
	<p>Ministério da Educação Universidade Tecnológica Federal do Paraná Câmpus Pato Branco <i>Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação</i> <i>Mestrado Profissional em Matemática</i></p>	
-----------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

JAQUELINE LAZAROTO VALIM

UMA DISCUSSÃO SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO
DISSEMINADO PELO PROFMAT PARA O ENSINO DE FUNÇÕES À
LUZ DO MTSK

PATO BRANCO/PR

MARÇO/2020

JAQUELINE LAZAROTO VALIM

**UMA DISCUSSÃO SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO
DISSEMINADO PELO PROFMAT PARA O ENSINO DE FUNÇÕES À
LUZ DO MTSK**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título “Mestre em Matemática” pelo Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT pela instituição associada Universidade Tecnológica Federal do Paraná Campus Pato Branco.

Orientadora: Profa. Dra. Marlova Estela Caldato

Pato Branco/PR

2020

Título da Dissertação Nº 41

“UMA DISCUSSÃO SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DISSEMINADO PELO PROFMAT PARA O ENSINO DE FUNÇÕES À LUZ DO MTSK”

BPP

JAQUELINE LAZAROTO VALIM

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da [Prof. Dr.ª Marlova Estela Caldato](#), pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - [Câmpus Pato Branco](#), às 14h00m do dia 02 de março de 2020. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

[Prof. Marlova Estela Caldato, Dr.ª](#)
(Orientadora – UTFPR/Pato Branco)

[Prof. Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Dr.](#)
(UTFPR/Pato Branco)

[Prof. André Pedroso, Dr.](#)
(UNIOESTE/Francisco Beltrão)

[Prof. Adilson da Silveira, Dr.](#)
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR

V177a Valim, Jaqueline Lazaroto.
Uma discussão sobre o conhecimento matemático disseminado pelo PROFMAT para o ensino de funções à luz do MTSK / Jaqueline Lazaroto Valim -- 2020.
85 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Marlova Estela Caldato
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Pato Branco, PR, 2020.
Inclui bibliografia

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Professores - Formação. 3. Funções (Matemática). 4. Conhecimento e aprendizagem. I. Caldato, Marlova Estela, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Dedico esse trabalho à minha filha Carolina, da qual abdiquei longos períodos de sua companhia para debruçar-me a realização deste e dos demais créditos do mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, pela força e por cada anjo que ele colocou em meu caminho que me ajudou no decorrer desse estudo, pois creio que nada acontece sem sua permissão, sem Ele nada fazemos e nada somos.

Agradeço aos meus pais Édina e Ademir que sempre me incentivaram e fizeram tudo o que era possível para que eu tivesse oportunidade de estudar e, ao meu esposo João César por juntos traçarmos e concluirmos mais uma etapa de nossas vidas.

Agradeço à minha filha “Carol” por mesmo tão pequena aceitar nossos momentos de ausência e por ser luz em minha vida. É por você que mamãe levanta da cama todos os dias disposta a viver e ser melhor. Ao meu anjo no céu, que em poucas semanas me trouxe tantos ensinamentos, mostrando que a vida é passageira e precisamos valorizar cada instante dela.

Agradeço à minha irmã Jeniffer pelo tempo, carinho e dedicação ao cuidado do meu bem mais precioso para que eu pudesse viajar para as aulas do mestrado.

Agradeço à cada familiar, amigo(a), nossos anjos na terra, por todo incentivo, por todas as orações, pelo ombro disposto a consolar quando o fardo estava pesado demais.

Agradeço aos colegas de turma que com muita alegria fizeram com que as horas de estudo passassem mais rápido e com o acolhimento me faziam, por algumas horas, esquecer do quão distante eu estava de casa. Obrigada, meninas, pelas longas conversas de toda quinta antes do soninho. Obrigada, Cássia, por sempre que necessário nos ceder um cantinho na sua “pensão” particular. Obrigada, Larissa, por nos abrigar em sua casa por diversas noites e por, juntamente com sua preciosa amizade, nos presentear com sua amada família. Obrigada, amiga Tamiris, que, junto com a Lari, alegrava nossas viagens, sem vocês elas seriam muito mais tediosas. Deus é tão maravilhoso que desde o primeiro dia já nos deu de presente essa dupla incrível.

Agradeço à professora Marlova por aceitar me orientar, por seus apontamentos visando melhorar a minha pesquisa e por mesmo em horas de descanso e em período de férias se dedicar a orientação e correção do meu trabalho e a responder mensagens sanando minhas dúvidas.

E, finalmente, mas não menos importante, agradeço aos membros da banca examinadora, por aceitarem contribuir com essa dissertação e pelo tempo despendido para isso.

Todo conhecimento é produzido na direção do outro, o que quer dizer que o sujeito que o produz deve acreditar que alguém compartilha com ele aquela justificação (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 142).

RESUMO

Esta pesquisa visa discutir a natureza dos conhecimentos veiculados pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT, o qual constitui-se como uma política pública de formação de professores, por meio de uma análise de cunho qualitativo do livro texto que baliza uma das principais disciplinas do programa, a “Números e Funções Reais”. Tal análise focou na abordagem desenvolvida do tema “Funções”, mais especificamente, “Funções Afins”, e foi realizada à luz do modelo teórico-analítico *Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge* (MTSK). Assim, evidenciou-se, por meio deste trabalho, que os conhecimentos sobre o tema funções disseminados no e pelo PROFMAT privilegiam apenas um dos conhecimentos tidos pelo MTSK como essenciais para o professor que ensina matemática, o domínio *Mathematical Knowledge* – MK, mais especificamente no que tange aos subdomínios *Knowledge of Topics* – Kot e *Knowledge of Practices in Mathematics* – KSM, ou seja, os conhecimentos do professor específicos para o ensino do conteúdo, os quais constituem base necessária para um ensino eficaz e que constituem o domínio *Pedagogical Content Knowledge* – PCK deixam de ser evidenciados e contemplados de forma satisfatória na abordagem desenvolvida pelo autor do livro texto “Números e Funções Reais”.

Palavras-chave: Conhecimento matemático do professor. PROFMAT. Funções. Funções Afins. MTSK.

ABSTRACT

This research aims to discuss the nature of the knowledge conveyed by the Professional Master's Program in Network Mathematics - PROFMAT, which constitutes itself as a public policy for teacher training, through a qualitative analysis of the textbook that guides one of the main subjects of the program, the "Real Numbers and Functions". Such analysis focused on the developed approach of the theme "Functions", more specifically, "Related Functions", and was carried out in the light of the theoretical-analytical model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). Thus, it was evident, through this work, that the knowledge on the topic functions disseminated in and by PROFMAT privileges only one of the knowledge considered by MTSK as essentials for the teacher who teaches mathematics, the domain Mathematical Knowledge - MK, more specifically in regarding the subdomains Knowledge of Topics - Kot and Knowledge of Practices in Mathematics - KSM, that is, the teacher's specific knowledge for teaching content, which constitute a necessary basis for effective teaching and which constitute the Pedagogical Content Knowledge domain - PCK ceases to be evidenced and contemplated satisfactorily in the approach developed by the author of the text book "Numbers and Real Functions".

Keywords: Teacher mathematical knowledge. PROFMAT. Functions. Related Functions. MTSK.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Fluxo discente PROFMAT	15
Figura 2- Matriz curricular do PROFMAT	18
Figura 3- Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)	26
Figura 4 - <i>Knowledge of Topics</i> (Kot).....	27
Figura 5- <i>Knowledge of Structure Mathematics</i> (KSM)	27
Figura 6 - <i>Knowledge of Features of Learning Mathematics</i> (KFLM).....	29
Figura 7- <i>Knowledge of Mathematics Teaching</i> (KMT)	29
Figura 8- <i>Knowledge of Mathematics Learning Standards</i> (KMLS).....	29
Figura 9 - Exercício 5.17.....	78

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. O MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL	14
1.1 O PROGRAMA.....	14
1.2 OBJETIVOS DO PROFMAT	16
1.3 O INGRESSO.....	17
1.4 MATRIZ CURRICULAR	17
1.5 MATERIAL DIDÁTICO	19
1.6 EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO.....	20
1.7 TRABALHO DE CONCLUSÃO FINAL.....	21
1.8 CONCLUSÃO DO PROFMAT	21
2. METODOLOGIA	23
2.1 O MTSK	25
3. UMA DISCUSSÃO SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DESENVOLVIDA NO PROFMAT A PARTIR DO LIVRO-TEXTO “NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS”	31
3.1 ANÁLISE DA PARTE 1: USO DE NOTAÇÃO E LINGUAGEM MATEMÁTICA.	32
3.2 ANÁLISE DA PARTE 2– CONSTRUÇÃO DO DOMÍNIO E CONTRADOMÍNIO DE FUNÇÕES REAIS.	35
3.3 ANÁLISE DA PARTE 3 – OS TIPOS DE FUNÇÕES.	49
3.3.1 Capítulo 5 - “Funções Afins”	50
3.3.2 Capítulo 6 – “Funções Quadráticas”	50

3.3.3 Capítulo 7 – “Funções Polinomiais”	52
3.3.4 Capítulo 8 – “Funções Exponenciais e Logarítmicas”	54
3.3.5 Capítulo 9 – “Funções Trigonométricas”	59
4. UMA DISCUSSÃO SOBRE A PERSPECTIVA FORMATIVA PRIVILEGIADA PELO MATERIAL DIDÁTICO DO PROFMAT SOBRE O CONTEÚDO “FUNÇÕES AFINS”	64
4.1 O CONCEITO DE FUNÇÕES	64
4.2 O CAPÍTULO FUNÇÕES AFINS	65
4.2.1 O PRODUTO CARTESIANO	66
4.2.2 O PLANO NUMÉRICO \mathbb{R}^2	67
4.2.3 A FUNÇÃO AFIM.....	68
4.2.4 COMENTÁRIOS SOBRE TERMINOLOGIA.....	70
4.2.5 A FUNÇÃO LINEAR	70
4.2.6 CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM.....	73
4.2.7 FUNÇÕES POLIGONAIS	75
4.2.8 EXERCÍCIOS.....	76
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
REFERÊNCIAS	83

INTRODUÇÃO

A pesquisa ora apresentada tem como objeto de investigação o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, um programa semipresencial de formação de professores, em nível *stricto sensu*, iniciado no ano de 2011 por meio de uma ação induzida da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a qual é responsável pela avaliação do programa, atualmente com nota 5 (nota máxima para programas de mestrado). O programa configura-se em uma política pública de formação de professores, da qual sou discente. Ela foi criada, implementada e é avaliada pelo governo federal, visto que é financiado pelo Ministério da Educação, por intermédio da CAPES.

O PROFMAT é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), e é ofertado no âmbito de uma rede composta por aproximadamente 100¹ instituições de ensino superior, as quais são denominadas Instituições Associadas, conforme informações veiculadas no site do PROFMAT. O programa foi criado com o intuito de proporcionar uma formação “mais sólida aos professores de matemática da educação básica²” e vai ao encontro do que prevê a meta 16 do Plano Nacional da Educação (PNE), Lei Nº 13.005 de 25 de julho de 2014, conforme é possível observar:

Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos (as) os (as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino (BRASIL, 2014, p. 275).

Desde sua criação, no ano de 2011, o programa se propõe a atender prioritariamente professores de Matemática que estejam em exercício na Educação Básica e que almejam aperfeiçoar suas práticas pedagógicas por meio do aprofundamento dos conteúdos matemáticos relevantes para a atuação docente, visando contemplar as necessidades rotineiras dos professores no ambiente escolar, bem como as necessidades de desenvolvimento e valorização profissional (CAPES, 2010).

¹ Disponível em: <<http://www.profmatsbm.org.br/instituicoes-associadas/>> Acesso em: 17 fev. 2019.

² Disponível em: <<http://www.profmatsbm.org.br/funcionamento/regimento/>>. Acesso em: 04 maio 2018.

O PROFMAT, desde sua criação até o ano de 2017, contabilizou a oferta de um total de mais de dez mil vagas, distribuídas nos *campi* das instituições associadas, em todas as 27 unidades da federação³, sendo essas em sua maioria instituições pertencentes a autarquia federal. Além disso, o PROFMAT foi pioneiro entre os programas de mestrado profissional em rede ofertados no Brasil e que são direcionados, estritamente, para a formação continuada de professores, visando impactar qualitativamente a educação básica (CALDATTO, 2015, p. 55-57).

O programa, também, tornou-se referência na instauração posterior de outros programas de formação continuada de professores em rede e em nível de mestrado, haja vista que ele foi o primeiro curso de pós-graduação *stricto sensu* semipresencial do Brasil destinado a professores da Educação Básica. (CALDATTO, FIORENTINI, PAVANELLO, 2018).

O programa passa por constantes avaliações visando “contribuir para a melhor formação do mestrando e, conseqüentemente, para a promoção da melhoria da qualidade do ensino de Matemática, em especial nas redes públicas de ensino” (SBM, 2017, p.4), e nesse sentido o relatório digital “PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados” ressalta que o PROFMAT tem cumprido seus objetivos e tem contribuído na melhoria da Educação Básica no país (SBM, 2017).

Assim, em função das características do PROFMAT, como a sua importância, amplitude e capilarização e, também, pela vivência, enquanto discente do programa, é que o elegemos como objeto de investigação desse trabalho, objetivando discutir, de modo especial, a natureza dos conhecimentos veiculados pelo livro texto do PROFMAT titulado “Números e Funções Reais” (LIMA, 2014) o qual foi desenvolvido especificamente para nortear uma das disciplinas básicas do PROFMAT e cujo objeto de estudo é funções. E para efeito de simplificação analisaremos mais especificamente a abordagem desenvolvida para o tema “Funções Afins”, à luz do modelo teórico-analítico *Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2018).

³ Para mais informações consultar:

<http://www.profmatt-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2018.

1. O MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

1.1 O PROGRAMA

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT⁴ é um programa de pós-graduação, em nível de mestrado, semipresencial e voltado, exclusivamente, para a formação de professores de matemática, que teve início no ano de 2011. Coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com o apoio do Instituto nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), é ofertado em diversas instituições de ensino superior, que integram uma Rede, denominadas Instituições Associadas.

De acordo com informações obtidas no site oficial do PROFMAT, o programa foi criado com o intuito de proporcionar uma formação mais sólida aos professores de matemática da educação básica e vai ao encontro do que prevê a meta 16 do Plano Nacional da Educação (Lei Nº 13.005 de 25 de julho de 2014),

META 16: “formar, em nível de pós-graduação, 50% dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos (as) os(as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino” (BRASIL, 2014, p. 275).

Dessa forma, o mestrado profissional em rede – PROFMAT, pode ser considerado como parte de uma política pública de formação de professores e é recomendado e avaliado pela Capes, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e validado pelo Ministério da Educação.

Desde sua criação o PROFMAT já ofertou mais de dez mil vagas, distribuídas pelos *campi* das instituições associadas. Em 2012 o PROFMAT atingiu todas as 27 unidades da federação. A evolução no número de instituições e vagas ofertadas pelo programa segue na tabela:

ANO	INSTITUIÇÕES ASSOCIADAS	POLOS/CAMPI	VAGAS
-----	-------------------------	-------------	-------

⁴ Os dados apresentados sobre a organização do programa são baseados em documentos obtidos do site oficial do PROFMAT, disponível em: <<http://www.profmatt-sbm.org.br/>>.

2011	48	54	1.192
2012	57	67	1.575
2013	58	71	1.570
2014	57	69	1.500
2015	65	80	1.575
2016	61	75	1.470
2017	67	79	1.595
2018	74	95	1.785
2019	75	96	1.833
2020	76	101	_5

Fonte: Dados tabelados pela autora conforme informações disponibilizadas no site do PROFMAT⁶

Apesar do alto quantitativo de vagas ofertadas desde a criação desse programa, dados divulgados pelo relatório “PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados” dão conta de que entre 2013 e 2016 a média de desligamento foi de 21% comparados ao total de alunos matriculados, sendo que o maior motivo para desligamento do programa é a reprovação no ENQ (SBM, 2017).

Figura 1- Fluxo discente PROFMAT

TABELA 4. Fluxo discente (dados Coleta/ Plataforma Sucupira)				
Ano/Situação	2013	2014	2015	2016
Matriculados	2.473	2.521	2.378	2.652
Titulados	776	805	767	640
Abandonos	46	78	28	37

Fonte: Módulo Coleta, Plataforma Sucupira/Capes

Fonte: SBM (2017, p. 23)

Esse mesmo relatório apresenta dados referentes ao fluxo discente, conforme exposto anteriormente, sendo que o tempo médio para titulação no período apresentado foi de 29 meses. Ressalta-se que apesar do percentual de desligamentos e discrepância entre números de matriculados e titulados, 10% do total de titulados em mestrados profissionais no Brasil são do PROFMAT (SBM, 2017).

⁵ Não há informações sobre o quantitativo de vagas que serão ofertadas em 2020, visto que o edital para o exame de acesso que previa 1.860 vagas foi cancelado conforme veiculado no site do programa <<https://ena.proformat-sbm.org.br/info.php>>. Acesso em: 27 dez. 2019.

⁶ Disponível em <<http://www.proformat-sbm.org.br/instituicoes-associadas/>>. Acesso em: 27 dez. 2019.

1.2 OBJETIVOS DO PROFMAT

Conforme proposta aprovada pela Capes, por meio do PROFMAT,

A meta é oferecer um curso de formação profissional alicerçado em sólida formação em Matemática, que contemple as necessidades advindas tanto do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola quanto de suas necessidades amplas de desenvolvimento e valorização profissional e que venha a fortalecê-los no enfrentamento dos desafios postos pelo seu exercício profissional (CAPES, 2010, p.9).

Nesse contexto, o PROFMAT visa atender prioritariamente professores de Matemática que estejam em exercício na Educação Básica e que almejam aperfeiçoar suas práticas por meio do aprofundamento dos conteúdos matemáticos relevantes para a atuação docente.

A formação por esse programa objetiva, também, contemplar as necessidades rotineiras dos professores no ambiente escolar, bem como as necessidades de desenvolvimento e valorização profissional.

Conforme relatório “PROFMAT: Uma reflexão e alguns resultados” são diretrizes do PROFMAT:

- a) executar um processo de formação complementar em Matemática, baseado nos conteúdos curriculares do Ensino Básico, que promova o domínio dos conteúdos apropriados, da forma de pensar e das estratégias de resolução de problemas característicos da Matemática;
- b) promover uma articulação eficaz entre conhecimentos e práticas das Ciências Matemáticas e do Ensino Básico, direcionada aos objetivos da Educação Básica;
- c) estimular e promover a independência do professor, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional, de forma autônoma e permanente;
- d) incentivar a pesquisa e a produção de materiais e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, *softwares*, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc.) (SBM, 2017, p. 6).

Em consonância com tais objetivos, a participação no PROFMAT está condicionada à aprovação dos candidatos (e professores de matemática da educação básica) no processo de seleção, denominado Exame Nacional de Acesso (ENA), o qual abordaremos na próxima seção.

