Anderson da Silva Melo

O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Rio de Janeiro
Abril de 2013

impa

Anderson da Silva Melo

O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Eduardo Wagner

Rio de Janeiro
Abril de 2013

À minha mãe, que nunca me deixou sozinho nas derrotas e vitórias, me mostrando que a cada queda existe um recomeço.

À Luciene, minha querida esposa, sempre me incentivando.

À Nathalia e Marie, que estiveram sempre ao meu lado nesta batalha.

AGRADECIMENTOS

AGRADECIMENTOS ACADÊMICOS:

Prof. Eduardo Wagner (orientador)
Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho

AGRADECIMENTOS ADMINISTRATIVOS:

Aos funcionários e alunos das Escolas Municipais Roberto Burle Marx e Camilo Castelo Branco.
Aos funcionários do Curso Sigma Apoio Escolar.

AGRADECIMENTOS PESSOAIS:

Michel Bernardo Martins
Fabiana Gonçalves Santos
Renata de Alcantara Cerqueira
Rafaela Figueiredo
Aos professores, monitores e colegas de Mestrado e a todos os amigos que sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS INSTITUCIONAIS:

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

“Concedei-nos Senhor, Serenidade necessária, para aceitar
as coisas que não podemos modificar, Coragem para
modificar aquelas que podemos e, Sabedoria para
distinguirmos umas das outras.”
Reihold Niebuhr

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é equiparar os resultados da aplicação de uma metodologia desenvolvida para o ensino das razões trigonométricas em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da Rede Pública Municipal do Rio de Janeiro que apresentam diferença significativa no ranking classificado pelo IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica). Selecionou-se o software de geometria dinâmica Geogebra para auxiliar na assimilação dos conceitos abordados. Seria possível a utilização de um software de geometria dinâmica como ferramenta auxiliar no processo de ensino-aprendizagem das razões trigonométricas? Os resultados de tal utilização seriam satisfatórios no desenvolvimento da abstração dos conceitos trabalhados? Seria possível traçar um paralelo de resultados, ou mesmo reduzir a distância entre duas realidades tão distintas? Para buscar respostas para essas questões, foram ministradas cinco aulas de cem minutos cada, com a aplicação de uma avaliação discursiva na última. A finalidade desta prova foi apurar o grau de entendimento dos alunos em cada etapa do aprendizado das razões trigonométricas, incluindo seu emprego em situações contextualizadas.

Palavras-Chave

Razões trigonométricas, Geogebra, ensino fundamental, escola pública, matemática, aprendizagem

Abstract

The main objective of this study is to compare the results of the application of a teaching methodology developed for the instruction of the trigonometric ratios with 9^{th} year classes of the Fundamental Education of two Brazilian public schools, located in the State of Rio de Janeiro, with an expressive inequality in the ranking classified by the IDEB (Brazilian Education Quality Index). The software of dynamic geometry, Geogebra, was chosen for assist the assimilation of the explained concepts. The application of a dynamic geometry software as an auxiliary tool in the teaching-learning process of the trigonometric ratios would be possible? The results of this utilization would be satisfactory in the development of the abstraction of the studied ideas? Would it be possible to map a comparison with the results, or to decrease the difference between the two distinct realities? For searching the answers for these questions, five lessons with one hundred minutes every one were ministered, with an application of a discursive exam in the last one. The purpose of this test is to investigate the understanding degree of the students in each stage of the trigonometric ratios learning, including its use in contextualized situations.

Keywords

Trigonometric ratios, Geogebra, fundamental education, public school, mathematics, learning

Sumário

1. Introdução[1]

Ensinar Matemática exige mais do que o domínio da matéria. É necessário, dentro de um ambiente com mínimas condições estruturais, aplicar a metodologia correta para atingir todo o corpo discente. Além disso, para ter um aprendizado satisfatório, o aluno deve dispor de um conhecimento prévio de alguns fundamentos básicos e raciocínio lógico.

Nas abstrações mais elevadas, utilizam-se recursos variados, como experiências com formas concretas, técnicas de memorização, programas interativos de computador, aulas expositivas, entre outros. Procura-se inovar, objetivando alcançar a mais ampla capacidade de assimilação dos alunos.

Os autores desta pesquisa, durante o curso de graduação na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, desenvolveram o hábito de dialogar sobre maneiras eficientes de ensinar Matemática. À época, diante da ausência de experiência profissional, se apoiavam nas aulas de Prática de Ensino e nos estágios supervisionados. As discussões ganharam corpo e, mesmo após a conclusão da graduação, tornaram-se rotineiras durante os dois anos em que cursavam o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), no IMPA. Lá, além da ampliação do conhecimento através de estudos aprofundados dos conteúdos, houve uma troca de experiências com os componentes do grupo, uma turma rica em sua diversidade e competência profissional. Soma-se a isso a experiência dos autores de seis anos de trabalho nas redes estadual e municipal de ensino do Rio de Janeiro.

Neste ambiente, surgia a ideia de elaborar uma metodologia de ensino que pudesse ser aplicada em qualquer escola da Rede Pública. No foco das discussões estava o ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo, aplicado no 9º ano do Ensino Fundamental, por ser um tema de difícil compreensão pelos alunos e que tem destacada importância devido às suas aplicações em séries mais avançadas, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior.

---

[1] Em colaboração com Michel Bernardo Martins

Ao não concordar com o ensino por meio da memorização de fórmulas e baterias de exercícios repetitivos, decidiu-se pautar a construção do saber em problemas do cotidiano, em consonância com o que determinam os Parâmetros Curriculares Nacionais. Diante de uma situação-problema, como o cálculo de distâncias inacessíveis, espera-se que o aluno possa fazer uma conjectura para, posteriormente, formalizar o conteúdo apresentado.

> A aprendizagem na área de Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade. (Parâmetros Curriculares nacionais, 1998)

Os PCNs enfatizam a importância de se ensinar matemática através da resolução de problemas. Dá-se significado à aprendizagem e evita-se a reprodução de procedimentos mecânicos e ausentes de sentido para o aluno. Quando a situação hipotética se transforma em um problema propriamente dito, o indivíduo é motivado a transformá-la e, para a Trigonometria – que exige elevado grau de abstração – torna-se necessário utilizar formas dinâmicas de apresentar o conteúdo.

Para um entendimento mais profundo e completo dos conceitos abordados nas diversas situações de variações angulares, selecionou-se o aplicativo Geogebra como instrumento auxiliar de visualização das razões trigonométricas. Desde a graduação já havia um desejo de utilizar um *software* de geometria dinâmica, já que ambos os autores participaram de um curso do programa Cabri Géomètre, ministrado na PUC-RJ.

Por ser um *software* de versão de demonstração com muitas limitações de conteúdo, a implementação do Cabri requereria alto investimento da unidade escolar na compra da licença, já que a instalação no computador pessoal do professor para exibição em projetor seria inviável.

A intenção de utilizar o Cabri foi abandonada e substituída por outra ferramenta – o Geogebra - conhecida nas aulas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática -, nas quais o grupo aprendeu a dominar suas funcionalidades para elaboração dos trabalhos propostos. A partir daí nasceram novas ideias, não só para a Trigonometria como também para as mais diversas áreas da Matemática. E por ser um *software* gratuito que dispensa até mesmo a instalação física, tornou-se a ferramenta ideal para a aplicação da pesquisa.

A experiência foi aplicada nas duas escolas municipais onde os autores lecionam. Com o intuito de aferir os resultados da metodologia desenvolvida, as aulas foram ministradas, de maneira conjunta, em duas realidades escolares distintas, buscando alcançar resultados os mais próximos quanto possível. Obviamente, diversos questionamentos foram suscitados quando da aplicação da experiência. Por isso, procurou-se responder a todas as indagações que ajudaram a traçar as metas desse trabalho, cujo objetivo é dinamizar as aulas de matemática através de estratégias baseadas no uso da tecnologia e da proposição de problemas contextualizados.

2. Referencial Teórico[2]

2.1. História da Trigonometria

A trigonometria surgiu por volta do século IV ou V a.C., com os babilônios, egípcios e os gregos. Sua origem é incerta, porém, sabe-se que nasceu para oferecer respostas às questões geradas pela Astronomia, Agrimensura e Navegações. O principal objetivo era o estudo da trajetória dos corpos celestes.

Hiparco de Nicéia, em grego Hipparkhos (190 - 126 a. C.), é tido como “o pai da trigonometria”. Como o mais importante astrônomo da antiguidade, desenvolveu a maior parte de seus estudos na Grécia. Dentre eles estão a elaboração de um catálogo de estrelas, a medida da duração do ano com grande exatidão e a previsão de eclipses. “A trigonometria de Hiparco surge como uma "tabela de cordas" em doze livros, obra que se perdeu com o tempo. Aí teria sido usado pela primeira vez o círculo de 360 graus.” (HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA).

Ptolomeu (83 – 161 d.C) deu continuidade ao trabalho de Hiparco ampliando seus estudos. Sua obra-prima é a *Syntaxis Matematica* - chamado posteriormente de Almagesto pelos árabes - um compêndio de treze livros, cujo primeiro traz uma tabela de cordas dos ângulos de 0 a 180 graus, de meio em meio grau.

> Durante seis séculos, O Almajesto, representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Porém no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os Hindus. (UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA)

O comércio romano com o sul da Índia possibilitou a disseminação de conhecimentos matemáticos babilônios e gregos. Na Índia, se originou a mais antiga tábua de senos, cujos inventores são

[2] Em colaboração com Michel Bernardo Martins

desconhecidos. Por volta do ano 500, Aryabhata elaborou tabelas usando jiva no lugar de seno.

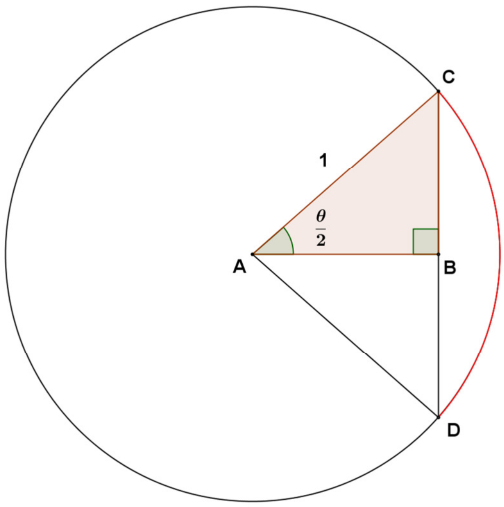
> Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de jiva - de origem hindu - o conflito chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe **al-Battani** adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno. (UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA)

Outros conceitos trigonométricos foram desenvolvidos e aprofundados ao longo da história, passando por Bhaskara e, posteriormente, por europeus como Nicolau Copérnico, Galileo Galilei, Johann Bernoulli e Leonhard Euler.

2.2. Origem dos nomes seno, cosseno e tangente

Os conceitos de seno e cosseno são originários dos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, provavelmente, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias inacessíveis.

> O nome seno vem do latim sinus que significa seio, curva, volta, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria jiba, em vez de jaib. Jiba significa a corda de um arco. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus. (LIMA, Elon Lages, 1991.)



$$\text{jiba} = \text{CD} = 2 \cdot \text{BC}$$

$$\text{Como sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{\text{BC}}{1}$$

$$\text{Então,} \qquad \text{jiba} = 2 \cdot \text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

Figura 1

A palavra cosseno surgiu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo.

$$\cos\alpha = \text{sen}\,(90 - \alpha)$$

> A tangente veio de um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Era usada para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio solar. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583. (USP – ORIGEM DOS NOMES SENO, COSSENO E TANGENTE)

2.3. Áreas que utilizam a trigonometria

Historicamente desenvolvida para Astronomia, a Trigonometria é utilizada atualmente em diversas áreas de conhecimento. E é importante apresentar ao aluno o universo de possibilidades de aplicação desse conceito para que se possa compreender sua utilidade, aliando a abstração à aplicação prática.

a. Matemática

A Trigonometria é aplicada em toda a Matemática e, uma vez que a esta é utilizada em todas as ciências naturais e sociais, não é difícil constatar sua importância. Cálculo, Álgebra Linear e Estatística são alguns exemplos.

b. Engenharia e Física

A Engenharia faz uso da trigonometria em sua totalidade, desde as Engenharias Civil, Cartográfica, Naval, Eletrônica até a Aeronáutica, especialmente nas construções, tais como prédios, pontes, aviões e etc. Óptica, Estática e Físico-Química são os primeiros ramos da Física a utilizar a Trigonometria.

c. Astronomia, Ciências Náuticas e Cartografia

A Astronomia se beneficia da Trigonometria esférica para o estudo de distâncias e posições dos astros. A técnica da triangulação é usada para estimar a distância das estrelas próximas. Já as navegações tiveram um grande impulso com a utilização da Trigonometria, com a ajuda do uso de instrumentos de medição, como o astrolábio.

Na Cartografia, auxiliava nos cálculos envolvendo latitude e longitude de pontos geográficos em seus mapas.

d. Outras Ciências

Além das ciências precedentes, há aplicações da Trigonometria e das funções trigonométricas em campos diversos: na Geografia, para estimar distâncias entre divisas e em sistemas de navegação por satélite; nas funções periódicas, as quais descrevem as ondas sonoras e luminosas, são fundamentais as funções seno e cosseno; também se aplica à teoria musical, acústica, óptica, análise de mercado, eletrônica, teoria da probabilidade, estatística, biologia, medicina (exames de imagem, como equipamentos de Tomografia Computadorizada e Ultrassom), farmácia, química, teoria dos números (e, portanto, criptologia), sismologia, meteorologia, oceanografia, muitas das ciências físicas, estudo do solo (inspeção e Geodésia), arquitetura, fonética, economia, gráficos computadorizados, cristalografia, desenvolvimento de jogos, compactação de arquivos de músicas em formato .mp3 e fotos em formato .jpg.

2.4. Trigonometria no Triângulo Retângulo

A utilização das razões trigonométricas para calcular distâncias inacessíveis através do método de triangulação e os cálculos necessários para descobrir os ângulos notáveis são temas de relevante importância e pouco explorados nos livros didáticos. Isso cria uma demanda por novos métodos instrucionais que facilitem a compreensão do conteúdo e tornem o assunto mais evidente para o aluno.

2.4.1. Cálculo de comprimentos por triangulação

O método de triângulação é baseado na semelhança de triângulos. Tales[3] usou varetas para calcular a altura de pirâmides, que poderiam ser de qualquer tamanho, uma vez que a razão entre o comprimento da vareta e a medida de sua respectiva sombra sempre possui o mesmo valor como resultado. Da mesma forma, a razão entre a altura da pirâmide e o segmento que liga seu centro à extremidade de sua sombra possui o mesmo valor. As variações das medidas das sombras são decorrentes, apenas, da inclinação dos raios solares.

[3] Tales Mileto foi o primeiro matemático grego, nascido por volta do ano 640 a.C. e falecido em 550 a.C.

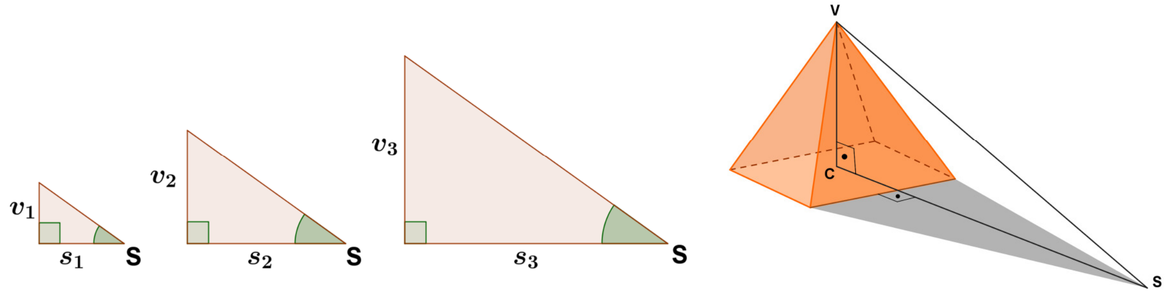


Figura 2

Portanto, não é necessária a construção de um triângulo retângulo semelhante àquele que se pretende calcular algum comprimento. É suficiente saber a razão entre os lados correspondentes de qualquer triângulo semelhante.

Como a inclinação dos raios solares é a mesma para vareta e pirâmide, tem-se que os ângulos em destaque na Figura 2 são congruentes. Logo, as razões dependem apenas dos ângulos, valendo a seguinte proporção:

$$\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2} = \frac{v_3}{s_3} = \cdots$$

Essa proporção fornece uma razão **k** que também é a mesma entre a altura VC da pirâmide e o comprimento CS, perpendicular a uma das arestas da base da pirâmide e calculado no mesmo momento. Como os ângulos destacados nos três triângulos são congruentes, fazendo translações podem-se coincidir os vértices, de modo a obter a figura precedente. Tal figura pode representar várias homotetias de foco em **S** e, da mesma forma, há uma proporcionalidade entre os segmentos verticais, que representam as varetas, e os horizontais, que representam as sombras correspondentes às varetas. Para cada inclinação dos raios solares, as mesmas varetas produzirão sombras de tamanhos distintos. Teremos, então, para um novo ângulo, uma nova razão:

$$\frac{v_1}{s'} = \frac{v_2}{s''} = \frac{v_3}{s'''} = \cdots = \mathrm{k}$$

Os problemas para determinação de distâncias inacessíveis costumavam ser resolvidos indiretamente, através da ideia de triangulação ou com a ajuda das razões trigonométricas, fazendo a medição de um ângulo e de distâncias acessíveis.

