombeiros em relação ao solo	Uso da razão correta: seno	Lápis Borracha Calculadora
3	Cálculo da altura da queda de uma tirolesa	Uso da razão correta: cosseno Consulta à tabela dos arcos notáveis Visualização do triângulo retângulo oculto	Lápis Borracha Calculadora
4	Medição e identificação dos lados de um triângulo retângulo; Cálculo aproximado das razões trigonométricas de 37°	Uso correto dos elementos do triângulo retângulo no cálculo das razões trigonométricas	Lápis Borracha Calculadora Régua
5	Encontrar os ângulos agudos de um triângulo retângulo, dados dois de seus lados e uma tabela trigonométrica	Uso da razão trigonométrica correta Consulta à tabela dada	Lápis Borracha Calculadora
6	Calcular a altura do Pão de Açúcar	Uso da razão correta: tangente Solucionar sistemas de 2 equações e 2 variáveis	Lápis Borracha Calculadora

3.2.4.1. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Essa aula foi dedicada à resolução da totalidade dos exercícios da lista (Anexos 9 e 10). Durante os 10 minutos concedidos para que os alunos resolvessem cada questão, foi possível notar a concentração da turma para resolução da lista. Optamos por não esclarecer dúvidas durante as tentativas dos alunos e somente efetuamos alguma observação ou correção findo o prazo estipulado. Caminhando entre as mesas, observei que todos tentavam efetuar os cálculos, na maioria das vezes com sucesso.

Com relação às correções, nas questões 1 e 2, nas quais era necessário, para chegar ao resultado correto, somar ao resultado a altura do homem e a altura do caminhão, respectivamente, alguns alunos falharam por falta de atenção e não concluíram a soma.

Na questão nº 3, da tirolesa, um número considerável de alunos não conseguiu visualizar o triângulo oculto. Entretanto, a aluna A., surpreendeu-me com sua solução incomum: prolongou o segmento AB até o ponto D de modo a formar o triângulo retângulo ACD. Usando cos 60° encontrou 24 m para a medida AD e, consequentemente, 14 m para BD. Traçou BE paralelo à AC e, usando sen 30°, finalmente encontrou 7 m para a medida BE.

Na correção da questão nº 4, os alunos encontravam para as medidas dos lados do triângulo, valores com diferença máxima de 2 mm. Reforçamos, mais uma vez, que essa diferença estava de acordo com o padrão aceitável para a medição com a régua. De maneira similar, ocorreram pequenas variações no cálculo das razões. Explicamos que, nesse caso, também houve influência das aproximações.

Para a questão nº 5 não houve observações significativas. E para a correção da questão nº 6, optamos por resolvê-la em conjunto com os alunos. Nesse momento, verifiquei que embora tivéssemos resolvido na aula anterior a questão do veleiro - similar a essa - metade da turma demonstrava dúvida. Com todos dedicando muita atenção e transcrevendo o desenvolvimento das questões, terminamos a aula.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Decorridos os 10 minutos concedidos para a resolução da questão, caminhei entre as mesas e constatei que aproximadamente 80% da turma não havia escrito nada na folha de exercícios. Nesse momento o professor Anderson e eu começamos a auxiliar os alunos na resolução da questão nº 1. Essa aula ajudou a reforçar minha constatação inicial da total dependência dos alunos na realização das tarefas. A cada aluno que eu auxiliava, percebia que, para muitas das dúvidas, eles mesmos sabiam as respostas. Em outras ocasiões, havia simplesmente o desinteresse de raciocinar. Por exemplo: ao tentar descobrir qual era a razão trigonométrica correta para o problema, o aluno simplesmente perguntava aleatoriamente sobre uma razão qualquer até conseguir a resposta correta. Nos cálculos, se comportavam do mesmo modo.

Ao término da correção das questões nº 1, nº 2 e nº 3, em que era necessário utilizar tangente, seno e cosseno, nesta ordem, verificamos que os alunos, em sua maioria, alcançavam a razão correta. Contudo, não conseguiam efetuar os cálculos referentes à proporção formada e por isso desistiam. Interrompemos a correção e, no quadro, escrevemos dois exemplos: uma proporção simples, contendo três algarismos e uma incógnita; e um sistema simples de duas equações. Para a primeira situação, cinco alunos, no máximo, manifestaram saber solucionar e, para o caso do sistema, nenhum.

Decidimos revisar o conceito das proporções para a turma. Após explicarmos, propomos uma série de exercícios e pedimos à turma que participasse das soluções. Após cada exercício resolvido, percebia que um número maior de alunos assimilava o desenvolvimento. Antes de retomar as correções, reservamos cerca de 10 minutos para enfatizar a todos a necessidade de estudar em casa, principalmente os conceitos que se constituem como pré-requisitos para resolver questões de assuntos atuais. Salientamos, também, que a nossa função – minha e do professor Anderson - era ajudar a sanar essas dúvidas e o quanto tínhamos satisfação em fazê-lo. Enquanto falávamos, toda a turma ouvia silenciosamente.

As diferenças apresentadas nos valores das questões nº 4 e nº 5, além da explicação para esse fato, ocorreram de maneira similar às turmas da E. M. Roberto Burle Marx. Na correção da questão nº 6, notei que muitos alunos concordavam no uso da tangente como razão correta, porém, a maioria da turma não entendeu as passagens da resolução. Terminamos a aula pedindo aos alunos que revisassem todo o material para a avaliação, que ocorreria na próxima aula.

3.2.5. Aula 5: Avaliação

Esta aula consistiu da aplicação de uma prova escrita discursiva que teve o propósito de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos após as quatro aulas anteriores. Para a realização da prova foi permitido, somente, o uso de lápis, borracha, régua e calculadora. A seguir, a tabela com a temática e as habilidades relacionadas para a solução de cada questão.

Tabela 6

Questão	Temática	Habilidade relacionada
1	Medição e identificação dos lados de um triângulo retângulo; Cálculo aproximado das razões trigonométricas de 55°	Medição e uso correto dos elementos do triângulo retângulo no cálculo das razões trigonométricas
2	Pergunta discursiva	Analisar a imprecisão no uso de razões trigonométricas aproximadas com uma casa decimal
3 (a)	Calcular a altura de um avião em relação ao solo	Esboço da situação-problema
3 (b)	Calcular a altura de um avião em relação ao solo	Uso da razão correta: seno
4	Calcular a altura do Cristo Redentor	Uso da razão correta: tangente
5	Tabela dos arcos notáveis	Completar a tabela com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°
6	Calcular o ângulo de inclinação de uma escada apoiada em um muro	Uso da razão correta: seno Consulta à tabela dos arcos notáveis
7	Calcular a distância entre um navio e um submarino	Uso da razão correta: cosseno
8	Calcular a altura de um farol após certo deslocamento de um veleiro	Uso da razão correta: tangente Solucionar sistemas de 2 equações e 2 variáveis

3.2.5.1. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Ao entrarem na sala de aula, os alunos arrumaram rapidamente suas mesas para a realização da avaliação. Apenas nove alunos (somando-se as duas turmas) não dispunham da calculadora, que foram imediatamente fornecidas pelos professores. Dez minutos após a entrada, deu-se início à prova, que transcorreu sem nenhum problema.

Com o intuito de não influenciar nos resultados finais da experiência, acordamos que não auxiliaríamos os alunos com dúvidas. Frisamos, também, a importância de que não deixassem questões sem resposta, ou seja, mesmo não tendo certeza quanto ao que estava sendo feito, que explicassem, em cálculos, o tipo de raciocínio empregado.

Decorrida menos de uma hora de prova, grande parte da turma havia terminado. Chamou-me muito a atenção que aproximadamente um terço desses alunos, ao terminar a prova, retiravam de sua mochilas livros de literatura para ler enquanto aguardavam que toque do sinal anunciasse o fim da aula.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Chegamos à sala com antecedência para arrumarmos e separarmos as mesas. Após se sentarem, contabilizei o maior número de presentes desde a primeira aula: 34 alunos. Desse total, dois não participaram da avaliação, pois estavam chegando à turma pela primeira vez, por motivo de transferência de escola.

Foi necessário trocar alguns alunos de lugar e pedir para que colocassem as mochilas em outro local, de modo que permanecesse sobre a mesa somente o material necessário para a prova. Após fornecermos 28 calculadoras e 13 réguas, demos início à prova.

Alguns alunos reclamavam, antecipadamente e em tom baixo, da prova conter quatro páginas. Sentados ao longo da sala, um grupo de cinco alunos aparentava se recusar a fazer a prova, uns de braços cruzados e outros com a cabeça apoiada na parede. Dirigi-me até N., reprovada no ano anterior, e expus que, se ela não se interessasse pelos estudos e realizasse as atividades em sala com seriedade, terminaria o ano com uma nova reprovação. Surpreendeu-me quando ela me respondeu que não se importaria.

Na primeira mesa de uma das fileiras, chamou-me a atenção a aluna A., com sua insistência em tentar solucionar a questão nº 3. Como não podia ajudá-la, apenas sugeri que tentasse resolver as demais e depois, com mais calma, retornasse à tal questão. Ao recolher sua avaliação, observei que A., além das questões 1 e 2, havia completado somente a tabela da questão 5.

Restando poucos minutos para encerrar a prova, a maioria da turma ainda tentava resolvê-la e, ao passar por cada mesa para grampear as folhas, verifiquei boas resoluções e muitas questões em branco. Ao questioná-los o motivo, já com as avaliações em minhas mãos, ouvi da maioria que o tempo de realização era curto.

Durante o intervalo do turno, as alunas V. e L. me procuraram para conferir as respostas das questões. Enquanto uma relatava ter errado apenas uma questão, a outra afirmava ter dúvida somente na última. Ao questioná-las sobre o que haviam achado da avaliação, ambas disseram estar coerente com o que aprenderem em sala em sala de aula.

3.3. Análise do Resultado da Avaliação

A correção das provas e a análise dos resultados foram efetuadas em conjunto pelos professores Michel e Anderson. Na E. M. Roberto Burle Marx, a soma das duas turmas totalizou 60 provas. Já na E. M. Camilo Castelo Branco, foram descartadas as avaliações de sete alunos que faltaram a duas ou mais aulas da experiência, portanto, reuniu-se 25 provas.