1.3 O INGRESSO

O ingresso no curso acontece exclusivamente por meio de uma prova denominada Exame Nacional de Acesso (ENA), o qual ocorre pelo menos uma vez ao ano, concomitantemente, em todas as Instituições Associadas.

O ENA é regulamentado por edital elaborado pela Coordenação Acadêmica Nacional, sendo que nele constam todas as normas e requisitos para realização e inscrição no exame.

As vagas oferecidas são preferencialmente para professores de matemática de escolas públicas, conforme consta na apresentação do programa

O PROFMAT visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência⁷.

Os alunos, aprovados no Exame Nacional de Acesso, farão jus à matrícula no PROFMAT desde que atendam às exigências do edital e as normas das Instituições Associadas e após serem matriculados deverão cumprir todo o programa de disciplinas conforme previsto na matriz curricular, sobre a qual discorreremos na seção a seguir.

1.4 MATRIZ CURRICULAR

O programa possui uma matriz curricular única, a qual deve ser cumprida por todas as Instituições Associadas. Ela é composta por nove disciplinas, das quais sete são obrigatórias e duas são eletivas, sendo que estas são definidas por cada instituição de ensino dentre as constantes na matriz curricular do PROFMAT, as quais estão elencadas no catálogo de disciplinas.

⁷ Conforme veiculação pelo site do programa no endereço eletrônico <<http://www.profmtat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>>. Acesso em 15 maio 2018.

Figura 2- Matriz curricular do PROFMAT

1º Ano	
1º Período	2º Período
MA 11 – Números e Funções Reais	MA 13 – Geometria
MA 12 – Matemática Discreta	MA 14 – Aritmética
2º Ano	
Verão	1º Período – 2º Período
MA 21 – Resolução de Problemas	MA 22 – Fundamentos de Cálculo
	MA 23 – Geometria Analítica
	Eletiva I
	Eletiva II
3º Ano	
Período de Verão	
Finalização da Dissertação de Mestrado	

Fonte: Site oficial do PROFMAT⁸

As disciplinas ofertadas no primeiro ano do programa são denominadas “disciplinas básicas” do PROFMAT, as quais podem ser presenciais ou semipresenciais e devem ter duração mínima de doze semanas, sendo ao menos três horas semanais.

Durante o período de férias, nos meses de janeiro e fevereiro, denominado período de verão, é ofertada a disciplina de “Resolução de Problemas”, a qual deve, obrigatoriamente, ser ofertada em regime presencial com duração de três a quatro semanas, sendo que a carga horária mínima presencial deverá ser de sessenta horas.

Nos semestres subsequentes são ofertadas as demais disciplinas obrigatórias, “Fundamentos do Cálculo – MA22” e “Geometria Analítica – MA23” e duas dentre as seguintes disciplinas eletivas constantes no catálogo de disciplinas e que são definidas por cada instituição associada.

As disciplinas que compõem a matriz curricular do programa contam com material específico, elaborado pela SBM exclusivamente para o PROFMAT. Diante disso, dedicamos a próxima seção para exibirmos material didático utilizado.

⁸ Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/rotina-academica/matriz-curricular/>>. Acesso em 21 jan. 2019.

1.5 MATERIAL DIDÁTICO

O programa de mestrado profissional PROFMAT utiliza como material de referência os livros da Coleção PROFMAT, que são elaborados especialmente para o programa e são publicados e comercializados pela SBM.

A Coleção PROFMAT é composta atualmente por dezessete livros, que constituem material base das disciplinas e conforme relatório do PROFMAT “Uma Reflexão e Alguns Resultados” versam “sobre todos os temas da Matemática relevantes para a formação do professor da Educação Básica, sua prática de ensino, história e aplicações” cujos títulos estarão dispostos a seguir (SBM, 2017, p. 9):

- **Introdução à Álgebra Linear** - Autores: Abramo Hefez e Cecilia Fernandez
- **Tópicos de Teoria dos Números** - Autores: Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Fabio E. Brochero Martinez e Nicolau C. Saldanha
- **Polinômios e Equações Algébricas** - Autores: Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela
- **Tópicos de História da Matemática** - Autores: Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira de Carvalho
- **Temas e Problemas Elementares** - Autores: Elon Lages Lima, Paulo Cezar P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado
- **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática** - Autores: Victor Giraldo, Paulo Caetano e Francisco Mattos
- **Números e Funções Reais** - Autor: Elon Lages Lima
- **Aritmética** - Autor: Abramo Hefez
- **Geometria** - Autor: Antonio Caminha Muniz Neto
- **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro** - Autor: Mauro Rabelo
- **Geometria Analítica** - Autores: Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaff
- **Matemática Discreta** - Autores: Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho
- **Matemática e Atualidade, volume 1** - Autores: Christiane Rousseau e Yvan Saint-Abin
- **Matemática e Atualidade, volume 2** - Autores: Christiane Rousseau e Yvan Saint-Abin
- **Fundamentos de Cálculo** - Autor: Antonio Caminha Muniz Neto

- **Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear** - Autores: Abramo Hefez e Cecilia Fernandez
- **Exercícios Resolvidos de Aritmética** - Autor: Abramo Hefez

Os livros são comercializados pela SBM⁹, sendo assim, possivelmente, nem todos os discentes do programa tem acesso a eles. Além dos livros, referências principais, também podem ser utilizados como material de apoio às videoaulas disponíveis no site do programa, que replicam o que está exposto nos livros-textos.

O material didático além de suporte para as aulas das disciplinas também serve de embasamento para a realização de outra etapa primordial do PROFMAT: o Exame Nacional de Qualificação para o qual dedicamos a seção subsequente.

1.6 EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO

O Exame Nacional de Qualificação (ENQ) “tem como objetivo avaliar o conhecimento adquirido nas disciplinas básicas: “Números e Funções Reais”, “Matemática Discreta”, “Geometria” e “Aritmética”. Além disso, atua como indicativo da uniformidade do curso em toda a rede” (SBM, 2017, p. 11).

Este exame consiste em uma única avaliação escrita, ofertada duas vezes ao ano, composta por questões discursivas que versam sobre os conteúdos inerentes às disciplinas básicas.

Todos os discentes matriculados no PROFMAT devem, obrigatoriamente, após concluir as quatro disciplinas básicas, realizar o ENQ, no qual lhe será atribuído o grau de “aprovado” ou “reprovado”.

O aluno que for reprovado, ou seja, aquele que não obter a nota mínima por duas vezes no ENQ, é desligado do programa, sendo que, a continuidade só se dará mediante a sua aprovação no Exame de Acesso novamente, seguido de aprovação no ENQ. Ou seja, a aprovação nesse exame de qualificação é requisito para que o discente possa defender seu trabalho de conclusão final e também para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT.

⁹ Para mais informações sobre a comercialização dos livros consultar:
<<https://loja.sbm.org.br/index.php/sbm/colecao-profmat.html>>.

1.7 TRABALHO DE CONCLUSÃO FINAL

O Trabalho de Conclusão Final do PROFMAT pode ser apresentado em diferentes formatos, dentre eles citamos dissertação, artigo, patente, desenvolvimento de aplicativos e/ou de materiais didáticos, relatório final de pesquisa, sendo que para todos os formatos obrigatoriamente deverá ser apresentado um texto formalmente escrito.

Independente do formato apresentado, o Trabalho de Conclusão Final deve versar sobre temas pertinentes ao currículo da Matemática da Educação Básica e que tenham impacto nas atividades em sala de aula, a fim de contribuir para a melhora e o aperfeiçoamento da prática educacional dos discentes do PROFMAT.

Somente após a aprovação do discente do PROFMAT no ENQ o Trabalho de Conclusão Final deverá ser submetido à apreciação por banca examinadora, a qual deverá ser composta por, no mínimo, dois docentes do Programa e um docente de outra instituição, sendo que a avaliação desse trabalho deverá seguir as normas do programa de cada instituição associada.

Essa e as demais etapas que já foram evidenciadas são requisitos para conclusão do PROFMAT, a qual se dará mediante as condições e normas que exporemos na seção seguinte.

1.8 CONCLUSÃO DO PROFMAT

Os discentes do PROFMAT devem, dentro do prazo máximo definido pela instituição, ser aprovados em pelo menos nove das disciplinas, incluindo todas as obrigatórias, cumprindo assim o total de créditos mínimo em disciplinas.

Além disso, o discente do programa precisa ter sido aprovado no Exame Nacional de Qualificação e na defesa do Trabalho de Conclusão Final para fazer jus ao título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT.

Após aprovação do Trabalho de Conclusão Final, esse deverá ser inserido no Sistema de Controle Acadêmico e na Plataforma Sucupira pela Coordenação Acadêmica Institucional.

O discente, que cumprir todas as exigências acima e os demais requisitos legais determinados por sua instituição associada, obterá o grau de mestre e receberá seu diploma, cuja

confecção é de responsabilidade da instituição em que ele se encontra matriculado, sendo que o selo de autenticidade será emitido pela Comissão Acadêmica Nacional.

.

2. METODOLOGIA

Esta pesquisa tem como objetivo discutir o conhecimento especializado do professor de Matemática disseminado pelo PROFMAT por meio do livro texto “Números e Funções Reais”, focando na abordagem desenvolvida para o tema “Funções Afins”.

O PROFMAT é estruturado a partir de uma matriz curricular única. Como já mencionada anteriormente, cada uma das disciplinas da matriz curricular possui e utiliza um material de referência elaborado, publicado e comercializado pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) que são os livros da “Coleção PROFMAT”, os quais são direcionados especialmente para o programa e pautam todo o processo de ensino com “temas relevantes da Matemática para a formação do professor da Educação Básica, sua prática de ensino, história e aplicações”, conforme disposto no relatório digital “PROFMAT: Avaliação de possíveis impactos” (SBM, 2018, p. 7).

Dentre esses temas/conteúdos os quais são considerados pelo programa “relevantes” e estão dispostos nos livros e ementas das disciplinas do PROFMAT, o tema “Funções” nos despertou interesse por ser objeto de estudo de uma das disciplinas “básicas” do PROFMAT e por figurar no rol de conteúdos prescritos nos currículos escolares da educação básica, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento norteador da educação básica brasileira, visando desenvolver, por exemplo, as habilidades de “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, e utilizar esses conceitos para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 317) e “interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p. 533).

Dessa forma, diante das evidências de que os livros-textos são as principais e no caso do PROFMAT, única, referência utilizada, visto que as aulas gravadas disponíveis no site do programa são uma replicação daquilo que está posto no livro e, tendo em vista o nosso interesse em analisar a abordagem desenvolvida para o tema “Funções” voltamo-nos ao estudo e análise da disciplina básica “Números e Funções Reais”, cuja ementa está disposta abaixo, focando na discussão de sua bibliografia, composta unicamente pelo livro-texto titulado, igualmente à disciplina, “Números e

Funções Reais”, de autoria de Elon Lages Lima, publicado em 2013 pela editora da SBM. De modo particular, focaremos na reimpressão de tal obra que ocorreu no ano de 2014.

Quadro 1- Ementa da disciplina Números e Funções Reais

MA 11 – Números e Funções Reais
Ementa
Conjuntos. Números naturais. Números cardinais. Números Reais. Funções afins. Funções quadráticas. Funções polinomiais. Funções exponenciais e logarítmicas. Funções trigonométricas.
Referência Bibliográfica
1. LIMA, E. L. Números e funções reais . SBM, 2014 (Coleção PROFMAT). 2. PROFMAT, MA11 – Números e funções reais . Disponível em: < http://www.profmatsbm.org.br/ma11 >. Acesso: 04 jan. 2017.

Fonte: SBM¹⁰ (2017)

Ademais, o currículo apresentado aos professores (livro-texto) orienta as atividades educativas e costuma traduzir o significado do currículo prescrito (ementa, etc.) sendo que este, “expressa o conteúdo base da ordenação do sistema, estabelecendo a sequência de progresso pela escolaridade e pelas especificidades que o compõem” (SACRISTÁN apud CALDATTO, 2015, p. 100), os quais costumam ser muito genéricos, assim os livros-textos exercem papel determinante para guiar e controlar a prática a partir do currículo prescrito.

O livro “Números e Funções Reais é organizado em nove capítulos conceituais e um capítulo final, que contempla a solução dos exercícios propostos no decorrer dos capítulos anteriores dos quais iremos nos deter mais especificamente ao capítulo titulado “Funções Afins”.

Desta forma, tendo em vista o material e as características de análise, essa pesquisa pode ser classificada como bibliográfica de cunho qualitativo (PRODANOV; FREITAS, 2013; SEVERINO, 2007; GIL, 2008; LAKATOS; MARCONI, 2003) uma vez que os dados analisados serão extraídos exclusivamente do livro texto “Números e Funções Reais” e serão analisados com

¹⁰ Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Catalogo-de-Disciplinas_2017.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2019.

base na análise de conteúdo embasada no modelo teórico analítico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK (CARRILLO, et al., 2018).

2.1 O MTSK

O MTSK - *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (Conhecimento Especializado do Professor de Matemática) é um modelo teórico analítico que versa sobre o conhecimento matemático dos professores e que visa discutir a formação matemática do professor, bem como os conhecimentos relevantes para o exercício da docência em matemática.

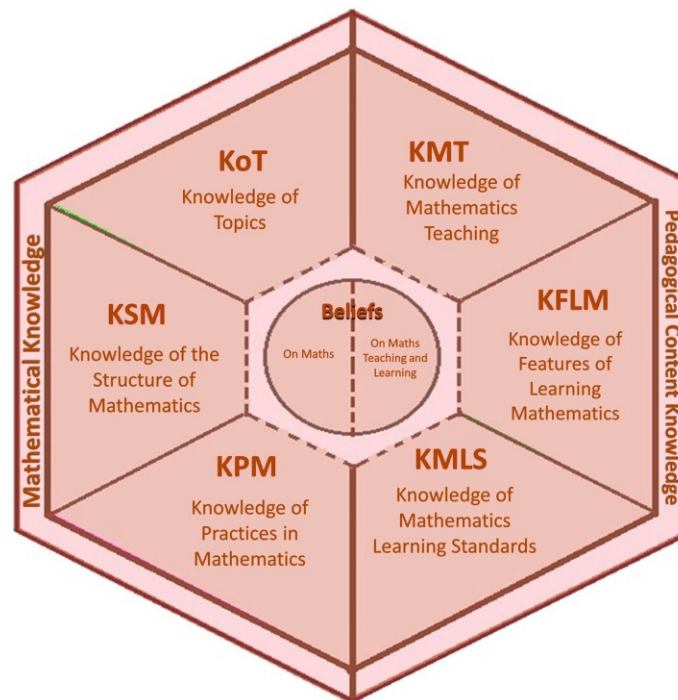
Esse modelo reconhece contribuições de modelos anteriores numa tentativa de estruturar o conhecimento dos professores e foi elaborado a partir de uma pesquisa que apontou para a necessidade de aprofundar o conhecimento utilizável para o ensino e a necessidade de ferramentas ou modelos adequados que facilitem uma análise e possíveis recomendações para a formação de professores (CARRILLO, et al., 2018).

Dessa forma, esse modelo de análise foi escolhido por considerar outros conhecidos modelos sobre conhecimentos de professores e por voltar-se, assim como ao PROFMAT, ao estudo do conhecimento matemático específico para o professor de matemática, sendo também objetivo desse programa discutir aspectos/conhecimentos relevantes para a formação e atuação profissional do professor de matemática.

Além disso, os autores do MTSK procuraram assegurar que as definições de cada subdomínio fossem construídas tendo como base o professor e os conhecimentos que esse coloca em uso para sua prática, dessa forma esse modelo favorece as análises.

As categorias do MTSK emergiram da análise de dados feita pelos autores e foram realimentadas tendo em vista a análise de conteúdo de Bardin (2001), sendo que essa interação possibilitou um refinamento nos fundamentos conceituais do modelo.

Figura 3- *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)*



Fonte: Carrillo, et al. (2018)

Conforme podemos verificar na figura 2, o modelo estabelece três dimensões do conhecimento necessários ao professor que ensina Matemática, compostas por *Beliefs*, Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge - MK*) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*), os quais foram divididos em subdomínios e suas respectivas categorias

O *Beliefs* está relacionado às crenças do professor sobre a matemática e sobre o ensino e aprendizagem da mesma e estão ao centro do modelo para representar a reciprocidade entre essas crenças, conforme evidenciam Carrillo, et al.:

We are also aware that the teacher's classroom practice is deeply influenced by what can be loosely termed a philosophy of mathematics, that is a more or less coherent set of conceptions and beliefs (Thompson, 1992) about mathematics, how it is learnt and how it should be taught, which permeate the teacher's knowledge in each of the sub-domains. Therefore, MTSK also includes beliefs about mathematics and about mathematics teaching and learning. These are represented at the centre of the figure to underline the reciprocity between beliefs and knowledge domains. (CARRILLO, et al., 2018, p. 5).

Os autores entendem que a matemática é uma rede de conhecimentos e, dessa forma, o professor deve ter uma boa compreensão de todas as conexões dessa rede para que ensine o conteúdo de forma conectada, ou seja, deve contemplar em sua prática o conhecimento referente a cada um dos domínios do MTSK.

O Conhecimento Matemático (*Mathematical Knowledge - MK*) considera os conhecimentos do professor em relação à Matemática como disciplina científica em um contexto educacional e é estruturado, para fins de análise, a partir de três subdomínios: *Knowledge of Topics - Kot*, *Knowledge of the Structure of Mathematics - KSM* e *Knowledge of Practices in Mathematics - KPM* (CARRILLO, et al., 2018).

Figura 4 - Knowledge of Topics (Kot)

Table 1. Categories of knowledge of topics.	
Procedures	How to do something? When to do something? Why something is done this way? Characteristics of the result
Definitions, properties and foundations	
Registers of representation	
Phenomenology and applications	

Fonte: Carrillo, et al. (2018, p. 8)

O subdomínio *Kot* contempla o conhecimento aprofundado do conteúdo matemático que o professor precisa ensinar, o qual é composto pelos procedimentos (que incluem “como fazer”, “quando fazer”, “porque se faz assim” e as “características do resultado”), definições, propriedades e seus fundamentos, além de aspectos relacionados à fenomenologia e à aplicação dos tópicos, assim como, suas diferentes formas de representação, combinando os conhecimentos que os alunos devem aprender com um conhecimento mais profundo e formal (CARRILLO, et al., 2018).

Figura 5- Knowledge of Structure Mathematics (KSM)

Table 2. Categories of knowledge of the structure of mathematics.
Connections based on simplification
Connections based on increased complexity
Auxiliary connections
Transverse connections

Fonte: Carrillo, et al. (2018, p. 9)

O KSM compreende o conhecimento dos professores em integrar/estabelecer distintas conexões entre conceitos matemáticos, considerando-se, conexões associadas a um aumento na complexidade ou baseadas em uma simplificação, num sequenciamento de conteúdos, conexões auxiliares que estão relacionadas à participação necessária de um item em processos maiores e conexões transversais que resultam de diferentes itens de conteúdo, mas que apresentam recursos em comum (CARRILLO, et al., 2018).