2.4.2. Ângulos Notáveis

Utilizando um triângulo equilátero e um quadrado podemos obter os valores de senos, cossenos e tangentes para os ângulos de 30°, 45° e 60°.

Na figura a seguir, observa-se um triângulo retângulo AHC obtido da divisão do triângulo equilátero ABC por sua altura AH. Aplicando o teorema de pitágoras, temos: $x^2 = y^2 + h^2$.

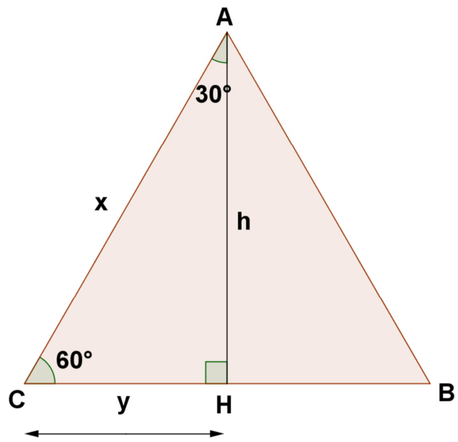


Figura 3

Como $y = \frac{x}{2}$, então $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$. Daí tem-se que: $h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

E, de acordo com a figura 3, tem-se:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{y} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Como os ângulos 30° e 60° são complementares, resulta:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{sen}30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para obter os valores do ângulo de 45°, considera-se o triângulo retângulo ADC obtido da divisão do quadrado ABCD por sua diagonal AC. De acordo com a figura, temos:

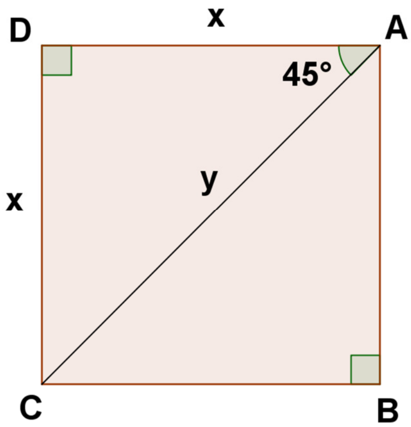


Figura 4

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$y^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = x\sqrt{2}$$

Logo:

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{x}{x} = 1$$

Os resultados obtidos podem ser organizados na seguinte tabela:

Tabela 1

	α = 30°	α = 45°	α = 60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. Pesquisa[4]

A presente pesquisa propõe um método diferenciado para ensinar a trigonometria por meio da resolução de problemas com o auxílio do *software* de geometria dinâmica Geogebra. Diante da dificuldade de se transmitir os conceitos de trigonometria, sugerem-se algumas atividades específicas para que os alunos construam seu próprio conhecimento, visando a não mecanização da aprendizagem.

[4] Em colaboração com Michel Bernardo Martins, exceto a Análise Individual

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na solução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível poderão gerar gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 1978).

A experiência foi aplicada nas duas escolas do município do Rio de Janeiro em que os autores desta pesquisa lecionam. A mesma metodologia de ensino foi utilizada, em conjunto, em ambas as escolas, assim como os mesmos exercícios e a mesma avaliação final. Traçou-se como propósito principal a obtenção de um paralelo de resultados entre as duas realidades escolares.

3.1. Clientela

A experiência foi aplicada em três turmas de 9° ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal do Rio de Janeiro. Duas delas foram as turmas 1901 e 1902 da E.M. Roberto Burle Marx - primeira colocada no ranking das escolas públicas do município do Rio de Janeiro no último IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) em 2011, com nota 6,6 -, localizada no bairro de Jacarepaguá, da qual Anderson Melo é professor. As turmas possuem em sua totalidade 60 alunos com idades que variam entre 14 e 15 anos. Segundo estimativas da escola, os alunos são oriundos de bairros e comunidades próximas.

A terceira turma é a 1902, da E. M. Camilo Castelo Branco, na qual o professor Michel Martins leciona. A escola localiza-se no bairro Jardim Botânico e possui apenas uma turma de 9º ano, que conta com 34 alunos de faixa etária semelhante às das primeiras. Cabe ressaltar que, no decorrer do período de três semanas de aplicação da experiência, seis novos alunos ingressaram na turma. Uns recém-matriculados, e outros transferidos do turno da tarde. Com nota 4,2 na última avaliação do IDEB, ficou com classificação inferior à recomendada pelo MEC como escola de qualidade.

Segundo estimativas da escola, aproximadamente 80% dos alunos são oriundos da comunidade da Rocinha; os demais, da região do Horto, próxima à escola.

A figura a seguir aponta as notas de Matemática dessas escolas na Prova Rio (avaliação externa aplicada aos alunos do 3º e 7º anos) nos anos de 2011 e 2012 e também a média da Rede Municipal. Estes dados foram coletados do material fornecido pela Secretaria Municipal de Educação no Seminário de Divulgação dos Resultados da Prova Rio – 2011 e 2012, realizado no dia 02 de abril de 2013, para o qual o professor Michel foi convidado.

Os alunos das turmas participantes dessa experiência, hoje cursando o 9º ano, são os mesmos que em 2011 e 2012 cursavam os 7º e 8º anos, respectivamente. Neste gráfico, pode-se observar que a E. M. Camilo Castelo Branco apresentou notas similares à média da Rede, bem como o destaque da E. M. Roberto Burle Marx, com notas muito superiores.

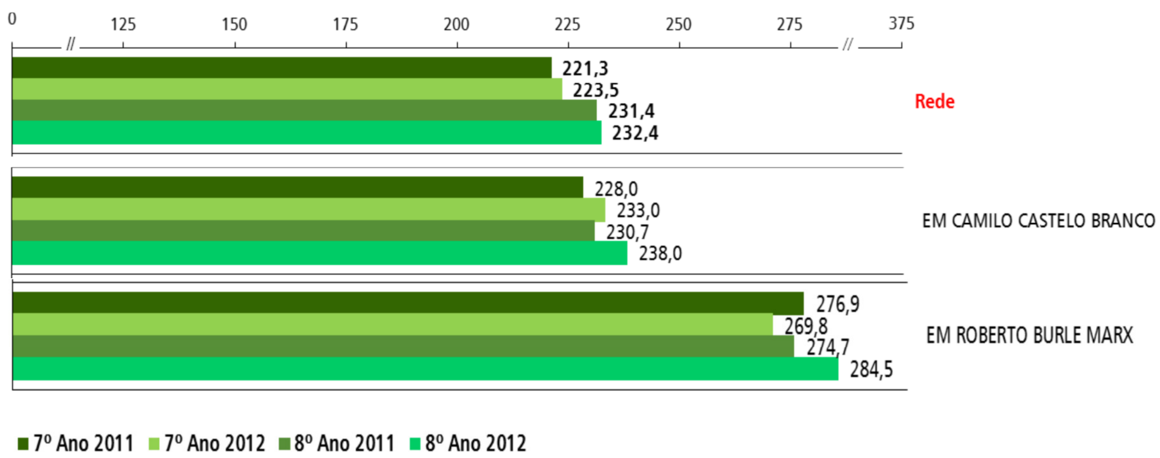


Figura 5

3.2. Desenvolvimento da experiência

Foram ministradas cinco aulas expositivas e práticas, com duração de cem minutos cada. Posteriormente, foi aplicada uma avaliação formativa. Na Escola Municipal Roberto Burle Marx, as aulas foram ministradas nas segundas e quartas-feiras, enquanto na Escola Municipal

Camilo Castelo Branco, nas terças e quintas-feiras, respeitando-se os horários habituais das aulas de Matemática.

3.2.1. Aula 1

A aula inicial objetivou contextualizar a aplicação das razões trigonométricas em situações cotidianas e abstratas vivenciadas pelos alunos. A fim de despertar o interesse do grupo pelo assunto, foi abordada a história da trigonometria e citados exemplos de situações reais, áreas de estudo e profissões que se utilizam dos conceitos explorados na aula.

3.2.1.1. Aprendendo as Razões Trigonométricas com o Geogebra

Propôs-se um exemplo simples e do interesse dos alunos. Através dele reforçou-se a ideia do cálculo por triangulação e utilizou-se a teoria da semelhança de triângulos para, posteriormente, ser resolvido com as razões trigonométricas.

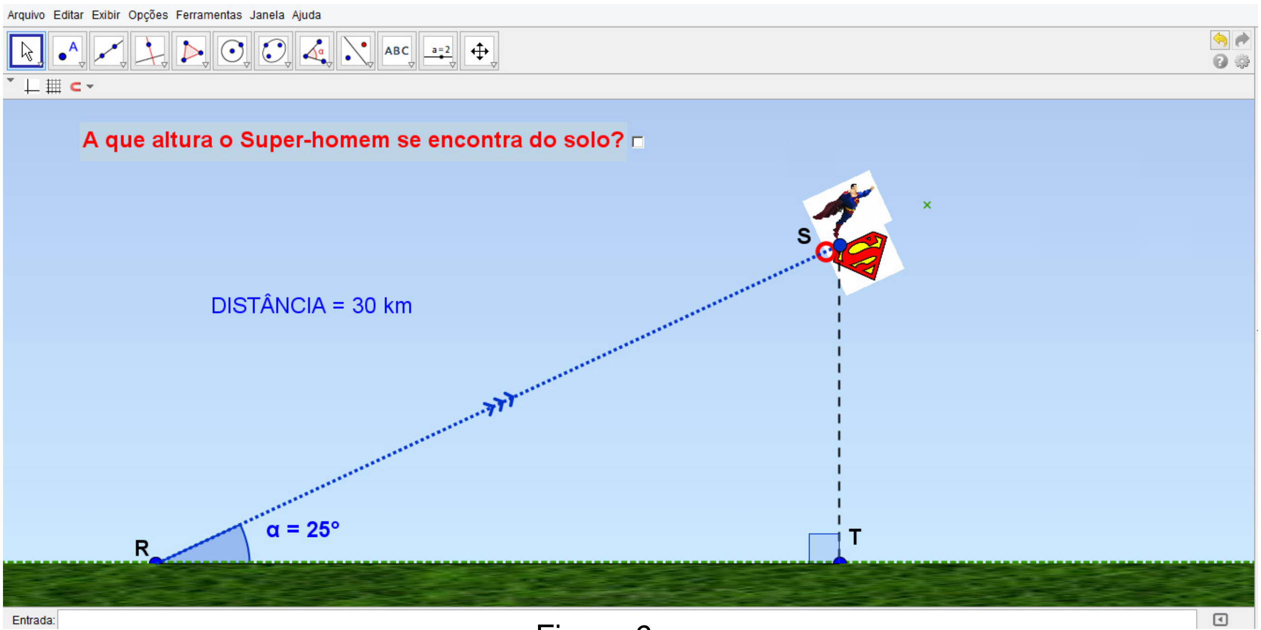


Figura 6

Em seguida, usaram-se dez triângulos semelhantes ao ΔRST com medidas quaisquer, divididos em cinco folhas diferentes contendo dois dos triângulos cada, com a finalidade de descobrir o valor da razão ST/RS do problema proposto.

A turma foi distribuída em duplas e cada uma recebeu uma folha de papel contendo dois triângulos semelhantes ao da Figura 6. A fim de garantir que toda a turma realizasse a atividade, foram fornecidas régua e calculadora. Pediu-se, então, que cada grupo fizesse as medições dos lados e calculasse as razões propostas na atividade com a calculadora. Expôs-se o método de aproximação das casas decimais para a turma, com a própria calculadora do *Windows,* reproduzida por meio do projetor de imagens para, posteriormente, compará-las com os cálculos efetuados pelo restante da turma.

Foi esclarecido aos alunos que, devido à falta de precisão da régua e às aproximações feitas nas divisões, os resultados tendem a ficar ligeiramente diferentes. Portanto, propôs-se que cada dupla calculasse a média aritmética de suas razões. Ao fim desta etapa, cada dupla expôs o resultado da média de cada razão e o professor os computou na planilha do *Excel* reproduzida no projetor de imagens. Desta maneira, toda a turma pode observar os valores obtidos por cada dupla, além da média final calculada. Este valor foi transcrito para a folha de cada dupla, de forma que estas pudessem fazer as devidas comparações.

Ao fim do trabalho prático realizado pelos alunos, apresentou-se no Geogebra o arquivo da Figura 7. O arquivo produzido nesse *software* possibilita a verificação imediata e prática de que a razão procurada independe das medidas dos lados dos triângulos. Posteriormente, foram criadas situações angulares distintas de modo a observar melhor este fato.

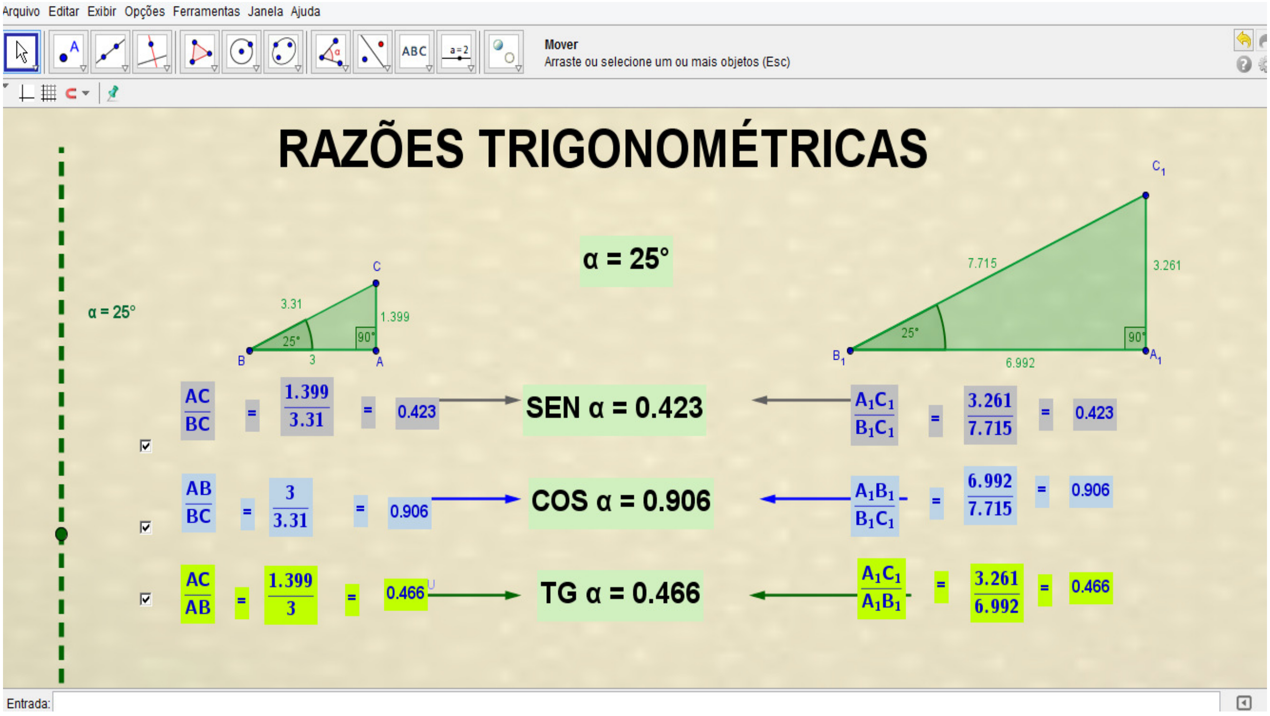


Figura 7

O verso da folha de atividades continha a imagem do Geogebra da Figura 6 e, logo abaixo, a formalização das razões com suas simbologias. Essa disposição trazia o propósito de retomar o problema inicial para, finalmente, solucioná-lo com o conhecimento recentemente adquirido.

Concluiu-se, portanto, que o quociente encontrado será sempre o mesmo em qualquer triângulo retângulo que possua um ângulo de 25°, não importando os comprimentos dos seus lados.

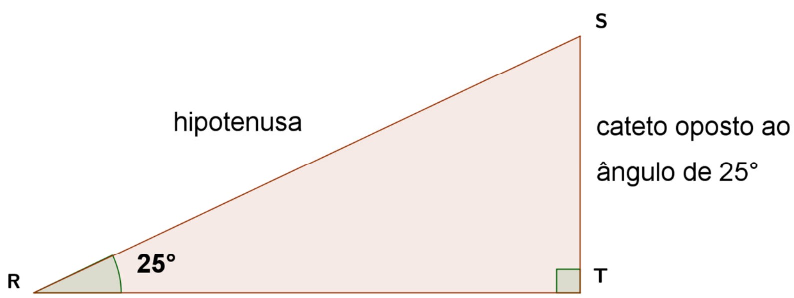


Figura 8

Conclusão:

$$\frac{\text{ST}}{\text{RS}} = \frac{\text{ST}}{30} \approx 0{,}42$$

Logo, $ST \approx 0{,}42 \cdot 30 = 12{,}6\ \text{km}$

Portanto, a altura do Super-homem em relação ao solo é de 12 km e 600 m.

3.2.1.2. Formalizando o Aprendizado

A partir da experiência, o aluno é capaz de compreender que toda razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, em qualquer triângulo retângulo com ângulos iguais, é a mesma. Entendido o conceito, iniciou-se a introdução da simbologia para completar a construção do conhecimento, mencionando que os matemáticos denominaram essa razão de **seno**. Como o ângulo era o de 25°, trabalhou-se com o seno de 25°, cuja notação se dá por *sen 25°* ou, simplesmente, seno de 25°. As outras razões em questão foram relacionadas aos nomes **cosseno** e **tangente**, que somadas às suas razões inversas são chamadas de razões trigonométricas no triângulo retângulo, como citado no referencial teórico.