A seguir, é apresentada a análise detalhada de cada questão:

a. Questão 1 (a,b,c)

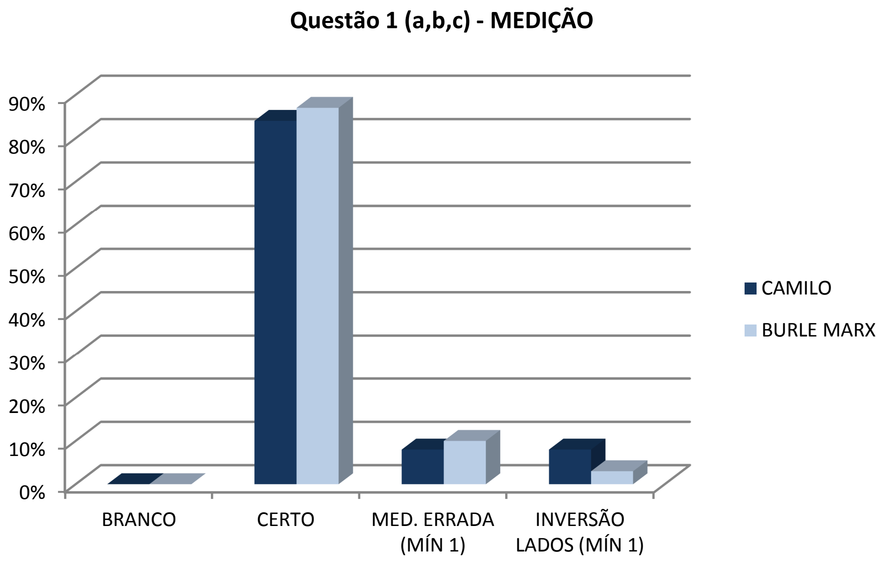


Figura 14

Essa questão foi resolvida por todos os alunos, sem exceção. Além disso, houve um alto índice de acertos. Os erros, em ambas as escolas, foram consequentes da aferição errada de pelo menos uma medida ou da inversão dos lados no triângulo. Nenhum aluno errou completamente a questão. Concluímos, portanto, que se obteve a compreensão para a correta identificação dos elementos do triângulo retângulo.

b. Questão 1 (d,e,f)

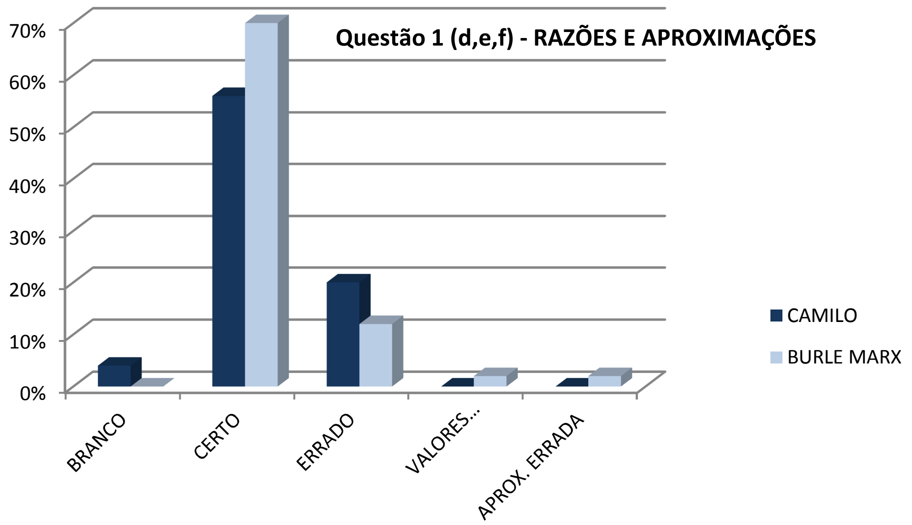


Figura 15

Observamos uma pequena diferença entre as duas escolas ao comparar o número de acertos dos alunos na segunda parte da questão nº 1. Com baixo índice de questões em branco, os alunos da E. M. Camilo Castelo Branco tiveram 20% de erros respectivos à inversão dos lados nas razões trigonométricas e às aproximações das casas decimais. Nessa última, os alunos aproximaram o resultado para três casas – de acordo com o que foi transmitido nas aulas práticas –, não observando que o enunciado solicitava apenas duas.

b. Questão 2

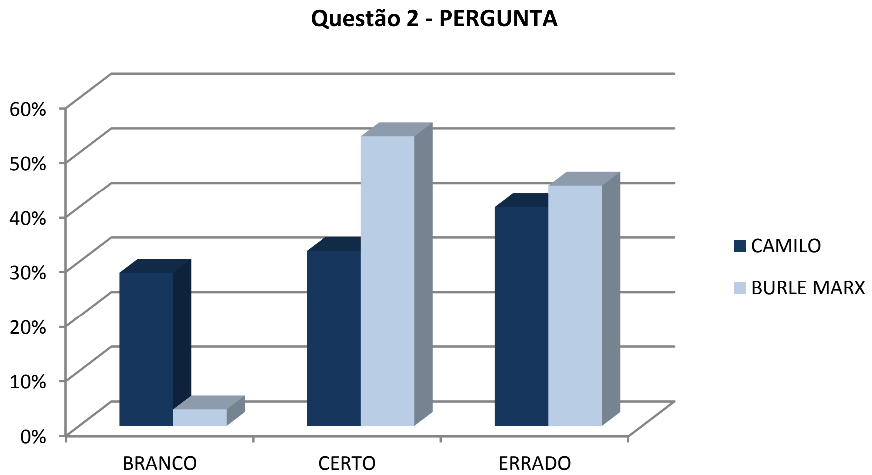


Figura 16

Na E. M. Camilo Castelo Branco, observamos que pouco mais de um quarto dos alunos não respondeu à questão. Daqueles que a fizeram, em ambas as escolas, os principais erros resultaram da incorreta interpretação da pergunta.

A seguir, a resposta do aluno M., da E. M. Camilo Castelo Branco, na qual explica o método de aproximação das casas decimais.

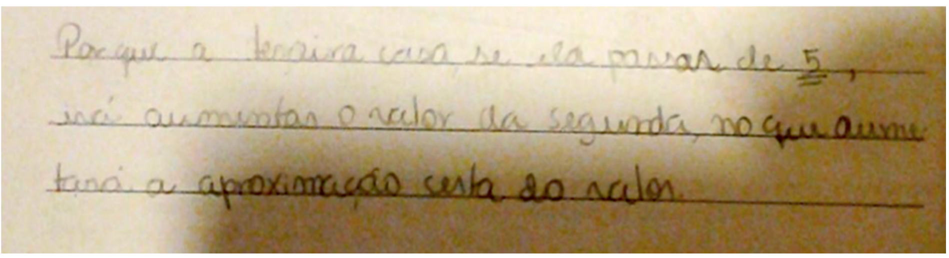


Figura 17

Além da situação descrita, houve casos como o do aluno N., da mesma escola, que sequer soube expressar-se com palavras, conforme a seguir.

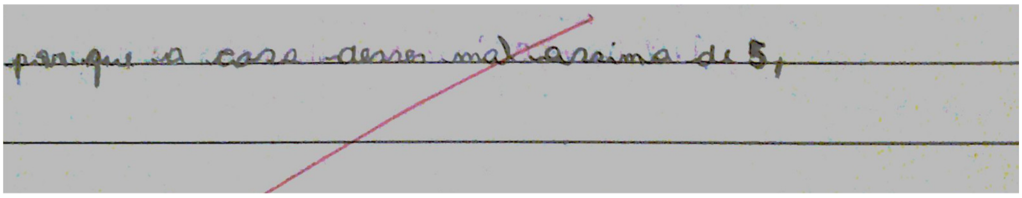


Figura 18

As respostas corretas nas duas escolas foram similares à apresentada pela aluna S., da E. M. Roberto Burle Marx, conforme Figura 19, a seguir.

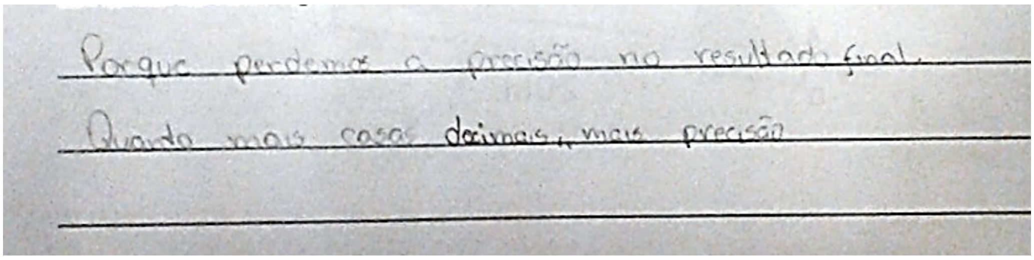


Figura 19

c. Questão 3 (item a)

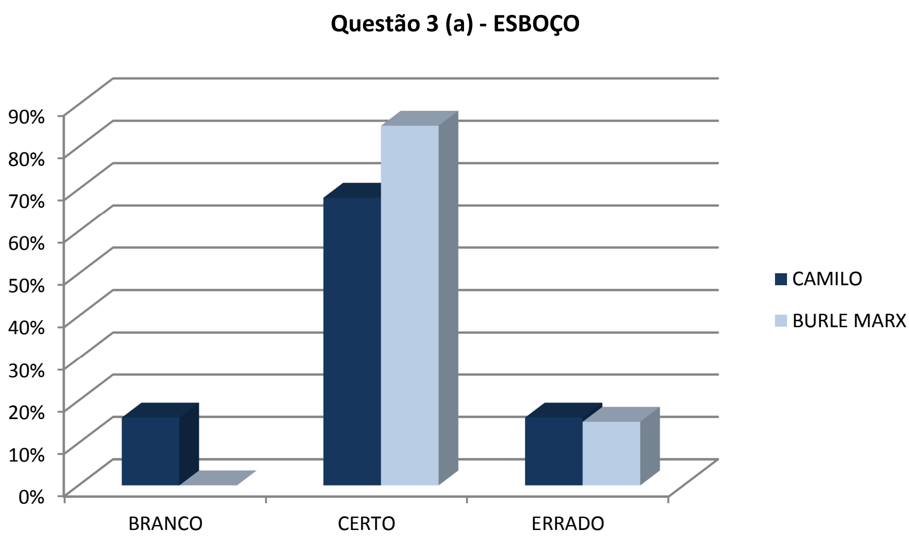


Figura 20

Esta questão apresentou alto índice de acertos em ambas as escolas. O esboço feito pelo aluno J., da E. M. Camilo Castelo Branco, conforme figura a seguir, é um exemplo que representa esta maioria. Nele, observamos a construção correta da situação-problema assim como o posicionamento das informações e elementos do triângulo.

