UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UMA ESTRATÉGIA PARA A OBMEP: O IMPACTO DAS DEMONSTRAÇÕES SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

PAULO CESAR BERNARDO SILVA

Brasília,
4 de abril de 2020

PAULO CESAR BERNARDO SILVA

UMA ESTRATÉGIA PARA A OBMEP: O IMPACTO DAS DEMONSTRAÇÕES SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Ruviaro

Brasília
2020

Silva, Paulo Cesar Bernardo

SP331e UMA ESTRATÉGIA PARA A OBMEP: O IMPACTO DAS DEMONSTRAÇÕES SOB A PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA / Paulo Cesar Bernardo Silva; orientador Ricardo Ruviaro. -- Brasília, 2020.

188 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. Demonstrações matemáticas. 2. Aprendizagem Significativa. 3. David Ausubel. 4. OBMEP. 5. Educação. I. Ruviaro, Ricardo, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma estratégia para a OBMEP: o impacto das demonstrações sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa.

por

PAULO CESAR BERNARDO SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de março de 2020.

Comissão Examinadora:

Ricardo Ruviaro

Prof. Ricardo Ruviaro (Orientador)

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Raimundo de Araújo Bastos Júnior – MAT/UnB

Rui Seimetz

Prof. Rui Seimetz - MAT/UnB

Dedico este trabalho aos meus filhos, Bruno Cesar e Débora Camargo e à minha querida esposa Paula Bernardo, por todo amor que me dão e porque sempre estiveram ao meu lado, me apoiando, em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Neste momento importante, com todo carinho e minha sinceridade, venho agradecer àqueles que contribuíram para o sucesso deste trabalho e desta oportunidade de aperfeiçoamento na minha vida profissional.

Agradeço, primeiramente, a Deus por me permitir a realização deste sonho.

À minha família cearense, de Fortaleza, em especial meus pais, por tudo que me ensinaram e porque sempre acreditaram nos meus estudos, sendo grandes exemplos de vida.

À minha família gaúcha, de São Borja, minha cunhada Juliana e meu cunhado Ronaldo, por serem pessoas muito maravilhosas e em especial meu sogro e minha sogra, que me acolheram e sempre me incentivaram para essa grande conquista.

À minha esposa e filhos, por todo amor, carinho, paciência e que me ajudam a superar todos os obstáculos que a vida me proporciona e me fortalecem ainda mais, de corpo e alma.

Aos colegas de turma, pelos momentos de descontração, alegria e aprendizado, em especial ao Paulo e ao Wagner, que sempre estiveram colaborando, por trocar muitas ideias durante os estudos e contribuir para o meu crescimento intelectual e pessoal.

Aos meus amigos Luiz Antônio, Rinaldo e Vanderson, pelo apoio nos momentos difíceis durante as jornadas de trabalho e que sempre estiveram me motivando para esse grande dia.

Aos professores da UnB, Ricardo, Rui, Regina, Josinalva, Jodette e Dalvirene, com quem tive a oportunidade de trabalhar, pelo companheirismo durante a Especialização em Metodologias em Ensino de Matemática, por estarem sempre me motivando para fazer o Mestrado e pela experiência transmitida em mais de um ano e meio de trabalho juntos.

Ao Coordenador do curso, professor Vinícius, pela atenção, dedicação e pela disposição em esclarecer todas as dúvidas durante os dois anos de Mestrado.

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor Ricardo Ruviaro, pela disponibilidade, paciência, entusiasmo, profissionalismo e por todo o apoio nessa trajetória árdua e compensadora, tanto durante o curso de Especialização em Metodologias de Ensino da Matemática quanto no curso de Mestrado.

Por fim, sou muito grato pela oportunidade de estudar na Universidade de Brasília e por participar das aulas no Departamento de Matemática, num ambiente sempre limpo e organizado.

“A Matemática é elementar meu caro! ”

Prof. Bernardo

RESUMO

Este trabalho busca resgatar as demonstrações matemáticas que, muitas vezes, são esquecidas pelas escolas e aliá-las às novas tecnologias e às novas práticas de ensino. Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho foi apresentar as demonstrações matemáticas como uma estratégia para obter resultados satisfatórios na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e contribuir para a melhoria do ensino da Matemática de qualidade, tendo como foco a Educação Básica. Com base nas experiências vivenciadas pelo acadêmico, partiu-se de um estudo detalhado acerca dos assuntos mais cobrados nas provas da OBMEP de 2005 até 2019. Por meio de uma pesquisa voltada para os professores, investigaram-se as metodologias aplicadas nas escolas e, a partir desses dados, procedeu-se à escolha da turma em que o estudo foi realizado. Para alcançar o objetivo proposto, realizou-se um trabalho com as demonstrações matemáticas em uma Escola do Distrito Federal (DF), numa turma de 30 alunos do Ensino Médio, com pouca participação nas olimpíadas, tendo como foco a OBMEP por ter um papel fundamental na Educação, na motivação e descoberta de novos talentos. Foram realizados três encontros baseados na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. O primeiro deles consistiu na aplicação de uma Avaliação Diagnóstica a fim de traçar um perfil da turma; conhecidas as dificuldades, no segundo encontro, trabalhou-se uma aula com demonstrações de Sequências e Progressão Aritmética e, no terceiro encontro, aplicou-se uma Avaliação Formativa para verificar o aprendizado do aluno, seguida de um questionário para mensurar o grau de motivação em relação à OBMEP. Os resultados apontam que o crescimento quantitativo do desempenho dos alunos foi notável quando se comparou a média geral da Avaliação Formativa com a da Avaliação Diagnóstica.

Palavras-chave: OBMEP. Demonstrações Matemáticas. Educação. Aprendizagem Significativa. Educação Básica.

ABSTRACT

This work is trying to get back to the mathematical demonstrations which are often overlooked by schools, and to ally them with the new technologies and to new teaching practices. In this way, the aim of this study was to present the mathematical demonstrations as a means to achieve good results in the Olympics, the Brazilian Math for Public Schools (OBMEP), and to contribute to the improvement of the Mathematics teaching quality, with a focus on primary and secondary Education. Based on the experience acquired by an academic, it was an in-depth study on the issues collected in proofs of the OBMEP from 2005 to 2019. By means of a survey directed to teachers, to investigate the methodologies used in the schools, and, based on these data, we proceeded to the choice of the class in which the study was carried out. To achieve the proposed objective, the company has made a desktop with all the mathematical demonstrations in a School in the Federal District (DF), a group of 30 high School students with little or no participation in the olympic games, with a focus on the OBMEP to have a key role in the areas of education, motivation, and the development of new talent. They were carried out three times based on the Meaningful Learning theory of David Ausubel. The first of these was the application of a Diagnostic Assessment in order to draw a profile of the group; to know the difficulties, and at the second meeting, we worked on a lesson with examples of a time series, and the Arithmetic Progression, and, in the third meeting, it was a Formative Assessment to check student's learning, followed by a questionnaire survey in order to assess the level of motivation in relation to the OBMEP. The results show that the quantitative growth of the students ' performance was outstanding when compared to the average of the on-going Assessment in the Assessment of the Diagnosis.

Keywords: OBMEP. Mathematical Demonstrations. Education. Learning Is Significant. In The Basic Education.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS

PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
OBMEP	- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
INEP	- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	- Ministério da Educação
IDEB	- Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
SAEB	- Sistema de Avaliação da Educação Básica
Aneb	- Avaliação Nacional da Educação Básica
Anresc	- Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
IBGE	- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PISA	- Programa da Avaliação Internacional de Estudantes
OCDE	- Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
OBM	- Olimpíada Brasileira de Matemática
DF	- Distrito Federal
PA	- Progressão Aritmética
LDB	- Lei de Diretrizes e Bases
PCNEM	- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
IMPA	- Instituto de Matemática Pura e Aplicada
MCTIC	- Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações e do Ministério da Educação
EAD	- Educação à Distância
EJA	- Educação de Jovens e Adultos
POTI	- Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
PICME	- Programa de Iniciação Científica e Mestrado
CNPq	- Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CAPES	- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
SEEDF	- Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
GDF	- Governo do Distrito Federal
CF	- Constituição Federal
SBM	- Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O professor, nos dias atuais, tem um papel fundamental na Educação do ser humano, pois, na prática de sua docência, ele, além de compartilhar seus conhecimentos, trabalha com o propósito de capacitar intelectualmente seus educandos, de acordo com as culturas regionais, de forma que eles desenvolvam o senso crítico perante a sociedade e sejam preparados para a vida profissional. Nesse sentido, D'Ambrosio (2011, p.79) afirma que "Não há dúvida quanto à importância do papel do professor no processo educativo. Fala-se e propõe-se tanto Educação à distância quanto outras utilizações de tecnologia na Educação, mas nada substituirá o professor".

Para Libâneo (2006, p.16) "O trabalho docente é parte integrante do processo educativo mais global pelo qual os membros da sociedade são preparados para a participação na vida social." No entanto, percebe-se que a missão do professor não é tão simples assim, mas exige muita dedicação, esforço, autoaperfeiçoamento e a busca diária de novos conhecimentos e técnicas de ensino, pois a sociedade nunca está estática, e sim em constante evolução. Nessa perspectiva:

> O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e na crítica de novos conhecimentos. (D'AMBROSIO, 2011, p. 79-80).

D'Ambrosio (2011, p. 8) vê a Educação como uma estratégia de grupos culturais que têm por objetivo, individual ou coletivo, alcançar seus potenciais e, ao mesmo tempo, cada membro deve colaborar com os demais para um bem em comum. O autor destaca, ainda, que:

> A Educação em geral depende de variáveis que se aglomeram em direções muito amplas: a) o aluno que está no processo educativo, como um indivíduo procurando realizar suas aspirações e responder às suas inquietudes; b) sua inserção na sociedade e as suas expectativas na sociedade com relação a ele; c) as estratégias dessa sociedade para realizar essas expectativas; d) os agentes e os instrumentos para executar essas estratégias; e) o conteúdo que é parte dessa estratégia. (D'AMBROSIO, 2011, p. 8).

Para que, nesse processo educativo, a sociedade atenda as expectativas do aluno por meio dos agentes e dos instrumentos para executar essas estratégias, procurou-se realizar um trabalho voltado para o interesse de estudar Matemática, bem como para motivar o aluno a buscar desafios e novos conhecimentos que possam ajudá-lo na vida acadêmica e profissional.

Nesse contexto, buscar novos métodos de ensino atraentes e motivadores faz parte do comprometimento do professor, como preveem os PCN:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área da Matemática constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Os parâmetros destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade Matemática a ser desenvolvida em sala de aula. (BRASIL, 1998, p. 59).

Na intenção de superar a aprendizagem mecânica, conforme destacam os PCN, este trabalho põe em evidência uma parte do ensino da Matemática que muitas vezes fica omissa por alguns profissionais, seja por falta de tempo para desenvolver os conteúdos previstos na escola, seja por não possuir material necessário para transmitir o conhecimento ou ainda por falta de interesse do aluno.

A esse respeito, Oliveira e Gonçalves (2013) dizem que ensinar tem sido um desafio e preocupação para todo o professor. De um lado, os professores alegam falta de interesse e de motivação dos alunos para aprenderem os conteúdos. Do outro lado, os alunos reclamam que é uma matéria chata e que não querem estudar.

Ao logo dos anos, por tradição, dizem que a Matemática é uma matéria chata e difícil, em que a maioria dos alunos sente muita dificuldade de aprender. Segundo Silva (2014), essa dificuldade se manifesta por vários motivos, tais como: mal preparo dos professores, falta de interesse dos alunos, infraestrutura da escola ou mesmo recursos didáticos atrasados. Para Silva, Filho e Alves (2016, p.1), “A Matemática está no rol das disciplinas consideradas mais difíceis e temidas pelas pessoas. Cálculos, fórmulas, raciocínio lógico, geometria fazem parte dessa disciplina que impõe tanto medo”.

No mundo atual, as informações e as novas tecnologias avançam surpreendentemente, assim, cabe a cada professor buscar novas maneiras de capacitar seus alunos para estarem, cada vez mais, preparados para a sociedade. Segundo Busarello, Bieging e Ulbricht (2015, p.9):

> Com o advento das novas tecnologias as práticas de ensino vêm se renovando e, com isso, ampliando as possibilidades no campo da aprendizagem. Antes, restrita a sala de aula, a mediação do conhecimento passou, em parte, a acontecer também no que chamamos hoje de sociedade em rede. A internet, bem o amplo acesso aos dispositivos móveis, têm renovado as práticas educacionais. Ignorar as atuais características sociais frente às práticas de ensino não é mais possível, tendo em vista a grande quantidade e a complexidade de informações em torno do indivíduo. Neste caso, a reflexão e o diálogo são de extrema importância para que se mantenham atuais as propostas de ensino e de aprendizagem.

Os PCN afirmam que a Matemática faz parte da vida das pessoas, por ela ter “sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos” (BRASIL, 1998, p. 59) e considera importante incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Comunicação. Em concordância com os PCN, sobre a Internet, Vilaça (2013, p. 16) afirma que ela “oferece diferentes possibilidades para o campo educacional. Ela pode ser, entre outras coisas, local de pesquisa, ferramenta de comunicação e um ambiente de aprendizagem”.

Assim, buscam-se resgatar uma parte da Matemática, as demonstrações, esquecidas pelas escolas e aliá-la às novas tecnologias e às novas práticas de ensino. Sugere-se trabalhar com as demonstrações matemáticas no Ensino Médio, tendo como foco a OBMEP por ter um papel fundamental na Educação, na motivação e descoberta de novos talentos. De fato, para que os PCN de Matemática possam cumprir seus propósitos, eles “destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações” (BRASIL, 1998, p. 60).

1.1 A MOTIVAÇÃO

É notório que uma certa quantidade de alunos, das diversas escolas espalhadas no Brasil, apresenta dificuldades em Matemática. Nossos docentes procuram se especializar, cada vez, mais em suas respectivas áreas a fim de melhorar a qualidade do ensino nas instituições onde trabalham. Percebe-se hoje, no Brasil, que as dificuldades de aprendizagem em Matemática trazem resultados insatisfatórios para quem trabalha na Educação e deixam o país com o IDEB abaixo de 5,0. As dificuldades de aprendizagem, de maneira geral, quase sempre se apresentam associadas a problemas de outra natureza, como comportamentais e emocionais. Para Garcia e Rodrigues (1998, p. 31-32) a dificuldade de aprendizagem:

> É um problema que está relacionado a uma série de fatores e podem se manifestar de diversas formas como: transtornos, dificuldades significativas na compreensão e uso da escuta, na forma de falar, ler, escrever, raciocinar e desenvolver habilidades Matemáticas. Esses transtornos são inerentes ao indivíduo, podendo ser resultantes da disfunção do sistema nervoso central, e podem acontecer ao longo do período vital. Podem estar também associados a essas dificuldades de aprendizagem, problemas relacionados às condutas do indivíduo, percepção social e interação social, mas não estabelecem, por si próprias, um problema de aprendizagem.

Esses resultados insatisfatórios são obtidos por meio de Avaliações de Aprendizagens que são coordenadas pelo INEP. Este órgão é

> Uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação - MEC, cuja missão é promover estudos, pesquisas e avaliações sobre o Sistema Educacional Brasileiro com o objetivo de subsidiar a formulação e implementação de políticas públicas para a área educacional a partir de parâmetros de qualidade e equidade, bem como produzir informações claras e confiáveis aos gestores, pesquisadores, educadores e público em geral. (BRASIL, 2018a, n.p.).

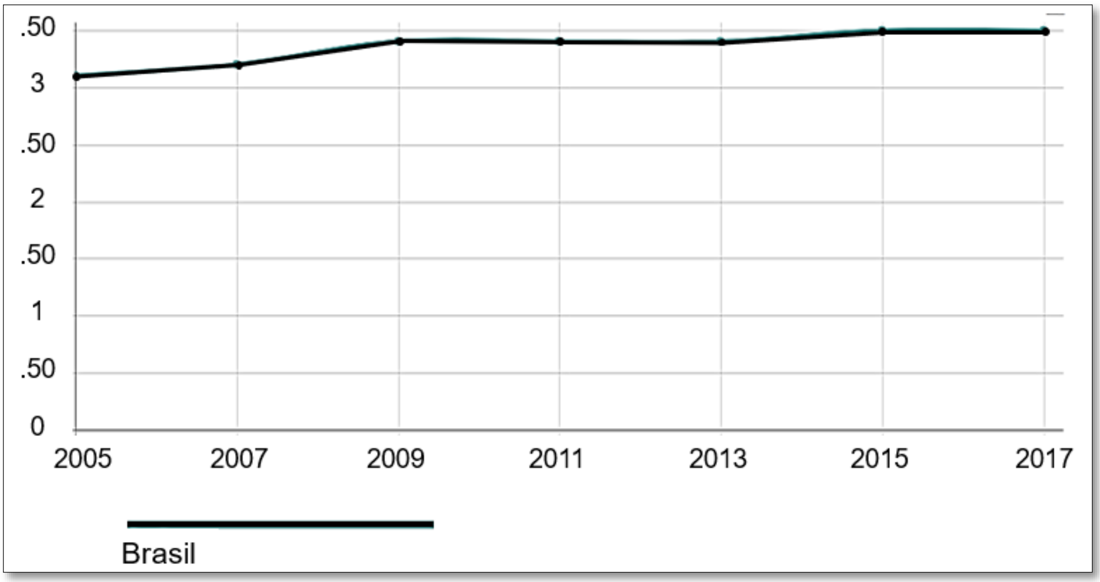
Para fins de definição, os tipos de Avaliação de Aprendizagem são:

> **IDEB** - O Ideb foi criado pelo INEP em 2007, em uma escala de zero a dez. Sintetiza dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da Educação: aprovação e média de desempenho dos estudantes em Língua Portuguesa e Matemática. O indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho nas avaliações do Inep, o Saeb e a Prova Brasil.
> **SAEB** - O Sistema de Avaliação da Educação Básica – Saeb é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica – Aneb e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – Anresc. A Aneb é realizada por amostragem das Redes de Ensino, em cada unidade da Federação e tem foco nas gestões dos sistemas educacionais. Por manter as mesmas características, a Aneb recebe

> o nome do Saeb [...] em suas divulgações. A Anresc é mais extensa e detalhada que a Aneb e tem foco em cada unidade escolar. Por seu caráter universal, recebe o nome de Prova Brasil em suas divulgações.
> **Prova Brasil** - A Prova Brasil é aplicada censitariamente aos alunos de 5º e 9º anos do ensino fundamental público, nas redes estaduais, municipais e federais, de área rural e urbana, em escolas que tenham no mínimo 20 alunos matriculados na série avaliada. A Prova Brasil oferece resultados por escola, município, Unidade da Federação e país que são utilizados no cálculo do Ideb.
> **Provinha Brasil** - A Provinha Brasil é uma avaliação diagnóstica do nível de alfabetização das crianças matriculadas no segundo ano de escolarização das escolas públicas brasileiras. Essa avaliação acontece em duas etapas, uma no início e a outra ao término do ano letivo. (BRASIL, 2018a, n.p.).

Analisando um breve histórico da Educação Básica apresentado pelo IBGE, o IDEB de 2017 teve nota de 3,5 pontos de 10, o mesmo resultado de 2015, como mostra o Gráfico 1, abaixo:

Gráfico 1 - IDEB / Ensino Médio / Pública



Fonte: IBGE acesso em 24 de janeiro de 2020.

O Resumo Técnico do INEP de 2005 a 2017 salienta que com o IDEB:

> Ampliam-se as possibilidades de mobilização da sociedade em favor da Educação, difundindo e valorizando a cultura do aprendizado, uma vez que o índice é comparável nacionalmente e expressa em valores dois resultados muito importantes do processo educacional. A combinação de ambos tem o mérito de equilibrar as duas dimensões: se um sistema de ensino retiver seus alunos para obter maiores resultados no Saeb, o fator fluxo será prejudicado, indicando a necessidade de melhoria do sistema. Se, ao contrário, o sistema apressar a aprovação de alunos sem se preocupar com o

> aprendizado, o resultado das avaliações indicará igualmente a necessidade de melhoria do sistema, ou seja, para melhorar o Ideb, os sistemas de ensino devem melhorar simultaneamente as duas dimensões do indicador, fluxo escolar e desempenho nas avaliações. (BRASIL, 2017, p. 6).

Deduz-se, obviamente, que o baixo resultado no IDEB também pode refletir no acesso às Universidades e na consequente dificuldade enfrentada por esses alunos nas disciplinas iniciais dos cursos de Exatas, como o Cálculo Diferencial, Integral e Geometria Analítica. Para Masola e Allevato (2016, p. 64):

> Essas dificuldades e a falta de conhecimento de conteúdos matemáticos, segundo os professores das Instituições de Educação Superior em geral, e de onde desenvolvemos nossas atividades profissionais, dificultam a aprendizagem de conteúdos nas disciplinas iniciais dos cursos superiores em que o aluno está inserido, principalmente em Matemática. As dificuldades se refletem, também, em outras disciplinas na continuidade do curso, comprometendo o aluno em sua formação acadêmica.

O PISA é um estudo comparativo internacional, realizado a cada três anos pela OCDE. Segundo o INEP (BRASIL, 2018b), o PISA é um programa que oferece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos, vinculando dados sobre seus *backgrounds*[1] e suas atitudes em relação à aprendizagem e aos principais fatores que moldam sua aprendizagem, dentro e fora da escola. O Brasil participa do PISA desde a sua primeira edição em 2000 e o INEP é o órgão responsável pelo planejamento e operacionalização dessa avaliação no país, o que envolve representar o Brasil perante a OCDE.

O programa avalia três domínios – Leitura, Matemática e Ciências – em todas as edições ou ciclos, sendo avaliado um domínio principal a cada edição. Em relação ao letramento matemático[2], o PISA (BRASIL, 2018b, p. 97) relata que “foi avaliado como domínio secundário e, portanto, a avaliação abrangeu um número menor de estudantes e de itens”.

---

[1] *Background* é um termo de origem inglesa, onde *back* é o mesmo que costas ou atrás e *ground* significa chão. Da junção de ambas as palavras têm-se, em tradução para o português, “plano de fundo”.

[2] Letramento matemático é a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Segundo publicado no relatório do PISA (Brasil, 2018, p. 105), a Tabela 1, abaixo, mostra que a média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no PISA 2018 foi de 384 pontos, ou seja, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE que é 492 pontos. O INEP (BRASIL, 2019) relata que “Os 10% dos estudantes brasileiros com pior desempenho em Matemática no PISA 2018 obtiveram média de proficiência igual a 277, e os 10% de melhor desempenho, 501”.

Tabela 1- Médias e medidas de erro-padrão por edição dos países selecionados, Matemática - PISA 2018

PAÍS	2003			2006			2009			2012			2015			2018	
	MÉDIA	EP[1]	EP[2]	MÉDIA	EP[1]	EP[2]	MÉDIA	EP[1]	EP[2]	MÉDIA	EP[1]	EP[2]	MÉDIA	EP[1]	EP[2]	MÉDIA	EP[1]
Coreia	542	3.2	4.3	547	3.8	5.0	546	4.0	5.3	554	4.6	5.7	524	3.7	4.4	526	3.3
Canadá	532	1.8	3.3	527	2.0	3.8	527	1.6	3.9	518	1.8	3.8	516	2.3	3.3	512	2.4
Finlândia	544	1.9	3.4	548	2.3	3.9	541	2.2	4.2	519	1.9	3.8	511	2.3	3.3	507	2.0
Portugal	466	3.4	4.4	466	3.1	4.4	487	2.9	4.6	487	3.8	5.1	492	2.5	3.4	492	2.7
Espanha	485	2.4	3.7	480	2.3	3.9	483	2.1	4.1	484	1.9	3.8	486	2.2	3.2	481	1.5
Estados Unidos	483	2.9	4.0	474	4.0	5.1	487	3.6	5.0	481	3.6	4.9	470	3.2	4.0	478	3.2
Uruguai	422	3.3	4.3	427	2.6	4.1	427	2.6	4.4	409	2.8	4.4	418	2.5	3.4	418	2.6
Chile	-	-	-	411	4.6	5.6	421	3.1	4.7	423	3.1	4.6	423	2.5	3.4	417	2.4
México	385	3.6	4.6	406	2.9	4.3	419	1.8	4.0	413	1.4	3.6	408	2.2	3.2	409	2.5
Costa Rica	-	-	-	-	-	-	409	3.0	4.6	407	3.0	4.5	400	2.5	3.4	402	3.3
Peru	-	-	-	-	-	-	365	4.0	5.3	368	3.7	5.0	387	2.7	3.6	400	2.6
Colômbia	-	-	-	370	3.8	5.0	381	3.2	4.8	376	2.9	4.4	390	2.3	3.3	391	3.0
Brasil	356	4.8	5.6	370	2.9	4.3	386	2.4	4.3	389	1.9	3.8	377	2.9	3.7	384	2.0
Argentina	-	-	-	381	6.2	7.0	388	4.1	5.4	388	3.5	4.8	-	-	-	379	2.8
Panamá	-	-	-	-	-	-	360	5.2	6.3	-	-	-	-	-	-	353	2.7
República Dominicana	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	328	2.7	3.6	325	2.6

Fonte: Inep, com base em OCDE.

Notas:
1. EP1: estimativa de erro-padrão da média na edição avaliada.
2. EP2: estimativa de erro-padrão da média considerando os *linking errors* do PISA 2018.
3. Para manter a comparabilidade entre os ciclos, foram incluídos os resultados das escolas rurais do PISA 2012.

Fonte: Relatório PISA 2018 - acesso em 30 de janeiro de 2020.

Mesmo não falando de Universidades, existe o programa da OBMEP, que tem como seu público-alvo a Educação Básica e Superior. Este programa, objeto de estudo deste trabalho, foi criado em 2005 para estimular o estudo da Matemática, identificar talentos na área e contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica. Para alguns alunos, a OBMEP é um “bicho de sete cabeças”, pois acreditam que não têm capacidade de resolver as questões apresentadas e, consequentemente, nunca serão contemplados com alguma premiação por ser uma prova difícil, o que passa a ser um problema para os professores e para a Escola. Desse modo, para Santos, França e Santos (2007, p. 27), a Matemática, ao se configurar para os alunos como algo difícil de compreensão, sendo de pouca utilidade prática, produz representações e sentimentos que vão influenciar no desenvolvimento da aprendizagem. Afirmam ainda que,

> O fracasso do ensino de Matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da Matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos. (VITTI; D'AMBROSIO, 1996 apud SANTOS; FRANÇA; SANTOS, 2007, p.27).

Segundo Silva (2014), esse medo de Matemática, mostrado pelos alunos, é caracterizado por Seymour Papert como "Matofobia". "A Matofobia impede muitas pessoas de aprenderem qualquer coisa que reconheçam como Matemática, embora elas não tenham dificuldade com o conhecimento matemático quando não o percebem como tal" (PAPERT, 1985; apud SILVA, 2014). Segundo Felicetti (2009, p. 462-463):

> Muitas vezes o meio cria uma expectativa, um medo em relação à Matemática escolar, e não àquela que manipulam, quer bem ou não, no seu dia-a-dia. Inconscientemente, crianças, jovens, e adultos desenvolvem um bloqueio mental com relação a tudo que lhes parece Matemática. [...] Este medo vai perpassando com os alunos de série em série, trazendo um bloqueio à aprendizagem, criando tabus na escola e outros, visto que a forma na qual é trabalhada não a desmistifica, pelo contrário, aumenta sua complexificação.

Para Zacarias et al. (2008, p.13), "o fracasso do ensino e da aprendizagem é um dado real e questionado pelos que se interessam pela Educação como uma possibilidade de formar o cidadão crítico nos diferentes segmentos da sociedade".

Diante do exposto e com experiência adquirida ao longo de mais de 20 anos trabalhando como professor de Matemática na Educação Básica e Superior, buscou-se, juntamente com o orientador, trabalhar as demonstrações matemáticas, apresentando-as aos alunos como fator motivador para melhorar o rendimento escolar, criar o gosto pela disciplina, contribuir para minimizar essa problemática na aprendizagem, conseguir resultados satisfatórios nas Avaliações de Aprendizagem, alcançar condecorações na OBMEP e ajudar a melhorar a posição do Brasil diante da OCDE.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar as demonstrações matemáticas de forma clara, prática e objetiva para que venham a influenciar na preparação para a prova da OBMEP, estimulando o aluno a participar efetivamente das olimpíadas, de modo a buscar resultados satisfatórios, e ao mesmo tempo, a contribuir para melhoria do ensino da Matemática de qualidade, tendo como foco a Educação Básica.

1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal deste trabalho, é preciso alcançar os seguintes objetivos específicos:

1. Investigar os assuntos mais cobrados nas edições da OBMEP no período de 2005 até 2019.
2. Identificar se há programas de preparação nas escolas a nível nacional e a sua metodologia aplicada por meio de uma pesquisa destinada aos professores.
3. Identificar as dificuldades apresentadas nas resoluções das questões das provas da OBMEP, por meio de uma Avaliação Diagnóstica similar à prova.
4. Apresentar algumas demonstrações Matemáticas e teoremas para um grupo de alunos a fim de que eles se motivem para um estudo mais aprofundado na disciplina e que sirvam de estratégias para a resolução de questões da OBMEP.
5. Avaliar o aprendizado adquirido por meio de uma Avaliação Formativa.
6. Mensurar o grau de motivação dos alunos em relação ao programa da OBMEP por meio de um questionário.

1.3 A ESTRUTURA DO TRABALHO

A partir do objetivo principal proposto neste estudo, de apresentar as demonstrações matemáticas para que venha a influenciar na preparação dos alunos para as futuras edições das provas da OBMEP e, ao mesmo tempo, contribuir para melhoria do ensino da Matemática de qualidade, este trabalho foi dividido em cinco seções.

A primeira seção está relacionada à questão central deste trabalho e busca apresentar a motivação, os objetivos geral e específicos e a estrutura deste trabalho. A segunda seção apresenta o referencial teórico baseado na BNCC, na Aprendizagem Significativa - a teoria de David Ausubel, na OBM, na OBMEP, nos programas e conteúdos da OBMEP, no desempenho dos alunos do DF nos 15 anos de olimpíadas e em autores renomados como, D'Ambrosio (2011), Gil (2002), Hefez (2015), Leite (2008), Luckesi (2002), Libâneo (2006), dentre outros.

A terceira seção trabalha a metodologia, por meio de cinco subseções assim distribuídas: uma pesquisa, objetivando a busca de metodologias aplicadas em Rede Nacional, uma Avaliação Diagnóstica, objetivando mensurar o grau de conhecimento dos alunos num primeiro contato, um plano de aula voltado para as sequências e a progressão aritmética, uma Avaliação Formativa, a fim de verificar o grau de aprendizagem dos alunos após a explanação da aula e, finalizando, um questionário, aplicado logo após a Avaliação Formativa, com o propósito de mensurar o grau de motivação dos alunos frente à OBMEP.

A quarta seção aborda algumas demonstrações matemáticas a fim de fomentar futuros estudos de preparação para as provas da OBMEP e, na quinta seção, são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão apresentados os aspectos teóricos que fundamentam este estudo. Serão abordados tópicos sobre a BNCC, a Aprendizagem Significativa - a teoria de David Ausubel, a OBM, a OBMEP com seus diversos programas de incentivo ao estudo da Matemática, o conteúdo programático da OBMEP, a distribuição dos assuntos por prova da OBMEP de 2005 a 2019 e o desempenho dos alunos do DF nestas edições.

2.1 A BNCC

A BNCC "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017). Este documento foi criado com a finalidade de nivelar as escolas por um padrão mínimo de instrução e tem como um dos marcos legais a CF/88, que em seu Artigo 205 reconhece a Educação como direito fundamental compartilhado entre Estado, família e sociedade, ao afirmar que

> A Educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1988).

A própria CF/88, em seu Artigo 210, ainda reconhece que sejam "fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais" (BRASIL, 1988). Tendo como base estes dois marcos constitucionais, os Artigos 205 e 210 da CF/88, em 20 de dezembro de 1996, o Presidente da República sanciona e o Congresso Nacional decreta a Lei Nº 9.394 a qual estabelece diretrizes e bases da Educação Nacional. A LDB, em seu Inciso IV do Artigo 9º, salienta que cabe a União Federal estabelecer,

> em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum. (BRASIL, 1996).

Percebe-se que fica claro que as diretrizes nortearão os conteúdos mínimos para a formação básica. Esta formação deve ter uma Base Comum Nacional, assim, no seu Artigo 26, a LDB regulamenta uma Base Nacional Comum para a Educação Básica.

> Art. 26. Os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter Base Nacional Comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 2013).

Nesse contexto histórico, em 1997, nasce o referencial de qualidade para a Educação no Ensino Fundamental no País, os PCN para o Ensino Fundamental. Inicialmente esses parâmetros foram consolidados em 10 volumes referentes as quatro primeiras séries da Educação Fundamental (1º ao 5º ano). Neste sentido, o propósito do MEC é “apontar metas de qualidade que ajudem o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres” (BRASIL, 1997).

Em 1998, foram entregues aos professores os 10 volumes dos PCN das séries finais (6º ao 9º ano) do Ensino Fundamental. Esse documento norteador foi elaborado “com a intenção de ampliar e aprofundar um debate educacional que envolva escolas, pais, governos e sociedade e dê origem a uma transformação positiva no sistema educativo brasileiro” (BRASIL, 1988).

Após a conclusão dos trabalhos realizados com o Ensino Fundamental e com a colaboração de educadores de todo o País, em 2000, foram lançados os PCNEM “Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias” (BRASIL, 2000).

A partir de 2008, foram criados outros programas por meio de Decretos e Portarias aprimorando os estudos referentes à Base Nacional, mas somente em 2015 foi lançada a 1ª versão da BNCC que passou por aprimoramentos e, em 2016, o MEC, com a contribuição de profissionais entre professores e especialistas, disponibilizou a sua 2ª versão. Ainda em 2016, começou a ser redigida a 3ª versão e, em dezembro de 2017, a versão final foi homologada pelo MEC por meio da Portaria Nº 1.570. Ainda, no decorrer do tempo, houve debates e educadores de todo Brasil se mobilizaram para contribuir para a BNCC.

Finalmente, em 14 de dezembro de 2018, o MEC homologou o documento da BNCC para a etapa do Ensino Médio, premiando o Brasil com uma Base com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica. Esse documento final visa orientar a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas, de políticas para a formação de professores de produção de material didático e avaliação. Cabe destacar, como objeto de pesquisa deste trabalho, uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Médio que consta na BNCC é:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p.531).

Essa competência prevê um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de averiguar e de formular explicações e argumentos. Ao formular ideias com base em suas investigações, os alunos devem buscar contraexemplos para contestá-las e, quando necessário, buscar argumentos para validá-las. Essas validações devem trazer argumentos definitivos, incluindo a demonstração de proposições e não simplesmente baseadas em conhecimentos empíricos.

2.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA - A TEORIA DE DAVID AUSUBEL

A teoria da Aprendizagem Significativa, proposta pelo psicólogo norte-americano David Paul Ausubel, auxilia na fundamentação teórica deste trabalho. Assim, esta seção é dividida em quatro subseções, a primeira apresenta uma breve biografia de David Ausubel, a segunda aborda a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, a terceira descreve os pilares da teoria de David Ausubel e a quarta apresenta os motivos que justificam a escolha dessa teoria da aprendizagem para fundamentação deste trabalho.

2.2.1 Uma breve biografia de David Ausubel

De acordo com Soares, Peniche e Aviz (2017), o psicólogo norte-americano David Paul Ausubel nasceu em 25 de outubro de 1918, no Brooklin em Nova York.

Ele era filho de imigrantes judeus e nasceu em um momento histórico, em que a população judia sofria perseguições, como as que ocorreram durante a Revolução Russa (1917) e na Segunda Guerra Mundial (1939-1945) no Holocausto[3].

Segundo Camelo (2018), “David Ausubel (1918 - 2008), um dos ícones do Cognitivismo[4], dedicou parte de sua vida acadêmica à Psicologia Educacional, principalmente no tocante à forma como a aprendizagem ocorre”. Para Soares, Peniche e Aviz (2017) “esse histórico traumatizante da vida escolar durante a infância foi o principal motivo pelo qual David voltou seus olhos para o Âmbito Educacional”.

David Ausubel teve a sua primeira formação acadêmica em Psicologia (1939), pela University of Pensilvânia; em seguida, formou-se em Medicina (1943) na Middlesex University. Após prestar serviços médicos para os sobreviventes de Segunda Guerra Mundial, obteve seu Doutorado (1950) em Psicologia do Desenvolvimento, pela Universidade de Columbia. A partir dessa data, iniciaram suas primeiras publicações sobre a teoria de aprendizagem. Informações mais detalhadas sobre o currículo, as publicações, as universidades e centro de pesquisas onde David Ausubel trabalhou são encontradas no site www.davidausubel.org/index.html.

2.2.2 A teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

Segundo Moreira (1999, p.12), “uma teoria é uma tentativa humana de sistematizar uma área do conhecimento, uma maneira particular de ver as coisas, de explicar e prever observações, de resolver problemas”. O autor destaca, ainda, que uma teoria de aprendizagem é uma construção humana para interpretar sistematicamente a área do conhecimento que chamamos de aprendizagem.

Moreira (1999, p.13) diferencia os três tipos de aprendizagem: a Cognitiva é aquela que resulta no armazenamento organizado das informações na memória de

---

[3] O Holocausto foi a perseguição e o extermínio sistemático, burocraticamente organizado e patrocinado pelo governo nazista, de aproximadamente seis milhões de judeus pela Alemanha.

[4] A Psicologia cognitivista preocupa-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição, e tem como objetivo identificar os padrões estruturados dessa transformação. É uma teoria particular, cuja asserção central é a de ver, ouvir, cheirar etc., assim como lembrar, são atos de construção que podem fazer maior ou menor uso dos estímulos externos, dependendo da circunstância, isto é, das condições pessoais de quem realiza o processo.

quem aprende, a Afetiva é aquela que trata de experiências como prazer, dor, satisfação, alegria ou ansiedade e a Psicomotora se ocupa com respostas musculares adquiridas por meio de treino e prática. Segundo Moreira e Masini (1982, p.3), “cognição é o processo através do qual o mundo de significados tem origem” e “aprendizagem é um processo de armazenamento de informação, condensação em classes mais genéricas de conhecimentos, que são incorporados a uma estrutura no cérebro do indivíduo, de modo que esta possa ser manipulada e utilizada no futuro.”

Ausubel propõe uma explicação teórica de aprendizagem do ponto de vista cognitivista, ou seja, aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva[5]. Ele entendia que “as novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo”, de modo que esses conceitos funcionem como um ponto de ancoragem para as novas ideias. Assim, Para Ausubel, a aprendizagem significativa é

> um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, neste processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como subsunçor[6], existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. (MOREIRA; MASINI, 1982, p.7).

Para Ausubel, o armazenamento dessas novas informações é altamente organizado no cérebro humano e forma uma hierarquia baseada em conceitos, em que os elementos mais específicos de conhecimento são ligados a conceitos mais gerais e inclusivos.

Para Farias (2018, p.24), “A ideia central desta teoria é a de que, um novo conhecimento só adquire significado a partir da interação com conhecimentos já estabelecidos na mente do aprendiz que tragam significados”. Neste contexto e em consonância com Farias (2018), a ideia central da teoria ausubeliana é o conhecimento prévio do aluno adquirido na sua vivência, pois, a partir dele, serão

---

[5] A estrutura cognitiva é entendida como “conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização, ou conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos” (MOREIRA; MASINI, 1982, p.4).

[6] O termo subsunçor vem do verbo subsumir que significa inserir-se, ancorar-se, em um todo mais amplo.

estabelecidas novas relações e novos conhecimentos. Nesse sentido, Camelo (2018, p.7) entende que é “fundamental que o professor saiba quais são os pré-requisitos que seus alunos devem possuir, para, então, possibilitar a ancoragem do novo conteúdo”. Do contrário, o novo conteúdo não encontrará estrutura cognitiva preparada para recebê-lo.

2.2.2.1 Aprendizagem Mecânica x Aprendizagem Significativa

Segundo Moreira e Masini (1982, p.9), Ausubel não estabelece uma distinção entre a Aprendizagem Mecânica e a Significativa, ou seja, não há uma dicotomia e sim um continuum. Segundo Silva, Moura e Del Pino (2017), Ausubel considera, para tanto, a existência de algum tipo de associação no processo da Aprendizagem Mecânica, mas não de interação, conforme ocorre no processo da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel, a Aprendizagem Mecânica é definida como a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com os conceitos existentes na estrutura cognitiva. Esta nova informação é armazenada de maneira arbitrária, não havendo interação com a que já está armazenada. Esse novo conhecimento fica distribuído arbitrariamente na estrutura cognitiva sem ligação com subsunçores específicos, por exemplo, a memorização de fórmulas e conceitos na Matemática. Ausubel afirma ainda que:

> essa distinção não deve ser confundida com a que há entre aprendizagem por descoberta a aprendizagem por recepção. Segundo Ausubel, na aprendizagem por recepção, o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final, enquanto que a aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido é descoberto pelo aprendiz (MOREIRA; MASINI, 1982, p.9).

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980 apud CAMELO, 2018, p. 7), a aprendizagem receptiva pode ser automática (mecânica) ou significativa, mas em ambos os casos “todo o conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado ao aluno sob a forma final. Do aluno exige-se somente internalizar ou incorporar o material que é apresentado de forma a tornar-se acessível ou reproduzível em alguma ocasião futura”. Afirma ainda que “na aprendizagem por descoberta, o conteúdo principal daquilo que será aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes que possa ser significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva”. Assim, Moreira e Masini (1982) concluem que, após a descoberta em si, a aprendizagem só é significativa se o conteúdo descoberto ligar-se a conceitos subsunçores relevantes já existentes na estrutura cognitiva.

2.2.2.2 Condições necessárias para a Aprendizagem Significativa

Segundo Moreira e Masini (1982), para Ausubel, a natureza do processo de Aprendizagem Significativa está em que as ideias sejam relacionadas de maneira não arbitrária e substantiva ao que o aprendiz já sabe. A Aprendizagem Significativa propõe que:

a) o material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, isto é, se relacione a sua estrutura de conhecimento de maneira não arbitrária e substantiva;
b) o aprendiz tenha disposição de relacionar o novo material de maneira substantiva e não arbitrária a sua estrutura cognitiva.

Segundo Camelo (2018), Ausubel afirma que, para um conteúdo ser “potencialmente significativo”, dois fatores primordiais devem ser considerados:

> 1º) a natureza do assunto a ser aprendido, ou seja, aquilo que será ensinado deve ter coerência lógica (fazer sentido);
> 2º) a natureza da estrutura cognitiva de cada aluno, isto é, é necessário que o conteúdo ideacional relevante esteja disponível na estrutura cognitiva de um determinado aluno. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p. 9).

Quando Ausubel pressupõe que o aprendiz tenha disposição de relacionar o novo material de maneira substantiva e não arbitrária, ele quer dizer que:

- “não arbitrária” quer dizer que o conteúdo não pode ser ensinado de modo aleatório, precisa ter uma consistência lógica. Um aluno pode facilmente memorizar a fórmula da Progressão Aritmética. Entretanto, essa proposição não poderá ser aprendida significativamente, a menos que ele saiba previamente a definição de sequência, de razão e termo geral de uma PA. Dessa forma, memorizar a fórmula do termo geral da PA não será potencialmente revelador a esse aprendiz.
- “substantiva” quer dizer que o conceito que se está aprendendo pode ser expresso através de uma linguagem sinônima, pois irá remeter exatamente

ao mesmo significado, isto é, o aprendiz não precisa “decorar” o que lhe foi transmitido, pois ele “entendeu” o conteúdo a ponto de formular com suas próprias ideias.

2.2.3 Os pilares da teoria de Ausubel

Segundo Aragão (1976, p.10), Ausubel entende que:

> a verdadeira natureza da Educação, enquanto instrução adequadamente fornecida, implica na seleção, organização, interpretação e arranjo sequencial de material de aprendizagem - em conhecimento - e em experiências de pessoas pedagógica e academicamente competentes [...] a Educação não termina quando os alunos deixam a escola no fim do dia ou no dia da formatura, deve-se ensinar os alunos a aprender sozinhos, pois tais aspectos da Educação, [...] não tem dicotômicos ou mutuamente exclusivos. Nesta consideração, distingue o desejo de que os alunos devotem parte do seu tempo na escola em adquirir capacidade de localizar, interpretar e organizar informações, de quaisquer necessidades de incluir entre estas a função educacional - responsabilidade primordial - de estruturar conteúdos de aprendizagem. Os professores, segundo ele, não podem em “*good consience*” abdicar desta responsabilidade, [...], a direção da Educação.

Nesse contexto, baseado que “a teoria de Ausubel, limita-se à natureza e às condições significativas que ocorre em sala de aula” (ARAGÃO, 1976, p.19), aqui serão analisados, sumariamente, os atores participantes dessa Aprendizagem Significativa: O professor, o aluno, a avaliação e o material de ensino.

2.2.3.1 O Professor

Com o advento das novas tecnologias e com a velocidade das informações, hoje existem inúmeros recursos que auxiliam o aprendizado do aluno fora da sala de aula e, consequentemente, reduz-se a influência do professor no processo de ensino, entretanto, aqui, limita-se à sala de aula. Ausubel considera que o propósito do papel do professor expandiu-se muito do original para incluir novas funções como substituto de pai ou de mãe, amigo, confidente, etc. Contudo, considera que “é inegavelmente verdadeiro que o papel mais importante e distintivo do professor na sala de aula moderna ainda é o de diretor de atividades de aprendizagem” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.10).

Ausubel também argumenta que as características do professor, como: aptidões intelectuais, personalidade, capacidade de manter disciplina na sala de aula, apresentação e organização do conteúdo e a forma de ensinar, podem exercer ou não influência na Aprendizagem Significativa. Para ele, “o grau de preparo na matéria e o rendimento ou nível de inteligência do professor não são imprescindíveis para promover bons resultados da aprendizagem dos alunos” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.10). Afirma ainda que.

Certo nível de inteligência é, obviamente, necessário para ensinar com eficácia. Mas além deste ponto crítico, a inteligência dos professores pode não estar significativamente relacionada com os resultados da aprendizagem nos alunos (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.10).