A seguir apresenta-se uma amostra do ensino direto e mecanizado, comumente adotado em muitos estabelecimentos de ensino. Dessa maneira, é ocultado o método de triangulação e a resolução de problemas contextualizados, e priorizam-se somente conceitos e massificação de exercícios repetitivos, em detrimento da busca da construção do pensamento.

$$\text{Tangente de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Seno de } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cosseno de } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

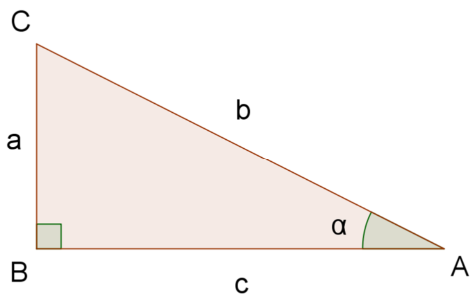


Figura 9

3.2.1.3. Análise individual dos resultados

a. E.M. Roberto Burle Marx

Sou Professor regente da E. M. Roberto Burle Marx desde 2009, a qual é referencia na rede municipal do Rio de Janeiro, conhecida por ser uma escola organizada, e de excelentes resultados nas avaliações do IDEB e Prova Rio. Possuí também um perfeito ambiente escolar, onde os alunos são disciplinados e interessados.

Todas as aulas desse projeto, na referida escola, foram ministradas por mim, com o auxílio do Prof. Michel. E, em virtude da importância para nós, senti total contribuição dos alunos para que tudo transcorresse da melhor maneira possível.

Iniciamos tal planejamento, passando por uma breve exposição teórica sobre o que a trigonometria representa, sua importância e aplicação para as mais diversas áreas de conhecimento. Em seguida, foi exposto através do projetor de imagens o problema inicial, reforçando a ideia do cálculo por triangulação.

Foi entregue aos alunos o material para serem feitas as medições dos lados de triângulos semelhantes ao do Problema do Super-Homem e, posteriormente, o cálculo das razões dos lados relacionados ao ângulo de 25°.

Logo percebemos que alguns alunos sentiam dificuldade com o manuseio da régua; eles nunca a haviam utilizado para medir, mas apenas para traçar retas. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, não existe a disciplina de Desenho Geométrico e muitos acabam passando toda a vida escolar sem manusear alguns instrumentos importantes da matemática, como transferidor, régua, esquadros e compasso. Alguns alunos ao medir o lado do triângulo, confundiam e marcavam, por exemplo, 13 cm, quando o certo era 10,3 cm. Outro erro detectado foi que a grande maioria não sabia se começava a medição no 0 ou 1.

Também, ao fazerem as razões, lhes foi pedido que arredondassem os valores encontrados para três casas decimais, e muitos não lembravam tal procedimento. Fui ao quadro e expliquei a melhor forma de aproximação.

Ao compararem os resultados entre si, os alunos demonstravam preocupação, pois os valores de alguns estavam diferentes, mas explicamos que tal fato era normal, uma vez que a medição dos lados com a régua não era tão precisa, em alguns casos a medição necessitaria de uma segunda casa decimal, como por exemplo 8,25, o que ocasionou a dúvida se o aluno colocaria 8,2 ou 8,3. Foi-lhes dito que ficaria a cargo deles tal escolha e, em seguida, com as médias aritméticas, pudemos encontrar uma melhor aproximação, como visto na tabela abaixo:

Tabela 2

	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4	Dupla 5	Dupla 6	Dupla 7	Dupla 8	Dupla 9	Dupla 10	Dupla 11	Dupla 12	Dupla 13	Dupla 14	Média Turma
$\frac{AC}{BC}$	0,423	0,426	0,418	0,423	0,420	0,424	0,444	0,425	0,420	0,418	0,446	0,420	0,423	0,418	0,425
$\frac{AB}{BC}$	0,899	0,903	0,911	0,908	0,903	0,905	0,894	0,907	0,903	0,905	0,911	0,903	0,908	0,903	0,905
$\frac{AC}{AB}$	0,471	0,471	0,459	0,466	0,465	0,469	0,469	0,472	0,465	0,462	0,466	0,465	0,466	0,463	0,466

Ao término da atividade, exibimos no quadro, através do projetor, o arquivo do Geogebra (Fig.02) e começamos a variar o tamanho dos triângulos semelhantes ao do problema, mostrando para os alunos que as razões permaneciam constantes independente dos lados.

Quando voltamos para resolver com o conceito adquirido, nos surpreendemos com os alunos tentando resolver pelo teorema de Pitágoras, e ainda, usando 25° como um dos catetos. Voltei ao quadro e escrevi a equação ditada por eles: $30^2 = x^2 + 25^2$. Tal fato mostra a confusão entre ângulos e lados que alguns fazem. Então corrigimos, e mostramos que não estávamos trabalhando com a medida de três lados, mas com dois lados e um ângulo, daí começamos a formalizar o conceito e simbologia do seno.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

A E. M. Camilo Castelo Branco é onde o Professor Michel leciona; ao chegar lá, fui apresentado a direção, seguindo para a sala de aula, onde me deparei com uma realidade diferente do meu dia a dia. A sala de aula é arrumada de modo que as carteiras são dispostas em pares, possibilitando que o aluno fique com conversas em momentos inoportunos.

A primeira impressão que tive foi a de que os alunos, mesmo com a aula repleta de atividades práticas, não mostraram muito entusiasmo e cooperação, e muitos que não estavam acostumados a fugir de sua rotina diária, não gostaram de ser exigidos. Com o passar dos minutos e de uma boa conversa do Professor Michel, os mesmos se pré-dispuseram a ajudar e foram se interessando pelo assunto.

A turma não estava com seu efetivo de alunos completo, e a maioria foi chegando no decorrer da aula, atrapalhando a sua continuidade.

Como as metodologias adotadas foram iguais nas duas escolas, demos prosseguimento exibindo o mesmo problema inicial, e foi perguntado se alguém conseguiria resolvê-lo com as informações ali contidas. Alguns alunos começaram a propor que o Professor Michel usasse o teorema de Pitágoras, usando, novamente, o ângulo de 25° como um dos catetos. Dessa vez o erro não nos pegou de surpresa, pois o mesmo havia ocorrido nas duas turmas da E. M. Roberto Burle Marx.

Após ser mostrado que não poderíamos usar o ângulo como um dos catetos, demos início às medições dos lados dos triângulos, constatando a mesma falta de habilidade com a régua e os mesmos erros de medição e manuseio. Observamos também que os alunos tinham pouca prática com calculadoras, mas com as novas ferramentas o entusiasmo melhorou.

Sentimos muita insegurança por parte dos alunos em tudo o que faziam, a cada lado medido, cada cálculo feito, procuravam ver se tinham acertado, mostrando-se muito dependentes da sinalização do acerto por nossa parte. Após finalizarem a atividade, construímos a tabela a seguir:

Tabela 3

	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4	Dupla 5	Dupla 6	Dupla 7	Dupla 8	Dupla 9	Dupla 10	Dupla 11	Dupla 12	Dupla 13	Dupla 14	Média Turma
$\frac{AC}{BC}$	0,421	0,426	0,43	0,44	0,443	0,421	0,424	0,422	0,421	0,439	0,418	0,422	0,423	0,450	0,429
$\frac{AB}{BC}$	0,909	0,923	0,903	0,916	0,905	0,908	0,913	0,909	0,906	0,902	0,893	0,916	0,917	0,913	0,910
$\frac{AC}{AB}$	0,464	0,462	0,475	0,456	0,438	0,464	0,464	0,463	0,465	0,486	0,468	0,460	0,462	0,471	0,464

Fizemos com o arquivo da Fig.02 diversos triângulos semelhantes ao do Problema, e mostramos que as razões continuavam constantes. Os alunos que acertaram o valor mais aproximado do correto ficaram entusiasmados, mas mostramos aos demais que haviam acertado e que só foram menos felizes nas aproximações dos lados, para melhorar isso, precisaríamos de uma régua mais precisa.

Finalmente, voltamos ao problema do Super-Homem e resolvemos, como citado anteriormente, formalizando então o conceito e simbologia do seno de um ângulo.

3.2.2. Aula 2

3.2.2.1. Construção Prática da Tabela Trigonométrica

A segunda aula objetivou a construção, pelos alunos, de uma tabela trigonométrica.

Inicialmente, apresentou-se o método para calcular os arcos notáveis de 30°, 45° e 60° conforme citado na fundamentação teórica. Na primeira metade da aula, cada aluno recebeu uma folha contendo parcialmente as demonstrações das razões dos arcos notáveis. Foi reproduzido o mesmo material no projetor de imagens, para que os alunos acompanhassem, participassem e anotassem todos os passos das demonstrações, para que, no final, pudéssemos ensiná-los a completar a tabela das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°.

Na segunda metade da aula, pediu-se aos alunos que construíssem uma tabela contendo as razões trigonométricas dos ângulos de 80°, 70°, 50°, 40°, 20° e 10°. A escolha destes ângulos deve-se à facilidade de, em uma mesma experiência concreta, obtê-los através de três triângulos retângulos sobrepostos e apoiados no mesmo ângulo reto. A Figura 10 mostra os triângulos separados, visualizados no Geogebra. De maneira prática e dinâmica, movimentaram-se os triângulos para que os alunos se acostumassem com suas imagens e, posteriormente, retornou-se à posição encontrada na folha de atividades.

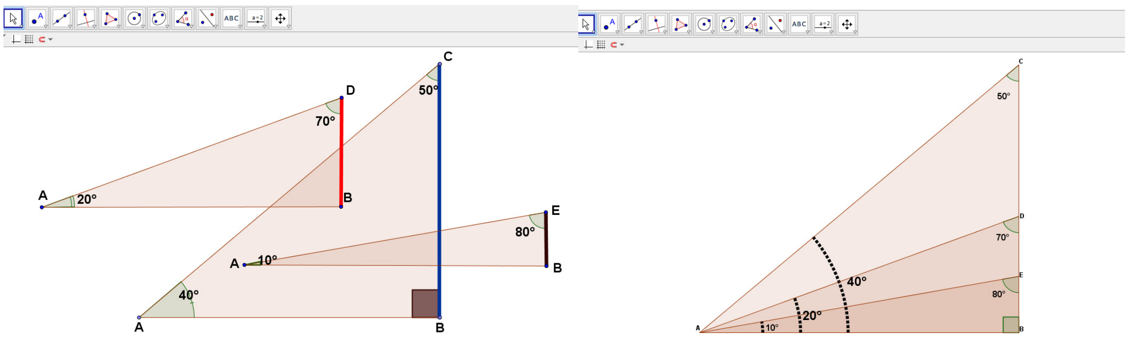


Figura 10

As turmas foram divididas em 3 grupos, subdividindo-os em dupla. Cada grupo foi responsável pela medição e cálculo de uma das razões trigonométricas: seno, cosseno ou tangente. Para a realização da atividade, cada dupla utilizou uma régua e uma calculadora simples.

Após a tarefa, cada dupla revelou seus resultados e o professor calculou, com a ajuda do Excel - cuja imagem estava projetada no quadro -, a média aritmética dos valores para obtenção de uma melhor aproximação com três casas decimais na tabela.

No verso da folha de atividades consta a tabela a seguir, completa com os valores reais e aproximados com três casas decimais das razões trigonométricas. Discutiu-se com a turma os resultados calculados na atividade e os valores precisos obtidos no Geogebra.

Tabela 4

ÂNGULOS	SENO	COSSENO	TANGENTE
10°	0,174	0,985	0,176
20°	0,342	0,940	0,364
30°	$\frac{1}{2}$ = 0,500	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 0,577
40°	0,643	0,766	0,839
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707	1
50°	0,766	0,643	1,192
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866	$\frac{1}{2}$ = 0,500	$\sqrt{3}$ = 1,732
70°	0,940	0,342	2,747
80°	0,985	0,174	5,671

Após o debate, regressou-se ao Geogebra, para o arquivo das razões trigonométricas da Figura 7. Variou-se de forma prática e rápida o ângulo, permitindo que os alunos comprovassem os valores das razões que foram calculados. Foi sugestionado aos alunos que não havia a necessidade de construir um triângulo semelhante para obter-se o valor das razões, pois será utilizada nas aulas seguintes a tábua das razões trigonométricas.

Próximo do fim da aula mostrou-se aos alunos a relação entre ângulos complementares e seus respectivos valores de seno e cosseno, bem como a tangente, que pode ser calculada pela razão entre o seno e o cosseno.

3.2.2.2. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Demos início à aula perguntando qual era o valor do seno, cosseno e da tangente de 25° e muitos responderam corretamente os valores calculados na aula anterior, mas precisei confortar àqueles que não responderam, explicando que esses valores não precisavam ser memorizados, pois construiríamos uma tabela.

A seguir, demonstrando o valor dos arcos notáveis de 30°, 45° e 60°, por intermédio da diagonal do quadrado e altura do triângulo equilátero, sentimos uma dificuldade por parte deles no que se refere às operações literais, mas tudo saiu como esperado. Ali constatamos que eles já estavam identificando com clareza a hipotenusa e os catetos oposto e adjacente, referentes a um ângulo agudo no triângulo retângulo. Após demonstrados os valores, alguns alunos perceberam que o valor do seno de 30° era o mesmo que o do cosseno de 60°. Daí fiz uma observação sobre o seno, cosseno e tangente de ângulos complementares e pedi que eles criassem uma fórmula para mostrar o que haviam descoberto. Alguns alunos conseguiram conjecturar a relação $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90 - \alpha)$, mas nenhum formalizou que as tangentes desses são valores inversos.

Prosseguindo a aula, foi entregue uma folha onde os alunos, novamente em duplas, mediriam e calculariam as razões de triângulos, já construídos, um interno ao outro, a fim de que eles pudessem praticar a visualização e o conhecimento adquirido na primeira atividade. Visto que a dificuldade na parte de visualização foi grande, o que já esperávamos, usamos o projetor para mostrar esses triângulos separados um a um, facilitando, assim, o entendimento de quais lados deveriam medir. Neste momento, o Professor Michel e eu circulamos pela sala a fim de ajudar individualmente alguns alunos que ainda confundiam os lados a serem medidos.

Novamente fizemos a média aritmética com auxílio do Excel, e conforme a primeira aula, construímos uma tabela com os senos, cossenos e tangentes dos ângulos 10°, 20°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 70° e 80°, que posteriormente nos seria útil nos exercícios. Com a tabela na mão, eles puderam, novamente, notar que se tratavam dois a dois de ângulos complementares, e consequentemente dos referidos valores do seno e cosseno iguais.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Na referida escola, percebemos que a turma estava mais cheia, e trocamos, inicialmente, alguns alunos que não estavam prestando atenção na primeira aula, por motivo de conversas indevidas, de lugar. Estes reclamaram, e mais uma vez pude notar o quanto é difícil fazer com que o aluno perceba que ele está na escola para aprender. Além de ter que nos preocupar com a metodologia, conteúdo e possíveis dúvidas, precisávamos vencer o descaso de muitos alunos desta turma.

Sem mais atrasos, começamos a aula e pudemos constatar que os alunos já haviam esquecido a demonstração da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, obrigando o Professor Michel a explicar lentamente o processo de demonstração dos arcos notáveis.

Como nas turmas da E. M. Roberto Burle Marx, os alunos tiveram, também, dificuldade na parte das operações com valores literais.

Era nítida a falta de conceitos básicos da matemática como divisão e multiplicação de frações, m.m.c., números decimais entre outros. Inclusive o Professor Michel, chamou a atenção para os valores do seno, cosseno e tangente de ângulos complementares. Também houve muita dificuldade na visualização dos triângulos, impossibilitando saber qual lado medir, assim como calcular as razões trigonométricas. Mesmo com o arquivo da Fig.03 no quadro, ficamos o tempo todo com eles, ajudando e orientando, e mais uma vez, se mostraram muito inseguros e desacostumados a fazerem sozinhos quaisquer atividades propostas.

3.2.3. Aula 3

Na terceira aula, o principal objetivo era aplicar os conhecimentos adquiridos em duas situações-problema distintas visualizadas no Geogebra por meio do projetor de imagens. Nas duas situações foram exploradas cada uma das razões trigonométricas; os valores das razões utilizadas foram consultados na tábua construída na Aula 2.

3.2.3.1. O problema da caixa d'água

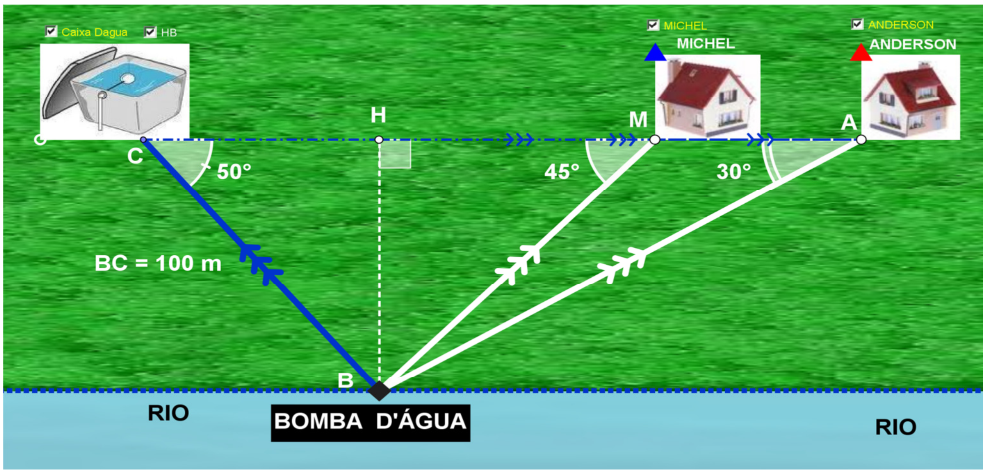


Figura 11

Essa situação contextualizada foi apresentada da seguinte maneira: a água utilizada nas casas M e A é colhida do rio e bombeada para uma caixa d'água a 100 m de distância do ponto de captação. Portanto, para chegar até A, a água percorre, nesta ordem, os caminhos BC e CA.