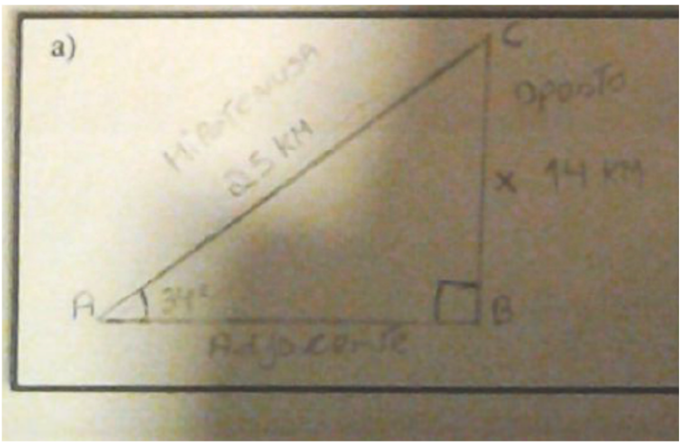


Figura 21

d. Questão 3 (item b)

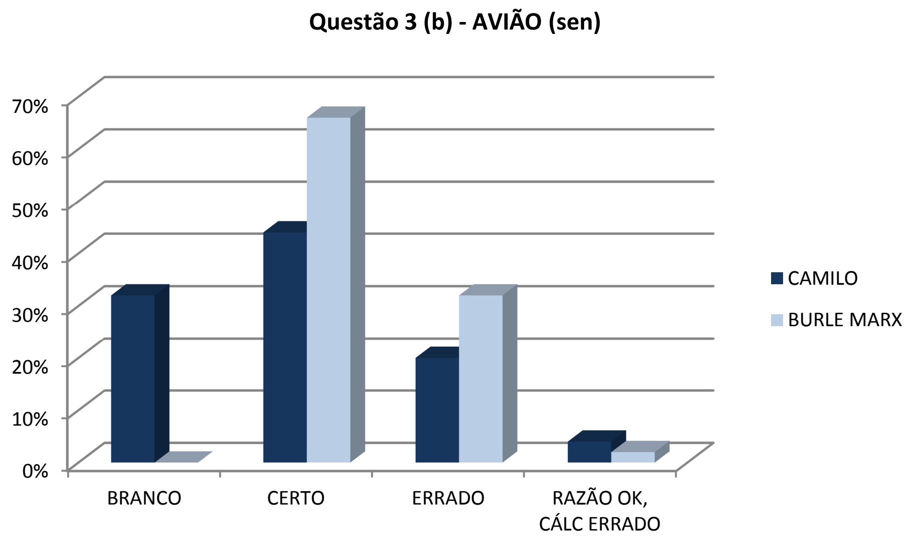


Figura 22

Enquanto um terço dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco deixou a questão em branco, todos da E. M. Roberto Burle Marx a resolveram. De todos os que fizeram, menos de 5% errou o cálculo do desenvolvimento da razão seno. Os erros se referem, principalmente, ao uso da razão incorreta.

A seguir, a elaboração da questão da aluna A. da E. M. Roberto Burle Marx, que resolveu o item b de maneira correta, a partir do equívoco em seu esboço no item a.

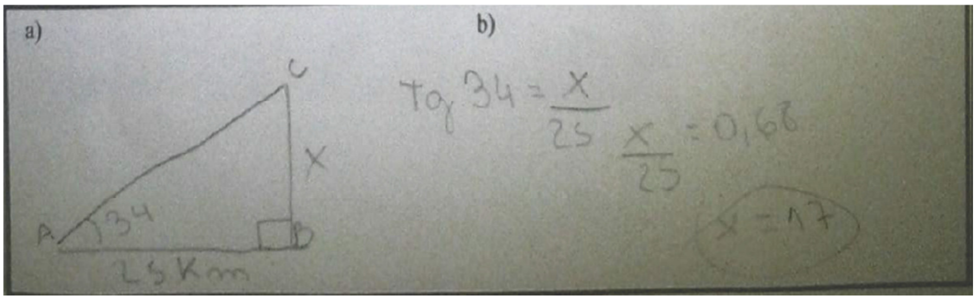


Figura 23

e. Questão 4

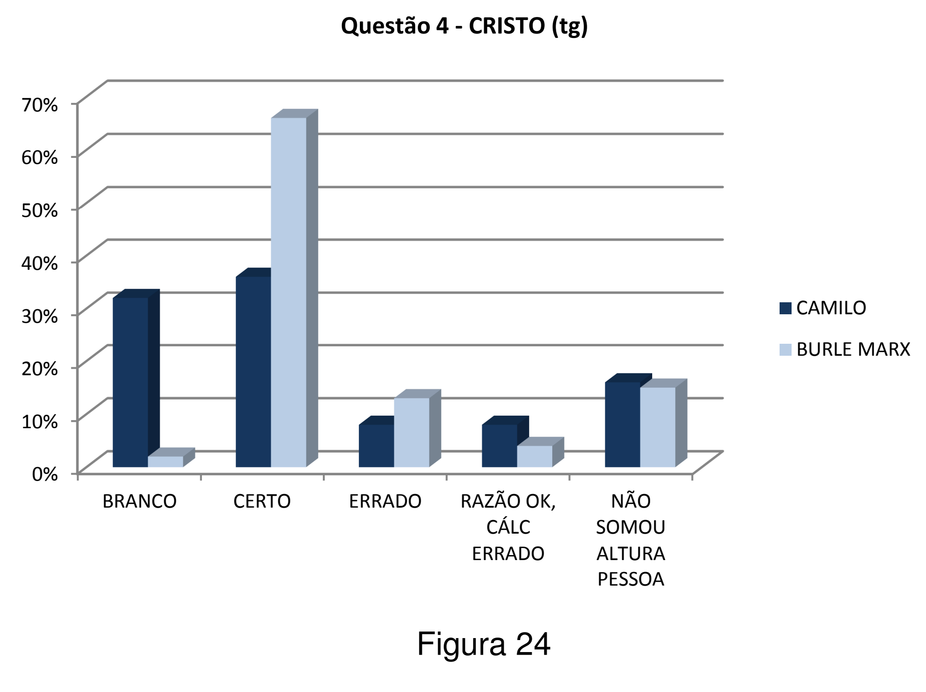


Figura 24

Destacamos que apenas 15% dos alunos da E. M. Roberto Burle Marx errou a questão, deixando partes em branco ou usando a razão indevida. Na E. M. Camilo Castelo Branco, aproximadamente um terço, não respondeu.

Percebemos que alguns alunos, em ambas as escolas, não percebem a incoerência do resultado calculado, uma vez que os valores encontrados para a altura do Cristo Redentor variavam entre 0,09m e 3.621,80m. Na E. M. Camilo Castelo Branco, dois alunos usaram a régua para medir a figura impressa no papel. E, analisando de maneira global, aproximadamente 23% daqueles que conseguiram calcular a medida do segmento CB, desconsiderou a altura do homem.

A seguir, o desenvolvimento correto apresentado pelo aluno G., da E. M. Camilo Castelo Branco.

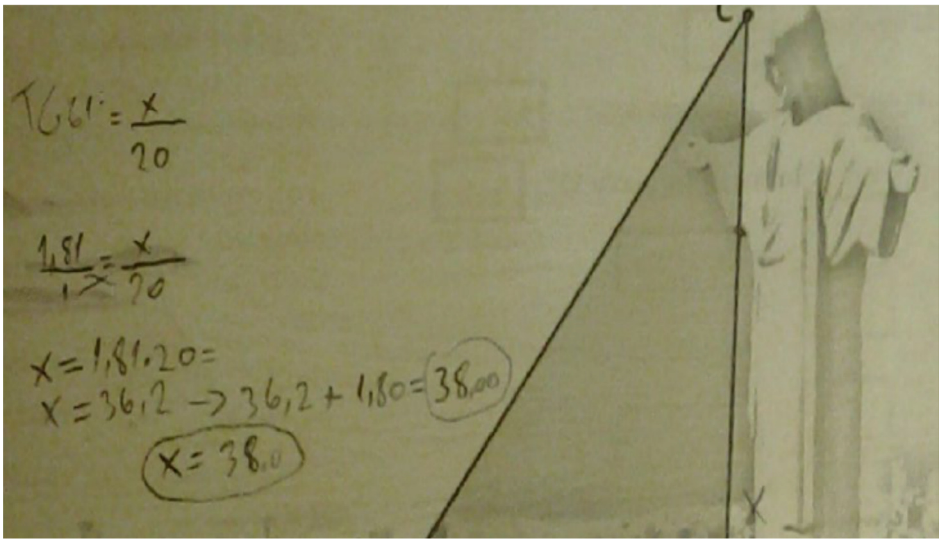


Figura 25

f. Questão 5

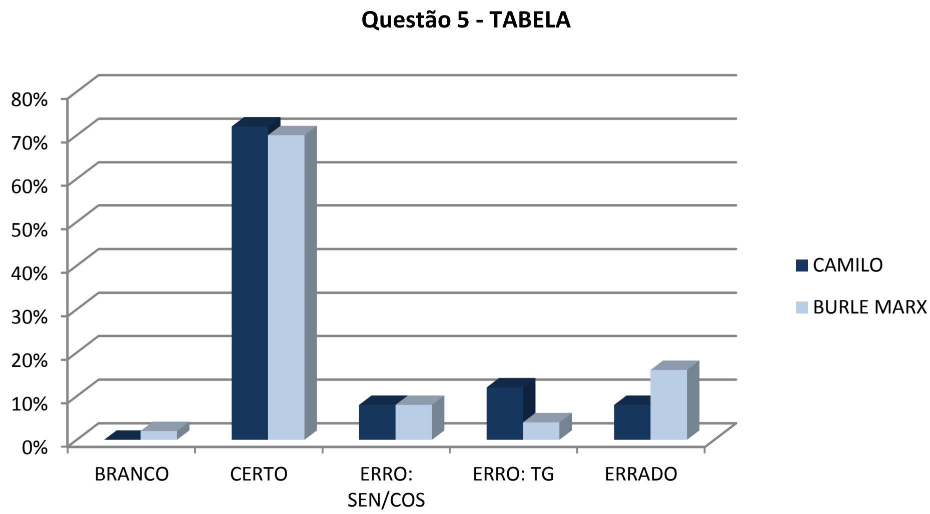


Figura 26

Essa questão chamou nossa atenção pelo maior índice de acertos da E. M. Camilo Castelo Branco e por nenhum aluno ter deixado a tabela incompleta. Apenas 8% errou somente a parte dos senos e cossenos, enquanto 12% errou somente a parte das tangentes. Cabe ressaltar que essa questão era de memorização, que não requeria conhecimentos prévios de fundamentos básicos para efetuar qualquer tipo de cálculo.