O conhecimento de práticas em matemática (KPM) está relacionado às formas de proceder na matemática, sobre saber explorar e gerar novos resultados. Esse conhecimento inclui conhecer, por exemplo, sobre como proceder na resolução de problemas matemáticos, assim como, conhecer diferentes tipos de prova para testar a validade de uma proposição e escolher a melhor delas para cada caso específico, conforme apontam os autores do modelo:

Here the focus is on the workings of mathematics rather than the process of teaching it. We define it as any mathematical activity carried out systematically, which represents a pillar of mathematical creation and which conforms to a logical basis from which rules can be extracted. Amongst many other things, the mathematics teacher's knowledge about this practice includes knowing about demonstrating, justifying, defining, making deductions and inductions, giving examples and understanding the role of counterexamples. It also includes an understanding of the logic [...] KPM includes knowledge about how mathematics is developed beyond any particular concept (e.g. knowing the meaning of necessary and sufficient conditions). It is the knowledge deployed in performing general mathematical tasks, for example, the type of proof for testing the truth-value of a proposition, along with knowledge of how such a demonstration can be applied, and the different characteristics of definitions (Mamona-Downs & Downs, 2016). [...] In like manner, the sub-domain also encompasses teachers' knowledge of heuristic aids to problem solving and of theory-building practices. [...] KPM is also about knowing how to explore and generate new knowledge in mathematics (CARRILLO et al., 2018, p. 9-10).

Os conhecimentos específicos do professor, para o ensino do conteúdo, os quais contemplam a base necessária para um ensino eficaz que se aproximam à prática em sala de aula, estão inseridos no domínio *Pedagogical Content Knowledge* – PCK, sendo que este está dividido em *Knowledge of Mathematics Teaching* – KMT, *Knowledge of Features of Learning Mathematics* – KFLM e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* – KMLS.

Figura 6 - Knowledge of Features of Learning Mathematics (KFLM)

Table 3. Categories of knowledge of features of learning mathematics.
Theories of mathematical learning
Strengths and weaknesses in learning mathematics
Ways pupils interact with mathematical content
Emotional aspects of learning mathematics

Fonte: Carrillo, et al. (2018, p. 12)

O subdomínio KFLM engloba o conhecimento relacionado as características inerentes à aprendizagem matemática, abrangendo as teorias de aprendizagem e focando no conteúdo como objeto desta refere-se, ainda, à necessidade de o professor estar ciente de como os alunos pensam e constroem seu conhecimento, ou seja, conhecer sobre as formas de interação do aluno com o conteúdo matemático e suas dificuldades, e seus pontos fortes na aprendizagem de matemática (CARRILLO et al., 2018).

Figura 7- Knowledge of Mathematics Teaching (KMT)

Table 4. Categories of knowledge of mathematics teaching.
Theories of mathematics teaching
Teaching resources (physical and digital)
Strategies, techniques, tasks and examples

Fonte: Carrillo, et al. (2018, p. 13)

O KMT, em geral, diz respeito ao conhecimento teórico específico para o ensino da matemática, além do conhecimento de recursos materiais e virtuais e de como esses são ou podem ser usados para aprimorar o ensino de itens específicos, incluindo o conhecimento sobre as estratégias e técnicas que podem ser utilizadas e as limitações envolvidas (CARRILLO et al., 2018).

Figura 8- Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS)

Table 5. Categories of knowledge of mathematics learning standards.
Expected learning outcomes
Expected level of conceptual or procedural development
Sequencing of topics

Fonte: Carrillo, et al. (2018, p. 13)

Já, o KMLS refere-se aos conhecimentos dos padrões de aprendizagem de matemática, ou seja, refere-se à importância do professor estar ciente das especificações do currículo em cada nível, conhecendo os conteúdos que devem ser ensinados e tendo clareza de quais tópicos deverá usar para desenvolver as capacidades inerentes a cada conteúdo, incluindo a combinação com temas que os alunos estudaram anteriormente e com temas posteriores, objetivando que o aluno alcance o nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado em cada nível (CARRILLO et al., 2018).

3. UMA DISCUSSÃO SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DESENVOLVIDA NO PROFMAT A PARTIR DO LIVRO-TEXTO “NÚMEROS E FUNÇÕES REAIS”

O livro “Números e Funções Reais” é composto por capa, sumário prefácio, corpo, bibliografia e índice remissivo. O corpo é estruturado em dez capítulos, os quais se intitulam nessa ordem: Conjuntos; Números Naturais; Números Cardinais; Números Reais; Funções Afins; Funções Quadráticas; Funções Polinomiais; Funções Exponenciais e Logarítmicas; Funções Trigonométricas e Soluções de Exercícios, sendo que esse último contempla a solução dos exercícios propostos nos demais capítulos.

Caldatto e Ribeiro (2019, p. 4) apontam que “essa estruturação apresenta oportunidades de desenvolvimento, pelos professores em formação, do MK, particularmente do KSM, já que favorece desenvolvimento (potencial) de conexões entre os conjuntos numéricos e funções que estabelecem relações entre subconjuntos de \mathbb{R} ”.

Dessa forma, tendo em vista as características dos conteúdos abordados em cada capítulo em relação ao objeto de estudo da disciplina Números e Funções Reais – funções, dividimos o livro em três partes para fins de análise, sendo cada uma delas compostas pelos seguintes capítulos:

Parte 1: Capítulo 1 – Conjuntos;

Parte 2: Capítulo 2 – Números Naturais, Capítulo 3 – Números Cardinais e Capítulo 4 – Números Reais;

Parte 3: Capítulo 5 – Funções Afins, Capítulo 6 – Funções Quadráticas, Capítulo 7 – Funções Polinomiais, Capítulo 8 – Funções Exponenciais e Logarítmicas e Capítulo 9 – Funções Trigonométricas.

Ou seja, a análise apresentada na sequência será realizada e apresentada considerando o supramencionado particionamento. Ressalta-se que, tal fragmentação da obra deu-se a partir na natureza dos capítulos conglomerados. Dessa forma, a parte 1 é integrada unicamente pelo capítulo 1, no qual o autor faz uma discussão da teoria de conjuntos, teoria (e linguagem) utilizada, comumente, pelos matemáticos em processos de prova e demonstração matemáticas. Já, a parte 2 é composta pelos capítulos 2, 3 e 4, nos quais são apresentados os conjuntos numéricos que são considerados como domínio e contradomínio das funções que são objeto de discussão na referida obra, além de definirem o que será considerado como “função”. A parte 3, composta pelos capítulos

5, 6, 7, 8 e 9, aborda a classificação das funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais.

3.1 ANÁLISE DA PARTE 1: USO DE NOTAÇÃO E LINGUAGEM MATEMÁTICA.

A primeira parte é composta pelo capítulo intitulado “Conjuntos”, o qual, segundo Lima (2014), é destinado ao estudo da linguagem de conjuntos, apresentando vantagens quando comparadas ao uso de propriedades e condições. Ainda, segundo o autor, a linguagem de conjuntos apresenta mais simplicidade e exatidão, devendo o professor, sempre que possível usá-la para ilustrar conceitos e evitar erros comuns de linguagem, os quais são destacados constantemente no capítulo.

Ao apontar erros no uso de notações o autor cita o uso do símbolo $\{\dots\}$ o qual “significa o conjunto cujos elementos estão descritos no interior das chaves”, mas que muitas vezes ao invés de descrever os elementos usa-se esse símbolo erroneamente para escrever a propriedade desses elementos como, por exemplo, $A = (\text{conjunto dos números pares})$. Ele também cita o conjunto vazio como “um conjunto excepcional e intrigante”, o qual pode ser representado pelo símbolo \emptyset e afirma que “qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio” (LIMA, 2014, p. 3).

Nota-se que o autor destaca aspectos relacionados ao uso da linguagem matemática e, em especial, a erros no uso dessa. Assim, essa abordagem poderia ser relacionada ao PCK, pois esses erros podem ser configurados na prática em sala na incompreensão do aluno em relação ao significado e utilização dos símbolos (KFLM), contudo, ao não evidenciar essa relação, o autor acaba por discutir esse uso apenas do ponto de vista matemático, permeando assim o subdomínio KPM.

Na sequência o autor apresenta a definição da relação de inclusão “Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A está *contido* em B ou que A é *parte* de B” (LIMA, 2014, p. 3), destacando novamente o uso de notações e seus respectivos significados, bem como algumas propriedades de inclusão de conjuntos, sejam elas as propriedades “reflexividade”, “antissimetria” e a propriedade da “transitividade”, afirmando

que as relações de inclusão estão estreitamente relacionadas com a implicação lógica e discorre sobre *silogismo, implicação e reciprocidade*.

Ao apresentar essas definições e propriedades, Lima contempla apenas o subdomínio *Kot*, visto que só discute aspectos relacionados ao conhecimento matemático desse tópico, caberia aqui estabelecer uma relação com o ensino e aprendizagem desses conteúdos na educação básica, que contemplasse teorias e formas de ensino (KMT), bem como, a interação do aluno com esse conteúdo, dificuldades de compreensão, dentre outros aspectos relacionados à aprendizagem (KFLM).

No seguimento do capítulo, Lima apresenta a definição de complementar de um conjunto da seguinte forma “Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se *complementar* de A ao conjunto A^c formado pelos objetos de U que não pertencem a A ”, sendo U um conjunto chamado o *universo do discurso*, ou *conjunto-universo*, do qual todos os elementos a serem considerados pertencerão a U .

Dispõe, também, sobre o princípio do terceiro excluído, o princípio da não-contradição e apresenta as regras operatórias relacionadas ao complementar de um conjunto e define as operações de reunião e interseção como:

Dados os conjuntos A e B , a *reunião* $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B , enquanto que a *interseção* $A \cap B$ é o conjunto dos objetos que são ao mesmo tempo elementos de A e de B , ou seja, $x \in A \cup B$ significa que " $x \in A$ ou $x \in B$ " ao passo que $x \in A \cap B$ significa que " $x \in A$ e $x \in B$ " (LIMA, 2014, p. 10).

Lima apresenta as propriedades das operações entre conjuntos: “comutatividade”, “associatividade” e “distributividade” de uma em relação a outra.

O autor segue apresentando definições, propriedades e demonstrações, sem estabelecer qualquer tipo de relação com o ensino desse conteúdo na educação básica, assim são feitas apenas abordagens relacionadas ao *Kot* e *KPM*, deixando de contemplar as demais categorias que também se referem, de acordo com o MTSK, a conhecimentos essenciais para a prática pedagógica do professor de matemática em sala de aula.

Em relação às noções de igualdade, o autor diz que algo só é igual a si próprio e que quando se escreve $a = b$, por exemplo, significa que a e b são símbolos diferentes que representam um mesmo objeto e, mostra exemplos de igualdades, chamando atenção para o uso inadequado de terminologias como, por exemplo, “os ângulos α e β são iguais”, quando deveria ser “os ângulos α

e β são congruentes”. Ele também destaca as propriedades de uma relação de igualdade (reflexividade, simetria e transitividade) e, por conseguinte, encerra o capítulo com uma seção composta por dezenove exercícios basicamente de demonstração de implicações e igualdades envolvendo conjuntos e suas propriedades.

Essa abordagem feita nessa primeira parte favorece o desenvolvimento e uso da linguagem matemática formal e dos símbolos que serão, posteriormente, utilizados no estudo axiomático das funções reais, numa tentativa de estabelecer linguagens e símbolos padrões, além disso, a ênfase no estudo de definições e propriedades nos leva a apontar indícios de que os conhecimentos matemáticos propagados nesse capítulo figuram particularmente os subdomínios KPM e Kot. Contudo, Caldatto e Ribeiro (2019), em análise desse mesmo objeto, destacam que:

[...] os indícios da presença do PCK são muito pequenos, uma vez que, por exemplo, o autor não discute em momento algum do textbook, “como” (KMT) e “em que momentos” da escolarização (KMLS) a linguagem dos conjuntos pode ser ensinada e que dificuldades os alunos da educação básica apresentam ao manipularem os elementos da teoria de conjuntos (KFLM) (CALDATTO, RIBEIRO, 2019, p. 4).

Apesar de fazer algumas recomendações que se aproximam do subdomínio KMT, pois são comentários relacionados à prática, esses são imprecisos, ressaltando “como não fazer”, mas não sendo específico quanto à “como fazer” (KMT) e quanto aos impactos que esses erros podem gerar, como no trecho exposto a seguir:

Portanto, se queremos iniciar os jovens em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e da notação dos conjuntos. Isto, inclusive, vai facilitar nosso próprio trabalho, pois a precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza das ideias. Mas, na sala de aula, há alguns cuidados a tomar. O principal deles refere-se ao comedimento, ao equilíbrio, à moderação. Isto consiste em evitar o pedantismo e os exageros que conduziram ao descrédito da onda de “Matemática Moderna”. Não convém insistir em questões do tipo $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$ ou mesmo naquele exemplo $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ dado acima.

Procure, sempre que possível, ilustrar seus conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática. Além de contribuir para implantar a linguagem de conjuntos, este procedimento pode também ajudar a lembrar, ou até mesmo aprender, fatos interessantes sobre Geometria, Aritmética, etc.

Fonte: Lima (2014, p. 13)

Assim, levando em consideração os objetivos do PROFMAT e o conhecimento especializado do professor preconizado pelo MTSK, há indícios da necessidade de uma reformulação em relação à abordagem para que não fique a critério do professor do programa da disciplina contemplar ou não um enfoque com aspectos pertinentes ao PCK.

3.2 ANÁLISE DA PARTE 2— CONSTRUÇÃO DO DOMÍNIO E CONTRADOMÍNIO DE FUNÇÕES REAIS.

A segunda parte, composta pelos capítulos “Números Naturais”, “Números Cardinais” e “Números Reais”, é destinada à construção do domínio, contradomínio e à definição de Funções. Os capítulos que a compõem voltam-se para o estudo e verificação de propriedades dos conjuntos numéricos, exibindo indícios potenciais do MK, favorecendo o desenvolvimento de conexões (KSM) entre os conjuntos numéricos com o conteúdo de funções, o qual é o objeto de estudo da referida disciplina, bem como de nossas análises.

Lima (2014, p. 20) inicia o capítulo “Números Naturais” afirmando que “números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza”. Ele também apresenta a definição que os “compêndios tradicionais” (LIMA, 2014, p. 20) trazem para o número, ou seja,

Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma *contagem* e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real (LIMA, 2014, p. 20).

Na sequência, Lima segue arguindo sobre a definição posta pelos “compêndios tradicionais” e afirma que, tendo em vista os rigores matemáticos, a definição posta por tais “compêndios” não pode ser considerada uma definição matemática, visto que faz uso de ideias cujo significado não foi estabelecido, porém ressalta que as palavras usadas revelam de modo mais fácil e acessivo qual o motivo pelo qual os números foram inventados e para que servem o que segundo o autor “é muito mais do que se pode dizer sobre a definição que encontramos no nosso dicionário mais conhecido e festejado” (LIMA, 2014, p. 20) que define número da seguinte forma: “Número.

Do Lat. *Numeru. S.m. 1. Mat.* O conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado” (LIMA, 2014, p. 20).

Ao apresentar essas definições para a palavra número Lima não deixa claro se elas são adequadas aos níveis previstos no processo de escolarização da educação básica (KMLS), como elas poderiam ser ensinadas (KMT) e como os alunos viriam a interagir com elas nos processos de aprendizagem (KFLM). Assim, Lima apenas as expõe e as compara (as definições) mediante a alguns aspectos puramente matemáticos relacionados ao MK, mais especificamente ao *Kot*, por se tratar de uma discussão vinculada somente à definição.

No seguimento, o autor discute diferenças entre termos matemáticos como definições, axiomas e teoremas, e inicia afirmando que “uma definição matemática é uma convenção que consiste em usar um nome ou uma sentença breve para designar um objeto ou uma propriedade, cuja descrição normalmente exigiria o emprego de uma sentença mais longa” (LIMA, 2014, p. 20). Ressalta também que as definições devem ser formuladas com uso de termos específicos, caso contrário só servirão para ilustrar um pensamento e não serão utilizáveis nos raciocínios matemáticos.

Lima afirma que não é conveniente expor a matemática sob a forma axiomática no ensino médio, contudo destaca que o professor precisa saber que ela pode ser organizada dessa forma e que “para poder empregar conceitos primitivos adequadamente é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades” (LIMA, 2014, p. 21), aos quais ele chama de axiomas ou postulados e afirma que axiomas são proposições que não se demonstram. Ele denomina de *teoremas* as proposições que precisam ser demonstradas e de *corolários* suas consequências imediatas. Já, as proposições usadas na demonstração de um teorema são chamadas de *lemas*.

Ao relacionar o método axiomático com sua exposição no ensino médio o autor está estabelecendo uma relação com um dos níveis de ensino de atuação dos professores que cursam o PROFMAT, contudo Caldato (2015, p. 272) aponta que “[...] Lima (2013) não elucidada, por exemplo, por que é necessário que o professor conheça essa forma de exposição da matemática e nem de que forma esse conhecimento auxiliará/favorecerá o trabalho do professor da educação básica em seu trabalho no ambiente escolar” (KMT).

O autor ressalta aspectos que podem ser associados ao PCK por se tratar de estratégias (KMT), contudo utiliza-se de exemplos aleatórios, afirmando que uma linha de equilíbrio a ser seguida na sala de aula deve basear-se nos preceitos descritos abaixo:

1. Nunca dar explicações falsas sob o pretexto de que os alunos ainda não têm maturidade para entender a verdade. (Isto seria como dizer a uma criança que os bebês são trazidos pela cegonha.) Exemplo: “infinito é um número muito grande”. Para outro exemplo, vide RPM 29, págs. 13-19.
2. Não insistir em detalhes formais para justificar afirmações que, além de verdadeiras, são intuitivamente óbvias e aceitas por todos sem discussão nem dúvidas. Exemplo: o segmento de reta que une um ponto interior a um ponto exterior de uma circunferência tem exatamente um ponto em comum com essa circunferência.
3. Ter sempre em mente que, embora a Matemática possa ser cultivada por si mesma, como um todo coerente, de elevado padrão intelectual, formado por conceitos e proposições de natureza abstrata, sua presença no currículo escolar não se deve apenas ao valor dos seus métodos para a formação mental dos jovens (LIMA, 2014, p. 22).

Lima argumenta que fatos importantes, como o Teorema de Pitágoras, devem ser demonstrados de várias formas diferentes e para ele “as demonstrações, quando objetivas e bem apresentadas, contribuem para desenvolver o raciocínio, o espírito crítico, a maturidade e ajudam a entender o encadeamento lógico das proposições matemáticas” (LIMA, 2014, p. 22). Entretanto, o autor, no decorrer de toda a obra, não discute a natureza das distintas demonstrações de um teorema matemático (Kot e KPM), como para o caso do Teorema de Pitágoras, nem “como” (KMT) e em “quais” momentos (KMLS) essas demonstrações podem/devem ser feitas na educação básica.