Pediu-se aos alunos que calculassem as distâncias CM (item a) e AB (item b), que representa um encanamento feito diretamente da bomba d'água B até a casa A.

Inicialmente, foi solicitado aos alunos que observassem a existência de triângulos retângulos, uma vez que a altura BH encontrava-se oculta. Em seguida, para o cálculo do item a), exibiu-se a altura BH do triângulo BCM, mostrando que este subdivide-se em dois triângulos retângulos: BHC e BHM. Reforçou-se, então, que o segmento CM desejado deve sua origem à soma dos catetos CH e HM.

Posteriormente, analisou-se a necessidade de calcular a altura BH, que representa um lado comum dos triângulos BHC e BHM, e o uso das razões trigonométricas corretas. Para o cálculo de BH, usou-se sen 50°. No entanto, para o cálculo de CH utilizou-se cos 50° (dada a facilidade do cálculo com 100 m) e, para HM, tg 45°.

Para o cálculo do item b, ocultou-se, clicando nas respectivas caixas localizadas acima de cada objeto, a caixa d'água e os segmentos BC e CH, bem como a casa M e o segmento BM. Por conseguinte, o aluno visualizou o problema conforme a figura a seguir.

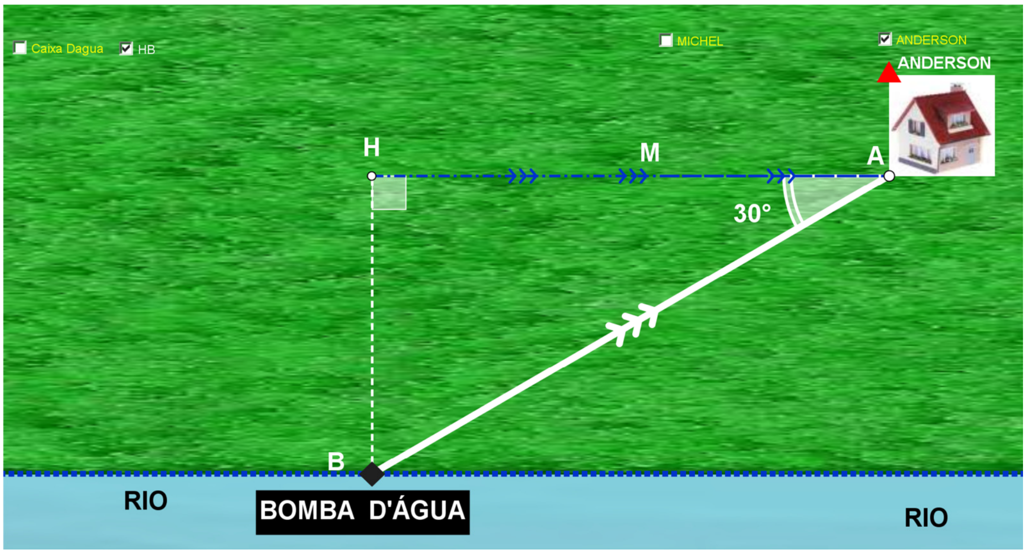


Figura 12

Finalmente, foi utilizado o seno de 30° para obter o valor do segmento CA.

3.2.3.2. O problema do veleiro

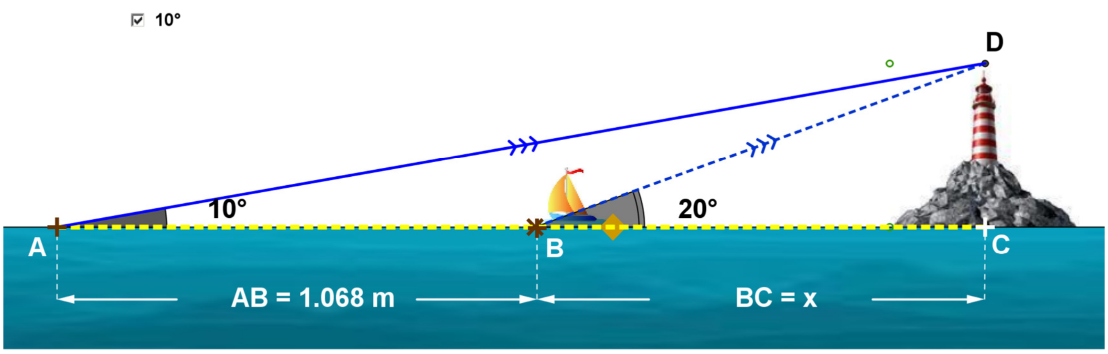


Figura 13

Essa situação contextualizada foi apresentada da seguinte maneira: um veleiro encontra-se à deriva no ponto A e avista o topo D de um farol localizado no alto de uma montanha, sob um ângulo de 10°. Depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto B, distante 1.068 m do ponto A, e avista o topo do farol sob um ângulo de 20°.

Pediu-se aos alunos que calculassem a distância restante até a base do farol (item a) e a altura do farol em relação ao nível do mar (item b).

Primeiramente, variou-se a posição do veleiro para que os alunos observassem as diferentes posições e suas respectivas variações angulares. Em seguida, solicitou-se a eles que verificassem a existência dos triângulos retângulos, uma vez que a altura CD do farol encontrava-se oculta. Nesse momento, foi introduzida a ideia do cálculo das distâncias inacessíveis, em razão da impossibilidade do veleiro atingir o ponto C, isto é, o pé do segmento que representa a altura do farol em relação ao nível do mar.

Desmembrou-se o problema nos triângulos retângulos ADC e BDC, observando os dois segmentos que receberam variáveis. No caso, BC = x e CD = h.

Foi sugerido para este problema o uso das razões trigonométricas com aproximação de três casas decimais. Preliminarmente, no triângulo BDC, empregou-se tg 20° para encontrar a relação: h = 0,364x. No triângulo ADC, utilizou-se tg 10° para alcançar a relação: h = 188 + 0,176x.

Igualando as duas relações obteve-se x = 1000 m e, substituindo o valor de x em uma das relações anteriores, encontrou-se a altura do farol em relação ao nível do mar. Portanto, BC = h = 364 m.

No desfecho da aula, propôs-se um exercício extra, similar ao problema do Super-homem apresentado na Aula 1. Nesse, um foguete é lançado da cidade A com uma inclinação de 40° e, após percorrer 13 km em linha reta, atinge o ponto C exatamente acima da cidade B. Pediu-se, portanto, a distância AB entre as cidades.

Para o cálculo deste problema bastava empregar o cos 40° para encontrar o valor solicitado.

3.2.3.3. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Esta aula serviu para consolidar a teoria e enfatizar a importância do ensino de matemática através da resolução de problemas, dando significado ao aprendizado e eliminando, assim, a mera reprodução de processos mecânicos de memorização.

O primeiro problema exigia que o aluno visualizasse os triângulos retângulos, mas como isso havia sido trabalhado na aula anterior, a grande maioria conseguiu separar bem um do outro. Com aqueles que não conseguiram enxergar, pudemos trabalhar o arquivo da Fig.05 através do projetor, ocultando os triângulos que atrapalhavam o raciocínio de cada item pedido.

Em seguida, foi um problema em que tivemos um grau de dificuldade maior, pois envolvia o conteúdo de sistema de equações do 1° grau, e alguns alunos se sentiram confusos com duas incógnitas nas contas. Já com o problema do míssil, não houve quaisquer dificuldades.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

À medida que resolvíamos a lista de exercícios, os alunos tiravam dúvidas sobre qual razão utilizar para cada situação. Houve uma considerável melhora em relação à visualização dos triângulos retângulos e ao entendimento sobre o que era pedido no enunciado. Porém sentimos que o problema do veleiro foi pouco apreendido pela maioria dos alunos, o que evidenciou cada vez mais a lacuna em conteúdos anteriores ao da série cursada, como proporção, sistema, frações e números decimais.

3.2.4. Aula 4

Com esta aula almejou-se reunir os conhecimentos adquiridos nas três aulas anteriores e aplicá-los em diversas situações-problema apresentadas em forma de lista de exercícios. Foi estimado um tempo aproximado de 10 minutos para que cada aluno tentasse resolver cada questão. Findo o tempo, o professor corrigiu a questão visualizada por meio projetor de imagens. Seguiu-se assim, sucessivamente, até a correção completa da lista. A seguir, apresenta-se a tabela com a temática, as habilidades relacionadas e o material utilizado para a solução de cada questão.

Tabela 5

Q.	Temática	Habilidade relacionada	Material
1	Cálculo da altura de um prédio	Uso da razão correta: tangente Consulta à tabela dos arcos notáveis	Lápis Borracha Calculadora
2	Cálculo da altura da escada do Corpo de Bombeiros em relação ao solo	Uso da razão correta: seno	Lápis Borracha Calculadora
3	Cálculo da altura da queda de uma tirolesa	Uso da razão correta: cosseno Consulta à tabela dos arcos notáveis Visualização do triângulo retângulo oculto	Lápis Borracha Calculadora
4	Medição e identificação dos lados de um triângulo retângulo; Cálculo aproximado das razões trigonométricas de 37°	Uso correto dos elementos do triângulo retângulo no cálculo das razões trigonométricas	Lápis Borracha Calculadora Régua
5	Encontrar os ângulos agudos de um triângulo retângulo, dados dois de seus lados e uma tabela trigonométrica	Uso da razão trigonométrica correta Consulta à tabela dada	Lápis Borracha Calculadora
6	Calcular a altura do Pão de Açúcar	Uso da razão correta: tangente Solucionar sistemas de 2 equações e 2 variáveis	Lápis Borracha Calculadora

3.2.4.1. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Nessa aula, exercitamos todo o conceito adquirido, com ênfase na resolução de problemas, qualificando, assim, o processo ensino-aprendizagem. Precisávamos ver o percurso trilhado pelos alunos, a fim de detectar possíveis erros antes da avaliação.

No primeiro problema, sentimos que os alunos se concentraram diretamente na figura do prédio, não dando muita importância ao enunciado, e não focaram a resolução em cima do que era pedido: a altura do prédio. Ao pedir para que eles lessem com atenção, fui ao quadro e perguntei o que deveriam encontrar. Ao ser prontamente respondida a pergunta, prosseguimos colocando a variável x em CB, e alguns deles perguntaram por que não em CD, já que buscávamos a altura. Orientei-os de que poderíamos colocar em CD, mas que precisávamos notar que CD não era o lado do triângulo retângulo a ser utilizado. Ao acharem o comprimento CB, alguns esqueceram de somar a altura do teodolito BD, para determinar CD.

Já no exercício da escada Magirus, não tivemos mais dúvidas quanto a somar a altura do caminhão, a fim de determinar o comprimento atingido pela mesma, em relação ao solo.

No Problema da tirolesa, a maior dificuldade se deu em visualizar o triângulo retângulo que contém 60°. Destacamos a aluna L., que resolveu a questão – prolongando o segmento AB até o ponto D (no mar) – e traçou a altura BE, de Wagner, em relação ao mar. Após o raciocínio, determinou-se BD usando cosseno de 60° e seno de 30° para calcular a altura BE. Parabenizei a estratégia, de forma a estimulá-la outras vezes, e fui ao quadro mostrar pelo Geogebra o triângulo oculto, que torna a resposta mais simples.

O exercício seguinte, foi de grande valia, pois mesmo sem apresentar dificuldades, trouxe à tona a discussão sobre arredondarmos os valores das razões para uma casa decimal, e eles perceberam que alguns ângulos ficariam com a mesma razão e perderíamos precisão da medida que se quer calcular. Definimos que o ideal é trabalhar a partir de três casas, mas para alguns casos, a fim de tornar a conta mais simples, seria levado em conta duas casas decimais. A aluna T. perguntou se quanto mais casas decimais tivesse a razão, mais precisa ficaria a medida a ser descoberta, e concluímos que o conceito havia sido aprendido por eles.

Na questão 5, a maioria dos alunos não conseguiu raciocinar o que deveria fazer para encontrar o valor do ângulo pedido. Muitos perguntavam se precisariam usar todos aqueles valores que estavam na tabela. Após virem o resultado no quadro, julgaram se tratar de um problema muito mais simples que o imaginado.

No problema do Pão de Açúcar, por se tratar de uma situação desafiadora, houve um entusiasmo generalizado, mas novamente enfrentaram dificuldades por a conta apresentar duas variáveis. Porém o índice de acertos foi o esperado, levando-se em conta a experiência de terem resolvido o problema do veleiro na aula anterior.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Antes de iniciarmos a aula, afastamos as carteiras para que eles pudessem ir perdendo um pouco a dependência um dos outros. Precisávamos que eles praticassem individualmente para percebermos possíveis erros e dúvidas. A aceitação não foi das melhores, e não por serem indisciplinados, mas por insegurança.

Os alunos que tentavam resolver a lista, apresentavam dificuldades semelhantes aos da E. M. Roberto Burle Marx, com o agravante de não dominarem conceitos anteriores fundamentais para as resoluções das questões. Destacamos mais uma vez a necessidade de perguntarem o tempo todo se estavam corretos e mesmo o que deveria ser feito.

À medida que o professor Michel ia corrigindo no quadro as questões, alguns alunos só se davam o trabalho de copiar o gabarito, sem qualquer compromisso com o aprendizado.

3.2.5. Aula 5: Avaliação

Esta aula consistiu da aplicação de uma prova escrita discursiva que teve o propósito de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos após as quatro aulas anteriores. Para a realização da prova foi permitido, somente, o uso de lápis, borracha, régua e calculadora. A seguir, a tabela com a temática e as habilidades relacionadas para a solução de cada questão.

Tabela 6

Questão	Temática	Habilidade relacionada
1	Medição e identificação dos lados de um triângulo retângulo; Cálculo aproximado das razões trigonométricas de 55°	Medição e uso correto dos elementos do triângulo retângulo no cálculo das razões trigonométricas
2	Pergunta discursiva	Analisar a imprecisão no uso de razões trigonométricas aproximadas com uma casa decimal
3 (a)	Calcular a altura de um avião em relação ao solo	Esboço da situação-problema
3 (b)	Calcular a altura de um avião em relação ao solo	Uso da razão correta: seno
4	Calcular a altura do Cristo Redentor	Uso da razão correta: tangente
5	Tabela dos arcos notáveis	Completar a tabela com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°
6	Calcular o ângulo de inclinação de uma escada apoiada em um muro	Uso da razão correta: seno Consulta à tabela dos arcos notáveis
7	Calcular a distância entre um navio e um submarino	Uso da razão correta: cosseno
8	Calcular a altura de um farol após certo deslocamento de um veleiro	Uso da razão correta: tangente Solucionar sistemas de 2 equações e 2 variáveis

3.2.5.1. Análise individual dos resultados

a. E. M. Roberto Burle Marx

Os alunos rapidamente sentaram na formação de prova, já conhecida por eles, conforme as regras da escola. E, antes de começarem, pedimos que a fizessem com o máximo de responsabilidade, pois estaríamos avaliando todo o processo de ensino-aprendizagem vivido por eles no decorrer das aulas.

A maioria dos alunos já havia terminado a prova com pelo menos 30 minutos de antecedência do tempo previsto, sem nenhum problema a ser destacado.

b. E. M. Camilo Castelo Branco

Chegamos antecipadamente à sala para arrumar as carteiras, evitando assim uma demora para o início da prova.

Ao circularmos pela sala, percebemos que as provas de alguns estavam totalmente em branco. Incentivamos e pedimos comprometimento, mesmo assim um pequeno grupo se negava a fazer, uns de braços cruzados esperando o término, e outros encostados com a cabeça na parede praticamente dormindo.

Uma grande maioria tentava, alguns, nitidamente, mostravam-se inseguros e sentiram não poder contar com a nossa ajuda naquele momento.

Ao término da prova alguns alunos reclamaram que o tempo foi insuficiente para resolvê-la.

3.3. Análise do Resultado da Avaliação

A correção das provas e a análise dos resultados foram efetuadas em conjunto pelos professores Michel e Anderson. Na E. M. Roberto Burle Marx, a soma das duas turmas totalizou 60 provas. Já na E. M. Camilo Castelo Branco, foram descartadas as avaliações de sete alunos que faltaram a duas ou mais aulas da experiência, portanto, reuniu-se 25 provas.