g. Questão 6

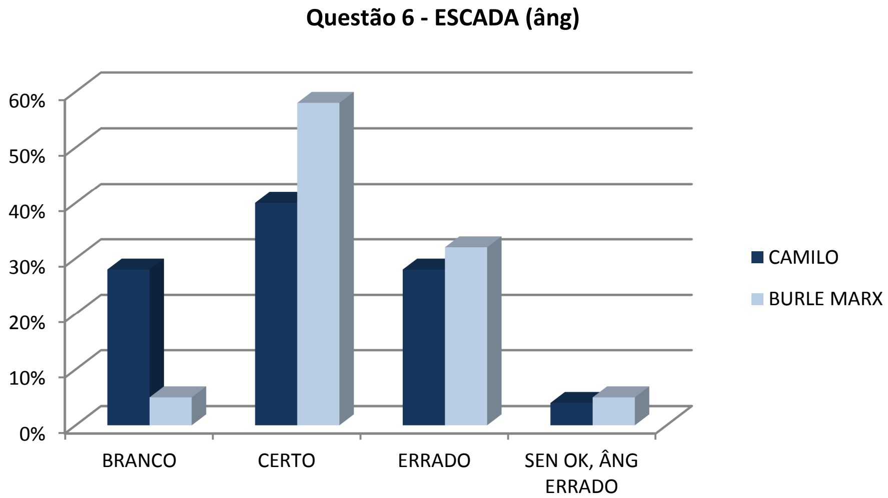


Figura 27

Consideramos satisfatório o índice de aproveitamento desta questão por se tratar de um item que exigia do aluno identificar corretamente os elementos no triângulo retângulo, constatar que, para o ângulo pedido, a razão utilizada seria o seno e saber a tabela dos arcos notáveis.

Dos alunos que alcançaram o valor correto para o seno do ângulo, apenas 4% da E. M. Camilo Castelo Branco e 5 % da E. M. Roberto Burle Marx não concluíram a associação com o ângulo de 30°.

Na E. M. Camilo Castelo Branco, observamos alguns alunos que, apesar de aplicarem os conceitos trigonométricos corretos, erraram em etapas referentes aos cálculos, como a solução da proporção e até mesmo meras simplificações. Em contrapartida, no desenvolvimento confuso e rasurado do aluno F., ilustrado na figura a seguir, podemos verificar a correta compreensão e conclusão da questão.

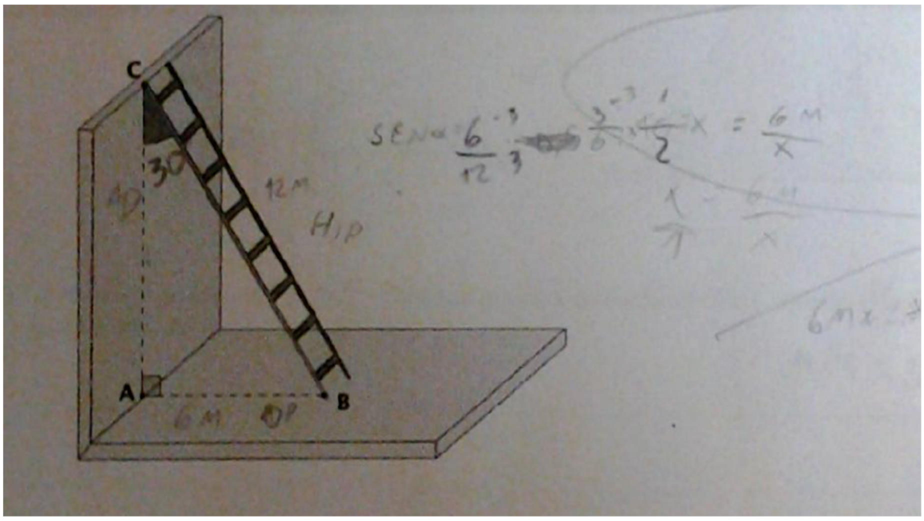


Figura 28

A seguir, a clareza da resposta da aluna J., da E. M. Roberto Burle Marx.

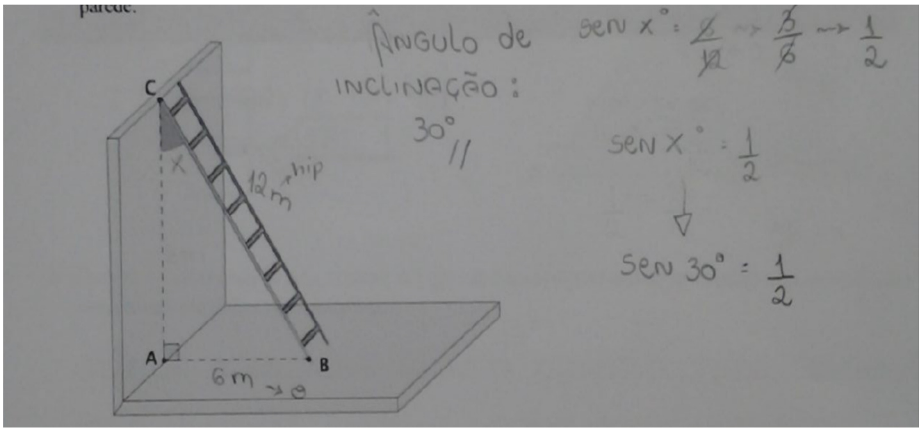


Figura 29

h. Questão 7

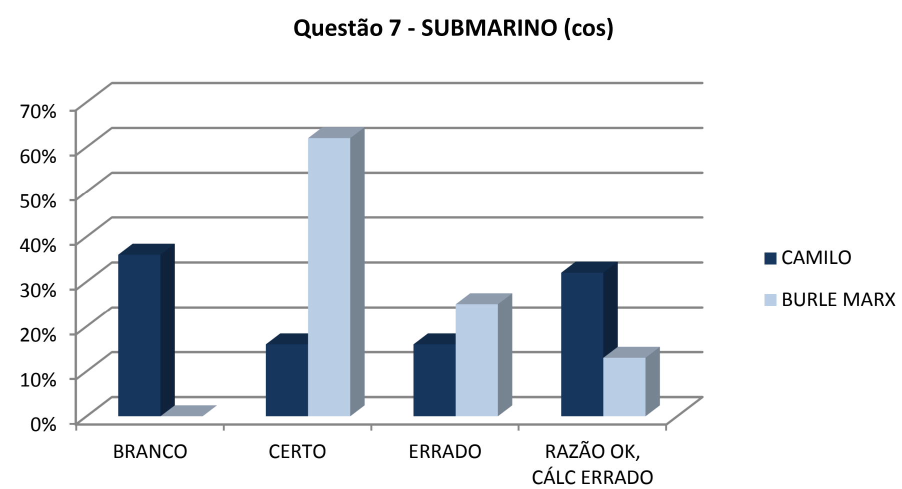


Figura 30

Entre todas as questões da avaliação, essa foi a que apresentou a maior diferença no índice de acertos entre as escolas. Enquanto 36% dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco deixou em branco, todos os alunos da E. M. Roberto Burle Marx tentaram resolvê-la.

Observamos que, dos alunos que concluíram que a razão cosseno era a correta, apenas um terço alcançou o resultado final. Os demais erraram praticamente da mesma maneira. A incógnita a ser descoberta era a hipotenusa do triângulo apresentado e localizava-se no denominador de um dos lados da proporção. Logo, quando não erravam no desenvolvimento do cálculo da proporção, simplesmente multiplicavam o valor da medida do cateto adjacente pelo valor do cosseno de 70°. Nesse caso, o correto seria dividir o primeiro pelo segundo.

A seguir, o erro do aluno G. e a incoerência do resultado encontrado.

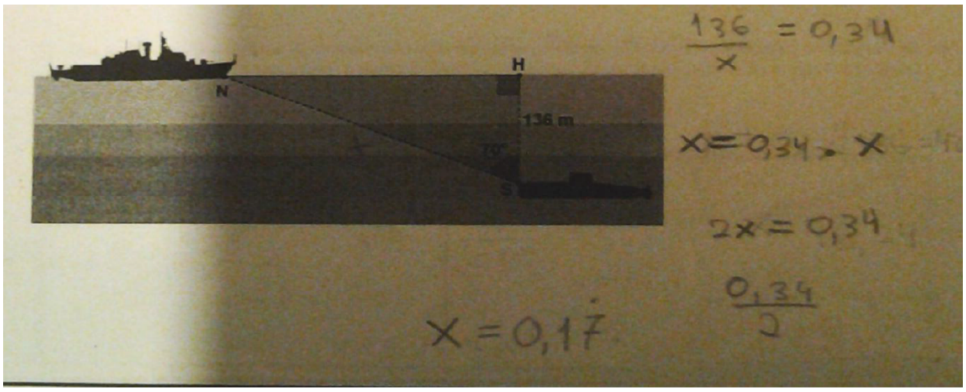


Figura 31

i. Questão 8

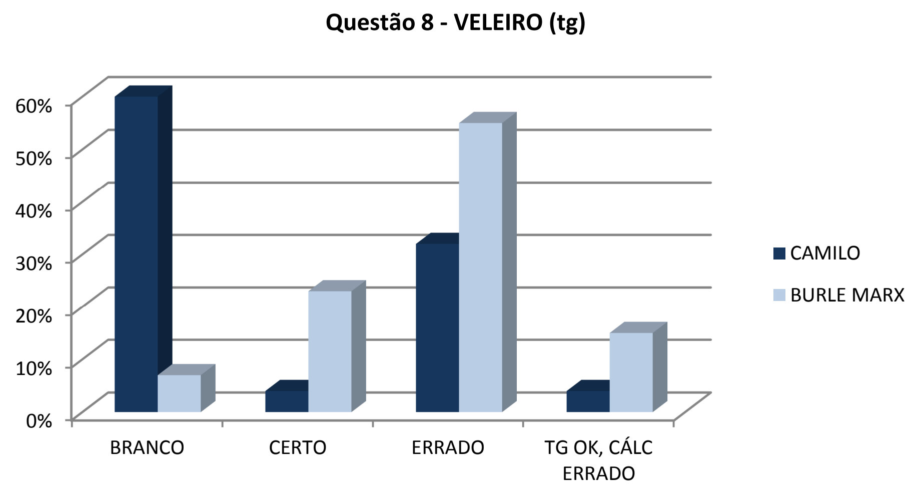


Figura 32

Essa questão, considerada a mais difícil da avaliação, agregava uma série de raciocínios e cálculos até a obtenção do resultado final. Mesmo assim, surpreendeu-nos que 93% dos alunos da E. M. Roberto Burle Marx tentou resolvê-la.