O autor destaca “a importância social da matemática” e ressalta aspectos históricos relacionados ao modelo de contagem que são hoje os números naturais, destacando que “a Matemática fornece modelos abstratos para serem utilizados em situações concretas do dia a dia e das Ciências. Para poder empregar esses modelos é necessário verificar, em cada caso, se as hipóteses que lhe servem de base são satisfeitas” (LIMA, 2014, p. 23).

Lima descreve o conjunto \mathbb{N} dos números naturais, valendo-se, segundo ele “da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar do século 20”, como sendo um conjunto, cujos elementos são chamados *números naturais* e que é caracterizado pelo uso da palavra sucessor, a qual ele afirma ser um termo primitivo já que não é definido explicitamente, mas intuitivamente da seguinte forma “quando $n, n' \in \mathbb{N}$, quer dizer que n' é o *sucessor* de n significa que n' vem logo depois de n , não havendo outros números naturais entre n e n' .” (LIMA, 2014, p. 23).

O autor ressalta os axiomas de Peano e diz que “tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas”, os quais seguem:

- a) Todo número natural tem um único sucessor;
- b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$ (LIMA, 2014, p. 23).

Ele aponta que o sistema de numeração decimal, ao qual ele considera “um engenhoso processo”, permite que todos os números naturais sejam expressos com o uso dos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e os primeiros números naturais têm nome, sendo preferível usar a representação decimal para números muito grandes.

O autor afirma ainda que “o conjunto $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significado” e possuem um lugar determinado nesta sequência, sendo que “todo número tem um sucessor (único) e, com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual ele é sucessor)” e que “visto desta maneira, podemos dizer que os números naturais são *números ordinais*: 1 é o primeiro, 2 é o segundo, etc.” (LIMA, 2014, p. 24).

Esses aspectos, propriedades e definições apresentados por Lima (2014), podem ser vinculadas ao MK, ao passo que aparentemente visam apenas conhecer e discutir o conjunto dos números naturais, sua definição (*Kot*) e seus aspectos históricos (KPM), já que não fica evidente “se” e “como” os axiomas de Peano poderiam ser abordados na educação básica e como proceder na prática do ensino sobre esse conjunto numérico (KMT), nem mesmo em quais níveis de ensino esse conteúdo se configura nos currículos escolares (KMLS).

Lima dá um destaque especial ao último axioma de Peano, o qual é conhecido como *Axioma de Indução*¹¹ e é, segundo o autor, base de um método de demonstração de propriedades referentes a números naturais. Lima (2014, p. 25) considera que “o axioma de indução é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número”.

¹¹ Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que (i) $P(1)$ é válida; (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n . Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n (LIMA, 2014, p.25).

O autor define as operações “fundamentais” entre números naturais “a *adição*, que aos números $n, p \in X$ faz corresponder a soma $n + p$ e a *multiplicação*, que lhes associa o *produto* np ” e reformula escrevendo que “a soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor de n ”, designando o sucessor de n por $n + 1$ e, “quanto ao produto, põe-se $n \cdot 1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1$, np é a soma de p parcelas iguais a n ” (LIMA, 2014, p. 25). Contudo, argumenta que “até que saibamos utilizar os números naturais para efetuar contagens, não tem sentido falar em “ p vezes” e “ p parcelas”. Por isso, as operações fundamentais devem ser definidas por indução” (LIMA, 2014, p.25) e assim o fez para as operações de adição e multiplicação e para a relação de ordem, sendo que referente a essa última. O autor também citou as propriedades da transitividade, tricotomia, monotonicidade e boa-ordenação.

Apesar desse enfoque dado ao axioma e as demonstrações por indução, essa prática não está vinculada à prática do professor de Matemática em sala de aula na educação básica, o autor poderia ter não só demonstrado propriedades operatórias entre os números naturais (KPM), mas discutido como elas são abordadas nos currículos escolares e o que se espera que o aluno aprenda em cada nível escolar (KMLS), visto que os números naturais, juntamente com as operações básicas são objeto de estudo em praticamente todos os níveis de ensino da educação básica. Lima também poderia ter abordado quais são as dificuldades que os alunos têm de compreendê-las e aplicá-las (KFLM), além de discutir possíveis estratégias de ensino e formatos de exercícios a ser utilizados pelos professores para solucionar esses problemas (KMT), além disso Caldato e Ribeiro (2019) apontam outros aspectos que deixam de ser contemplados na abordagem feita no livro-texto,

[...]o autor faz uma construção dos números naturais de apenas duas de suas operações (adição e multiplicação), omitindo a definição das operações de subtração e divisão entre números naturais (Kot), sendo que elas também são objeto de trabalho do professor na escola. O autor também não vincula as definições de adição e multiplicação (e consequentemente de subtração e divisão) aos algoritmos comumente veiculados pelos materiais escolares (KMLS) e utilizados no cálculo dessas operações (Kot) (CALDATTO; RIBEIRO; 2019, p. 6).

Diante dessas análises fica evidente a predominância de uma abordagem que privilegia aspectos referentes ao MK sobre o PCK, visto que mesmo diante da aproximação entre o conteúdo abordado e os conteúdos matemáticos da educação básica o autor deixa de voltar sua atenção para

essa prática, sendo que esse transcende da matemática “universitária” para a matemática escolar, justamente o que seria papel do PROFMAT diante dos objetivos a que este se propõe.

Novamente, na seção seguinte, o autor se destina a demonstrar alguns resultados que considera como “básicos” sobre os números naturais: “associatividade da adição”, “comutatividade da adição”, “distributividade”, “comutatividade da multiplicação”, “lei do corte para a adição”, “transitividade da relação de ordem”, “tricotomia”, “monotonicidade”, “lei do corte para desigualdades” e “princípio da boa ordenação”.

Apesar de serem demonstradas, não fica evidente em nenhum momento “quando” (KMLS) e “como” (KMT) tais propriedades e as demonstrações apresentadas na obra podem ser trabalhadas na educação básica, nem mesmo o “porquê” (*Kot*) de ter adotado aquelas demonstrações, o próprio autor afirma que o “objetivo é mostrar de que modo tais fatos resultam dos axiomas de Peano. Não há raciocínios criativos ou métodos elaborados para prová-los. Em todas as demonstrações, o papel central é desempenhado pelo Axioma de Indução” (LIMA, 2014, p.27), ou seja, fica evidente que ao abordar as propriedades das operações com números naturais, o autor deixa de priorizar o papel e a importância das mesmas no processo de ensino e de aprendizagem, deixando de discutir, por exemplo, se essas demonstrações são apropriadas ou se precisam ser ajustadas para o trabalho em sala de aula na educação básica (PCK) e prioriza apenas os procedimentos e a prática matemática (*Kot/KPM*), sem vincular tais procedimentos e prática matemática diretamente ao ensino da matemática nos diferentes níveis educacionais.

Sendo assim, podemos inferir que no segundo capítulo há predomínio de definições e propriedades (*Kot*), bem como de demonstrações, formas de validação e uso da linguagem e símbolos matemáticos (*KPM*) além de outros aspectos relacionados ao MK conforme evidenciamos no decorrer da análise do capítulo. Para efeitos de exemplificação, vejamos a abordagem feita por Lima para a propriedade “Distributividade”:

Distributividade: Para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

Demonstração: Fixando arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$ provaremos, por indução em p , que a igualdade alegada vale para todo $p \in \mathbb{N}$. Em primeiro lugar, ela é verdadeira se $p = 1$, pela definição de multiplicação. Supondo-a válida para um certo p , podemos escrever

$$\begin{aligned} m \cdot [n + (p + 1)] &=^1 m \cdot [(n + p) + 1] =^2 m \cdot (n + p) + m \\ &=^3 (m \cdot n + m \cdot p) + m =^4 m \cdot n + (m \cdot p + m) \\ &=^5 m \cdot n + m(p + 1), \end{aligned}$$

Onde a igualdade 1 provém da definição de adição, 2 e 5 da definição de multiplicação, 3 da hipótese de indução e 4 da associatividade da adição.

Fonte: Lima (2014, p. 28).

Nota-se que a demonstração acima refere-se a uma propriedade muito utilizada na disciplina de matemática na educação básica, contudo o autor só realiza essa demonstração do ponto de vista matemático (MK), sem voltar sua abordagem para o conhecimento pedagógico (PCK), já que não discute em nenhum momento quais as dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão dessa propriedade (KFLM), como o professor pode proceder ao ensiná-la, se é coerente realizar essa demonstração em sala (KMT) e em quais anos deve-se trabalhá-la (KMLS), sendo que conforme nos apontam Ribeiro e Cury (2015, p.77) muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos da educação básica são frutos da incompreensão de regras “básicas” da matemática, como a distributividade. Eles afirmam que, “uma dificuldade em resolução de equações está ligada ao uso incorreto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição” e nesse sentido, visando contemplar as necessidades da educação básica, esperar-se-ia que a abordagem feita por Lima (2014) priorizasse as necessidades e demandas advindas da sala de aula.

Por fim, Lima encerra o capítulo com uma seção composta por nove exercícios de demonstração por indução, ratificando a prioridade para provas e demonstrações matemáticas que já são estudadas nos cursos de graduação em matemática.

No terceiro capítulo titulado “Números Cardinais” é que o autor inicia a discussão do *conceito* de função e os elementos que a compõem:

Dados os conjuntos X, Y , uma *função* $f: X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um

elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “y igual a f de x”). O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f , ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$ (LIMA, 2014, p. 36).

Lima, além de apresentar a definição, tece alguns comentários sobre linguagem e terminologias matemáticas ressaltando que “uma função conta com três ingredientes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência” e exhibe alguns exemplos do conceito de funções aplicados a outros conteúdos da matemática, mas não os explora a fim de dar sentido aos mesmos, apenas usa-se deles para definir “injetividade” e “sobrejetividade” (LIMA, 2014, p. 37). Aqui, salientamos a oportunidade que Lima poderia ter usado para discutir aspectos gráficos, visto que esses são comumente utilizados nos livros didáticos da educação básica para exemplificar funções injetivas e sobrejetivas.

O autor também define “imagem” de uma função, mas não aprofunda essa abordagem, sendo que compreender o significado da imagem de uma função num ponto é uma das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de funções (KFLM), conforme apontam Ribeiro e Cury (2015) e assim a discussão e apontamentos de como o professor poderia ensinar esse conteúdo a fim de auxiliar os discentes a superar essas dificuldades (KMT) é primordial, mas, apesar disso, foi deixada de lado. Dessa forma, essa apresentação inicial foca predominantemente na abordagem de conteúdos matemáticos (MK) que podem ser associados ao *Kot*, visto que Lima apresenta definições e propriedades e também é possível associá-la ao KPM, uma vez que o autor tece comentários sobre linguagem e terminologias matemáticas.

Na seção seguinte o autor define “bijeção” ou uma “correspondência biunívoca” e apresenta exemplos que permeiam somente o domínio KPM, visto que mostram práticas particulares, contudo ele não discute a possibilidade de exposição desses na educação básica ou então a necessidade de adaptação para esse fim, sendo essas discussões inerentes a aspectos do KMT os quais são essenciais no processo de ensino. Lima define que “dois conjuntos X e Y tem o mesmo *número cardinal* quando se pode definir uma correspondência biunívoca $f: X \rightarrow Y$ ”, mas não apresenta exemplos específicos para esse fim (LIMA, 2014, p. 40).

As duas últimas seções desse capítulo abordam “conjuntos finitos” e “conjuntos infinitos”. Lima (2014) inicia indicando que dado $n \in \mathbb{N}$ a notação I_n representará o conjunto dos números naturais de 1 até n e partindo disso apresenta as definições “Seja X um conjunto. Diz-se que X é *finito*, e que X tem n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca

$f: I_n \rightarrow X$ ”, n será o número cardinal de X ou número de elementos de X e o conjunto vazio também será considerado um conjunto finito, além disso “diz-se que um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito. Isto quer dizer que X não é vazio e que, não importa qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow X$ ” (LIMA, 2014, p.41).

O autor apresenta quatro propriedades, consideradas por eles como “básicas”, sobre o número cardinal de um conjunto finito X e afirma que as mesmas podem ser demonstradas usando-se indução ou boa-ordenação, ele destaca uma das propriedades que é conhecida como “princípio das casas de pombos” e/ou “princípio das gavetas”. Sobre conjuntos infinitos, o autor destaca a contribuição de Cantor ao descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades e põe fim ao capítulo com uma seção composta por onze exercícios, sendo todos de demonstração, sendo três deles para usar e/ou analisar a prova pelo método de indução.

O problema, assim como nos capítulos anteriores é a não vinculação do MK, por meio das definições, propriedades e exemplos apresentados (Kot/KPM) com a prática do professor ao ensinar matemática (PCK) e, conforme nos aponta Clement (2001), embora o conceito de função seja tema central de estudo em matemática no ensino médio, pesquisas mostram que também é um dos que os alunos mais têm dificuldade de aprender, dessa forma o autor poderia ter apresentado, por exemplo, alternativas para o ensino do conceito de funções (KMT) a fim de ajudar os alunos a superar tais dificuldades (KFLM).

No capítulo “Números Reais” o autor define e caracteriza Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis. Lima apresenta alguns fatos históricos e diz que por muito tempo acreditou-se que quaisquer dois segmentos sempre seriam comensuráveis, crença que durou até o quarto século antes de Cristo, quando entre os discípulos de Pitágoras observaram que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. A solução que se impunha, e que foi finalmente adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais*, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica. Quando o segmento considerado é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número *racional* (inteiro ou fracionário). Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade (LIMA, 2014, p. 49).

O autor ressalta ainda que muitas vezes a palavra incomensurável é usada de forma equivocada/errada para se referir a quantidades muito grandes, quando deveria usar termos como “incontável”, “enorme”.

A abordagem feita por Lima, conforme descrita acima, associou-se ao MTSK unicamente pelas categorias “Definições, propriedades e seus fundamentos” (Kot) e “papel dos símbolos e da linguagem formal” (KPM), visto que o enfoque foi dado na definição de número irracional e incomensurabilidade e no uso deste termo, ou seja, na linguagem, o autor deixa de apontar, por exemplo, a presença desse conteúdo nos currículos escolares (KMLS) como uma habilidade que se espera do aluno, a de “reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade)” (BRASIL, 2017, p. 317).

Na seção “A Reta Real”, tomando dois pontos O e A sobre uma reta, o autor define *origem* como sendo o ponto O e reta OA como *reta real* ou *eixo real*, a partir disso ele define também as semirretas positiva e negativa, sendo semirreta positiva a que contém A e está à direita de O e, semirreta negativa a que está à esquerda de O.

Lima discorre sobre a disposição dos números racionais e irracionais na reta real e ao situar números irracionais na reta o autor vai ao encontro com o objetivo de conhecimento “números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica” e a habilidade de “reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica” que estão presentes na BNCC (BRASIL, 2017, p. 316-317). Contudo, o autor não evidencia em que momentos (anos) esse conteúdo está descrito nos currículos escolares, fato que poderia ser associado ao KMLS, e também não aponta se essa explicação dada por ele seria acessível/compreensível aos estudantes da educação básica (a quais estudantes, pertencentes a quais níveis escolares), ou quais adaptações seriam necessárias pelo professor (KMT) a fim de que os pudessem desenvolver a habilidade esperada.

O autor prossegue e define o conjunto dos números inteiros como sendo uma reunião entre números naturais, zero e o conjunto dos números negativos ($\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$), define também números racionais, fazendo a sua construção e os reais como sendo o conjunto cujos elementos são os números racionais e os números irracionais. Ele também apresenta a relação de continência entre

os conjuntos referidos conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ressaltando a notação utilizada para denominar o conjunto e o significado de cada uma delas. Lima (2014, p. 51) afirma ainda que: “o conjunto \mathbb{R} pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de \mathbb{R} ”.

O autor apresenta o produto de números reais geometricamente, contudo salienta que a visão geométrica precisa ser complementada pela descrição algébrica, a qual requer, segundo ele, uma lista de propriedades do conjunto dos números reais, afirmando que a descrição mais simples é que \mathbb{R} é um *corpo ordenado completo* e orienta que “o leitor interessado pode consultar o livro *Análise Real*, vol. 1, capítulo 2” e discorre que \mathbb{R} é um corpo no qual estão definidas as quatro operações, havendo uma relação de ordem e é completo (LIMA, 2014, p. 52).

A abordagem feita por Lima em relação a \mathbb{R} ser um corpo, apesar de importante, não é aplicável na prática do professor, visto que esse não é objeto de trabalho na educação básica, como ele mesmo aponta e, nesse sentido, se associa ao MTSK por meio do *Kot* na categoria “definições, propriedades e seus fundamentos”.

A construção do conjunto dos números reais da forma que foi feita pelo autor favorece a compreensão da relação de continência existente entre os conjuntos numéricos e além disso a associação entre a reta real e os números reais são trabalhos que podem ser desenvolvidos com os alunos da educação básica e mais que isso “[...] esta construção, além da articulação entre os diferentes conceitos e a sua seriação em classe, levaria o aluno a uma maior facilidade em construir a ideia de continuidade dos números reais”, (MEDEIROS, 2010, p. 17), desta forma, podemos apontar a oportunidade de uma discussão pelo autor dos aspectos relacionados ao PCK.

Contudo, conforme nos aponta Caldatto (2015) a abordagem realizada por Lima foi superficial e limitada em termos de ensino na educação básica, tendo em vista a complexidade do ensino dos números inteiros, racionais e irracionais. O autor não discute, por exemplo, as operações envolvendo números inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão) e nem os porquês das regras para “jogo de sinais” que são de primordial conhecimento para os professores da educação básica, visto que estão vinculados às operações com números inteiros que são conteúdos primordiais desse nível de ensino (CALDATTO, 2015).

Lima destina uma seção a “Expressões Decimais” na qual define o que entende-se por expressão decimal, afirmando ser a forma mais eficiente de se representar números reais, como sendo um símbolo da forma $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, onde $0 \leq a_n \leq 9$.

O autor ressalta situações particulares como o caso em que a partir de certo ponto todos os dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem, nesse caso α é racional e o chamamos de dízima periódica simples e destaca também que existem as dízimas periódicas compostas, aquelas, que após a vírgula, têm uma parte que não se repete seguida de uma parte com repetição.

Lima aponta como representar essas dízimas em sua forma fracionária, explanando que a geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período” e nos casos de dízimas compostas a geratriz será “a fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos e tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica” as quais também são racionais (LIMA, 2014, p. 56-57).

Essa abordagem referente às expressões decimais é uma das que mais se aproximam da educação básica, permeando assim os domínios MK e PCK do modelo MTSK, visto que apresenta as definições e procedimentos (*Kot*), aproximando o tema, mais especificamente, do ensino fundamental, sendo que, em praticamente todos os anos finais desse nível de ensino esse conteúdo deve estar presente, conforme nos aponta a análise dos currículos (KMLS) que preveem que os alunos dever ser capazes de compreender e representar números racionais nas formas decimal e fracionária, além de estabelecer relações entre essas representações (BRASIL, 2017).