A seguir, é apresentada a análise detalhada de cada questão:

a. Questão 1 (a,b,c)

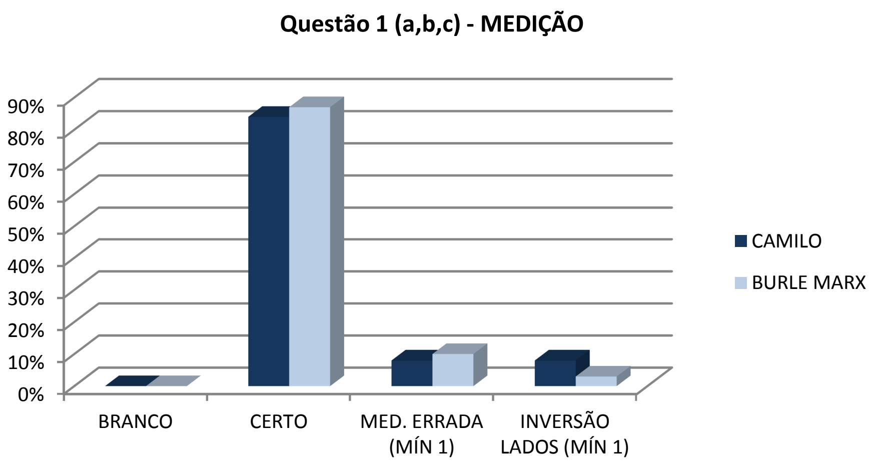


Figura 14

Essa questão foi resolvida por todos os alunos, sem exceção. Além disso, houve um alto índice de acertos. Os erros, em ambas as escolas, foram consequentes da aferição errada de pelo menos uma medida ou da inversão dos lados no triângulo. Nenhum aluno errou completamente a questão. Concluímos, portanto, que se obteve a compreensão para a correta identificação dos elementos do triângulo retângulo.

b. Questão 1 (d,e,f)

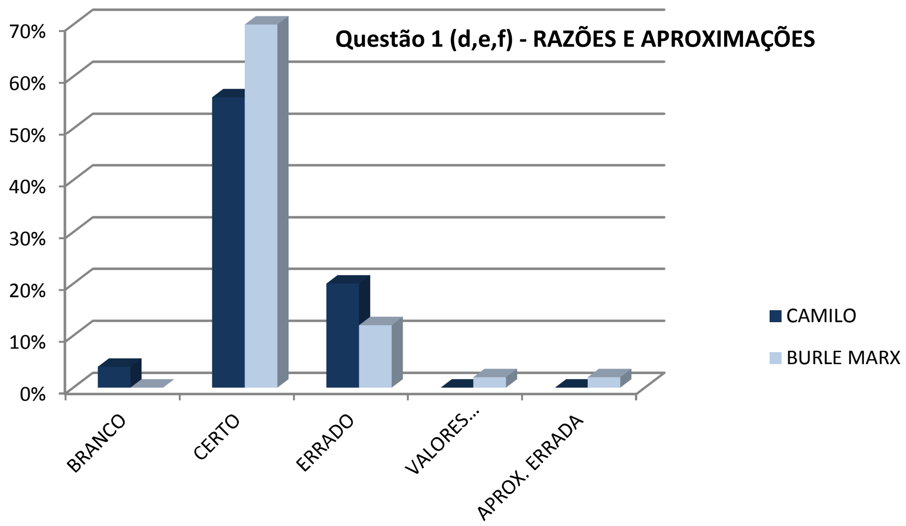


Figura 15

Observamos uma pequena diferença entre as duas escolas ao comparar o número de acertos dos alunos na segunda parte da questão nº 1. Com baixo índice de questões em branco, os alunos da E. M. Camilo Castelo Branco tiveram 20% de erros respectivos à inversão dos lados nas razões trigonométricas e às aproximações das casas decimais. Nessa última, os alunos aproximaram o resultado para três casas – de acordo com o que foi transmitido nas aulas práticas –, não observando que o enunciado solicitava apenas duas.

b. Questão 2

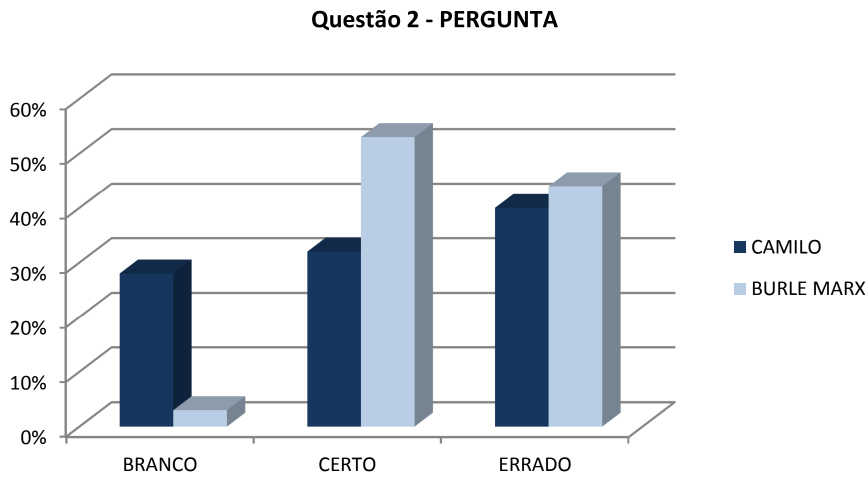


Figura 16

Na E. M. Camilo Castelo Branco, observamos que pouco mais de um quarto dos alunos não respondeu à questão. Daqueles que a fizeram, em ambas as escolas, os principais erros resultaram da incorreta interpretação da pergunta.

A seguir, a resposta do aluno M., da E. M. Camilo Castelo Branco, na qual explica o método de aproximação das casas decimais.

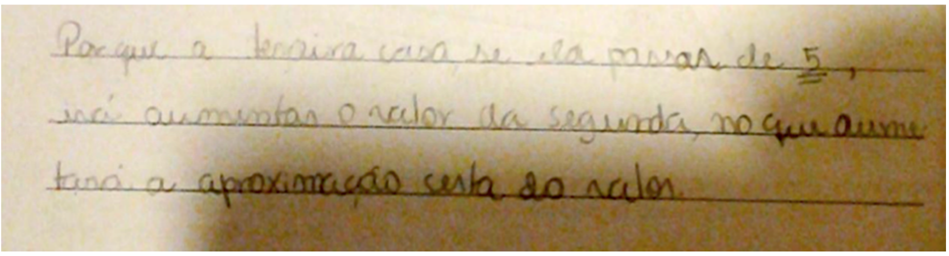


Figura 17

Além da situação descrita, houve casos como o do aluno N., da mesma escola, que sequer soube expressar-se com palavras, conforme a seguir.

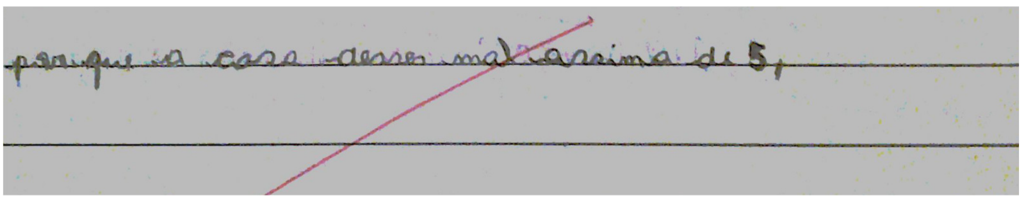


Figura 18

As respostas corretas nas duas escolas foram similares à apresentada pela aluna S., da E. M. Roberto Burle Marx, conforme Figura 19, a seguir.

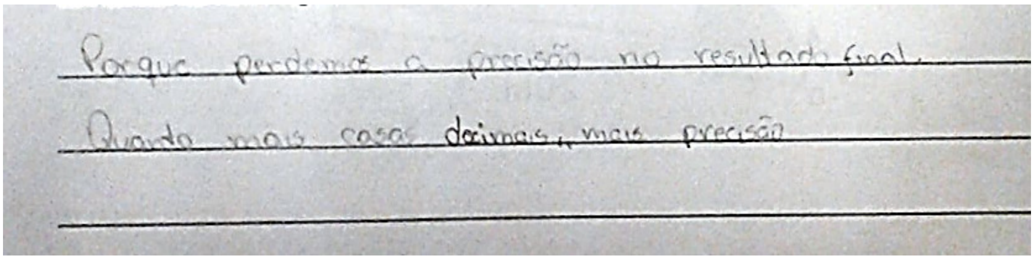


Figura 19

c. Questão 3 (item a)

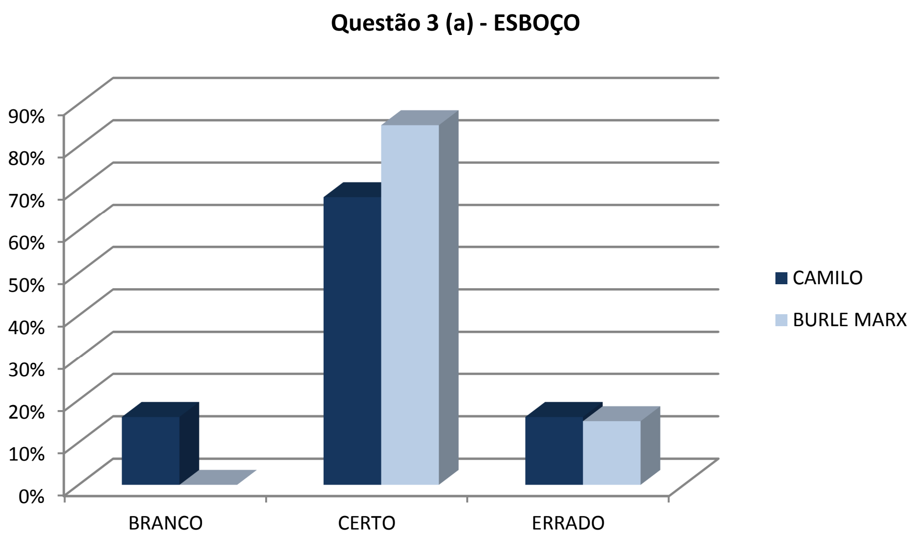


Figura 20

Esta questão apresentou alto índice de acertos em ambas as escolas. O esboço feito pelo aluno J., da E. M. Camilo Castelo Branco, conforme figura a seguir, é um exemplo que representa esta maioria. Nele, observamos a construção correta da situação-problema assim como o posicionamento das informações e elementos do triângulo.

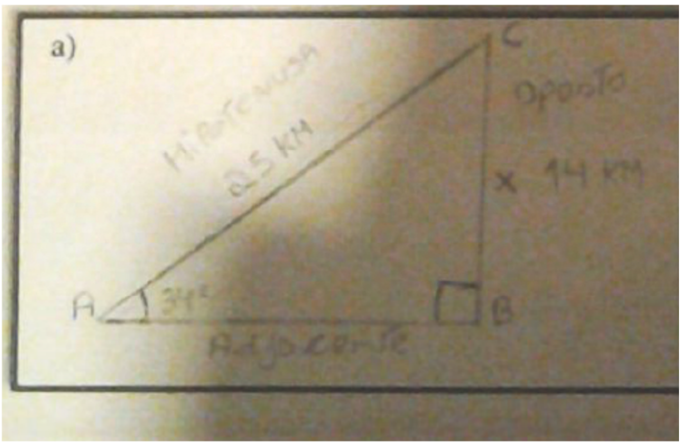


Figura 21

d. Questão 3 (item b)

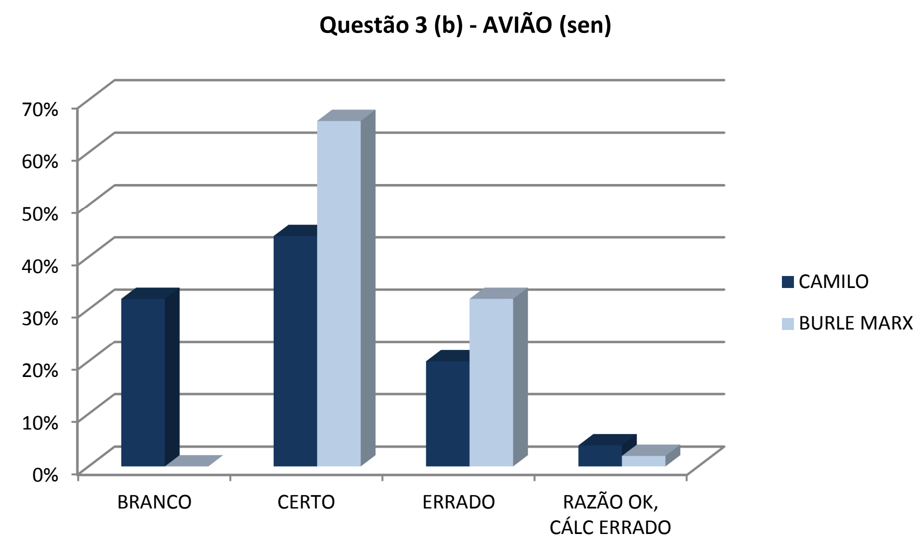


Figura 22

Enquanto um terço dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco deixou a questão em branco, todos da E. M. Roberto Burle Marx a resolveram. De todos os que fizeram, menos de 5% errou o cálculo do desenvolvimento da razão seno. Os erros se referem, principalmente, ao uso da razão incorreta.

A seguir, a elaboração da questão da aluna A. da E. M. Roberto Burle Marx, que resolveu o item b de maneira correta, a partir do equívoco em seu esboço no item a.

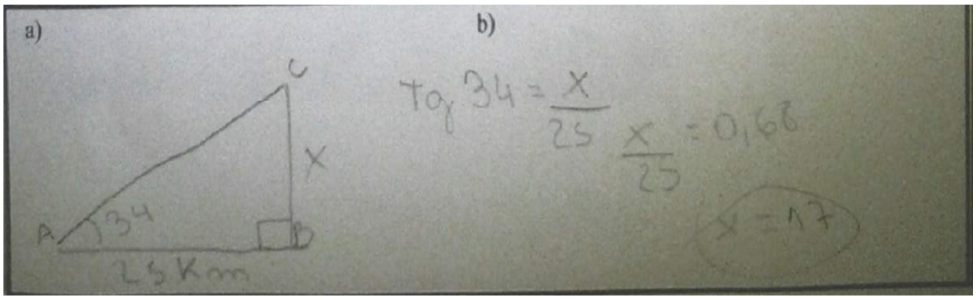


Figura 23

e. Questão 4

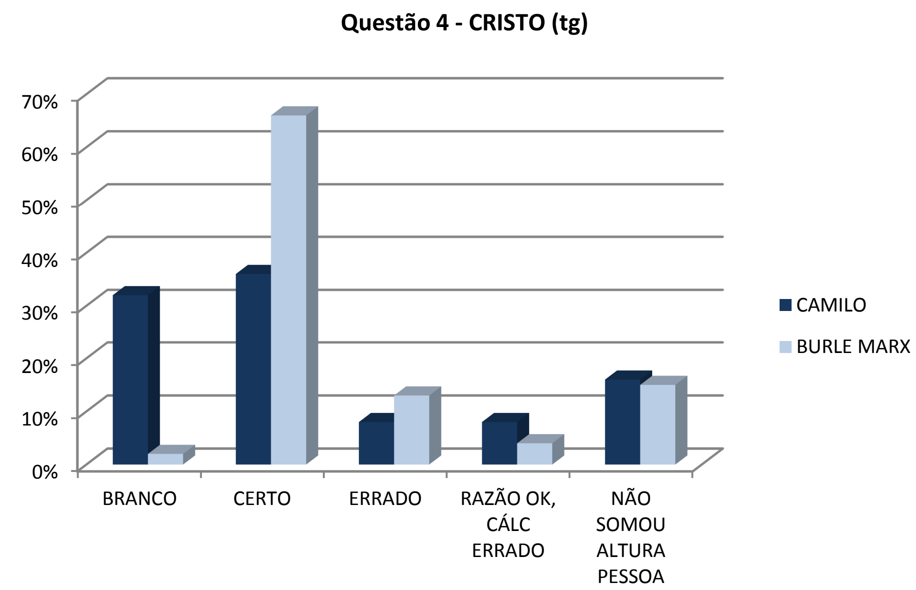


Figura 24

Destacamos que apenas 15% dos alunos da E. M. Roberto Burle Marx errou a questão, deixando partes em branco ou usando a razão indevida. Na E. M. Camilo Castelo Branco, aproximadamente um terço, não respondeu.

Percebemos que alguns alunos, em ambas as escolas, não percebem a incoerência do resultado calculado, uma vez que os valores encontrados para a altura do Cristo Redentor variavam entre 0,09m e 3.621,80m. Na E. M. Camilo Castelo Branco, dois alunos usaram a régua para medir a figura impressa no papel. E, analisando de maneira global, aproximadamente 23% daqueles que conseguiram calcular a medida do segmento CB, desconsiderou a altura do homem.

A seguir, o desenvolvimento correto apresentado pelo aluno G., da E. M. Camilo Castelo Branco.