As opiniões de alguns alunos da E. M. Camilo Castelo Branco, ao fim da prova, contribuem para entender a razão de 60% não ter sequer tentado fazer a questão. Uns diziam que o tempo de prova não era suficiente e outros optaram por não resolvê-la somente por se tratar da questão mais difícil.

O erro mais comum ocorreu na análise do triângulo ACD, pois os alunos se esqueceram de somar o segmento BC (representado por uma variável) ao segmento AC (= 300m) para compor o cateto adjacente ao ângulo de 14°. Erros no trabalho com as duas variáveis também foram frequentes.

A escolha do ângulo de 45° no triângulo BCD teve a finalidade de analisar se algum aluno, percebendo ser um triângulo isósceles, usaria em seus cálculos BC=CD. Assim, o problema se reduziria a somente uma variável. Somente a aluna V., da E. M. Roberto Burle Marx teve tal percepção.

A seguir, a solução do aluno J., da E. M. Roberto Burle Marx, representando o erro mais corriqueiro.

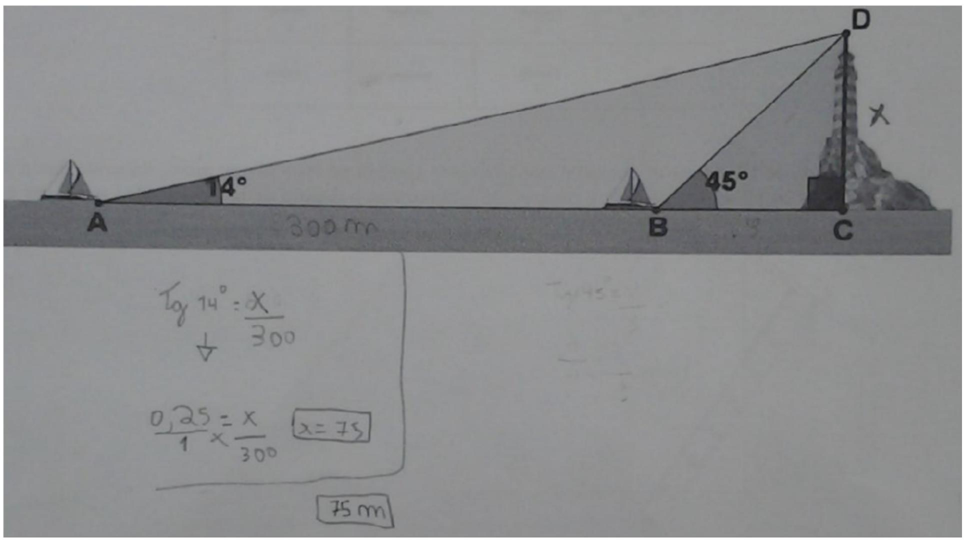


Figura 33

Na E. M. Camilo Castelo Branco, destacamos a solução correta da aluna L., conforme figura a seguir.

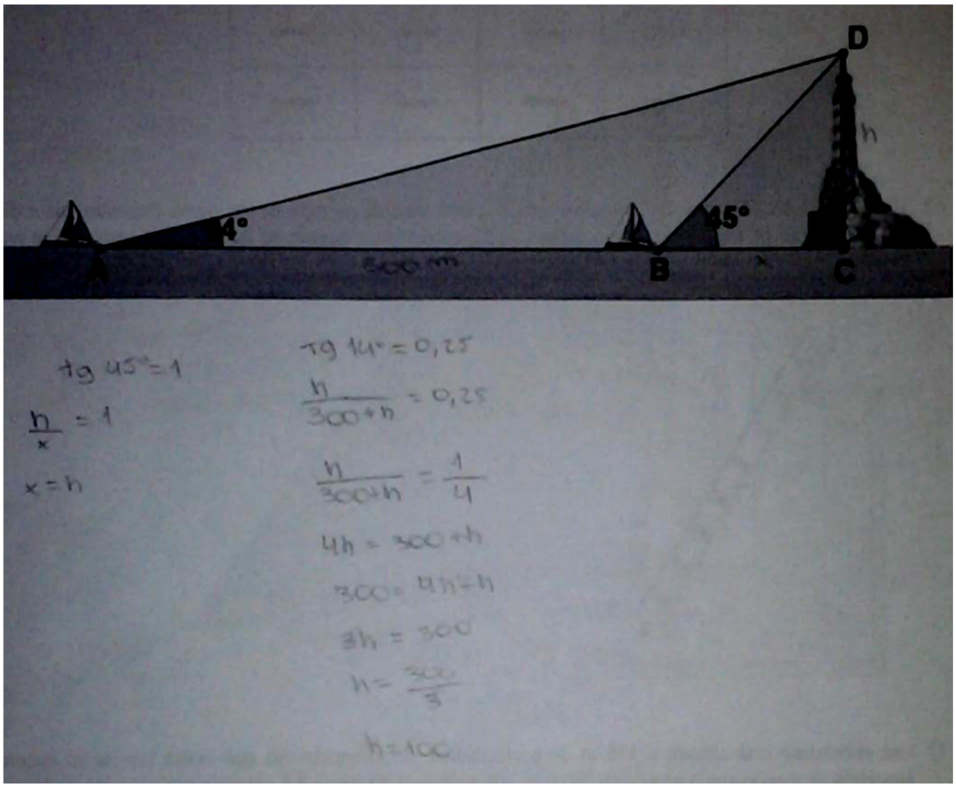


Figura 34

4. Conclusão

Com o presente trabalho propôs-se uma nova forma de ensinar matemática, mais especificamente as razões trigonométricas. O software utilizado na experiência, o Geogebra, foi evidentemente um facilitador do processo de aprendizagem dos alunos. Além de ser uma ferramenta excelente para a construção de figuras geométricas para utilização em materiais impressos e imagens fixas, sua principal aplicação é o desenvolvimento de exposições dinâmicas de conteúdos da Geometria. E, por esse motivo, serviu como base para construção do método proposto no presente trabalho.

Essa estratégia, desenvolvida com o propósito de melhorar o entendimento do aluno do ensino fundamental de conceitos abstratos mais complexos como a trigonometria, carrega consigo a necessidade da utilização de outros recursos para seu máximo aproveitamento, como um projetor de imagem e computador. Aliando essas ferramentas à metodologia previamente elaborada, foi possível aplicar a experiência que comprovaria a eficácia da proposta.

O público-alvo da experiência foi selecionado de acordo com o conceito abordado, pois as razões trigonométricas são sempre exploradas no 9º ano do ensino fundamental. Concluiu-se, portanto, que os autores desse trabalho dispunham do cenário ideal, já que lecionam para essa série.

Com a aplicação da experiência, buscava-se, além de uma nova forma, mais dinâmica, de ensinar matemática, um encurtamento das distâncias entre duas realidades escolares distintas, por meio de resultados o mais próximos quanto possível. Não se pode afirmar que o objetivo não foi alcançado, porém, o resultado certamente foi prejudicado por alguns fatores que não podem ser ignorados.

Conforme demonstrado nos gráficos e análise dos resultados das avaliações, ficou clara a diferença entre as duas escolas. Isso se deve à base de qualidade e homogeneidade das turmas da E. M. Roberto Burle Marx – e também às aulas de reforço de matemática ministradas no contra turno -, em contraste com a dissonância de noções preliminares dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco. Enquanto o aproveitamento das turmas da primeira escola superou o esperado, o da turma da segunda escola foi satisfatório somente para um determinado número de alunos, isto é, para aqueles cujo alicerce foi adequadamente construído nas séries anteriores.

O próprio interesse dos alunos pelas aulas expositivas colocou-se como parâmetro de avaliação, pois ficou evidente que aqueles que possuíam um conhecimento razoável de conceitos preliminares, ficavam muito mais atentos à aula, pois, mesmo com alguma dificuldade, compreendiam o que estava sendo apresentado e formulavam perguntas coerentes. Os mais dispersivos e desinteressados, indiscutivelmente eram os que não dispunham de preparo para absorver o novo conhecimento, pois lhes faltavam condições para compreensão. Isso foi diretamente refletido nas provas escritas, com muitas questões em branco ou soluções equivocadas. Para esses alunos, somente as aulas dinâmicas e expositivas não seriam suficientes.

Portanto, o que se pode concluir a partir da elaboração e aplicação da experiência proposta no presente trabalho é que as aulas expositivas com auxílio do *software* Geogebra, utilizando-se problemas contextualizados e situações reais, auxiliam a compreensão pelos alunos dos conceitos mais abstratos das razões trigonométricas, em comparação aos métodos mais tradicionais e mecanizados de ensino desse conteúdo. Como é possível aplicar essa metodologia em qualquer tipo de instituição escolar, o que fará a diferença é o histórico do aproveitamento do aluno nas séries anteriores do ensino fundamental.

5. Referências Bibliográficas

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARMO, Manfredo Perdigão do.; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonometria / Números Complexos. – 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: Lamgraf Artesanato Gráfico Ltda., 1991.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. (Traduzido e adaptado por Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

FREE SOFTWARE GEOGEBRA: GEOGEBRA, 2013. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/en/>. Acesso em: 01 abril 2013.

IDEB – Resultados e Metas: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA, 2013. Disponível em: <http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultado.seam?cid=40662>. Acesso em: 01 abril 2013.

HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, 2013. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/cont_historia.htm>. Acesso em: 01 abril 2013.

UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: E-CÁLCULO IME-USP-SP, 2013. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm>. Acesso em: 01 abril 2013.