Essa proximidade com a abordagem feita para expressões decimais e dízimas periódicas na educação básica é reiterada com a análise de Caldato, o qual aponta que,

[...] no que concerne à abordagem dada por Lima (2013) ao tema “expressões decimais”, entendemos que ela apresenta discussões pertinentes à prática do professor de Matemática da educação básica, especialmente em relação ao processo de determinação da fração geratriz de uma dízima periódica e da diferenciação de expressões decimais que representam números racionais e de expressões que representam números irracionais (CALDATTO, 2015, p. 327).

Na seção, “Uma descoberta de George Cantor”, Lima enfoca em conhecimentos pertinentes ao KPM, mais especificamente na categoria “formas de validação e demonstração” visto que ele ressalta resultados matemáticos demonstrados afirmando que “Cantor foi a primeira pessoa a provar que existem diferentes números cardinais infinitos”, ele mostrou que “dada qualquer função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, é sempre possível achar um número real y que não pertence à imagem $f(\mathbb{N})$, isto é, tal

que $f(n) \neq y$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$ ” haja vista que apesar do conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais serem ambos infinitos, não há uma função sobrejetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e complementa que “a cardinalidade de \mathbb{N} é estritamente menor do que a de \mathbb{R} ” (LIMA, 2014, p. 58-59).

Na seção seguinte, intitulada “Desigualdades” o autor destaca as propriedades existentes numa relação de desigualdade entre números reais e afirma que “todas as propriedades das desigualdades derivam de duas afirmações simples e óbvias” e as expõe: “P1) Dado o número real x , há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou x é positivo, ou $x = 0$ ou x é negativo” e “P2) A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos” (LIMA, 2014, p. 59).

Partindo dessas propriedades, Lima demonstra as propriedades “Tricotomia”, “Transitividade”, “Monotonicidade da adição” e “Monotonicidade da multiplicação” e outros três resultados: “todo quadrado, exceto 0, é positivo”, “quanto maior um número positivo, menor será seu inverso”, “quando se multiplicam dois membros de uma desigualdade por um número negativo, o sentido dessa desigualdade se inverte” (LIMA, 2014, p. 61). Ele também expõe as interpretações geométrica, numérica e algébrica de uma desigualdade.

Note que, novamente, ao abordar propriedades o autor permeia os subdomínios *Kot* e *KPM*, visto que se atém às demonstrações das mesmas e não às suas aplicações, ele não discute sobre as dificuldades de manipulação e compreensão dessas propriedades na educação básica (*KFLM*), tampouco aborda possibilidades de ensino (*KMT*) e em quais níveis o conteúdo de desigualdades é trabalhado conforme o previsto nos currículos escolares (*KMLS*).

Lima inicia a seção “Intervalos” definindo os possíveis intervalos determinados a partir de dois números reais, os quais são chamados de subconjuntos de \mathbb{R} . Distingue intervalos *limitados* de *ilimitados* e intervalo *fechado* de intervalo *aberto*, além de caracterizar *intervalo degenerado*.

Ele também ressalta aspectos relacionados à notação usada para representar intervalos abertos e fechados e também chama a atenção para o uso dos símbolos $-\infty$ e $+\infty$ enfatizando que, não se tratam de números reais e destaca o seguinte resultado como sendo um dos fatos mais relevantes em relação a intervalos: “todo intervalo *não-degenerado* contém números racionais e irracionais” (LIMA, 2014, p. 62).

Essa seção, apresentada em uma página, associa-se ao *MTSK* exclusivamente por meio do domínio *MK*, por ser destinada a apresentação de definições e propriedades (*Kot*) assim como ao uso de símbolos e uso da linguagem formal (*KPM*). Sendo que, o autor em nenhum momento

inclinou-se a discutir aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de intervalos na educação básica (PCK).

Na sequência, Lima apresenta uma breve seção voltada a definição e a notação de *valor absoluto* (ou *módulo*) de um número real, indicando o livro “Análise Real” para estudo das propriedades e ressaltando que: “a interpretação do valor absoluto $|x - y|$ como a distância, no eixo real, entre os pontos de coordenadas x e y , permite que se possa enxergar intuitivamente o significado e a resposta de algumas questões envolvendo módulos” (LIMA, 2014, p. 64). Além disso, ele expõe e demonstra o que considera como sendo as propriedades mais “úteis” sobre valor absoluto, sejam elas (1) $|x + y| \leq |x| + |y|$ e (2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Assim como na seção anterior, observa-se o predomínio de definições, demonstrações de propriedades e estabelecimento de notações padrões com clara predominância do MK, mais especificamente dos subdomínios *Kot* e KPM, além de uma explícita ausência de discussões que aproximem esses temas dos processos de ensino e aprendizagem (KMT e KFLM) e nem dos diferentes níveis instrucionais da educação básica (KMLS). Ou seja, o autor não desenvolve discussões que podem ser associadas ao domínio PCK do MTSK.

Na seção “Sequências e Progressões” o autor define sequência como sendo uma função que associa a cada número natural um número real e aponta a notação utilizada para representar sequências. Lima também aponta que progressões são exemplos de sequências e caracteriza e denomina progressões aritméticas e progressões geométricas além de definir e caracterizar brevemente sequências monótonas na seção seguinte, apresentando um exemplo e um teorema.

Nesse momento o autor não estabelece nenhum tipo de relação entre progressões e funções, nota-se apenas um intuito de definir cada um desses conceitos, suas propriedades e seus fundamentos, categorias essas associadas ao *Kot*.

A última seção é composta por doze exercícios envolvendo análises de desigualdades, resolução de equações modulares, classificação de um número como racional ou irracional e demonstrações, sendo que “[...] pelo menos metade dos exercícios apresentados (o primeiro, o segundo, o quinto, o oitavo, o nono e o décimo primeiro) podem ser relacionados estreitamente à prática do professor de Matemática na escola” (CALDATTO, 2015, p. 338).

Conforme afirmamos anteriormente, algumas seções desse capítulo apresentam indícios de proximidade com a prática do professor em sala de aula (PCK), principalmente em relação aos conteúdos pertinentes ao ensino fundamental, visto que nele a abordagem feita por Lima para

expressões decimais e dízimas periódicas estabelece uma estreita relação com a forma que geralmente é trabalhada pelos professores e exposta nos livros didáticos da educação básica, contudo ainda prevalecem o enfoque aos procedimentos e definições (*Kot*) bem como formas de validação e demonstração e estabelecimento de símbolos e linguagem formal (*KPM*).

Finalmente, arguimos que a segunda parte, composta pelos capítulos “Números Naturais”, “Números Cardinais” e “Números Reais”, destinada à construção do domínio, contradomínio e à definição de Funções, volta-se para o estudo e verificação de propriedades dos conjuntos numéricos, exibindo indícios potenciais do MK, favorecendo o desenvolvimento de conexões (*KSM*) entre os conjuntos numéricos com o conteúdo de funções o qual é o objeto de estudo da referida disciplina, bem como de nossas análises.

Contudo, de modo geral, nos dois primeiros capítulos que a compõem, as descrições e propriedades, da forma que foram abordadas, podem ser associadas ao MTSK por meio do *Kot* e *KMT*, visto que, apesar de tratarem de conteúdos e propriedades que compõem o currículo da educação básica, a abordagem feita por Lima volta-se, exclusivamente, à apresentação dos fundamentos associadas às práticas, definições, teoremas e propriedades matemáticas. Já no terceiro capítulo que compõe essa parte das análises, o autor aproxima seu enfoque do trabalho do professor de Matemática na educação básica (*PCK*), mesmo assim, deixa de contemplar estratégias para o ensino desses conteúdos (*KMT*) e não aborda, por exemplo, quais são as dificuldades e facilidades dos alunos na aprendizagem dos conteúdos expostos (*KFLM*), prevalecendo ainda o predomínio de aspectos relacionados ao MK.

3.3 ANÁLISE DA PARTE 3 – OS TIPOS DE FUNÇÕES.

Na terceira e última parte, composta pelos capítulos intitulados “Funções Afins”, “Funções Quadráticas”, “Funções Polinomiais”, “Funções Exponenciais e Logarítmicas” e “Funções Trigonométricas”, o autor tipifica as funções, cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de \mathbb{R} , de acordo com características particulares de cada uma delas, definindo-as e expondo propriedades operacionais, de crescimento, tipos de gráficos e aplicações dos conceitos. Assim como nas partes anteriores nota-se que há um predomínio do fomento ao desenvolvimento de um processo formativo, pelos professores de matemática em formação, de aspectos relacionados ao MK, conforme será evidenciado nas análises a seguir.

Na sequência dos capítulos, o autor define cada uma das funções ressaltando o domínio e contradomínio de cada uma delas, sua caracterização, estrutura e característica dos gráficos, conforme apresentaremos.

3.3.1 Capítulo 5 - “Funções Afins”

Esse capítulo do livro será analisado mais detalhadamente no capítulo quatro dessa pesquisa, o qual é destinado exclusivamente à “Funções Afins”.

3.3.2 Capítulo 6 – “Funções Quadráticas”

O sexto capítulo, “Funções Quadráticas”, inicia com a definição de uma função quadrática na qual o autor estabelece uma relação biunívoca entre trinômio e função quadrática afirmando que a cada trinômio do segundo grau corresponde uma função quadrática e demonstrando que “se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x ” (LIMA, 2014, p. 105).

Podemos identificar nessa análise inicial do sexto capítulo a predominância da categoria “definições, propriedades e fundamentos” a qual é contemplada pelo *Kot*, visto que a seção, como o próprio título induz (“definição e preliminares”) se destina à definição de uma função quadrática, cada um de seus elementos e suas principais características. Além disso, pode-se observar ainda no subdomínio KPM a categoria “formas de validação e demonstração”, haja vista a demonstração de propriedades pertinentes ao tipo de função abordado.

A seção intitulada “Um Problema Muito Antigo” pode ser associada ao KPM, visto que o autor ressalta aspectos históricos e práticas particulares da matemática ao comentar que, o estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau e comenta ainda sobre a regra descrita pelos babilônios para achar dois números conhecendo sua soma e seu produto, afirmando que em termos geométricos isso se reduz a achar os lados de um retângulo conhecidos seu semiperímetro s e a área p , números esses que se resumem as raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$ (LIMA, 2014)

Na seção “A Forma Canônica do Trinômio”, Lima segue desenvolvendo a forma canônica do trinômio, a qual conduz imediatamente à fórmula que dá as raízes da equação do segundo grau.

Explica o que acontece quando o discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) é positivo (duas raízes reais distintas), negativo (não possui solução real) e quando é zero (possui única raiz – raiz dupla), comenta ainda sobre quando uma função quadrática assume valor mínimo ou valor máximo e como se calcula esse valor.

A associação entre equações como elemento auxiliar no cálculo das raízes de uma função apresentada por Lima (2014) é caracterizada por Carrillo et al. (2018) como um tipo de conexão – “conexões auxiliares” (KSM).

O estudo sobre valores máximos ou mínimos de uma função quadrática é feito de forma breve sem contemplar exemplos de aplicações o que podemos apontar como uma falta importante, visto que esses conteúdos estão presentes nos currículos da educação básica e a abordagem realizada pelo autor não orienta o professor sobre como (KMT) ensinar tais conceitos, além de não dar suporte para um ensino que atenda as expectativas e nível de desenvolvimento esperado do aluno (KMLS) pela BNCC¹² que aponta que o ensino desse conteúdo deve visar o desenvolvimento das habilidades de “investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017).

Na seção seguinte, o autor apresenta características do gráfico de uma função quadrática, o qual é uma parábola e apresenta dois exemplos de gráficos desse tipo de funções, sendo dadas sua lei de formação, classificando e identificando cada um dos elementos do gráfico. Ressalta que o gráfico de uma função quadrática é um elemento de grande importância para entender o comportamento dessa função, mas não é específico quanto a isso.

Lima (2014, p. 119) verifica na sequência quais são as condições para que duas parábolas sejam congruentes, “os coeficientes b, b' e c, c' não importam eles apenas determinam a posição da parábola em relação aos eixos: c é a ordenada do ponto em que a parábola corta o eixo vertical, enquanto b é a inclinação da tangente nesse mesmo ponto”. O que importa são os coeficientes a e a' , sendo que a congruência só ocorrerá quando $a' = \mp a$.

Na seção seguinte intitulada “Uma propriedade Notável da Parábola”, o autor tece comentários históricos e curiosidades sobre superfícies parabólicas, afirmando que “se girarmos

¹² A Base Nacional Comum Curricular é o atual documento norteador da educação básica brasileira, o qual foi concluído no ano de 2017 e, portanto, é mais recente que a publicação do livro. Assim, tendo em vista que o PROFMAT é um programa de formação de professores da educação básica evidencia-se a necessidade de uma readequação do livro-texto, de modo a contemplar as mudanças curriculares.

uma parábola em torno de seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada *paraboloide de revolução*” (LIMA, 2014, p. 121). Destacam-se aspectos históricos sobre superfícies parabólicas. Define-se tangente a uma parábola “a *tangente* de uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta” (LIMA, 2014, p. 122).

As seções “O gráfico de uma Função Quadrática” e “Uma propriedade notável da Parábola” são destinadas a “registros de representação”, bem como as “definições, propriedades e fundamentos” de uma parábola e seus elementos, que podem ser associadas ao MTSK por meio do subdomínio *Kot* e demonstrações de algumas dessas propriedades, as quais se associam ao KPM.

Na sequência, Lima destina uma seção ao estudo do Movimento Uniformemente Variado - MUV, a qual traz uma aplicação do uso das funções quadráticas, estabelecendo uma conexão com um conteúdo da física, afirmando que a função quadrática é o modelo matemático que descreve o MUV, onde os coeficientes a , b e c representam respectivamente a aceleração, a velocidade inicial e a posição inicial e afirma que o conhecimento sobre esse tipo de função permite obter uma descrição completa do movimento uniformemente variado. Esse tipo de conexão com conteúdo de outras disciplinas é caracterizado como “fenomenologia e aplicações”, categoria essa pertencente ao *Kot*.

O capítulo encerra-se com trinta e oito exercícios de aplicação de definições e propriedades sobre gráficos de funções quadráticas, cálculo de raízes e de valores de máximo; e mínimo dada uma função e um intervalo; e aplicação no estudo de movimentos além de alguns exercícios contextualizados.

De modo geral, conforme pode ser observado nas descrições desse capítulo é possível identificar a presença de algumas das categorias do MTSK na abordagem feita por Lima, as quais são contempladas predominantemente pelo domínio MK, mais especificamente pelos subdomínios *Kot* e pelo KPM

3.3.3 Capítulo 7 – “Funções Polinomiais”

No sétimo capítulo o autor inicia definindo uma função polinomial da seguinte forma “diz-se que $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando são dados números reais a_0, a_1, \dots, a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ [...]. Se $a_n \neq 0$, dizemos que

p tem grau n ” e apresentando duas principais características de operações com essas funções: “soma e produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais” e “uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n raízes” (LIMA, 2014, p. 138).

Ele também destaca a diferença entre os conceitos de função polinomial e polinômio, apresentando o conceito de polinômio: “um *polinômio* é uma expressão formal do tipo $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, onde (a_0, a_1, \dots, a_n) é uma lista ordenada de números reais X é um símbolo (chamado uma *indeterminada*), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \dots X$ (i fatores)” (LIMA, 2014, p. 139). O autor discorre que, “dados $n+1$ números reais distintos x_0, x_1, \dots, x_n e fixados arbitrariamente os valores y_0, y_1, \dots, y_n , existe um, e somente um, polinômio p , de grau menor do que ou igual a n , tal que $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$ ” (LIMA, 2014, p. 140).

Na seção seguinte, o autor destaca algumas informações necessárias para se traçar o gráfico de um polinômio: paridade do grau do polinômio, comparação entre dois polinômios, localização das raízes. Ele aponta em método que considera “grandemente eficiente” para obtenção das raízes, o método de Newton, que usa derivada de polinômios. Lima apresenta e discute um exemplo de aplicação desse método para calcular as raízes de um polinômio de grau cinco, contudo em nenhum momento o autor evidencia em quais níveis de ensino esse e outros exemplos que utilizam o método de Newton são aplicáveis (KMLS).

O capítulo é encerrado com uma seção composta por nove exercícios de demonstrações de propriedades do tipo “prove que”, “mostre que”, sendo que em um deles define-se divisão de polinômios e seus elementos (quociente e resto) e em outro, raiz de multiplicidade.

A abordagem realizada nesse capítulo apresenta pouca ou nenhuma proximidade com o enfoque dado na educação básica no estudo de polinômios e funções polinomiais, pois espera-se que o aluno consiga construir modelos para resolver problemas em contextos diversos empregando esse tipo de funções (BRASIL, 2017), nesse sentido a base teórica é sólida ao passo que o autor apresenta as definições, propriedades e formas de representação que figuram no subdomínio *Kot* e formas de validação e demonstração que figuram o KPM, mas que precisa ser complementada com aspectos relacionados ao PCK.

3.3.4 Capítulo 8 – “Funções Exponenciais e Logarítmicas”

Lima (2014) inicia o capítulo com uma breve introdução, fazendo uma analogia entre o que será abordado no capítulo e casos de aplicações a juros contínuos e a desintegração radioativa (meia vida), sendo que esses exemplos ilustram algumas das situações em que podem ser aplicados o conceito de funções do tipo exponencial. Na sequência, o autor dá seguimento com uma revisão sobre propriedades de potências de expoente racional.

O autor segue expondo e demonstrando propriedades operatórias de potências e estabelece que o crescimento da função $f(n) = a^n$ acontece quando $a > 1$ e o decrescimento quando $0 < a < 1$, sendo constante para $a = 1$. Além disso o autor também demonstra usando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base que $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ então $a^0 \cdot a = a$, logo $a^0 = 1$ e afirma que dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, logo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e usando a definição de raiz e a propriedade do produto de potências de mesma base explica o sentido de a^r sendo $r = m/n$ (LIMA, 2014, p. 151).

Tendo em vista essa abordagem inicial, estão presentes aspectos relacionados à “fenomenologia e aplicações” ao relacionar funções exponenciais com algumas aplicações e também foi estabelecido uma espécie de “conexão de simplificação” (KSM) ao usar propriedades de potências para em seguida aplicá-las no estudo sobre esse tipo de funções, além dos “procedimentos” (Kot), “definições, propriedades e fundamentos” (Kot), “formas de validação e demonstração” (KPM) e “papel dos símbolos e uso da linguagem formal” (KPM) referentes à abordagem e verificação de propriedades de potências de expoente racional e crescimento da função exponencial, permeando, dessa forma, os três subdomínios que compõem o MK.

Dando seguimento, o autor apresenta a seção “Função Exponencial”, mesmo já tendo abordado o crescimento e decrescimento desse tipo de função, agora o autor a define formalmente, demonstrando, na sequência, cada uma das propriedades.