Para isso, Ausubel defende que é mais importante que o professor seja “instrucionalmente eficiente” na aula do que muito querido e popular. Para Camelo (2018, p.11), essa eficiência considera que o professor consiga:

- manter a disciplina em sala, de modo a tornar o ambiente o mais adequado possível para a aula, eliminando os distratores, coibindo conversas e atividades paralelas;
- identificar quais os pré-requisitos que os alunos devem ter para assimilarem o novo conteúdo;
- diagnosticar seu aluno, isto é, descobrir, antes de iniciar um novo conteúdo, se o estudante detém os subsunçores necessários para ancorar as novas informações;
- motivar seus alunos para que eles realmente mobilizem todo esforço necessário à assimilação do novo conteúdo;
- promover em seus alunos a aquisição dos subsunçores específicos, quando inexistentes, por meio de aulas extras e listas de exercícios direcionadas;
- organizar o material de ensino de modo a torná-lo potencialmente significativo;
- explicar o novo conteúdo de maneira didática [...], isto é, suficientemente não arbitrária e de forma substantiva;
- avaliar seus alunos de modo a inferir se eles, de fato, aprenderam significativamente.

Por fim, um dos maiores trabalhos do professor consiste “em auxiliar o aluno a assimilar a estrutura das disciplinas e a reorganizar sua própria estrutura cognitiva, mediante a aquisição de novos significados que podem gerar conceitos e princípios” (MOREIRA; MASINI, 1982, p.41).

2.2.3.2 O Aluno

Comentou-se, na seção anterior, que o professor tem um papel fundamental na Aprendizagem Significativa, pois, a partir da sua experiência e de seu planejamento, o aluno terá uma maior receptividade do conteúdo e que este irá interagir com os conhecimentos prévios potencializando a estrutura cognitiva. Assim, Aragão (1976, p. 28) ressalta que:

> A aprendizagem receptiva significativa é caracterizada pela forma de proposição do material de aprendizagem: a ideia a ser aprendida é apresentada ao aluno na sua forma final ou próximo desta. Nessas circunstâncias, solicita-se simplesmente que este a compreenda e incorpore à sua estrutura cognitiva de forma que esta se torne disponível para utilização futura.

Para que a Aprendizagem Significativa seja evidenciada, Camelo (2018) destaca que o papel do aluno é fundamental, pois este precisa fazer o esforço necessário para a assimilação do conteúdo. Entretanto, em sala de aula, o aluno precisa estar concentrado, motivado e não se submeter a conversas paralelas e distrações. Finalizando, Ausubel considera que:

> O aluno deve também buscar uma participação completa através de um aprendizado ativo e crítico, tentando compreender e reter o que é ensinado, integrando novas informações a informações obtidas em experiências anteriores e experiência idiossincrática, traduzindo novas proposições para uma linguagem própria, dedicando um esforço necessário para dominar dificuldades inerentes a novos aprendizados, formulando questões pertinentes e envolvendo-se conscientemente na solução de problemas que lhe são dados para resolver. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.10).

2.2.3.3 O material de ensino

Segundo Moreira e Masini (1982, p.31), aprender um novo conceito depende de propriedades existentes na estrutura cognitiva, do nível de desenvolvimento do aprendiz, de sua habilidade intelectual, bem como da natureza do conceito em si e do modo como é apresentado. Assim, para apresentar um novo conceito, é preciso que o professor prepare um material de ensino adequado para cada momento.

Ausubel destaca a importância do papel do material de ensino na Aprendizagem Significativa quando ressalta que:

> Acreditamos que um dos caminhos mais promissores para se melhorar o aprendizado escolar seja através da melhoria dos materiais de ensino. Os fatores mais significativos que influenciam o valor, para o aprendizado, dos materiais de ensino referem-se ao grau em que estes facilitam uma aprendizagem significativa. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.13).

Portanto, para um planejamento de ensino eficiente, segundo a teoria de Ausubel, é preciso montar um material consistente e “a primeira e usualmente difícil tarefa é a identificação dos conceitos básicos da matéria de ensino e de como eles estão estruturados” (MOREIRA; MASINI, 1982, p.42). No mesmo sentido, Camelo (2018, p.13) ressalta que o planejamento de ensino gera “uma reflexão sobre qual atividade de aprendizagem melhor se adéqua à estrutura cognitiva existente do aluno a fim de ele incorporar os conceitos e habilidades identificados no plano curricular”.

Finalizando, para que o aluno agregue os novos conceitos à sua estrutura cognitiva, é necessário um planejamento de ensino adequado e organizado. É fundamental destacar a importância da tarefa, a organização do material didático a ser apresentado e a maneira como ele será utilizado, com ou sem a utilização de recursos didáticos que facilitem a aquisição dos novos conceitos.

2.2.3.4 A avaliação

Para Ausubel, “avaliar significa emitir um julgamento de valor ou mérito, examinar os resultados educacionais para saber se preenchem um conjunto particular de objetivos educacionais” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, apud CAMELO, 2018, p.12).

Ausubel, Novak, Hanesian (1980, apud CAMELO, 2018, p.12), em outras palavras, destaca que, na teoria ausubeliana, a avaliação exerce um papel central para que a Aprendizagem Significativa ocorra e apresenta três motivos:

- a aplicação de uma avaliação diagnóstica é importante para que se tenha um perfil do aluno, isto é, verificar seu grau de conhecimento em relação aos assuntos a ser abordado;

- a aplicação de avaliações intermediarias, durante o processo de aprendizagem, pois possibilita corrigir possíveis falhas e consolidar os objetivos propostos;
- a aplicação de avaliações permite verificar a eficácia de diferentes métodos de ensino e das diferentes maneiras de organizar e sequenciar os assuntos.

Por fim, considera-se que a avaliação é um instrumento importante dentro do processo da aprendizagem que vai desde diagnosticar o perfil do aluno, direcionar as atividades e planejamentos até mensurar se os objetivos propostos estão sendo atingidos.

2.2.4 A motivação para adotar a teoria de David Ausubel

A experiência adquirida, em mais de 20 anos trabalhando como professor de Educação Básica e Superior, também fundamenta este trabalho, pois, ao longo desse tempo, foram vistos alunos com dificuldades de aprendizagem, por diversos motivos, e alunos que se destacaram por possuir uma facilidade no aprendizado, especialmente em Matemática. Assim, ao estudar sumariamente as teorias de aprendizagem para fundamentar o propósito deste projeto, este acadêmico identificou-se mais com a teoria cognitiva de Ausubel, pois, durante as pesquisas realizadas sob as diretrizes do orientador, dois fatos chamaram a atenção. O primeiro deles, diz respeito ao que o aluno já tem de conhecimento, pois: “O fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Determine isso e ensine-o de acordo” (MOREIRA; MASINI, 1982, p.88).

O segundo refere-se ao fato de que, muitas vezes, o aluno memoriza fórmulas e soluções e isto chega a prejudicá-lo quando se muda uma palavra ou uma incógnita no problema em que ele está trabalhando. Segundo Moreira e Masini (1982, p.15).

> Ausubel argumenta que uma longa experiência em fazer exames faz com que os alunos se habituem a memorizar não só proposições e fórmulas, mas também causas, exemplos, explicações e maneiras de resolver “problemas típicos”.

Essas citações embasam perfeitamente este projeto, pois procura-se aproveitar o que o aluno já sabe, mensurado por meio de uma Avaliação Diagnóstica, e agrega novos conhecimentos, apresentando novas teorias e demonstrações, para formar uma estrutura cognitiva potente, quebrando, assim, o paradigma da memorização e preparando o aluno para algum exame.

Acredita-se, com base na teoria ausubeliana, que é possível sair da zona de conforto e realmente enfrentar os desafios da Educação de hoje. A frase de Ausubel, citada no início desta seção, é motivadora para este acadêmico, pois a sua aplicabilidade na Matemática é coerente. Se o aluno não dominar os conhecimentos prévios, dificilmente terá progressos. Para Camelo (2018), conhecer os pré-requisitos, isto é, identificar o que o aluno sabe deles e, a partir daí, elaborar estratégias para ensinar o novo conteúdo constitui algo perfeitamente aplicável à realidade na qual o professor está inserido.

2.3 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

2.3.1 A OBM

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição na qual participam estudantes do Ensino Fundamental, Médio e Superior de Instituições Públicas e Privadas de todo o Brasil. O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a SBM[7] são as duas Instituições responsáveis pela realização das atividades inerentes a OBM. De acordo o site oficial da OBM, a Comissão Gestora e a Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da SBM são as responsáveis pela coordenação das olimpíadas, sendo que esta tem a atribuição da preparação das provas e soluções da OBM, bem como definir os critérios de correção e premiação (OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020). Ainda, de acordo com seu site oficial:

---

[7] A SBM é uma entidade civil, de caráter cultural e sem fins lucrativos, fundada em 1969, durante o VII Colóquio Brasileiro de Matemática, em Poços de Caldas-MG e tem por principais finalidades: congregar os matemáticos e professores de Matemática do Brasil, estimular a realização e divulgação de pesquisa de alto nível em Matemática, contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis, estimular a disseminação de conhecimentos de Matemática na sociedade, incentivar e promover o intercâmbio entre os profissionais de Matemática do Brasil e do exterior, zelar pela liberdade de ensino e pesquisa, bem como pelos interesses científicos e profissionais dos matemáticos e professores de Matemática no país, contribuir para o constante aprimoramento de altos padrões de trabalho e formação científica em Matemática no Brasil e oferecer assessoria e colaboração, na área de Matemática, visando o desenvolvimento nacional (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020).

> As Olimpíadas de Matemática, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo Leste Europeu, culminando em 1959, com a 1ª Olimpíada de Matemática, na Romênia. (OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020).

A 1ª OBM ocorreu em 1979 e foi organizada pela SBM. Com o passar do tempo, as edições das provas da OBM foram sendo reajustadas até o formato dos dias atuais. Em 1991, a edição da OBM passou a ter dois níveis. O Nível Júnior, para alunos completando no máximo 15 anos de idade em 1991 e o Nível Sênior para alunos cursando o Ensino Médio. Em 1992, a olimpíada passou a ocorrer em duas Fases, a 1ª Fase contendo 25 questões de múltipla escolha e a 2ª Fase, realizada em 2 dias, com 3 problemas em cada dia. Outra mudança foi que o Nível Júnior passou a ser para alunos cursando até a 8ª série. Em 1993, a 2ª Fase do Nível Júnior volta a ser realizada em apenas 1 dia e com 5 problemas. Em 1995, a OBM faz alterações no Nível Júnior que volta a ser para estudantes até 15 anos de idade.

Em 1998, as mudanças foram mais significativas, as provas da OBM passaram a ser em 3 níveis e 3 fases. O Nível I: 5ª e 6ª séries, o Nível II: 7ª e 8ª séries e o Nível III: Ensino Médio. A 1ª Fase com 20 ou 25 questões de múltipla escolha, a 2ª Fase com uma prova aberta contendo 6 questões e a 3ª Fase com 5 questões abrangendo os Níveis I e II e 6 questões de Nível III realizada em 2 dias.

Em 1999, as provas do Nível II passam a ser realizadas em 2 dias. Em 2001, foi criado o Nível Universitário em 2 fases. A última mudança ocorreu em 2017, pois as provas da OBM se integram às provas da OBMEP, realizando apenas uma única fase para os 3 níveis, com exceção do Nível Universitário que permanece em 2 fases.

2.3.2 A OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada em 2005, por iniciativa do diretor-geral do IMPA, César Camacho, e da presidente da SBM, Suely Druck, com o apoio da Presidência da República e do governo federal, especialmente do MCTIC (INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2018, p. 12). A fim de estimular o estudo da Matemática e buscar novos talentos na área, a OBMEP traçou seus objetivos principais, os quais são descritos a seguir:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática;
> - Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
> - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
> - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
> - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
> - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2018).

Para alcançar esses objetivos, o portal da OBMEP apresenta uma série de programas que estimulam a preparação dos alunos e professores das diversas escolas públicas e privadas do Brasil. Esses programas foram desenvolvidos, ao longo dos anos, desde o surgimento da OBMEP. Com o avanço das tecnologias de informação e comunicação e a facilidade de acessar a internet nos dias atuais, esses programas podem ser acessados pelo aparelho celular e podem ser trabalhados pelos professores em seus programas de preparação para as provas na Escola. A seguir apresentam-se os programas disponibilizados pela organização da OBMEP.

2.4 PROGRAMAS ORGANIZADOS PELA OBMEP

O texto, apresentado nesta seção, foi adaptado de informações extraídas do site da OBMEP, disponível no endereço eletrônico www.obmep.org.br acessado em 4 de janeiro de 2020. Informações complementares relativas a esses programas podem ser encontradas diretamente no site da OBMEP.

- PIC

O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) tem como público-alvo os alunos medalhistas da OBMEP. Este programa é realizado por meio de uma rede nacional de professores em polos espalhados pelo País. É um programa que dá oportunidades ao aluno, premiado em cada edição, de ampliar seus conhecimentos por meio de novas questões dentro do ramo da Matemática. Outro objetivo do PIC é preparar o estudante para que se tenha um desempenho acadêmico e profissional mais satisfatório. O programa funciona com encontros presenciais ou virtuais, isso dependerá a situação do aluno. Nas atividades do programa que constam na plataforma de EAD, há discussões virtuais por meio de fóruns online e execução de tarefas com objetivos específicos. A equipe do PIC é formada por professores orientadores, coordenadores e moderadores de fórum e coordenadores orientadores. Cada uma dessas pessoas possui uma ação específica voltada para o aluno medalhista.

- Portal do Saber

O Portal do Saber da OBMEP tem como objetivo oferecer, aos alunos e professores, material de ensino de Matemática e Física gratuito e *online*. No portal, existe uma variedade de materiais relacionados à grade curricular que vai do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. O Portal dispõe de videoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico, interativo e testes dependendo do assunto. O interessante do Portal é que os materiais estão organizados em módulos que tratam de assuntos específicos, pois lá existem conteúdos que não são abordados durante o ano letivo em algumas Escolas Públicas. No Portal, ainda pode-se realizar teste com perguntas de múltipla escolha ou dissertativas a fim de que o aluno exercite seus conhecimentos adquiridos ao longo do acesso à plataforma. O interessante é que o aluno pode obter um certificado *online*.

- OBMEP Nível A

A OBMEP Nível A é uma olimpíada voltada para alunos do $4°$ e $5°$ anos do Ensino Fundamental das Escolas Públicas. Esta olimpíada teve sua 1ª edição em 2018 e a 2ª edição ocorreu 2019, realizada pelo IMPA, com apoio da SBM, do MCTIC e do MEC.

Na edição de 2019, o público-alvo foram os alunos de $4°$ e $5°$ ano do Ensino Fundamental, regularmente matriculados em Escolas Públicas Municipais, Estaduais e Federais e os alunos matriculados em outras modalidades, como EJA, aptos a participar desde que sua série escolar corresponda ao $4°$ ou $5°$ ano do Ensino Fundamental.

- Banco de Questões e Provas Anteriores

Acredita-se que, uma boa preparação para as provas da OBMEP, o estudante deve conhecer o tipo de questão abordada na prova. Para isso, deve se exercitar com questões de provas anteriores para se familiarizar com a nomenclatura, as dificuldades apresentadas durante a prova, o controle emocional, o controle do tempo e a forma com que deve expressar suas ideias, caso participe da prova discursiva da 2ª Fase. Do exposto, se o estudante se prepara individualmente e se tiver iniciativa, ele pode acessar o banco de questões e provas antigas disponibilizadas no *site* da OBMEP. Lá se encontram inúmeras questões resolvidas na forma de apostilas e separadas em volumes. Cada volume apresenta uma seleção de problemas, similares aos problemas das provas, divididos por níveis e por assuntos. Os professores podem montar seus respectivos programas de preparação, utilizando esses materiais disponíveis, pois no mesmo endereço eletrônico, encontram-se todas as provas anteriores resolvidas e com soluções em vídeo.

- Portal Clubes de Matemática

Este projeto foi concebido para disponibilizar problemas interessantes de Matemática, além de oferecer ambientes interativos nos quais será possível desenvolver, pesquisar e criar atividades Matemáticas de forma ampla e divertida. Nesses espaços para estudar Matemática, alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio poderão participar de atividades como gincanas, discussão de filmes, resolução de problemas, jogos, além de filmagens e atividades que utilizam programas de geometria dinâmica. A participação nos Clubes de Matemática da OBMEP não é restrita a alunos de Escolas Públicas, e um mesmo Clube poderá ter membros com níveis de escolaridade diferentes. Universitários e até mesmo professores de Matemática também poderão participar.

- Poti

O programa é destinado aos estudantes interessados que desejam se preparar para as provas da OBMEP e OBM, que estejam regularmente matriculados no 8° ou no 9° ano do Ensino Fundamental ou em qualquer uma das séries do Ensino Médio. A finalidade principal dessa iniciativa é obter um melhor desempenho dos estudantes brasileiros nas olimpíadas (OBMEP e OBM) por meio do financiamento de aulas presenciais em Polos que apresentem demanda e estrutura adequada para tal.

- PICME

O PICME é um programa que oferece aos estudantes universitários que se destacaram nas olimpíadas de Matemática (medalhistas da OBMEP ou da OBM) a oportunidade de realizar estudos avançados em Matemática simultaneamente com sua graduação. Os participantes recebem as bolsas por meio de uma parceria com o CNPq (Iniciação Científica) e com a CAPES (Mestrado). O programa é coordenado em nível nacional pelo IMPA e ofertado por Programas de Pós-Graduação em Matemática de diversas universidades espalhadas pelo país.

- Programa OBMEP na Escola

Este é um programa direcionado aos professores de Matemática das Escolas Públicas e para os alunos de licenciatura em Matemática. O programa tem por objetivo estimular atividades extraclasses com o uso dos materiais da OBMEP, tais como provas anteriores e Bancos de Questões. Os professores e alunos de todo o país serão habilitados e preparados para desenvolver essa atividade em suas respectivas escolas ou em escolas vizinhas. É uma realização do IMPA, com apoio da SBM, realizado com recursos oriundos do contrato de gestão firmado pelo IMPA, o MCTIC e o MEC. O programa também recebe o patrocínio da Fundação Itaú Social por meio de bolsas oferecidas aos professores participantes.

Além disso, a SBM possui uma série de livros voltados para as olimpíadas, tais como: 10 matemáticos 100 problemas; Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções; Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 17ª a 24ª; 21 Aulas de Matemática Olímpica; Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 9ª a 16ª e Olimpíadas Brasileiras de Matemática – 1ª a 8ª.

Na intenção de difusão do conhecimento matemático, as publicações do IMPA, também, visam facilitar a tarefa de aprendizagem, a fim de estimular as vocações de jovens estudantes. Nesse contexto, destacam-se algumas publicações importantes na preparação dos alunos para a OBMEP:

1ª) Círculos de Matemática da OBMEP volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra de Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas. Este livro possui problemas selecionados, que foram extraídos de competições de Matemática para alunos do Ensino Fundamental. Segundo os autores, a obra é organizada por capítulos que possuem perguntas, apresentadas em ordem crescente de dificuldade e suas respectivas soluções. Os problemas cobrem duas áreas importantes da matemática, contagem e aritmética, e podem servir como uma forma divertida de aprender esses assuntos.

2ª) Círculos Matemáticos: a Experiência Russa de Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg. Esse livro é baseado na ideia de que o estudo da matemática pode gerar o mesmo entusiasmo que praticar um esporte com um time não necessariamente competitivo.

3ª) Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana de Sergey Dorichenko. Esse livro apresenta materiais empregados no curso anual de um círculo matemático organizado pela Faculdade de Matemática da Universidade Estatal de Moscou. Cada conjunto de problemas tem uma estrutura análoga, ou seja, combina revisões de tópicos anteriores com a introdução de um tópico novo, apresentando problemas em níveis crescentes de dificuldade.

4ª) Uma década do Círculo Matemático de Berkeley: a experiência americana de Zvezdelina Stankova e Thomas Rike. Esse livro é baseado em materiais de uma dúzia das 320 sessões do Círculo Matemático de Berkeley (CMB), ao longo dos últimos 10 anos. O CMB possui assuntos cobrados atualmente nas olimpíadas, como: análise combinatória, transformações geométricas, sequências recursivas, séries, teoria dos conjuntos, grupos, teoria dos números e muito mais.

2.5 CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DA OBMEP

Em 2019, as provas da OBMEP foram realizadas em 2 fases, sendo que a primeira era composta por uma prova objetiva e a segunda por uma prova discursiva. A OBMEP disponibiliza o material didático de apoio, elaborado pelo IMPA, com o objetivo de ajudar os alunos interessados na preparação para as provas. As questões elaboradas e propostas nas provas da 1ª Fase apresentam conteúdos previstos nos PCN.

Na República Federativa do Brasil, os PCN são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo de orientar, por meio de normas, os educadores em alguns fatores fundamentais de cada disciplina. Esses parâmetros são destinados tanto para as Escolas Públicas quanto para as Escolas Privadas de acordo com cada nível escolar. Para o objetivo deste trabalho, destacam-se apenas os PCNEM. Segundo o site do MEC, os PCNEM

> são o resultado de meses de trabalho e de discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. (BRASIL, 2018).

Percebe-se que o Ensino Médio no País vem mudando, ao longo do tempo, e o MEC, juntamente com a sua equipe, vem estudando essas mudanças em acompanhamento com a evolução das novas tecnologias. Isso é de grande importância para os estudantes, pois devem se integrar ao o mundo contemporâneo, propiciando novos conhecimentos e preparando-os para o mercado de trabalho.

Dentro do Ensino Médio, é importante destacar o ensino da Matemática, pois seus conteúdos estão ligados à vida diária dos alunos, conforme consta na Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias dos PCN:

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do Ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as

> adequadamente no momento oportuno. [...] É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p.40).

A LDB, no seu Artigo 35, ressalta que o Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos e uma de suas finalidades, conforme consta no Inciso I, é: "I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos" (BRASIL, 1966).

> Com fundamentação no o Artigo 35 da LDB, acima, os PCNs dos 3º e 4º Ciclos desejam que: que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998, p.71).

- Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no 3° Ciclo.

Os PCN dividem os conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo em quatro grandes blocos que são: Bloco de Números e Operações, Bloco de Espaço e Forma, Bloco de Grandezas e Medidas e Bloco de Tratamento de Informação. Cada um desses blocos tem a sua importância na construção do conhecimento. Mostram-se, aqui, alguns conceitos e procedimentos previstos em cada Bloco que fazem uma relação direta com as questões da OBMEP.

No Bloco de Números e Operações, temos:

> Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de".
> [...] Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
> [...] Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.

> [...] Resolução de situações-problema que envolvem a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais.
> [...] Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. (BRASIL, 2000, p.71-72).

No Bloco de Espaço e Forma, temos:

> Composição e decomposição de figuras planas.
> [...] Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
> [...] Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. (BRASIL, 2000, p.72-73).

No Bloco de Grandezas e Medidas, temos:

> Reconhecimento de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo uso de terminologia própria.
> [...] Utilização de instrumentos de medida, como régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças para fazer medições, selecionando os instrumentos e unidades de medida adequadas à precisão que se requerem, em função da situação-problema.
> [...] Cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas.
> [...] Indicar o volume de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos utilizados para preencher seu interior. (BRASIL, 2000, p.73-74).

No Bloco de Tratamento da Informação, temos:

> Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, Tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
> [...] Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.
> [...] Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. (BRASIL, 2000, p.74-75).

- Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no 4° Ciclo.

No 4° Ciclo, se iniciam os trabalhos voltados para algumas demonstrações com o objetivo de entender certos significados e deixar um pouco de lado as memorizações. Por esse fato, para os PCN é desejável que “não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos” (BRASIL, 2000, p.86). Mostram-se, a seguir, alguns conceitos previstos que fazem uma relação direta com as questões da OBMEP.

Para o Bloco de Números e Operações, temos:

> Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.
> [...] Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
> [...] Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 2000, p.86).

Para o Bloco de Espaço e Forma, temos:

> Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
> [...] Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
> [...] Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
> [...] Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 2000, p.87-88).

Para o Bloco de Grandezas e Medidas, temos:

> Resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados.
> [...] Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência).
> [...] Cálculo do volume de alguns prismas retos e composições destes.
> [...] Estabelecimento da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado e a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo. (BRASIL, 2000, p.89-90).

Para o Bloco de Tratamento da Informação, temos:

> Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência.
> [...] Compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
> [...] Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
> [...] Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. (BRASIL, 2000, p.89-90).

Os conceitos e procedimentos, apresentados acima, são aqueles que possuem uma ligação direta com as questões inseridas nas provas da OBMEP de 2005 a 2019. Essas questões foram analisadas e apresentadas na Seção de Distribuição dos assuntos por prova. Para um estudo mais detalhado desses conceitos e fundamentos propostos, aconselha-se analisar mais profundamente os PCN (BRASIL, 2000) no site do MEC.

Em se tratando de Ensino Médio, os PCNEM, na parte de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+), trabalham com três temas estruturadores que, na visão do MEC, possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas e a articulação lógica de ideias e conteúdos matemáticos. Esses três temas estruturadores, abaixo descritos, são desenvolvidos em sincronia com as três séries do Ensino Médio:

Tema 01 - Álgebra: números e funções;

Tema 02 - Geometria e medidas;

Tema 03 - Análise de dados.

Cabe destacar ainda, que cada um desses temas:

> é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização. (BRASIL, 2000, p.120).

Para efeito de conhecimento, mostra-se aqui, resumidamente, as Unidades Temáticas de cada tema estruturador previsto nos PCN (BRASIL, 2018c, p.122-128). Os textos mostrados aqui foram retirados dos PCNEM, na parte de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+), com algumas adaptações.

Tema 01 - Álgebra: Números e Funções.

Os objetos de estudo deste tema são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas, cujos conteúdos a serem desenvolvidas são:

- **Variação de grandezas:** noção de função; funções analíticas e não analíticas; representação e análise gráfica; sequências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas;
- **Trigonometria:** do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.

Tema 02 - Geometria e Medidas

A Geometria é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. No Ensino Médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica e seus respectivos conteúdos propostos a serem desenvolvidas neste tema são:

- **Geometria plana:** semelhança e congruência; representações de figuras;
- **Geometria espacial:** elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos;
- **Métrica:** áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado;
- **Geometria analítica:** representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

Tema 03 - Análise de dados

A análise de dados tem sido essencial em problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas a saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado. Propõe-se que constitua o terceiro eixo ou tema estruturador do ensino, e tem como objetos de estudo os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades. Este tema pode ser organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade, cujos conteúdos são:

- **Estatística**: descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão;
- **Contagem**: princípio multiplicativo; problemas de contagem;
- **Probabilidade**: possibilidades; cálculo de probabilidades.

Finalizando, percebe-se que, para um bom desempenho nas provas da OBMEP, além de estudar os conteúdos previstos nos PCN, o aluno precisa estar apto para resolver problemas similares às provas e montar uma base sólida de Matemática por meio de teoremas e demonstrações. Para estar bem preparado para a OBMEP, têm-se disponível, para os alunos, os programas oferecidos pela OBMEP, contendo videoaulas explicativas dos conteúdos, provas anteriores resolvidas e comentadas, além de um material didático apresentado na forma de livros e que está separado por assuntos.

A próxima seção mostra os percentuais dos assuntos mais cobrados em provas anteriores da OBMEP no período de 2005 até 2019. Esses percentuais foram obtidos por meio de uma pesquisa documental detalhada em sintonia com os PCN. As questões foram estudadas e separadas por assuntos de acordo com as resoluções das provas anteriores apresentadas pela banca do concurso e a percepção deste acadêmico com a supervisão do professor orientador.

2.6 DISTRIBUIÇÃO DOS ASSUNTOS POR PROVA

Nesta seção, tendo como base os PCN, doravante, segue um levantamento realizado nas provas anteriores dos assuntos mais abordados no período de 2005 a 2019 nas 2 fases da OBMEP - Nível 3. O levantamento foi realizado com a percepção deste acadêmico com supervisão do professor orientador e com base nos PCN, como prevê o regulamento da OBMEP. Para identificar o assunto, utilizou-se como base a interpretação da questão e a resolução apresentada pela banca da OBMEP, disponibilizada no site oficial. Este levantamento tem por finalidade oferecer mais um subsídio aos alunos e professores que participam de programas de preparação para as provas da OBMEP ou àqueles que se preparam individualmente. Para fins de mostra de dados e organização na tabela de percentuais, optou-se em dividir os assuntos contidos nas questões em ramos da Matemática, conforme se apresenta, a seguir:

I - Aritmética (números e operações);

II - Álgebra (Funções e Equações Algébricas);

III - Geometria (Plana, Espacial e Analítica);

IV - Probabilidade e Estatística (Análise Combinatória);

V - Matemática Financeira (Porcentagem e Juros).

Com base nessa divisão, também foram levados em conta as unidades temáticas previstas no PCNEM e o Currículo em Movimento da Educação Básica - Ensino Médio, disponibilizado pela SEEDF.

Em relação ao currículo do Ensino Médio da SEEDF, ele caracteriza-se pela organização dos conteúdos em dimensões curriculares interdisciplinares. A Matriz Curricular na área de Matemática, segundo o currículo (GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL, 2018, p.14), foi dividida em três dimensões que são:

- Multiletramentos, cultura, sociedade e ética;
- Multiletramentos, tecnologia, informação e criatividade;
- Multiletramentos, lógica, análise e representação.

2.6.1 Assuntos das provas de 2005 a 2019 - 1ª Fase - Nível 3

A prova da 1ª Fase da OBMEP, atualmente, é constituída por 20 questões de múltipla escolha, cujos conteúdos estão previstos nos PCN. A Tabela 2, abaixo, mostra a frequência com que os assuntos aparecem nas provas da 1ª Fase da OBMEP - Nível 3, no período de 2005 até 2019.

Tabela 2 - Percentual dos assuntos (2005 a 2019 - 1ª Fase - Nível 3)

Ano	Aritmética	Álgebra	Geometria	Probabilidade Estatística	Matemática Financeira
2005	20,00%	15,00%	45,00%	10,00%	10,00%
2006	30,00%	20,00%	35,00%	10,00%	5,00%
2007	35,00%	20,00%	20,00%	15,00%	10,00%
2008	30,00%	25,00%	25,00%	20,00%	0,00%
2009	20,00%	40,00%	20,00%	20,00%	0,00%
2010	15,00%	20,00%	25,00%	35,00%	5,00%
2011	20,00%	20,00%	25,00%	35,00%	0,00%
2012	25,00%	30,00%	15,00%	30,00%	0,00%
2013	25,00%	25,00%	15,00%	30,00%	5,00%
2014	35,00%	20,00%	25,00%	20,00%	0,00%
2015	40,00%	20,00%	20,00%	20,00%	0,00%
2016	20,00%	20,00%	30,00%	25,00%	5,00%
2017	20,00%	25,00%	25,00%	30,00%	0,00%
2018	20,00%	25,00%	20,00%	35,00%	0,00%
2019	35,00%	15,00%	10,00%	35,00%	5,00%
GERAL	**26,00%**	**22,67%**	**23,67%**	**24,67%**	**3,00%**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se na Tabela 2, acima, que, apesar de haver uma maior frequência para Aritmética, os percentuais são bem parecidos. A pequena diferença entre esses percentuais nos mostra que os assuntos de Aritmética, com 26,00%, Álgebra, com 22,67%, Geometria, com 23,67% e Probabilidade/Estatística, com 24,67% estão bem equilibrados. A Matemática Financeira, com 3,00% apresenta-se com um percentual muito baixo, mostrando uma grande distância em relação aos demais assuntos. Mas isso não quer dizer que o aluno deve ignorar esse conteúdo, pois todos eles são importantes e estão previstos no regulamento da OBMEP.

2.6.2 Assuntos das provas de 2005 a 2019 - 2ª Fase - Nível 3

A 2ª Fase da OBMEP se caracteriza pela aplicação de uma prova discursiva constituída por 6 questões, cada uma delas valendo até 20 pontos, totalizando 120 pontos. A Tabela 3, abaixo, mostra a frequência com que os assuntos aparecem nas provas discursivas da 2ª Fase da OBMEP - Nível 3, aplicadas no período de 2005 até 2019. A classificação dos assuntos está baseada na interpretação deste acadêmico das questões apresentadas, com a supervisão do professor orientador, bem como nas soluções apresentadas pela banca da OBMEP.

Tabela 3 - Percentual dos assuntos (2005 a 2019 - 2ª Fase - Nível 3)

Ano	Aritmética	Álgebra	Geometria	Probabilidade Estatística	Matemática Financeira
2005	17,65%	23,53%	41,18%	11,76%	5,88%
2006	44,44%	27,78%	22,22%	0,00%	5,56%
2007	47,37%	21,05%	10,53%	10,53%	10,53%
2008	31,58%	15,79%	26,32%	26,32%	0,00%
2009	38,10%	23,81%	19,05%	19,05%	0,00%
2010	30,00%	20,00%	15,00%	35,00%	0,00%
2011	23,81%	28,57%	23,81%	23,81%	0,00%
2012	33,33%	14,29%	19,05%	33,33%	0,00%
2013	42,86%	33,33%	0,00%	23,81%	0,00%
2014	19,05%	9,52%	19,05%	52,38%	0,00%
2015	5,26%	15,79%	26,32%	52,63%	0,00%
2016	9,52%	38,10%	33,33%	19,05%	0,00%
2017	9,52%	28,57%	23,81%	38,10%	0,00%
2018	15,00%	35,00%	0,00%	50,00%	0,00%
2019	21,05%	15,79%	31,58%	31,58%	0,00%
GERAL	**25,84%**	**23,49%**	**20,47%**	**28,86%**	**1,34%**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Tabela 3, acima, percebe-se que o assunto de Probabilidade/Estatística, com 28,86%, apresenta uma maior frequência em relação aos demais. Mas os conteúdos de Aritmética, com 25,84%, Álgebra, com 23,49% e Geometria, com 20,47% apresentam percentuais semelhantes ao de Probabilidade/Estatística, no entanto, entende-se que todos esses conteúdos estão equilibrados. Assim como aconteceu na 1ª Fase, a Matemática Financeira, com 1,34%, também apresentou uma grande diferença em relação aos outros assuntos. Da mesma forma que foi dito anteriormente, o aluno não pode abandonar esse conteúdo durante sua preparação, pois todos os assuntos possuem a sua devida importância nas provas da OBMEP.

2.6.3 Assuntos das provas de 2005 a 2019 - Geral - Nível 3

A Tabela 4, abaixo, mostra a frequência com que os assuntos aparecem nas provas de 1ª e 2ª Fases da OBMEP - Nível 3, no período de 2005 até 2019. De uma maneira geral, nota-se que os conteúdos de Aritmética, com 25,92%, Álgebra com 23,08%, Geometria com 22,07% e Probabilidade/Estatística com 26,76% estão bem equilibrados. Há apenas uma disparidade de Matemática Financeira, com 2,17%, em relação aos demais conteúdos.

Tabela 4 - Percentual dos assuntos (2005 a 2019 - Geral - Nível 3)

Ano	Aritmética	Álgebra	Geometria	Probabilidade Estatística	Matemática Financeira
2005	18,92%	18,92%	43,24%	10,81%	8,11%
2006	36,84%	23,68%	28,95%	5,26%	5,26%
2007	41,03%	20,51%	15,38%	12,82%	10,26%
2008	30,77%	20,51%	25,64%	23,08%	0,00%
2009	29,27%	31,71%	19,51%	19,51%	0,00%
2010	22,50%	20,00%	20,00%	35,00%	2,50%
2011	21,95%	24,39%	24,39%	29,27%	0,00%
2012	29,27%	21,95%	17,07%	31,71%	0,00%
2013	34,15%	29,27%	7,32%	26,83%	2,44%
2014	26,83%	14,63%	21,95%	36,59%	0,00%
2015	23,08%	17,95%	23,08%	35,90%	0,00%
2016	14,63%	29,27%	31,71%	21,95%	2,44%
2017	14,63%	26,83%	24,39%	34,15%	0,00%
2018	17,50%	30,00%	10,00%	42,50%	0,00%
2019	28,21%	15,38%	20,51%	33,33%	2,56%
GERAL	**25,92%**	**23,08%**	**22,07%**	**26,76%**	**2,17%**

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.7 O DESEMPENHO DOS ALUNOS DO NÍVEL 3 NA 2ª FASE DA OBMEP

A Tabela 5, abaixo, mostra o desempenho dos alunos do Nível 3, na 2ª Fase, tendo como destaque o DF, perante as edições da OBMEP de 2005 até 2019. Os dados apresentados na Tabela 5 foram retirados do site da OBMEP e representam a quantidade de Medalhas de Ouro recebidas pelos alunos do DF durante os 15 anos de olimpíadas. Observa-se que a quantidade de medalhistas vem crescendo a cada ano, apesar de haver um decaimento de 2015 a 2017. No total, foram 52 medalhas de Ouro conquistadas pelos estudantes do DF.

Tabela 5 - Quadro de medalhas - DF (2005 a 2019 - Nível 3)

UF	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	SOMA
SP	21	24	23	20	15	12	14	15	16	13	9	16	14	11	19	242
MG	14	21	23	26	28	26	27	26	28	25	21	18	21	17	18	339
BA	7	5	11	5	5	3	2	4	4	3	7	5	3	0	2	66
CE	4	5	6	6	6	9	6	1	1	2	4	3	1	3	3	60
PR	13	6	7	6	4	6	4	9	2	11	14	10	7	5	5	109
RS	9	4	3	0	2	7	6	11	4	8	7	7	11	7	8	94
PA	1	0	0	0	0	0	0	1	3	3	0	0	1	1	1	11
SC	1	1	1	0	1	1	1	3	6	2	6	6	12	6	7	54
GO	1	0	0	1	0	2	0	3	2	5	4	1	1	3	0	23
RJ	8	12	9	25	17	14	23	11	18	9	15	14	7	11	7	200
MA	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	7
PI	0	0	0	0	0	2	1	1	3	2	2	3	4	6	2	26
AM	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4
MS	2	4	5	2	4	4	1	0	1	2	2	1	4	5	1	38
PE	9	5	7	3	4	2	4	3	1	4	2	4	3	4	4	59
MT	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
PB	0	0	0	0	1	0	0	1	2	2	1	0	1	2	1	11
AL	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	3	0	0	10
ES	3	2	2	2	4	4	2	1	1	5	3	4	4	11	7	55
RO	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
RN	3	4	0	0	3	4	2	3	3	0	2	4	1	1	3	33
DF	**1**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**1**	**1**	**1**	**6**	**9**	**52**
TO	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
SE	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	5
AC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RR	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
SOMA	100	100	101	101	100	103	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1505

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados de:
http://www.obmep.org.br/premiados.htm

Observa-se, na Tabela 6, que nos 15 anos de olimpíadas, houve mais de 50 mil inscrições feitas por alunos do DF na 2ª Fase da OBMEP. Para fazer um comparativo com as outras UF, procurou-se obter um percentual dividindo a quantidade de medalhas pelo número de inscrições realizadas pela UF na 2ª Fase da OBMEP – Nível 3. Assim, no DF, foram 52 medalhas para um total de 50452 inscritos na 2ª Fase do Nível 3. Desse modo, temos que o percentual foi de

$$\frac{52}{50452} * 100 = 0{,}1031\%.$$

A Tabela 7 mostra a posição do DF em relação às outras UF em todas as edições da OBMEP de 2005 até 2019 do Nível 3 na 2ª Fase. Nota-se que foram 3 primeiros lugares, 6 segundos lugares, 2 terceiros luares, 1 oitavo lugar e 3 décimos primeiros lugares. A Tabela 8 mostra a posição geral do DF em relação à quantidade total de medalhas de ouro pelo número total de inscrições. O Gráfico 2 nos dá uma visão geral da posição do DF em relação às outras UF.

Tabela 6 - Número de inscrições por UF (2005 a 2019 - Nível 3 - 2ª Fase)

UF	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	SOMA
SP	35076	53297	60404	53254	56806	60326	57295	59213	73218	71585	70721	68951	61626	61647	62528	905947
MG	20005	27094	31887	33158	33445	35457	30721	36490	42038	40098	41458	44537	43281	42058	42051	543778
BA	15623	19303	23153	24894	25859	26005	25732	19155	27463	26550	29672	28784	26818	27679	27294	373984
CE	12706	15579	16795	17500	17742	18655	18761	14284	23461	22385	18949	21838	20213	26743	24956	290567
PR	9669	14242	17219	16806	17356	16731	15942	17113	19622	19020	19661	19705	21812	20640	19324	264862
RS	6569	10135	13806	15507	16274	18074	15279	17731	18823	19183	19526	16862	19112	18889	19318	245088
PA	5190	9841	11868	13738	14889	15278	14881	15460	17846	15492	13267	14689	18139	19493	18863	218934
SC	4988	7969	12722	12130	13662	14572	13771	15067	16531	16982	15753	15184	14581	16102	15395	205409
GO	4822	7509	11382	12145	11827	12806	12731	11953	14176	13165	13746	15747	15594	12852	15334	185789
RJ	4501	7816	7814	9719	10428	10272	11385	11911	13736	13398	12454	10962	12314	11849	11908	160467
MA	4250	7466	8617	7807	9942	8738	11270	11233	13086	12367	8960	12718	11631	12515	11658	152258
PI	3952	5870	8950	6279	7945	11250	7185	8345	11036	10890	8711	10131	8922	10195	10117	129778
AM	3794	5756	6791	6810	6886	7250	7164	7239	8654	8410	8199	8946	9233	8698	8695	112525
MS	3335	5526	6468	5750	6118	6237	6543	6613	7326	7205	7390	8966	8160	9181	8296	103114
PE	3116	4466	5705	5439	5712	5877	5911	6200	7506	7243	7796	7218	7565	8008	7874	95636
MT	2447	3965	4510	4879	5314	6030	5262	5806	8380	6256	8039	6325	6380	6570	6558	86721
PB	1959	3437	4864	5487	5940	5566	6293	6671	6243	7377	6353	6414	6220	6349	6431	85604
AL	1847	3324	4377	4946	4139	5276	5608	5116	6587	6139	6333	6230	5878	6651	6377	78828
ES	1845	2661	3611	4531	5165	4986	5477	5836	6480	5974	6284	5623	6661	5824	5647	76605
RO	1580	2374	3470	4206	4550	4172	4954	5085	5764	5534	4738	4972	5581	5754	5645	68379
RN	1572	2513	2831	3393	4045	4639	4572	4887	4709	4627	3534	4284	4547	4702	4701	59556
DF	**1347**	**2228**	**2741**	**3150**	**3236**	**3089**	**2972**	**3589**	**4442**	**4263**	**4182**	**3457**	**4093**	**3710**	**3953**	**50452**
TO	1278	2139	3127	2870	3207	3384	3202	3209	2195	2952	3834	3610	3339	4092	3609	46047
SE	1117	2250	2407	3081	2988	3051	3063	1369	2569	3577	958	2649	3578	3550	3596	39803
AC	851	949	1378	1544	1563	1674	1658	1754	2058	2183	2095	2088	2100	2028	1886	25809
AP	727	961	1215	1246	1285	1474	1318	1136	1784	1672	1902	2074	1819	1803	1813	22229
RR	554	715	855	861	473	976	914	813	1361	1538	1551	1511	1498	1485	1424	16529
SOMA	154720	229385	278967	281130	296796	311845	299864	303278	367094	356065	346066	354475	350695	359067	355251	4644698

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados disponibilizados pela OBMEP.

Tabela 7 - Posições do DF em relação às UF (2005 a 2019 - Nível 3 - 2ª Fase)

Ano de realização	Posição do DF
2019	1º
2018	2º
2017	11º
2016	11º
2015	11º
2014	1º
2013	2º
2012	1º
2011	2º
2010	2º
2009	2º
2008	2º
2007	3º
2006	3º
2005	8º

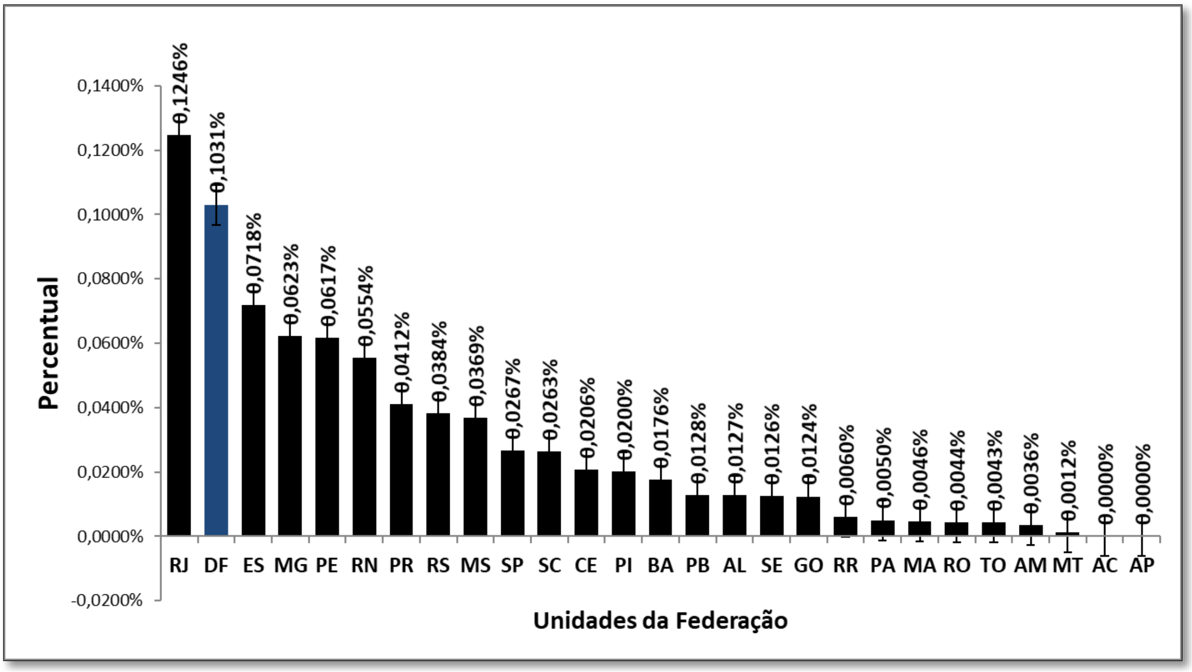
Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados disponibilizados pela OBMEP.

Tabela 8 - Classificação do DF em relação às UF (2005 a 2019 - Nível 3 - 2ª Fase)

UF	Percentual	Classificação
RJ	0,1246%	1º
DF	0,1031%	2º
ES	0,0718%	3º
MG	0,0623%	4º
PE	0,0617%	5º
RN	0,0554%	6º
PR	0,0412%	7º
RS	0,0384%	8º
MS	0,0369%	9º
SP	0,0267%	10º
SC	0,0263%	11º
CE	0,0206%	12º
PI	0,0200%	13º
BA	0,0176%	14º
PB	0,0128%	15º
AL	0,0127%	16º
SE	0,0126%	17º
GO	0,0124%	18º
RR	0,0060%	19º
PA	0,0050%	20º
MA	0,0046%	21º
RO	0,0044%	22º
TO	0,0043%	23º
AM	0,0036%	24º
MT	0,0012%	25º
AC	0,0000%	26º
AP	0,0000%	26º

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados disponibilizados pela OBMEP.