6. Anexos

ANEXO 1 – Folha de atividades - aula 1 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ______________________

Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Alunos:____ e ______________________________________

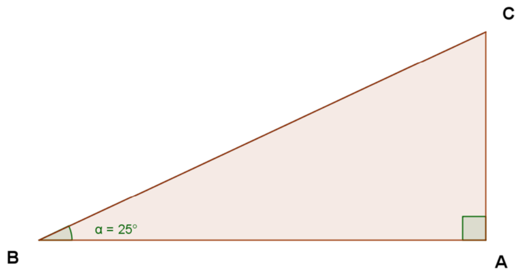
O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 1**

Atividade:

1) Com o auxílio de uma régua, meça os lados de cada triângulo abaixo completando seus valores nas respectivas tabelas com apenas uma casa decimal.

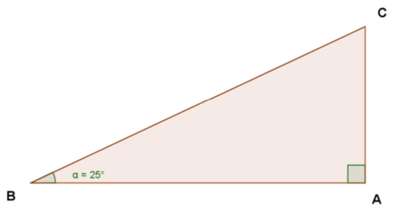
2) Para o cálculo das razões, utilize uma calculadora, considerando resultados com três casas decimais.

3) Complete a tabela com os valores das médias calculadas pela turma.



LADOS	RAZÕES	MÉDIA TURMA	SIMBOLOGIA
AC =	$\frac{AC}{BC} =$		SEN 25° =
AB =	$\frac{AB}{BC} =$		COS 25° =
BC =	$\frac{AC}{AB} =$		TG 25° =

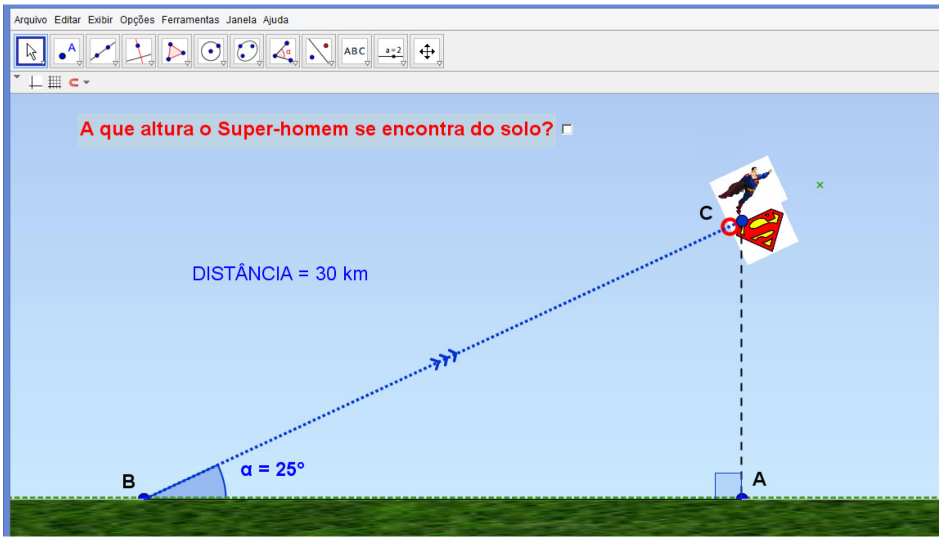
MÉDIA DAS RAZÕES DOS TRIÂNGULOS		
$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{AB} =$



LADOS	RAZÕES	MÉDIA TURMA	SIMBOLOGIA
AC =	$\frac{AC}{BC} =$		SEN 25° =
AB =	$\frac{AB}{BC} =$		COS 25° =
BC =	$\frac{AC}{AB} =$		TG 25° =

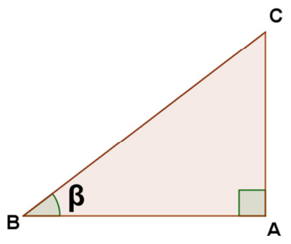
ANEXO 2 – Folha de atividades - aula 1 (2ª parte)

Atividade: Com relação à atividade anterior, utilize a simbologia correta e calcule a que altura o Super-homem se encontra do solo.



Cálculos

FORMALIZANDO O APRENDIZADO:



Seno de β = $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AC}{BC}$

Cosseno de β = $\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}$

Tangente de β = $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{AC}{AB}$

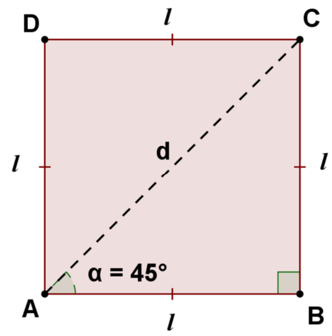
ANEXO 3 – Demonstração das razões dos arcos notáveis – aula 2 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ___________________________
Professores: Anderson Melo e Michel Martins
Alunos:_______________________________________ e _____________________________________

O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 2**

Demonstração das Razões Trigonométricas dos Arcos Notáveis

I) Quadrado e o ângulo de 45°



1) Seja o quadrado ABCD cujos lados medem *l*. Ao traçarmos a diagonal AC = d, obtemos o triângulo retângulo ABC.

2) Então:
CÂB = _____ AB̂C= _____ BĈA = _____

3) No △ABC, com relação ao ângulo α = 45°, temos:
Cateto oposto a α: BC = _____

Cateto adjacente a α: AB = _____

Hipotenusa: AC = _____

4) Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

$$\boxed{\_\_\_^2 = \_\_\_^2 + \_\_\_^2}$$

$$\boxed{\_\_\_^2 = 2 \cdot \_\_\_^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \_\_\_\sqrt{2}}$$

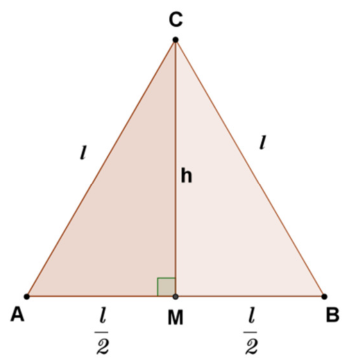
5) Portanto, as razões trigonométricas são:

Sen 45° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AC} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \_\_\_\_\_$

Cos 45° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{AC} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \_\_\_\_\_$

Tg 45° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{BC}{AB} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

II) Triângulo equilátero e os ângulos de 30° e 60°



1) Seja o triângulo equilátero ABC cujos lados medem *l*. Ao traçarmos a altura CM = h, obtemos o triângulo retângulo AMC.

2) Então:
MÂC = _____ AM̂C= _____ AĈM = _____

3) No △AMC, com relação ao ângulo de 60°, temos:
Cateto oposto a 60°: CM = _____

Cateto adjacente a 60°: AM = _____

Hipotenusa: AC = _____4) Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

ANEXO 4 – Demonstração das razões dos arcos notáveis – aula 2 (2ª parte)

$$\boxed{AC^2 = AM^2 + CM^2}$$

$$\boxed{\underline{\quad\;}^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \underline{\quad\;}^2} \Rightarrow h^2 = \underline{\quad\;}^2 - \underline{\quad\;}^2 \Rightarrow h^2 = \underline{\quad\;}^2 \Rightarrow h = \underline{\quad\;}\sqrt{3}$$

5) Portanto, as razões trigonométricas são:

Sen 60° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{CM}{AC}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

Cos 60° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AM}{AC}$ = ______ = ______ · ______ = ________

Tg 60° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{CM}{AM}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

Sen 30° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AM}{AC}$ = ______ = ______ · ______= ______

Cos 30° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{CM}{AC}$ = ______ = ______ = ______ · ______ = ______

Tg 30° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AM}{CM}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

<u>Tabela dos arcos notáveis:</u>

	30°	**45°**	**60°**
Sen	____	____	____
Cos	____	____	____
Tg	____	____	____

ANEXO 5 – Construção da tábua (Ex.: cosseno) – aula 2 (3ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ROBERTO BURLE MARX

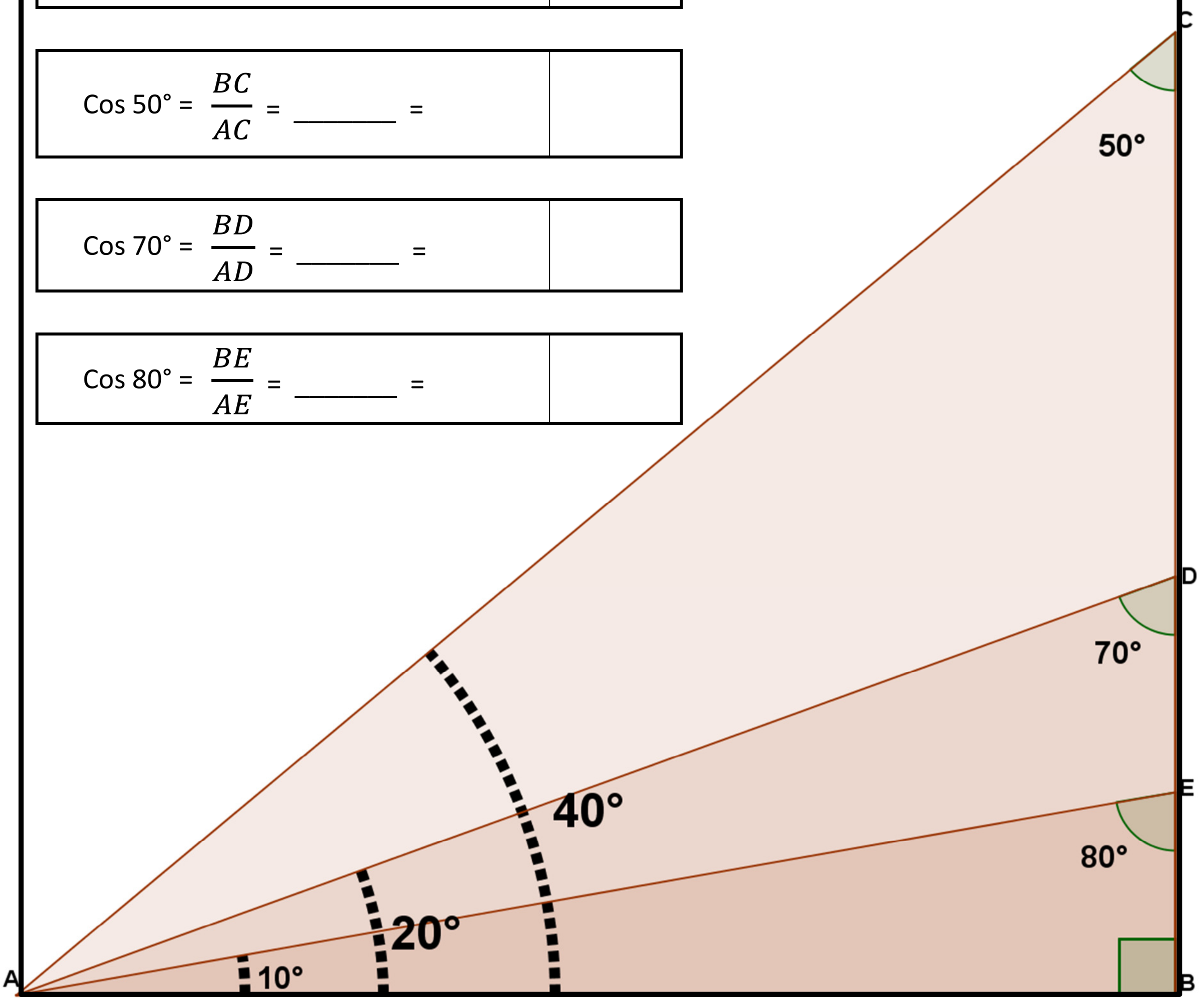
Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Alunos:____ e____ _______________________________________

O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 2**

Atividade: Com o auxílio de uma régua, meça os lados dos triângulos abaixo e complete a tabela referente à razão Trigonométrica indicada. Em seguida, anote a média dos valores calculados pelo grupo.