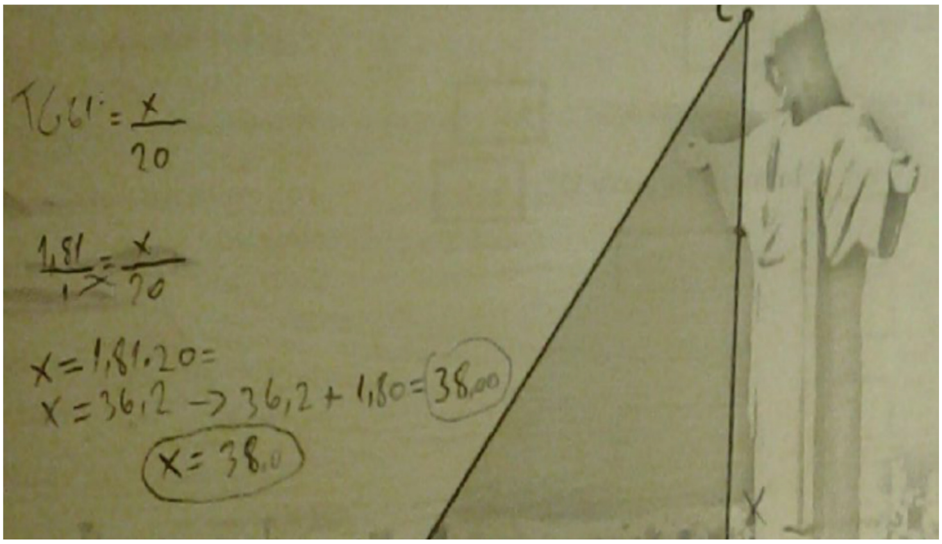


Figura 25

f. Questão 5

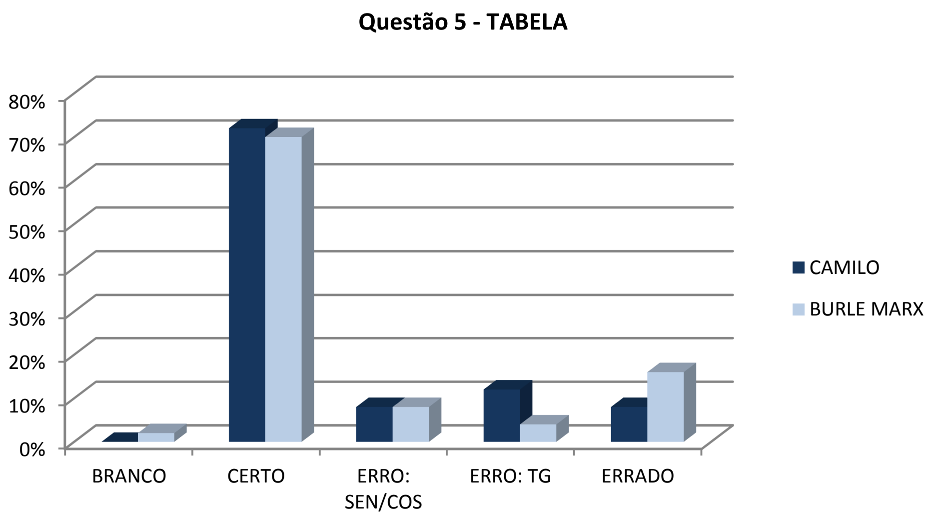


Figura 26

Essa questão chamou nossa atenção pelo maior índice de acertos da E. M. Camilo Castelo Branco e por nenhum aluno ter deixado a tabela incompleta. Apenas 8% errou somente a parte dos senos e cossenos, enquanto 12% errou somente a parte das tangentes. Cabe ressaltar que essa questão era de memorização, que não requeria conhecimentos prévios de fundamentos básicos para efetuar qualquer tipo de cálculo.

g. Questão 6

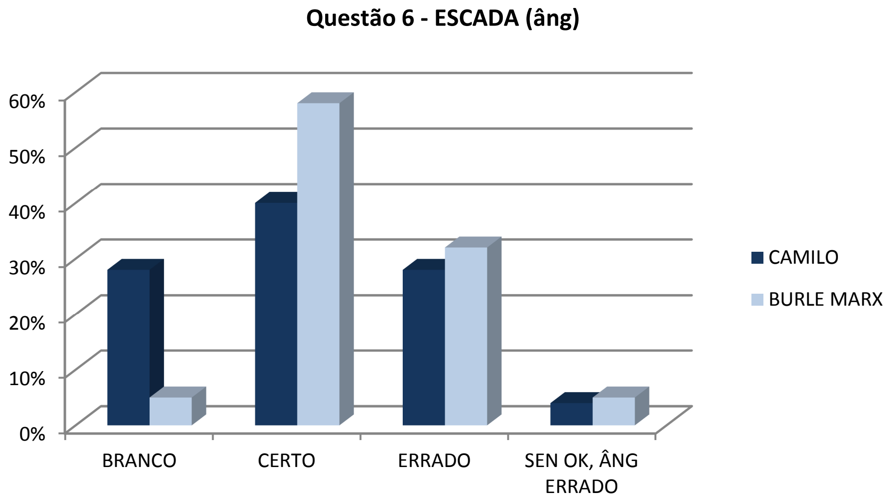


Figura 27

Consideramos satisfatório o índice de aproveitamento desta questão por se tratar de um item que exigia do aluno identificar corretamente os elementos no triângulo retângulo, constatar que, para o ângulo pedido, a razão utilizada seria o seno e saber a tabela dos arcos notáveis.

Dos alunos que alcançaram o valor correto para o seno do ângulo, apenas 4% da E. M. Camilo Castelo Branco e 5 % da E. M. Roberto Burle Marx não concluíram a associação com o ângulo de 30°.

Na E. M. Camilo Castelo Branco, observamos alguns alunos que, apesar de aplicarem os conceitos trigonométricos corretos, erraram em etapas referentes aos cálculos, como a solução da proporção e até mesmo meras simplificações. Em contrapartida, no desenvolvimento confuso e rasurado do aluno F., ilustrado na figura a seguir, podemos verificar a correta compreensão e conclusão da questão.

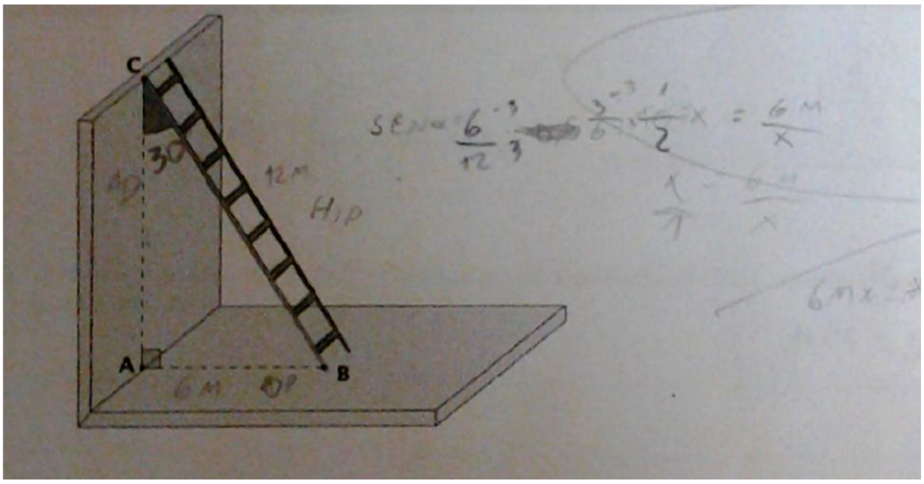


Figura 28

A seguir, a clareza da resposta da aluna J., da E. M. Roberto Burle Marx.

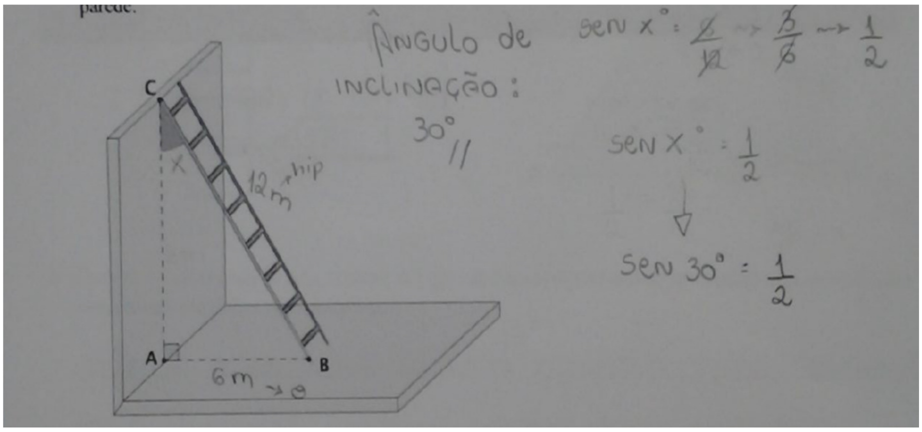


Figura 29

h. Questão 7

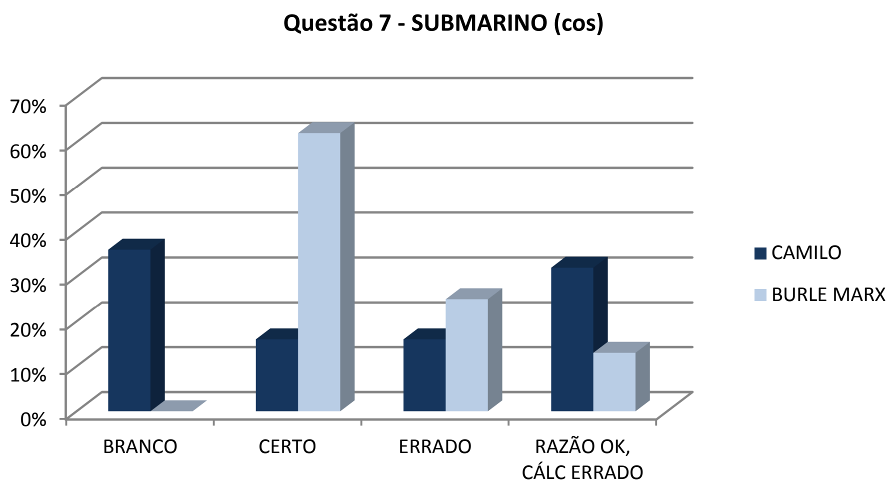


Figura 30

Entre todas as questões da avaliação, essa foi a que apresentou a maior diferença no índice de acertos entre as escolas. Enquanto 36% dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco deixou em branco, todos os alunos da E. M. Roberto Burle Marx tentaram resolvê-la.

Observamos que, dos alunos que concluíram que a razão cosseno era a correta, apenas um terço alcançou o resultado final. Os demais erraram praticamente da mesma maneira. A incógnita a ser descoberta era a hipotenusa do triângulo apresentado e localizava-se no denominador de um dos lados da proporção. Logo, quando não erravam no desenvolvimento do cálculo da proporção, simplesmente multiplicavam o valor da medida do cateto adjacente pelo valor do cosseno de 70°. Nesse caso, o correto seria dividir o primeiro pelo segundo.

A seguir, o erro do aluno G. e a incoerência do resultado encontrado.

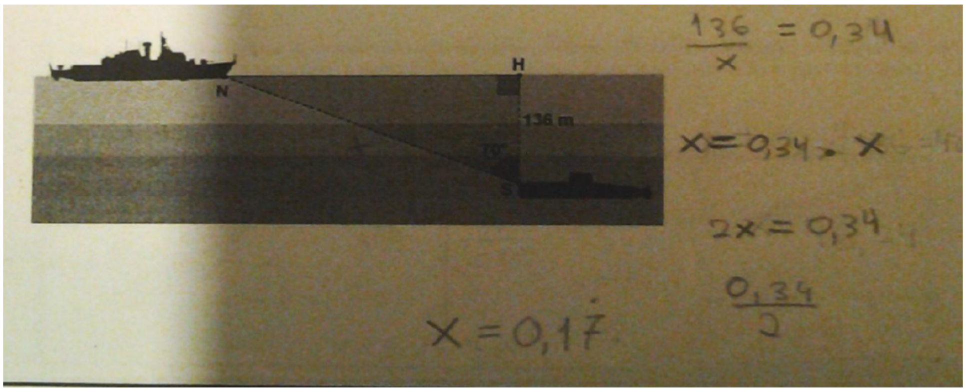


Figura 31

i. Questão 8

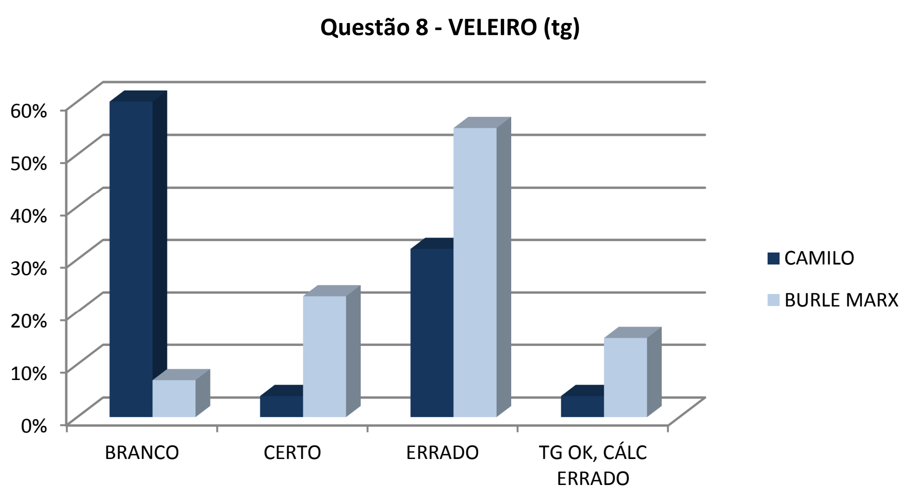


Figura 32

Essa questão, considerada a mais difícil da avaliação, agregava uma série de raciocínios e cálculos até a obtenção do resultado final. Mesmo assim, surpreendeu-nos que 93% dos alunos da E. M. Roberto Burle Marx tentou resolvê-la.

As opiniões de alguns alunos da E. M. Camilo Castelo Branco, ao fim da prova, contribuem para entender a razão de 60% não ter sequer tentado fazer a questão. Uns diziam que o tempo de prova não era suficiente e outros optaram por não resolvê-la somente por se tratar da questão mais difícil.

O erro mais comum ocorreu na análise do triângulo ACD, pois os alunos se esqueceram de somar o segmento BC (representado por uma variável) ao segmento AC (= 300m) para compor o cateto adjacente ao ângulo de 14°. Erros no trabalho com as duas variáveis também foram frequentes.

A escolha do ângulo de 45° no triângulo BCD teve a finalidade de analisar se algum aluno, percebendo ser um triângulo isósceles, usaria em seus cálculos BC=CD. Assim, o problema se reduziria a somente uma variável. Somente a aluna V., da E. M. Roberto Burle Marx teve tal percepção.

A seguir, a solução do aluno J., da E. M. Roberto Burle Marx, representando o erro mais corriqueiro.

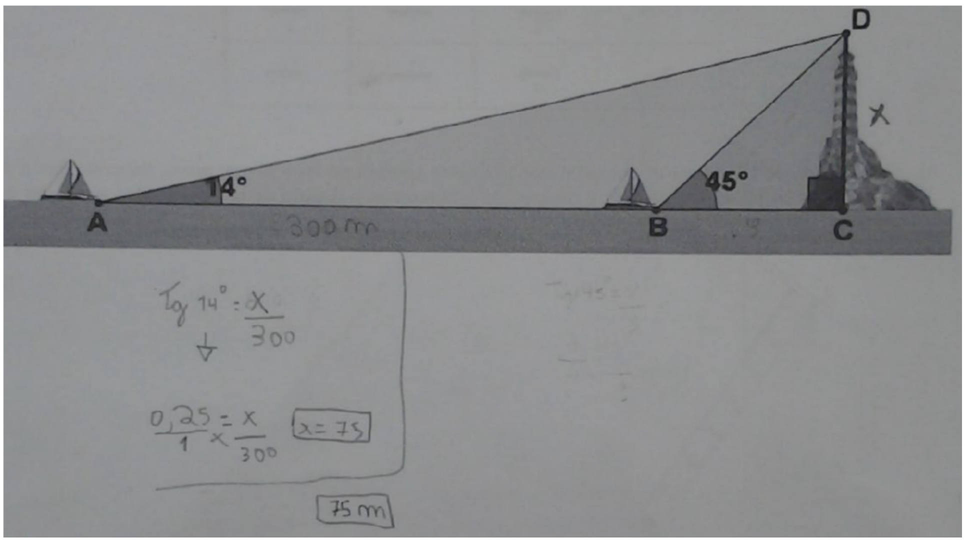


Figura 33

Na E. M. Camilo Castelo Branco, destacamos a solução correta da aluna L., conforme figura a seguir.

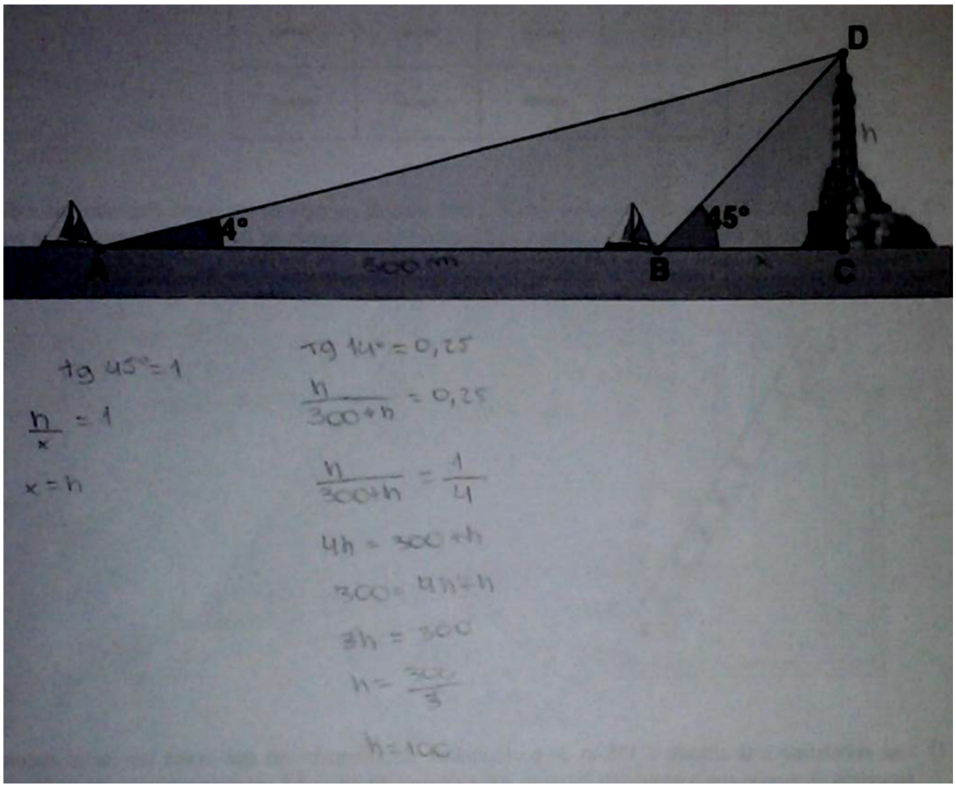


Figura 34

4. Conclusão

Diante do exposto, percebemos que, para atingir duas realidades distintas, é necessário trabalharmos eficazmente os conteúdos básicos necessários visando atingir o conceito da trigonometria no triângulo retângulo, tais como semelhança, proporção, números decimais, teorema de Pitágoras, entre outros.