Gráfico 2 - Posição do DF em relação às UF (2005 a 2019 - Nível 3 - 2ª Fase)



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados disponibilizados pela OBMEP.

3 METODOLOGIA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Metodologicamente, este trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica e documental com o objetivo de formar uma base teórica importante para fundamentar o tema pesquisado. Em seguida realizou-se uma pesquisa quantitativa, em nível nacional, destinada aos professores de Matemática, que trabalham em Escolas Públicas e Privadas, por meio de um formulário elaborado na plataforma do Google, para investigar a metodologia aplicada na preparação dos alunos para as provas de 1ª e 2ª Fases da OBMEP.

Após a realização dessa pesquisa, selecionou-se uma Escola Pública do DF, onde foram realizados 3 encontros com uma turma disponibilizada por essa escola. A escola selecionada, onde foi aplicado parte do projeto, não participa da OBMEP e nem possui programa de preparação para as olimpíadas.

No primeiro encontro, realizou-se uma Avaliação Diagnóstica para mensurar o nível de conhecimento dos alunos em ralação aos assuntos mais cobrados nas provas da OBMEP. Nessa avaliação, levantaram-se os dados necessários para trabalhar uma aula abordando algumas demonstrações Matemáticas. No segundo encontro, ministrou-se uma aula sobre Sequências e PA, na qual foram apresentadas demonstrações Matemáticas básicas com o objetivo de estimular o aluno a estudar as técnicas de demonstrações, bem como despertar o interesse pela disciplina. No terceiro encontro, aplicou-se uma Avaliação Formativa com o objetivo de verificar o aprendizado do aluno em relação ao assunto ministrado na segunda aula. No mesmo dia, após a Avaliação Formativa, aplicou-se um questionário destinado aos alunos a fim de coletar dados sobre o interesse de programas de preparação para a OBMEP.

3.1 A PESQUISA

Segundo Gil (2002, p. 17), uma pesquisa é definida como o:

> [...] procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema. A pesquisa é desenvolvida mediante o concurso dos conhecimentos disponíveis e a utilização cuidadosa de métodos, técnicas e outros procedimentos científicos. Na realidade, a pesquisa desenvolve-se ao longo de um

> processo que envolve inúmeras fases, desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos resultados.

Para Leite (2008, p.43), os especialistas ensinam-nos que:

> todas as pesquisas são científicas. E o que é uma pesquisa científica? É a que usa o método científico ou tem por objetivo desvendar ou buscar, através de métodos e das técnicas específicas, as soluções para os problemas do conhecimento em geral e, especificamente, das ciências.

Seguindo as definições de Gil (2002) e Leite (2008), ao deparar-se com a situação de que, em média, mais 40 mil escolas participam por ano da 2ª Fase da OBMEP, como mostra a Tabela 9 abaixo, e muitas delas não atingem um resultado satisfatório com seus alunos, houve a necessidade de investigar a metodologia aplicada pelos professores nas escolas em nível nacional, para que se tenha um diagnóstico sumário. Outro objetivo desta pesquisa era averiguar a existência de programas de preparação, nas escolas, para as provas de 1ª e 2ª Fases da OBMEP, bem como, selecionar uma Escola Pública no DF para aplicar uma parte deste projeto.

Este trabalho, baseado em demonstrações Matemáticas, visa motivar alunos das Escolas Públicas e Privadas a participarem de programas de preparação para as provas da OBMEP, como também fazer com que eles alcancem resultados satisfatórios nas futuras edições das olimpíadas.

Tabela 9 - Média das inscrições (2005 a 2019 - 2ª Fase)

Inscrições 2ª Fase	Escolas	Alunos
2005	29.074	457.725
2006	29.661	630.864
2007	35.483	780.333
2008	35.913	789.998
2009	39.387	841.139
2010	39.929	863.000
2011	39.935	818.566
2012	40.770	823.871
2013	42.480	954.926
2014	41.302	907.446
2015	42.316	889.018
2016	43.232	913.889
2017	49.617	941.630
2018	50.183	952.782
2019	50.663	949.240
Média das inscrições	**40.663**	**834.295**

Fonte: Elaborada pelo autor a partir dos dados coletados em http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm

Para que se obtenha um resultado satisfatório, segundo Gil (2002), o êxito de uma pesquisa depende fundamentalmente de certas qualidades intelectuais e sociais do pesquisador. Assim, pesquisou-se fundamentado no conhecimento do assunto e na experiência deste autor e do professor orientador do trabalho.

A elaboração dessa pesquisa em nível nacional, por meio da plataforma Google, que é muito utilizada por pesquisadores, foi feita mediante a consideração de algumas etapas necessárias para a criação do formulário. Uma dessas etapas foi a pesquisa feita no site da OBMEP para se obter os dados necessários relativos à quantidade de medalhistas no DF e das inscrições na 2ª Fase da OBMEP. Com esses números, foi possível elaborar um formulário preciso e objetivo. Assim, para Leite (2008, p.109), “o questionário é a forma mais utilizada para a coleta de dados, uma vez que possibilita medir com melhor exatidão aquilo que se deseja”. Além disso, Gil (2002, p.114), relata que:

> para coleta de dados nos levantamentos são utilizadas as técnicas de interrogação: o questionário, a entrevista e o formulário. Por questionário entende-se um conjunto de questões que são respondidas por escrito pelo pesquisado. [...] Formulário, por fim, pode ser definido como a técnica de coleta de dados em que o pesquisador formula questões previamente elaboradas e anota as respostas.

Leite (2008) ressalta ainda que todo questionário deve ter uma natureza impessoal para que se tenha uma avaliação uniforme. Na mesma linha de raciocínio, aqueles que responderam à pesquisa, elaborada para buscar a metodologia aplicada, sentiram-se confiantes pelo fato de se assegurar o anonimato.

Para Gil (2002), “o questionário constitui o meio mais rápido e barato de obtenção de informações, além de não exigir treinamento de pessoal e garantir o anonimato”. Antes de elaborar o questionário na plataforma Google, observou-se alguns procedimentos necessários a fim de se obter um resultado satisfatório antes de iniciar o projeto. Leite (2008) diz que a elaboração de um questionário

> requer observância de normas de precisão, a fim de aumentar sua eficácia e validade. Em sua organização, deve-se levar em conta os tipos, a ordem, os grupos de perguntas, a formulação das mesmas e também tudo aquilo que se sabe sobre percepção, estereótipos, mecanismos de defesa, liderança, etc. (LEITE, 2008, p.110).

Para Gil (2002, p.116),

> A elaboração de um questionário consiste basicamente em traduzir os objetivos específicos da pesquisa em itens bem redigidos. Naturalmente, não existem normas rígidas a respeito da elaboração do questionário. Todavia, é possível, com base na experiência dos pesquisadores, definir algumas regras práticas a esse respeito.

O tempo de elaboração do questionário *online* foi de aproximadamente 2 semanas, pois se levou em consideração alguns aspectos especiais na seleção das perguntas. Um desses aspectos foi o histórico do programa da OBMEP, visto que são 15 edições de 2005 até 2019. Outro aspecto observado foi o conteúdo programático, pois se realizou uma pesquisa detalhada dos assuntos mais abordados nesses 15 anos de olimpíadas, bem como um estudo aprofundado das questões das provas e de alguns programas de preparação, disponibilizados pelo IMPA. O questionário encontra-se no apêndice “A”, no final deste trabalho.

3.1.1 O questionário e a análise dos resultados

O questionário é composto por 32 perguntas divididas em 2 partes. A primeira parte foi elaborada para buscar respostas sobre as metodologias aplicadas e a existência de programas de preparação para a OBMEP e a segunda parte sobre a caracterização do professor. Para Leite (2008, p.111-112);

> O questionário deve iniciar-se com perguntas gerais, amplas, chegando pouco a pouco às específicas. A disposição das indagações precisa seguir uma progressão lógica, para que o informante seja conduzido pelo interesse despertado, sendo as perguntas atraentes e não controvertidas. [...] O questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. Junto com o questionário, deve-se enviar uma carta explicando a natureza, importância e necessidade de obter respostas, tentando despertar o interesse do recebedor, na tentativa que ele preencha e devolva o questionário dentro de um prazo razoável.

Segundo Gil (2002, p.117), “o questionário deve conter uma introdução que informe acerca da entidade patrocinadora, das razões que determinaram a realização da pesquisa e da importância das respostas para atingir seus objetivos”. Com isso, as perguntas foram cuidadosamente direcionadas para o objetivo a que se propunha o questionário. Antes de o professor responder as perguntas propriamente ditas, foi explicado o objetivo da pesquisa, que eram os autores, qual a instituição, e por fim, deixado o contato para dirimir qualquer dúvida sobre as perguntas. No cabeçalho do formulário, foi feito o convite para respondê-lo de forma voluntária e assegurado que, de forma alguma, os dados pessoais seriam divulgados. Tudo isso para dar tranquilidade aos respondentes.

No total, 27 professores em rede nacional responderam o questionário que foi disponibilizado por um período de 2 semanas. Os resultados são mostrados a seguir:

Pergunta 01 - Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Você concorda e aceita os termos apresentados?

Esta pergunta tinha por objetivo solicitar ao professor o aceite dos termos apresentados e se ele declarava que havia lido e entendido todas as informações prestadas pelo pesquisador.

Tabela 10 - A pesquisa - pergunta nº 01

Resposta da pergunta Nº 01	Quantidade	Percentual
Sim	26	96,30%
Não	1	3,70%
Soma	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mostra a Tabela 10, acima, 96,30% dos entrevistados concordaram e aceitaram os termos apresentados, enquanto que 3,70%, que representa 1 professor, não concordaram com esses termos.

Pergunta 02 – Em qual o Estado da Federação que está localizada a escola onde você trabalha?

Esta pergunta tinha por objetivo mapear o Estado no qual está localizada a escola em que o professor trabalha, visto que procurávamos uma escola no DF para a aplicação de parte deste projeto. Além disso, a escola deveria ter um número mínimo de participantes nas olimpíadas ou que não possuísse programa de preparação para a OBMEP.

Tabela 11 - A pesquisa - pergunta nº 02

Estado da Federação	Quantidade por Estado	Percentual
AC	1	3,70%
AM	1	3,70%
BA	2	7,41%
CE	1	3,70%
DF	12	44,44%
GO	2	7,41%
MS	1	3,70%
PR	1	3,70%
RS	4	14,81%
SC	1	3,70%
SP	1	3,70%
Soma	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 11, acima, mostra que 44,44% dos entrevistados, representando 12 professores, encontram-se lecionando no DF. Este percentual foi satisfatório já que se aspirava trabalhar numa Escola Pública do DF.

Pergunta 03 - Em qual cidade está localizada a escola onde você trabalha?

Esta pergunta tinha por objetivo localizar uma Escola Pública no DF para realizar uma visita e averiguar se ela possuía algum programa de preparação para as provas de 1ª e 2ª Fases da OBMEP.

Tabela 12 - A pesquisa - pergunta nº 03

Cidade	Quantidade	Percentual
Bonito - MS	1	3,70%
Brasília - DF	7	25,93%
Colombo - PR	1	3,70%
Cruzeiro do Sul - AC	1	3,70%
Cubatão - SP	1	3,70%
Guará - DF	1	3,70%
Iaçu - BA	1	3,70%
Itajaí - MG	1	3,70%
Manaus - AM	1	3,70%
Paranoá - DF	1	3,70%
Pentecoste - CE	1	3,70%
Plano Piloto - DF	1	3,70%
Recanto das Emas - DF	1	3,70%
Salvador - BA	1	3,70%
Santa Maria - RS	2	7,41%
Santa Maria - DF	1	3,70%
Santiago - RS	2	7,41%
Valparaíso de Goiás - GO	2	7,41%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 12, acima, mostra que 25,93% dos entrevistados que participaram da pesquisa, o que representa 7 professores, estão em Brasília-DF; assim, já seria possível selecionar uma delas para visitar e levantar os dados “in loco” sobre a participação na OBMEP.

Pergunta 04 - Você trabalha em qual tipo de escola?

O próximo passo era identificar a natureza da escola (Pública ou Privada), pois o objetivo era de desenvolver o projeto numa Escola Pública no DF, a fim de descobrir as principais dificuldades de aprendizagem de Matemática e fomentar futuras pesquisas na área.

Tabela 13 - A pesquisa - pergunta nº 04

Escola Pública/Privada	Quantidade	Percentual
Pública	23	85,19%
Privada	4	14,81%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 13, acima, mostra que 85,19% dos entrevistados lecionam em Escola Pública. Em relação aos 12 professores do DF, 83,33% deles estão em Escola Pública e 16,67% trabalham na rede Privada.

Pergunta 05 - Você leciona em qual nível da Educação Básica?

Como o objetivo era trabalhar o Nível 3 da OBMEP, buscou-se, por meio desta pergunta, verificar o percentual de professores que trabalham com o Ensino Médio.

Tabela 14 - A pesquisa - pergunta nº 05

Nível de ensino	Quantidade	Percentual
Ensino Médio	16	59,26%
Ensino Fundamental	11	40,74%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 14, acima, mostra que 59,26% dos entrevistados lecionam no Ensino Médio. Em relação aos 12 professores do DF, a pesquisa aponta que 66,67% lecionam no Ensino Médio e 33,33% trabalham no Ensino Fundamental.

Pergunta 06 - Escreva aqui o nome da sua escola.

Como este item tinha caráter opcional, nenhum dos professores escreveu o nome de sua escola.

Pergunta 07 - Na escola onde você trabalha, existe um programa específico que prepara os alunos para as provas da 1ª Fase da OBMEP?

Esta pergunta tinha por objetivo obter informações sobre os programas de preparação para a 1ª Fase da OBMEP nas escolas.

Tabela 15 - A pesquisa - pergunta nº 07

Programa de preparação 1ª Fase da OBMEP	Quantidade	Percentual
Sim	12	44,44%
Não	15	55,56%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 15, acima, mostra que 44,44% dos entrevistados responderam que, na escola em que trabalham, existem programas de preparação para a 1ª Fase da OBMEP. Em relação aos 12 professores do DF, 41,67% responderam afirmativamente e 58,33% responderam negativamente.

Pergunta 08 - Na escola onde você trabalha, existe um programa específico que prepara os alunos para as provas da 2ª Fase da OBMEP?

Na mesma ideia da pergunta anterior, o objetivo aqui era de verificar se a escola possui um programa específico de preparação dos alunos para as questões discursivas da 2ª Fase.

Tabela 16 - A pesquisa - pergunta nº 08

Programa de preparação 2ª Fase da OBMEP	Quantidade	Percentual
Sim	12	44,44%
Não	15	55,56%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 16, acima, mostra que 55,56% dos entrevistados responderam que em suas respectivas escolas não há um programa específico para a 2ª Fase da OBMEP. Em relação às 12 Escolas Públicas do DF, apenas 33,33% treinam seus alunos paras as provas discursivas da 2ª Fase, enquanto 66,67% não possuem programas com esse objetivo.

Pergunta 09 - Você já participou de algum programa, na sua escola, voltado para as provas de 1ª Fase da OBMEP?

Esta pergunta foi direcionada especificamente ao professor, com o objetivo de verificar o seu grau de interesse pela OBMEP.

Tabela 17 - A pesquisa - pergunta nº 09

Participa do programa	Quantidade	Percentual
Sim	11	40,74%
Não	16	59,26%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 17, acima, mostra que 59,26% dos entrevistados não participaram de algum programa de preparação voltado para a 1ª Fase da OBMEP. Em relação aos 12 professores do DF, 25% deles responderam que sim e 75% disseram que não participaram de nenhum programa com esse objetivo.

Pergunta 10 - Para qual nível da prova da 1ª Fase da OBMEP você já trabalhou preparando os alunos?

Sabe-se que as provas da OBMEP são divididas em 3 níveis, por este motivo, questionou-se aqui para qual nível da prova o entrevistado trabalhou na preparação de seus alunos.

Tabela 18 - A pesquisa - pergunta nº 10

Nível da prova da OBMEP	Quantidade	Percentual
Nível 1 (6º e 7 º ano)	5	18,52%
Nível 2 (8º e 9 º ano)	2	7,41%
Nível 3 (Ensino Médio)	9	33,33%
Nunca trabalhei	11	40,74%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 18, acima, mostra que $40{,}74\%$ dos entrevistados nunca trabalharam na preparação de alunos para as olimpíadas. Este dado mostra “aparentemente” que o professor não está motivado em trabalhar para que seus alunos tenham um desempenho satisfatório nas olimpíadas. O maior percentual obtido foi de $33{,}33\%$ no Nível 3, seguido de $18{,}52\%$ no Nível 1 e por último o Nível 2 com $7{,}41\%$. Em relação aos 12 professores do DF: $58{,}33\%$ nunca trabalharam, 25% trabalharam com o Nível 3 e $16{,}67\%$ com o Nível 2.

Pergunta 11 - Você já participou de algum programa, na sua escola, voltado para as provas de 2ª Fase da OBMEP?

A pergunta tinha por objetivo investigar o percentual de professores que já participaram na preparação dos alunos na 2ª Fase da OBMEP.

Tabela 19 - A pesquisa - pergunta nº 11

Participação	Quantidade	Percentual
Sim	12	$44{,}44\%$
Não	15	$55{,}56\%$
Total	27	$100{,}00\%$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 19, acima, mostra que $44{,}44\%$ dos entrevistados responderam que sim. Em relação aos 12 professores do DF, $41{,}67\%$ disseram que já participaram, enquanto que $58{,}33\%$ responderam que não.

Pergunta 12 - Para qual nível da prova da 2ª Fase da OBMEP você já trabalhou preparando os alunos?

Aqueles que conhecem a 2ª Fase da OBMEP sabem que a prova discursiva é composta de 6 questões valendo no máximo 120 pontos e essas questões possuem um grau de dificuldade maior do que as da 1ª Fase. Por este motivo, o objetivo desta pergunta era averiguar, entre os colegas professores, em que nível da prova eles já trabalharam preparando seus alunos.

Tabela 20 - A pesquisa - pergunta nº 12

Nível da prova da OBMEP 2ª Fase	Quantidade	Percentual
Nível 1 (6º e 7 º ano)	2	7,41%
Nível 2 (8º e 9 º ano)	3	11,11%
Nível 3 (Ensino Médio)	9	33,33%
Nunca trabalhei	13	48,15%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que, na Tabela 20, acima, 48,15% dos entrevistados nunca trabalharam com o Nível 3 da 2ª Fase da OBMEP. Acredita-se que eles consideram a prova difícil ou não tiveram a oportunidade de preparar seus alunos. Em relação aos 12 professores do DF, 50% deles já trabalharam e 50% nunca trabalharam. Dos que já trabalharam preparando seus alunos para as provas discursivas, o percentual fica assim distribuído: 8,33% para o Nível 1, 16,67% para o Nível 2 e 25,00% para o Nível 3.

Pergunta 13 - Você participa, atualmente, na sua escola, de algum programa de preparação para as provas de 1ª Fase da OBMEP?

Nesta pergunta, procura-se buscar, atualmente, o percentual de participação dos professores em relação à OBMEP.

Tabela 21 - A pesquisa - pergunta nº 13

Participação	Quantidade	Percentual
Sim	6	22,22%
Não	21	77,78%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 21, acima, mostra que 77,48% dos professores não participam atualmente de nenhum programa de estudos voltado para as provas da 1ª Fase. Os motivos de essa negativa ser alta não foram objetos deste estudo, mas há de se averiguar em pesquisas futuras. Em relação aos 12 professores do DF, somente 8,33% responderam que sim, enquanto que 91,67% disseram que não.

Pergunta 14 - Para qual nível da prova da 1ª Fase da OBMEP você trabalha atualmente preparando os alunos?

Em complemento a pergunta anterior, aqui, averígua-se qual o Nível da prova que o professor trabalha atualmente.

Tabela 22 - A pesquisa - pergunta nº 14

Nível da prova da OBMEP - 1ª Fase	Quantidade	Percentual
Nível 1 (6º e 7 º ano)	2	7,41%
Nível 2 (8º e 9 º ano)	1	3,70%
Nível 3 (Ensino Médio)	7	25,93%
Não trabalho	17	62,96%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 22, acima, mostra que 62,96% dos entrevistados não trabalham atualmente com a OBMEP. Em relação aos professores do DF, 8,33% trabalham com o Nível 2, 16,67% com o Nível 3 e 75,00% deles não trabalham com nenhum dos 3 níveis.

Pergunta 15 - Você participa, atualmente, na sua escola, de algum programa de preparação para as provas de 2ª Fase da OBMEP?

Esta pergunta tem por objetivo averiguar se o professor, atualmente, prepara os alunos da escola para a prova discursiva da 2ª fase da OBMEP.

Tabela 23 - A pesquisa - pergunta nº 15

Participação - 2ª Fase	Quantidade	Percentual
Sim	8	29,63%
Não	19	70,37%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 23, acima, mostra que a maioria, 70,37% dos entrevistados, não participa de algum programa voltado para a 2ª Fase da OBMEP. Em relação aos 12 professores do DF, somente 16,67% deles participam, enquanto que 83,33% disseram que não.

Pergunta 16 - Para qual nível da prova da 2ª Fase da OBMEP você trabalha atualmente preparando os alunos?

Complementando a pergunta anterior, a Tabela 24, abaixo, mostra que a maioria, $62,96\%$ dos entrevistados, não trabalha com nenhum dos níveis da OBMEP. É um dado preocupante, pois se deseja que as escolas motivem cada vez mais seus alunos a fim de aumentar essa participação e consequentemente os alunos sejam estimulados a gostar de Matemática. Em relação aos professores do DF que responderam à pergunta, cada um dos níveis resultou num percentual de $8,33\%$, enquanto que $75,00\%$ responderam que não trabalham com nenhum dos 3 níveis.

Tabela 24 - A pesquisa - pergunta nº 16

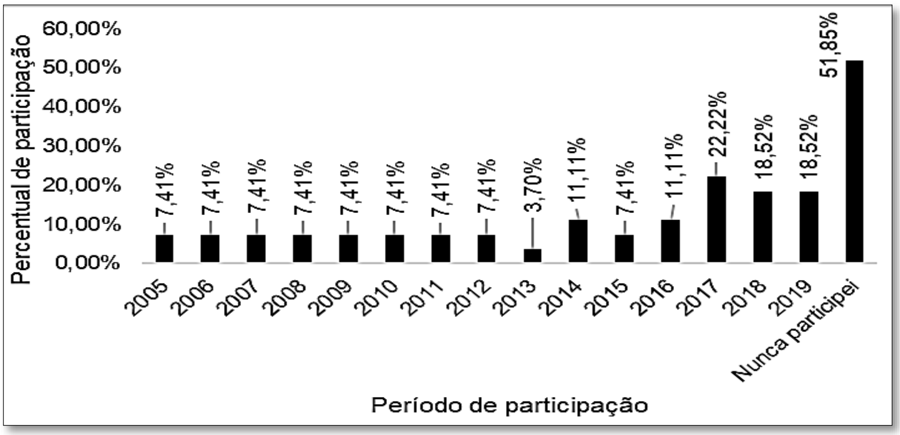
Nível da prova da OBMEP 2ª Fase	Quantidade	Percentual
Nível 1 (6º e 7 º ano)	2	7,41%
Nível 2 (8º e 9 º ano)	2	7,41%
Nível 3 (Ensino Médio)	6	22,22%
Não trabalho	17	62,96%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pergunta 17 - Qual(is) o(s) período(s) você participou do programa de preparação, na sua escola, para as provas da 1ª Fase da OBMEP?

O objetivo desta pergunta era averiguar os períodos em que os professores trabalharam na preparação de seus alunos para a 1ª Fase da OBMEP de 2005 até 2019.

Gráfico 3 - A pesquisa - pergunta nº 17



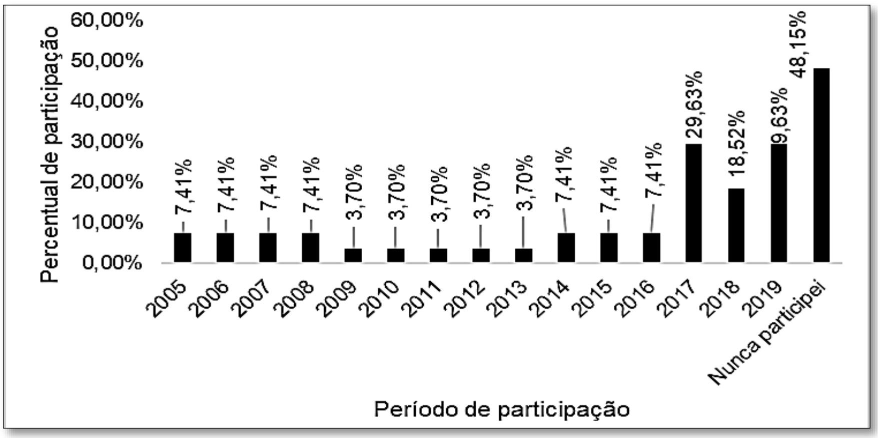
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se no Gráfico 3, acima, que $51,85\%$ dos entrevistados nunca participaram na preparação para as provas da OBMEP. O maior percentual registrado foi em 2017 com $22,22\%$. Em relação aos professores do DF, que responderam a esta pergunta, 66,67% deles nunca participaram e o maior percentual de participação foi registrado em 2017 com 16,67%.

Pergunta 18 - Qual(is) o(s) período(s) você participou do programa de preparação, na sua escola, para as provas da 2ª Fase da OBMEP?

Similar a pergunta anterior, aqui se verifica o percentual em relação à 2ª Fase da OBMEP de 2005 a 2019.

Gráfico 4 - A pesquisa - pergunta nº 18



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que no Gráfico 4, acima, 48,15% dos entrevistados nunca participaram em nenhuma das edições. O maior efetivo registrado foi em 2017 com 29,53%. Em relação aos professores do DF, 50% deles nunca participaram de uma edição da OBMEP na 2ª Fase. Dos que participaram, os maiores percentuais foram registrados em 2017 e 2019 com 25%.

Pergunta 19 - Em sua opinião, qual o grau de dificuldade da 1ª Fase da OBMEP?

Nesta pergunta procurou-se coletar dados em relação ao grau de dificuldade das provas da 1ª Fase da OBMEP, pois, em conversas informais com os colegas professores, muitos deles consideram a prova difícil.

Tabela 25 - A pesquisa - pergunta nº 19

Grau de dificuldade da prova	Quantidade	Percentual
Fácil	2	7,41%
Médio	19	70,37%
Difícil	6	22,22%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Tabela 25, acima, confirma-se o esperado, pois 70,37% dos entrevistados consideram que a prova da 1ª Fase tem um nível médio de dificuldade. Os professores do DF também pensam da mesma forma, pois 83,33% deles acham que a prova tem um nível médio de dificuldades e 16,67% consideram fácil ou difícil.

Pergunta 20 - Em sua opinião, qual o grau de dificuldade da 2ª Fase da OBMEP?

Complementando a pergunta anterior, aqui se solicita a opinião dos colegas professores em relação à 2ª Fase da OBMEP.

Tabela 26 - A pesquisa - pergunta nº 20

Grau de dificuldade	Quantidade	Percentual
Fácil	0	0,00%
Médio	9	33,33%
Difícil	18	66,67%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 26, acima, confirma o esperado, pois nenhum dos entrevistados considera a prova fácil. No entanto, 66,67% consideram a prova difícil e 33,33% acham que ela apresenta um nível médio de dificuldade. Mas a pergunta é: Por que consideram a prova da 2ª Fase da OBMEP difícil? Obviamente o porquê não foi objeto de estudo desta pesquisa, mas fica aqui a sugestão para futuros trabalhos em relação à OBMEP. Em relação aos professores do DF, 50% consideram o nível de dificuldade da prova médio e 50% o consideram difícil.

É importante ressaltar que, na 2ª Fase, o aluno precisa ter um treinamento específico, tanto na parte intelectual quanto na escrita, pois se acredita que para se obter uma boa nota na prova discursiva, o aluno também precisa argumentar e escrever a sua solução matematicamente correta. Ao analisar as provas anteriores, observa-se que é preciso treinar a forma com que o aluno deve apresentar a sua resposta.

Para apresentar os dados referentes às Perguntas 21 e 22 na forma de gráfico, procurou-se padronizar a legenda abaixo com as opções dadas no comando de cada questionamento.

A - Relembro os conteúdos cobrados nas provas e em seguida entrego listas de exercícios;

B - Faço resolução das provas anteriores;

C - Faço demonstrações Matemáticas que auxiliam nas resoluções;

D - Trabalho com aulas práticas;

E - Utilizo meios de informática, computadores, celulares, etc.

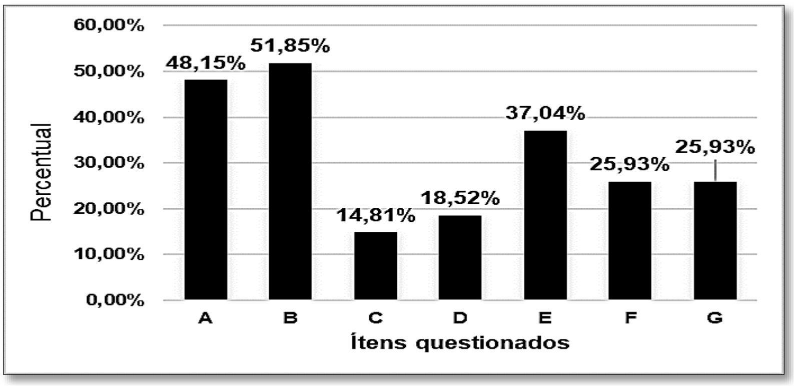
F - Utilizo videoaulas, internet, livros, etc. e

G - Não trabalho com a OBMEP.

Pergunta 21 - Como você trabalha na preparação dos alunos para as provas da 1ª Fase da OBMEP?

O objetivo desta pergunta era averiguar, efetivamente, como o professor trabalha em sala de aula na preparação dos alunos. Procurou-se dar as opções a fim de cumprir o objetivo desta pesquisa, pois este trabalho visualiza as demonstrações Matemáticas como uma metodologia a ser aplicada nos programas de preparação para as provas da OBMEP.

Gráfico 5 - A pesquisa - pergunta nº 21



Fonte: Elaborado pelo autor.

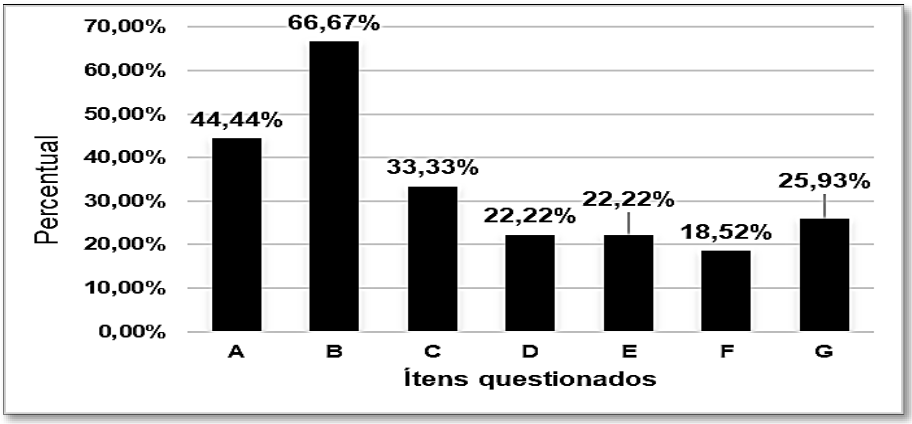
Observa-se no Gráfico 5, acima, que 14,81% dos professores acreditam que às demonstrações Matemáticas é uma metodologia aplicada para se ter bons rendimentos na OBMEP. Dos entrevistados, 51,85% acreditam que resolver provas anteriores é a solução para que os alunos consigam êxito nas provas da 1ª Fase da OBMEP e 48,15% dizem que relembrar os conteúdos é a melhor forma de preparação para as provas.

Pergunta 22 - Como você trabalha na preparação dos alunos para as provas da 2ª Fase da OBMEP?

Com o mesmo teor da pergunta anterior, mas, voltada para a 2ª Fase da OBMEP, verifica-se aqui a opinião do professor em relação à metodologia aplicada.

Observa-se no Gráfico 6, abaixo, que $66,67\%$ dos entrevistados trabalham com resolução de provas anteriores. Tendo a complexidade da prova e por ser discursiva, nota-se que o percentual de professores que trabalham com as demonstrações Matemáticas aumentou para $33,33\%$ em relação à pergunta anterior. Para se ter um bom resultado nas provas discursivas da OBMEP, acredita-se que o aluno precisa ter uma boa base em Matemática; para isso, é preciso que ele aprenda a argumentar e escrever corretamente as soluções das questões apresentadas. Por esse motivo, este projeto visa trabalhar efetivamente com as demonstrações Matemáticas, nas quais o aluno aprenderá a escrita formal e a capacidade de argumentação.

Gráfico 6 - A pesquisa - pergunta nº 22



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pergunta 23 - Quantos alunos da escola onde você trabalha, em média, participaram, por ano, das provas da OBMEP no período de 2005 a 2019?

Nesta pergunta, procurou-se verificar a efetiva participação dos alunos nas provas da OBMEP. Aqui, tem-se a possibilidade de mensurar o trabalho da escola e a motivação dos alunos.

Tabela 27 - A pesquisa - pergunta nº 23

Nº de participantes	Quantidade	Percentual
de 0 a 5 alunos	1	3,70%
de 6 a 15 alunos	5	18,52%
de 16 a 30 alunos	1	3,70%
mais de 30 alunos	20	74,07%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na Tabela 27, acima, que 74,07% dos entrevistados responderam que, por ano, mais de 30 alunos realizaram as provas da OBMEP. Em relação às escolas do DF, 83,33% responderam que mais de 30 alunos participaram das provas por ano. Com este percentual, deduz-se que as escolas do DF trabalham motivando seus alunos e professores a participarem das olimpíadas.

Pergunta 24 - Quantos alunos da escola onde você trabalha já receberam algum tipo de medalha da OBMEP no período de 2005 a 2019?

Receber uma medalha da OBMEP é um mérito para a escola e principalmente para o aluno. Nesta pergunta, procura-se buscar uma amostra do quantitativo de medalhista na escola.

Tabela 28 - A pesquisa - pergunta nº 24

Medalhistas	Quantidade	Percentual
de 0 a 5 alunos	21	77,78%
de 6 a 15 alunos	2	7,41%
de 16 a 30 alunos	1	3,70%
mais de 30 alunos	3	11,11%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na Tabela 28, acima, 77,78% dos entrevistados disseram que, na sua escola, entre 0 e 5 alunos já receberam algum tipo de medalha. Em relação aos professores do DF, 66,67% disseram que entre 0 a 5 alunos já receberam e 16,67% disseram que suas respectivas escolas possuem mais de 30 alunos premiados em todas as edições da OBMEP.

Pergunta 25 - A escola onde você trabalha já recebeu algum prêmio de participação na OBMEP no período de 2005 a 2019?

A OBMEP também premia as escolas participantes, então, achou-se interessante verificar nesta pesquisa o número de escolas premiadas, pois elas são muito importantes na preparação dos alunos.

Tabela 29 - A pesquisa - pergunta nº 25

Recebeu premiação?	Quantidade	Percentual
Sim	13	48,15%
Não	14	51,85%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na Tabela 29, acima, que 48,15% dos entrevistados disseram que suas escolas já receberam alguma premiação e os outros 51,85% nunca receberam. Estes dados são interessantes, pois nota-se que as escolas estão trabalhando para motivar seus alunos e professores a participarem da OBMEP.

Para apresentar os dados referentes às Perguntas 26 e 27 na forma de gráfico, procurou-se padronizar a legenda abaixo com as opções dadas no comando de cada questionamento.

Foram dados os seguintes itens para resposta:

A - Aula prática com a utilização de jogos;

B - Aula com utilização de vídeo;

C - Livro didático ou apostilas;

D - Resolução de lista de exercícios simulados;

E - Resolução de provas anteriores;

F - Explicação de conteúdo e registro de exercícios;

G - Trabalhos em grupo;

H - Atividade individual orientada por estudo dirigido e acompanhamento do professor;

I - Materiais que auxiliam no ensino da Matemática: réguas, jogo de esquadros, transferidor, compasso, etc.;

J - Utiliza o computador: programas de construção de gráficos, construção de Figuras Geométricas;

K - Portais da internet;

L - Realiza olimpíadas internas de Matemática;

M - Trabalha com jogos que despertem o raciocínio lógico, tais como Sudoku e quebra-cabeças;

N - Utilizo o banco de questões do site da OBMEP;

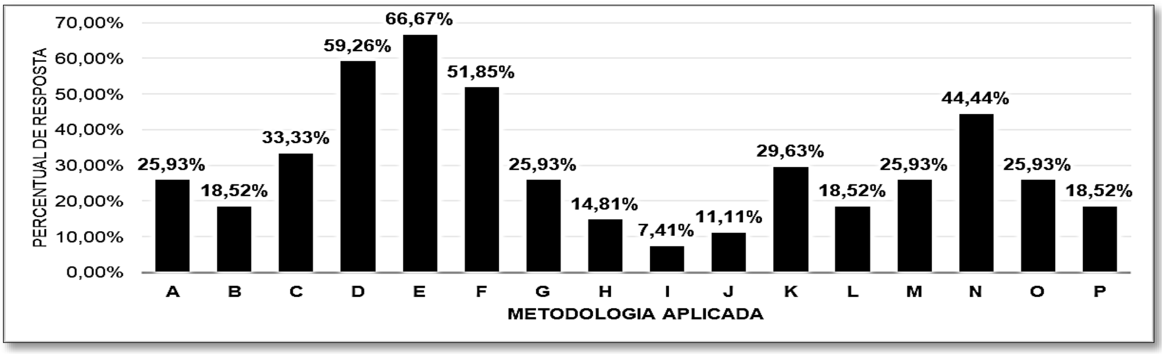
O - Utiliza demonstrações Matemáticas para a resolução das questões;

P - Não trabalho com a OBMEP.

Pergunta 26 - Como você trabalha, ou já trabalhou, na preparação dos alunos para as provas da 1ª e 2ª Fases da OBMEP?

Existem professores que já trabalharam na preparação de alunos para as provas da OBMEP e não trabalham mais e àqueles que não trabalharam e atualmente fazem parte de algum programa de preparação.

Gráfico 7 - A pesquisa - pergunta nº 26



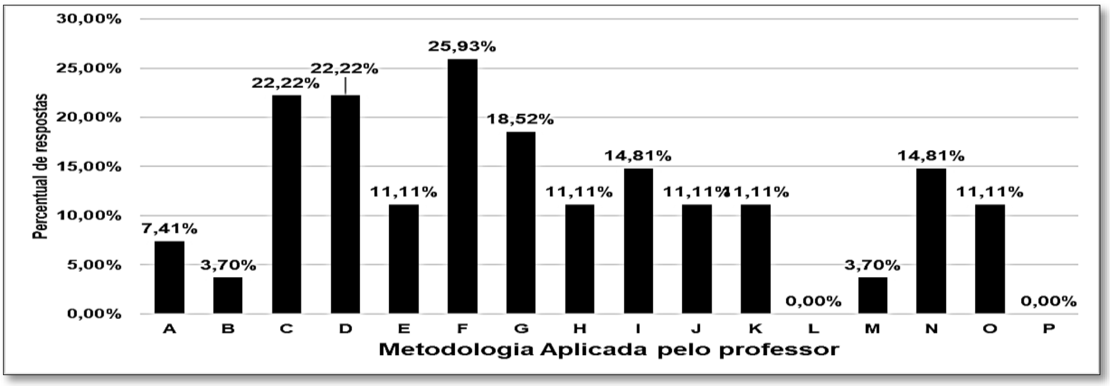
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se no Gráfico 7, acima, que 66,67% dos entrevistados trabalham ou trabalharam com resolução de provas anteriores. Em relação às demonstrações Matemáticas, 25,93% dos entrevistados disseram que utilizam essa metodologia. Percebe-se que poucos professores acreditam que as demonstrações Matemáticas sejam uma metodologia ideal para preparar seus alunos para as provas da OBMEP. Acredita-se que, se os alunos formarem uma boa base Matemática por meio dessas demonstrações, eles conseguirão alcançar resultados satisfatórios, pois as técnicas de demonstrações darão uma visão mais aprofundada dos conteúdos abordados e, ao mesmo tempo, aprenderão a formular respostas padronizadas e esperadas pela banca de correção da olimpíada.

Pergunta 27 - Mesmo não trabalhando com a OBMEP, você inclui alguma das metodologias abaixo em suas aulas?

Não apenas pensando na OBMEP, mas diariamente, se o professor trabalhar com a metodologia adequada do seu ponto de vista, poderá motivar seus alunos a estudar Matemática e consequentemente participar, de forma voluntária, de futuras edições das olimpíadas.

Gráfico 8 - A pesquisa - pergunta nº 27



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o Gráfico 8, acima, verifica-se que 25,93% dos entrevistados preferem a explicação dos conteúdos e resolução de exercícios e 11,11% deles procuram fazer demonstrações Matemáticas. O interessante é que nenhum deles quer realizar olimpíadas internas, o que seria uma técnica interessante.

Pergunta 28 - Você acha que os assuntos abordados durante o ano letivo são suficientes para se obter um bom resultado nas provas da OBMEP?

Esta questão tinha por objetivo verificar a opinião dos professores em relação ao conteúdo programático da OBMEP.

Tabela 30 - A pesquisa - pergunta nº 28

Resposta	Quantidade	Percentual
Sim	3	11,11%
Não	24	88,89%
Total	**27**	**100,00%**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na Tabela 30, acima, que 88,89% dos professores acham que os assuntos abordados durante o ano letivo não são suficientes para que o aluno tenha um bom resultado na OBMEP e 11,11% acreditam que esses assuntos são suficientes para se realizar uma boa prova da OBMEP. Cada professor tem a sua opinião, mas depois que se estuda detalhadamente as provas da OBMEP, percebe-se que esses assuntos são suficientes para se realizar uma boa prova da OBMEP, no entanto, é preciso dar uma atenção especial ao abordar os assuntos em sala de aula. Precisa-se utilizar um vocabulário não muito técnico, mas que seja o suficiente matematicamente para que os alunos possam formular suas ideias e escrevê-las de forma correta, clara e objetiva.

Pergunta 29 - Idade?

Nesta pergunta, procurava-se apenas mostrar um perfil dos professores em relação ao estudo da Matemática.

Tabela 31 - A pesquisa - pergunta nº 29

Faixa Etária	Quantidade	Percentual
Até 30 anos	4	14,81%
de 31 a 40 anos	12	44,44%
de 41 a 50 anos	6	22,22%
de 51 a 60 anos	4	14,81%
Mais de 60 anos	1	3,70%
Total	**27**	**100,00%**

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 31, acima, mostra que 44,44% dos entrevistados estão na faixa etária de 31 a 40 anos de idade e apenas 3,70% possui mais de 60 anos de idade, mostrando a sua dedicação à Matemática.

Pergunta 30 - Sexo:

Nesta pergunta buscou-se apenas um diagnóstico em relação ao gênero. A Tabela 32, abaixo, mostra que um 33,33% dos entrevistados são do sexo feminino, enquanto que 66,67% são do sexo masculino.

Tabela 32 - A pesquisa - pergunta nº 30

Sexo	Quantidade	Percentual
Feminino	9	33,33%
Masculino	18	66,67%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pergunta 31 - Qual a sua formação acadêmica?

Procurou-se investigar a formação acadêmica dos entrevistados e constatou-se que 100% deles têm a sua formação acadêmica em Matemática.

Pergunta 32 - Nível educacional:

Em relação ao nível educacional, na Tabela 33, abaixo, observa-se que 85,19% deles possuem especialização ou mestrado. Isso nos mostra que os professores estão se dedicando, cada vez mais, em se especializar e, consequentemente, além de se dedicar à sua profissão a qualidade do ensino aumenta.

Tabela 33 - A pesquisa - pergunta nº 32

Nível educacional	Quantidade	Percentual
Mestrado	10	37,04%
Especialização	13	48,15%
Graduação	4	14,81%
Total	27	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

A Avaliação Diagnóstica é um instrumento importante que tem por função traçar um diagnóstico, ou seja, um perfil da realidade de como se encontram os alunos sobre um determinado conteúdo, o que eles já sabem do assunto a ser abordado em sala de aula. Diagnosticar uma turma significa obter um conjunto dos dados em que se baseia para uma determinada ação. É por meio desses dados que o professor descobre falhas e programa o aprendizado do aluno. Segundo Luckesi (2002, p.81):

> A avaliação deverá ser assumida como um instrumento de compreensão do estágio de aprendizagem em que se encontra o

> aluno, tendo em vista tomar decisões suficientes e satisfatórias para que possa avançar no seu processo de aprendizagem. Se é importante aprender aquilo que se ensina na escola, a função da avaliação será possibilitar ao educador condições de compreensão do estágio em que o aluno se encontra, tendo em vista poder trabalhar com ele para que saia do estágio defasado em que se encontra e possa avançar em termos dos conhecimentos necessários. Desse modo, a avaliação não seria tão-somente um instrumento para a aprovação ou reprovação dos alunos, mas sim um instrumento de diagnóstico de sua situação, tendo em vista a definição de encaminhamentos adequados para a sua aprendizagem.

Para Libâneo, a função de diagnóstica de uma avaliação "permite identificar progressos e dificuldades dos alunos e a atuação do professor que, por sua vez, determinam modificações do processo de ensino para melhor cumprir as exigências dos objetivos" (LIBÂNEO, 2006, p.197). Assim, ao realizarmos a avaliação diagnóstica, tivemos por objetivo traçar o perfil dos alunos em relação ao conteúdo programático ensinado pelo professor cedente da turma. Buscou-se fazer uma pequena simulação da prova da OBMEP, conforme o regulamento.

A avaliação foi dividida em duas partes, sendo a primeira com cinco questões de múltipla escolha, simulando a 1ª Fase da OBMEP, e a segunda parte, com duas questões discursivas, que simulou a 2ª Fase. Elaborou-se, também, uma capa a qual continha as instruções para realização da prova e um pequeno cartão-resposta, onde os alunos deveriam registar as suas respectivas alternativas. O modelo da Avaliação Diagnóstica encontra-se no Apêndice B, localizado no final deste trabalho.