	Média grupo
Cos 10° = $\frac{AB}{AE}$ = ________ =	
Cos 20° = $\frac{AB}{AD}$ = ________ =	
Cos 40° = $\frac{AB}{AC}$ = ________ =	
Cos 50° = $\frac{BC}{AC}$ = ________ =	
Cos 70° = $\frac{BD}{AD}$ = ________ =	
Cos 80° = $\frac{BE}{AE}$ = ________ =	



ANEXO 6 – Construção da tábua – aula 2 (4ª parte)

Atividade: Compare os valores das médias calculadas pela turma com a tabela abaixo, gerada a partir da variação dos ângulos no Geogebra.

ÂNGULOS	**10°**	**20°**	**30°**	**40°**	**45°**	**50°**	**60°**	**70°**	**80°**
SENO	**0,174**	**0,342**	$\frac{1}{2}$ **= 0,500**	**0,643**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **= 0,707**	**0,766**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **= 0,866**	**0,940**	**0,985**
COSSENO	**0,985**	**0,940**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **= 0,866**	**0,766**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **= 0,707**	**0,643**	$\frac{1}{2}$ **= 0,500**	**0,342**	**0,174**
TANGENTE	**0,176**	**0,364**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **= 0,577**	**0,839**	**1**	**1,192**	$\sqrt{3}$ **= 1,732**	**2,747**	**5,671**

ANEXO 7 – Folha de atividades – aula 3 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ______________________

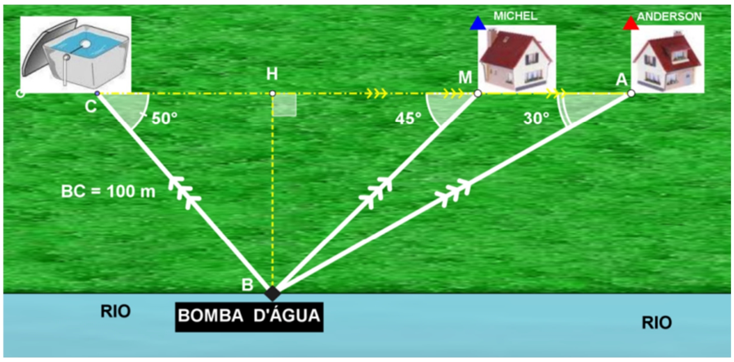
Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Aluno:____

O Ensino das Razões Trigonométricas – Aula 3

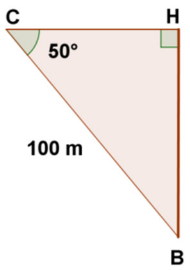
Para os cálculos utilize a tabela da Aula 2 e uma calculadora

Atividade 1: O Problema da Caixa d'água



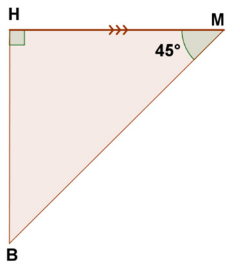
A água utilizada nas casas de Michel e Anderson é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 100 m de distância. Para a água chegar até a casa de Anderson, deve passar primeiro pela casa de Michel. Descontente com este fato, Anderson deseja fazer um encanamento (**AB**) que leve água diretamente para sua casa. De acordo com os ângulos indicados na figura, calcule: a) a distância da casa de Michel à caixa d'água (**CM**); b) a distância da casa de Anderson à bomba d'água (**AB**).

Cálculo da altura BH

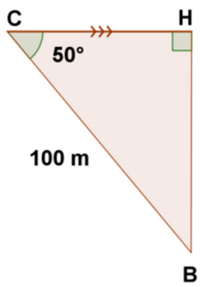


a) CM = CH + HM

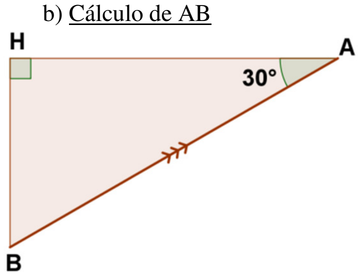
Cálculo de HM



Cálculo de CH

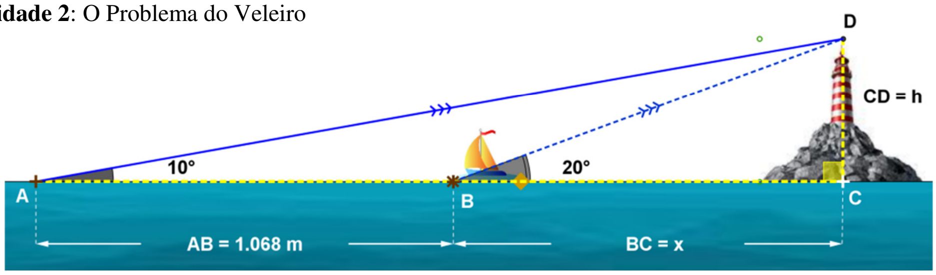


b) Cálculo de AB



ANEXO 8 – Folha de atividades – aula 3 (2ª parte)

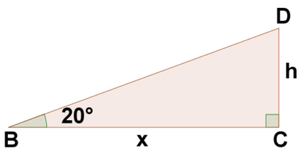
Atividade 2: O Problema do Veleiro

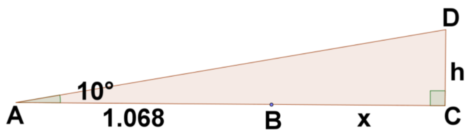


Um veleiro à deriva encontra-se na posição **A** e avista o topo de um farol (**D**) localizado no alto de uma montanha através de um ângulo de 10°. Uma hora depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto **B**, distante 1.068 m do ponto A, e avista o mesmo ponto D por um ângulo de 20°. Calcule:

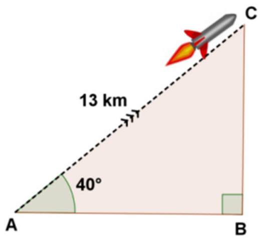
a) Quanto resta para o veleiro chegar até o farol (**x**);

b) A altura do farol (**h**).





EXTRA: O Problema do Foguete: Um foguete é lançado da cidade A com uma inclinação de 40°. Após percorrer 13 km em linha reta atinge o ponto C, que está exatamente acima da cidade B. Determine a distância aproximada entre as cidades A e B (AB)



ANEXO 9 – Lista de exercícios - aula 4 (1ª parte)

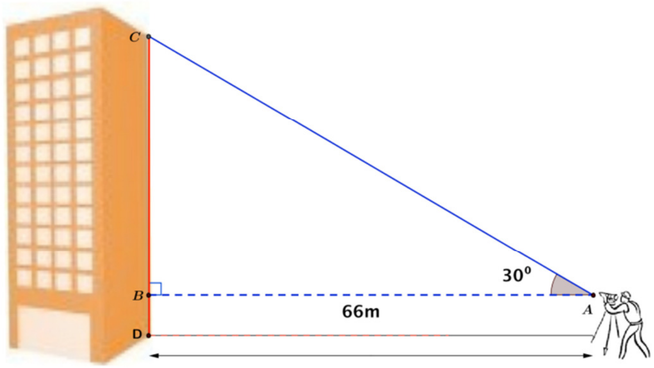
ESCOLA MUNICIPAL ____________________

Professores: Anderson Melo e Michel Martins

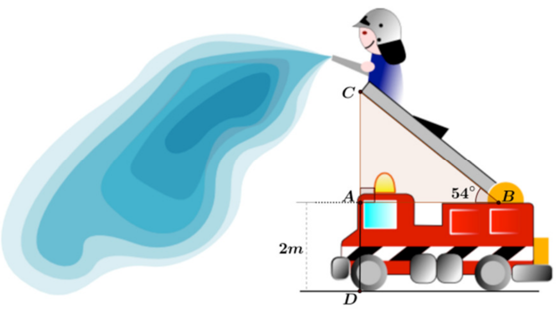
Aluno:____

O Ensino das Razões Trigonométricas – Aula 4 – **Lista de Exercícios**

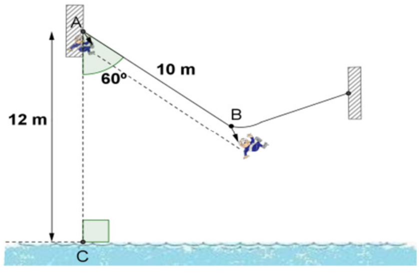
1) Um Agrimensor manuseia um teodolito a uma altura (BD) de 1,60 m, fazendo as medições para calcular a altura de um prédio. Ao distanciar-se 66m no plano horizontal da base do prédio (AB), avistou o topo do mesmo sob um ângulo de 30°**.** Calcule a altura (CD) deste prédio. (Use $\sqrt{3} \cong 1{,}7$)



2) A viatura **Auto Escada Mecânica** (AEM), conhecida como escada "Magirus", é destinada ao transporte e manobra de escada elevatória aos locais de operações de salvamento e combate a incêndio. (CBMPE, 2007). Sabe-se que o ângulo máximo ($A\hat{B}C$) de elevação é de 54° e que a escada tem 35 m de comprimento. Calcule a altura máxima (CD) da escada em relação ao solo, dado que a altura AD do caminhão é de 2m.
(Dados: sen 54° = 0,8 ; cos 54° = 0,6 e tg 54° = 1,37)



3) Wagner, em uma de suas viagens, resolveu descer em uma tirolesa em seu ponto mais alto, situado a 12 m de altura em relação ao nível do mar. Ao percorrer uma distância AB de 10 m, resolveu saltar no mar. Considerando que o ângulo de inclinação da tirolesa em relação a perpendicular AC, é de 60° (C$\hat{A}$B), calcule a altura da queda de Wagner.