A falta desses conceitos prévios desmotivou grande parte dos alunos da E. M. Camilo Castelo Branco. Esses pareciam ter desistido de entender antes mesmo de tentar; com isso, estavam pré-determinados ao fracasso. Nota-se, através de tal efeito, o grande número de questões em branco na referida escola.

Acredito que, com a metodologia utilizada, atingimos aos que se dispuseram a participar, mesmo, em muitas vezes, esbarrando nas dificuldades, sejam por deficiência nos conceitos anteriores ou pela própria dificuldade do novo conceito, em ambas as escolas.

O uso do *software* dinâmico foi de suma importância, pois através dele pudemos mostrar, e até mesmo ocultar, detalhes importantes, a fim de melhorar a percepção visual da situação-problema; proporcionando também um melhor entendimento. Outro ponto forte foi a construção das figuras e desenhos no material - todos feitos com o auxílio do Geogebra.

A abordagem investigativa para o ensino das razões trigonométricas foi certamente a melhor escolha. Educar por meio da Matemática, em vez de simplesmente expor conteúdos matemáticos, procurando mostrar utilidade no que se aprende. O aluno aprendendo da forma adequada, melhora seu raciocínio, ajudando a pensar de forma independente, contribuindo para a tomada de decisões.

5. Referências Bibliográficas

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARMO, Manfredo Perdigão do.; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonometria / Números Complexos. – 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: Lamgraf Artesanato Gráfico Ltda., 1991.

POLYA, George. A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático. (Traduzido e adaptado por Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

GEOGEBRA
Disponível em:
<http://www.geogebra.org/cms/>
Acesso em 01 abr. 2013

IDEB – Resultados e Metas
Disponível em:
<http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultado.seam?cid=40662>
Acesso em 01 abr. 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – História da Trigonometria.
Disponível em:
<http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/cont_historia.htm>
Acesso em 01 abr. 2013

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – Um Pouco da História da Trigonometria Disponível em:
<http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm>
Acesso em 01 abr. 2013

6. Anexos

ANEXO 1 – Folha de atividades - aula 1 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ______________________

Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Alunos:_______________________________________ e _____________________________________

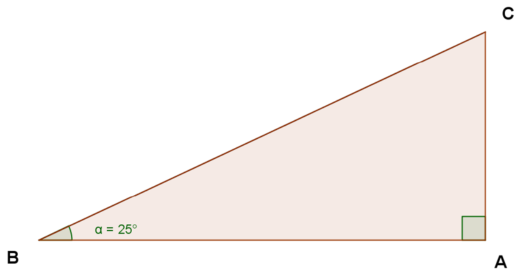
O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 1**

Atividade:

1) Com o auxílio de uma régua, meça os lados de cada triângulo abaixo completando seus valores nas respectivas tabelas com apenas uma casa decimal.

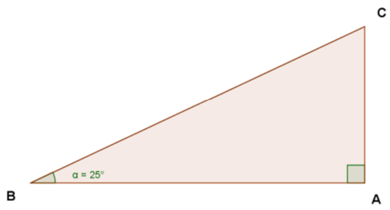
2) Para o cálculo das razões, utilize uma calculadora, considerando resultados com três casas decimais.

3) Complete a tabela com os valores das médias calculadas pela turma.



LADOS	RAZÕES	MÉDIA TURMA	SIMBOLOGIA
AC =	$\frac{AC}{BC} =$		SEN 25° =
AB =	$\frac{AB}{BC} =$		COS 25° =
BC =	$\frac{AC}{AB} =$		TG 25° =

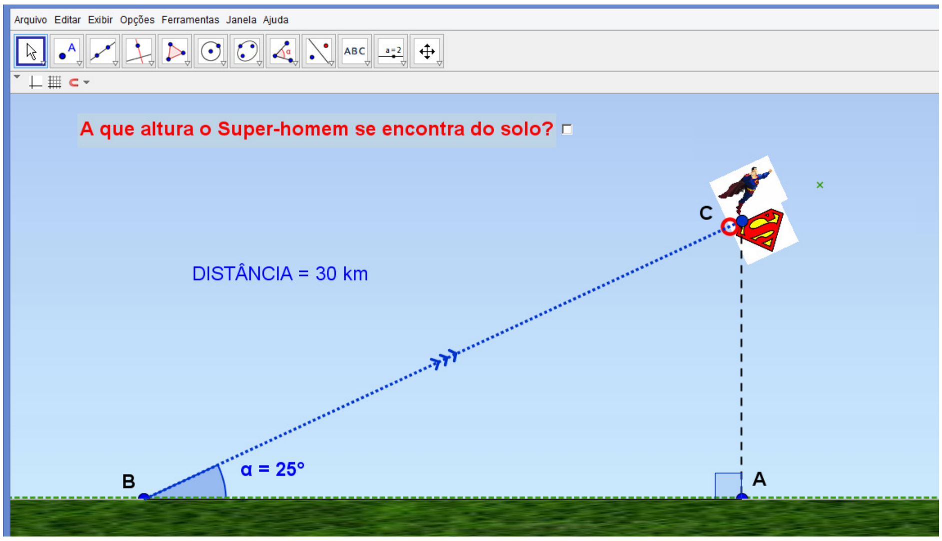
MÉDIA DAS RAZÕES DOS TRIÂNGULOS		
$\frac{AC}{BC} =$	$\frac{AB}{BC} =$	$\frac{AC}{AB} =$



LADOS	RAZÕES	MÉDIA TURMA	SIMBOLOGIA
AC =	$\frac{AC}{BC} =$		SEN 25° =
AB =	$\frac{AB}{BC} =$		COS 25° =
BC =	$\frac{AC}{AB} =$		TG 25° =

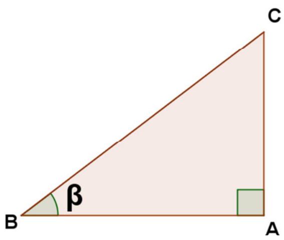
ANEXO 2 – Folha de atividades - aula 1 (2ª parte)

Atividade: Com relação à atividade anterior, utilize a simbologia correta e calcule a que altura o Super-homem se encontra do solo.



Cálculos

FORMALIZANDO O APRENDIZADO:



$$\text{Seno de } \beta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{Cosseno de } \beta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{Tangente de } \beta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{AC}{AB}$$

ANEXO 3 – Demonstração das razões dos arcos notáveis – aula 2 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ___________________________

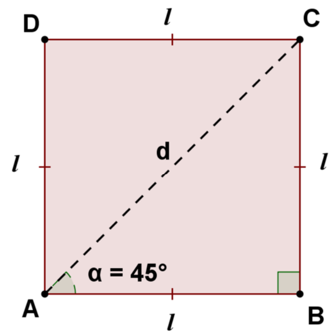
Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Alunos:____ e ____

O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 2**

Demonstração das Razões Trigonométricas dos Arcos Notáveis

I) Quadrado e o ângulo de 45°



1) Seja o quadrado ABCD cujos lados medem *l*. Ao traçarmos a diagonal AC = d, obtemos o triângulo retângulo ABC.

2) Então:
CÂB = _____ AB̂C= _____ BĈA = _____

3) No △ABC, com relação ao ângulo α = 45°, temos:
Cateto oposto a α: BC = _____

Cateto adjacente a α: AB = _____

Hipotenusa: AC = _____

4) Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

$$\boxed{\_\_\_^2 = \_\_\_^2 + \_\_\_^2}$$

$$\boxed{\_\_\_^2 = 2 \cdot \_\_\_^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \_\_\_\sqrt{2}}$$

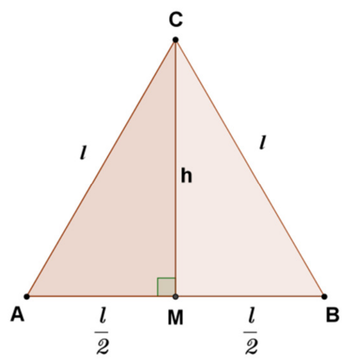
5) Portanto, as razões trigonométricas são:

Sen 45° $= \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AC} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \_\_\_\_$

Cos 45° $= \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{AC} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \_\_\_\_$

Tg 45° $= \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{BC}{AB} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

II) Triângulo equilátero e os ângulos de 30° e 60°



1) Seja o triângulo equilátero ABC cujos lados medem *l*. Ao traçarmos a altura CM = h, obtemos o triângulo retângulo AMC.

2) Então:
MÂC = _____ AM̂C= _____ AĈM = _____

3) No △AMC, com relação ao ângulo de 60°, temos:
Cateto oposto a 60°: CM = _____

Cateto adjacente a 60°: AM = _____

Hipotenusa: AC = _____4) Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

ANEXO 4 – Demonstração das razões dos arcos notáveis – aula 2 (2ª parte)

$\boxed{AC^2 = AM^2 + CM^2}$

$\boxed{\_\_\_^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \_\_\_^2} \Rightarrow h^2 = \_\_\_^2 - \_\_\_^2 \Rightarrow h^2 = \_\_\_^2 \Rightarrow h = \_\_\_\sqrt{3}$

5) Portanto, as razões trigonométricas são:

Sen 60° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{CM}{AC}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

Cos 60° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AM}{AC}$ = ______ = ______ · _______ = ________

Tg 60° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{CM}{AM}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

Sen 30° = $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AM}{AC}$ = ______ = ______ · ______= ______

Cos 30° = $\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{CM}{AC}$ = ______ = ______ = ______ · _______ = _______

Tg 30° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AM}{CM}$ = ______ = ______ = ______ · ______= ______

<u>Tabela dos arcos notáveis:</u>

	30°	**45°**	**60°**
Sen	_____	_____	_____
Cos	_____	_____	_____
Tg	_____	_____	_____

ANEXO 5 – Construção da tábua (Ex.: cosseno) – aula 2 (3ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL ROBERTO BURLE MARX

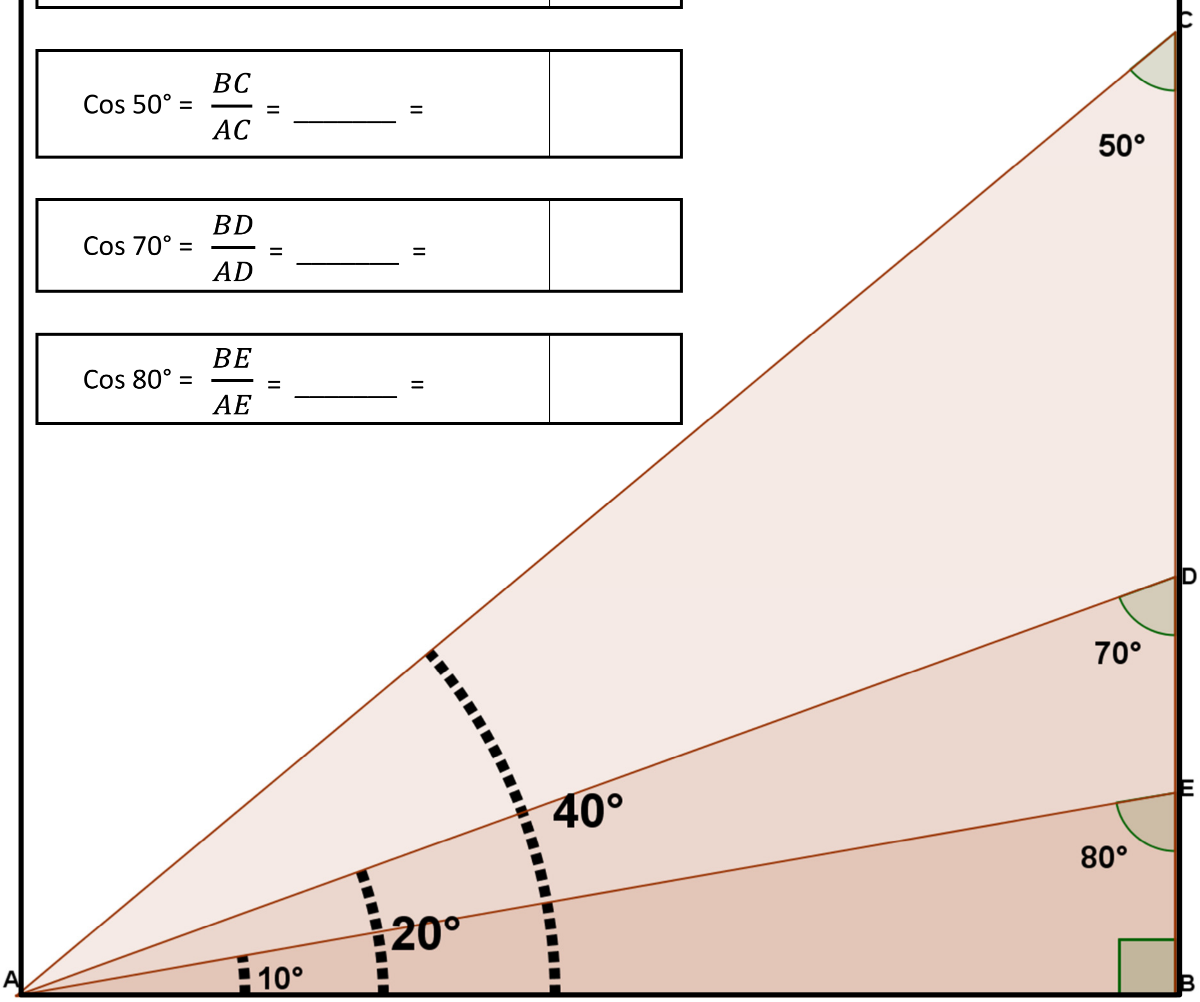
Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Alunos:____ e____ _____________________________________

O Ensino das Razões Trigonométricas – **Aula 2**

Atividade: Com o auxílio de uma régua, meça os lados dos triângulos abaixo e complete a tabela referente à razão Trigonométrica indicada. Em seguida, anote a média dos valores calculados pelo grupo.

	Média grupo
Cos 10° = $\frac{AB}{AE}$ = ________ =	
Cos 20° = $\frac{AB}{AD}$ = ________ =	
Cos 40° = $\frac{AB}{AC}$ = ________ =	
Cos 50° = $\frac{BC}{AC}$ = ________ =	
Cos 70° = $\frac{BD}{AD}$ = ________ =	
Cos 80° = $\frac{BE}{AE}$ = ________ =	



ANEXO 6 – Construção da tábua – aula 2 (4ª parte)

Atividade: Compare os valores das médias calculadas pela turma com a tabela abaixo, gerada a partir da variação dos ângulos no Geogebra.

ÂNGULOS	**10°**	**20°**	**30°**	**40°**	**45°**	**50°**	**60°**	**70°**	**80°**
SENO	**0,174**	**0,342**	$\frac{1}{2}$ **= 0,500**	**0,643**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **= 0,707**	**0,766**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **= 0,866**	**0,940**	**0,985**
COSSENO	**0,985**	**0,940**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **= 0,866**	**0,766**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ **= 0,707**	**0,643**	$\frac{1}{2}$ **= 0,500**	**0,342**	**0,174**
TANGENTE	**0,176**	**0,364**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ **= 0,577**	**0,839**	**1**	**1,192**	$\sqrt{3}$ **= 1,732**	**2,747**	**5,671**

ANEXO 7 – Folha de atividades – aula 3 (1ª parte)

ESCOLA MUNICIPAL _______________________

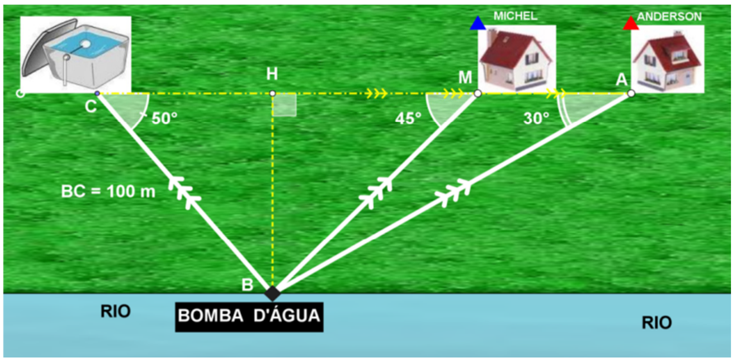
Professores: Anderson Melo e Michel Martins

Aluno:____

O Ensino das Razões Trigonométricas – Aula 3

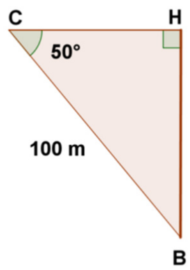
Para os cálculos utilize a tabela da Aula 2 e uma calculadora

Atividade 1: O Problema da Caixa d'água



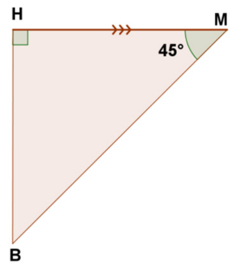
A água utilizada nas casas de Michel e Anderson é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 100 m de distância. Para a água chegar até a casa de Anderson, deve passar primeiro pela casa de Michel. Descontente com este fato, Anderson deseja fazer um encanamento (**AB**) que leve água diretamente para sua casa. De acordo com os ângulos indicados na figura, calcule: a) a distância da casa de Michel à caixa d'água (**CM**); b) a distância da casa de Anderson à bomba d'água (**AB**).