Após selecionar uma Escola Pública do DF, o diretor disponibilizou uma turma com 30 alunos para que fosse aplicada parte deste projeto. Uma das características para se escolher a escola foi o baixo índice de participação nas edições da OBMEP. A Tabela 34, abaixo, mostra o modelo de cartão-resposta elaborado e disponibilizado na Avaliação Diagnóstica.

Tabela 34 - Modelo de cartão-resposta

CARTÃO RESPOSTA

Questão 01	A	B	C	D	E
Questão 02	A	B	C	D	E
Questão 03	A	B	C	D	E
Questão 04	A	B	C	D	E
Questão 05	A	B	C	D	E

Fonte: Elaborado pelo autor.

Procurou-se dar continuidade à programação da escola. Assim, foram abordadas as Sequências e a Progressão Aritmética na avaliação. Na primeira parte da avaliação, não havia necessidade de se mostrar os cálculos, apenas resolver individualmente e registrar a alternativa correta no cartão-resposta. Apesar de não precisar mostrar os cálculos, boa parte dos alunos deixou a solução na prova.

A segunda parte da avaliação era composta por duas questões discursivas, que foram adaptadas de provas anteriores da OBMEP, e tinha por objetivo analisar o conhecimento matemático do aluno, a apresentação da resposta e a escrita Matemática.

3.2.1 Análise dos resultados da Avaliação Diagnóstica

A Avaliação Diagnóstica foi aplicada em uma Escola do DF, numa turma de 30 alunos. Foi informado a todos os alunos, como incentivo a resolvê-la, que a nota obtida seria aproveitada para compor a média final, bem como serviria para dirimir possíveis dúvidas em relação ao conteúdo já ensinado pelo professor efetivo, e reforçar os tópicos relativos a esse assunto.

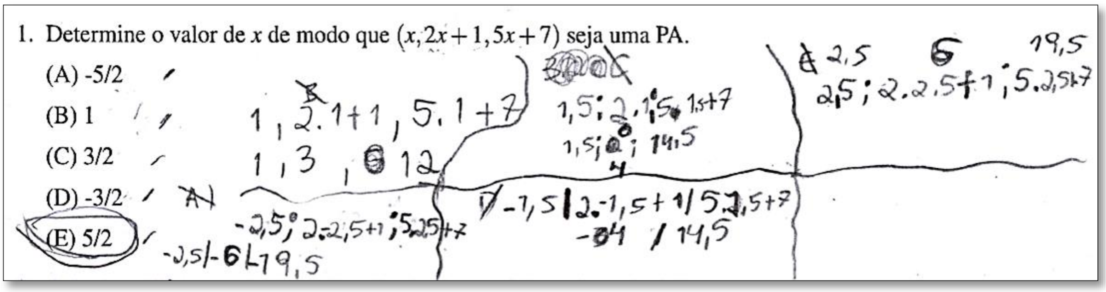
Para apresentar os dados analisados, procurou-se, primeiramente, verificar as soluções incorretas, identificando os principais equívocos cometidos pelos alunos; em seguida, observaram-se as soluções que foram apresentadas corretamente, mas que eram diferentes do gabarito e, no final de cada bloco de questões, apresentou-se a pauta de correção elaborada na percepção deste acadêmico. Para efeito de instrução, não serão mostradas as alternativas das questões de múltipla escolha, pois a avaliação completa está disponível no Apêndice B, localizado no final deste trabalho. A seguir, vamos analisar os resultados.

Questão 01. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1{,}5x+7)$ seja uma PA.

Nesta questão, $23{,}33\%$ dos 30 alunos marcaram a alternativa correta, enquanto $76{,}67\%$ marcaram a errada. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Percebe-se na resposta mostrada na Figura 1, abaixo, que o aluno usou a estratégia de substituir os valores das alternativas pela variável x. Em seguida, fez a verificação se os valores encontrados representavam termos de uma PA. Nota-se que, em parte, a estratégia deu certo, mas, ao efetuar os cálculos, quando substituiu x por $-5/2$, confundiu-se ao resolver a expressão numérica $2(-2{,}5) + 1$, pois seu resultado deu -6 e deveria ser -4. Por esse motivo, marcou a alternativa errada.

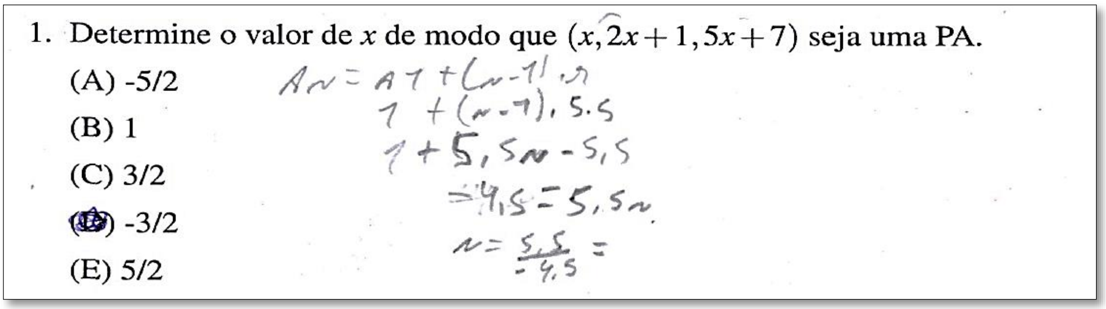
Figura 1 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 01


1. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.
(A) -5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -3/2
(E) 5/2

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução mostrada na Figura 2, a seguir, o aluno confundiu-se na interpretação da questão, pois, na tentativa de acertá-la, usou a fórmula do termo geral, o que seria uma solução alternativa.

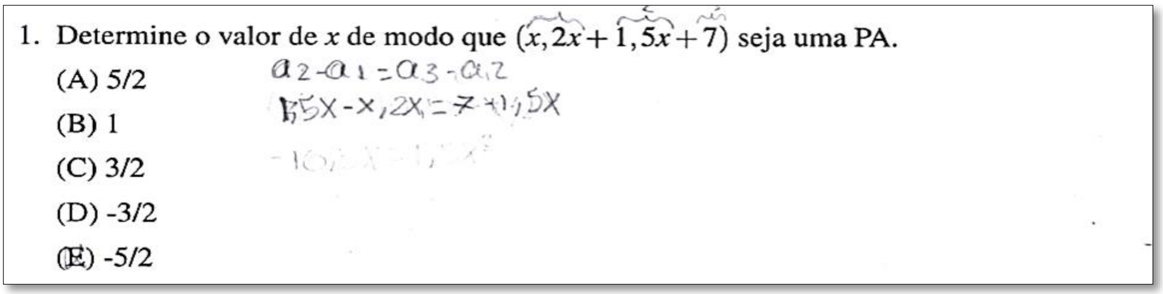
Figura 2 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 11


1. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.
(A) -5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -3/2
(E) 5/2

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução apresentada na Figura 3, percebe-se que o aluno interpretou corretamente o comando da questão, traçou a estratégia para resolvê-la e, na sequência, não concluiu seu raciocínio.

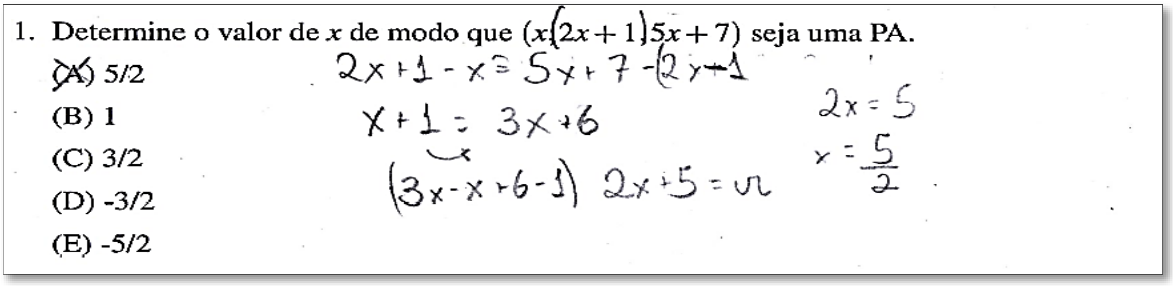
Figura 3 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 23


1. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.
(A) 5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -3/2
(E) -5/2

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução mostrada na Figura 4, a seguir, o aluno iniciou corretamente a resolução, porém, ao finalizar, ele passou o 5 para o 2º membro da equação sem alterar o sinal, consequentemente encontrou a alternativa errada.

Figura 4 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 29



1. Determine o valor de x de modo que $(x,2x+1,5x+7)$ seja uma PA.

(A) 5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -3/2
(E) -5/2

$2x+1-x = 5x+7-(2x+1$

$x+1 = 3x+6$

$(3x-x+6-1)$ $2x+5 = r$

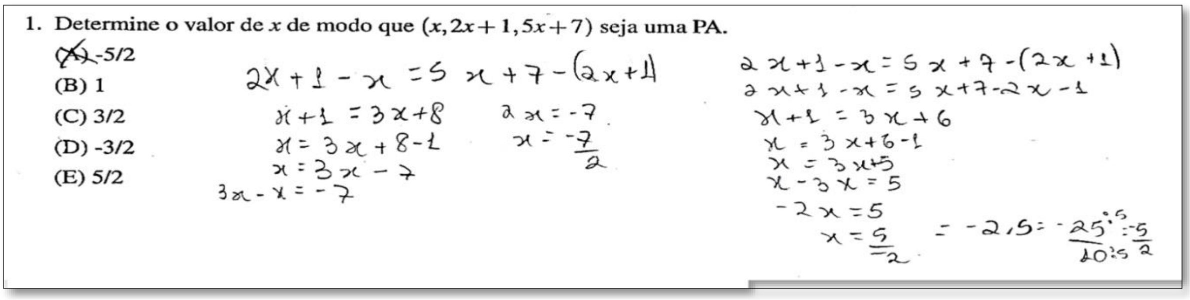
$2x = 5$

$x = \frac{5}{2}$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na resolução mostrada na Figura 5, na sequência do texto, percebe-se que, na primeira tentativa, o aluno eliminou os parênteses da equação $5x + 7 - (2x + 1)$ e encontrou $3x + 8$, porém, deveria ser $3x + 6$. Por esse motivo, encontrou $x = -7/2$. Na segunda tentativa, resolveu corretamente.

Figura 5 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 02



1. Determine o valor de x de modo que $(x,2x+1,5x+7)$ seja uma PA.

(A) -5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -3/2
(E) 5/2

$2x+1-x = 5x+7-(2x+1)$

$x+1 = 3x+8$

$x = 3x+8-1$

$x = 3x-7$

$3x-x = -7$

$2x = -7$

$x = \frac{-7}{2}$

$2x+1-x = 5x+7-(2x+1)$

$2x+1-x = 5x+7-2x-1$

$x+1 = 3x+6$

$x = 3x+6-1$

$x = 3x+5$

$x-3x = 5$

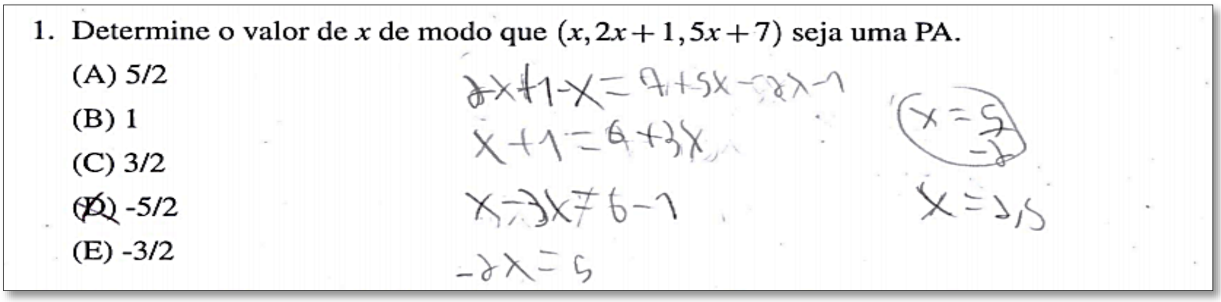
$-2x = 5$

$x = \frac{5}{-2} = -2,5 = -\frac{25}{10} = \frac{-5}{2}$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Os alunos, que acertaram esta questão, utilizaram a estratégia mostrada na Figura 6, a seguir, o que demonstra que entenderam a definição de razão de uma PA.

Figura 6 - Avaliação Diagnóstica - Questão 01 - Al Cód. 20



1. Determine o valor de x de modo que $(x,2x+1,5x+7)$ seja uma PA.

(A) 5/2
(B) 1
(C) 3/2
(D) -5/2
(E) -3/2

$2x+1-x = 7+5x-2x-1$

$x+1 = 6+3x$

$x-3x = 6-1$

$-2x = 5$

$x = \frac{5}{-2}$

$x = -2,5$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

- **Pauta de Correção – Questão 01**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de descobrir o valor da incógnita x por meio da definição de razão da PA.

Solução: Segundo Lima et al. (2006), uma Progressão Aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Visto que a sequência dada no comando da questão é uma PA, então, por meio da definição de razão, é possível determinar o valor da incógnita x. Os termos da sequência são: $a_1 = x$, $a_2 = 2x + 1$ e $a_3 = 5x + 7$, logo, é possível dizer que a razão é determinada por $r = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Então:

$$(5x + 7) - (2x + 1) = (2x + 1) - (x)$$

$$3x + 6 = x + 1$$

$$2x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

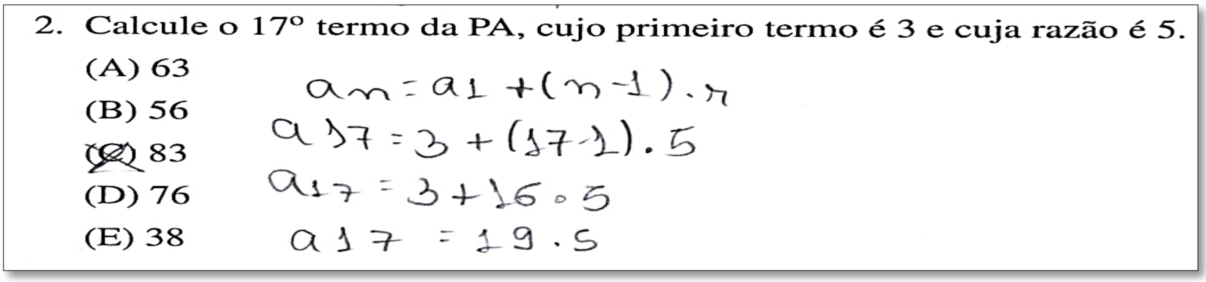
Portanto, o valor da incógnita para que a sequência apresentada na questão seja uma PA é $x = -5/2$.

Questão 02. Calcule o $17°$ termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

Nesta questão, 70% dos 30 alunos marcaram a alternativa correta, enquanto que 30% marcaram a errada. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

A Figura 7, abaixo, mostra que o aluno utilizou corretamente a fórmula do termo geral da PA para encontrar o termo solicitado. Apesar de ter marcado a alternativa correta, observa-se que ele, na passagem da linha 3 para a linha 4, realizou a adição antes da multiplicação. De acordo com a sua resolução, a resposta seria $a_{17} = 19.5 = 95$.

Figura 7 - Avaliação Diagnóstica - Questão 02 - Al Cód. 02



2. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

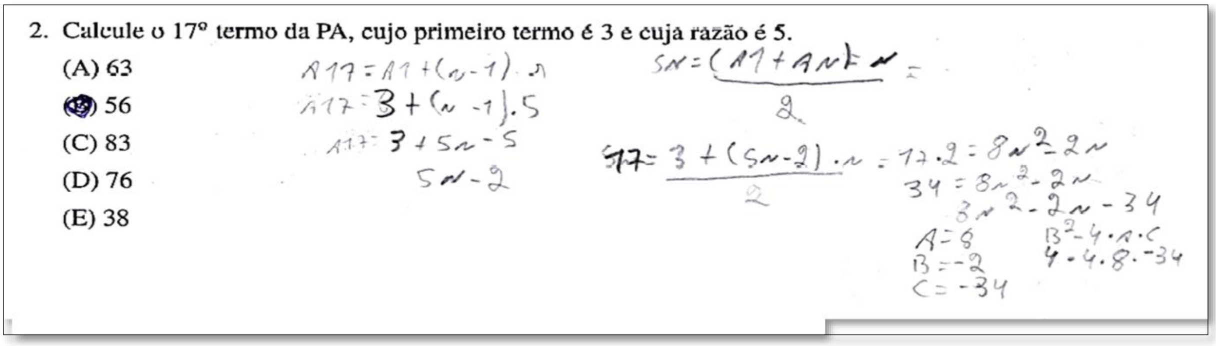
(A) 63
(B) 56
(C) 83
(D) 76
(E) 38

$a_n = a_1 + (n-1).r$
$a_{17} = 3 + (17-1).5$
$a_{17} = 3 + 16.5$
$a_{17} = 19.5$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

A Figura 8, abaixo, mostra que o aluno utilizou corretamente a fórmula do termo geral para encontrar o 17° termo, mas se esqueceu de substituir o valor de n pela quantidade de termos. Caso tivesse substituído corretamente, sua resposta seria $a_{17} = 5.(17) - 2 = 85 - 2 = 83$. Em seguida, na tentativa de acertar a questão, utilizou a fórmula da soma dos termos de uma PA finita.

Figura 8 - Avaliação Diagnóstica - Questão 02 - AI Cód. 11



2. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

(A) 63
(B) 56
(C) 83
(D) 76
(E) 38

$A17 = A1 + (n-1).r$
$A17 = 3 + (n-1).5$
$A17 = 3 + 5n - 5$
$5n - 2$

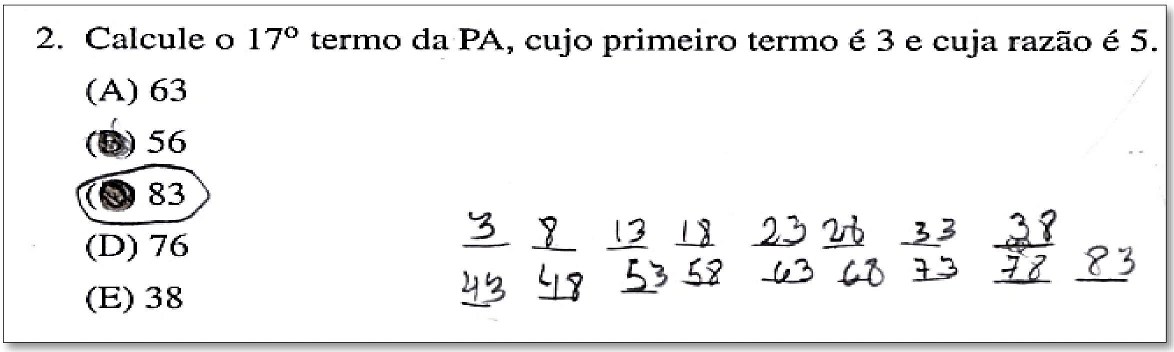
$Sn = \frac{(A1 + An).n}{2}$

$17 = \frac{3 + (5n-2).n}{2}$
$17.2 = 8n^2 - 2n$
$34 = 8n^2 - 2n$
$8n^2 - 2n - 34$
$A = 8$
$B = -2$
$C = -34$
$B^2 - 4.a.c$
$4 - 4.8.-34$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

A maioria dos alunos, que acertaram esta questão, utilizou corretamente a fórmula do termo geral da PA para encontrar o 17° termo da sequência. Todavia, observou-se que outros utilizaram a estratégia de montar toda a sequência de termos, como mostra a Figura 9, abaixo, a partir do primeiro termo dado no comando da questão. Seguramente, o aluno encontrará o termo solicitado, porém, esta estratégia é interessante para sequências que possuem uma quantidade pequena de termos.

Figura 9 - Avaliação Diagnóstica - Questão 02 - AI Cód. 04



2. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

(A) 63
(B) 56
(C) 83
(D) 76
(E) 38

3 8 13 18 23 28 33 38
43 48 53 58 63 68 73 78 83

Fonte: Avaliação diagnóstica.

- **Pauta de Correção – Questão 02**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de aplicar corretamente a fórmula do termo geral da PA para encontrar o $17°$ termo.

Primeiramente, observa-se, no comando da questão, que o primeiro termo da sequência é 3 e a razão é 5. De posse dessas informações e do conhecimento prévio do aluno sobre o termo geral da PA, precisaria apenas substituir os valores pelas variáveis da fórmula. Além disso, era fundamental deduzir que a sequência possui 17 termos, pois se procura o $17°$ termo. Assim sendo, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{17} = 3 + (17-1).5 = 3 + (16).5 = 3 + 80 = 83.$$

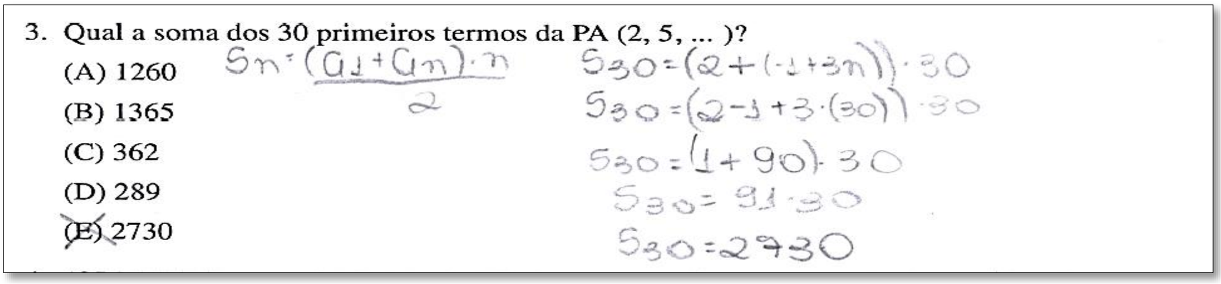
Dessa forma, conclui-se que o $17°$ termo da sequência é 83.

Questão 03. Qual a soma dos 30 primeiros termos da PA $(2, 5, \ldots)$?

Esta questão obteve o maior percentual de acertos, com $76{,}67\%$, em relação às demais. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

A resolução apresentada na Figura 10, abaixo, mostra que o aluno tem o conhecimento prévio sobre a soma dos termos de uma PA finita. Na sua visão, ele preferiu substituir o termo geral, $a_n = 2 + (n-1).3 = -1 + 3n$, diretamente na fórmula da soma dos termos, ao contrário de calcular primeiramente o valor de a_{30}. Seguramente, ele encontraria a resposta correta, porém, esqueceu-se de efetuar a divisão por 2. Em virtude disso, não encontrou a alternativa correta que seria 1365.

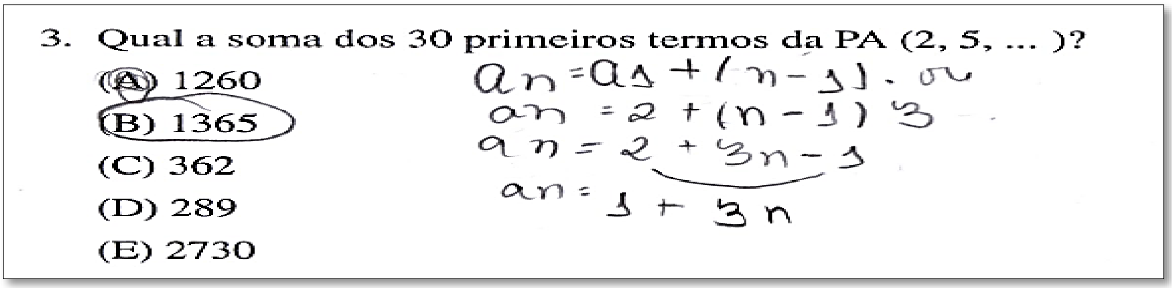
Figura 10 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 03



Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na resolução apresentada na Figura 11, abaixo, o aluno iniciou a resolução utilizando a fórmula do termo geral da PA. Entretanto, ao multiplicar o número real 3 pelo termo algébrico $(n-1)$, encontrou como resposta $3n-1$ e que deveria ser $3n-3$. Como consequência, não encontrou a expressão correta para o termo geral que seria $a_n = -1 + 3n$. Como não necessitava apresentar os cálculos que justificassem as respostas, ele marcou a alternativa correta no cartão-resposta.

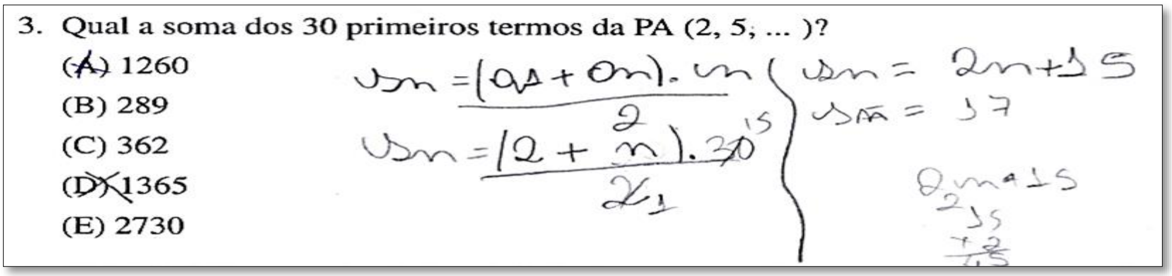
Figura 11 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 04



Fonte: Avaliação diagnóstica.

A Figura 12, abaixo, mostra que o aluno iniciou a resolução utilizando a fórmula da soma dos termos da PA. Nota-se que, primeiramente, ele substituiu a_n por n, em seguida, após dividir 30 por 2, ele multiplicou o número 15 pelo termo algébrico $2 + n$. O resultado do seu produto foi $2n + 15$ e deveria ser $30 + 15n$. Como resultado desses enganos, não logrou êxito na questão.

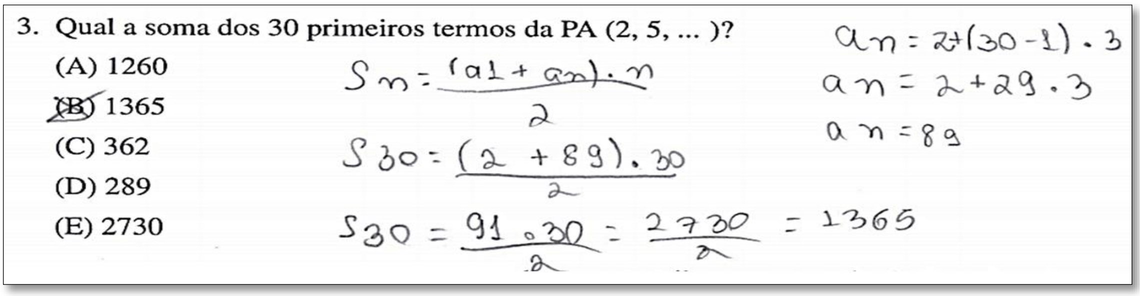
Figura 12 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 27



Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na Figura 13, abaixo, mostra-se uma resolução esperada conforme a pauta de correção. O aluno, primeiramente, encontrou o $30°$ termo da sequência e, em seguida, substituiu na fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Isso mostra que a estrutura cognitiva do aluno, em relação a esse assunto, está bem definida e apresentará pouca dificuldade em aprender novos conteúdos em relação a sequências.

Figura 13 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 02



3. Qual a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...)?

(A) 1260
(B) 1365
(C) 362
(D) 289
(E) 2730

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$

$S_{30} = \frac{(2 + 89).30}{2}$

$S_{30} = \frac{91 . 30}{2} = \frac{2730}{2} = 1365$

$a_n = 2+(30-1).3$

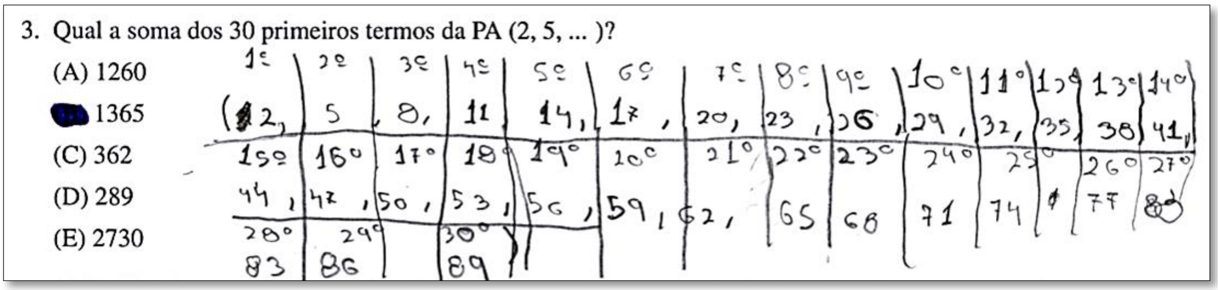
$a_n = 2+29.3$

$a_n = 89$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

A maioria das soluções, apresentadas corretamente, tinha a mesma ideia da solução mostrada na Figura 13, acima. Porém, foram apresentadas algumas soluções diferentes da pauta de correção, mas que chegaram à mesma alternativa correta. Duas dessas soluções são mostradas abaixo, uma na Figura 14 e outra na Figura 15.

Figura 14 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 05



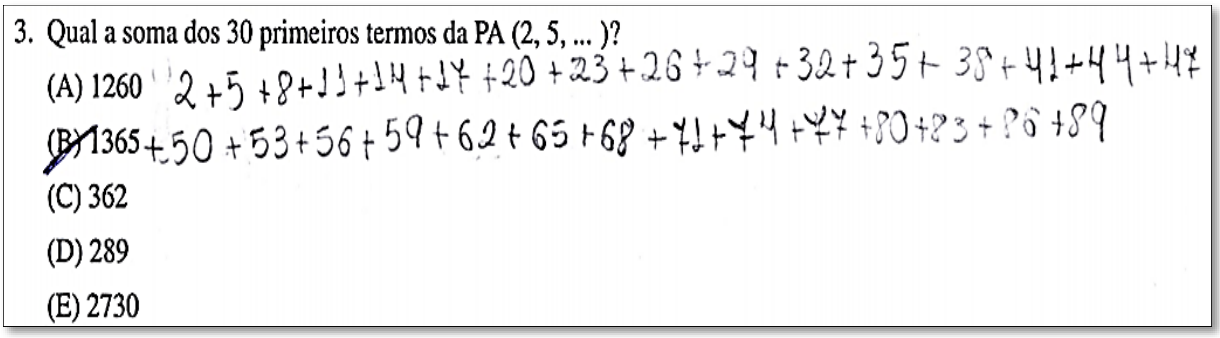
3. Qual a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...)?

(A) 1260
(B) 1365
(C) 362
(D) 289
(E) 2730

1º 2, 2º 5, 3º 8, 4º 11, 5º 14, 6º 17, 7º 20, 8º 23, 9º 26, 10º 29, 11º 32, 12º 35, 13º 38, 14º 41, 15º 44, 16º 47, 17º 50, 18º 53, 19º 56, 20º 59, 21º 62, 22º 65, 23º 68, 24º 71, 25º 74, 26º 77, 27º 80, 28º 83, 29º 86, 30º 89

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Figura 15 - Avaliação Diagnóstica - Questão 03 - Al Cód. 08



3. Qual a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...)?

(A) 1260
(B) 1365
(C) 362
(D) 289
(E) 2730

2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32 + 35 + 38 + 41 + 44 + 47 + 50 + 53 + 56 + 59 + 62 + 65 + 68 + 71 + 74 + 77 + 80 + 83 + 86 + 89

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Os alunos demonstraram que entenderam o conceito da soma dos termos de uma PA finita e, como consequência, eles fortificaram as suas respectivas estruturas cognitivas que estão aptas a se conectarem a novos conceitos. Para questões com uma pequena quantidade de termos, como a Questão 03, seguramente acertariam a alternativa correta. Entretanto, para questões com uma grande quantidade de termos, não seria uma boa estratégia usar esse raciocínio, pois o aluno perderia muito tempo escrevendo toda a sequência e, obviamente, não haveria tempo suficiente para resolver as outras questões.

- **Pauta de Correção – Questão 03**

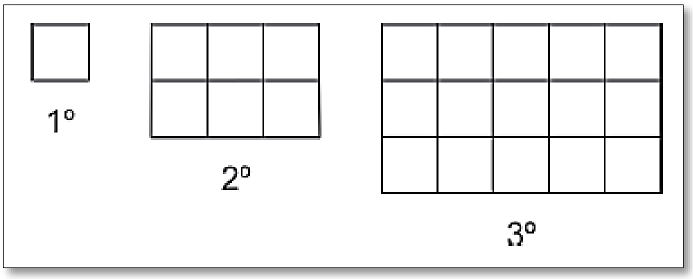
O objetivo da Questão 03 era verificar a capacidade do aluno de calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA finita, utilizando a fórmula correta e com o auxílio do termo geral.

Solução: Inicialmente precisa-se encontrar o $30°$ termo da sequência em que o $1°$ termo é 2 e a razão 3 utilizando a fórmula do termo geral. Dessa forma, temos que $a_{30} = a_1 + (30 - 1)3 = 2 + 29.3 = 2 + 87 = 89$. De posse dessa resposta, basta substituir os valores na fórmula da soma dos termos da PA. Então, temos que:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}).n}{2} = \frac{(2 + 89).30}{2} = (91).15 = 1365.$$

Portanto, conclui-se que a soma dos 30 primeiros termos da PA equivale a 1365.

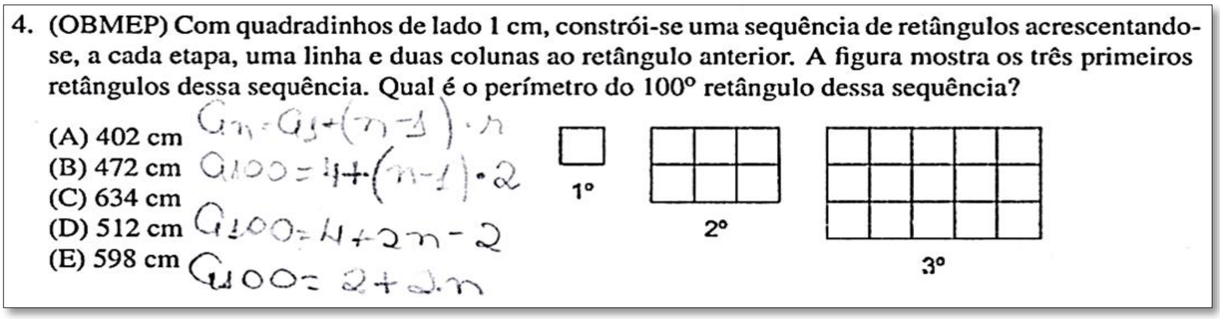
Questão 04. (OBMEP) Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A Figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do $100°$ retângulo dessa sequência?



Existem alunos do Ensino Médio que nunca tiveram contato com o modelo de prova da OBMEP, por esse motivo, procurou-se colocar na Avaliação Diagnóstica um tipo de questão objetiva cobrada na Olimpíada. A quarta questão foi retirada da prova de 2008 para verificar a maneira como os alunos reagem a esse modelo de questionamento. Dos 30 alunos que participaram da avaliação, 40% deles marcaram a alternativa correta, enquanto que 60% não acertaram ou deixaram em branco. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas pelos alunos.

Na solução mostrada na Figura 16, abaixo, percebe-se que o aluno iniciou a resolução calculando o $100°$ termo da sequência. Como se pode ver, ele calculou o termo geral em função perímetro de cada retângulo, pois entendeu que seria uma PA cujo $1°$ termo é 4 e razão 2. Nota-se que ele trocou o valor da razão, pois os perímetros representam os termos da PA, $(4,10,16,\ldots)$, de razão 6. Caso tivesse atribuído o valor da razão correto, seu termo geral seria: $a_{100} = 4 + (n-1)6 = 4 + 6n - 6 = 6n - 2$.

Figura 16 - Avaliação Diagnóstica - Questão 04 - Al Cód. 03


4. (OBMEP) Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100º retângulo dessa sequência?

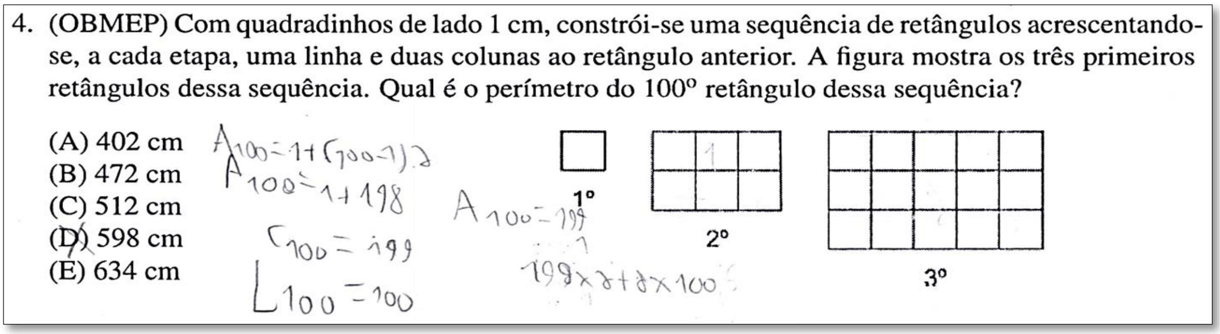
(A) 402 cm
(B) 472 cm
(C) 634 cm
(D) 512 cm
(E) 598 cm

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot n$
$a_{100} = 4 + (n-1) \cdot 2$
$a_{100} = 4 + 2n - 2$
$a_{100} = 2 + 2n$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução apresentada na Figura 17, abaixo, o aluno resolveu utilizando duas sequências, uma contendo as medidas das larguras e a outra contendo as medidas dos comprimentos.

Figura 17 - Avaliação Diagnóstica - Questão 04 - Al Cód. 20


4. (OBMEP) Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100º retângulo dessa sequência?

(A) 402 cm
(B) 472 cm
(C) 512 cm
(D) 598 cm
(E) 634 cm

$A_{100} = 1 + (100-1)2$
$A_{100} = 1 + 198$
$C_{100} = 199$
$L_{100} = 100$
$A_{100} = 199$
$199 \times 2 + 2 \times 100$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Para a primeira PA, ele utilizou a largura dos retângulos, cujos termos são: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ... Além disso, mostrou que a razão é igual a 1 e o $100°$ termo é $a_{100} = 1 + (99).1 = 100$. Para a segunda PA, ele utilizou os comprimentos dos retângulos, cujos termos são: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ... Além disso, mostrou que a razão é igual a 2 e o $100°$ termo é $a_{100} = 1 + (99).2 = 199$.

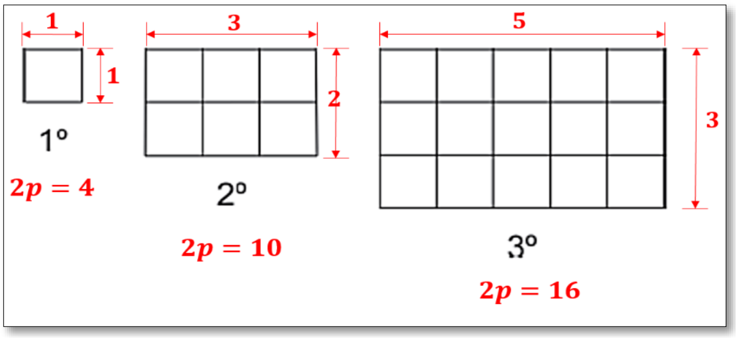
Logo, ele concluiu que o perímetro do $100°$ retângulo da sequência é $(199).2 + (100).2 = 598$.

- **Pauta de Correção – Questão 04**

Esta questão foi retirada da prova da OBMEP 2008 e tem por objetivo verificar a capacidade do aluno identificar a sequência apresentada é uma PA. Observe a Figura 18

Figura 18 abaixo.

Figura 18 - Avaliação Diagnóstica - resolução da Questão 04



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução: Observa-se que o perímetro $(2p)$ do $1°$ retângulo é igual a 4 cm, do $2°$ é 10 cm, do $3°$ é 16 cm e assim por diante. Verifica-se, então, que os perímetros representam os termos da PA $(4,10,16,\ldots)$ de razão é 6. Assim, para se calcular o perímetro $(2p)$ do $100°$ retângulo, é necessário, apenas, que se utilize a fórmula do termo geral da PA. Então, temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_{100} = 4 + (100-1).6 = 4 + (99).6 = 4 + 594 = 598.$$

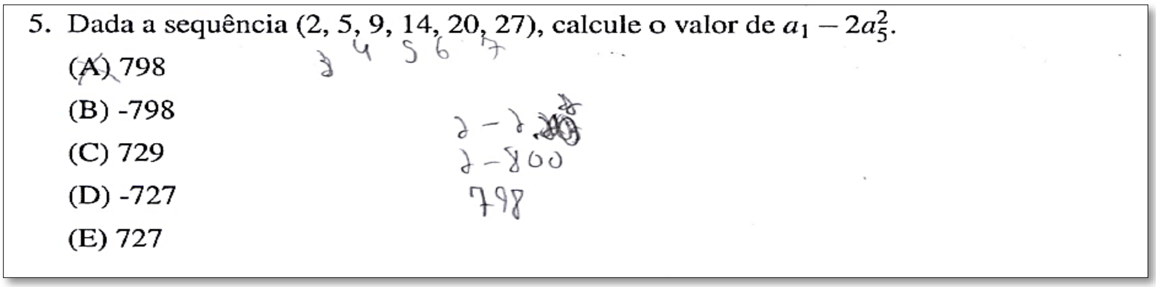
Portanto, conclui-se que o perímetro do $100°$ retângulo equivale a 598 cm.

Questão 05. Dada à sequência $(2, 5, 9, 14, 20, 27)$, calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

Nesta questão, 40% dos alunos marcaram a alternativa correta, enquanto que 60% não conseguiram acertar. Mostram-se, a seguir, algumas resoluções apresentadas na avaliação.

Na solução apresentada na Figura 19, abaixo, o aluno começou a resolução corretamente, identificou os termos $a_1 = 2$ e $a_5 = 20$, substituiu os valores na equação, mas se confundiu na subtração $(2 - 800)$ e obteve resposta igual a 798. Seguramente, teria encontrado a resposta -798, caso não tivesse feito a confusão.

Figura 19 - Avaliação Diagnóstica - Questão 05 - Al Cód. 20



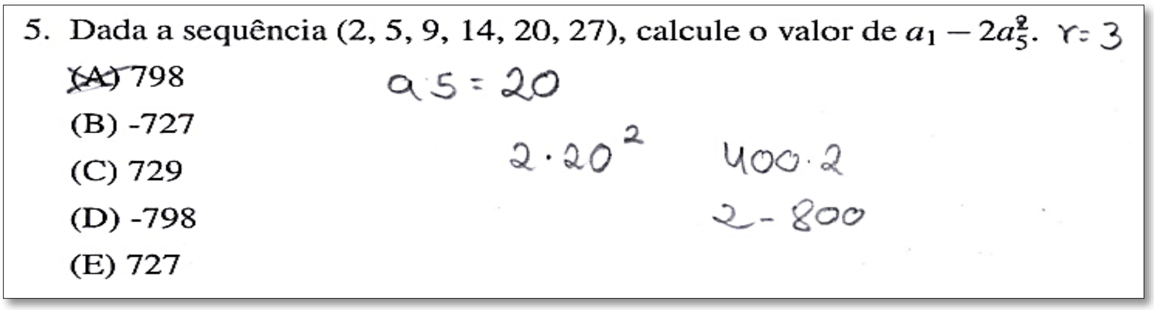
5. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

(A) 798
(B) -798
(C) 729
(D) -727
(E) 727

Fonte: Avaliação diagnóstica.

O mesmo fato aconteceu na solução apresentada na Figura 20, abaixo.

Figura 20 - Avaliação Diagnóstica - Questão 05 - Al Cód. 29



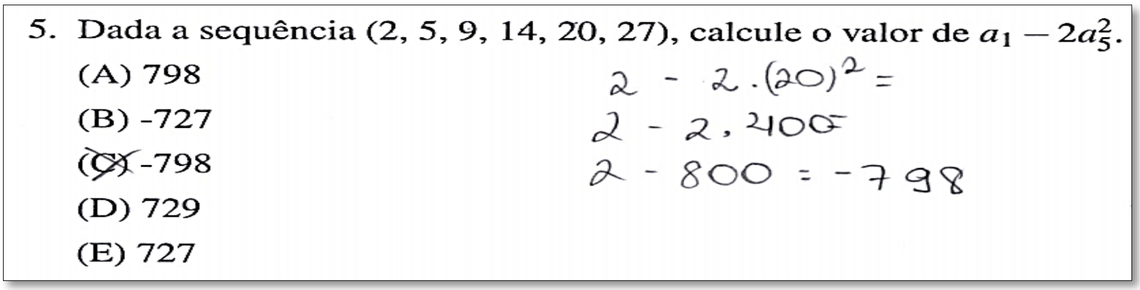
5. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

(A) 798
(B) -727
(C) 729
(D) -798
(E) 727

Fonte: Avaliação diagnóstica.

As soluções apresentadas, de forma correta, ocorreram de acordo com a Figura 21, abaixo. Os alunos resolveram em conformidade com a pauta de correção. Na solução da Figura 21, o aluno identificou corretamente os termos $a_1 = 2$ e $a_5 = 20$, substituiu esses valores na equação e encontrou a resposta igual a -798. Observando algumas resoluções apresentadas, verifica-se a necessidade de se fazer um reforço em relação às operações com números inteiros.

Figura 21 - Avaliação Diagnóstica - Questão 05 - AI Cód. 02



5. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

(A) 798

(B) -727

(C) -798

(D) 729

(E) 727

$2 - 2.(20)^2 =$

$2 - 2.400$

$2 - 800 = -798$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

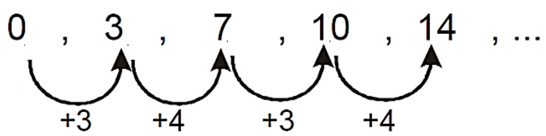
- **Pauta de Correção – Questão 05**

Esta questão tinha por objetivo verificar a capacidade do aluno de identificar os termos da sequência; além disso, ele deveria substituí-los na expressão algébrica dada, a fim de se obter um valor numérico correto.

Solução: Dada a sequência, primeiramente deve-se identificar os termos $a_1 = 2$ e $a_5 = 20$ e, em seguida, substituí-los na expressão algébrica dada. Dessa forma, temos que: $a_1 - a_5^2 = 2 - (20)^2 = 2 - 800 = -798$.

Portanto, conclui-se que o valor da expressão $a_1 - a_5^2$ é igual a -798.