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferentes de 1. A *função exponencial de base a* , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^1 = a$;
- 3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$ ”.
- 4) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.
- 5) A função exponencial é contínua.
- 6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Fonte: Lima (2014, p. 155-156)

Tais propriedades são objeto de estudo na educação básica e desta forma poderiam ter sido discutidas com enfoque na abordagem nesse nível de ensino (PCK), mas ao invés disso apenas foram demonstradas como já é feito nos cursos de graduação em matemática e licenciatura em matemática, permeando as categorias “procedimentos” e “definições, propriedades e fundamentos” pertencentes ao *Kot* e a categoria “formas de validação e demonstração” que se associa ao KPM.

Lima enuncia e demonstra os teoremas de caracterização da Função Exponencial e afirma que essa juntamente com as funções afins e as quadráticas são os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares, sem explicitar quais problemas são esses e para quem eles são considerados elementares.

O autor apresenta dois teoremas de caracterização, mas dedica-se somente a demonstrar tais resultados do ponto de vista do conhecimento matemático (MK), apresentando as propriedades (*Kot*) e demonstrando-as (KPM). Lima (2014) afirma que em situações concretas a segunda caracterização é mais natural e fácil de ser empregada, mas deixa de esclarecer de que formas essas caracterizações podem ser ensinadas na educação básica (KMT) e em quais níveis de ensino é feito esse tipo de abordagem (KMLS).

Lima inicia a seção seguinte “Funções Exponenciais e Progressões” com a seguinte afirmação “seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma progressão aritmética de razão h , isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores $f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \dots, f(x_n) = ba^{x_n}, \dots$ formam uma progressão geométrica de razão a^h pois $f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h$ ” (LIMA, 2014, p. 161). E ao associar esses dois conceitos, o autor estabelece conexões transversais entre conteúdos da matemática

(KSM) e vai ao encontro com o que está previsto na BNCC (KMLS), mas poderia ter explorado possíveis estratégias de ensino (KMT) a fim de favorecer o desenvolvimento deles em relação às habilidades propostas pela BNCC, seja a de “identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2017, p. 541).

Na seção intitulada “Função Inversa” o autor inicia definindo essa nomenclatura e partindo dessa definição inicial Lima conclui que “se a função $f: X \rightarrow Y$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y ”. O autor também expõe qual a notação usada para representar que uma função é inversa da outra, sendo g a função inversa de f , escreve-se $g = f^{-1}$ (LIMA, 2014, p.162).

Lima (2014, p. 163) afirma também que para que “uma função contínua $f: I \rightarrow J$ (I, J intervalos) possua uma inversa, é necessário que f seja crescente ou decrescente, além de sobrejetiva”, sendo que a monotonicidade garante a injetividade dessa função e além disso “a inversa de uma função crescente é crescente e a inversa de uma função decrescente é decrescente”.

Como se pode observar nessa descrição, o autor apresentou “definições, propriedades e fundamentos” (*Kot*), além dos “registros de representação” (*Kot*) ao discorrer sobre o gráfico de funções inversas afirmando que “se X, Y são conjuntos de números reais e $f^{-1}: Y \rightarrow X$ é a inversa da função $f: X \rightarrow Y$ então o gráfico G ” da função f^{-1} é o simétrico do gráfico G da função f em relação à diagonal $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ”, ou seja, os gráficos das funções exponencial e logarítmica são simétricos entre si em relação à diagonal principal (LIMA, 2014, p. 163).

Nesse contexto, segundo Ponte (1984), os alunos apresentam dificuldades na compreensão do conceito de função inversa e conseqüentemente, na atividade de “inverter” uma função, dessa forma há a necessidade de discussão de aspectos pertinentes ao PCK, sendo uma das possibilidades a exploração do gráfico de modo a “desvendar” o significado das características dele na compreensão desse conceito, além da exploração de exemplos aplicados que facilitem o entendimento, mas o autor se ateve às definições, às características e às propriedades (MK).

A seção seguinte da obra em análise é dedicada ao estudo de “Funções Logarítmicas”, conhecidas por serem inversas das funções exponenciais. O autor apresenta a definição de funções logarítmicas e de logaritmo, bem como de algumas propriedades operacionais de logaritmos.

Lima tece um comentário ressaltando a importância Matemática da função logaritmo, bem como suas aplicações, pois segundo ele “sendo a inversa da função exponencial (portanto

equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado” (LIMA, 2014, p. 165).

O autor define também o crescimento e decrescimento da função $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, sendo crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$ e além disso $\log_a 1 = 0$. Afirma também que as funções logarítmicas mais utilizadas são as de base 10 (decimais), 2 (binários) e e (neperianos) e apresenta a fórmula de mudança de base para logaritmos.

Na sequência é enunciado e demonstrado o teorema da caracterização das funções logarítmicas. Lima (2014, p. 167) ressalta que “entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas”.

Esse enfoque inicial dado à apresentação de definições, propriedades e procedimentos aponta para uma associação ao MTSK por meio do *Kot*. Note que apesar de ressaltar a importância, devido às aplicações das funções logarítmicas, o autor não expõe nenhum exemplo para ilustrá-las ou mesmo discutir “estratégias, técnicas, tarefas e exemplos” (KMT) para abordagem desse conteúdo em sala de aula na educação básica.

Dando seguimento Lima se restringe a discutir e mostrar que os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o Teorema de Caracterização. Ele define e apresenta as características do gráfico H da função $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, onde conjunto $H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right); x > 0 \right\}$ é o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$ e define faixa de hipérbole (LIMA, 2014, p. 169). A definição e caracterização do gráfico de funções logarítmicas feita pelo autor pode ser associada ao *Kot* na categoria “registros de representação”, visto que este constitui a representação geométrica desse tipo de funções.

O autor ainda salienta que “normalmente a área de uma figura não é um número negativo, mas que às vezes é conveniente usar “áreas orientadas”, ou seja, providas de sinal + ou – e na sequência define uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x > 0$ a área da faixa de hipérbole compreendida entre 1 e x , $f(x) = \text{ÁREA } H_1^x$, expondo os gráficos dessa função (LIMA, 2014).

Lima também destaca algumas propriedades resultantes dessa definição: “ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $f(1) = 0$; f é crescente” e afirma que “pelo teorema da caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e , tal que $f(x) =$

$\log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número $\ln x$ de logaritmo natural de x ” (2014, p. 172-173).

O autor segue enfatizando aspectos relacionados a “registros de representação” (*Kot*), contudo, nessa abordagem conduz a tópicos do conteúdo que não são objetos de trabalho dos professores de matemática da educação básica como, por exemplo, a aplicação de limite usada conforme será descrita a seguir.

O autor salienta que o número e é positivo e irracional cuja faixa da hipérbole H_1^e é igual a 1, ou seja, é caracterizado pelo fato de que $\text{ÁREA } H_1^e = 1$, sendo os logaritmos naturais, também chamados de “logaritmos neperianos, os mais importantes nas aplicações, especialmente aqueles que envolvem o uso do Cálculo infinitesimal (LIMA, 2014).

Lima afirma que o número e é representado como o limite da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito e baseando-se nisso faz as demonstrações do limite no infinito, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$. E segue com outras implicações e demonstrações que figuram na graduação em matemática e que não são objetos de estudo da educação básica, nível de atuação dos professores para os quais se destina o PROFMAT.

A seção “A Função Exponencial de Base e ” é destinada à exposição de exemplos de situação da vida real que leva à consideração do limite acima como, por exemplo, “um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos, por simplicidade, $\alpha = k/100$, por cada real aplicado o investidor receberá, no final de um ano, $1 + \alpha$ reais, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1 + \alpha)$ reais. O acréscimo $c_0 \cdot \alpha$ (juro) é uma espécie de aluguel do dinheiro” (LIMA, 2014, p. 176). Esse é um dos primeiros exemplos apresentados nesse capítulo que apresenta alguma proximidade com o nível de desenvolvimento (KMLS) que se espera dos alunos por meio da aprendizagem de funções logarítmicas apontados na BNCC.

Na sequência o autor define a “taxa de crescimento de uma função f no intervalo de extremidades $x, x + h$ é, por definição, o quociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,” (LIMA, 2014, p. 177) e define que a “chama-se *derivada* da função f no ponto x ao limite da taxa $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h tende a zero. Este número, cujo significado é o de taxa instantânea de crescimento de f no ponto x , é representado por $f'(x)$ ” e que “geometricamente, a derivada $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x ” (LIMA, 2014, p.178).

O autor ainda faz a interpretação do sinal e valor da derivada, afirma ser esta a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal e demonstra que “a taxa instantânea de crescimento de uma função do tipo exponencial é, em cada ponto x , proporcional ao valor da função naquele ponto. E o coeficiente α é precisamente o fator de proporcionalidade.” (LIMA, 2014, p.179).

Veja, que assim como no caso de limites o conteúdo de derivadas não permeia os currículos da educação básica e nesse sentido seu enfoque se dá somente no que diz respeito ao conhecimento matemático do conteúdo (MK). Nesse cenário, destaca-se o fato de autor abordar diversos conteúdos matemáticos que não figuram no currículo escolar e não procurar estabelecer relações diretas com a prática do professor ao ensinar matemática na educação básica, tornando esse processo formativo inerte no que se refere ao impacto na qualidade formativa desses docentes.

Na seção seguinte, Lima discute o que ele denomina de “Alguns Exemplos Clássicos”, sejam “capital a juros fixos (bis)”, “desintegração radioativa” e “concentração de uma solução”. Contudo, apesar de alguns desses exemplos constituírem conteúdos integrantes dos currículos da educação básica (KMLS) nota-se uma enorme discrepância entre o total de páginas destinadas a discuti-los (duas páginas) e as destinadas a discutir conceitos, definições e propriedades associadas ao MK (demais páginas do capítulo).

A seção final desse capítulo é composta por onze exercícios, sendo dois deles uma tentativa de contextualização e os demais para verificação de resultados mediante provas e demonstrações.

A abordagem apresentada nesse capítulo apresentou-se insuficiente em relação ao domínio PCK no sentido de preparar e dar subsídios para o professor desenvolver sua prática visando o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC pelo aluno, a qual aponta dentre outras, que este deve ser capaz “resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros” (BRASIL, 2017, p. 544).

3.3.5 Capítulo 9 – “Funções Trigonométricas”

O autor inicia o capítulo afirmando que as funções trigonométricas são consideradas de grande relevância na Matemática por suas aplicações e pelo papel que desempenham na Análise. Ele relata que o surgimento da Trigonometria se deu quando se acreditava que os planetas

descreviam órbitas circulares ao redor da Terra e inicialmente seu objeto era a resolução do tradicional problema com triângulos e que a partir da criação do Cálculo infinitesimal surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante, cossecante, o status de função real de uma variável real (LIMA, 2014).

Lima ressalta uma propriedade que ele considera fundamental, que as funções trigonométricas são periódicas e por isso são adaptadas para descrever fenômenos como movimento dos planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Note que as afirmações feitas pelo autor descritas até somente apontaram “fenomenologias e aplicações” além de propriedades das funções trigonométricas, as quais podem ser associadas ao MTSK unicamente, por meio do *Kot*.

O autor apresentou as relações de seno e cosseno em um triângulo retângulo, ressaltando o fato de que o valor do seno e do cosseno de um ângulo depende apenas desse ângulo e não do tamanho do triângulo. Afirmou, também, que quaisquer dois triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual são semelhantes, assegurando ainda ser a semelhança de triângulos a base de sustentação da Trigonometria.

Lima deduziu a “relação fundamental” da Trigonometria (soma dos quadrados do seno e do cosseno igual a 1), partindo do Teorema de Pitágoras e explicou o significado da palavra cosseno, a qual quer dizer “seno do complemento”, visto que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa e que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1, afirmando ser muito “clara” essa última afirmativa (LIMA, 2014, p. 188).

Ao abordar os conceitos de trigonometria aplicados no triângulo retângulo, Lima (2014) contempla conteúdos do ensino fundamental e do ensino médio e teria aí uma oportunidade de aprofundar as discussões de questões fundamentais para a prática escolar apontando aspectos e conhecimentos relativos ao PCK, contudo, o autor apenas apresentou “definições, propriedades e fundamentos” (*Kot*).

Na sequência, Lima apresenta a definição de circunferência/círculo unitário, afirmando que a maneira mais natural de definir funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler e discute do que se trata essa função, afirmando que: “a função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a

circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1,0) \in C$ ” (LIMA, 2014, p. 190), ressalta também que “numa circunferência de raio r , a medida de um ângulo central em radianos é igual a $\frac{l}{r}$, sendo que l é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo” (LIMA, 2014, p. 192).

O círculo unitário trata-se de uma representação geométrica, nesse sentido temos aqui, além da sua definição formal, um registro de representação, ambas categorias que se associam ao MTSK por meio do *Kot*.

Lima inicia a seção “As Funções Trigonômétricas” definindo as funções seno e cosseno, bem como funções periódicas e o período de uma função. Apresenta, ainda, a definição de função par e função ímpar, apresentando um exemplo de função denominada “dente-de-serra” para inferir que existem funções que não são nem pares e nem ímpares e classifica a função cosseno como uma função par e seno como uma função ímpar.

O autor define as funções trigonométricas que derivam do seno e do cosseno, ressaltando ser a função tangente a principal delas e que esta apresenta uma restrição no domínio. Apresenta o gráfico da função tangente e faz uma análise de seu crescimento, afirmando, por fim, que a função tangente restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ possui uma função inversa chamada *arco tangente*.

Ao definir as funções trigonométricas o autor apresenta também “propriedades e fundamentos” relativos a essas, além de apresentar características do “registro de representação” gráfico e “fenomenologias e aplicações”, permeando quase todas as categorias que compõem o *Kot*.

A seção seguinte, intitulada “As Fórmulas de Adição”, é dedicada ao estudo dessas e inicia com a afirmação do autor de que fórmulas de adição, tanto do seno quanto do cosseno podem ser demonstradas de várias formas, mas apresenta a demonstração que ele considera como sendo “a mais simples e direta”, na qual admite que os ângulos α , β e $\alpha + \beta$ são positivos e menores que $\frac{\pi}{2}$ e faz a dedução algébrica da fórmula do cosseno da soma e do cosseno da diferença usando as análises geométricas do seno e cosseno em um arco trigonométrico.

Em seguida, partindo das fórmulas deduzidas e usando as relações $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$, o autor demonstra a fórmula do seno da soma e seno da diferença, apresentando as fórmulas do seno e cosseno do arco duplo como consequência das fórmulas de adição, além de apresentar essas duas fórmulas em função de sua tangente.

Na seção seguinte, intitulada “A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos”, Lima demonstra a lei dos cossenos usando basicamente a aplicação do teorema de Pitágoras, contudo afirma ser este um caso particular da lei dos cossenos no qual um dos ângulos é reto. Ele também demonstra a lei dos senos e afirma que a interpretação geométrica para a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto em um triângulo ABC é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Note que nessas últimas seções o autor se inclinou a deduzir e demonstrar resultados permeando o subdomínio de conhecimento KPM, enfocando nos procedimentos utilizados (*Kot*) sem mencionar em nenhum momento aspectos voltados ao conhecimento didático do conteúdo (PCK) como forma de proceder o ensino do mesmo, sendo essa ausência observada em todo o capítulo.

Lima (2014, p. 205) destaca também duas condições necessárias e suficientes para gerar definições (KPM), sendo as que seguem: “para que exista um triângulo com lados $a \leq b \leq c$ é necessário e suficiente que se tenha $c < a + b$ ” (desigualdade triangular) e “para que \hat{A} e \hat{B} sejam ângulos de um triângulo, é necessário e suficiente que $\hat{A} + \hat{B} < 2retos$ ”.

Por fim, encerra a abordagem sobre funções trigonométricas com uma seção composta por treze exercícios, envolvendo simplificação de expressões e resolução de equações envolvendo seno e cosseno, demonstrações de identidades trigonométricas e determinação de valores de máximos e mínimos de funções trigonométricas dadas, focando claramente no desenvolvimento de “procedimentos”, “aplicações de propriedades” (*Kot*), bem como em “formas de validação e demonstração” (KPM).

Chama atenção o fato do enfoque dado por Lima (2014) estar na contramão, destoante do que está previsto nos currículos, sendo que destacamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 44) que orientam que o estudo relacionado à trigonometria: “esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos”.

Ademais, ao ensinar sobre esse tópico “o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos” (BRASIL, 2000, p. 44).

Diante disso, a análise desse último capítulo e, de modo geral, dessa terceira parte, nos leva a inferir que a abordagem realizada está distante daquilo que o professor de Matemática precisa

conhecer para ensinar matemática na educação básica (CARRILLO et al., 2018). Ademais, favorece somente o desenvolvimento do conhecimento das teorias e definições matemáticas (MK) de forma desconexa da prática do professor, visto que o enfoque se dá nas suas caracterizações e pouco se explora com exemplos práticos, enquanto que os currículos sugerem que “as funções não sejam estudadas isoladamente, mas inseridas em um contexto de conhecimentos diversificados, tanto da própria Matemática como de outras áreas” conforme nos apontam Ribeiro e Cury (2015, p. 54).

Lima (2014, p. X) afirma que para saber qual/quais tipos de funções são adequadas para resolver determinadas situações é necessário conhecer os teoremas de caracterização para cada tipo de função, afirmando que esses são expostos no livro e “que todos os professores devem conhecê-los e ensinar seus alunos a usá-los de forma consciente”, mas a chave está na seguinte pergunta “como ensinar os alunos a usar de forma consciente cada tipo de função?”, pois apesar de expor e demonstrar todas as caracterizações, o autor não se ateu a discutir a abordagem dessas em sala de aula na educação básica, priorizando conhecimentos relacionados ao MTSK por meio do MK. Ribeiro e Cury (2015, p. 71) apontam que, não havendo essas discussões sobre metodologias/formas de ensino para cada tópico, perde-se a chance de apontar e debater questões fundamentais para a prática e assim “não se possibilita a oportunidade de desenvolver o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento dos estudantes e do ensino”.

4. UMA DISCUSSÃO SOBRE A PERSPECTIVA FORMATIVA PRIVILEGIADA PELO MATERIAL DIDÁTICO DO PROFMAT SOBRE O CONTEÚDO “FUNÇÕES AFINS”

O livro “Números e Funções Reais” possui dez capítulos denominados “Conjuntos”, “Números Naturais”, “Números Cardinais”, “Números Reais”, “Funções Afins”, “Funções Quadráticas”, “Funções Polinomiais”, “Funções Exponenciais e Logarítmicas”, “Funções Trigonométricas” e “Soluções dos Exercícios”, sendo que, dentre esses, observa-se a existência um capítulo exclusivamente voltado para a discussão do tema Função Afim, o qual se organiza por meio de um conjunto de textos que serão objeto de discussão no decorrer deste capítulo.

4.1 O CONCEITO DE FUNÇÕES

O capítulo “Funções Afins” é destinado à caracterização e estudo das propriedades desse tipo de função. Porém, a definição de função, de modo geral, é apresentada em uma seção do terceiro capítulo da seguinte forma:

Dados os conjuntos X, Y , uma *função* $f: X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y ”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “ y igual a f de x ”). O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f , ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \mapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA, 2014, p. 36).