Cálculo da altura BH

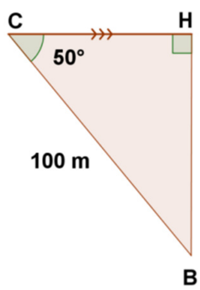


a) CM = CH + HM

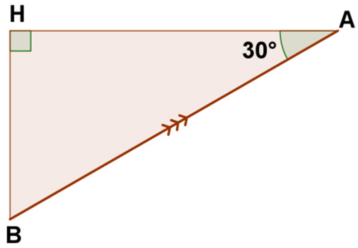
Cálculo de HM



Cálculo de CH

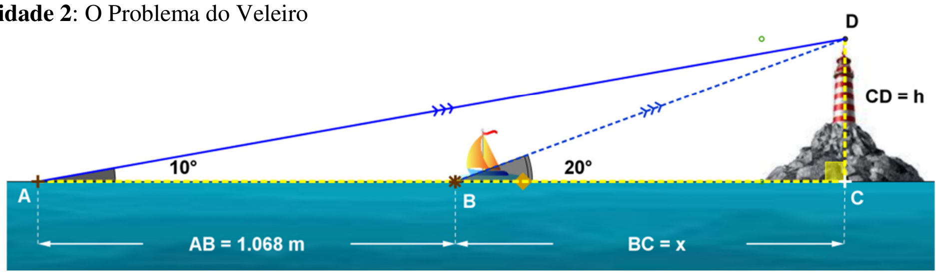


b) Cálculo de AB



ANEXO 8 – Folha de atividades – aula 3 (2ª parte)

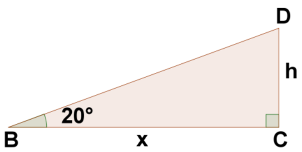
Atividade 2: O Problema do Veleiro

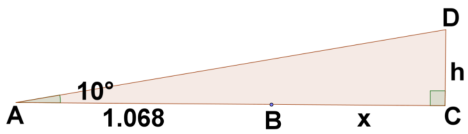


Um veleiro à deriva encontra-se na posição **A** e avista o topo de um farol (**D**) localizado no alto de uma montanha através de um ângulo de 10°. Uma hora depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto **B**, distante 1.068 m do ponto A, e avista o mesmo ponto D por um ângulo de 20°. Calcule:

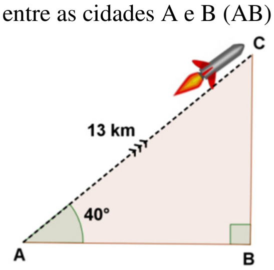
a) Quanto resta para o veleiro chegar até o farol (**x**);

b) A altura do farol (**h**).





EXTRA: O Problema do Foguete: Um foguete é lançado da cidade A com uma inclinação de 40°. Após percorrer 13 km em linha reta atinge o ponto C, que está exatamente acima da cidade B. Determine a distância aproximada entre as cidades A e B (AB)



ANEXO 9 – Lista de exercícios - aula 4 (1ª parte)

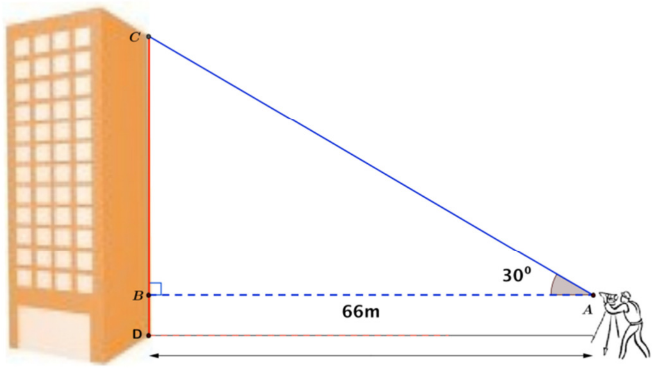
ESCOLA MUNICIPAL ____________________

Professores: Anderson Melo e Michel Martins

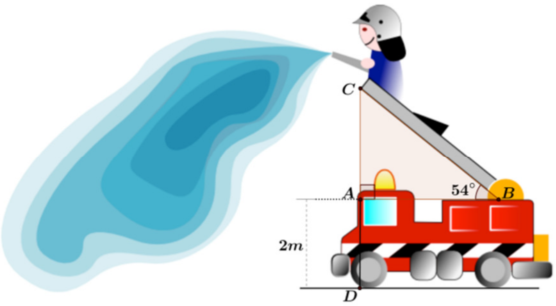
Aluno:____

O Ensino das Razões Trigonométricas – Aula 4 – **Lista de Exercícios**

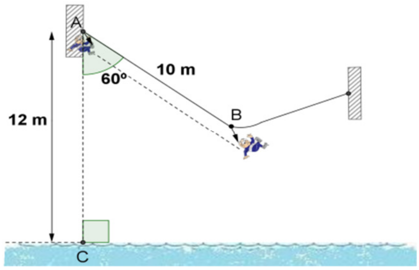
1) Um Agrimensor manuseia um teodolito a uma altura (BD) de 1,60 m, fazendo as medições para calcular a altura de um prédio. Ao distanciar-se 66m no plano horizontal da base do prédio (AB), avistou o topo do mesmo sob um ângulo de 30°**.** Calcule a altura (CD) deste prédio. (Use $\sqrt{3} \cong 1{,}7$)



2) A viatura **Auto Escada Mecânica** (AEM), conhecida como escada "Magirus", é destinada ao transporte e manobra de escada elevatória aos locais de operações de salvamento e combate a incêndio. (CBMPE, 2007). Sabe-se que o ângulo máximo ($A\hat{B}C$) de elevação é de 54° e que a escada tem 35 m de comprimento. Calcule a altura máxima (CD) da escada em relação ao solo, dado que a altura AD do caminhão é de 2m.
(Dados: sen 54° = 0,8 ; cos 54° = 0,6 e tg 54° = 1,37)



3) Wagner, em uma de suas viagens, resolveu descer em uma tirolesa em seu ponto mais alto, situado a 12 m de altura em relação ao nível do mar. Ao percorrer uma distância AB de 10 m, resolveu saltar no mar. Considerando que o ângulo de inclinação da tirolesa em relação a perpendicular AC, é de 60° (C$\hat{A}$B), calcule a altura da queda de Wagner.



ANEXO 10 – Lista de exercícios - aula 4 (2ª parte)

4) Meça os lados do triângulo abaixo e responda: (Use aproximações de uma casa decimal)

a) medida da hipotenusa: _______

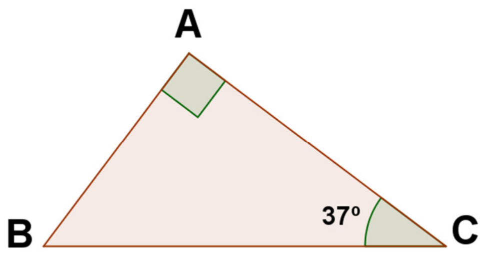
b) medida do cateto oposto ao ângulo de 37°: _______

c) medida do cateto adjacente ao ângulo de 37°: ________

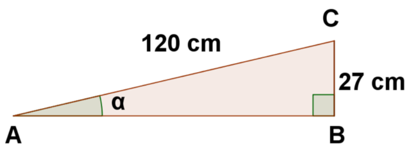
d) sen 37° = _______ ≅ _______

e) cos 37° = _______ ≅ _______

f) tg 37° = ________≅ _______

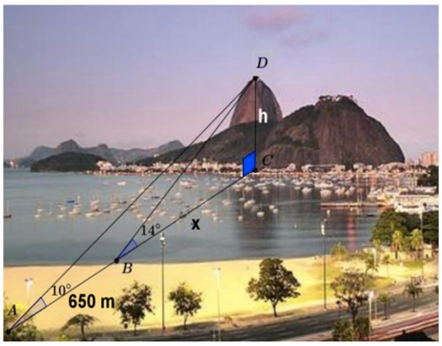


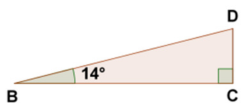
5) Dado o triângulo retângulo e a tabela trigonométrica abaixo, determine o valor de **α** :

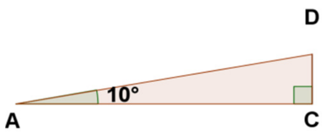


ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249

6) Um observador está em um ponto **A** do aterro do Flamengo e, através de um teodolito, observa o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10°. Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650 m de A e, neste momento, observa o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14°. Qual é a altura (h) do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação? (Utilize a tabela trigonométrica do Exercício 5);







Cálculos:

ANEXO 11 – Avaliação final (1ª parte)

Escola Municipal ___________________________________

Nome: ____________________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ________

Professor(a): __________________ - ___º **Bimestre / 2013 - Data:** / /

Nota:

1) Com auxílio de uma régua, meça os lados do triângulo ABC abaixo e complete: (Para o cálculo das razões, utilize a calculadora, aproximando os valores para duas casas decimais)

a) medida da hipotenusa: ☐

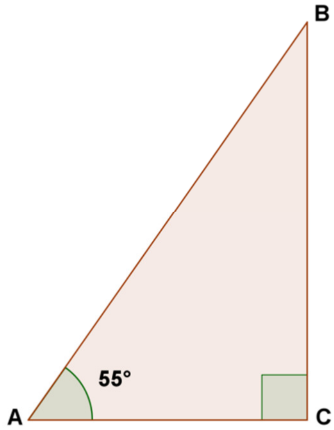
b) medida do cateto oposto ao ângulo de 55°: ☐

c) medida do cateto adjacente ao ângulo de 55°: ☐

d) sen 55° = $\frac{\square}{\square} \cong \square$

e) cos 55° = $\frac{\square}{\square} \cong \square$

f) tg 55° = $\frac{\square}{\square} \cong \square$



2) Conforme visto em sala de aula, explique por que não é aconselhável utilizar aproximações de somente uma casa decimal nas razões trigonométricas.

____

____

____

3) Um avião decola do ponto **A**, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 34°. Depois de percorrer 25 km, atinge o ponto **C** (no céu), localizado exatamente acima do ponto B (no solo).

a) Faça um desenho da situação-problema;

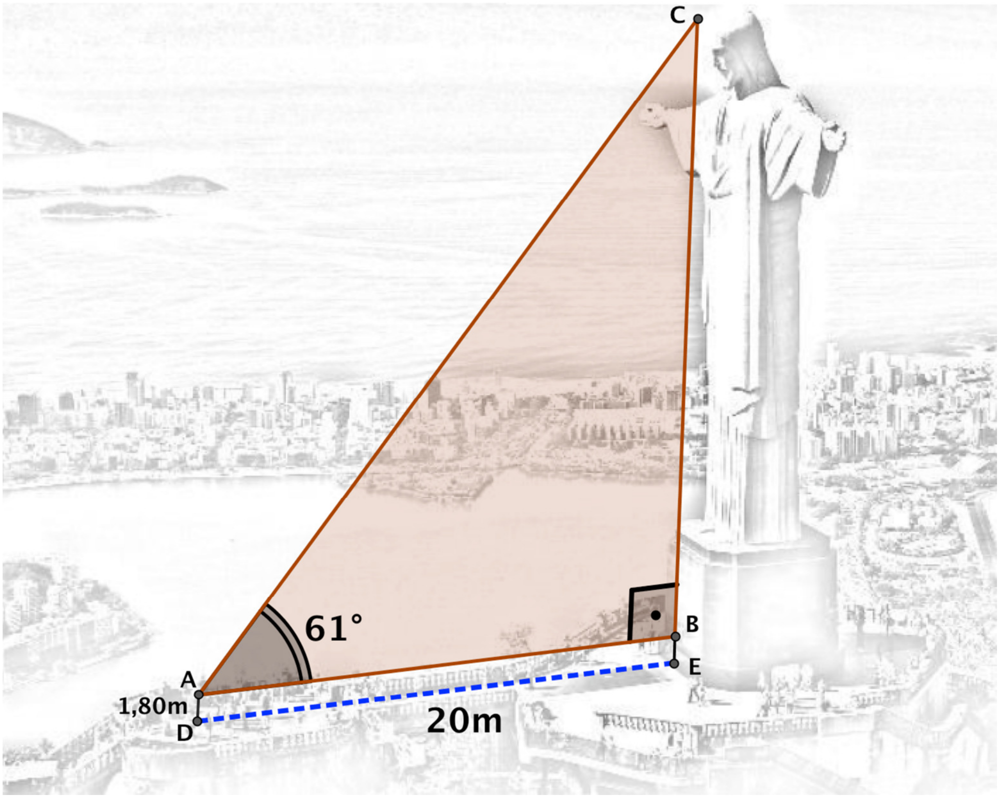
b) Determine a altura do avião em relação ao solo (**BC**) ao atingir o ponto **C**.
Dados sen 34° = 0,56 ; cos 34° = 0,83 e tg 34° = 0,68

a)	b)

ANEXO 12 – Avaliação final (2ª parte)

Nome: ____ **Nº:** _____ **Turma:** ________

4) Um homem de 1,80 metro de altura ($\overline{AD}$) se encontra a uma distância de 20 metros ($\overline{DE}$) da estátua do Cristo Redentor e avista seu topo (C) sob um ângulo de 61°. Determine a altura ($\overline{CE}$) do monumento.
Dados: sen 61° = 0,87 ; cos 61° = 0,49 e tg 61° = 1,81



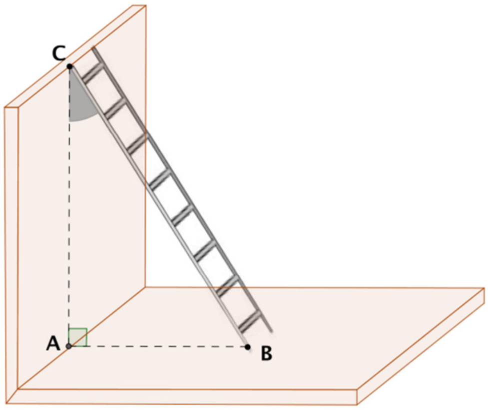
ANEXO 13 – Avaliação final (3ª parte)

Nome: ____ **Nº:** _____ **Turma:** ________

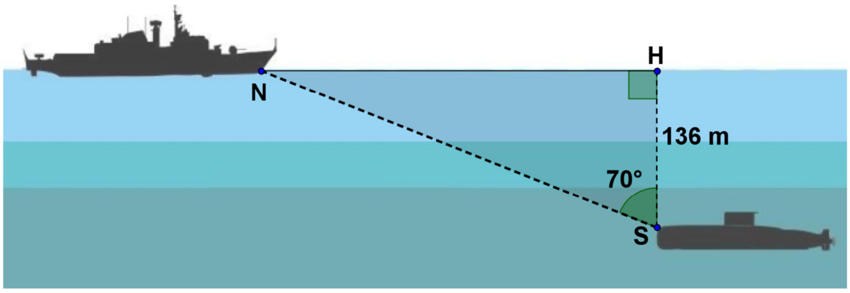
5) Complete, com sues respectivos valores, a Tabela dos Arcos Notáveis abaixo:

	30°	**45°**	**60°**
Sen	____	____	____
Cos	____	____	____
Tg	____	____	____

6) Uma escada de 12 metros de comprimento ($\overline{BC}$) está apoiada no topo de um muro. Sabendo que a distância desse muro ao pé da escada é de 6 metros ($\overline{AB}$), determine o ângulo de inclinação da escada em relação à parede.



7) Um submarino está situado a 136 m de profundidade no momento em que avista um navio ancorado na superfície. Sabendo que o ângulo (H$\hat{S}$N) é de 70°, calcule a distância $\overline{NS}$ entre o navio e o submarino.
Dados: sen 70° = 0,94 ; cos 70° = 0,34 e tg 70° = 2,75



ANEXO 14 – Avaliação final (4ª parte)

Nome: ______________________________________ **Nº:** _____ **Turma:** ________

6) Um veleiro à deriva encontra-se na posição **A** e avista o topo de um farol (**D**) localizado no alto de uma montanha através de um ângulo de 14°. Uma hora depois de velejar em linha reta, encontra-se no ponto **B**, distante 300 m do ponto A, e avista o mesmo ponto D por um ângulo de 45°. Calcule a altura (**CD**) do farol em relação ao nível do mar.

Dados: sen 14° = 0,24 ; cos 14° = 0,97 e tg 14° = 0,25