Questão 06. (OBMEP - Adaptada) A sequência $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, \ldots$ é formada a partir do numero 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 mais o primeiro, o terceiro é 4 mais o segundo, o quarto é 3 mais o terceiro, o quinto é 4 mais o quarto e assim sucessivamente.

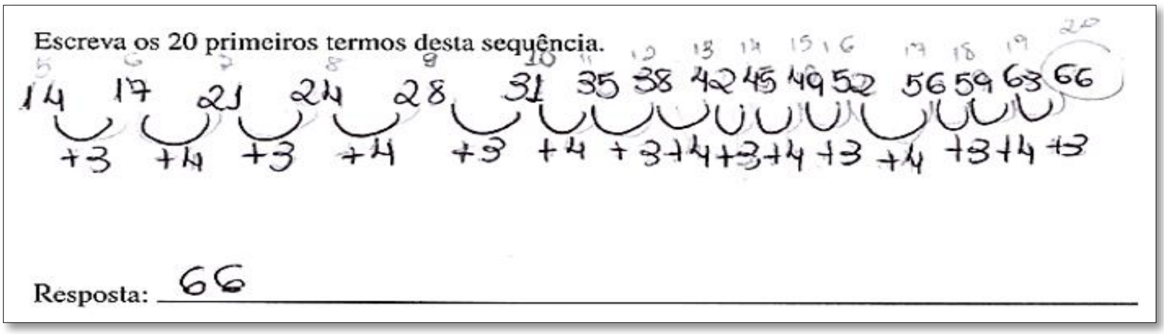


Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

É importante que os alunos tenham contato com o tipo de questão apresentada na 2ª Fase da OBMEP. Por esse motivo, foram simuladas duas questões, sendo que uma delas foi adaptada de prova anterior. Além disso, o aluno precisa se familiarizar com o tipo de resposta exigida na prova, pois as questões são discursivas e é preciso que se tenha uma capacidade de argumentação satisfatória para sustentar as soluções apresentadas. Nessa questão, 70% dos alunos acertaram a alternativa correta. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Na solução mostrada na Figura 22, abaixo, o aluno escreveu a sequência corretamente a partir no número 14, mas a questão solicita escrever os 20 primeiros termos da sequência. Além disso, ele escreveu, como resposta, apenas o último termo da sequência. Por esse motivo, não concluiu o que foi pedido na questão e, consequentemente, perdeu a pontuação prevista no item.

Figura 22 - Avaliação Diagnóstica - Questão 06 - Al Cód. 03



Fonte: Avaliação diagnóstica.

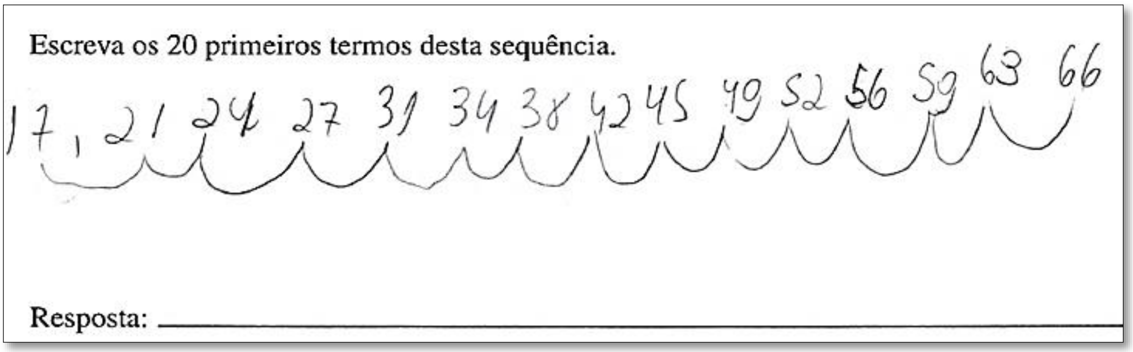
Na solução mostrada na Figura 23, abaixo, o aluno iniciou a sequência a partir do número 17 e finalizou no 42. Observa-se que ele apresentou corretamente parte da solução e a abandonou antes de escrever todos os termos. Por esse motivo, é importante que se faça um trabalho motivacional, em sala de aula, antes de iniciar qualquer atividade com os alunos.

Figura 23 - Avaliação Diagnóstica - Questão 06 - Al Cód. 06

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na Figura 24, abaixo, o aluno iniciou a resolução a partir do número 17 e finalizou no 66, entretanto, se confundiu durante a escrita da sequência. Observando os termos, no lugar do número 27, deveria ser 28 e, no lugar do número 34, deveria ser o 35. Por esse motivo, reafirma-se a necessidade de realizar um trabalho de revisão sobre os Números Reais e suas operações.

Figura 24 - Avaliação Diagnóstica - Questão 06 - Al Cód. 16


Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

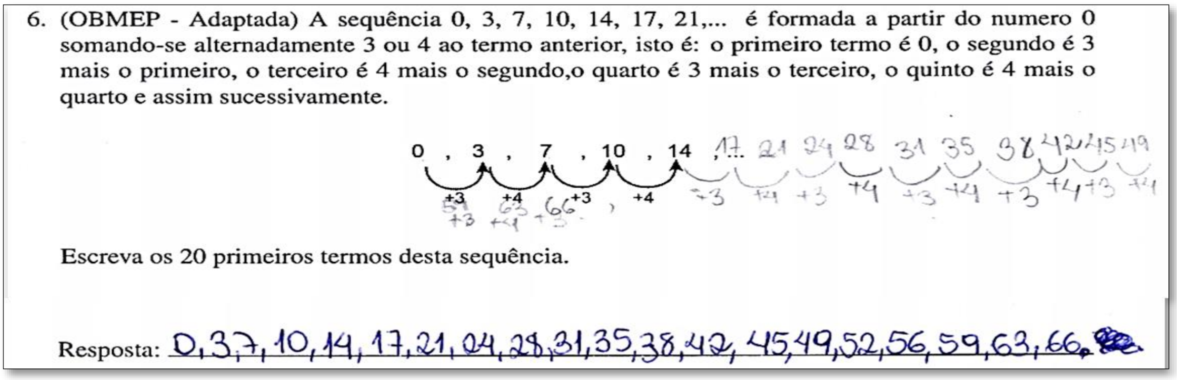
17, 21 24 27 31 34 38 42 45 49 52 56 59 63 66

Resposta:

Fonte: Avaliação diagnóstica.

As soluções apresentadas em conformidade com a pauta de correção estavam na mesma forma mostrada na Figura 25, abaixo. O aluno montou corretamente a sequência, a partir do 1° termo, e escreveu a resposta correta no local indicado.

Figura 25 - Avaliação Diagnóstica - Questão 06 - Al Cód. 13


6. (OBMEP - Adaptada) A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21,... é formada a partir do numero 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 mais o primeiro, o terceiro é 4 mais o segundo,o quarto é 3 mais o terceiro, o quinto é 4 mais o quarto e assim sucessivamente.

0 , 3 , 7 , 10 , 14 , 17 21 24 28 31 35 38 42 45 49

+3 +4 +3 +4 +3 +4 +3 +4 +3 +4 +3 +4 +3 +4

Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

Resposta: 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63, 66.

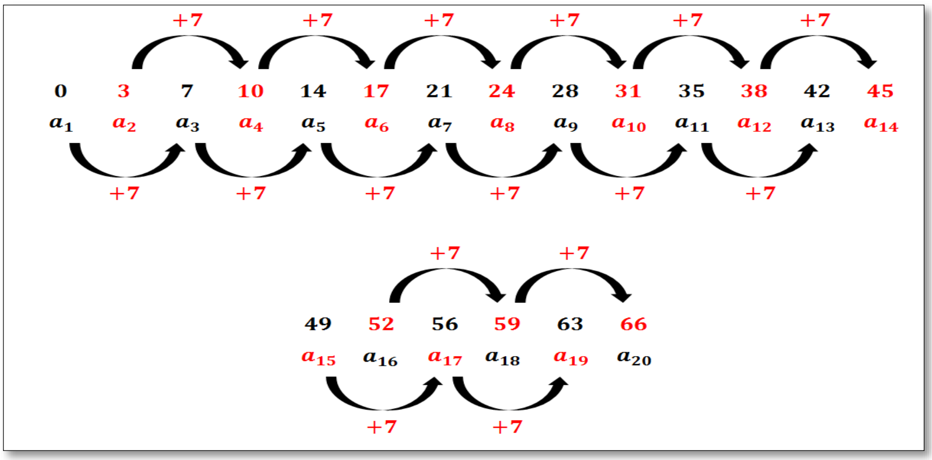
Fonte: Avaliação diagnóstica.

- **Pauta de Correção – Questão 06**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de escrever corretamente a sequência solicitada e ter noção do tipo de resolução que deveria apresentar na prova discursiva da OBMEP. Além disso, ela servia para mostrar a importância de interpretar corretamente o comando da questão e respondê-la de forma adequada.

Solução: Observando a sequência mostrada na questão, percebe-se que os termos alternados formam uma PA de razão 7, como mostra a Figura 26, abaixo.

Figura 26 - Avaliação Diagnóstica - resolução da Questão 06



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim sendo, precisa-se apenas escrever a sequência somando os termos alternados de 7 e 7, ou, como solução alternativa, escrever a sequência adicionando os valores dados no comando da questão.

Portanto, conclui-se que a sequência dos 20 termos é:

$(0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63, 66)$.

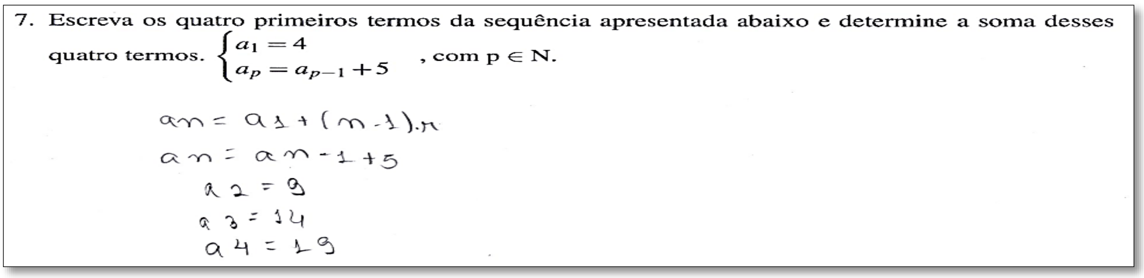
Questão 07. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}, com\ p \in \mathbb{N}.$$

Apenas 13,33% dos alunos conseguiram resolver esta questão. Os motivos desse baixo percentual não foram averiguados, mas a suspeita é que seja pelo fato de ser a última questão da avaliação, ou, por não ter tempo suficiente para resolvê-la, ou, por não ser uma questão direta, como as anteriores. A abstração é um ponto a ser observado nas aulas de Matemática, tendo em vista que algumas questões da OBMEP trabalham com esse formato. Mostram-se, a seguir, algumas resoluções apresentadas na avaliação.

Na solução mostrada na Figura 27, abaixo, o aluno encontrou corretamente os termos da sequência, mas não finalizou o pedido da questão, pois era preciso somar os 4 termos encontrados. Por causa disso, não levou os pontos referentes à soma dos termos.

Figura 27 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 02



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p $\in$ N.

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_n = a_{n-1} + 5$

$a_2 = 9$

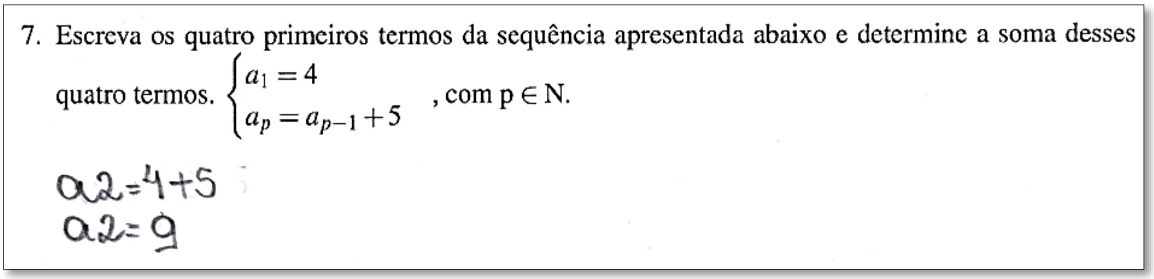
$a_3 = 14$

$a_4 = 19$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução mostrada na Figura 28, abaixo, o aluno encontrou somente o 2° termo da sequência e não deu continuidade à resolução. Como resultado, não recebeu a pontuação prevista na questão.

Figura 28 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 13



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p $\in$ N.

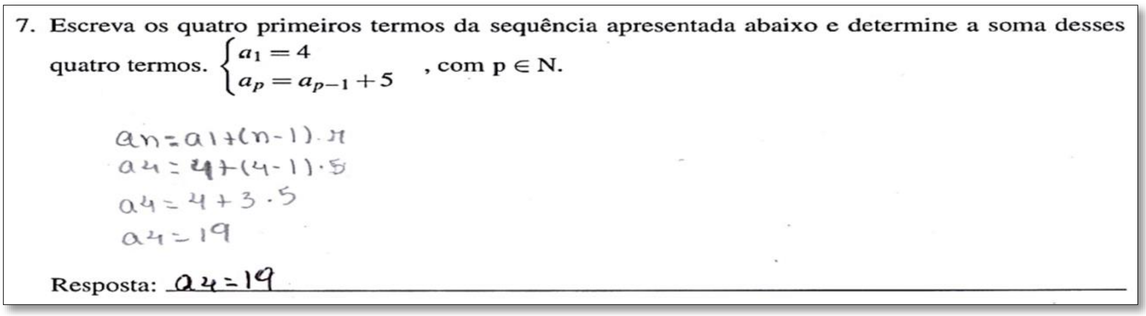
$a_2 = 4 + 5$

$a_2 = 9$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução apresentada na Figura 29, abaixo, o aluno calculou apenas o 4° termo da sequência, utilizando a fórmula do termo geral da PA e colocou como resposta final o valor encontrado. Assim sendo, não conseguiu a pontuação prevista na questão.

Figura 29 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 23



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p $\in$ N.

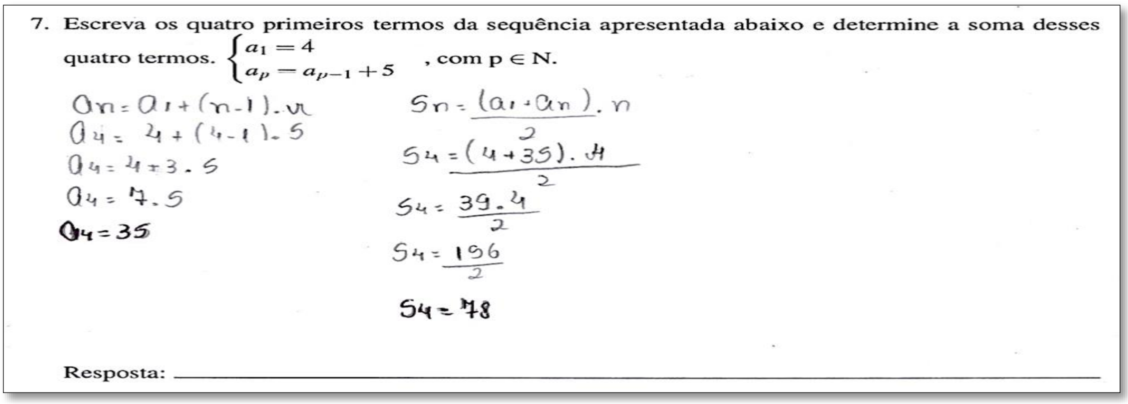
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$a_4 = 4 + (4-1) \cdot 5$
$a_4 = 4 + 3 \cdot 5$
$a_4 = 19$

Resposta: $a_4 = 19$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução mostrada na Figura 30, abaixo, o aluno utilizou a fórmula do termo geral da PA para encontrar o $4°$ termo da sequência. No entanto, efetuou a adição antes da multiplicação, como mostra a 3ª linha da resolução, e sua resposta foi 35. Primeiramente, ele deveria resolver a multiplicação $3.(5) = 15$ e, em seguida, adicioná-lo ao 4, encontrando 19 como resposta. Observa-se, também, que ele fez o mesmo procedimento durante a utilização da fórmula da soma dos termos da PA. Na 2ª linha, ele efetuou a adição antes da multiplicação. Caso não tivesse feito isso, seguramente, teria encontrado as respostas corretas.

Figura 30 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 28



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p $\in$ N.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
$a_4 = 4 + (4-1) \cdot 5$
$a_4 = 4 + 3 \cdot 5$
$a_4 = 7 \cdot 5$
$a_4 = 35$

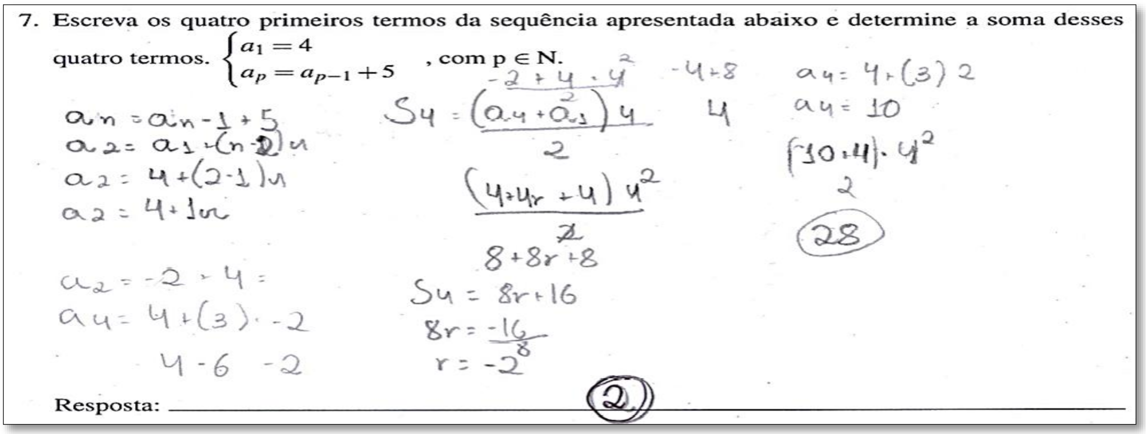
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$
$S_4 = \frac{(4 + 35) \cdot 4}{2}$
$S_4 = \frac{39 \cdot 4}{2}$
$S_4 = \frac{156}{2}$
$S_4 = 78$

Resposta:

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução apresentada na Figura 31, abaixo, o aluno iniciou a resolução utilizando a fórmula do termo geral. Percebe-se que ele chegou corretamente à expressão $a_2 = 4 + 1.r$. Caso tivesse substituído r por 5, teria encontrado a resposta correta para o 2º termo, pois $a_2 = 4 + 5 = 9$. Por esse motivo, não encontrou o que foi solicitado na questão e não obteve a pontuação.

Figura 31 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 29



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p ∈ N.

$a_n = a_{n-1} + 5$
$a_2 = a_1 + (n-2)r$
$a_2 = 4 + (2-1)r$
$a_2 = 4 + 1r$

$a_2 = -2 + 4 =$
$a_4 = 4 + (3)\cdot -2$
$4 - 6 \quad -2$

$-2 + 4 \cdot 4^2$
$S_4 = \frac{(a_4 + a_1)\,4}{2}$
$\frac{(4 + 4r + 4)\,4^2}{2}$
$8 + 8r + 8$
$S_4 = 8r + 16$
$8r = \frac{-16}{8}$
$r = -2$

$-4 + 8$
4

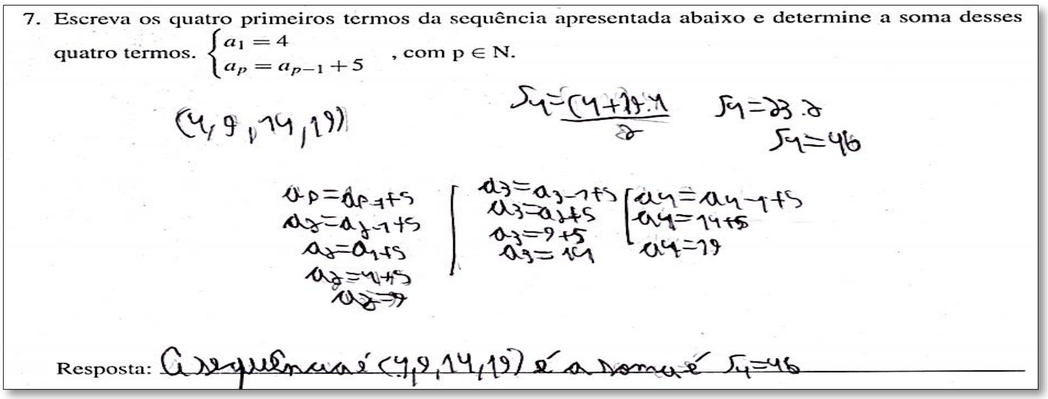
$a_4 = 4 + (3)\,2$
$a_4 = 10$
$\frac{(10+4)\cdot 4^2}{2}$
28

Resposta: 2

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Na solução apresentada na Figura 32, abaixo, o aluno resolveu em conformidade com a pauta de correção. Primeiramente, encontrou os 4 termos da sequência, utilizando a fórmula do termo geral da PA; em seguida, calculou a soma desses termos.

Figura 32 - Avaliação Diagnóstica - Questão 07 - AI Cód. 20



7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p ∈ N.

(4, 9, 14, 19)

$S_4 = \frac{(4+19)\cdot 4}{2}$ $\quad S_4 = 23 \cdot 2$ $\quad S_4 = 46$

$a_p = a_{p-1} + 5$
$a_2 = a_{2-1} + 5$
$a_2 = a_1 + 5$
$a_2 = 4 + 5$
$a_2 = 9$

$a_3 = a_{3-1} + 5$
$a_3 = a_2 + 5$
$a_3 = 9 + 5$
$a_3 = 14$

$a_4 = a_{4-1} + 5$
$a_4 = 14 + 5$
$a_4 = 19$

Resposta: A sequência é (4,9,14,19) e a soma é $S_4 = 46$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

- **Pauta de Correção – Questão 07**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de escrever a sequência a partir da lei de formação; além disso, ele deveria encontrar a soma dos termos.

Solução: Como $p \in \mathbb{N}$, então p pode assumir os valores 1, 2, 3 e 4.

Para $p = 1$, temos que $a_1 = 4$.

Para $p = 2$, temos que $a_2 = a_{2-1} + 5 = a_1 + 5 = 4 + 5 = 9$.

Para $p = 3$, temos que $a_3 = a_{3-1} + 5 = a_2 + 5 = 9 + 5 = 14$.

Para $p = 4$, temos que $a_4 = a_{4-1} + 5 = a_3 + 5 = 14 + 5 = 19$.

Portanto, conclui-se que os 4 termos da sequência são $(4, 9, 14, 19)$ e a soma destes é 46.

Uma solução alternativa é fórmula da soma dos termos da PA; assim, temos que:

$$S_4 = \frac{(a_1 + a_4).4}{2} = \frac{(4 + 19).4}{2} = (23).2 = 46.$$

De modo geral, apenas 13 alunos não conseguiram atingir nota igual ou superior a 5, o que corresponde a um percentual de $43{,}33\%$. A turma conseguiu uma média na Avaliação Diagnóstica de $4{,}76$ pontos. Com a análise das avaliações, conseguiu-se traçar um perfil da turma, observando as principais dificuldades que os estudantes encontraram no conteúdo abordado e, a partir destas, foi elaborado um plano de aula para minimizar tais dificuldades.

3.3 O PLANO DE AULA - SEQUÊNCIAS E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Após traçar um perfil dos alunos por meio da Avaliação Diagnóstica, procurou-se elaborar uma aula explicativa, abordando o tema de Sequências e Progressão Aritmética. O tema foi escolhido para dar continuidade ao trabalho do professor efetivo, como também, para não atrapalhar a programação da escola. Como foi visto no Referencial Teórico deste trabalho, a Tabela 4, mostra que pouco mais de 25% dos conteúdos cobrados em todas as edições da OBMEP corresponde à parte de aritmética, em que o tema está inserido.

Assim, procurou-se trabalhar algumas demonstrações de fórmulas com o propósito de despertar nos alunos curiosidades Matemáticas e, também, o gosto pela disciplina. Além disso, evidenciou-se a importância de aprender essas demonstrações a fim de evitar as famosas “decorebas”.

Devido ao pouco tempo cedido pela escola, a aula foi planejada para um período de 50 minutos, no qual foram abordados: uma parte introdutória com duração de 5 minutos; o desenvolvimento do tema com 40 minutos e as considerações finais, com aproximadamente 5 minutos. Nessas considerações, fez-se uma revisão sumária do conteúdo e foram repassadas informações referentes ao próximo encontro.

No início da aula, foi distribuída uma folha para os alunos, contendo um resumo do plano de aula. O objetivo desta folha era que os alunos pudessem acompanhar a aula passo a passo e anotar as informações necessárias de forma organizada, dentro de cada parte do conteúdo. O plano de aula, elaborado para o professor e para o aluno, está disponível, detalhadamente, no Apêndice C e no Apêndice D, localizados no final deste trabalho. Na próxima seção, serão abordados apenas os procedimentos adotados em cada parte do plano de aula.

3.3.1 Introdução

Inicialmente, foi feita uma apresentação individual (formação acadêmica) e falou-se do objetivo desta aula. Havia uma agitação natural, mas a turma recebeu bem a presença do pesquisador, expressando curiosidade sobre a atividade.

Em seguida, destacou-se a importância do tema a ser estudado durante a aula, tanto para o ano letivo quanto para a prova da OBMEP. Também foram definidas as sequências e citados alguns exemplos para que os alunos fossem se habituando às nomenclaturas apresentadas. Além disso, foram lidos os objetivos gerais[8] e específicos que seriam alcançados no final da aula.

Solicitou-se que eles acompanhassem, na folha distribuída, todas as explicações e as resoluções de exemplos que seriam feitas durante o período. Solicitou-se, ainda, que respondessem um questionário, de caráter voluntário, que seria distribuído após a avaliação, cujo objetivo era levantar dados a respeito da OBMEP. Por fim, foi informado que haveria uma Avaliação Formativa e o resultado obtido seria entregue ao professor efetivo, com o intuito de fazer parte da média final da turma.

3.3.2 O desenvolvimento da aula

Nesta seção, foram tratadas as definições essenciais relativas ao assunto, demonstradas algumas fórmulas e resolvidos exemplos para que os estudantes

[8] Os objetivos gerais são: 1) Estudar as sequências, especialmente a Progressão Aritmética (PA), a fim de se obter um melhor desempenho nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP); 2) Estimular o interesse em estudar a Matemática através de demonstrações, teoremas e resolução de problemas, bem como despertar a vontade de participar da OBMEP.

fixassem o conteúdo. A seguir, serão exibidos sumariamente os tópicos trabalhados durante o tempo de aula. Esses tópicos foram organizados de forma sequencial para facilitar o aprendizado do aluno, pois, durante a Avaliação Diagnóstica, foram identificados alguns conceitos básicos da matéria e como eles estão estruturados.

- **Sequências**

A ideia foi mostrar que as sequências fazem parte do cotidiano do aluno e foram dados exemplos notáveis, como a sequência dos dias da semana, dos meses do ano e a sequência dos números naturais positivos.

Destacou-se que, todas essas sequências apresentavam uma certa ordem dos elementos e estes são chamados de termos. Assim, mostrou-se que na sequência dos dias da semana, o $1°$ termo é domingo, o $2°$ termo é terça, ..., o $7°$ termo é sábado, a fim de que os alunos pudessem relacionar com as ideias âncoras da estrutura cognitiva. Esses termos, doravante, são representados por uma letra minúscula acompanhado de um número chamado de índice, por exemplo: o $1°$ termo é a_1 (lê-se: a índice 1), o $2°$ termo é a_2 (lê-se: a índice 2) e o $3°$ termo é a_3 (lê-se: a índice 3).

Notou-se a importância de deixar clara a nomenclatura, pois era necessário que eles se adaptassem com a escrita Matemática. Por fim, solicitou-se que eles relacionassem, na folha, os termos com os dias da semana, assim:

a_1 → Domingo; a_2 → Segunda; a_3 → Terça; a_4 → Quarta; a_5 → Quinta; a_6 → Sexta e a_7 → Sábado.

Em seguida, foram citados outros exemplos a fim de nivelar a ideia de sequências.

- **Lei de Formação**

Enfatizou-se que as sequências obedecem a certas regras e estas são chamadas de *lei de formação*. Mostrou-se a importância de entender a lei de formação, que foi exemplificada com números naturais positivos que são quadrados perfeitos, $S = (1,4,9,16, \ldots)$. Nesse momento, foi solicitado que descobrissem a regra que formou esta sequência. Depois de escutar dos alunos suas várias hipóteses, esclareceu-se que a regra da sequência apresentada era n^2, onde n é o índice do termo. Este exemplo simples fez com que os alunos entendessem realmente a importância da lei de formação. Por fim, solicitou-se que eles completassem, na folha, os espaços vazios, referentes aos termos da sequência dada: $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9$, $a_4 = 4^2 = 16$,..., $a_n = n^2$.

Com o objetivo de fixar o conteúdo, foram resolvidas as questões 5 e 7 da Avaliação Diagnóstica, explicando detalhadamente os procedimentos para resolvê-las e ajudando-os a escrever a solução de forma clara e objetiva, padronizando a escrita e a apresentação da resposta. Cabe destacar que, no final deste tópico, escutou-se dos alunos expressões do tipo: "como é fácil!", "entendendo assim fica bem legal!" e "quando a gente entende, fica muito mais fácil!" etc.

- **Progressão Aritmética**

Procurou-se mostrar que a PA é uma sequência que apresenta a mesma variação entre dois termos consecutivos e essa variação é chamada de *razão*. Além disso, foi identificado, na Avaliação Diagnóstica, que eles conheciam o conceito de razão. Assim, escreveram-se alguns exemplos de PA no quadro e, por iniciativa deles, colaboravam com o professor, já falando quais eram esses termos da sequência e a razão de cada uma, faltando apenas registar a forma correta de calcular e escrever de forma padronizada. Em seguida, mostrou-se como se calcula a razão da PA, ratificou-se, mais uma vez, o conceito desta sequência e foi resolvida a 1ª questão da Avaliação Diagnóstica para fixar o conteúdo.

- **A Fórmula do Termo Geral**

Procurou-se demonstrar a fórmula do termo geral de maneira simples e compreensível para que os alunos não precisassem mais memorizá-la e para despertar o interesse deles por futuras demonstrações. A partir de uma sequência de n termos, tais que $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, procurou-se identificar os termos, a partir do segundo, e fazendo uma relação com o anterior. Assim, foi-se construindo passo a passo a ideia de encontrar cada termo de uma PA utilizando o conceito de razão, como mostra a seguir:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$, mas $a_2 = a_1 + r$, logo $a_3 = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r = a_1 + (3 - 1).r$

$a_4 = a_3 + r$, mas $a_3 = a_1 + 2r$, logo $a_4 = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r = a_1 + (4 - 1).r$.

Desta forma, os alunos foram deduzindo e falando durante a aula que:

$a_5 = a_1 + 4r = a_1 + (5 - 1)r$

$a_6 = a_1 + 5r = a_1 + (6-1)r$

$\vdots$

$a_{10} = a_1 + 9r = a_1 + (10-1)r$

$\vdots$

$a_{100} = a_1 + 99r = a_1 + (100-1)r.$

Em seguida, foi explicado que para um termo geral, seja qual for a representação do índice, n ou p, vale a relação: $a_n = a_1 + (n-1).r$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Generalizando, demonstrou-se que a fórmula do termo geral é dada por

Termo geral

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r, n} \in \mathbb{N}}$$

Para finalizar este tópico, além de resolver exemplos específicos para fixar o conteúdo, foi resolvida a 2ª questão da Avaliação Diagnóstica com o intuito de mostrar que a Matemática é uma disciplina interessante e que não há necessidade de "decorar" as fórmulas.

- **A soma dos termos de uma PA finita**

Antes de tudo, perguntou-se aos alunos, se era possível somar os números de 1 até 100 em menos de 2 minutos. Nesse momento, todos ficaram se olhando e pensando se era possível, alguns disseram que sim e outros disseram que não. A pergunta foi uma maneira de despertar a curiosidade da turma, pois, fazendo um *link* com os tópicos anteriores, já havíamos definido sequências, entendido a ideia de razão e compreendido a fórmula do termo geral.

Antes de mostrar que era possível efetuar a soma, contou-se a história de Gauss. Segundo Moura (2016, p.34), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1865) "foi uma das mentes mais brilhantes conhecidas pela humanidade". De família humilde, nasceu na Alemanha, seu pai trabalhava como mestre de obras e sua mãe, embora não tivesse sido sábia, foi a responsável por apoiá-lo em seus estudos.

Aos poucos, os alunos, foram despertando o interesse pela história. Em seguida, contou-se essa mesma história na visão de Boyer (1974), que afirma que Gauss se divertia quando criança com cálculos matemáticos.

> Um dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções a cada um para colocar sua lousa sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo, “Aí está"; o professor olhou para ele com pouco caso enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o mestre finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única a exibir a resposta correta, 5050, sem nenhum cálculo. (BOYER, 1974, p.367).

A ideia de Gauss foi reproduzida em sala de aula para que os alunos observassem a resolução da soma dos termos da PA $(1,2,3,\ldots,98,99,100)$, por um menino de 10 anos de idade. Foi explicado que se somasse os números em pares, obteria-se sempre o mesmo resultado, mas as parcelas teriam que ser equidistantes. Assim sendo:

$$1+100=2+99=3+98=\cdots=49+52=50+51=101.$$

Percebe-se que esse resultado apareceu 50 vezes e conclui-se, mentalmente, que a soma dos termos da PA $(1,2,3,\ldots,98,99,100)$ é igual a 50 vezes 101, logo, o resultado é 5050.

Expressando algebricamente como termos de uma PA, temos que:

$$a_1=1, a_2=2, a_3=3,\ldots, a_{99}=99\ e\ a_{100}=100.$$

Então:

$$a_1+a_{100}=a_2+a_{99}=a_3+a_{98},\ldots,a_{50}+a_{51}=101.$$

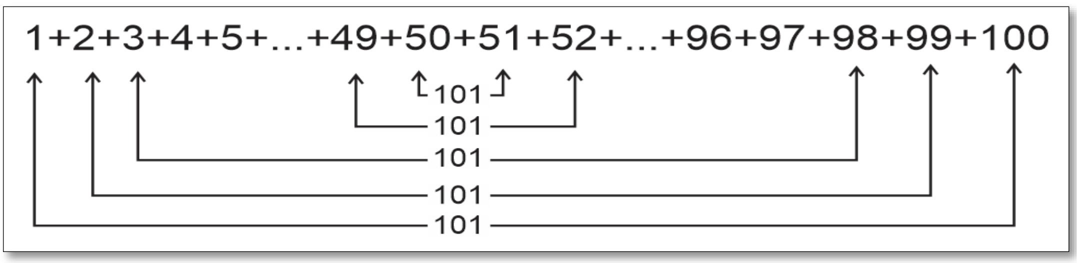
$$S_{100}=5050=(101).50=(1+100).\frac{100}{2}=\frac{(a_1+a_{100}).100}{2}.$$

Como essa PA tem 100 termos, então $n=100$, assim:

$$S_{100}=\frac{(a_1+a_{100}).100}{2}=\frac{(a_1+a_{100}).n}{2}.$$

Uma visão geral do cálculo é mostrada na Figura 33, abaixo.

Figura 33 - Soma dos 100 primeiros números naturais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, mostrou-se para os alunos uma demonstração simples, que contou com o auxílio da história da Matemática, da fórmula da soma dos termos de uma PA finita.

Soma dos Termos de uma PA

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}, n \in \mathbb{N}$$

Por fim e para fixar o conteúdo, foram resolvidos outros exemplos mais a 3ª questão da Avaliação Diagnóstica. Finalizando este tópico, vale expressar a satisfação dos alunos a respeito do assunto abordado de forma diferente. Eles perceberam que a Matemática seria mais interessante contada por meio de histórias e demonstrações Matemáticas. Segundo alguns relatos dos alunos, eles disseram que não esquecerão mais desta fórmula.

- **Considerações finais**

Neste tópico, mais uma vez, ressaltou-se a importância do assunto para o ano escolar e para a OBMEP. Realizou-se um breve resumo da aula e, em seguida, foi informado que haveria uma Avaliação Formativa para verificar a aprendizagem. Informou-se também que seria distribuído um questionário para fins de coleta de dados sobre a OBMEP.

3.4 A AVALIAÇÃO FORMATIVA

Uma das funções da Avaliação Formativa é a de orientar, pois é importante avaliar gradativamente se o aluno está dominando o conteúdo. Ao longo do processo de aprendizagem, devem-se realizar Avaliações Formativas com o objetivo de averiguar se os alunos estão alcançando os objetivos propostos. Assim, para a SEEDF a “função formativa da avaliação é a mais adequada ao projeto de Educação pública” (GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL, 2018, p.71).

Na visão de Moraes (2008, p. 57), esta avaliação compõe o processo de ensino e aprendizagem e tem como propósito “determinar o nível de aprendizagem obtido pelo aluno em um conteúdo ensinado, bem como especificar em que grau esta aprendizagem ainda não está totalmente dominada”. Dessa forma, a Avaliação Formativa pode contribuir para o aperfeiçoamento do professor, fornecendo dados para adequar seus procedimentos de ensino às necessidades da turma. Pode, ainda, ajudar o aluno, oferecendo informações sobre seu progresso na aprendizagem, bem como sobre suas dificuldades, para poder superá-las (HAYDT, 1997, apud SALOMÃO; NASCIMENTO, 2014, p.23)

Moraes (2008, p.57), ressalta que esta avaliação procura assegurar que os alunos atinjam os objetivos propostos e também permite que os professores percebam seus erros e acertos com o objetivo de aperfeiçoar e progredir no processo de ensino e aprendizagem. Desse modo, a Avaliação Formativa caracteriza-se por possibilitar ao professor analisar o seu trabalho em sala de aula, investigar constantemente a sua teoria e prática, de acordo com as necessidades dos alunos.

A proposta curricular do Ensino Médio da SEEDF direciona para procedimentos metodológicos interdisciplinares e contextualizados, "assim o processo avaliativo deve convergir para uma avaliação formativa que propicie a aprendizagem dos estudantes, favorecendo a formação para a cidadania e para a autonomia" (GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL, 2018a, p.25). Finalizando, pode-se dizer que a Avaliação Formativa nos auxilia no processo de aprendizagem e nos dá uma direção. Essa avaliação não se baseia apenas em atribuir notas ou conceitos para se tenha um produto, e sim serve como norteadora para atingir todos os objetivos propostos com êxito.

Após a aula explicativa sobre Sequências e Progressão Aritmética, foi aplicada uma Avaliação Formativa cujo propósito era mensurar o aprendizado em relação ao conteúdo. A avaliação foi dividida em 2 partes, a 1ª contendo 4 questões de múltipla escolha, simulando a 1ª Fase da OBMEP, e a 2ª parte com 2 questões discursivas, simulando a 2ª Fase. A diferença entre as avaliações é que, nesta, o aluno precisaria, obrigatoriamente, mostrar os cálculos que justificassem as respostas na 1ª parte da avaliação.

3.4.1 A análise dos resultados da Avaliação Formativa

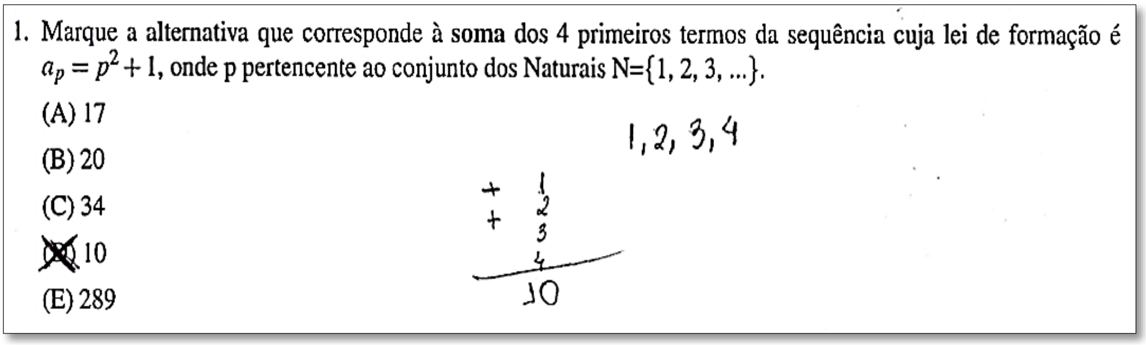
O resultado desta avaliação foi satisfatório, pois o objetivo era avaliar os aspectos estudados, na sessão anterior, sobre Sequências e PA. Ao analisar os resultados dos 30 alunos que realizaram a avaliação, traçou-se um perfil da turma em relação ao conteúdo estudado. Este perfil servirá de apoio para futuros planejamentos, procurando aperfeiçoar o processo, bem como amenizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. A seguir, serão comentadas algumas soluções das avaliações e, na sequência, será apresentada a pauta de correção. Para efeito de instrução, não serão mostradas as alternativas, pois a avaliação completa encontra-se no Apêndice E, localizado no final deste trabalho.

Questão 01. Marque a alternativa que corresponde à soma dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertence ao conjunto dos Naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

O percentual de acertos desta questão foi de 15%, sendo considerado o menor índice comparado com as demais. Mostram-se, a seguir, algumas resoluções apresentadas na avaliação.

Observa-se na Figura 34, abaixo, que o aluno, ao resolver a questão, somou apenas os índices dos termos. Como consequência, não obteve o resultado correto.

Figura 34 - Avaliação Formativa - Questão 01 - Al Cód. 01


1. Marque a alternativa que corresponde à **soma** dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertencente ao conjunto dos Naturais N={1, 2, 3, ...}.

(A) 17

(B) 20

(C) 34

(D) 10

(E) 289

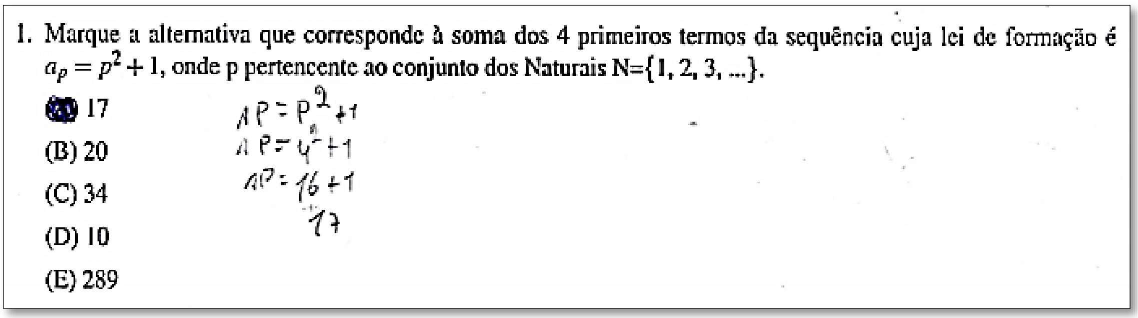
1, 2, 3, 4

$$\begin{array}{r} 1 \\ + \; 2 \\ + \; 3 \\ 4 \\ \hline 10 \end{array}$$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução apresentada na Figura 35, abaixo, o aluno calculou apenas o 4º termo, enquanto deveria calcular a soma dos 4 termos da sequência.

Figura 35 - Avaliação Formativa - Questão 01 - Al Cód. 11


1. Marque a alternativa que corresponde à **soma** dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertencente ao conjunto dos Naturais N={1, 2, 3, ...}.

(A) 17

(B) 20

(C) 34

(D) 10

(E) 289

$AP = P^2 + 1$

$AP = 4^2 + 1$

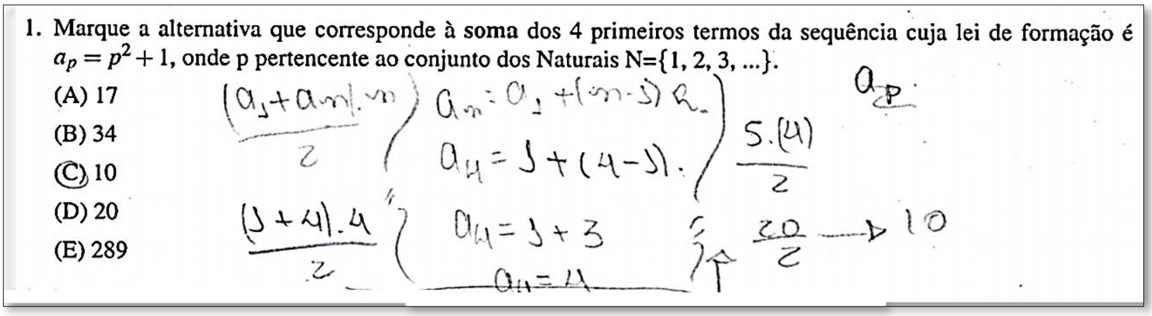
$AP = 16 + 1$

17

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução apresentada na Figura 36, abaixo, o aluno entendeu que se tratava de uma PA de 4 termos e razão 1. Substituiu a_n por 4 e r por 1, e encontrou a soma dos termos igual a 10.

Figura 36 - Avaliação Formativa - Questão 01 - Al Cód. 14



1. Marque a alternativa que corresponde à **soma** dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertencente ao conjunto dos Naturais N={1, 2, 3, ...}.

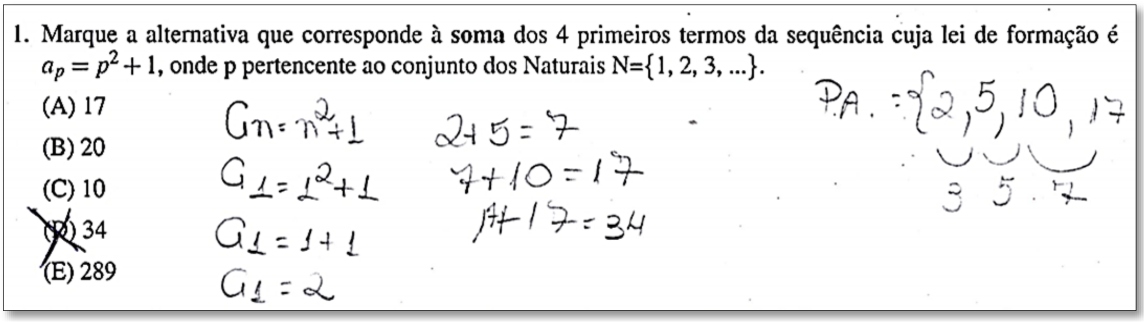
(A) 17
(B) 34
(C) 10
(D) 20
(E) 289

$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ $a_n = a_1 + (n-1) r$ $a_4 = 1 + (4-1) \cdot$ $a_4 = 1 + 3$ $a_4 = 4$ $\frac{(1+4) \cdot 4}{2}$ $\frac{5 \cdot (4)}{2}$ $\frac{20}{2} \to 10$ a_p:

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução apresentada na Figura 37, abaixo, o aluno resolveu corretamente, pois primeiro encontrou os termos da sequência e, em seguida, somou todos eles. Essa mesma ideia de resolução foi utilizada por parte dos alunos que acertaram a questão.

Figura 37 - Avaliação Formativa - Questão 01 - Al Cód. 03



1. Marque a alternativa que corresponde à **soma** dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertencente ao conjunto dos Naturais N={1, 2, 3, ...}.

(A) 17
(B) 20
(C) 10
(D) 34
(E) 289

$a_n = n^2 + 1$
$a_1 = 1^2 + 1$
$a_1 = 1 + 1$
$a_1 = 2$
$2 + 5 = 7$
$7 + 10 = 17$
$17 + 17 = 34$
P.A. : {2, 5, 10, 17
3 5 7

Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 01**

O objetivo desta questão, era verificar a capacidade do aluno de efetuar a soma dos 4 primeiros termos da sequência, mas, para efetuar a soma, ele precisaria montar a sequência por meio da lei de formação.

Solução:

Como p é um número natural, então pode assumir os valores $1, 2, 3$ e 4.

Para $p = 1$, temos que $a_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Para $p = 2$, temos que $a_2 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

Para $p = 3$, temos que $a_3 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.

Para $p = 4$, temos que $a_4 = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.

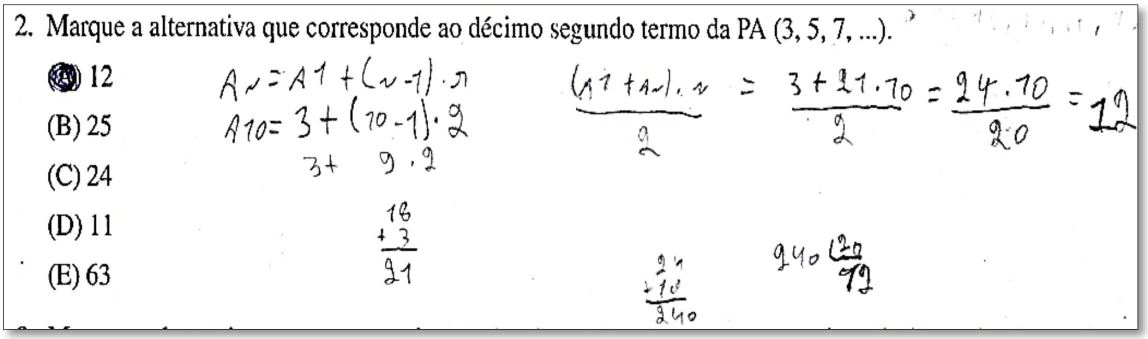
Assim, a sequência formada pelos 4 termos é $(2, 5, 10, 17)$ e a sua soma correspondem a $2 + 5 + 10 + 17 = 34$. Portanto, conclui-se que a soma dos valores dos termos da sequência é 34.

Questão 02. Marque a alternativa que corresponde ao décimo segundo termo da PA $(3, 5, 7, \ldots)$.

Essa questão teve o maior percentual de acertos, com $91{,}67\%$, quando comparada às demais. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Na solução mostrada na Figura 38, abaixo, o aluno calculou corretamente o 10º termo da PA, sendo que deveria ser o $12°$ termo. Em seguida, utilizou a fórmula da soma dos termos para encontrar a soma dos 10 primeiros termos da sequência. Entretanto, ao utilizar a fórmula, equivocou-se na expressão, pois resolveu a adição antes da multiplicação, isto é, na sua resolução escreveu $(3 + 21.10) = 24.(10)$, o que deveria ser $(3 + 21.10) = 3 + 210$.

Figura 38 - Avaliação Formativa - Questão 02 - AI Cód. 11


2. Marque a alternativa que corresponde ao décimo segundo termo da PA (3, 5, 7, ...).

(A) 12

(B) 25

(C) 24

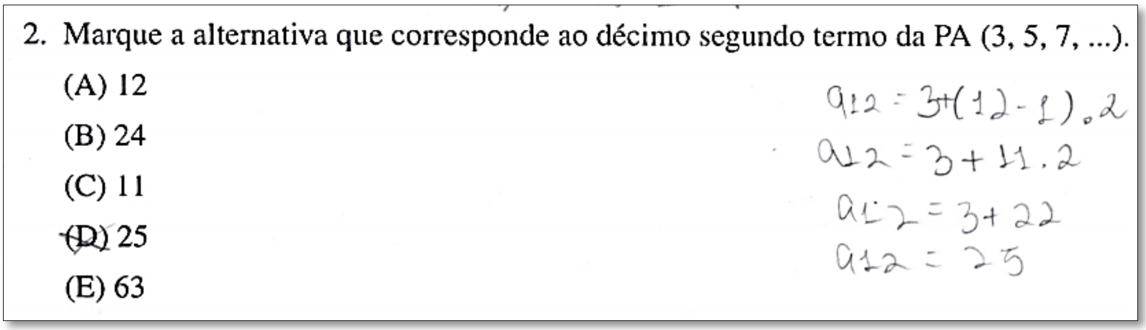
(D) 11

(E) 63

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 39, abaixo, o aluno resolveu de acordo com a pauta de correção, ou seja, utilizou a fórmula do termo geral da PA. A maioria dos alunos que acertaram esta questão utilizou este mesmo procedimento.

Figura 39 - Avaliação Formativa - Questão 02 - Al Cód. 02



2. Marque a alternativa que corresponde ao décimo segundo termo da PA (3, 5, 7, ...).

(A) 12

(B) 24

(C) 11

(D) 25

(E) 63

$a_{12} = 3+(12-1).2$

$a_{12} = 3+11.2$

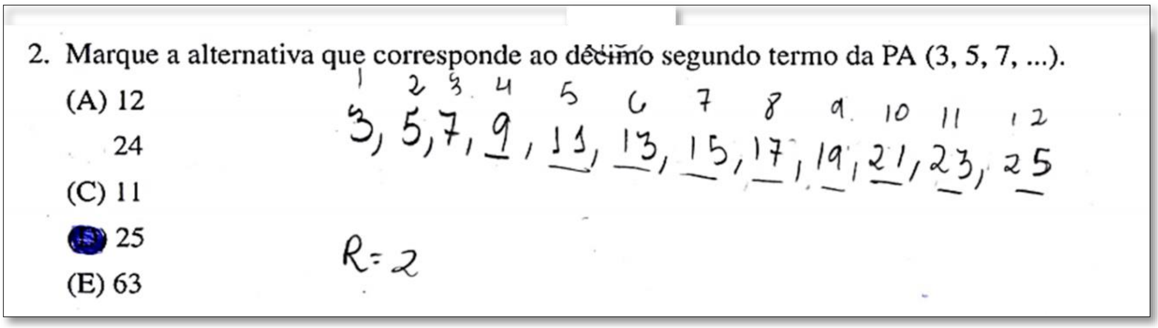
$a_{12} = 3+22$

$a_{12} = 25$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 40, abaixo, o aluno encontrou a alternativa correta utilizando uma forma diferente da pauta de correção. Ele escreveu todos os termos da sequência para encontrar o $12°$ termo. Considera-se uma solução correta, mas, para uma questão que possui uma quantidade alta de termos, não seria uma solução vantajosa.

Figura 40 - Avaliação Formativa - Questão 02 - Al Cód. 04



2. Marque a alternativa que corresponde ao décimo segundo termo da PA (3, 5, 7, ...).

(A) 12

24

(C) 11

25

(E) 63

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25

R= 2

Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 02**

A Questão 02 tinha por objetivo verificar a capacidade do aluno em calcular um determinado termo da sequência, utilizando a fórmula do termo geral, ou por meio de uma solução alternativa.

Solução: Nota-se que o $1°$ termo da sequência 3, e o $2°$ é 5. Além disso, a razão da PA é 2, pois $7 - 5 = 5 - 3 = 2$. De posse dessas informações, precisaria apenas utilizar a fórmula do termo geral para encontrar a resposta. Então:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_{12} = 3 + (12-1).2 = 3 + 22 = 25.$$

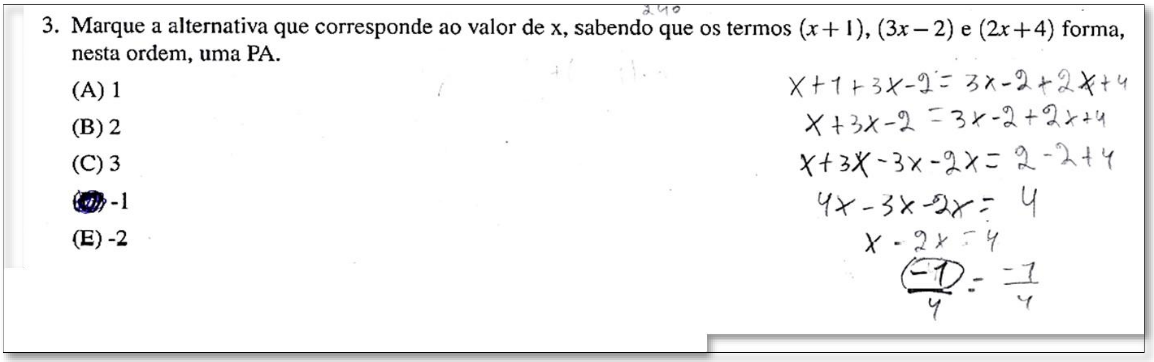
Portanto, conclui-se que o $12°$ termo da PA é 25.

Questão 03. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x + 1)$, $(3x - 2)$ e $(2x + 4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

Nessa questão, 50% dos 30 alunos marcaram a alternativa correta, isto é, o percentual de acertos deste modelo de questão passou de $23{,}33\%$ da Avaliação Diagnóstica para 50% na Avaliação Formativa. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Na solução mostrada na Figura 41, abaixo, o aluno trocou a ordem dos termos e os adicionou, pois ele escreveu a equação $(x + 1) + (3x - 2) = (3x - 2) + (2x + 4)$, no lugar de $(2x + 4) - (3x - 2) = (3x - 2) - (x + 1)$. Por esse motivo, não acertou a questão.

Figura 41 - Avaliação Formativa - Questão 03 - Al Cód. 11



3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) -1

(E) -2

$x+1+3x-2 = 3x-2+2x+4$

$x+3x-2 = 3x-2+2x+4$

$x+3x-3x-2x = 2-2+4$

$4x-3x-2x = 4$

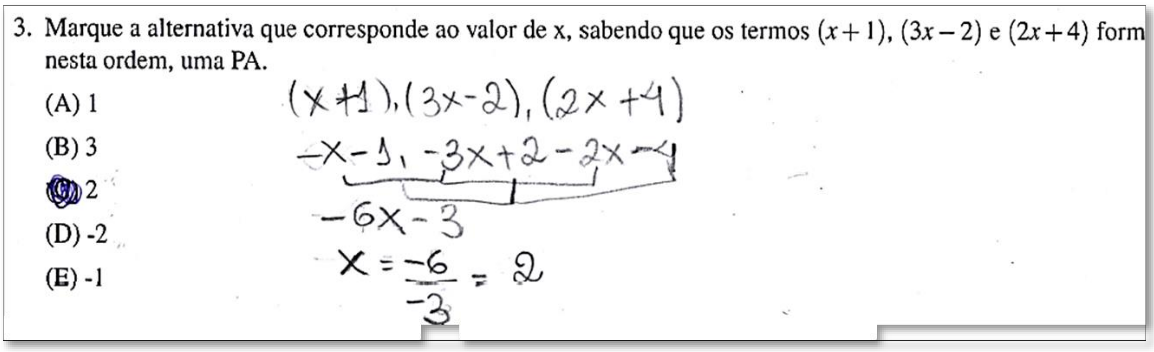
$x-2x = 4$

$\frac{-1}{4} = \frac{-1}{4}$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 42, abaixo, o aluno entendeu como deveria resolver a questão, no entanto, não completou a equação e, consequentemente, não encontrou a resposta correta.

Figura 42 - Avaliação Formativa - Questão 03 - Al Cód. 13



3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ form nesta ordem, uma PA.

(A) 1

(B) 3

(C) 2

(D) -2

(E) -1

$(x+1), (3x-2), (2x+4)$

$-x-1, -3x+2-2x-4$

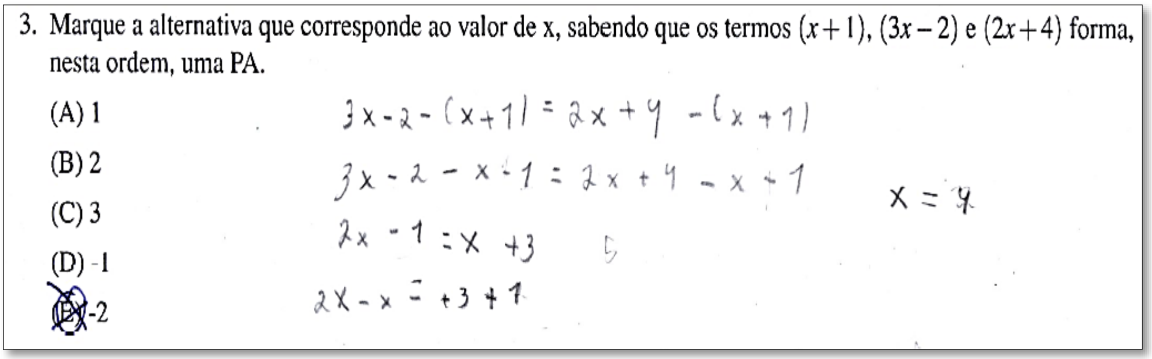
$-6x-3$

$x = \frac{-6}{-3} = 2$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 43, abaixo, o aluno iniciou corretamente a resolução da questão, porém, ao efetuar as operações da linha 2, escreveu $2x-1$ como resposta de $3x-2-(x+1)$ e, na verdade, deveria ser $2x-3$. Outra observação, foi que ele utilizou o termo $(x+1)$ no lugar de $(3x-2)$ no 2º membro da equação. Por esses motivos, não acertou a questão.

Figura 43 - Avaliação Formativa - Questão 03 - Al Cód. 24



3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) -1

(E) -2

$3x-2-(x+1)=2x+4-(x+1)$

$3x-2-x-1=2x+4-x+1$

$2x-1=x+3$

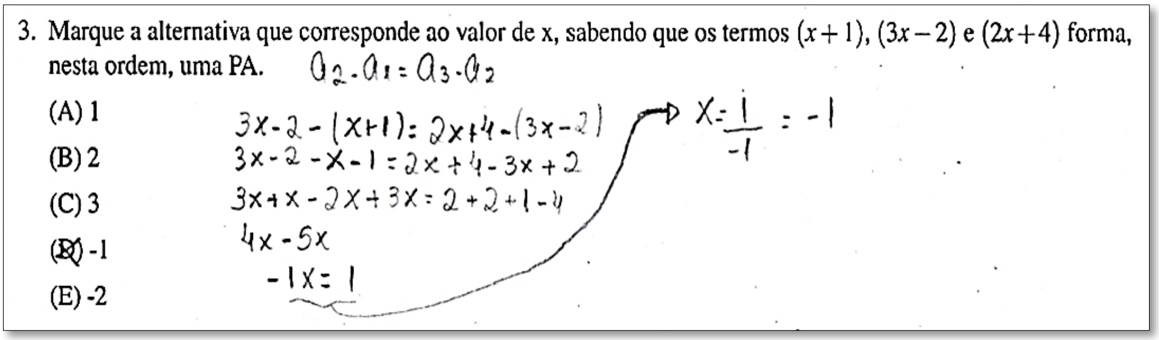
$2x-x=+3+1$

$x=4$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 44, abaixo, o aluno iniciou corretamente a resolução, mas alterou o sinal de $-x$ na linha 3 para $+x$. O mesmo fato aconteceu no $2°$ membro da equação com o número 4.

Figura 44 - Avaliação Formativa - Questão 03 - Al Cód. 28



3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

$a_2-a_1=a_3-a_2$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) -1

(E) -2

$3x-2-(x+1)=2x+4-(3x-2)$

$3x-2-x-1=2x+4-3x+2$

$3x+x-2x+3x=2+2+1-4$

$4x-5x$

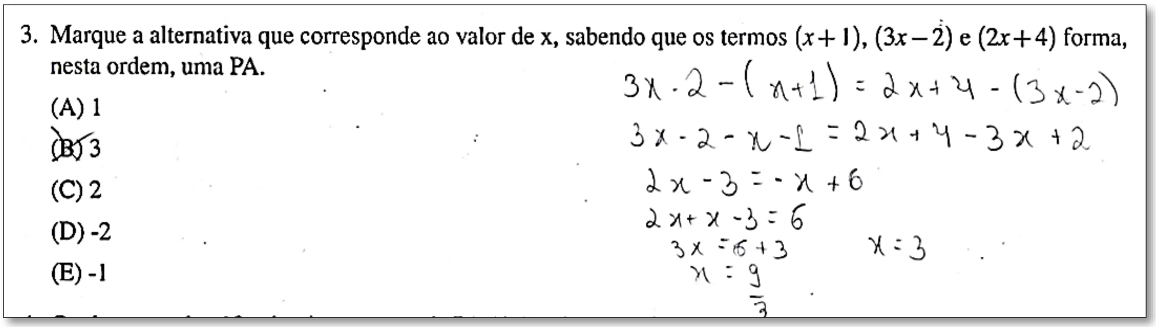
$-1x=1$

$x=\frac{1}{-1}=-1$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 45, abaixo, o aluno resolveu a questão de acordo com a pauta de correção. Dos alunos que acertaram esta questão, a maioria deles resolveu utilizando este mesmo procedimento.

Figura 45 - Avaliação Formativa - Questão 03 - AI Cód. 02


3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

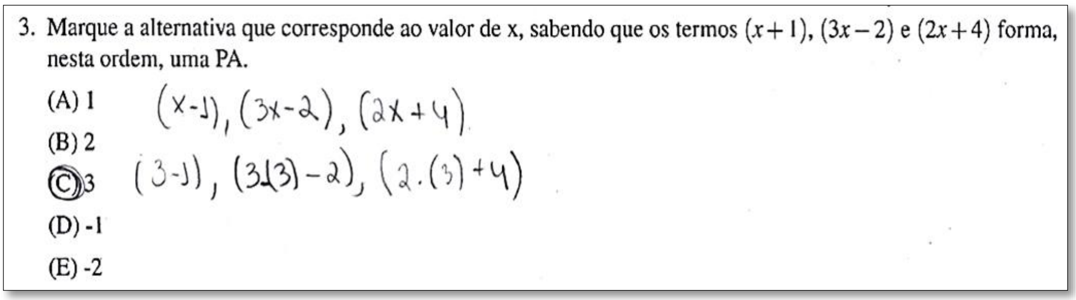
(A) 1
(B) 3
(C) 2
(D) -2
(E) -1

$3x - 2 - (x+1) = 2x + 4 - (3x-2)$
$3x - 2 - x - 1 = 2x + 4 - 3x + 2$
$2x - 3 = -x + 6$
$2x + x - 3 = 6$
$3x = 6 + 3$ $\quad x = 3$
$x = \frac{9}{3}$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 46, abaixo, o aluno resolveu a questão por tentativa e erro. Ele substituiu os valores das alternativas pela variável x e, consequentemente, a estratégia deu certo. Para questões diretas e para aquelas que não precisam apresentar cálculos, este método funciona, porém, para questões contextualizadas, dificilmente ele acertaria a alternativa correta.

Figura 46 - Avaliação Formativa - Questão 03 - AI Cód. 10


3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) -1
(E) -2

$(x-1), (3x-2), (2x+4)$
$(3-1), (3(3)-2), (2.(3)+4)$

Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 03**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de determinar o valor de x utilizando o conceito de razão da Progressão Aritmética.

Solução:

Utilizando o conceito de razão, observa-se que $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r$. Então:

$$(2x+4) - (3x-2) = (3x-2) - (x+1)$$

$$2x - 3x + 4 + 2 = 3x - x - 2 - 1$$

$$-x + 6 = 2x - 3$$

$$-x - 2x = -3 - 6$$

$$-3x = -9 \quad \Rightarrow x = 3.$$

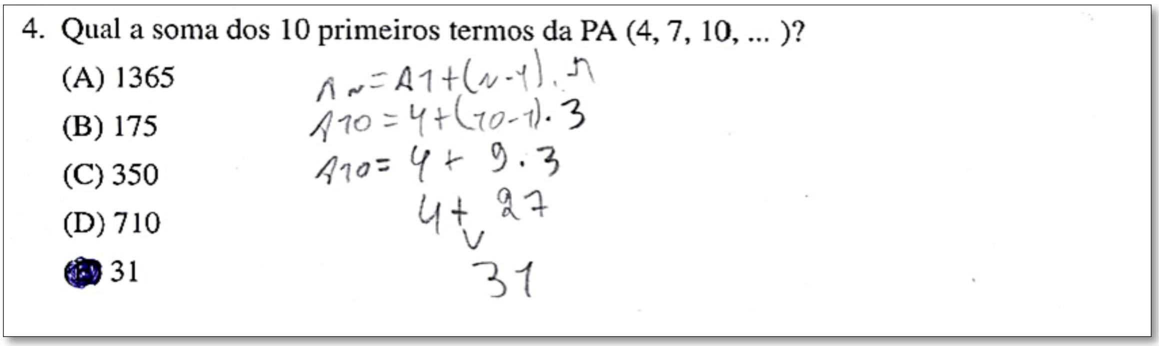
Portanto, conclui-se que para $x = 3$, os termos formam uma PA.

Questão 04. Qual a soma dos 10 primeiros termos da PA $(4, 7, 10, \dots)$?

Nessa questão, $73{,}33\%$ dos 30 alunos marcaram a alternativa correta, enquanto que $26{,}67\%$ não responderam ou não resolveram corretamente. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Na solução apresentada na Figura 47, abaixo, o aluno calculou apenas o $10°$ termo da sequência e, na verdade, deveria calcular a soma dos 10 primeiros termos da PA. Por esse motivo, não conseguiu encontrar a resposta correta.

Figura 47 - Avaliação Formativa - Questão 04 - AI Cód. 11



4. Qual a soma dos 10 primeiros termos da PA (4, 7, 10, ...)?

(A) 1365
(B) 175
(C) 350
(D) 710
(E) 31

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{10} = 4 + (10-1) \cdot 3$

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 3$

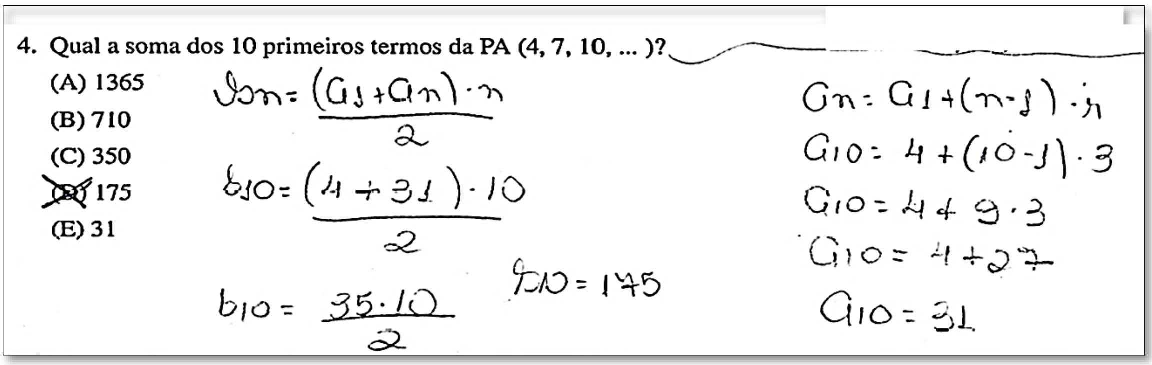
$4 + 27$

31

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 48, abaixo, o aluno resolveu em conformidade com a pauta de correção. Inicialmente, encontrou o $10°$ termo da sequência e, em seguida, a soma dos 10 primeiros termos.

Figura 48 - Avaliação Formativa - Questão 04 - AI Cód. 03



4. Qual a soma dos 10 primeiros termos da PA (4, 7, 10, ...)?

(A) 1365
(B) 710
(C) 350
(D) 175
(E) 31

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{10} = \frac{(4 + 31) \cdot 10}{2}$

$S_{10} = \frac{35 \cdot 10}{2}$

$S_{10} = 175$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{10} = 4 + (10-1) \cdot 3$

$a_{10} = 4 + 9 \cdot 3$

$a_{10} = 4 + 27$

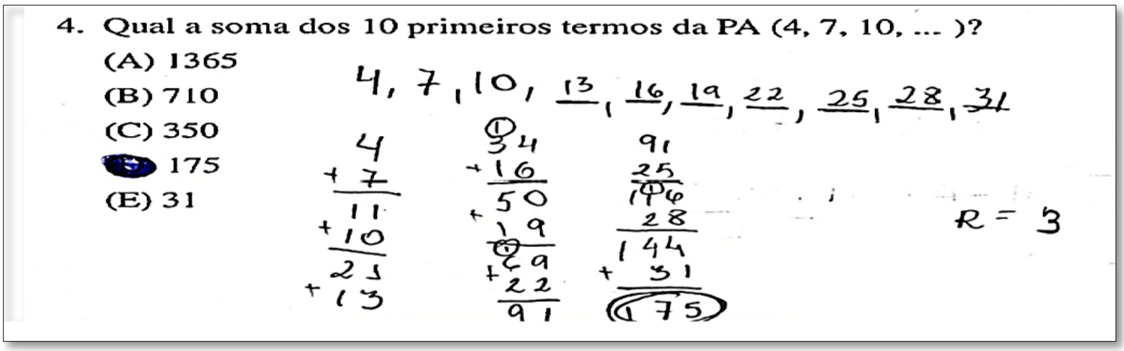
$a_{10} = 31$

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 49, abaixo, o aluno acertou a alternativa correta escrevendo os termos da sequência e, em seguida, somando todos eles.

Como já foi dito anteriormente, essa estratégia funciona para uma quantidade baixa de número de termos, caso contrário, não é uma solução tão vantajosa.

Figura 49 - Avaliação Formativa - Questão 04 - Al Cód. 04



4. Qual a soma dos 10 primeiros termos da PA (4, 7, 10, ...)?

(A) 1365

(B) 710

(C) 350

(D) 175

(E) 31

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31

R = 3

175

Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 04**

O objetivo dessa questão era verificar a capacidade do aluno encontrar a soma dos 30 primeiros termos da PA, usando a fórmula ou apresentando uma solução coerente.

Solução: Observa-se no comando da questão, que o 1° termo é 4 e o 2° é 7. Além disso, a razão é 3, pois $10 - 7 = 7 - 4 = 3$. De posse dessas informações e do conhecimento da fórmula do termo geral, podemos calcular o 10° termo da sequência e, em seguida, somar todos eles. Então:

$$a_{10} = a_1 + (n-1).r$$

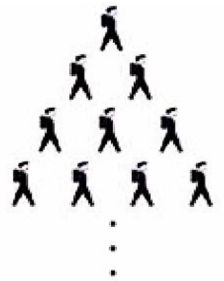
$$a_{10} = 4 + (10-1).3 = 4 + (9).3 = 4 + 27 = 31.$$

A soma dos 10 termos da sequência é:

$$s_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}).n}{2} = \frac{(4+31).10}{2} = (35).5 = 175.$$

Portanto, a soma dos 10 primeiros termos da sequência é igual a 175.

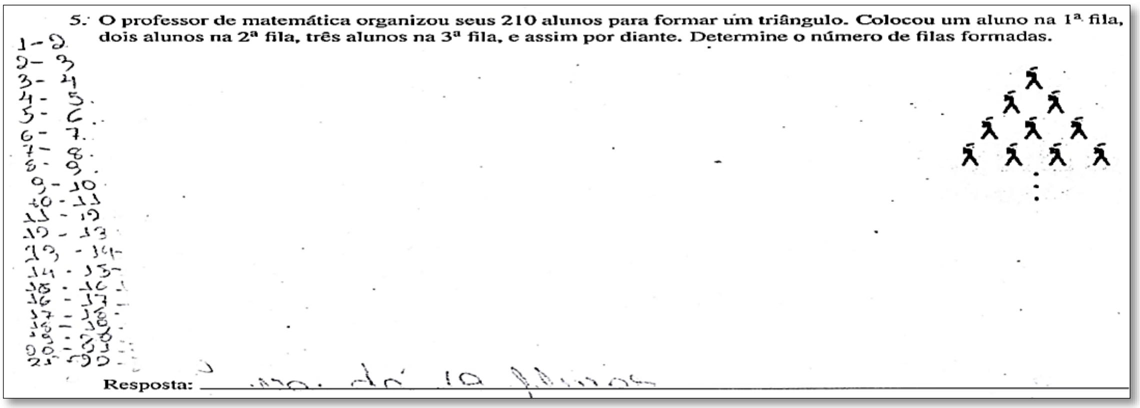
Questão 05. O professor de Matemática organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na 1ª fila, dois alunos na 2ª fila, três alunos na 3ª fila e assim por diante. Determine o número de filas formadas.



Nesta questão, 21,67% dos 30 alunos resolveram corretamente de alguma forma, enquanto que 78,33% não resolveram ou deixaram em branco. Mostram-se, a seguir, algumas soluções apresentadas na avaliação.

Na solução mostrada na Figura 50, abaixo, o aluno tentou resolver a questão enumerando todas as filas, com o intuito de somar todas elas, porém, não teve êxito, pois a sua resposta deu 19 filas.

Figura 50 - Avaliação Formativa - Questão 05 - Al Cód. 21



5. O professor de matemática organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na 1ª fila, dois alunos na 2ª fila, três alunos na 3ª fila, e assim por diante. Determine o número de filas formadas.

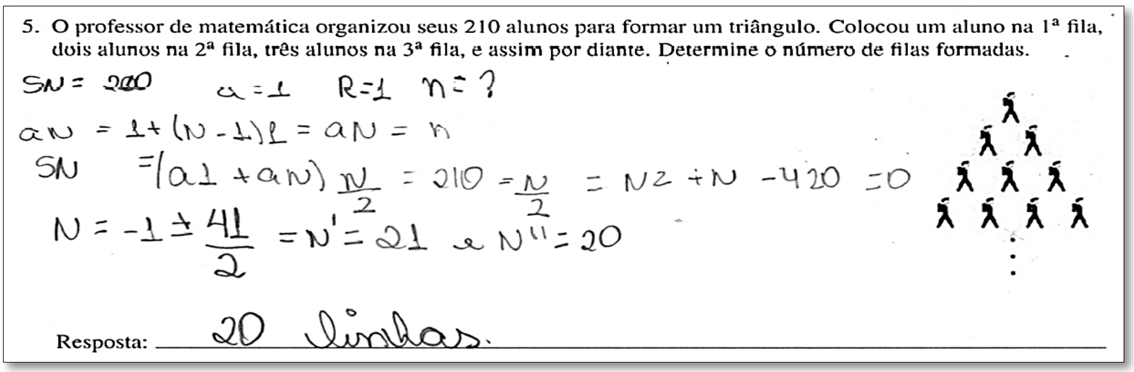
1 - 2
2 - 3
3 - 4
4 - 5
5 - 6
6 - 7
7 - 8
8 - 9
9 - 10
10 - 11
11 - 12
12 - 13
13 - 14
14 - 15

Resposta:

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 51, abaixo, o aluno resolveu de acordo com a pauta de correção, demonstrando conhecimento do assunto.

Figura 51 - Avaliação Formativa - Questão 05 - Al Cód. 09



5. O professor de matemática organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na 1ª fila, dois alunos na 2ª fila, três alunos na 3ª fila, e assim por diante. Determine o número de filas formadas.

SN = 210   a = 1   R = 1   n = ?

aN = 1 + (N - 1)1 = aN = n

SN = (a1 + aN) N/2 = 210 = N/2 = N2 + N - 420 = 0

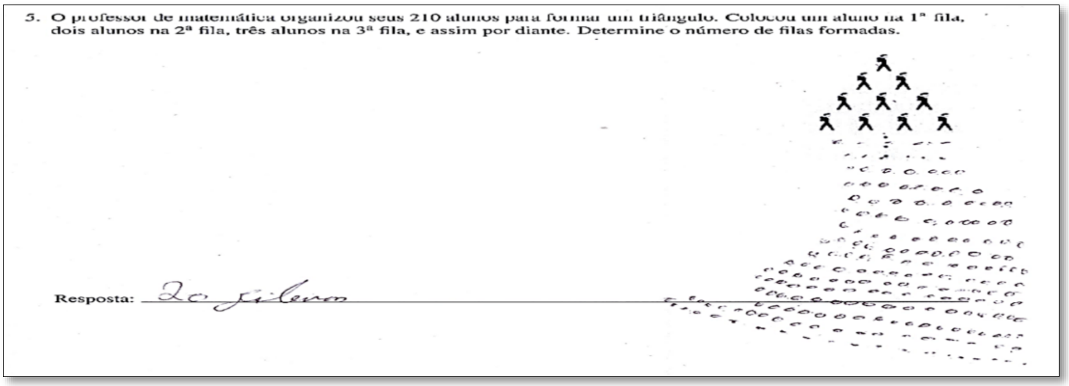
N = -1 ± 41/2 = N' = 21 e N'' = 20

Resposta: 20 linhas.

Fonte: Avaliação Formativa.

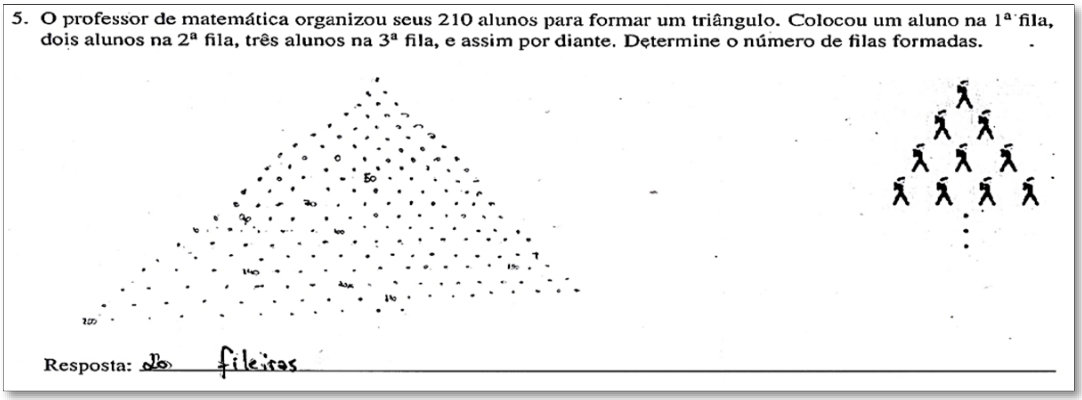
Na solução mostrada na Figura 52, abaixo, o aluno desenhou todas as filas com as respectivas quantidades de alunos. A estratégia deu certo, mas não se tem uma escrita formal para embasar a solução. Para uma questão de múltipla escolha, não haveria problema, mas para a prova discursiva da 2ª Fase da OBMEP, o aluno não receberia a pontuação correspondente à questão. A mesma estratégia foi usada por outro aluno, como mostra a Figura 53.

Figura 52 - Avaliação Formativa - Questão 05 - Al Cód. 22



Fonte: Avaliação Formativa.

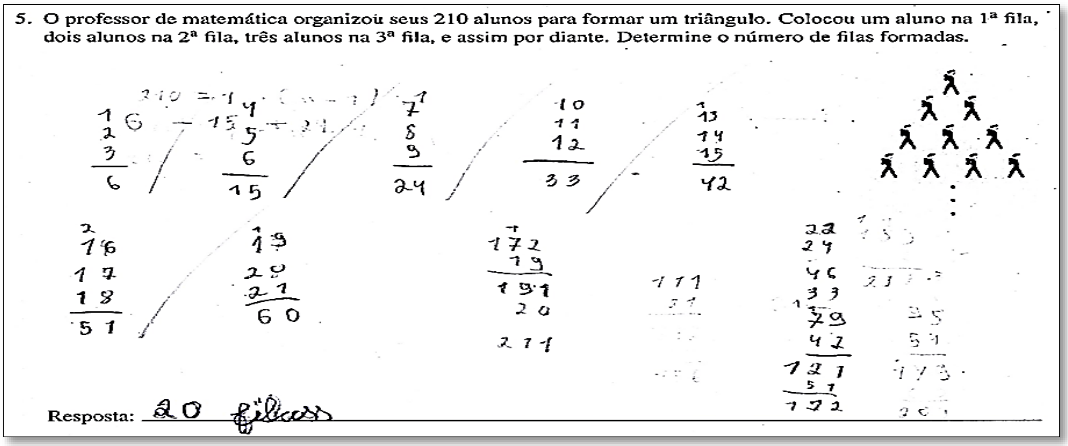
Figura 53 - Avaliação Formativa - Questão 05 - Al Cód. 31



Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução apresentada na Figura 54, abaixo, o aluno somou as quantidades previstas em cada fila, deu certo, porém, como já foi dito, esta estratégia é interessante quando se trata de uma questão de múltipla escolha ou quando há uma pequena quantidade de termos. Para uma questão dissertativa, o aluno precisaria argumentar sobre a sua solução.

Figura 54 - Avaliação Formativa - Questão 05 - AI Cód. 24



Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 05**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno de encontrar a resposta usando a soma dos termos da PA. Ele poderia apresentar outra solução diferente da pauta, mas sua resolução deveria mostrar uma lógica.

Solução: Inicialmente, precisam-se identificar os termos da sequência. Como foi dito no comando da questão, o 1° termo é 1, o 2° é 2, o 3° é 3 e assim sucessivamente, até denominar o enésimo termo de n. Então: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$. Como a soma dos termos é 210, então, pela fórmula da soma, temos que:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} = \frac{(1+n).n}{2} = 210.$$

Aplicando as operações Matemáticas, segue que

$$(1+n).n = 420$$

$$n^2 + n = 420 \Rightarrow n^2 + n - 420 = 0.$$

Agora se tem uma equação do 2º grau para encontrar as suas raízes.

$$\Delta = 1^2 - 4.(1).(-420) = 1 + 1680 = 1681.$$

As raízes da equação são:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 41}{2} \Rightarrow n_1 = -21 \; e \; n_2 = 20.$$

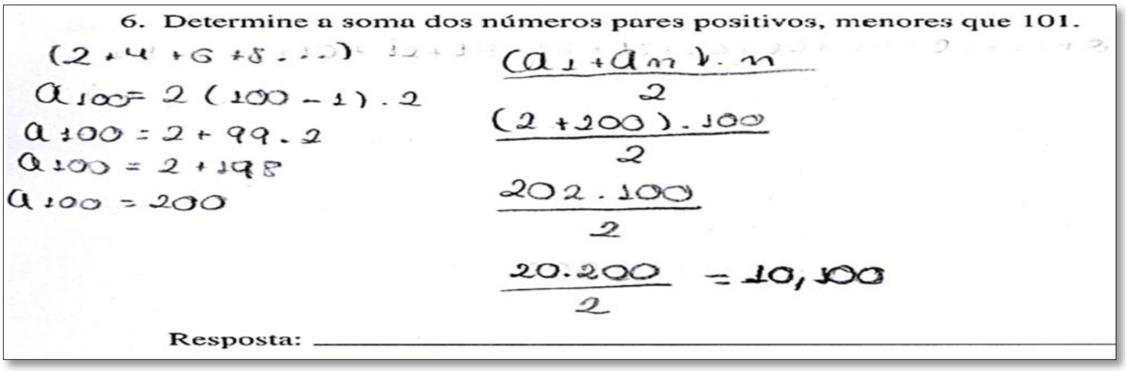
Como a resposta negativa não serve para a solução do problema, pois estamos tratando de pessoas, conclui-se que existem 20 filas.

Questão 06. Determine a soma dos números pares positivos, menores que 101.

Nessa questão, 35% dos 30 alunos conseguiram encontrar a resposta correta, enquanto que 65% não acertaram ou deixaram em branco.

Na solução apresentada na Figura 55, abaixo, o aluno utilizou a fórmula do termo geral da PA para encontrar o $100°$ termo; ele deveria ter procurado primeiro a quantidade "n" de termos da sequência. Empiricamente, ele não percebeu que a PA só possui 50 termos. Por esse motivo, também, não conseguiu concluir a soma dos termos dessa PA.

Figura 55 - Avaliação Formativa - Questão 06 - AI Cód. 08


6. Determine a soma dos números pares positivos, menores que 101.

$(2 + 4 + 6 + 8 \ldots)$

$a_{100} = 2\,(100 - 1) \cdot 2$

$a_{100} = 2 + 99 \cdot 2$

$a_{100} = 2 + 198$

$a_{100} = 200$

$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$\frac{(2 + 200) \cdot 100}{2}$

$\frac{202 \cdot 100}{2}$

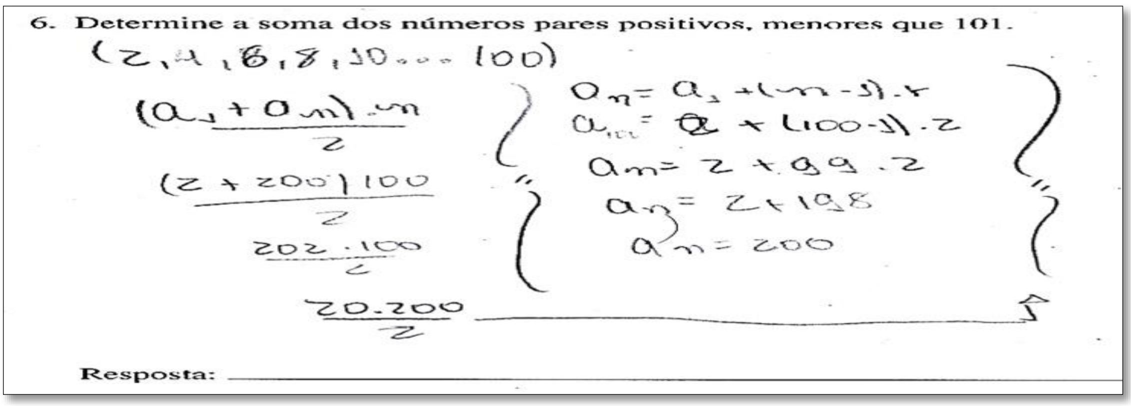
$\frac{20.200}{2} = 10,100$

Resposta: ______

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 56, abaixo, o aluno calculou o enésimo termo achando que a PA continha 100 termos, por esse motivo, encontrou $a_n = 200$. Como consequência, também, não encontrou a resposta correta solicitada na questão.

Figura 56 - Avaliação Formativa - Questão 06 - AI Cód. 14


6. Determine a soma dos números pares positivos, menores que 101.

$(2, 4, 6, 8, 10 \ldots 100)$

$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$\frac{(2 + 200)\,100}{2}$

$\frac{202 \cdot 100}{2}$

$\frac{20.200}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{100} = 2 + (100-1) \cdot 2$

$a_n = 2 + 99 \cdot 2$

$a_n = 2 + 198$

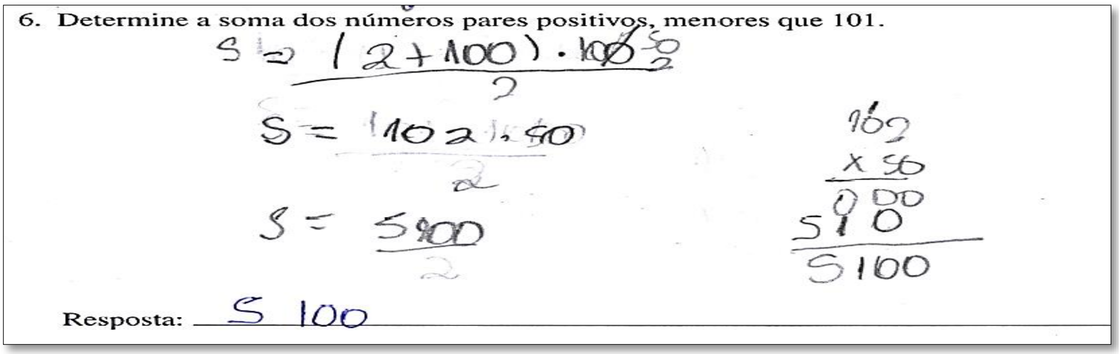
$a_n = 200$

Resposta: ______

Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 57, abaixo, o aluno utilizou corretamente a fórmula da soma dos termos, mas escreveu que a quantidade de termos era 100. Por esse motivo, encontrou o dobro do esperado.

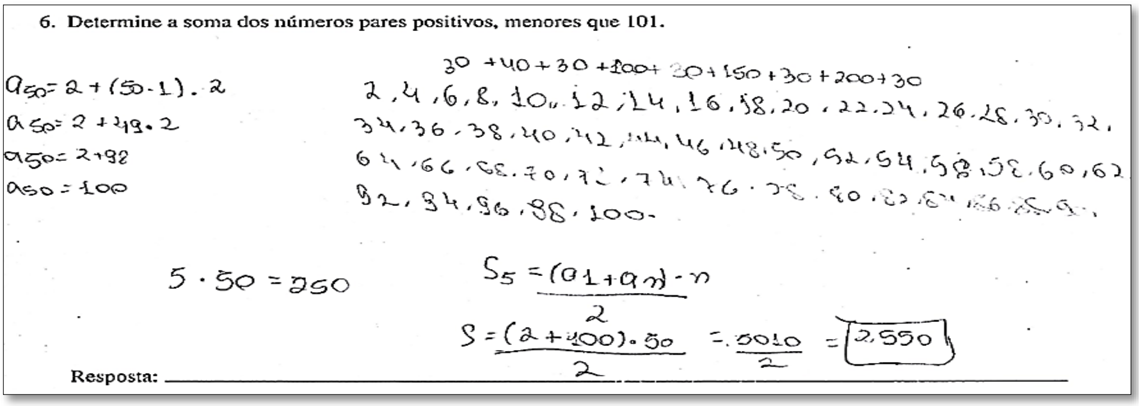
Figura 57 - Avaliação Formativa - Questão 06 - Al Cód. 25



Fonte: Avaliação Formativa.

Na solução mostrada na Figura 58, abaixo, o aluno escreveu todos os termos da sequência para encontrar o $100°$ termo. Após isso, utilizou a fórmula da soma dos termos e encontrou a resposta correta.

Figura 58 - Avaliação Formativa - Questão 06 - Al Cód. 02



Fonte: Avaliação Formativa.

- **Pauta de Correção – Avaliação Formativa – Questão 06**

O objetivo desta questão era verificar a capacidade do aluno encontrar a resposta correta utilizando ou não as fórmulas aprendidas. Caso não utilizasse a fórmula, a solução teria que apresentar uma forma coerente.

Solução: Primeiro, precisa-se determinar a sequência de números pares positivos menores que 101. Assim, o 1º número par positivo é 2 e o último número par menor que 101 é 100, então, a sequência é $(2, 4, 6, 8, \ldots, 96, 98, 100)$. Nota-se que $a_1 = 2$ e $a_n = 100$ e a razão 2. Para encontrar o valor de n, que corresponde à quantidade de termos, é preciso utilizar a fórmula do termo geral. Então:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$100 = 2 + (n-1).2 \ \rightarrow \ 100 = 2 + 2n - 2 \ \rightarrow \ 100 = 2n \ \rightarrow n = 50.$$

Portanto, a sequência possui 50 números pares positivos.

Com essa informação, agora se calcula a soma dos termos da sequência.

$$s_n = \frac{(a_1 + a_{50}).n}{2} = \frac{(2+100).50}{2} = (102).25 = 2550.$$

Portanto, a soma dos números pares positivos menores que 101 é 2550.

De uma maneira geral, o resultado da Avaliação Formativa ocorreu dentro do esperado, pelo curto espaço de tempo entre a aula e a aplicação da avaliação. Analisando as resoluções e comparando com a Avaliação Diagnóstica, percebeu-se um leve rendimento dos alunos, pois a média dos 30 alunos passou de $4{,}76$ para $4{,}78$ pontos.

Por fim, na próxima seção, serão analisados os dados coletados do questionário respondido, voluntariamente, pelos alunos a fim de se obter informações referentes à OBMEP para planejamentos futuros.

3.5 O QUESTIONÁRIO: PARTICIPAÇÃO NA OBMEP

Este questionário foi aplicado com o propósito de verificar o grau de motivação dos alunos em relação às olimpíadas e coletar dados para futuros planejamentos. O questionário foi entregue logo após a conclusão da Avaliação Formativa. Na oportunidade, foi explicado o motivo da aplicação e falou-se um pouco sobre a importância de estudar Matemática e participar da OBMEP. Também foi esclarecido que os dados obtidos seriam tratados estatisticamente e que o participante não precisaria se identificar e era de caráter voluntário. No total, 24 alunos responderam de forma voluntária e não houve dúvidas em relação às perguntas. Para uma melhor visualização das respostas, procurou-se colocar os percentuais em grupos e, logo em seguida, fez-se uma análise relativa às perguntas. A seguir, visualizam-se os resultados obtidos na aplicação do questionário na forma de percentuais e gráficos.

- Grupo 01 - Perguntas 1 a 5.

Tabela 35 - Percentual de respostas - Grupo nº 01

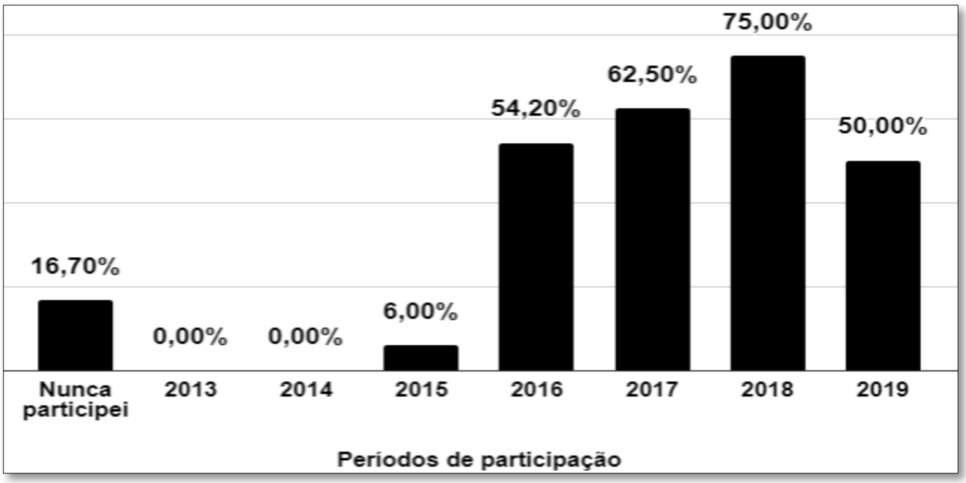
Perguntas	Sim	Não
01 - Você gosta de estudar Matemática?	58,30%	41,70%
02 - Você conhece o programa da OBMEP?	95,80%	4,20%
03 - Você já participou alguma vez da 1ª a fase da OBMEP?	83,30%	16,70%
04 - Você já participou alguma vez da 2ª fase da OBMEP?	29,20%	70,80%
05 - Você conhece alguém que já participou alguma vez da OBMEP?	87,50%	12,50%

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do questionário dos alunos.

Nota-se, na primeira pergunta, que mais de 50% dos alunos gosta de estudar Matemática, enquanto que 41,70% não gostam da disciplina. Não gostar de Matemática é algo comum, pois, muitas pessoas, conseguem vê-la como uma matéria difícil, chata e inútil. Tomáz (1999, p. 208) coloca como um dos fatores que levam os alunos a não gostar de Matemática a falta de relação entre a Matemática da vida e a Matemática da escola. Na segunda pergunta, 95,80% dos alunos conhecem o programa da OBMEP, enquanto que 4,20% não. O objetivo principal desse programa é estimular o estudo da Matemática por meio da resolução de problemas que despertem o interesse e a curiosidade de professores e alunos. Em 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada, distribuídos em mais de 54 mil escolas. Isso se reflete nas respostas da terceira pergunta, pois a Tabela 35 mostra que mais de 83% dos alunos na escola já participaram da 1ª Fase da OBMEP. É notório que os alunos conheçam pelo menos um colega que já tenha participado da OBMEP, mas, segundo o levantamento feito, 12,50% deles não tiveram essa experiência, de conhecer alguém que já tenha participado da olimpíada.

Na quarta pergunta, os dados se invertem em relação à participação na 1ª Fase, pois apenas 29,20% dos alunos já participaram da 2ª Fase da OBMEP. Não foram levantados os dados em relação à desistência. Acredita-se que há um percentual de inscritos na 2ª Fase que não comparece para realizar a prova por diversos motivos. Além disso, em relação ao quantitativo de participantes na 1ª Fase da OBMEP, o Gráfico 9, abaixo, mostra que a maior participação da escola foi em 2018, com 75%. Nota-se que, em 2019, esse percentual caiu para 50%. Observa-se, ainda, que existe um percentual de 16,70% que nunca participou da OBMEP.

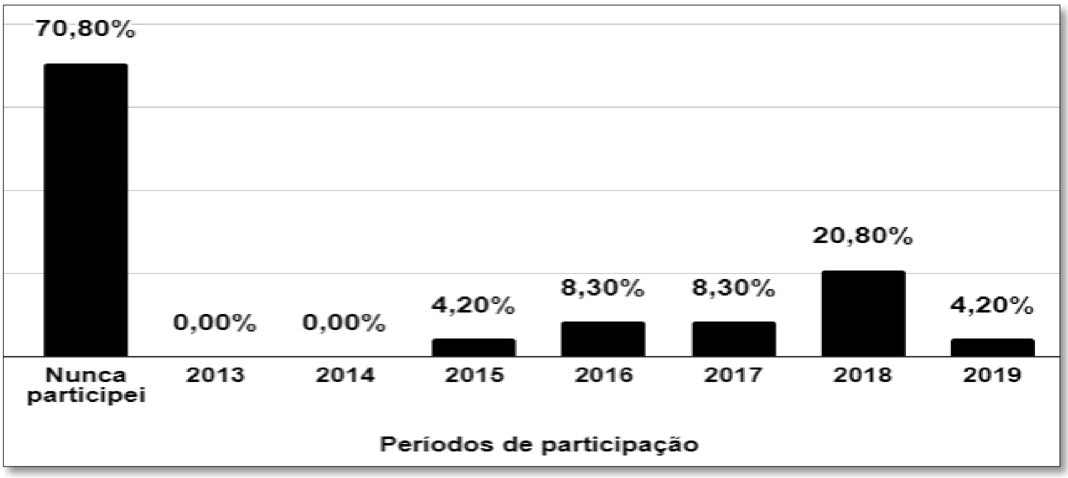
Gráfico 9 - Percentual de participação nas edições da OBMEP - 1ª Fase



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do questionário dos alunos.

Em relação ao quantitativo de participação dos alunos na 2ª Fase, o Gráfico 10, abaixo, mostra que o efetivo reduz acentuadamente. O maior percentual foi em 2018, com 20,80%. Em relação aos alunos que nunca participaram, o percentual sobe para 70,80%.

Gráfico 10 - Percentual de participação nas edições da OBMEP - 2ª Fase



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do questionário dos alunos.

- Grupo 02 - Perguntas 6 e 7.

Tabela 36 - Percentual de respostas - Grupo nº 02

Perguntas	Sim	Não
06 - Você já participou de algum programa de preparação para as provas da OBMEP?	4,20%	95,80%
07 - Atualmente, você participa de algum programa de preparação ou grupo de estudos para as provas da OBMEP?	0,00%	100,00%

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do questionário dos alunos.

Como o objetivo deste projeto era trabalhar numa Escola Pública que tivesse pouca ou nenhuma participação na OBMEP, os percentuais de respostas obtidos nas perguntas listadas na Tabela 36, acima, já eram esperados. As respostas à sexta pergunta mostram que mais de 95% dos alunos nunca participaram de um programa de preparação e da 7ª pergunta, confirmam que, atualmente, 100% deles não participam.

- Grupo 03 - Perguntas 8 e 9.

Tabela 37 - Percentual de respostas - Grupo nº 03

08 - Quanto tempo, semanalmente, você acessa a internet?	Percentual
1 vez por semana.	0,00%
2 vezes por semana.	0,00%
3 a 4 vezes por semana.	4,20%
todos os dias.	95,80%
não tenho acesso à internet.	0,00%
09 - Que tipo de recursos tecnológicos você mais utiliza?	Percentual
Celular	95,80%
Tablet	0,00%
Computador	4,20%

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do questionário dos alunos.

A Tabela 37, acima, mostra que mais de 95% dos alunos têm acesso a internet todos os dias. Isto é um resultado interessante, pois, na Internet, encontram-se vários tipos de aplicações educacionais, basta que o aluno tenha um pouco de motivação para aproveitá-la. Pode-se utilizar a internet em atividades de apoio nos estudos, como pesquisa de textos, imagens, livros, revistas e vídeos. A internet também possibilita, em tempo real, a comunicação entre professores e alunos.

Para que essa comunicação e a busca de informações na internet sejam possíveis, a Tabela 37, acima, também mostra que mais de 95% dos alunos acessam a rede mundial de computadores via celular. Desta forma, essas duas informações servem de embasamento para futuros programas de preparação para a OBMEP na escola.

- Grupo 04 - Perguntas 10 a 15

Tabela 38 - Percentual de respostas - Grupo nº 04

Perguntas	Sim	Não
10 - Você conhece o portal da OBMEP?	33,30%	66,70%
11 - Você já utilizou o "Banco de questões da OBMEP”?	12,50%	87,50%
12 - Você se sente motivado a participar da OBMEP nos próximos anos?	45,80%	54,20%
13 - A OBMEP te motiva a buscar novos conhecimentos sobre a Matemática?	33,30%	66,70%
14 - Você conhece a premiação oferecida pela OBMEP?	41,70%	58,30%
15 - Você já recebeu alguma premiação por ter participado da OBMEP?	8,30%	91,70%

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do questionário dos alunos.

Para que se tenham bons resultados na OBMEP, é preciso que o aluno se dedique aos estudos ou participe de algum programa de preparação na escola. Mostra-se na Tabela 38, acima, que 33,30% dos alunos conhecem o Portal da OBMEP e apenas 12,50% já utilizou o banco de questões. Foi dito, anteriormente, que no Portal da OBMEP existem materiais de apoio para que o aluno se prepare individualmente ou participando de algum programa na escola. Esses materiais ajudam o aluno a ter uma visão mais detalhada do conteúdo, deixando-o mais motivado em participar das futuras olimpíadas. Diante desse fato, há a possibilidade de reduzir o percentual em que mais de 54% dos alunos não se sentem motivados em participar da OBMEP nos próximos anos.

A Tabela 38, também, mostra que mais de 66% dos alunos acham que a OBMEP não os motivam para buscar novos conhecimentos sobre a Matemática, ao contrário disso, um dos objetivos da OBMEP é estimular e promover o estudo da Matemática. Foi constatado, ainda, na escola, que mais de 58% dos alunos não conhecem a premiação da OBMEP. Com o avanço da tecnologia e a gama de informações que são repassadas diariamente por aplicativos de mensagens e redes sociais, seria uma boa opção que professores realizassem atividades sobre a OBMEP com o intuito de divulgar e estimular a participação dos alunos nas olimpíadas. Como a participação na 2ª Fase é baixa, constatou-se que menos de 10% dos alunos receberam alguma premiação da OBMEP. Acredita-se que os alunos possuem potencial para reverter esse quadro, com o apoio da direção e dos professores na escola.

- Grupo 05 - questões 16 a 18

Todos os anos, a OBMEP premia alunos, professores, escolas e Secretarias Municipais de Educação pelos melhores desempenhos na edição do ano. Para 2019, a previsão era de conceder um total de 575 medalhas de ouro, 1.725 medalhas de prata, 5.175 medalhas de bronze e 51.900 menções honrosas, de acordo com os critérios presentes no Regulamento.

Tabela 39 - Percentual de respostas - Grupo nº 05

16 - Qual premiação você já recebeu por ter participado da OBMEP?	Percentual
Medalha de ouro.	0,00%
Medalha de prata.	0,00%
Medalha de bronze.	0,00%
Certificado de Menção honrosa.	8,30%
Bolsa de Iniciação Científica Jr.	0,00%
Nunca recebi.	91,70%
17 - Você gostaria de participar de um programa de preparação para a OBMEP na escola?	Percentual
Sim	41,70%
Não	58,30%
18 - Que tipo de questão você gosta de resolver?	Percentual
Questões diretas.	66,70%
Questões que necessitam interpretar o problema.	12,50%
Indiferente.	20,80%

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do questionário dos alunos.

A Tabela 39, acima, mostra que, na escola, menos de 10% dos alunos recebeu certificação de Menção honrosa. Este resultado é consequência do quantitativo de participantes que passaram para a 2ª Fase, pois a Tabela 35 mostra que 29,20% dos alunos conseguiram avançar. Para Ricardo et al. (2012), a motivação é um conceito utilizado nas mais diversas situações do nosso dia a dia, e quando se fala no contexto escolar, ela relaciona-se com o investimento dos alunos nos processos de ensino/aprendizagem. De fato, para que o aluno participe de um programa de preparação para OBMEP, ele precisa estar motivado para tal. Além disso, para os autores, existem dois tipos de motivação, uma centrada na pessoa, que é capaz de realizar e de ser persistente; e outra centrada na influência de fatores externos às tarefas, como prêmios e recompensas. Diante disso, a escola é capaz de motivar seus alunos a fim de que o percentual daqueles que gostariam de participar de um programa de preparação para as provas da OBMEP ultrapasse os 50%, mas isso é um trabalho que deve ser realizado pelo conjunto da escola.

Também foi observado, nos resultados desse questionário, que mais de 66% dos alunos preferem questões diretas, todavia, as questões da OBMEP são estruturadas das duas maneiras, diretas ou contextualizadas. Para que o aluno tenha a habilidade de interpretar um problema, além de dominar o conteúdo, é preciso treinar essa habilidade por meio de questões simuladas ou de provas anteriores.

Por fim, percebe-se que os alunos da escola estão desmotivados em relação à OBMEP, mas é possível fazer um trabalho motivador com eles para busquem acreditar que a Matemática não é tão difícil e para que possam, consequentemente, ser premiados em futuras edições da OBMEP.

4 DEMONSTRAÇÕES

Muitas vezes, o aluno questiona o professor sobre a aplicabilidade dos conteúdos, pois estes são apresentados, em boa parte dos livros didáticos, de forma independente, sem conexão com os assuntos previamente estudados e sem importância na vida real (BARLATI; CARVALHO, 2010). Para os PCN do Ensino Fundamental "o significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos" (BRASIL, 1997b, p.19). Além disso, os PCNEM transmitem que a Matemática no Ensino Médio deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. O documento afirma, ainda, que é "importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas" (BRASIL, 2018b, p.40-41). Assim, deseja-se que o professor de Matemática trabalhe os assuntos com o formalismo e a abstração que são necessárias para a construção do conhecimento acadêmico, sendo que, para a Matemática da Educação Básica, isso significa a utilização das demonstrações formais para a obtenção dos resultados.

Na visão de Morais Filho (2010), a maioria dos alunos se choca ao se deparar com o formalismo e a abstração que requerem as primeiras disciplinas de Matemática das universidades. O autor afirma, ainda, que:

> Este choque decorre, principalmente, de carências na formação de alunos e professores, e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não fornece um preparo adequado aos alunos, por não treiná-los para usar o raciocínio lógico-dedutivo que posteriormente lhes será cobrado. Juntam-se a este danoso fato alguns livros-texto que trazem erros conceituais, não distinguem definição de demonstração, provam fatos matemáticos com exemplos, fazem mal uso de notações, entre outros disparates. (MORAIS FILHO, 2010, p.3).

Diante dessas citações, acredita-se que as demonstrações em Matemática são importantes para desenvolver a capacidade do aluno de pesquisar e aprender. As provas da OBMEP trazem questões contextualizadas e requerem que o aluno consiga relacionar os conteúdos matemáticos às situações reais. Dessa forma, esta seção se propõe a trabalhar com algumas demonstrações, por meio das quais se espera inspirar os alunos do Ensino Médio para que sejam capazes de desenvolver os assuntos utilizando esta metodologia, de modo a que tenham resultados satisfatórios na OBMEP e o embasamento teórico requerido na vida acadêmica. A seguir, serão mostradas, como exemplos, duas demonstrações para exemplificar esta seção.

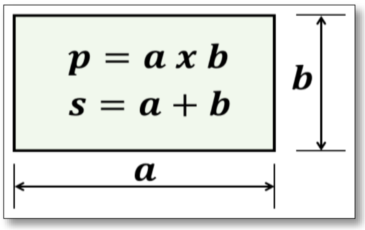
4.1 A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Analisando as provas da OBMEP, é comum que a resolução de uma questão recaia numa equação do 2º grau. Segundo Pedroso (2010), problemas que incidem neste tipo de equação já apareciam, há mais de quatro mil anos, em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia e em papiros no Egito. Ao longo dos séculos, foram desenvolvidos diversos métodos de soluções, desde receitas, exemplos concretos com coeficientes numéricos até as famosas fórmulas, como a de Bhaskara, que se conhece até hoje. A fórmula de Bhaskara é uma expressão algébrica que serve para resolver equações na forma geral em associação ao nome do matemático hindu Bhaskara (1114-1185). Essa fórmula, que adquiriu o aspecto que tem hoje, foi generalizada com o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação a partir dos trabalhos de François Viète (1540-1603) e de René Descartes (1596-1650) (PEDROSO, 2010, p.1). Assim sendo, mostra-se, aqui, o método babilônico de resolução, como também as relações de soma e produto, tendo como base as raízes da equação do 2º grau, representada por $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

- O Método Babilônico de resolução de equação do 2º grau

Os problemas que envolvem equação do segundo grau são muito antigos. Conta a história que, em antigas escritas babilônicas feitas, há quase 4 mil anos, um dos problemas que mais aparecia era para encontrar dois números, dados a soma (s) e o produto (p). Associando esse problema com a geometria, era para determinar os lados de um retângulo cujo semiperímetro era s e a sua área p (LIMA, 2012, p.8). Vejamos a figura abaixo:

Figura 59 - Retângulo $(a \,.\, b)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se uma das raízes é x, então a outra raiz é $s - x$. Veja:

$$p = x(s - x) = \; sx \; - \; x^2$$
$$x^2 - sx + p = 0.$$

Assim, os números procurados são as raízes da equação do 2º grau $x^2 - sx + p = 0$. Como os números procurados são os lados do retângulo, então, vamos considerar que uma das raízes é o comprimento de medida a e a outra medida é $b = s - a$. Assim, temos que: $a^2 - sa + p = 0$. Agora, vamos provar que $(s - a)$ também é raiz da equação. Para isso, é preciso substituir x por $(s - a)$. Então:

$$(s - a)^2 - s(s - a) + p = 0$$
$$s^2 - 2sa + a^2 - s^2 + sa + p = a^2 - sa + p = 0.$$

Isto prova que $(s - a)$ também é raiz da equação.

Antigamente não se usava uma fórmula específica para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau. A determinação dessas raízes começou a ser feita por um matemático francês chamado François Viète, que viveu de 1540 a 1603. O que se usava antigamente era uma “receita” que era válida para exemplos concretos. A regra para achar dois números em que eram dados a soma e o produto era enunciada por:

“Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número” (LIMA, 2012, p.10).

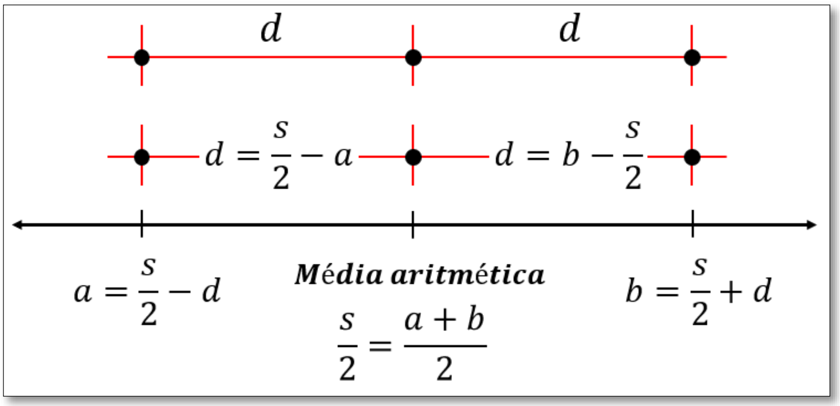
A notação final, para a equação $x^2 - sx + p = 0$, é representada da seguinte forma:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad e \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Não foram encontradas escritas que justificam a representação formal, mas há indícios de que se tenha dado da seguinte maneira:

Seja a e b os números procurados e que $a \leq b$. A média aritmética desses números é $(a + b)/2$, ou seja, a média é dada por $s/2$, onde s é a soma das raízes da equação. Esses números a e b são equidistantes da média aritmética; assim, podemos dizer que $d = s/2 - a = b - s/2$. É notório que $a = (s/2 - d)$ e $b = (s/2 + d)$. Veja a Figura 60, abaixo:

Figura 60 - Raízes da equação do 2º grau



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como

$$p = a \cdot b = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2.$$

Logo,

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \quad e \quad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Daí,

$$a = \frac{s}{2} - d \implies a = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad e \quad b = \frac{s}{2} + d \implies b = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Exemplo 01: Utilize o método babilônico da resolução da equação do 2º grau e determine dois números cuja soma seja 5 e o produto 6.

Substituindo $s = 5$ e $p = 6$ em

$$a = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Obtemos

$$a = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Substituindo $s = 5$ e $p = 6$ em

$$b = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Obtemos

$$b = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

Os números procurados são $a = 3$ e $b = 2$.

Exemplo 02: Utilize o método babilônico da resolução da equação do 2º grau e determine dois números cuja soma seja 7 e o produto 12.

Substituindo $s = 7$ e $p = 12$ em

$$a = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Obtemos

$$a = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3.$$

Substituindo $s = 7$ e $p = 12$ em

$$a = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Obtemos

$$b = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4.$$

Os números procurados são $a = 3$ e $b = 4$.

- A Forma Canônica do Trinômio

Considere o trinômio do quadrado perfeito $ax^2 + bx + c = 0$. Colocando o fator “a" em evidência, temos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Para transformar num trinômio de quadrado perfeito, precisamos somar e subtrair o termo $b^2/4a$. Então:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Logo, a forma Canônica da equação do 2º grau é:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right].$$

A partir da forma Canônica da equação do 2º grau, podem-se encontrar as raízes da equação igualando-a a zero, pois $a \neq 0$. Então:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logo, as raízes da equação do 2º grau são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- A soma e o produto das raízes

Como as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

então, pode-se encontrar uma relação para a soma das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Portanto, conclui-se que a soma das raízes da equação é dada por $-b/a$.

Multiplicando as raízes, encontramos uma relação para o produto. Então:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) . \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Portanto, conclui-se que o produto das raízes da equação é c/a.

4.2 UMA NOVA PROVA DO TEOREMA DE PITOT POR DESIGUALDADE DAS MÉDIAS ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA

A geometria é fundamental para a compreensão do mundo e para a participação ativa do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e desenvolve o raciocínio visual do aluno. (FILLOS, 2006, apud PINA NEVES; BACCARIN; SILVA, 2013, p.171). Para os PCNEM, na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a geometria pode desenvolver as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas (BRASIL, 2018b, p.44).

Nesse sentido, Pina Neves, Baccarin e Silva (2013, p.172) ~~podem concluir~~ afirmam que:

> O ensino de geometria é imprescindível para o desenvolvimento humano; ele é defendido por pesquisadores da área e pelos textos dos documentos oficiais; a aprendizagem geométrica é pontuada como possível, desde que o ensino e a aprendizagem de geometria sejam (re) construídos em todos os níveis de ensino. De posse desse entendimento, temos observado na literatura em Educação Matemática estudos que buscam compreender o valor das demonstrações Matemáticas para e nos processos de ensino e aprendizagem da geometria, tanto na Educação Básica quanto no Curso de Licenciatura em Matemática. De modo especial, esses mesmos estudos avaliam métodos eficientes de utilizá-la na licenciatura de modo a favorecer o desenvolvimento de habilidades junto aos licenciandos para que eles, em sua prática docente, superem o “ciclo vicioso” comentado anteriormente.

Além disso, os autores entendem que “as demonstrações foram e são instrumentos importantes para e na produção de conhecimento matemático e podem se transformar, também, em instrumentos importantes para a prática discente e docente em sala de aula” (PINA NEVES; BACCARIN; SILVA, 2013, p.176). De modo geral, afirmam que “os estudantes ao vivenciarem situações de demonstrações desenvolvem estratégias, habilidades e competências tendo em vista que na tentativa de atribuir significados podem construir e/ou reproduzir conceitos sobre a geometria, seu ensino e aprendizagem” (PINA NEVES; BACCARIN; SILVA, 2013, p. 176).

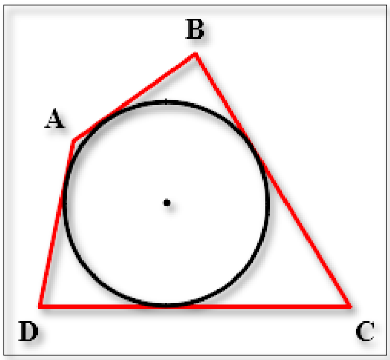
Em consonância com as citações, esta demonstração tem por objetivo mostrar uma nova prova do teorema de Pitot baseada na desigualdade das médias aritmética-geométrica, a partir do trabalho de Robert Bosch da *Archimedean Academy*, Miami, Flórida. Essa nova abordagem significa considerar, o antes mencionado teorema, como um caso extremo de uma desigualdade geométrica.

“Se esta geração de licenciandos não estudou geometria também não saberá como ensiná-la” (PINA NEVES; BACCARIN; SILVA, 2013, p. 182).

4.2.1 Introdução

O Teorema de Pitot afirma que: Um quadrilátero convexo pode ser circunscrito a um círculo se, e somente se, $AB + DC = AD + BC$, ou seja, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados opostos, conforme mostra a Figura 61.

Figura 61 - Teorema de Pitot ($AB + DC = AD + BC$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 As Médias

A ideia principal de média de uma lista de números é a substituição de todos esses números por um valor que os represente, sem alterar as características dessa lista. Se a característica for a soma de todos os números da lista, a média mais simples que obteremos é a média aritmética. Se a característica da lista for o produto de todos os seus elementos, obteremos a média geométrica (simples).

- Média Aritmética

A média aritmética simples de uma lista de números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é definida por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Para uma lista de n elementos $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, a média aritmética simples é um valor $\bar{x}$, tal que, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}$, como $\bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x} = n.\bar{x}$, então:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Exemplo 01. A média aritmética dos números 2, 4 e 9 é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ x_3 + \ \ldots + \ x_n}{n} = \frac{2+4+9}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Observe que a soma dos números $2 + 4 + 9 = 15$ é igual à soma das médias $5 + 5 + 5 = 15$, ou seja, conforme definido anteriormente, a média aritmética preserva a característica da soma dos números dados.

Exemplo 02. A média aritmética dos números 3, 10, 11 e 21 é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ x_3 + \ \ldots + \ x_n}{n} = \frac{3 + 10 + 11 + 21}{4} = \frac{45}{4} = 11{,}25.$$

Observe que a soma dos números $3 + 10 + 11 + 21 = 45$ é igual à soma das médias $11{,}25 + 11{,}25 + 11{,}25 + 11{,}25 = 4.(11{,}25) = 45$, ou seja, conforme definido acima, a média aritmética preserva a característica da soma dos números dados.

- A Média Geométrica

A média geométrica simples de n números positivos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é definida por:

$$g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n}.$$

A média geométrica preserva a característica do produto dos elementos da lista. A média geométrica dos n números positivos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é um valor g tal que $x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n = g^n$, assim, $g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n}$.

É importante definirmos a média geométrica para os números positivos; assim, podemos evitar a inexistência da média geométrica de alguns números, por exemplo, dos números 3 e -3, pois $\sqrt{-9}$, não existe no conjunto dos números Reais.

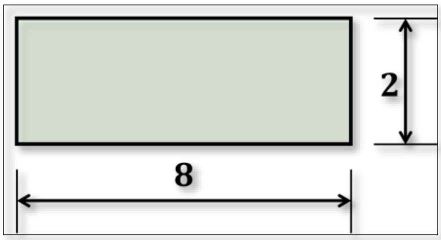
Exemplo 03. Qual o valor da média geométrica entre os números 2, 4 e 8?

$$g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n} = \sqrt[3]{2.4.8} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Observe que o produto dos números $2.4.8 = 64$ é igual ao produto das médias $4.4.4 = 16$, ou seja, conforme definido acima, a média geométrica preserva a característica do produto dos números dados.

Exemplo 04. Determine a medida da área de um quadrado que possui a mesma área de um retângulo, cujos lados medem 2 cm e 8 cm.

Figura 62 - Retângulo de área $16\ cm^2$

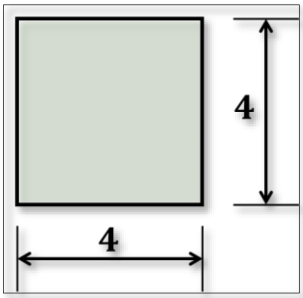


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$g = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \dots . x_n} = \sqrt{2.8} = \sqrt{16} = 4\ cm.$$

Observe que o produto dos números $2.8 = 16$ é igual ao produto das médias $4.4 = 16$, ou seja, conforme definido acima, a média geométrica preserva a característica do produto dos números dados.

Figura 63 - Quadrado de área $16\ cm^2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Desigualdade das médias aritmética-geométrica

Sejam dados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, números positivos. A desigualdade das médias afirma que a média aritmética desses n números positivos é maior que ou igual à sua média geométrica, isto é

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \dots . x_n}.$$

Além disso, só é possível a igualdade, se todos esses números forem iguais.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \dots . x_n} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Segundo Lima (1991, p.117), a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é um dos resultados mais demonstrados da Matemática. Há demonstrações de vários tipos, de diversos graus de sofisticação e baseadas em diferentes teorias.

Se x_1 e x_2 são números reais positivos, a desigualdade das médias aritmética e geométrica $(x_1 + x_2)/2 \geq \sqrt{x_1 . x_2}$, pode ser provada de vários modos diferentes. A igualdade dessas médias só é possível se $x_1 = x_2$.

Demonstração 01: Se x_1 e x_2 são números reais positivos, então $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ também são reais e positivos. Assim:

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{x_1}\right)^2 - 2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2} + \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}$$

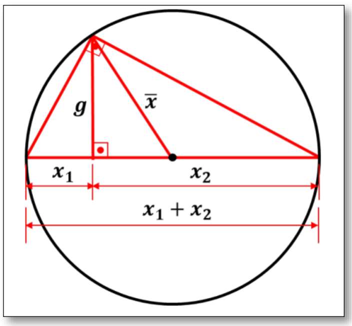
$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 . x_2}.$$

Onde $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ é a média aritmética e $g = \sqrt{x_1 . x_2}$ é a média geométrica.

Demonstração 02: Dados $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, construímos um círculo cujo diâmetro é a soma dos valores positivos $x_1 + x_2$. Logo, seu raio será $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$.

Conforme os estudos da geometria Euclidiana, em todo triângulo retângulo, a altura baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. Outra observação importante é que todo triângulo inscrito num círculo, se um de seus lados é o diâmetro, então ele é retângulo e a hipotenusa é o referido diâmetro do círculo. Veja a Figura 64, abaixo:

Figura 64 - Desigualdade geométrica



Fonte: Elaborada pelo autor.

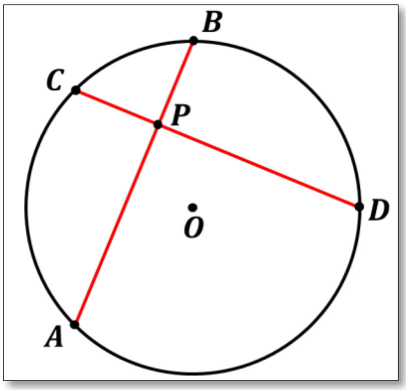
Na Figura 64, acima, g é a altura do triângulo obtido pela raiz quadrada do produto dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, ou seja, $g = \sqrt{x_1 . x_2}$ e $\bar{x}$ é a mediana do triângulo que, por sua vez, é o raio do círculo, determinado pela média aritmética dos segmentos. Assim, podemos perceber que $\bar{x} \geq g$.

4.2.3 Teorema das cordas

As proposições, a seguir, complementam a nova demonstração do Teorema de Pitot e, na verdade, são casos de semelhanças de triângulos bem conhecidos na Matemática que constituem o teorema das cordas.

Segundo Muniz Neto (2013, p.164), se A, B, C, D e P são pontos distintos de um plano, tais que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$, então $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$ se, e somente se, o quadrilátero de vértices A, B, C e D é inscritível.

Figura 65 - Teorema das cordas ($\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$)

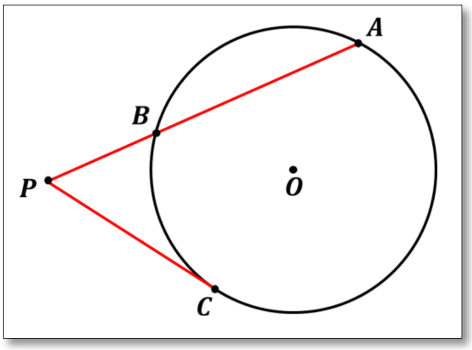


Fonte: Elaborada pelo autor.

- Caso limite do Teorema das cordas.

Segundo Muniz Neto (2013, p.165), se A, B, C, D e P são pontos distintos no plano, com $B \in AP$ e $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, então, $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}^2$ se, e somente se, o círculo que passa pelos pontos A, B e C for tangente à reta $\overleftrightarrow{PC}$ em C.

Figura 66 - Caso limite do Teorema das cordas



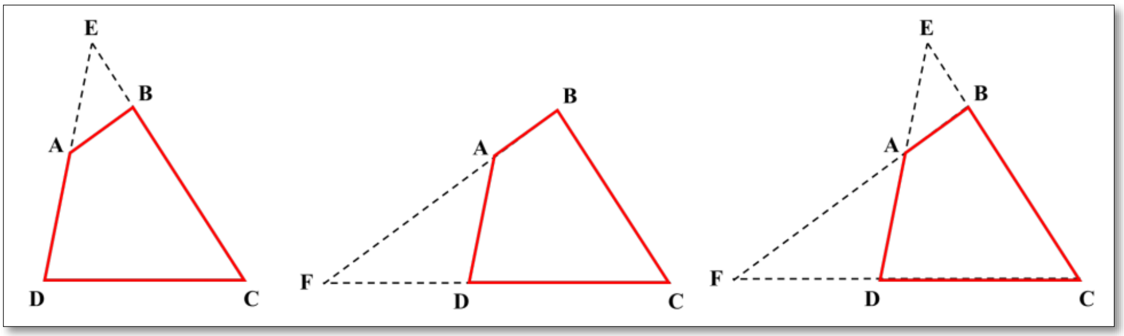
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.4 Lema

Segundo Muniz Neto (2013, p.105), em todo triângulo ABC, existe um único círculo tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AB e AC. Tal círculo é o círculo ex-inscrito ao lado BC e seu centro é o ex-incentro de ABC relativo a BC.

Lema: seja $ABCD$ um quadrilátero convexo não circunscrito a um círculo. Na Figura 67, abaixo, os prolongamentos dos lados do DA e CB se cruzam em E, e os prolongamentos dos lados BA e CD se cruzam em F. Então, o ex-círculo do triângulo EAB corta o lado DC ou o excírculo do triângulo FAD corta o lado BC.

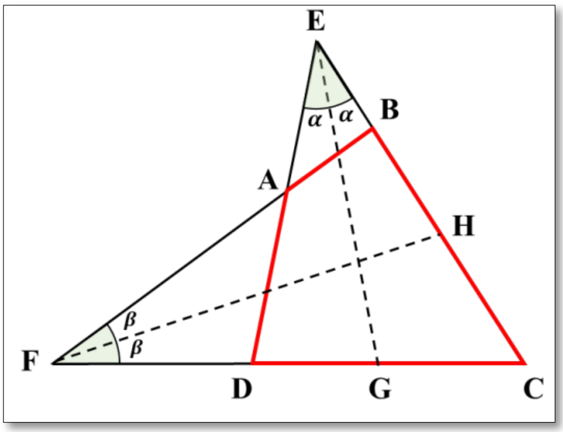
Figura 67 - Prolongamento dos lados do quadrilátero



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos provar o Lema: Na Figura 68, abaixo, desenhamos as bissetrizes dos ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$, respectivamente. Percebemos, no entanto, que os pontos da bissetriz $\overline{EG}$ são equidistantes dos lados AD e BC. Os pontos da bissetriz $\overline{FH}$ são equidistantes dos lados AB e DC.

Figura 68 - Bissetrizes dos ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$

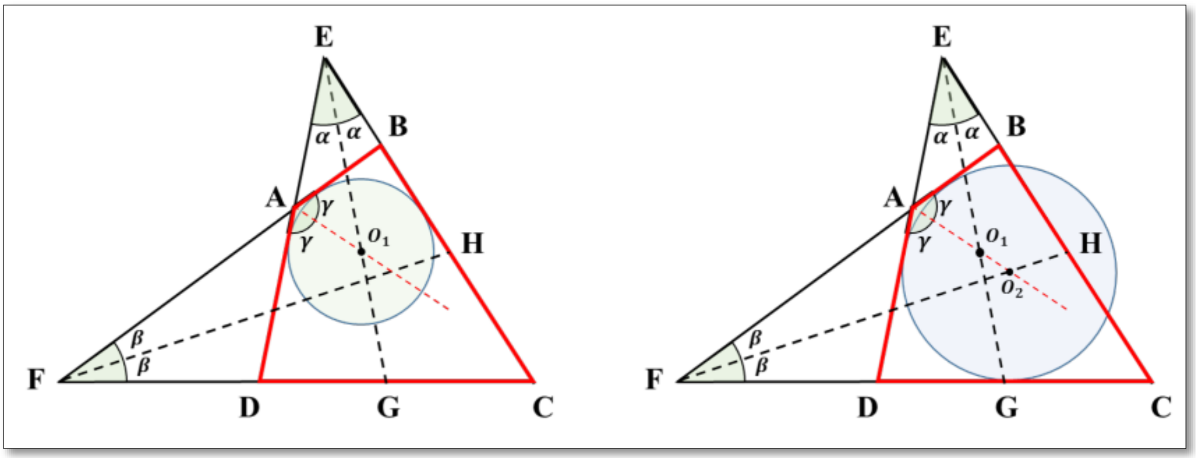


Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, suponha que o círculo ex-inscrito do triângulo EAB, é interior ao quadrilátero $ABCD$; assim, seu centro O_1 está no semiplano superior determinado pela bissetriz $\overline{FH}$. Mas O_2, o centro do segundo círculo ex-inscrito é a intersecção da bissetriz AO_1 e da bissetriz $\overline{FH}$, claramente este ponto está localizado no semiplano direito determinado pela bissetriz $\overline{EG}$. Finalmente, o círculo ex-inscrito do triângulo FAD corta o lado BC.

É importante ressaltar que todo triângulo admite exatamente três círculos ex-inscritos. Em todo triângulo, a bissetriz interna relativa a um vértice concorre com as bissetrizes externas aos outros dois vértices; assim, os centros O_1 e O_2 são centros, respectivamente, dos círculos ex-inscritos dos triângulos EAB e FAD.

Figura 69 - Ângulos ex-inscritos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, provamos que o ex-círculo do triângulo EAB corta o lado DC ou o excírculo do triângulo FAD corta o lado BC.

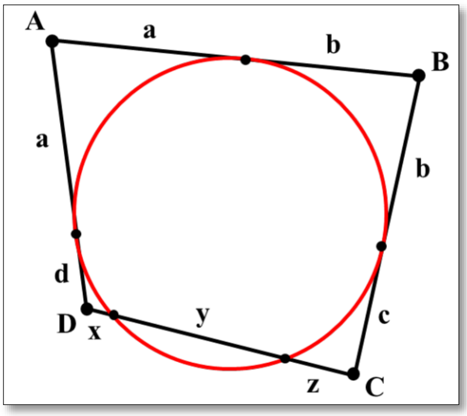
4.2.5 A Nova prova do Teorema de Pitot

Para Muniz Neto (2013, p.115), o Teorema de Pitot afirma que um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA, é circunscritível se, e somente se, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

Porém, nesta seção, mostraremos um novo resultado para a prova do teorema de Pitot. Vejamos:

Seja $ABCD$ um quadrilátero, que possui em seu interior um círculo tangente, respectivamente, aos lados AB, AD e BC. O círculo corta o lado CD em três segmentos denominados x, y e z, conforme mostra a Figura 70. Então $AB + DC \geq AD + BC$.

Figura 70 - Quadrilátero $ABCD$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Prova: Este círculo existe, conforme o Lema apresentado acima, na seção 4.2.4. Veja a Figura 70, na qual a notação $(AB + DC \geq AD + BC)$ é completamente justificada pelo teorema das duas tangentes. Duas tangentes a um círculo, de um ponto externo, são de igual comprimento. Assim, a desigualdade, $AB + DC \geq AD + BC$, a ser comprovada se torna $(x + y + z) \geq (c + d)$, conforme demonstrado abaixo.

$$AB + DC \geq AD + BC$$

$$(a + b) + (x + y + z) \geq (a + d) + (b + c)$$

$$(a + b) + (x + y + z) \geq (a + b) + (c + d).$$

Somando $-(a + b)$ em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$(a + b) + (x + y + z) - (a + b) \geq (a + d) + (b + c) - (a + b)$$

$$(x + y + z) \geq (c + d).$$

É o que queremos provar, portanto.

Mas, pelo caso limite do teorema das cordas, temos:

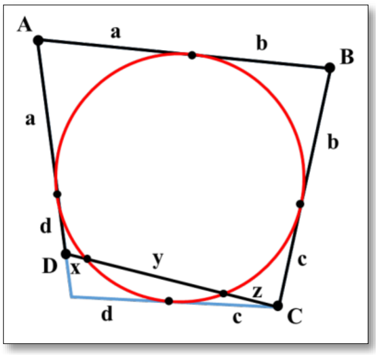
$$c^2 = z(z + y) \Rightarrow c = \sqrt{z(z + y)} \text{ e } d^2 = x(x + y) \Rightarrow d = \sqrt{x(x + y)}.$$

Então, tudo o que precisamos provar é:

$$(c + d) \leq (x + y + z)$$

$$\sqrt{z(z + y)} + \sqrt{x(x + y)} \leq x + y + z$$

Figura 71 - Quadrilátero $ABCD$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Isso é uma consequência direta da desigualdade das médias, uma vez que:

$$\sqrt{z(z+y)} \leq \frac{z+(z+\ y)}{2} = \frac{2z+y}{2} = \frac{2z}{2}+\frac{y}{2} = z+\frac{y}{2}$$

e

$$\sqrt{x(x+y)} \leq \frac{x+(x+\ y)}{2} = \frac{2x+y}{2} = \frac{2x}{2}+\frac{y}{2} = x+\frac{y}{2}.$$

Logo, somando as duas partes $(c+d)$, temos que:

$$\sqrt{z(z+y)}+\sqrt{x(x+y)} \leq z+\frac{y}{2}+x+\frac{y}{2} \leq x+y+z$$

igualdade vale se, e somente se, $y=0$. Completando a prova da desigualdade, temos:

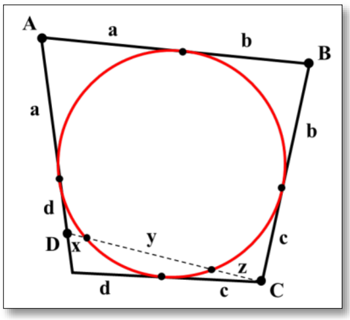
$$\sqrt{z(z+0)} \leq \frac{z+(z+\ 0)}{2} = \frac{2z+0}{2} = \frac{2z}{2}+\frac{0}{2} = z+\frac{0}{2} = z$$

e

$$\sqrt{x(x+0)} \leq \frac{x+(x+0)}{2} = \frac{2x+0}{2} = \frac{2x}{2}+\frac{0}{2} = x+\frac{0}{2} = x.$$

Logo, por um lado, $c+d=x+z$, por outro lado, $x+y+z=x+z$, pois $y=0$. Então $c+d\ =x+y+z$. Veja a Figura 72.

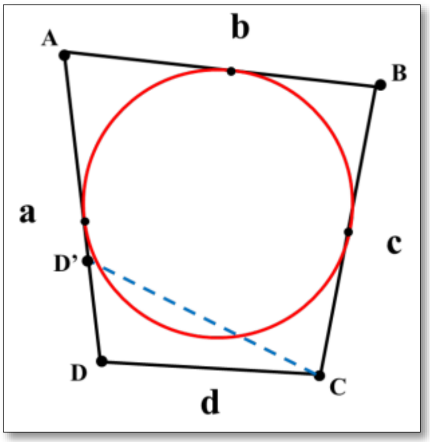
Figura 72 - Quadrilátero $(c+d)=(x+z)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O significado geométrico deste resultado é que o círculo é tangente ao lado DC, isto é, o quadrilátero ABCD é circunscritível. Por outro lado, mais precisamente para provar o contrário do teorema de Pitot, vamos supor que os lados opostos adicionem o mesmo número diferente de zero e, por causa de contradição, o círculo corta um lado; então, a desigualdade é estrita, obtendo uma contradição.

Figura 73 - Quadrilátero $ABCD$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que o quadrilátero $ABCD$, na Figura 73 acima, onde $a + c = b + d$ (1), é circunscritível.

No quadrilátero $ABCD'$, vale a relação $AD' + c = CD' + b$ (2).

Subtraindo (1) de (2) encontramos $a - AD' = d - CD'$. Como $a - AD' = DD'$, então, concluímos que $DD' = d - CD'$, ou seja, $d = DD' + CD'$. O que é uma contradição da condição de existência de um triângulo, que diz: um lado é menor que a soma dos outros dois. Assim, um dos lados corta o círculo inscrito no quadrilátero.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é uma disciplina que apresenta um baixo desempenho dos alunos e é também a que mais reprova. O maior estudo sobre Educação do mundo, o PISA, apontou que o Brasil tem baixa proficiência em Matemática, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. A edição 2018 revela que 68,10% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. (BRASIL, 2019). O Brasil, quando comparado aos países do continente sul-americano, de acordo com o PISA, é o pior país em Matemática com 384 pontos. Esse cenário abrange, por exemplo, situações de incapacidade na resolução de cálculos. Se comparado à média dos países da OCDE, o Brasil apresenta resultados ainda piores em Matemática.

Nos testes cognitivos utilizados no PISA 2018, o letramento matemático é definido como a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, como raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, 2019, p.22). O Brasil, com 384 pontos, foi classificado no Nível 1 de proficiência, cujo escore mínimo é de 358 pontos. Para esse nível, as características das tarefas requerem que os estudantes sejam capazes de:

> Responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas. Conseguem realizar ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.

No Nível 2 de proficiência, com escores mínimos de 420 pontos, os estudantes conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais de resultados. Já no Nível 3 de proficiência, os estudantes demonstram alguma capacidade para lidar com porcentagens, frações e números decimais e para trabalhar com relações de proporcionalidade. Suas soluções indicam que eles se envolvem em interpretações e raciocínios básicos (BRASIL, 2019, p.109).

Em conformidade com o relatório preliminar do PISA 2018, entende-se que o Brasil possui estudantes que não conseguem resolver problemas com números inteiros ou mesmo ter a capacidade de trabalhar com porcentagem, frações e números decimais. Esse baixo índice reflete no desempenho dos alunos na OBMEP, pois é preciso utilizar-se de tais conteúdos para interpretar e realizar cálculos básicos. Diante disso, o desenvolvimento desta pesquisa traz algumas considerações importantes sobre o assunto. A primeira diz respeito aos desafios encontrados no ambiente escolar, pois, segundo Zacarias (2008, p.20), o aluno, mesmo antes de entrar na escola, já convive com a Matemática e cabe à escola e aos educadores trabalhar para que seja superado o medo existente dessa disciplina e suas dificuldades.

A segunda é que, para que o professor não seja pego de surpresa, ele deve se organizar e estar sempre bem preparado para efetuar mudanças em seu planejamento, bem como para ministrar uma aula atrativa, moderna, motivadora e bem estruturada em fortes conceitos matemáticos, a fim de que os alunos tenham o gosto pela Matemática despertado e deixem a ideia de que a Matemática é uma matéria difícil de lado. Segundo Hartmann (2014, p.63), a Matemática não é uma disciplina fácil. Porém, várias pessoas carregam paradigmas de que essa é a matéria mais difícil e que nunca conseguirão aprender, fato esse que acaba dificultando ainda mais o trabalho do professor que, antes de ensinar, deve desmistificar.

A terceira consideração diz respeito à maneira de trabalhar em sala de aula, isto é, o modo de transmitir o conhecimento ao aluno de maneira formal e argumentativa. Como objeto de pesquisa deste trabalho, procurou-se mostrar a importância de aplicar, como metodologia, as demonstrações matemáticas com foco na OBMEP. Mostrou-se na Tabela 4, que os assuntos trabalhados nas provas de 1ª e 2ª Fases da OBMEP, previstos nos PCN, estão bem distribuídos. Mostrou-se, ainda, no Gráfico 6, por meio de uma pesquisa realizada com professores de Matemática em nível nacional, que apenas 33,33% dos entrevistados ainda acreditam nas demonstrações matemáticas e que 66,67% apostam em resoluções de provas anteriores para que haja êxito na OBMEP. Segundo Sousa (2010, p. 15), as demonstrações matemáticas são ferramentas utilizadas pelo estudioso de Matemática e fazem parte de um contexto de produção do conhecimento de Matemática.

Depois de efetuar este estudo sobre as demonstrações matemáticas, a quarta consideração refere-se à convicção de que essas demonstrações apresentam um papel fundamental no ensino da Matemática, principalmente da Educação Básica, não só focada na OBMEP, como também na Educação Superior, pois é preciso minimizar as dificuldades advindas do Ensino Médio.

Como objetivo geral, comprometeu-se, neste estudo, a apresentar demonstrações matemáticas com o propósito de influenciar alunos na preparação para a prova da OBMEP, estimulando-os a participar efetivamente das olimpíadas, de modo a buscar resultados satisfatórios. Entretanto, a Tabela 39, mostra que $58{,}30\%$ dos alunos estão desmotivados a participar de programas de preparação para a OBMEP e, consequentemente, das olimpíadas. Para futuras pesquisas, deixa-se aqui uma sugestão para investigar as causas dessa desmotivação em participar desses programas. Apesar de esse percentual ser acima de 50%, a aplicação de parte deste projeto foi satisfatória, pois o crescimento quantitativo foi notável quando se comparou a média geral da Avaliação Formativa com a da Avaliação Diagnóstica. Por esse motivo, afirma-se que, baseado na Teoria de Ausubel, o objetivo foi cumprido, mesmo diante do curto espaço de tempo. Para que se obtenham resultados mais satisfatórios, sugere-se um período de aplicação de 6 meses ou mais, a fim de se concretizar este projeto. Afirma-se, ainda, que se cumpriram todas as etapas intermediárias, pois foram: investigados os assuntos mais cobrados em edições anteriores da OBMEP; identificada a existência de programas de preparação nas escolas; identificadas dificuldades por uma Avaliação Diagnóstica; apresentadas algumas demonstrações matemáticas; avaliadas as aprendizagens por meio de uma Avaliação Formativa e mensurado o grau de motivação dos alunos, por meio de um questionário sobre a OBMEP.

Como dados para planejamentos futuros, por meio das avaliações aplicadas, constatou-se que os alunos apresentaram dificuldades com relação à linguagem Matemática, à escrita e à habilidade de argumentação. Como aprendizado deste acadêmico, deparou-se, inicialmente, com a resistência dos alunos em relação às demonstrações e, para deixar um ambiente mais tranquilo, optou-se por trabalhar a história da Matemática como meio auxiliar na transmissão do conhecimento, o que deixou os alunos mais empolgados e curiosos.

Por fim, entende-se que o processo de mudança não é simples, pois ele exige muito esforço, dedicação, postura, quebra de paradigmas e, acima de tudo, renovação. Acredita-se que as demonstrações matemáticas possuem um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, visto que desenvolvem a habilidade de argumentação e escrita Matemática, bem como a capacidade de formular conjecturas. Entende-se, ainda, que há necessidade de investigar mais profundamente o estudo das demonstrações matemáticas na Educação Básica para que sirva de estratégia para as provas da OBMEP e também para que os futuros acadêmicos estejam preparados para enfrentar as disciplinas básicas de cálculo no Ensino Superior.

6 REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. *A Teoria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel* - Sistematização dos Aspectos Teóricos Fundamentais. 1976. 97f. Tese (Doutorado em Ciência da Educação)-Faculdade de Educação, Unicamp, 1976.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Editora Interamericana, 1980.

BARLATI, Roseli A.; CARVALHO; Ana M. F. T. *Demonstrações em Matemática:* o uso do raciocínio lógico. 2010. Plano de trabalho. Programa de Desenvolvimento Educacional. Governo do Estado do Paraná, 2010.

BOSCH, Robert. A new proof of Pitot Theorem by AM-GM Inequality. *Forum Geometricorum*, v.18, p. 251-253, 2018. Disponível em: http://forumgeom.fau.edu/FG2018volume18/FG201832.pdf Acesso em: 21 out. 2018.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 1974.

BRASIL. Presidência da República. *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília-DF, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm

BRASIL, Presidência da República. *Lei nº 9.394* de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Introdução. Brasília-DF: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio* – PCNEM, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 4 jan. 2020.

BRASIL. *Lei nº 12.796*, de 4 de abril de 2013. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da Educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da Educação e dar outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12796.htm. Acesso em: 4 jan. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep. *Resultados do índice de desenvolvimento da Educação básica*. Resumo técnico Brasília-DF: MEC, 2017a.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Curricular Comum* – BNCC, Brasília, 2017b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 04 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. *Avaliações da aprendizagem*. 2018a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/pnld/dicionarios/190-secretarias-112877938/setec-1749372213/18843-avaliacoes-da-aprendizagem. Acesso 24 de jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. *Relatório Brasil no PISA 2018*: Versão Preliminar. Brasília-DF: MEC, 2018b. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf Acesso 24 de jan. 2020.

BRASIL. *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes* - PISA. 2019. disponível em: http://inep.gov.br/pisa. Acesso em: 30 jan. de 2020.

BUSARELLO, Raul I.; BIEGING, Patrícia; ULBRICHT, Vania R. *Sobre Educação e tecnologia*: processos e aprendizagem. São Paulo-SP: Pimenta Cultural, 2015.

CAMELO, Fausto Fernandes. *Um critério de divisibilidade universal sob a ótica da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática da Teoria à Prática*. 22ª Edição ed. Campinas-SP: Papirus, 2011.

FARIAS, Antonio José Ornellas. A Psicologia Educacional da aprendizagem significativa aplicada à programação escolar. *Revista Psicologia & Saberes*, Maceió, v.7, n.8, p. 20-40, 2018.

FELICETTI, Vera L. Construção Matemática: um desafio metodológico. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 9 - Educere, 2009, Curitiba. *Anais* [...]. Curitiba, p. 462-463, 2009.

FILLOS, Leoni M. O ensino de geometria: depoimentos de professores que fizeram história. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. 2006, Belo Horizonte. *Anais* [...]. Belo Horizonte, 2006.

GARCIA, J.; RODRIGUES, J*. Manual de dificuldades de aprendizagem*: linguagem, leitura, escrita e Matemática. Editora Artmed, 1998.

GIL, Antônio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas S. A., 2002.

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Educação Fundamental GDF. *Currículo em Movimento da Educação Básica*. Brasília/DF. 2018a. Disponível em: http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/cur_mov/5_ensino_medio.pdf.

GOVERNO DO DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Educação Fundamental GDF. *Currículo em Movimento do Ensino Médio.* 2018b. Disponível em: http://www.cre.se.df.gov.br/ascom/documentos/subeb/cur_mov/5_ensino_medio.pdf Acesso em: 24 jan. 2020.

HAYDT, Regina C. C. *Avaliação do processo ensino-aprendizagem*. São Paulo: Editora Ática, 1997.

HEFEZ, Abramo. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2015.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. *OBMEP 12 anos*, Biênio da Matemática Brasil 2017/2018, Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Disponível em: http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf. Acesso em: 02 jan. 2020.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. OBMEP. *Apresentação do programa*. 2019. Disponível em: http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm Acesso em: 06 set. 2019.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, Matemática e ciências no Brasil.* Notícias, 3 dez. 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206 Acesso em: 02 jan. 2020.

LEITE, Francisco Tarcísio. *Metodologia Científica:* métodos e técnicas de pesquisa: monografias, dissertações, teses e livros. Aparecida/SP: Ideias & Letras, 2008.

LIBÂNEO, J. C. *Didática*. São Paulo-SP: Cortez, 2006.

LIMA, Elon Lages*. Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Vol. I. São Paulo: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. *A Matemática do Ensino Médio*. São Paulo: SBM, 2006.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. São Paulo-SP: Cortez Editora, 2002.

MASOLA, Wilson de J.; ALLEVATO, Sueli G. Dificuldades de aprendizagem Matemática de alunos ingressantes na Educação superior. *REBES - Rev. Brasileira de Ensino Superior*, Passo Fundo/RS, v. 2, n.1, p. 64-74, 2016.

MORAES, Dirce A. F. Avaliação Formativa: re-significando a prova do cotidiano escolar. 2008. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual de Londrina, 2008.

MORAIS FILHO, Daniel C. *Um convite à Matemática:* fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. Universidade Federal de Campina Grande, 2010.

MOREIRA, Marco Antônio. *Tipos de Aprendizagem.* São Paulo-SP: EPU, 1999. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2012307/mod_resource/content/1/Teorias%20de%20Aprendizagem%20Marco%20Antnio%20Moreira.pdf. Acesso em: 02 jan. 2020.

MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie F. Salzano. *Aprendizagem Significativa:* a teoria de David Ausubel. São Paulo-SP: Moraes, 1982.

MOURA, Ana G. de Brito de. *História da Matemática para a prática dos professores do Ensino Médio*. 2016. Dissertação (Mestrado)- Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.

OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. A OBM. Quem somos. IMPA, 2020. Disponível em: https://www.obm.org.br/quem-somos/historico. Acesso em: 02 jan. 2020.

OLIVEIRA, Andréa Ribeiro; GONÇALVES, Taíse Batista. O desafio em ensinar e aprender História: dificuldade dos alunos na leitura e na escrita nas séries iniciais do Ensino Fundamental II. *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DE HISTÓRIA, 27. 2013, Natal/RN. *Anais* [...]. Natal, 2013.

PAPERT, Seymour. *Logo:* computadores e Educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PEDROSO, Hermes A. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de Matemática,* v.2, p. 1-13, 2010.

PINA NEVES, Regina da S.; BACCARIN, Sandra A. de O.; SILVA, Jhone C. A formação geométrica de licenciandos em Matemática: uma análise a partir da replicação de questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Espanha, n. 34, p. 169-186, junio de 2013.

RICARDO, Ana F.; NEVES, Maria de L. E.; MONTEIRO, Vera; PEIXOTO, Francisco J. B. Motivação para a aprendizagem da Matemática e sua relação com a percepção de clima de sala de aula. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE PSICOLOGIA E EDUCAÇÃO: EDUCAÇÃO, APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO, 12. Lisboa: ISPA – Instituto Universitário. *Actas* [...]. p. 1153-1168, 21, 22 e 23 de jun. 2012.

SALOMÃO, Thais; NASCIMENTO, Mari C. M. A avaliação da aprendizagem na perspectiva formativa e na classificatória. *In:* SEMANA DA EDUCAÇÃO, 16; SIMPÓSIO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, 6. 2014, Londrina. *Anais* [...]. Londrina, 2014.

SANTOS, J.; FRANÇA, K.; SANTOS, L. *Dificuldades na aprendizagem de Matemática*. 2007. Monografia de Graduação em Matemática. São Paulo: UNASP, 2007.

SILVA, Jully da C.; ALTINO FILHO, Humberto V.; ALVES, Lídia M. N. Matofobia: Investigando e apontando os fatores causadores da aversão à Matemática. *In:* SEMINÁRIO CIENTÍFICO DO UNIFACIG, 2016, Manhuaçu/MG. *Anais* [...]. Manhuaçu/MG, 2016. Disponível em: http://pensaracademico.facig.edu.br/index.php/semiariocientifico/article/view/63 Acesso em: 29 de jan. 2020.

SILVA, Meiriane Vieira. *As Dificuldades de aprendizagem da Matemática e sua relação com a matofobia.* 2014. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação)-Universidade Estadual da Paraíba, 2014. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/6666 Acesso em: 29 de jan. 2020.

SILVA, André Luís; MOURA, Paulo Rogério Garcez; DEL PINO, José Cláudio. Continuum entre aprendizagem mecânica e aprendizagem Significativa na perspectiva ausubeliana e sua relação ao contexto escolar. *Di@ logus*, v. 6, n. 1, p. 52-63, 2017.

SOARES, Luanne Lorena dos Santos; PENICHE, Ana Paula dos Passos; AVIZ, Larissa de Nazaré Carvalho. As contribuições de David Ausubel para o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem: um olhar sobre a psicologia educacional. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - CONEDU, 4. 2017, João Pessoa-PB. *Anais* [...]. João Pessoa-PB, 2017. Disponível em: http://edicoes.conedu.com.br/2017/ Acesso em: 29 de jan. 2020.

TOMAZ, Tereza C. Não gostar de Matemática: que fenômeno é este? *Cadernos de Educação*, n. 12, p. 187-210, jan./jul. 1999.

VILAÇA, Márcio L. Ambientes virtuais de aprendizagem: tecnologia, Educação e comunicação. Rio de Janeiro-RJ, *Cadernos do CNLF-Círculo Fluminense de Estudos Filológicos e Linguístico*, 2013.

VITTI, Catarina M.; D'AMBROSIO, Ubiratan. *Matemática com prazer:* a partir da história e da geometria. Unimep, 1996.

ZACARIAS, Sandra Maira Zen. *A Matemática e o fracasso escolar:* medo, mito ou dificuldade. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente/SP, 2008.

APÊNDICE A – Pesquisa realizada com os professores

Pesquisa destinada aos professores de Matemática sobre a metodologia utilizada nas escolas com o objetivo de preparar os alunos para as provas, de 1ª e 2ª fases, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Nós, Paulo Cesar Bernardo Silva mestrando em Matemática e Ricardo Ruviaro professor doutor da Universidade de Brasília (UnB), ambos do Departamento de Matemática da UnB, estamos realizando uma pesquisa que tem por objetivo conhecer a metodologia aplicada para os alunos das escolas públicas, a fim de prepará-los para as provas de 1ª e 2ª fases da OBMEP.

Para a realização da pesquisa, você está sendo convidado a responder o questionário a seguir. Esclarecemos que a sua participação nesta pesquisa é voluntária. Portanto, você poderá deixar a pesquisa a qualquer momento que desejar e isso não acarretará qualquer prejuízo para você. Asseguramos que qualquer dado pessoal não será divulgado em hipótese alguma e que os dados obtidos serão analisados coletivamente.

Qualquer informação adicional ou esclarecimentos acerca deste estudo poderá ser obtido junto aos pesquisadores, pelo e-mail profbernardo2102@gmail.com ou pelo telefone 61983527531.

*Obrigatório

1. Declaro que li e entendi todas as informações presentes neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Você concorda e aceita os termos apresentados? *

   Marcar apenas uma oval.

   - Sim
   - Não

2. Em qual o estado da federação que está localizada a escola onde você trabalha? *

Marcar apenas uma oval.

- AC
- AL
- AP
- AM
- BA
- CE
- DF
- ES
- GO
- MA
- MT
- MS
- MG
- PA
- PB
- PR
- PE
- PI
- RJ
- RN
- RS
- RO
- RR
- SC
- SP
- SE
- TO

3. Em qual cidade está localizada a escola onde você trabalha? *

4. Você trabalha em qual tipo de escola? *

Marcar apenas uma oval.

- Pública
- Privada

5. Você leciona em qual nível da Educação Básica? *

Marcar apenas uma oval.

- Ensino Fundamental
- Ensino Médio

6. Escreva aqui o nome da sua escola. (Opcional)

7. Na escola onde você trabalha, existe um programa específico que prepara os alunos para as provas da 1ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

8. Na escola onde você trabalha existe, um programa específico que prepara os alunos para as provas da 2ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9. Você já participou de algum programa, na sua escola, voltado para as provas de 1ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

10. Para qual nível da prova da 1ª fase da OBMEP você já trabalhou preparando os alunos? *

Marcar apenas uma oval.

- Nível 1 (6º e 7 º ano)
- Nível 2 (8º e 9 º ano)
- Nível 3 (Ensino Médio)
- Nunca trabalhei

11. Você já participou de algum programa, na sua escola, voltado para as provas de 2ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

12. Para qual nível da prova da 2ª fase da OBMEP você já trabalhou preparando os alunos? *

Marcar apenas uma oval.

- Nível 1 (6º e 7 º ano)
- Nível 2 (8º e 9 º ano)
- Nível 3 (Ensino Médio)
- Nunca trabalhei

13. Você participa, atualmente, na sua escola, de algum programa de preparação para as provas de 1ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

14. Para qual nível da prova da 1ª fase da OBMEP você trabalha atualmente preparando os alunos? *

Marcar apenas uma oval.

- Nível 1 (6º e 7 º ano)
- Nível 2 (8º e 9 º ano)
- Nível 3 (Ensino Médio)
- Não trabalho com a OBMEP

15. Você participa, atualmente, na sua escola, de algum programa de preparação para as provas de 2ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim
- ( ) Não

16. Para qual nível da prova da 2ª fase da OBMEP você trabalha atualmente preparando os alunos? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Nível 1 (6º e 7 º ano)
- ( ) Nível 2 (8º e 9 º ano)
- ( ) Nível 3 (Ensino Médio)
- ( ) Não trabalho com a OBMEP

17. Qual(is) o(s) período(s) você participou do programa de preparação, na sua escola, para as provas da 1ª fase da OBMEP? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] 2005
- [ ] 2006
- [ ] 2007
- [ ] 2008
- [ ] 2009
- [ ] 2010
- [ ] 2011
- [ ] 2012
- [ ] 2013
- [ ] 2014
- [ ] 2015
- [ ] 2016
- [ ] 2017
- [ ] 2018
- [ ] 2019
- [ ] Nunca participei

18. Qual(is) o(s) período(s) você participou do programa de preparação, na sua escola, para as provas da 2ª fase da OBMEP? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] 2005
- [ ] 2006
- [ ] 2007
- [ ] 2008
- [ ] 2009
- [ ] 2010
- [ ] 2011
- [ ] 2012
- [ ] 2013
- [ ] 2014
- [ ] 2015
- [ ] 2016
- [ ] 2017
- [ ] 2018
- [ ] 2019
- [ ] Nunca participei

19. Na sua opinião, qual o grau de dificuldade da 1ª fase da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Fácil
- ( ) Médio
- ( ) Difícil

20. Na sua opinião, qual o grau de dificuldade da 2ª fase da OBMEP?

Marcar apenas uma oval.

- Fácil
- Médio
- Difícil

21. Como você trabalha na preparação dos alunos para as provas da 1ª fase da OBMEP? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Relembro os conteúdos cobrados nas provas e em seguida entrego listas de exercícios
- [ ] Faço resolução das provas anteriores
- [ ] Faço demonstrações matemáticas que auxiliam nas resoluções
- [ ] Trabalho com aulas práticas
- [ ] Utilizo meios de informática, computadores, celulares, etc.
- [ ] Utilizo viodeaulas, internet, livros, etc.
- [ ] Não trabalho com a OBMEP.

22. Como você trabalha na preparação dos alunos para as provas da 2ª fase da OBMEP? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Relembro os conteúdos cobrados nas provas e em seguida entrego listas de exercícios
- [ ] Faço resolução das provas anteriores
- [ ] Faço demonstrações matemáticas que auxiliam nas resoluções
- [ ] Trabalho com aulas práticas
- [ ] Utilizo meios de informática, computadores, celulares, tablet, etc.
- [ ] Utilizo viodeaulas, internet, livros, etc.
- [ ] Não trabalho com a OBMEP

23. Quantos alunos da escola onde você trabalha, em média, participaram, por ano, das provas da OBMEP no período de 2005 a 2019?

Marcar apenas uma oval.

- de 0 a 5 alunos
- de 6 a 15 alunos
- de 16 a 30 alunos
- mais de 30 alunos

24. Quantos alunos da escola onde você trabalha já receberam algum tipo de medalha da OBMEP no período de 2005 a 2018?

Marcar apenas uma oval.

- de 0 a 5 alunos
- de 6 a 15 alunos
- de 16 a 30 alunos
- mais de 30 alunos

25. A escola onde você trabalha já recebeu algum prêmio de participação na OBMEP no período de 2005 a 2018?

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

26. Como você trabalha, ou já trabalhou, na preparação dos alunos para as provas da 1ª e 2ª fases da OBMEP? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Aula prática com a utilização de jogos
- [ ] Aula com utilização de vídeo
- [ ] livro didático ou apostilas
- [ ] Resolução de lista de exercícios simulados
- [ ] Resoluçao de provas anteriores
- [ ] Explicação de conteúdo e registro de exercícios
- [ ] Trabalhos em grupo
- [ ] Atividade individual orientada por estudo dirigido e acompanhamento do professor
- [ ] Materiais que auxiliam no ensino da Matemática: réguas, jogo de esquadros, transferidor, compasso, etc.
- [ ] Utiliza o computador: programas de construção de gráficos, construção de figuras Geométricas
- [ ] Portais da internet
- [ ] Realiza olimpíadas internas de matemática
- [ ] Trabalha com jogos que despertem o raciocínio lógico, tais como sudoku e quebra-cabeças.
- [ ] Utilizo o banco de questões do site da OBMEP
- [ ] Utilizo demonstrações matemáticas para a resolução das questões
- [ ] Não trabalho com a OBMEP

27. Mesmo não trabalhando com a OBMEP, você inclui alguma das metodologias abaixo em suas aulas? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Aula prática com a utilização de jogos
- [ ] Aula com utilização de vídeo
- [ ] livro didático ou apostilas
- [ ] Resolução de lista de exercícios simulados
- [ ] Resoluçao de provas anteriores
- [ ] Explicação de conteúdo e registro de exercícios
- [ ] Trabalhos em grupo
- [ ] Atividade individual orientada por estudo dirigido e acompanhamento do professor
- [ ] Materiais que auxiliam no ensino da Matemática: réguas, jogo de esquadros, transferidor, compasso, etc.
- [ ] Utiliza o computador: programas de construção de gráficos, construção de figuras Geométricas
- [ ] Portais da internet
- [ ] Realiza olimpíadas internas de matemática
- [ ] Trabalha com jogos que despertem o raciocínio lógico, tais como sudoku e quebra-cabeças.
- [ ] Utilizo o banco de questões do site da OBMEP
- [ ] Utilizo demonstrações matemáticas para a resolução das questões

28. Você acha que os assuntos abordados durante o ano letivo são suficientes para se obter um bom resultado nas provas da OBMEP? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Sim
- ( ) Não

Agora, algumas perguntas sobre você, para caracterização dos participantes da pesquisa

29. Idade:

____

30. Sexo:

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Masculino
- ( ) Feminino
- ( ) Prefiro não informar

31. Qual a sua formação acadêmica? *

____

32. Nível educacional: *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Graduaçao
- ( ) Especialista
- ( ) Mestrado
- ( ) Doutorado
- ( ) Pós-doutorado

APÊNDICE B – Avaliação Diagnóstica

Avaliação diagnóstica - Nível - 3 - 1ª FASE
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Nome: ______________________________ **Data:** ____________

Instruções: ________________________ NOTA: __________

1. A prova deve ser feita a caneta azul ou preta.
2. A duração da prova é de **50 minutos**.
3. Esta avaliação contém 3 (três) páginas incluindo a capa.
4. Cada questão da 1ª parte tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D) e (E), e apenas uma delas é correta.
5. Para cada questão marque a alternativa escolhida no cartão resposta, preenchendo o espaço dentro do quadrado correspondente.

Questão 01	A	■	C	D	E
Questão 02	A	B	C	■	E

6. Marque apenas uma alternativa para cada questão. Atenção: se você marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas marcadas seja a correta.
7. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras ou quaisquer fontes de consulta.
8. A segunda parte da prova deve ser feita à caneta azul ou preta e os cálculos devem ser apresentados de maneira clara e objetiva.
9. Os espaços em branco na prova podem ser usados para rascunho.

Preencha o gabarito corretamente

CARTÃO RESPOSTA

Questão 01	A	B	C	D	E
Questão 02	A	B	C	D	E
Questão 03	A	B	C	D	E
Questão 04	A	B	C	D	E
Questão 05	A	B	C	D	E

A matemática é elementar!

1ª Parte

1. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.

   (A) 5/2

   (B) 1

   (C) 3/2

   (D) -5/2

   (E) -3/2

2. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

   (A) 83

   (B) 56

   (C) 38

   (D) 76

   (E) 63

3. Qual a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...)?

   (A) 1365

   (B) 289

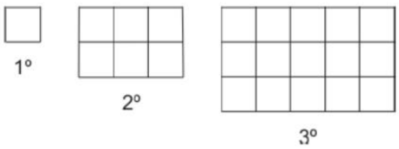
   (C) 362

   (D) 1260

   (E) 2730

4. (OBMEP) Com quadradinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100º retângulo dessa sequência?

   (A) 402 cm
   (B) 472 cm
   (C) 512 cm
   (D) 598 cm
   (E) 634 cm



5. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

   (A) 798

   (B) -798

   (C) 729

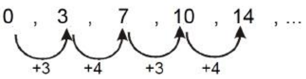
   (D) -727

   (E) 727

2ª Parte

Obs.: Escreva todos os cálculos que justificam a sua resposta.

6. (OBMEP - Adaptada) A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21,... é formada a partir do numero 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 mais o primeiro, o terceiro é 4 mais o segundo,o quarto é 3 mais o terceiro, o quinto é 4 mais o quarto e assim sucessivamente.



Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

Resposta: ____

7. Escreva os quatro primeiros termos da sequência apresentada abaixo e determine a soma desses quatro termos. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com p $\in$ N.

ERRATA

Onde diz "com p $\in$ N", lê-se "com p pertencente ao conjunto dos Naturais N=$\{1, 2, 3, ...\}$.

Resposta: ____

APÊNDICE C – Plano de aula: Sequências e Progressão Aritmética

Plano de Aula - Sequências e Progressão Aritmética

1 Introdução - 5 min

Por definição temos que **Sequência** é a ação de dar continuidade, de dar prosseguimento com algo que já foi iniciado previamente. A **sequência** apresenta a continuação de alguma coisa que foi mostrada anteriormente, como também pode significar algo que tem movimento de continuidade ou prosseguimento. Por exemplo, a sequência dos números naturais a partir do número 1, temos (1, 2, 3, 4, ...). Outro exemplo de sequência é a dos números positivos que são quadrados perfeitos, (1, 4, 9, 16, 25, ...).

De posse dessa ideia, vamos estudar as sequências, seus conceitos, lei de formação e uma em especial que é a Progressão Aritmética, também conhecida como PA.

1.1 Objetivos Gerais

1. Estudar as sequências, especialmente a Progressão Aritmética (PA), a fim de se obter um melhor desempenho nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP); e
2. Estimular o interesse em estudar a matemática através de demonstrações, teoremas e resolução de problemas, bem como despertar a vontade de participar da OBMEP.

1.2 Objetivos Específicos

1. Definir sequência, lei de formação e PA.
2. Demonstrar as fórmulas do termo geral e da soma dos termos da PA.
3. Resolver exercícios de fixação envolvendo o conteúdo proposto.
4. Mensurar o conhecimento adquirido através de uma avaliação realizada logo após a explanação dos conteúdos.
5. Responder um questionário a fim de mensurar o grau de interesse pela matemática e pela OBMEP.

2 Desenvolvimento - 40 min

2.1 Sequências

Todos os dias nos deparamos com situações que dão a ideia de sequências, como por exemplo:

→ os dias da semana (domingo, segunda, terça, ...);

→ os meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ...);

→ a sequência dos números naturais positivos (1, 2, 3, ...).

Note que, em todas essas sequências apresentam uma certa ordem dos elementos. Estes, são chamados de termos de uma sequência. Assim na sequência que apresenta os dias da semana, o 1º termo é domingo, o segundo termo é terça, ..., o sétimo termo é sábado.

$a_1 \to$ Dom, $a_2 \to$ Seg, $a_3 \to$ Ter, $a_4 \to$ Qua, $a_5 \to$ Qui, $a_6 \to$ Sex, $a_7 \to$ Sab;

Definição: Uma sequência de **n termos** é uma função cujo domínio é conjunto numérico representado por $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e o contradomínio é o conjunto formado pelos termos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

Ex 01. A sequência dos números ímpares positivos é infinita. S = (1, 3, 5, 7, ...).

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, ...$

Ex 02. A sequência dos números positivos que são quadrados perfeitos. S = (1, 4, 9, 16, ...).

$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16 ...$

2.2 Lei de Formação

Algumas sequências são formadas por regras que são chamadas por ***Lei de Formação***, que dão origem aos termos da sequência, como é o caso do exemplo 02 mostrado acima. A sequência dos números positivos que são quadrados perfeitos. S = (1, 4, 9, 16, ...). Observe que a lei de formação da sequência é n^2, onde n é o índice do termo.

$a_1 = 1^2 = 1, \quad a_2 = 2^2 = 4, \quad a_3 = 3^2 = 9, \quad a_4 = 4^2 = 16, \cdots \quad \mathrm{a}_n = n^2$

Logo a lei de formação da sequência dos números positivos que são quadrados perfeitos é $a_n = n^2$.

Ex 03. Escreva a sequência cuja Lei de Formação é $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com **p** pertencente ao conjunto dos Naturais N=$\{1, 2, 3, ...\}$..

$a_1 = 4$

$a_2 = a_1 + 5 = 4 + 5 = 9$

$a_3 = a_2 + 5 = 9 + 5 = 14$

$a_4 = a_3 + 5 = 14 + 5 = 19$

Portanto a sequência é (4, 9, 14, 19).

Ex 04. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

$a_1 = 2$ e $a_5 = 20$

$a_1 - 2(a_5)^2 = 2 - 2(20)^2 = 2 - 2(400) = 2 - 800 = -798.$

2.3 Progressão Aritmética (PA)

Uma PA é uma sequência que apresenta a mesma variação entre dois termos consecutivos, essa variação na PA é chamada de razão. Por exemplo:

Ex 05. Dada a sequência S = (5, 10, 15, 20, 25).

Os termos dessa sequência são: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20$ e $a_5 = 25$. Obviamente essa sequência finita possui 5 termos.

Observe que os termos da sequência variam de 5 em 5, esta variação (razão) é calculada da seguinte forma:

$a_5 - a_4 = 25 - 20 = 5$

$a_4 - a_3 = 20 - 15 = 5$

$a_3 - a_2 = 15 - 10 = 5$

$a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5$, assim

$a_n - a_{n-1} = r$, **r** é a constante chamada de razão.

Uma PA é toda sequência de números na qual a variação entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é sempre constante. Essa constante é chamada de razão

Ex 06. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.

$(5x+7) - (2x+1) = (2x+1) - (x)$

$3x + 6 = x + 1$

$2x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{2}.$

2.4 A Fórmula do Termo Geral

Agora vamos determinar a fórmula do termo geral de uma PA. Dada a sequência $S = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$. Observe que

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$, mas $a_2 = a_1 + r$, logo $a_3 = (a_1 + r) + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$, mas $a_3 = a_1 + 2r$, logo $a_4 = (a_1 + 2r) + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r$, mas $a_4 = a_1 + 3r$, logo $a_5 = (a_1 + 3r) + r \rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

Generalizando, temos que a fórmula do termo geral é

Termo geral

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r,\ n \in \mathbb{N}}$$

Ex 07. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

$a_{17} = a_1 + (17-1).r$

$a_{17} = 3 + (16).5$

$a_{17} = 83.$

2.5 A soma dos termos de uma PA finita

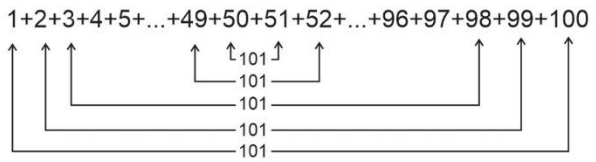
Antes de dar início à este assunto, responda a seguinte pergunta: **É possível somar os números de 1 até 100 em menos de 1 minuto?**

Conta a história que um professor de matemática querendo deixar a sua turma em silêncio pediu que os alunos somassem todos os números de 1 até 100. Para sua surpresa um aluno chamado **Karl Friedrich Gauss** de aproximadamente 7 ou 8 anos de idade respondeu prontamente em alguns minutos que a resposta seria 5050. Karl Friedrich Gauss foi um grande matemático que viveu de 1777 a 1855. Esse conto ilustra como Gauss deduziu a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. O ilustre aluno Gauss deduziu que existem 50 vezes a soma dos extremos e estas somas são iguais, ou seja

$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 49 + 52 = 50 + 51 = 101$

A soma é 50 vezes 101 que é igual a 5050.

Como $a_1 = 1$ e $a_{100} = 100$, então $S_{100} = \dfrac{(a_1 + a_{100}).100}{2} = \dfrac{(1+100).100}{2} = 101.50 = 5050$



Soma dos Termos de uma PA

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2},\ n \in \mathbb{N}}$$

Ex 08. Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...).

Veja que $a_{30} = a_1 + 29.r$, mas $r = 5 - 2 = 3$, então

$a_{30} = a_1 + 29.(3) = 2 + 87 = 89$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$, assim $S_30 = \dfrac{(a_1 + a_30).30}{2} = \dfrac{(2 + 89).30}{2} = 91.15 = 1365.$

3 Considerações Finais

a) Estudamos que toda sequência possui uma lei de formação que define seus termos. A sequência pode ser finita ou infinita.

b) Vimos que uma PA é toda sequência de números na qual a variação entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é sempre constante. Essa constante é chamada de razão. Para calcularmos a razão basta subtrairmos dois termos consecutivos a partir do segundo. $r = a_n - a_{n-1}$.

c) O termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r,\ n \in \mathbb{N}$

d) A soma dos termos de uma PA finita é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

4 A avaliação

Ao final da exposição do conteúdo os alunos terão 50 minutos para resolver uma avaliação contendo 4 questões objetivas e 2 subjetivas abordando o tema lecionado no período anterior.

APÊNDICE D – Aula de Sequências: aluno

TD - Sequências e PA

1 Sequências

Todos os dias nos deparamos com situações que dão a ideia de sequências, como por exemplo:

→ os dias da semana (domingo, segunda, ...);

→ os meses do ano (janeiro, fevereiro, ...);

→ Os números naturais positivos (1, 2, 3, ...).

Note que, em todas essas sequências apresentam uma certa ordem dos elementos. Estes, são chamados de termos de uma sequência. Assim na sequência que apresenta os dias da semana, o 1º termo é domingo, o segundo termo é terça, ..., o sétimo termo é sábado.

$a_1 \rightarrow$ ______________________,
$a_2 \rightarrow$ ______________________,
$a_3 \rightarrow$ ______________________,
$a_4 \rightarrow$ ______________________,
$a_5 \rightarrow$ ______________________,
$a_6 \rightarrow$ ______________________,
$a_7 \rightarrow$ ______________________;

Definição: Uma sequência de **n termos** é uma função cujo domínio é conjunto numérico representado por {1, 2, 3, 4, ..., n} e o contradomínio é o conjunto formado pelos termos a_1, a_2, a_3, ..., a_n.

Ex 01. A sequência dos números ímpares positivos é infinita. S = (1, 3, 5, 7, ...).

Ex 02. A sequência dos números positivos que são quadrados perfeitos. S = (1, 4, 9, 16, ...).

2 Lei de Formação

Algumas sequências são formadas por regras que são chamadas por ***Lei de Formação***, que dão origem aos termos da sequência, como é o caso do exemplo 02 mostrado acima. A sequência dos números positivos que são quadrados perfeitos. S = (1, 4, 9, 16, ...). Observe que a lei de formação da sequência é n^2, onde n é o índice do termo.

$a_1 =$ ______________________,
$a_2 =$ ______________________,
$a_3 =$ ______________________,
$a_4 =$ ______________________,
$a_n =$ ______________________

Ex 03. Escreva a sequência cuja Lei de Formação é $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$..

Ex 04. Dada a sequência (2, 5, 9, 14, 20, 27), calcule o valor de $a_1 - 2a_5^2$.

3 Progressão Aritmética (PA)

Uma PA é uma sequência que apresenta a mesma variação entre dois termos consecutivos, essa variação na PA é chamada de razão. Por exemplo:

Ex 05. Dada a sequência S = (5, 10, 15, 20, 25).

Os termos dessa sequência são: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20$ e $a_5 = 25$. Obviamente essa sequência finita possui 5 termos.

Observe que os termos da sequência variam de 5 em 5, esta variação (razão) é calculada da seguinte forma:

$a_5 - a_4 =$ ____________________

$a_4 - a_3 =$ ____________________

$a_3 - a_2 =$ ____________________

$a_2 - a_1 =$ ____________________, assim

$a_n - a_{n-1} = r$, **r** é a constante chamada de razão.

Uma PA é toda sequência de números na qual a variação entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é sempre constante. Essa constante é chamada de razão

Ex 06. Determine o valor de x de modo que $(x, 2x+1, 5x+7)$ seja uma PA.

4 A Fórmula do Termo Geral

Agora vamos determinar a fórmula do termo geral de uma PA. Dada a sequência $S = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$. Observe que

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$, mas $a_2 = a_1 + r$, logo $a_3 = (a_1 + r) + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$, mas $a_3 = a_1 + 2r$, logo $a_4 = (a_1 + 2r) + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r$, mas $a_4 = a_1 + 3r$, logo $a_5 = (a_1 + 3r) + r \rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

Generalizando, temos que a fórmula do termo geral é

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r, \ n \in \mathbb{N}}$$

Ex 07. Calcule o 17º termo da PA, cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

5 A soma dos termos - PA finita

Antes de dar início à este assunto, responda a seguinte pergunta: **É possível somar os números de 1 até 100 em menos de 1 minuto?**

Conta a história que um professor de matemática querendo deixar a sua turma em silêncio pediu que os alunos somassem todos os números de 1 até 100. Para sua surpresa um aluno chamado **Karl Friedrich Gauss** de aproximadamente 7 ou 8 anos de idade respondeu prontamente em alguns minutos que a resposta seria 5050. Karl Friedrich Gauss foi um grande matemático que viveu de 1777 a 1855. Esse conto ilustra como Gauss deduziu a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}, \ n \in \mathbb{N}}$$

Ex 08. Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5, ...).

APÊNDICE E – Avaliação Formativa

Avaliação de Sequências e PA .

Nome: ____

Turma: ____________ **data:** ____________ NOTA: ______________

______________________ **1ª Parte** ______________________

Obs.: Escreva todos os cálculos que justificam a sua resposta.

1. Marque a alternativa que corresponde à **soma** dos 4 primeiros termos da sequência cuja lei de formação é $a_p = p^2 + 1$, onde p pertencente ao conjunto dos Naturais N=$\{$1, 2, 3, ...$\}$.

   (A) 17

   (B) 20

   (C) 34

   (D) 10

   (E) 289

2. Marque a alternativa que corresponde ao décimo segundo termo da PA (3, 5, 7, ...).

   (A) 12

   (B) 25

   (C) 24

   (D) 11

   (E) 63

3. Marque a alternativa que corresponde ao valor de x, sabendo que os termos $(x+1)$, $(3x-2)$ e $(2x+4)$ forma, nesta ordem, uma PA.

   (A) 1

   (B) 2

   (C) 3

   (D) -1

   (E) -2

4. Qual a soma dos 10 primeiros termos da PA (4, 7, 10, ...)?

   (A) 1365

   (B) 175

   (C) 350

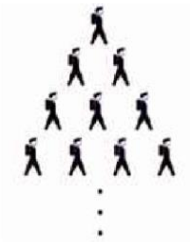
   (D) 710

   (E) 31

2ª Parte

Obs.: Escreva todos os cálculos que justificam a sua resposta.

5. O professor de matemática organizou seus 210 alunos para formar um triângulo. Colocou um aluno na 1ª fila, dois alunos na 2ª fila, três alunos na 3ª fila, e assim por diante. Determine o número de filas formadas.



Resposta: ______________________________

6. Determine a soma dos números pares positivos, menores que 101.

Resposta: ______________________________

APÊNDICE F – Questionário OBMEP

Pesquisa destinada aos alunos sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

QUESTIONÁRIO

1. Você gosta de estudar matemática?

   ( ) sim ( ) não

2. Você conhece o programa da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

3. Você já participou alguma vez da 1ª fase da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

   Se sim, quais os períodos em que você participou?

   ( ) 2013 ( ) 2014 ( ) 2015 ( ) 2016 ( ) 2017 ( ) 2018 ( ) 2019

4. Você já participou alguma vez da 2ª fase da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

   Se sim, quais os períodos em que você participou?

   ( ) 2013 ( ) 2014 ( ) 2015 ( ) 2016 ( ) 2017 ( ) 2018 ( ) 2019

5. Você conhece alguém que já participou alguma vez da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

6. Você já participou de algum programa de preparação para as provas da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

7. Atualmente, você participa de algum programa de preparação ou grupo de estudos para as provas da OBMEP?

   ( ) sim ( ) não

8. Quanto tempo, semanalmente, você acessa à internet?

   ( ) 1 vez por semana.

   ( ) 2 vezes por semana.

   ( ) 3 a 4 vezes por semana.

   ( ) todos os dias.

   ( ) não tenho acesso à internet.

9. Que tipo de recursos tecnológicos você mais utiliza?

   ( ) Celular

   ( ) Tablet

   ( ) Computador

10. Você conhece o portal da OBMEP?
( ) sim ( ) não
11. Você já utilizou o "Banco de questões"da OBMEP?
( ) sim ( ) não
12. Você se sente motivado a participar da OBMEP nos próximos anos?
( ) sim ( ) não
13. A OBMEP te motiva a buscar novos conhecimentos sobre a matemática?
( ) sim ( ) não
14. Você conhece a premiação oferecida pela OBMEP?
( ) sim ( ) não
15. Você já recebeu alguma premiação por ter participado da OBMEP?
( ) sim ( ) não
16. Qual premiação você já recebeu por ter participado da OBMEP?
( ) Medalha de ouro
( ) Medalha de prata
( ) Medalha de bronze
( ) Certificado de Menção honrosa
( ) Bolsa de Iniciação Científica Jr.
( ) Nunca participei.
17. Você gostaria de participar de um programa de preparação para a OBMEP na escola?
( ) sim ( ) não
18. Que tipo de questão você gosta de resolver?
( ) Questões diretas.
( ) Questões que necessitam interpretar o problema.
( ) Indiferente.