Ao definir *função*, Lima adotou a linguagem de conjuntos que foi apresentada em capítulo anterior do livro e também abordada neste trabalho. Também apresenta a *função identidade* e a *função constante* como exemplo de funções afins, tecendo comentários relacionados ao uso “correto” da linguagem matemática. Ao apresentar o conceito de função, o autor se atém aos procedimentos e definições, enfatizando o uso de símbolos matemáticos e da linguagem formal, evidenciando a presença de elementos característicos dos subdomínios do MK, *Kot* e KPM.

Para ilustrar o conceito ora apresentado, Lima (2014) expôs três exemplos puramente teóricos, sendo que em um deles definiu *injetividade* e, posteriormente, *sobrejetividade* e *bijeção*.

Nota-se que na abordagem ao conceito de *função* o autor limitou-se apenas a definir termos/características (*Kot*), sem apresentar, inclusive, exemplos associados ao significado de cada um deles. Nesse sentido, Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) apontam que muitos alunos não compreendem o sentido do conceito de contradomínio e domínio, fatores que fazem com que não consigam identificá-los e caracterizá-los em uma função. Destaca-se também a problemática associada à distinção entre imagem e contradomínio, fazendo com que os alunos se atenham apenas as regras de correspondência. Ocorre que, diante dessas evidências e tendo em vista os objetivos do PROFMAT, esperar-se-ia que o autor do livro “Números e Funções Reais” indicasse e discutisse tais dificuldades de aprendizagem (KFLM), bem como discutisse esses conceitos associando-os a exemplos acessíveis aos estudantes da educação básica, indicando caminhos que favoreçam o ensino desses termos pelo professor (KMT), superando tais problemas de aprendizagem.

Diante do exposto, podemos inferir que, nessa abordagem inicial ao tema *Função*, realizada no terceiro capítulo, privilegiou-se a apresentação de *definições e propriedades*, bem como, o uso da *linguagem formal*, evidenciando a predominância de aspectos relacionados ao MK, mais especificamente, dos subdomínios *Kot* e *KPM*, respectivamente. Aspectos relacionados ao ensino desse conceito (PCK), o qual é objeto de trabalho dos professores da educação básica, não figuraram em nenhum momento nessa introdução ao conceito de função.

4.2 O CAPÍTULO FUNÇÕES AFINS

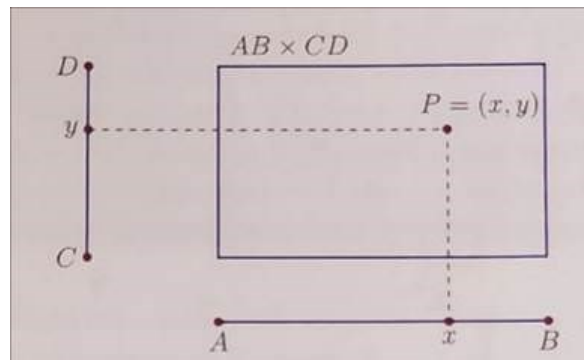
O capítulo “Funções Afins” é organizado de forma que o estudo desse tipo de funções é precedido de uma “revisão” sobre produto cartesiano e sobre gráfico de funções, apresentado como um conjunto de textos intitulados: *Produto Cartesiano*, *O Plano Numérico \mathbb{R}^2* , *A Função Afim*, *Comentários sobre Terminologia*, *A Função Linear*, *Caracterização da Função Afim*, *Funções Poligonais e Exercícios*.

Lima (2014) afirma que as funções afins são o tipo mais simples de função e inicia com uma breve apresentação, definindo que as funções, que serão objeto de estudo, são as funções reais de uma variável, cujo domínio é um subconjunto de \mathbb{R} e cujos valores da função aplicada em cada elemento do domínio também resultam em um número real.

4.2.1 O PRODUTO CARTESIANO

Nessa seção o autor define *par ordenado* e seus elementos, enfatizando a linguagem/notação utilizada para a representação desses. Ele também define *produto cartesiano* e apresenta dois exemplos sendo um de cunho geométrico e outro de aplicação dessa definição, enfatizando aspectos relacionados ao *Kot* e KPM, visto que se debruça a definir conceitos matemáticos e a estabelecer uma linguagem/notação padrão a ser utilizada para a representação desses termos:

Exemplo 5.1. Sejam AB e CD segmentos de reta. O produto cartesiano $AB \times CD$ pode ser interpretado como um retângulo, na forma indicada pela figura. Tomamos AB e CD perpendiculares e cada elemento $(x, y) \in AB \times CD$ é representado pelo ponto P , interseção das perpendiculares a AB e CD tiradas pelos pontos P , interseção das perpendiculares a AB e CD tiradas pelos pontos x e y respectivamente.



Fonte: Lima (2014, p. 73).

Conforme o exemplo 5.1 evidencia, o autor aborda uma aplicação da definição (*Kot*). O autor deixa de realizar uma discussão sobre os conhecimentos didáticos desse conteúdo (PCK) a fim de evidenciar, por exemplo, se esse mesmo exemplo poderia ser exposto para alunos da educação básica e estratégias de abordagem que conduzam o aluno à compreensão dos conceitos e formas de representação envolvidas.

Lima (2014, p.73) define relação binária enfatizando sua relação com o conceito de produto cartesiano e define também que “o *gráfico* de uma função $f: X \rightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) , onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim, $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}$ ”. Nesse

sentido, o autor foca em elementos característicos do subdomínio *Kot*, uma vez que aponta a definição e está se remetendo aos registros de representação/forma de representação (geométrica).

Nota-se que ao apresentar a definição de gráfico Lima permeia o subdomínio *Kot* e apesar de apontar num quadro de destaque um equívoco dos textos escolares, ele não indica outra forma de abordá-la em sala de aula com a finalidade de despertar no estudante a intuição a respeito do conceito de funções como uma correspondência, transformação, dependência, etc. Ao deixar de contemplar formas, estratégias, exemplos de aplicação (KMT) nas situações descritas acima e acaba por privilegiar os aspectos que figuram no domínio MK, destinando a seção basicamente ao uso de notação e linguagem matemática formal (KPM) bem como apresentação de definições (*Kot*).

4.2.2 O PLANO NUMÉRICO \mathbb{R}^2

Essa seção é destinada ao estudo do plano numérico e seus elementos e inicia-se com a afirmação que “ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante de produto cartesiano” (LIMA, 2014, p. 75), visto que a ideia geral provém desse caso específico, composto por pares ordenados de números reais (x, y) (pontos), cujas coordenadas são chamadas de *abscissa* e *ordenada*, respectivamente.

O autor explica que fixando-se no plano dois eixos ortogonais esses se intersectam em um ponto o qual é chamado de *origem* e, além disso, esses eixos dividem o plano em *quadrantes*. Lima ressalta o sinal da abscissa e ordenada em cada um dos quadrantes.

Nota-se nesse início da seção a intencionalidade voltada a definição de cada elemento que compõe o plano, bem como suas propriedades e seus fundamentos, os quais serão utilizados nos registros de representação, configurando-se em conhecimento de tópicos (*Kot*).

Dados dois pontos pertencentes ao plano, Lima apresenta como calcular a distância entre eles, ressaltando o uso imediato do Teorema de Pitágoras do qual após as devidas análises resulta a fórmula para cálculo da distância entre dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

O autor também apresenta um exemplo no qual, partindo da definição de circunferência e da fórmula para cálculo da distância entre pontos, se constrói a equação de uma circunferência dados seu centro e raio, fazendo a distinção entre circunferência e disco.

Em um novo quadro de observações o autor discorre “A palavra *círculo* é ambígua. Às vezes significa a circunferência, às vezes quer dizer o disco que tem essa circunferência como fronteira. Não é errado usá-la com qualquer desses dois significados [...]. Mas é necessário explicar o que se está querendo dizer, para evitar mal-entendidos” (LIMA, 2014, p.77), ressaltando aqui que a linguagem que pode ser adequada ao contexto, desde que o aluno esteja ciente de seu significado em cada situação, ou seja, refere-se a forma que o aluno interage com o conteúdo matemático (KFLM).

O autor apresenta resultados referentes a tópicos que são abordados na educação básica (distância entre pontos e equação da circunferência), mas o enfoque dado apenas aponta subsídios para que o professor conheça as definições, propriedades e teoremas relacionados aos tópicos que precisa ensinar (*Kot*), sem contudo contemplar o “como” ensinar, visto que não aponta se essas deduções podem ser feitas em sala de aula na educação básica ou quais outras tarefas e estratégias poderiam ser abordadas no ensino desses conteúdos (KMT) ou, ainda, se são convenientes de serem realizadas na educação básica, tendo em vista o nível de desenvolvimento conceitual e procedimental esperado dos alunos (KFLM).

4.2.3 A FUNÇÃO AFIM

Na oitava página do capítulo, Lima apresenta a definição para uma Função Afim (2014, p. 79): “uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ”. Apresenta também um exemplo no qual define uma função identidade ($f(x) = x$), afirmando que a mesma é uma função afim. O autor cita ainda como sendo afins, as translações $f(x) = x + b$, as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

A seguir o autor mostra como proceder para verificar que uma certa função é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Inicialmente ele afirma que obtém-se b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$ e, quanto ao coeficiente a , podemos obtê-lo sendo conhecido o valor da função em dois pontos distintos.

Ao apresentar a definição de uma função afim e suas propriedades, Lima associa seu enfoque ao MTSK por meio do *Kot* e ao apresentar como verificar se uma função é afim, ele permeia o subdomínio KPM nas categorias “formas de validação e demonstração” e “condições necessárias e suficientes para gerar definições”.

O autor chama a atenção para algumas propriedades que caracterizam a função em *crescente*, *decrecente*, *monótona não-decrecente* e *monótona não-crescente*, ressaltando que essas quatro caracterizações não são mutuamente excludentes e pode haver funções que não se enquadram em nenhuma das quatro categorias apresentadas. A abordagem realizada para essas propriedades pode ser associada unicamente ao *Kot*, visto que o autor deixa de evidenciar aspectos pertinentes aos outros subdomínios do conhecimento matemático constituintes do MTSK.

A sequência se dá com a apresentação de um exemplo de aplicação de função afim que pode ser associado ao KPM por intermédio da categoria “fenomenologia e aplicações”:

EXEMPLO 5.7.

O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f: x \mapsto ax + b$, onde x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

Fonte: Lima (2014, p.81).

Após a apresentação do exemplo, o autor afirma que o gráfico de uma função afim é uma reta e que para verificar isso basta mostrar que quaisquer três pontos desse gráfico são colineares e faz esse o desenvolvimento algébrico, tomando três pontos quaisquer, enfocando nos “procedimentos” e “registros de representação” (*Kot*).

Lima aponta que, geometricamente, o coeficiente b é a ordenada do ponto onde o gráfico da função intersecta o eixo OY , o número a é a inclinação ou coeficiente angular da reta em relação ao eixo OX , ou seja quanto maior for a maior será a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal.

O autor destaca que no caso da função afim, como o gráfico é uma reta, basta conhecer o valor da função em dois números distintos para poder traçá-lo, e completa com a afirmação e demonstração: “toda reta não-vertical r é o gráfico de uma função afim”, além disso ele destaca outra característica desse tipo de função “dados arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ ” (LIMA, 2014, p. 82).

Destaca-se nesses dois últimos parágrafos “definições, propriedades e seus fundamentos” referentes ao “registro de representação” geométrico de uma função afim, categorias que pertencem ao subdomínio *Kot*, o qual apresentou predominância na abordagem nessa seção.

4.2.4 COMENTÁRIOS SOBRE TERMINOLOGIA

Na página 83 o autor dedica uma subseção a “Comentários sobre terminologia”, na qual ele enfatiza dois aspectos. No primeiro ele ressalta que “não é adequado chamar o número a de *coeficiente angular* da função f . O nome mais apropriado, que usamos, é *taxa de variação* (ou taxa de crescimento)” (LIMA, 2014, p.83). O segundo comentário, tecido por Lima, refere-se à nomenclatura usada para uma função afim, a qual, segundo ele, muitas vezes é chamada de função do primeiro grau, mas ressalta que função não tem grau e que o que possui grau é polinômio (LIMA, 2014).

Comentários como esses são recorrentes no livro, porém não é apontado o impacto deles no processo de aprendizagem dos conceitos (KFLM), fazendo emergir questionamentos como: o que significa ser “adequado” quando estamos falando dos processos de ensino e aprendizagem? A expressão “Não ser adequado” é equivalente ao termo “errado”? Ou é só uma questão de estrito rigor matemático? Se for errado, como o docente deve proceder a fim de corrigir esses erros e fazer com que o aluno entenda a sua natureza? E, em se tratando de rigor matemático, até que ponto influencia no ensino e na aprendizagem?

Nesse cenário, destaca-se o fato de o PROFMAT ser uma política pública de formação de professores, que visa proporcionar uma formação relevante para a atuação do docente em sala de aula, deveria/poderia discutir em seus livros-textos esses tipos de questões e não somente reiterar discursos que já estão presentes em outros livros didáticos, sem apontar esclarecimentos.

4.2.5 A FUNÇÃO LINEAR

Na continuação do capítulo, o autor inicia uma seção denominada “A Função Linear”, e a define: “a função linear dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas

de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios” (LIMA, 2014, p. 84).

Lima apresenta uma definição para proporcionalidade contida em *Aritmética Progressiva*, de Antonio Trajano, e baseando-se nela, Lima (2014), define que “uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = f(x)/c$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)”. O que equivale a afirmar que “a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado a constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x . Quanto a proporcionalidade inversa, ela só faz sentido quando se trata de grandezas não nulas” (LIMA, 2014, p.84).

O autor cita o Teorema de Tales para exemplificar que, nem sempre essa constante de proporcionalidade é visível, mas que, em alguns casos, não é relevante conhecê-la, e enuncia o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, o qual ele considera como “chave” para determinar se uma dada função é ou não linear.

TEOREMA 5.8. Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (Logo $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.)
- (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Fonte: Lima (2014, p. 86).

O autor demonstra a implicação (1) \Rightarrow (2) e afirma que as implicações (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1) são “óbvias” e que, portanto, não irá prová-las.

De acordo com Lima, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade é importante quando se está querendo saber se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear, porque basta verificar que f deve ser crescente ou decrescente e que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$. No caso de $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

Apesar de enaltecer a noção matemática de proporcionalidade, Lima não estabelece conexões entre sua abordagem e os conteúdos e abordagens previstas no currículo escolar, o qual

considera a proporcionalidade como uma das ideias essenciais da matemática e que é objeto de estudo desde os anos iniciais do ensino fundamental (BNCC) (BRASIL, 2017), assim, consideramos que o autor além de apresentar a definição dessa noção matemática, a qual permeia o *Kot*, poderia também ter apresentado quais são as dificuldades dos alunos na aprendizagem desse conceito (KFLM), formas de abordagem desse conteúdo na educação básica (KMT) e qual nível de desenvolvimento esperado em cada etapa de ensino (KMLS), sendo que, dessa forma, o professor estaria melhor orientado quanto às ações e decisões a serem tomadas no ensino.

O encerramento da seção se dá com a apresentação dos dois exemplos, que vamos expor a seguir, e que podem ser associados ao MTSK por meio do *Kot*, visto que traduzem aplicações de funções afins.

EXEMPLO 5.9.

Se investirmos a quantia x , digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital $f(x)$. Evidentemente, f é uma função crescente de x : quanto mais se aplica mais se recebe no final. Além disso, tem-se que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x . De fato, esta igualdade significa que tanto faz abrir uma caderneta de poupança com o capital inicial $n' = nx$ como abrir (no mesmo dia) n cadernetas, cada uma com o valor inicial x . O Teorema Fundamental nos permite concluir que $f(x)$ é proporcional a x . Mais precisamente, se a aplicação de 1 real der, no final de um ano, um valor de resgate igual a a , então o capital inicial de x reais se transformará em $f(x) = ax$ no final de um ano. (Não confundir este exemplo com o crescimento do capital em função do tempo. Este não é proporcional e será tratado quando estudarmos a função exponencial.)

Fonte: Lima (2014, p. 87).

EXEMPLO 5.10.

Euclides dizia: “dois retângulos de mesma altura estão entre si como suas bases”. Isto quer dizer que, se a altura de um retângulo é fixada, a área desse retângulo é proporcional à base. Ou ainda: *a área de um retângulo de altura a e base x é uma função linear de x* . É claro que esta afirmação é uma consequência super-óbvia da fórmula de área do retângulo. O ponto, todavia, é que ela é o argumento crucial para a dedução daquela fórmula, logo não pode ser deduzida como sua consequência. Para estabelecer sua veracidade, seja $f(x)$ a área do retângulo de altura a e base x . É claro que f é uma função crescente de x . Além disso, é claro que um retângulo de altura a e base nx pode ser decomposto em n retângulos de mesma altura a , cada um com base x , logo $f(nx) = n \cdot f(x)$. Segue-se, então, do teorema que $f(x) = A \cdot x$, onde $A = f(1)$ é a área de um retângulo de altura a e base 1. Vamos mostrar que $A = a$. O mesmo argumento, aplicado aos retângulos de mesma base 1 e altura variável, mostra que $A = a \cdot U$, onde U é a área do retângulo de base e altura iguais a 1. Mas este é o quadrado de lado 1 o qual é, por definição, a unidade de área. Portanto $U = 1$ e $A = a$. Conclusão: a área de um retângulo de altura a e base x é igual a ax .

Fonte: Lima (2014, p. 87)

4.2.6 CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM

O autor inicia a seção com a seguinte pergunta “Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?” (LIMA, 2014, p. 88). E prossegue afirmando que em alguns problemas esse fato está explícito, mas nem sempre isso acontece e que nesses casos, faz-se necessário usar o Teorema da Caracterização de uma Função Afim para verificação.

TEOREMA 5.11 (Teorema da Caracterização de uma Função Afim).

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim.

Fonte: Lima (2014, p. 89)

Tal teorema é provado por Lima (2014) a partir da aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. O autor afirma que a recíproca desse teorema é “óbvia” e o ilustra afirmando que acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x .

Lima (2014), ao caracterizar uma função afim, ateuve-se exclusivamente a enunciação e a demonstração de teoremas (KPM), sem mostrar exemplos de como usar tais resultados (procedimentos e aplicações – *Kot*) e sem mencionar as possibilidades e estratégias de aplicação desses na educação básica (KMT), conhecimentos esses que perfazem por um lado o MK e por outro o PCK, os quais, juntos, orientam as ações e decisões que o professor desse tomar (CARRILLO et al., 2018).

O autor apresenta um exemplo e uma observação relacionando função afim com o estudo de movimento uniforme, conteúdo da física, assim podemos identificar uma tentativa de conexão com outras áreas do conhecimento, a qual corresponde a categoria “fenomenologia e aplicações” (*Kot*).

EXEMPLO 5.12.