ANEXO 10 – Lista de exercícios - aula 4 (2ª parte)

4) Meça os lados do triângulo abaixo e responda: (Use aproximações de uma casa decimal)

a) medida da hipotenusa: _______

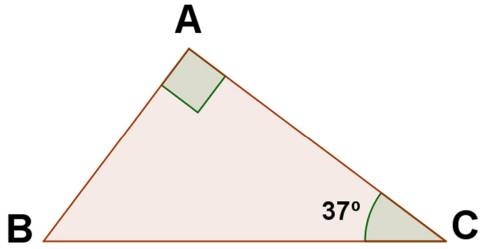
b) medida do cateto oposto ao ângulo de 37°: _______

c) medida do cateto adjacente ao ângulo de 37°: ________

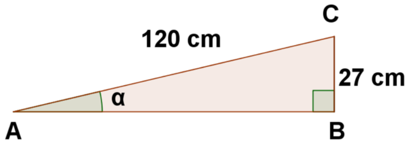
d) sen 37° = _______ ≅ _______

e) cos 37° = _______ ≅ _______

f) tg 37° = ________≅ _______

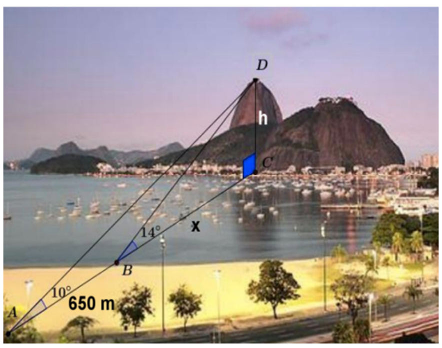


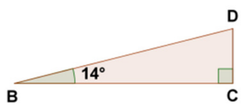
5) Dado o triângulo retângulo e a tabela trigonométrica abaixo, determine o valor de **α** :

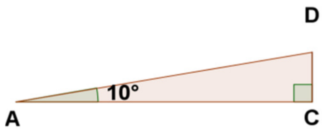


ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249

6) Um observador está em um ponto **A** do aterro do Flamengo e, através de um teodolito, observa o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10°. Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e, neste momento, observa o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14°. Qual é a altura (h) do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação? (Utilize a tabela trigonométrica do Exercício 5);







Cálculos:

ANEXO 11 – Avaliação final (1ª parte)

Escola Municipal ________________________________

Nome: ____________________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ________

Professor(a): __________________ - ___**º Bimestre / 2013 - Data:** / /

Nota:

1) Com auxílio de uma régua, meça os lados do triângulo ABC abaixo e complete: (Para o cálculo das razões, utilize a calculadora, aproximando os valores para duas casas decimais)

a) medida da hipotenusa: $\boxed{\quad}$

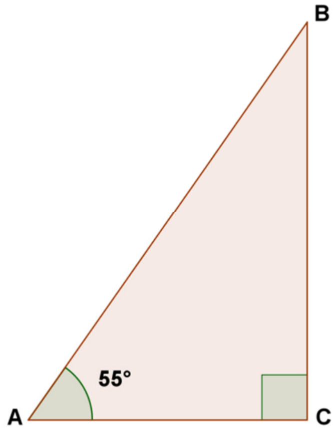
b) medida do cateto oposto ao ângulo de 55°: $\boxed{\quad}$

c) medida do cateto adjacente ao ângulo de 55°: $\boxed{\quad}$

d) sen 55° = $\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \cong \boxed{\quad}$

e) cos 55° = $\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \cong \boxed{\quad}$

f) tg 55° = $\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \cong \boxed{\quad}$



2) Conforme visto em sala de aula, explique por que não é aconselhável utilizar aproximações de somente uma casa decimal nas razões trigonométricas.

____

____

____

3) Um avião decola do ponto **A**, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 34°. Depois de percorrer 25 km, atinge o ponto **C** (no céu), localizado exatamente acima do ponto B (no solo).

a) Faça um desenho da situação-problema;

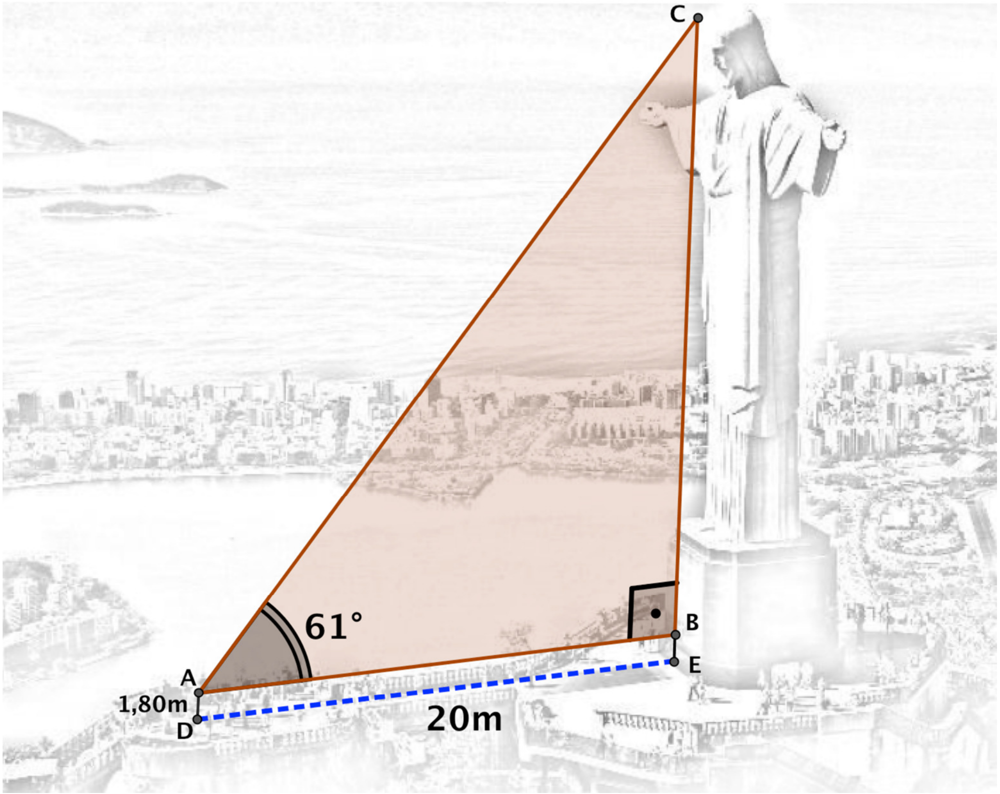
b) Determine a altura do avião em relação ao solo (**BC**) ao atingir o ponto **C**.
Dados sen 34° = 0,56 ; cos 34° = 0,83 e tg 34° = 0,68

a)	b)

ANEXO 12 – Avaliação final (2ª parte)

Nome: ______________________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ________

4) Um homem de 1,80 metro de altura ($\overline{AD}$) se encontra a uma distância de 20 metros ($\overline{DE}$) da estátua do Cristo Redentor e avista seu topo (C) sob um ângulo de 61°. Determine a altura ($\overline{CE}$) do monumento.
Dados: sen 61° = 0,87 ; cos 61° = 0,49 e tg 61° = 1,81



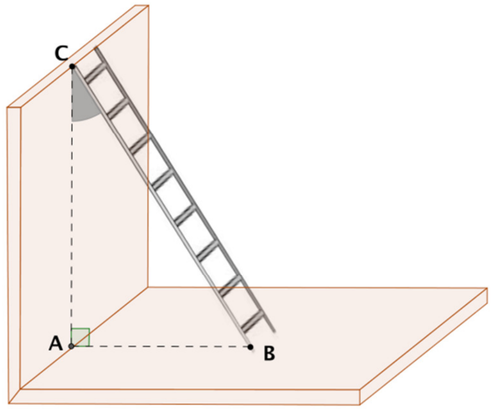
ANEXO 13 – Avaliação final (3ª parte)

Nome: ____ **Nº:** _____ **Turma:** ________

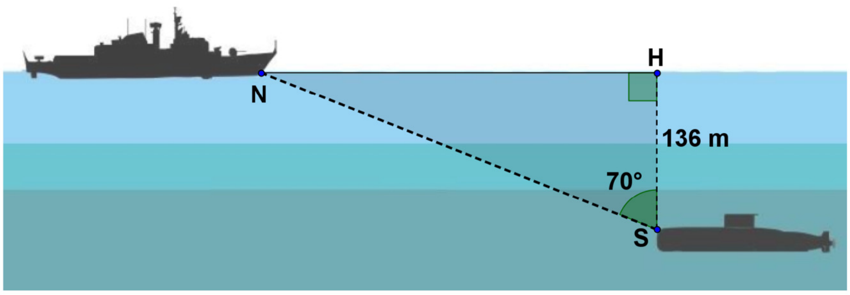
5) Complete, com sues respectivos valores, a Tabela dos Arcos Notáveis abaixo:

	30°	**45°**	**60°**
Sen	____	____	____
Cos	____	____	____
Tg	____	____	____

6) Uma escada de 12 metros de comprimento ($\overline{BC}$) está apoiada no topo de um muro. Sabendo que a distância desse muro ao pé da escada é de 6 metros ($\overline{AB}$), determine o ângulo de inclinação da escada em relação à parede.



7) Um submarino está situado a 136 m de profundidade no momento em que avista um navio ancorado na superfície. Sabendo que o ângulo ($H\hat{S}N$) é de 70°, calcule a distância $\overline{NS}$ entre o navio e o submarino.
Dados: sen 70° = 0,94 ; cos 70° = 0,34 e tg 70° = 2,75



ANEXO 14 – Avaliação final (4ª parte)

Nome: ______________________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ________

6) Um veleiro à deriva encontra-se na posição **A** e avista o topo de um farol (**D**) localizado no alto de uma montanha através de um ângulo de 14°. Uma hora depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto **B**, distante 300 m do ponto A, e avista o mesmo ponto D por um ângulo de 45°. Calcule a altura (**CD**) do farol em relação ao nível do mar.

Dados: sen 14° = 0,24 ; cos 14° = 0,97 e tg 14° = 0,25