Suponhamos um ponto que se movimenta sobre um eixo. Sua posição, em cada instante t , é determinada pela coordenada (abscissa) $f(t)$. Diz-se que se trata de um *movimento uniforme* quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido (isto é, f é uma função monótona) e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Isto significa que $f(t+h) - f(t)$, espaço percorrido no tempo h , a partir da posição $f(t)$, depende apenas de h , mas não de t . Então f é uma função afim: $f(t) = at + b$, onde $a = f(t+1) - f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se a *velocidade* e $b = f(0)$ é a posição inicial.

Fonte: Lima (2014, p. 90).

Lima (2014) também destaca uma conexão entre funções afins e progressões aritméticas, a qual pode ser caracterizada à luz do MTSK como uma “conexão transversal”, ao passo que, apesar de se tratarem de conteúdos diferentes, apresentam recursos em comum, conforme observamos no exposto a seguir:

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i), i = 1, 2, \dots$ também estão igualmente

espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética [...]. Reciprocamente, se uma função monótona $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i) \dots$ então f é uma função afim (LIMA, 2014, p. 91).

Nesse sentido, ao associar progressões aritméticas e funções afins, o autor além de estabelecer uma conexão, também vai de encontro com o que preconiza a BNCC, um dos documentos norteadores da educação básica brasileira, a qual espera que o aluno seja capaz de “identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2017, p.541), sendo que essa habilidade descrita pelo currículo compõe o subdomínio KMLS. Assim caberia uma discussão sobre “como” (KMT) associar o ensino desses conteúdos na educação básica tendo em vista os “interesses e expectativas” de aprendizagem (KFLM).

4.2.7 FUNÇÕES POLIGONAIS

A última seção do capítulo é denominada “Funções Poligonais”, nela Lima (2014) inicia afirmando que as funções poligonais estão presentes em situações da vida cotidiana, como no imposto de renda sobre a renda líquida, descontos crescentes, além de diversas áreas da matemática, como Análise, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais e Topologia com as quais podem ser estabelecidas conexões (KSM).

Em seguida, o autor apresenta a definição formal para uma função poligonal “ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i ”. E aponta que, “equivalentemente, podemos dizer que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal” além de apresentar exemplos de gráficos desse tipo de funções e conjectur que “toda função poligonal pode ser definida combinando valores absolutos de funções afins” (LIMA, 2014, p. 91-92).

Destaca-se, nessa penúltima seção, a oportunidade de desenvolver o conhecimento matemático referente ao conhecimento de tópicos (*Kot*), observado o direcionamento no sentido de conhecer “definições, propriedades e seus fundamentos” e “registros de representação”.

4.2.8 EXERCÍCIOS

Por fim, uma seção composta por trinta e dois exercícios encerra o capítulo. Dentre os exercícios propostos alguns envolvem aplicações a situações do cotidiano, mas há também aplicações e demonstrações de propriedades e de cálculos algébricos, incluindo cálculos de valor de dada função em determinado ponto, esboço e interpretação de gráficos.

Apresentamos abaixo um resumo quantitativo da distribuição dos exercícios nas categorias do MTSK que foram identificadas, baseado na solução proposta no capítulo “Solução dos Exercícios”, sendo que todos contemplam mais de uma categoria.

Quadro 2 – Divisão dos exercícios nas categorias do MTSK

Subdomínios	Categorias	Exercícios associados
Kot	Procedimentos	20
	Definições, propriedades e seus fundamentos	24
	Registros de representação	7
	Fenomenologia e aplicações	9
KSM	Conexões transversais	2
	Conexões auxiliares	7
KPM	Formas de validação e demonstração	5
	Papel do símbolos e uso da linguagem formal	1

Fonte: Elaborado pela autora

O quadro acima demonstra a distribuição nas categorias do MTSK dos trinta e dois exercícios que compõem o capítulo, tendo em vista às soluções propostas pelo autor. As atividades propostas evocavam mais de uma categoria do modelo em suas resoluções, por isso que a somatória da coluna “Exercícios associados” é maior que o total de exercícios contidos na seção já que muitos se repetem.

Nota-se que o quadro evidencia uma predominância no desenvolvimento de conhecimentos relacionados ao MK por meio do *Kot*, outro fato a ser ressaltado é que as análises apontam a ausência de exercícios que possam ser associados pelo MTSK às categorias do PCK, ratificando os resultados posteriormente apresentados na pesquisa no sentido de que não são feitas abordagens que priorizem a matemática na perspectiva de seu ensino e aprendizagem.

Para efeito de ilustração iremos nos limitar a discutir apenas alguns dos exercícios propostos por Lima. Consideremos inicialmente o exercício 5.1.

Exercício 5.1. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original? (LIMA, 2014, p. 93).

Resolução proposta: Menor do que o dobro, pois na segunda metade da corrida não foi cobrada a bandeirada. Algebricamente: se $f(x) = ax + b$ então $f(2x) = 2ax + b$ enquanto $2 \cdot f(x) = 2ax + 2b$ (LIMA, 2014, p. 220).

A resolução desse exercício proposta no livro suscita o conhecimento sobre *procedimentos* inerentes à manipulação das expressões algébricas bem como sobre *definições, propriedades e seus fundamentos* relacionadas a funções afins (*Kot*). Contudo, ressalta-se aqui a necessidade de conhecer o sistema de cobrança de corridas de táxi, visto que essa informação não ficou evidenciada no enunciado do exercício.

Já no exercício 5.14 podemos apontar a existência de uma abordagem que permeia os domínios *Kot* e *KSM*, como pode ser verificado a seguir:

Exercício 5.14. Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e a Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R\$ 16,00 cada. Quanto cada um possuía no início? (LIMA, 2014, p. 96).

Com efeito a resolução desse item, conforme é sugerida pelo autor, abrange conhecimentos sobre *procedimentos* utilizados na manipulação de expressões (*Kot*) além de conhecimentos associados à resolução de sistema de equações que caracterizam uma *conexão auxiliar*, visto que esse tópico não é objeto de discussão do capítulo (*KSM*).

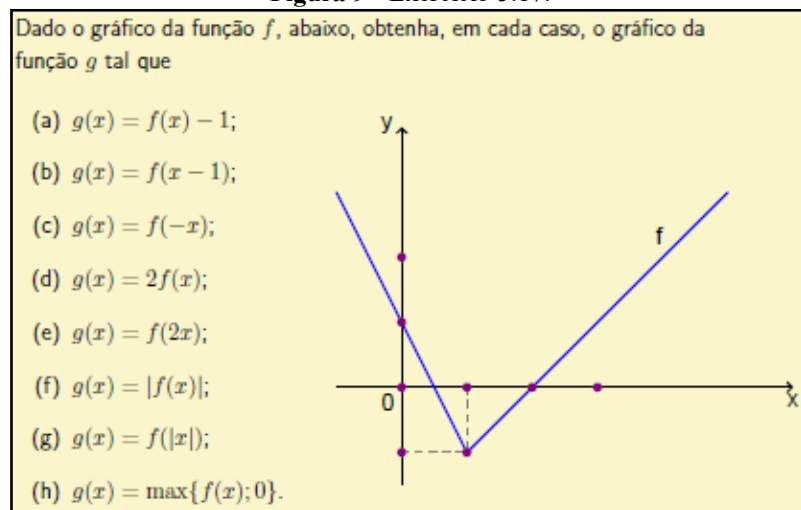
Dos trinta e dois exercícios propostos no capítulo, um total de nove exercícios faz alusão a *fenomenologias e aplicações* (Kot) para efeito de ilustração consideremos o item 5.16.

Exercício 5.16. Em uma ferrovia, as estações A e B distam entre si 3km e a cada 3min parte um trem de cada uma delas em direção à outra. Um pedestre parte de A para B, no exato momento em que um trem parte de A para B e outro chega a A vindo de B. Ele chega a B no exato momento em que um trem parte de B para A e outro trem chega a B vindo de A. Em seu caminho, o pedestre encontrou 17 trens que iam no mesmo sentido que ele e com 23 trens que iam no sentido oposto ao seu, aí incluídos os 4 trens já citados anteriormente. As velocidades dos trens são iguais. Calcule as velocidades dos trens e do pedestre (LIMA, 2014, p. 96).

De fato, a resolução desse exercício requer a aplicação do conceito de funções afins para cálculo de velocidades, além dos conhecimentos relativos à *definição, a propriedades e fundamentos* de funções afins e aos *procedimentos* utilizados na resolução das expressões numéricas e algébricas.

Ainda pertinente ao domínio *Kot*, temos os conhecimentos relacionados aos *registros de representações* que foi evocado em sete exercícios, e para discussão consideremos o exercício 5.17, exposto na sequência:

Figura 9 - Exercício 5.17.



Fonte: Lima (2014, p. 96)

Deveras, nota-se que a resolução desse exercício requer um conhecimento matemático relacionado aos *registros de representação*, a fim de compreender o comportamento da

representação geométrica condicionado a sua representação algébrica. Sendo que, para isso também se faz necessário o conhecimento relativo à *definição, propriedades e seus fundamentos*, sendo que ambos estão associados ao MTSK, por meio do Kot.

Finalmente, apresentaremos um exercício que, assim como outros quatro, está relacionado com *formas de validação e demonstração* (KPM). Tomemos como exemplo o item 5.29.

Exercício 5.29. Dadas as progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ e } (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n, \dots$ (LIMA, 2014, p. 100).

De fato, o exercício requer que se demonstre um resultado, assim, faz-se necessário, recorrer aos conhecimentos sobre *formas de validação e demonstração* (KPM), sendo que essa prática inclui a demonstração, justificação, definição e a elaboração de deduções e induções. Ademais, essa demonstração também requer conhecimentos sobre as propriedades de uma progressão aritmética, constituindo uma *conexão transversal* (KSM), ao passo que, se tratam de conteúdos diferentes que apresentam recursos em comum, além dos conhecimentos de *procedimentos, definições, propriedades e seus fundamentos* (Kot) referentes às funções afins.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O livro “Números e Funções Reais”, que constitui bibliografia básica de uma das principais disciplinas do PROFMAT, é destacado pelo seu autor como um material que contempla todo o programa e que foi elaborado, juntamente com os demais livros da coleção, para servir de suporte para as disciplinas, as quais, em conjunto, visam proporcionar um aperfeiçoamento dos professores que ensinam matemática na educação básica.

Contudo, um dos primeiros apontamentos que podemos fazer a partir de nossa análise é que o livro “Números e Funções Reais”, observadas suas características e abordagem, parece ter sido pensado exclusivamente para a atuação do professor no ensino médio, deixando de contemplar os demais níveis de ensino que compõem a educação básica que também são campo de atuação dos professores alvos do PROFMAT.

Destaca-se também que a abordagem dos conteúdos feita pelo livro “Números e Funções Reais” não se distancia daquilo que já é feito em outros livros didáticos destinados aos cursos superiores de Licenciatura em Matemática (como é o caso dos livros “Análise Real”, volume 1 (LIMA, 2004) e “Curso de Análise”, volume 1 (LIMA, 2002), “Um Curso de Cálculo”, volume 1 (GUIDORIZZI, 2013), dentre outros) e que, de modo geral, pouco se remetem a prática dos professores e ao processo de ensino e aprendizagem.

Lima (2014) afirma que os teoremas de caracterizações são expostos de forma elementar, pois os professores precisam conhecê-los e ensinar os alunos a usá-los de forma consciente, e quanto às demonstrações ficam a critério de cada professor repassar ou não aos seus alunos. Assim, apesar do PROFMAT se propor a oferecer um programa que contemple as necessidades advindas do trabalho cotidiano o livro não discute essas necessidades como, por exemplo, como proceder ao ensinar esses conceitos. O autor apenas afirma que cabe ao professor buscar e decidir quais os melhores critérios e como proceder.

Ademais, tendo em vista o importante papel desempenhado pelo conteúdo analisado nessa dissertação (conceito de função) – para descrever e estudar o comportamento de certos fenômenos “cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função [...] ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática” (BRASIL, 2000, p.44) – a abordagem desenvolvida ao longo do livro-texto não se remeteu e não favoreceu esses aspectos, deixando de

oportunizar aos professores em formação o desenvolvimento de aspectos relacionados diretamente à prática do professor de Matemática.

Destaca-se que muitos dos problemas relacionados a essa prática, no processo de ensino e aprendizagem de funções, podem ter origem em dificuldades dos professores que não tiveram subsídios em sua formação inicial para que pudessem compreender a forma de pensar de seus alunos e tomar decisões em forma de ações que proporcionem uma aprendizagem de qualidade.

Apesar de serem inúmeras as pesquisas sobre funções, dificilmente essas produções chegam até os professores da educação básica por motivos diversos, sendo então uma das possibilidades a discussão em cursos de formação inicial e formação continuada de professores de Matemática sobre questões relacionadas aos alunos e sobre metodologias para o ensino de cada conteúdo (RIBEIRO; CURY, 2015).

Nesse sentido, um programa de caráter de formação continuada como o PROFMAT, tendo em vista os objetivos a que se propõe, conforme apresentamos nessa pesquisa, deveria possibilitar essas discussões dos tópicos a fim de enriquecer e otimizar todo esse processo que envolve formas de conceber o ensino e a aprendizagem.

É fato que os itens citados por Lima são de suma importância na formação de professores que lecionam na educação básica, isso pode ser verificado ao comparar os conteúdos prescritos nos currículos com os que estão no livro, o que se questiona aqui é a abordagem que foi feita, visto que na análise desenvolvida no decorrer dessa pesquisa evidenciou-se que no processo formativo do PROFMAT, especificamente com relação à abordagem do conteúdo de funções, são abordados e explorados conhecimentos, que de acordo com o MTSK, figuram predominantemente em um dos conhecimentos tidos como necessários aos professores que ensinam matemática na educação básica, o conhecimento matemático (MK), permeado quase que exclusivamente nos subdomínios *Kot* e *KPM*.

A abordagem desenvolvida pelo autor do livro-texto em análise deixou de contemplar, de forma suficiente, os subdomínios pertencentes ao domínio PCK –*Pedagogical Content Knowledge* os quais representam parte do conhecimento para o ensino e também são considerados, de acordo com nosso modelo de análise – MTSK, como primordiais para o professor de matemática, visto que, juntos, MK e PCK, informam e orientam as decisões e ações que o professor deve tomar no curso de seu ensino (CARRILLO et al., 2018).

Diante das evidências suscitadas nas análises inferimos que a apresentação desenvolvida no livro “Números e Funções Reais” privilegia conhecimentos matemáticos (MK) concentrando-se nos subdomínios *Kot* e KPM e deixa de contemplar de forma satisfatória os conhecimentos pedagógicos do conteúdo (PCK).

Nota-se que ficará exclusivamente a cargo do professor que ministra a disciplina no PROFMAT introduzir/fazer comentários que explorem os conhecimentos didáticos relacionados ao ensino de funções, visto que a material base da disciplina pouco faz menção a esses conhecimentos que são de extrema importância para a formação integral e continuada dos professores que compõem o público-alvo do PROFMAT.

Diante disso, destaca-se uma falha do programa em adotar um único material bibliográfico para a disciplina, visto que as fragilidades apontadas nessa pesquisa poderiam ser sanadas se tivesse uma outra bibliografia que discutisse os aspectos relacionados aos conhecimentos didáticos para o ensino de funções.

Isso posto, as análises ratificam os indícios apontados em outras pesquisas (CALDATTO, 2015; CALDATTO, PAVANELLO, FIORENTINI, 2016; CALDATTO, FIORENTINI, PAVANELLO, 2018; CALDATTO, RIBEIRO, 2019) sobre a necessidade de uma readequação do processo de formação desenvolvida pelo PROFMAT, a fim de cumprir com os objetivos a que se propõe e considerando os resultados obtidos por distintas pesquisas já desenvolvidas sobre os conhecimentos suscitados pelos professores ao ensinarem matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL, **Plano Nacional de Educação – PNE**. Brasília: MEC, 2014. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/documents/186968/485745/Plano+Nacional+de+Educa%C3%A7%C3%A3o+PNE+2014-2024++Linha+de+Base/c2dd0faa-7227-40ee-a520-12c6fc77700f?version=1.1>>. Acesso em: 04 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 15 set 2019.

CALDATTO, M. E. **O PROFMAT e a formação do professor de matemática: Uma Análise Curricular a Partir de uma Perspectiva Processual e Descentralizadora**. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

CALDATTO, M. E.; FIORENTINI, D. ; PAVANELLO, R. M. . Uma análise do Projeto de formação profissional de professores privilegiada pelo PROFMAT. **ZETETIKÉ (ON LINE)**, v. 26, p. 260-281, 2018.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. ; FIORENTINI, D. O PROFMAT e a Formação do Professor de Matemática: uma análise curricular a partir de uma perspectiva processual e descentralizadora. **Bolema** Rio Claro/SP, v. 30, n. 56 p. 906-925, dez. 2016. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n56/1980-4415-bolema-30-56-0906.pdf>>. Acesso em: 14 set. 2018.

CALDATTO, M. E., RIBEIRO, M. An analysis of the nature of the knowledge disseminated by a mathematics teacher training policy: The PROFMAT case. In: **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)**, 2019, Utrecht. TWG 20 - Papers, 2019.

CARILLO-YAÑEZ, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L. C., FLORES, E., ESCUDERO, D., MORA, D. V., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILLAR, A., RIBEIRO, M., MUNOZ-CATALAN, M. C. The Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge (MTSK) Model. **Research in Mathematics Education**, Londres, v.20, n.3, p.236-253, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>>. Acesso em: 14 set. 2018.

CLEMENT, L. L. What Do Students Really Know about Functions? In: **Connecting Research to Teaching**. Vol. 94, No. 9 • dezembro 2001 (745-748) Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.535.8420&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 24 out. 2019.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES). **Ofício nº031_06/2010/CTC/CAIII/CGAA/DAV/CAPES**. Brasília, 2010.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo**. vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, E. L. **Análise Real**. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. vol. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais** (Coleção PROFMAT). 1. ed. 2. Reimpressão. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 49-69, 1995.

MEDEIROS, J. **Uma abordagem de ensino dos números reais**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB. 2010.

PONTE, J. P. M. da. (1984). **Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs**. Tese (Doutoramento). Universidade de Georgia, Georgia: 1984. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/84-Ponte-tese.pdf>>. Acesso em: 17 dez. 2019.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C de. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e função. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico** – 23 ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). **PROFMAT** – Mestrado Profissional em Matemática em Rede, [s.d.]. Disponível em: <<http://www.profmtat-sbm.org.br/>>. Acesso em: 14 abr. 2018.

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) (2017). **PROFMAT: uma reflexão e alguns resultados**. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Disponível em <http://www.profmtat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf>. Acesso em 29 jun. 2018.

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) (2018). **PROFMAT: Avaliação de possíveis impactos**. Rio de Janeiro: SBM, 2018. Disponível em <<http://www.proformat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2018/07/PROFMAT-Avaliacao-de-possiveis-impactos.pdf>>. Acesso em 14 set. 2019.

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) (2010). **Projeto Acadêmico do PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM.