Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Thúlio José de Oliveira

Sobre números complexos e abordagens no ensino médio

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

THÚLIO JOSÉ DE OLIVEIRA

SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS E ABORDAGENS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Justino Muniz Júnior

Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

Oliveira, Thúlio José de, 1993-

O48s Sobre números complexos e abordagens no ensino médio :
2020 . / Thúlio José de Oliveira. – Florestal, MG, 2020.

88 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Justino Muniz Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: 88 f..

1. Números complexos. 2. Matemática. 3. Análise complexa. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

512

THÚLIO JOSÉ DE OLIVEIRA

SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS E ABORDAGENS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2020.

Assentimento:

Thúlio José de Oliveira
Autor

Justino Muniz Júnior
Orientador

Dedicatória

Dedico esse trabalho a todos os envolvidos nesse trajeto: Minha família, meus professores que tive ao longo dos estudos, meus colegas de graduação e de mestrado, meus orientadores em trabalhos acadêmicos e na vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e em seguida a todos os envolvidos de forma direta ou indireta no processo que culminou nessa dissertação. De forma especial, agradeço a meus pais, José Getúlio de Oliveira e Lucimaire da Silva, que apesar das dificuldades sempre me proporcionaram condições para que eu pudesse estudar. Além do mais, agradeço com muito carinho a minha esposa, Adrine da Silva, que esteve ao meu lado durante toda essa caminhada, foi aquela que acompanhou as dificuldades sempre incentivando e entendendo todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

OLIVEIRA, Thúlio José de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2020. **Sobre números complexos e abordagens no ensino médio** . Orientador: Justino Muniz Júnior . Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

A dissertação que será apresentada aqui explora o conhecimento a respeito dos números complexos, enfatizando sua importância para a matemática no ensino médio, tendo como propósito terminal expor uma proposta didática que contribua para a melhoria do ensino desse conteúdo. É exibido parte da história dos números complexos, bem como dos números reais. Logo depois, apresentamos um estudo sobre o corpo dos números complexos que é dotado de suas variadas representações e propriedades, além do mais discorreremos a respeito dos números hipercomplexos e Teorema Fundamental da Álgebra. Por fim, é apresentado um esquema de atividades direcionado para alunos do terceiro ano do ensino médio, no qual a fim de fazer uma correlação entre teoria e prática utilizamos o software GeoGebra.

Palavras-chave: Números complexos. Matemática. Análise complexa.

Abstract

OLIVEIRA, Thúlio José de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2020. **About complex numbers and approaches in high school**. Adviser: Justino Muniz Júnior . Co-adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

The dissertation that will be presented here explores the knowledge about complex numbers, emphasizing their importance for mathematics in high school, with the terminal purpose of exposing a didactic proposal that contributes to the improvement of the teaching of this content. Part of the history of complex numbers as well as real numbers is displayed. Soon after, we present a study on the body of complex numbers that is endowed with their varied representations and properties, in addition we will discuss about the hypercomplex numbers and Fundamental Theorem of Algebra. Finally, an activity scheme for third-year high school students is presented, in order to make a correlation between theory and practice, we use the GeoGebra software.

Keywords: Complex numbers. Mathematics. Complex analysis.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α	letra grega Alfa
β	letra grega Beta
γ	letra grega Gama
δ	letra grega Delta
ϵ	letra grega Épsilon
ζ	letra grega Zeta
η	letra grega Eta
θ	letra grega Teta
ι	letra grega Iota
κ	letra grega Kapa
λ	letra grega Lambda
μ	letra grega Mi
ν	letra grega Ni
ξ	letra grega Xi
o	letra grega Ômicron
π	letra grega Pi
ρ	letra grega Rô
σ	letra grega Sigma
τ	letra grega Tau
υ	letra grega Upsilon
ϕ	letra grega Fi
χ	letra grega Chi
ψ	letra grega Psi
ω	letra grega Ômega

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

No início do século XVI em meio a disputa para resolução das equações de terceiro grau, o professor em Bolonha, Scipicione Del Ferro $(1465 - 1526)$, foi o primeiro matemático a descobrir um método para determinar a solução de uma equação cúbica da forma $x^3 + px = q$, com p e q positivos. Como se fez a descoberta e a sua data são incertas, mas antes de morrer Del Ferro repassou seu método para seu aluno Antonio Maria Fior, e no decorrer do tempo a existência de solução algébrica para equação de terceiro grau foi divulgada por toda Itália. Tomando conhecimento do fato, Nicolo Fontana Tartaglia $(1499 - 1557)$, inspirado pela resolução da cúbica veio a desenvolver seu próprio artifício para resolver essas equações.

Ao saber da descoberta de Tartaglia, Fior veio a desafiar seu compratriota propondo um desafio público, o qual foi aceito, assim ambos elaboraram 30 problemas para que cada um pudesse resolver, sendo que todas as equações sujeitas por Fior eram do tipo $x^3 + px = q$, enquanto Tartaglia propôs equações variadas. Por mérito Tartaglia resolveu todas as 30 questões propostas por Fior, enquanto o mesmo não se saiu bem, isso se deu devido o seu conhecimento se restringir a resolução das equações da forma $x^3 + px = q$. Enquanto Tartaglia, segundo [1]

> *Tinha aprendido também a resolver equações em que cubos e quadrados são igualados a um número. É provável que Tartaglia soubesse reduzir esse caso ao de Fior por remoção do termo quadrático, pois por essa época tornou-se conhecido que se o primeiro termo do coeficiente é a unidade, então o coeficiente do termo quadrático, quando aparece do outro lado do sinal de igual, é a soma das raízes.*

Após o triunfo, Tartaglia foi muito reconhecido e passou a chamar a atenção de outros matemáticos, inclusive do Italiano Geronimo Cardano $(1501 - 1576)$ que o procurou no intuito de saber o método de resolução para as cúbicas. Tartaglia acabou revelando o método a seu apreciador, desde que por meio de um juramento ele não ensinasse ou publicasse a sua técnica. No entanto, Cardano em 1545 rompeu seu juramento e publicou sua obra intitulada *Ars Magna*, na qual traz soluções para equações cúbicas e quárticas.

Cardano ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ obteve como resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

por inspeção ele sabia que 4 era uma raiz da equação, porém com a álgebra real não conseguiu simplificar a equação de modo a encontrar a solução procurada, logo não conseguiu compreender, uma vez que desconhecia haver raiz quadrada de números negativos. Conforme descreve [1]

> *Cardano se referia a essas raízes quadradas de números negativos como "sofisticadas" e concluía que o resultado nesse caso era tão sutil quanto inútil.*

Por intermédio das fórmulas de Cardano, se x é a raiz real de uma equação cúbica temos que

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

mas sempre que

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

a equação não possui raiz real. A todas as cúbicas que recaiam na mesma contradição foi atribuído o nome de irredutíveis.

Na época de Cardano os matemáticos eram reticentes em operar até mesmo com números negativos, pois como relata [11]

> *desde os Gregos até antes da algebrização da matemática (o que foi feito por volta de 1630 por René Descartes e seus seguidores), a noção de número real era restrita aos números que expressavam medidas de grandezas geométricas e físicas: era restrita ao que hoje chamamos de números positivos.*

O que justifica o fato das raízes quadradas de números negativos serem vistas por eles como um absurdo.

Apesar das dúvidas em relação aos complexos, cerca de 30 anos após *Ars Magna* de Cardano, o matemático renascentista Rafael Bombelli $(1526 - 1573)$, no intuito de se compreender o caso irredutível da equação de terceiro grau teve uma ideia muito ousada, segundo [11]

> *ao admitir a existência de "números" cujos quadrados sejam reais negativos e operar com expressões do tipo $a + b\sqrt{-1}$ como se fossem números reais.*

Bombelli estabeleceu as regras operatórias:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= -1 \\
(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) &= -1 \\
(-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= 1 \\
-1(\sqrt{-1})^2 &= 1
\end{aligned}$$

e também as fórmulas para adição e multiplicação:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$
$$(a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$$

com a e b números reais e $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Deste modo, Bombelli pode resolver o paradoxo da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ encontrado por Cardano, pois pela álgebra de Bombelli temos que:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-\sqrt{-1})^2 + (-\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

De maneira que a solução da equação é

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1} = 4.$$

Esses resultados e outros, foram publicados em seu livro $l'lgebra$ no ano de 1572 onde ele introduz os números da forma $a + b\sqrt{-1}$ [7].

Os resultados de Bombelli foram suficientes para resolver os entraves das equações cúbicas irredutíveis, porém o modo algébrico utilizado para apresentar os imaginários (como eram chamados os complexos na época) favoreceu para que os matemáticos, inclusive Cardano, criticassem a existência de tais números. Devido a ideia de número a qual tinham naquele tempo, para que os imaginários fossem legitimados era necessário formular uma teoria geométrica para eles.

No século XVIII o matemático Leonhard Euler $(1707 - 1783)$ foi quem formalizou as propriedades dos números complexos quando denotou usar o símbolo i para $\sqrt{-1}$, surgindo a base para os números imaginários. Desse modo, os números da forma $a + b\sqrt{-1}$, passaram a ser escritos na sua forma algébrica como $a + bi$.

Daí em diante, as desconfianças sobre os complexos foram aos poucos diminuindo, mas a maioria dos matemáticos da época mesmo que usualmente os utilizassem em cálculos algébricos, ainda assim tinham incerteza da validade desses números. Para tanto era preciso utilizar mais argumentos para que os complexos fossem de fato aceitos, essa aceitação plena dos imaginários se deu por meio de sua representação geométrica proposta no findar do século XVIII.

Em 1799 o topógrafo Norueguês Caspar Wessel escreveu um artigo intitulado *Sobre a Representação Analítica da Direção*, em seu trabalho Wessel propôs uma representação através de um sistema de eixos perpendiculares. Sendo que um dos eixos representava os números imaginários puros da forma $0 + bi$, já o outro representava os números da forma $a + 0i$, ou seja, os números reais. Dessa maneira, ele estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os números da forma $a + bi$ e o ponto K do plano de coordenadas (a, b). Logo o ponto K é a representação correspondente do complexo $a + bi$ e desta forma foi possivél representar os números complexos de forma geométrica. Também foi Wessel quem representou os complexos por meio de vetores no plano, possibilitando a adição de números complexos no plano ao somar os seus vetores correspondentes [2].

É interessante ressaltarmos que apesar do pioneirismo do plano complexo proposto por Wessel, segundo [8]

> *este trabalho foi esquecido durante um século e retornou ao conhecimento dos matemáticos graças à tese de S.A.Christensen em 1895. Sua obra é de extrema importância para a história dos números imaginários, embora não tenha sido claramente estudada.*

Tal acontecimento favoreceu para que a representação geométrica dos complexos a qual conhecemos hoje seja denominada de plano Argand-Gauss.

Posteriormente, o trabalho que mais contribuiu para a legitimidade dos complexos foi o do contador e matemático Suíço, Jean Robert Argand $(1768 - 1822)$, que em 1806 publicou uma monografia intitulada *Ensaios sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias*. Em seu trabalho Argand apresenta para os complexos uma representação geométrica muita próxima a de Wessel.

Após os trabalhos de Wessel e Argand acerca da representação geométrica dos números complexos. O matemático mais renomado da época, o Alemão Johann Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$, em 1831 por meio de seu trabalho, Teoria dos Resíduos Quadráticos, defendeu publicamente os números complexos. Ao escrever conforme relata [11]

> *Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que se provou que eles têm um significado tão real quanto os números negativos.*

Não somente a representação geométrica, mas também a importância dos complexos em outros estudos como no de Gauss com a demonstração do teorema fundamental da álgebra, que diz "toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa", fez com que na metade do século XIX não houvesse mais dúvida sobre a legitimidade dos números considerados fictícios.

Depois disso, como proposto por Gauss, os números até então denominados imaginários passaram a ser chamados de números complexos. Ainda coube a Gauss difundir o termo i para $\sqrt{-1}$, apesar de já ter sido proposto por Euler. Daí em diante os números complexos passaram a ser escritos somente na forma $a + bi$.

Willian Hamilton $(1805 - 1865)$ foi outro matemático que contribui para aceitação plena dos números complexos, ao introduzi-los como pares ordenados de números reais, considerando assim o complexo da forma $a + bi$ como o par ordenado (a, b).

Durante o processo de construção dos números complexos, outros matemáticos que não foram citados aqui também fizeram suas contribuições para que esse conjunto numérico fosse autenticado.

Ao analisar os acontecimentos históricos pode-se ver que as descobertas em relação aos números complexos tiveram início a partir da busca em se resolver as equações de terceiro grau, concomitante os matemáticos viram a necessidade de ampliar o conjunto dos números reais. Contrariamente ao pensamento muitas vezes comum a professores e alunos, e relatado em alguns livros didáticos de que tal conjunto numérico surgiu para resolver as equações do segundo grau com discriminante negativo.

A história mostra a dificuldade encontrada para que os números complexos fossem considerados uma classe numérica. Isso nos mostra como é difícil para que um conteúdo matemático seja de fato aceito e construído. A forma algébrica foi a primeira a ser analisada e manipulada, mas foi a interpretação geométrica que contribuiu significativamente para a aceitação e desenvolvimento desses números.

Assim, fazer uso da história da matemática durante o processo de ensino é de suma importância, pois ela se torna um recurso pedagógico indispensável para a educação, uma vez que mostra aos discentes que a matemática está em constante desenvolvimento. Segundo [8]

> *um dos grandes fatores que contribuem para que a matemática não tenha uma "concretude" vem da forma como aprendemos e ensinamos a matemática. Por esta razão, diante de um objeto matemático, é muito importante conhecermos os "problemas" que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento.*

De fato, conhecer a história do conjunto complexo ou parte dela é de suma importância para situarmos sobre o contexto e os motivos que culminaram nas descobertas matemáticas, além do mais nos permite compreender melhor como chegamos aos conhecimentos atuais.

2

A Construção dos Números Reais

Nesse capítulo discorremos brevemente sobre a construção dos números reais. Durante essa divisão enfatizamos os acontecimentos históricos que motivaram o desenvolvimento das novas classes numéricas.

2.1 O surgimento dos números reais

A matemática inicialmente foi fundamentada para vida diária do homem, assim a construção dos primeiros números está associada às necessidades das primeiras civilizações. Os primeiros números a serem construídos foram os números naturais também conhecidos como inteiros positivos. Sabe-se que desde o surgimento da humanidade o homem já utilizava dos números $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ etc para contar.

Por muito tempo os números naturais foram suficientes para o homem primitivo, somente no antigo Egito entre 4000 a.C. e 3000 a.C. que os problemas do cotidiano levaram o homem a desenvolver as primeiras frações, entre as quais estão $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{8}$. A esses números que representam razões entre dois números inteiros foi atribuído o nome de racionais.

O número zero veio a ser inventado posteriormente pelos hindus. Já no começo dos tempos modernos, matemáticos italianos que se dedicavam a álgebra inventaram os números negativos [10].

Cada vez que nos referimos a um número racional, consideramos todos os números que podem ser escritos como a razão entre dois números inteiros a e b, com b não nulo. Dessa forma, tomando $b = 1$ a partir nos racionais obtemos todos os números inteiros, de modo que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais.

Tendo os racionais como número, fazia-se necessário obter uma representação geométrica para eles, a qual como proposto por [9] pode ser apresentada do seguinte modo: marcando dois pontos A e B em uma reta horizontal com B a direita de A, tomando o segmento AB como unidade de comprimento, podemos assumir que os pontos A e B representam os números 0 e 1 respectivamente. Assim, é possível representar todos os números inteiros, basta associar a cada ponto da reta espaçado por uma unidade de comprimento desde A, seu respectivo número inteiro. Desta forma, os números positivos estão à direita de A e os negativos a esquerda. As frações da forma $\frac{1}{n}$ podem ser representadas pelos pontos que dividem o segmento unitário em n partes iguais, já as frações da forma $\frac{m}{n}$ são representadas por todos os pontos da reta que expressam m cópias de $\frac{1}{n}$. Logo, para cada número racional há um único ponto correspondente na reta.

Na Grécia antiga os matemáticos julgavam que os racionais eram suficientes para representar todos os pontos da reta. Desse modo, pelo fato de sempre um ponto na reta corresponder a um segmento de reta foi possível fazer uma correspondência entre os racionais e os mesmos.

Sempre que a unidade é comum a dois segmentos de reta eles são denominados de comensuráveis. Segmentos de reta comensuráveis com a unidade são todos os segmentos CD, tais que um múltiplo de CD é congruente ao segmento unitário AB. Assim, temos que $mCD = nAB$, ou seja, dois segmentos são comensuráveis quando a razão entre eles é um número racional. Então, pela representação geométrica dos racionais compreendemos que todos os racionais são comensuráveis com a unidade [11].

No início acreditava-se que todos os pontos da reta eram comensuráveis com a unidade. No entanto, matemáticos gregos descobriram cerca de 450 A. C. segmentos que não eram comensuráveis com a unidade, os quais receberam o nome de incomensuráveis. Segundo [11]

> *os gregros reduziam a medida de todos grandezas contínuas-geométricas (segmentos de reta, superfícies e sólidos) e físicas (peso, tempo etc) à medida dos segmentos de reta; ora, como achavam que todos os segmentos eram comensuráveis com a unidade, deduziam que toda medida poderia ser expressa por meio da razão entre números naturais (diríamos nós em termos de racionais absolutos).*

Logo mais a descoberta dos incomensuráveis gerou uma crise filosófica , pois conforme descreve [11]

> *veio por terra a doutrina filosófica da muito importante escola pitágorica, a qual pregava que a harmonia do universo; era regida por leis matemáticas expressas em termos de razões entre números naturais.*

.

Não se sabe ao certo, quando ou quem descobriu os incomensuráveis, acredita-se que tenha sido um membro da família dos pitágoricos. Porém, creditar o êxito da descoberta há alguém pouco importa, uma vez que era inegável a existência dos mesmos. Um exemplo desses segmentos é o apresentado na figura 2.1 que representa o comprimento d da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade.

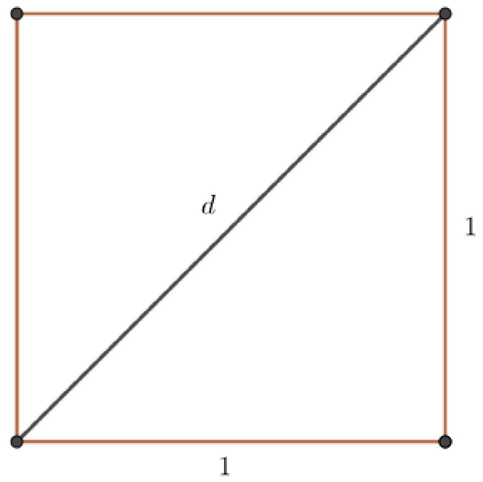

Figura 2.1: Diagonal do quadrado unitário.

Nesse contexto o Teorema de Pitágoras determina que

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow d = \sqrt{2}$$

Segue que é impossível d ser comensurável com a unidade, pois se d fosse comensurável, $\sqrt{2}$ seria um número racional.

De fato, suponhamos por absurdo que $\sqrt{2}$ seja racional, então existe um racional da forma $\frac{p}{q}$ com p e q primos entre si, tal que $\frac{p}{q}$=$\sqrt{2}$. Tem-se:

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$$

Desse modo, obtemos que o inteiro p^2 é par e consequentemente p também é par. Podemos escrever $p = 2k$, com k número inteiro. Assim temos:

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Longrightarrow q^2 = 2k^2$$

que leva q^2 ser par e por consequência q ser par. Logo, obtemos que p e q são ambos pares, o que é uma contradição, pois contraria a hipótese de que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível.

A descoberta dos incomensuráveis mostrou que os racionais não podiam representar todos os pontos da reta. Dessa maneira, segundo [10]

> *havia portanto, uma falha na estrutura lógica da geometria euclidiana a discussão sobre razões e proporções estava incompleta.*

Então, em razão da insuficiência geométrica dos racionais foi necessário admitir que existiam pontos na reta que eram representados por outros números, os quais em alusão ao fato de não poderem ser escritos como a razão entre dois números inteiros, vieram a ser chamados de irracionais.

Mais adiante, a diagonal e o lado do pentágono regular foram outro par de grandezas incomensuráveis descoberto. Além do mais, analogamente ao número $\sqrt{2}$ outros números irracionais surgiram, inclusive foram encontradas até famílias de número irracionais, entre as quais estão a dos números do caramujo de Theodors e as irracionalidades quadráticas [11].

Como era visível que os irracionais estavam presentes em vários campos da matemática e também devido a ineficácia geométrica deles foi concebível construir um novo número. Conforme relata [11]

> *construir um tipo de número mais geral do que os racionais e mostrar que com eles podemos medir exatamente qualquer segmento de reta .*

Esses números foram denominados de reais, os quais compreendem a união dos números racionais e irracionais.

Agora dado qualquer segmento de reta, sempre é possível realizar sua medição, tendo uma unidade de medida como base. Considerando cada número como um ponto da reta, independente de qual ponto tomarmos, por menor que seja sempre haverá um número correspondente a esse ponto, seja ele racional ou irracional. Assim, todo ponto da reta corresponde a um número real e todo real corresponde a um ponto da reta. Portanto, os números reais referem-se à coleção de todos os números correlatos a todos os pontos [10].

Posteriormente na metade do século XIX os números reais vieram ser divididos em duas partes não comuns, o conjunto dos números (reais) algébricos e o conjunto dos (reais) transcendentes.

Os números reais algébricos são todos os números racionais ou irracionais que são raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{Z}, \forall k).$$

Por exemplo, analisemos a equação polinomial $x^2 - 3 = 0$ que possui coeficientes inteiros. Observe que $\sqrt{3}$ satisfaz a equação, então $\sqrt{3}$ é um número algébrico. Também é verdade que todo número racional é um número algébrico, uma vez que dado racional da forma $\dfrac{a}{b}$ com a e b inteiros e b não nulo, tal número sempre irá satisfazer a equação com coeficientes inteiros da forma $ax - b = 0$.

Os matemáticos que se dedicavam aos estudos sobre os números algébricos, tinham dúvida se existiriam números irracionais que não fossem algébricos. Caso o fato fosse concretizado esses números transcenderiam completamente a capacidade da álgebra. Como descreve [11]

> *o primeiro matemático que examinou essa questão foi Leonhard Euler, em torno de* 1750*, e é dele a seguinte definição: número transcendente é todo número que não é algébrico*

A existência dos números irracionais transcendentes foi hesitada pelos matemáticos durante anos, mas após os trabalhos de Joseph Liouville, Charles Hermite e

Ferdinad von Lindmann a dúvida acerca deles foi desfeita. Foi Joseph Liouville quem demonstrou a existência do primeiro transcendente, o número

$$0{,}110001000000000000000001000...$$

que pode ser definido do seguinte modo: $0, a_1a_2a_3...$, onde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = k!, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{não nulo;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo mais Hermite provou que o número e, a base dos logaritmos naturais era transcendente e Lindmann conseguiu mostrar que π também era transcendente. Fatos que contribuíram para averiguar que os números transcendentes ocorriam naturalmente na matemática.

A prova da transcendência de π foi um grande feito, pois por consequência mostrou-se que era impossível se fazer a quadratura do círculo usando apenas régua e compasso.

Para verificarmos a importância da transcendência de π nessa demonstração, é necessário saber que realizar a quadratura do círculo equivale a construir com régua e compasso, o lado de um quadrado cuja área seja igual a área do círculo de raio unitário. Sendo l o lado do referido quadrado temos que

$$l^2 = \pi \Longrightarrow l = \sqrt{\pi}$$

Assim, construir l é equivalente a construir o número $\sqrt{\pi}$. Como todos os segmentos de reta que podem ser construídos com régua e compasso a partir de um segmento unitário, têm como medida um número algébrico. Resta provarmos que $\sqrt{\pi}$ não é algébrico.

De fato, suponhamos por absurdo que $\sqrt{\pi}$ seja algébrico. Conforme proposição 3.3 de [5], o produto de números algébricos é um número algébrico. Então, teriámos que o quadrado de $\sqrt{\pi}$ é um número algébrico. O que é uma contradição, pois contraria o fato de que π é transcendente.

Além do mais, nos estudos a respeito da transcendência dos números reais, George Cantor foi outro matemático que fez uma grande contribuição, ao mostrar que ao contrário do conjunto dos números algébricos o conjunto dos números transcendentes não podia ser enumerado, ou seja, que a maior parte dos números reais é formada por números transcendentes.

Discorremos até aqui, brevemente sobre a construção dos números, desde os naturais até os reais. Procuramos dar ênfase principalmente aos acontecimentos históricos que gradativamente motivaram a construção das classes numéricas.

3

Números Complexos

Neste capítulo introduzimos o conjunto dos números complexos, exibindo a definição desse conjunto numérico, bem como suas operações e propriedades em relação à adição e ao produto, as quais o conferem a estrutura de corpo. Também apresentamos os diversos modos de representar um número complexo, tal qual estão as formas algébrica, geométrica e polar.

3.1 Introdução aos números complexos

Desde o término do ensino fundamental até o terceiro ano do ensino médio, ano em que geralmente os alunos iniciam os estudos acerca dos números complexos, vemos que ao se resolver uma equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, na qual $\triangle = b^2 - 4ac < 0$, o professor de matemática nos atenta a dizer que a equação não possui raiz real, mas que ela existe em outro conjunto numérico. Um exemplo básico dessas equações é

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{que é equivalente,} \quad x^2 = -1,$$

a qual não possui solução em $\mathbb{R}$. Assim, é necessário definir um "número" l satisfazendo $l^2 = -1$, para resolver tal equação.

Além do mais é possível utilizar a Álgebra Linear elementar para buscar um ente de natureza geométrica que seja a solução procurada. Nesse sentido, considerando X uma matriz 2×2 com coeficientes reais, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e "$\cdot$" como produto de matrizes, a equação pode ser reescrita sob a forma

$$X \cdot X = -I,$$

então podemos achar a solução

$l = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pois efetuando o produto de matrizes temos que

$$l \cdot l = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

Solução que geometricamente corresponde a uma rotação no sentido anti-horário de $\frac{\pi}{2}$ radianos no plano de $\mathbb{R}^2$.

Associando ao número $a \in \mathbb{R}$ a matriz $aI = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. As matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se comportam rigorosamente como números reais em relação à soma e ao produto, uma vez que a soma $a + c = c + a$ fica associada a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix},$$

e ao produto $ac = ca$ corresponde

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras, pode-se dizer que $\mathbb{R}$ é isomorfo ao corpo cujos elementos são as matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

Em vista disso, o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser ampliado, considerando para tal as matrizes 2×2 da forma

$$aI + bl = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Sendo que o número da forma $aI + bl$ é chamado de complexo.

Como o número real a corresponde a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e satisfaz todas as propriedades da soma e do produto, temos que $l^2 = l \cdot l = -I$ corresponde ao número real -1. Então, podemos desconsiderar "I" em $aI + bl$ e associar l^2 a -1. Portanto, os números complexos passam a ser representados pelos números da forma $a + bl$ com $a, b \in \mathbb{R}$ [12].

3.2 O corpo dos números complexos

Definição 3.1: O conjunto dos números complexos denotado por $\mathbb{C}$, pode ser definido como o conjunto de todos os pares de números reais $z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes definições para a adição e a multiplicação:

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{3.1}$$

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{3.2}$$

Em $\mathbb{C}$ a soma e produto tem as seguintes propriedades:
(1) comutatividade: $z + w = w + z$ e $zw = wz$.

(2) associatividade: $(z + w) + u = z + (w + u)$ e $(zw)u = z(wu)$.

(3) (0, 0) é o elemento neutro da adição: $z + (0, 0) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(4) (1, 0) é o elemento neutro da multiplicação: $z(1, 0) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(5) todo $z = (a, b)$ tem simétrico aditivo, o número $-z = (-a, -b)$, ou seja, $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.

(6) todo $z = (a, b) \neq (0, 0)$ admite um inverso multiplicatio, o número $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, ou seja, $(a, b) \cdot \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$.

(7) distributividade da multiplicação: $z(w + u) = zw + zu$.

Ademais, como o conjunto dos números complexos é munido das propriedades acima em relação à soma e ao produto ele adquire a estrutura de corpo. Sendo que todas as propriedades decorrem das equações 3.1 e 3.2 e do fato que elas são válidas para números reais, contudo a demonstração delas será feita mais adiante.

Aplicando as regras de adição e multiplicação aos números complexos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, obtemos

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

Dessa maneira, o número complexo $(a, 0)$ pode ser identificado como o número real a, de modo que $(a, 0) = a \in \mathbb{R}$. Logo, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é visto como um subconjunto de $\mathbb{C}$ [12].

3.3 A forma algébrica

O número complexo $(0, 1)$ é denominado unidade imaginária e representado por i, onde $i^2 = -1$, uma vez que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1,$$

ora dessa maneira podemos escrever que $i = \sqrt{-1}$.

Todo número complexo $z = (a, b)$ pode ser representado da forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e i sendo a unidade imaginária.

A representação $z = a + bi$ é chamada de forma algébrica, a é chamado de parte real de z e b é denominado parte imaginária de z. Utilizamos aqui as notações:

$a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Escrevemos um número complexo da forma $a + 0i = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, de modo análogo temos que $0 + 0i = 0$, $1 + 0i = 1$ e $0 + bi = bi$.

Definição 3.2: Considera-se dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ como iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

3.4 Representação geométrica dos complexos

A representação geométrica dos números complexos que conhecemos hoje é denominada de plano Argand-Gauss, segundo a qual para cada par de números reais (a, b) existe um ponto P do plano cartesiano, ou seja, $P(a, b)$. Logo, como há uma correspondência biunívoca entre o par de números reais (a, b) e o complexo $z = a + bi$, podemos associar ao número complexo $z = a + bi$ um único ponto P de coordenadas a e b e vice versa.

No plano de Argand-Gauus o eixo das abscissas é o eixo real $Re(z)$, já o eixo das ordenadas é o eixo imaginário $Im(z)$. O ponto P é chamado de imagem de z, enquanto o complexo correspondente ao ponto $P(a, b)$ é denominado afixo de P. A figura 3.1 mostra essa representação.

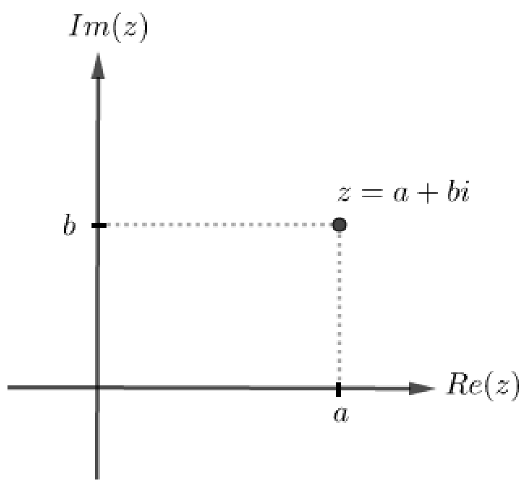

Figura 3.1: Representação geométrica de $z = a + bi$

O número complexo $z = a + bi$ também pode ser representado conforme a figura 3.2, um vetor que tem origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade no ponto (a, b).

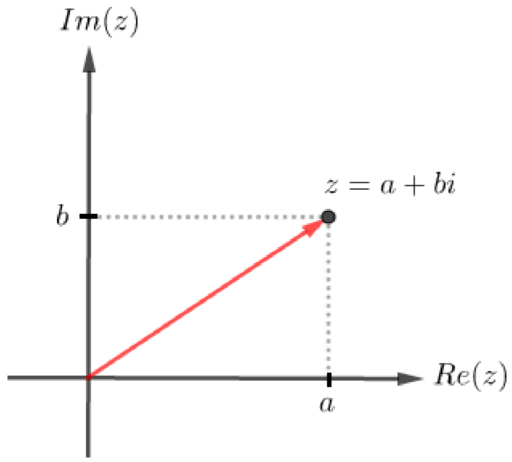

Figura 3.2: Representação de $z = a + bi$ como um vetor

3.5 Operações com números complexos

Nesta seção apresentamos as operações com números complexos e suas representações geométricas. Para maiores informações, o leitor pode recorrer as referências [7] e [11].

3.5.1 Adição

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, a adição $z + w$ é definida do seguinte modo:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

A soma dos Complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, geometricamente representa a soma dos vetores correspondentes a z e w. Assim, a soma $z + w = (a + c) + (b + d)i$ pode ser calculada por uma soma vetorial, aplicando a regra do paralelogramo. Como ambos possuem origem no ponto $(0, 0)$, o associado a z tem extremidade no ponto (a, b) e o outro possui extremidade no ponto (c, d), o vetor resultante terá origem em $(0, 0)$ e extremidade no ponto $(a + c, b + d)$. A figura 3.3 mostra essa representação.

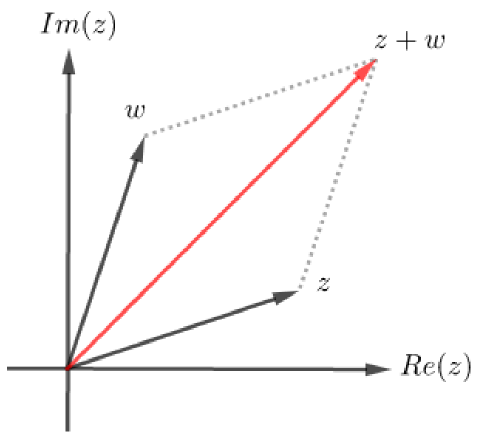

Figura 3.3: Representação geométrica do complexo $z + w$

A adição tem as propriedades a seguir:

Propriedade comutativa
Dados os complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. Então

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Utilizando a propriedade comutativa dos números reais, temos

$$z + w = (c + a) + (d + b)i,$$

ou seja, $z + w = (c + di) + (a + bi) = w + z.$

Propriedade associativa
Dados os complexos $z = a + bi$, $w = c + di$ e $u = e + fi$. Então

$$(z + w) + u = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi),$$

que é equivalente a $(z + w) + u = [(a + c) + e] + [(b + d) + f]\, i.$
Utilizando a propriedade asociativa de número reais, temos

$$\begin{aligned}(z + w) + u &= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]\, i \\ &= (a + bi) + [(c + d) + (e + f)]\, i \\ &= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]\, ,\end{aligned}$$

ou seja, $(z + w) + u = z + (w + u).$

Propriedade do elemento neutro
O elemento neutro da adição é $w = 0 + 0i$, pois dado $z = a + bi$ temos que

$$z + w = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i.$$

Pelo elemento neutro da adição de números reais, segue que

$$z + w = a + bi = z.$$

Propriedade do elemento simétrico
Dado o número complexo $z = a + bi$, existe um $-z \in \mathbb{C}$, tal que $z + (-z) = 0$, a saber $-z = (-a) + (-b)i$, uma vez que

$$z + (-z) = (a + bi) + [(-a) + (-b)i] = (a - a) + (b - b)i.$$

Portanto, pelo inverso aditivo de números reais, temos

$$z + (-z) = 0 + 0i = 0.$$

3.5.2 Subtração

Dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, a operação $z - w$ é definida como $z + (-w)$. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} z - w &= z + (-w) \\ &= (a + bi) + [(-c) + (-d)i] \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

No plano de Argand-Gauss o vetor correspondente a $-w$ é simétrico em relação a origem ao vetor que representa o complexo w. Desse modo, a subtração $z - w$ representada na figura 3.4 corresponde a soma do vetor correspondente a z com o vetor representado por $-w$, tal vetor é a diagonal do paralelogramo que possui como lados adjacentes os vetores representados por z e $-w$.

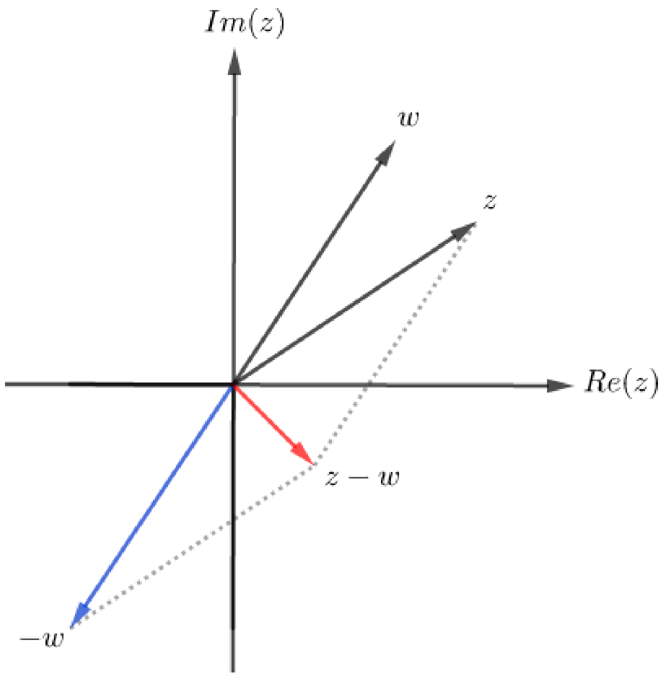

Figura 3.4: Representação geométrica do complexo $z - w$

3.5.3 Multiplicação

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, a multiplicação $z \cdot w$ é definida do seguinte modo:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Quando o número complexo $z = a + bi$ é multiplicado por um $k \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} k \cdot z &= (k + 0i) \cdot (a + bi) \\ &= ka + kbi. \end{aligned}$$

Dessa forma, o produto $k \cdot z$ corresponde a uma dilatação ou contração do vetor correspondente a z, conforme os seguintes casos:

(1) $k > 1$: o vetor será dilatado.

(2) $0 < k < 1$: o vetor será contraído.

(3) $k < -1$: o vetor será dilatado e terá sentido oposto.

(4) $-1 < k < 0$: o vetor será contraido e terá sentido oposto.
A figura 3.5 representa o caso em que $k = \dfrac{-1}{2}$.

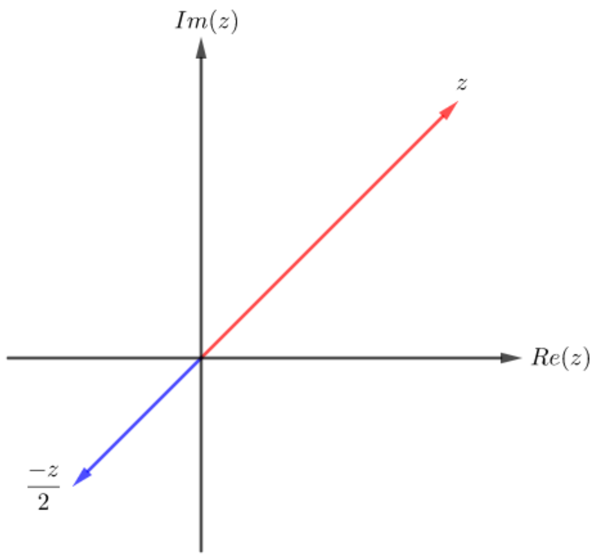

Figura 3.5: Representação geométrica do complexo $\dfrac{-z}{2}$

A multiplicação tem as propriedades a seguir:

Propriedade comutativa
Dados os complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. Então

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Utilizando as propriedades comutativa da multiplicação de números reais, temos

$$z \cdot w = (ca - db) + (da + cb)i.$$

Portanto, $\quad z \cdot w = (c + di) \cdot (a + bi) = w \cdot z.$

Propriedade associativa
Sejam três números complexos $z = a + bi$, $w = c + di$ e $u = e + fi$, segue que

$$(z \cdot w) \cdot u = [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) = [(ac - bd) + (ad + bc)i] \cdot (e + fi),$$

ou seja,

$$(z \cdot w) \cdot u = (ace - adf - bcf - bde) + (acf - bdf + ade - bce)i.$$

Pela associatividade de números reais,

$$(z \cdot w) \cdot u = (a + bi) \cdot [(ce - df) + (cf + de)i] .$$

Portanto, $\quad (z \cdot w) \cdot u = (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] = z \cdot (w \cdot u).$

Propriedade do elemento neutro

A identidade multiplicativa é $1 + 0i = 1$, uma vez que para todo complexo da forma $z = a + bi$ é verdade que

$$z \cdot (1 + 0i) = (a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a \cdot 1 + b \cdot 1i.$$

Pelo elemento neutro da multiplicação de números reais, segue que

$$z \cdot (1 + 0i) = (a + bi) = z.$$

Propriedade do inverso multiplicativo

Todo número complexo $z = a + bi$, com $z \neq 0$ tem um inverso multiplicativo z^{-1} tal que, $\quad z \cdot z^{-1} = 1 + 0i = 1.$

Será exibido que $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i\right)$. Realmente,

$$\begin{aligned}
z \cdot z^{-1} &= (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(-\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)i \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ab - ab}{a^2 + b^2}\right)i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Desse modo, z^{-1} que também pode ser denotado como $\dfrac{1}{z}$ é o inverso multiplicativo de um número complexo não nulo.

Propriedade distributiva em relação à adição

Dados três números complexos $z = a + bi$, $w = c + di$ e $u = e + fi$. Então

$$z \cdot (w + u) = (a + bi) \cdot [(c + di) + (e + fi)] = (a + bi) \cdot [(c + e) + (d + f)i] ,$$

ou seja,

$$z \cdot (w+u) = [a(c+e) - b(d+f)] + [a(d+f) + b(c+e)]\, i.$$

Aplicando a propriedade distributiva dos números reais, temos

$$z \cdot (w+u) = (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i,$$

isto é,

$$z \cdot (w+u) = [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i]\,.$$

Portanto, $\quad z \cdot (w+u) = z \cdot w + z \cdot u.$

3.5.4 Divisão

Definição 3.3: Dados z, $w \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$, o quociente de z por w é definido como sendo:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1},$$

de maneira que, se $z = a + bi$ e $w = c + di \neq 0$ tem-se:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = (a+bi) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{b}{c^2+d^2} i \right).$$

3.5.5 O conjugado de um número complexo

Definição 3.4: O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o número $\overline{z}$ que satisfaz:

$$Re(z) = Re(\overline{z}) \quad \text{e} \quad Im(z) = -Im(\overline{z}),$$

desse modo, tal número é definido como sendo $\overline{z} = a - bi$.

Geometricamente, o conjugado $\overline{z} = a - bi$ corresponde ao simétrico de z em relação ao eixo $Re(z)$, conforme figura 3.6.

Além do mais, o conjugado de um número complexo é relevante para os estudos acerca das equações polinomiais. Conforme discorre o cápitulo 4 sempre que um número complexo $a + bi$ for raiz de multiplicidade s de uma equação polinomial de coeficientes reais, a equação também admitirá como raiz de multiplicidade s o complexo conjugado $a - bi$.

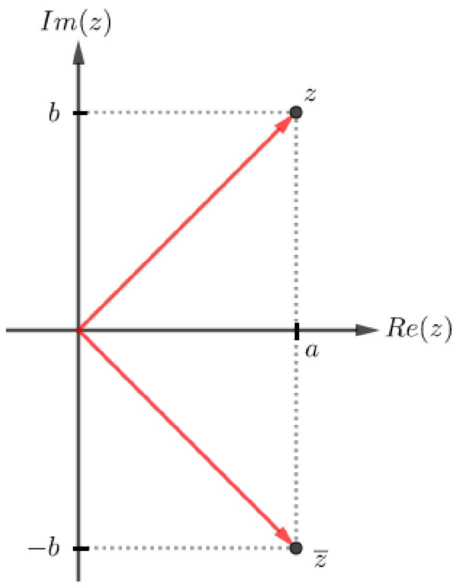

Figura 3.6: Representação geométrica do conjugado $\overline{z} = a - bi$

Proposição 3.5: Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $w \neq 0$, então a conjugação tem as seguintes propriedades:

(1) $\overline{z} = 0$ se, e somente se, $z = 0$.

(2) $z = \overline{z}$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$.

(3) $\overline{\overline{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(4) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

(5) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(6) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(7) $\overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

(8) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

(9) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (1) Se $\overline{z} = a - bi = 0$, então $a = 0$ e $b = 0$, logo $z = a + bi = 0$. Reciprocamente se $z = 0 = 0 + 0i$, então $\overline{z} = 0 - 0i = 0$.

(2) Se $a + bi = z = \overline{z} = a - bi$, então $b = 0$, logo $z \in \mathbb{R}$. Reciprocamente se $z \in \mathbb{R}$, então $z = a + 0i$ e $\overline{z} = a - 0i$, logo $z = \overline{z}$.

(3) $\overline{z} = a - bi$, então $\overline{\overline{z}} = a - (-bi) = a + bi = z$.

(4) Sejam $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\ &= (a \cdot a + b \cdot b) + (ab - ab)i \\ &= (a^2 + b^2) + 0i \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

(5) Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= a + c - bi - di \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{z} + \overline{w}. \end{aligned}$$

(6) Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} \\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= [ac - (-b) \cdot (-d)] + [a \cdot (-d) + (-b) \cdot c]\, i \\ &= (a - bi) \cdot (c - di) \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

(7) Temos que $\quad z \cdot z^{-1} = 1$, então $\quad \overline{z \cdot z^{-1}} = \overline{1}$,

desse modo pela propriedade (5) $\quad \overline{z} \cdot (\overline{z^{-1}}) = 1$.

Portanto, $\quad \overline{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

(8) Temos que $\quad \dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$. Logo, o resultado segue das propriedades (6) e (7).

(9) A prova será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, temos que $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$. Consideremos $n \geq 1$ e suponhamos que a igualdade seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

Queremos mostrar que a igualdade também é verdadeira para $n + 1$. Utilizando a hipótese de indução e a propriedade (6), temos que

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^n \cdot \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}.$$

O que mostra a veracidade da igualdade para $n+1$. Portanto, por indução a propriedade é valida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Além disso, utilizando a noção de conjugado é possível escrever de outra maneira o inverso multiplicativo de um número complexo não nulo, pois dado $z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, temos que:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

Logo, dados os compelxos $z = a + bi$, $w = c + di$, com $w \neq 0$, o quociente $\dfrac{z}{w}$, é mais cômodo de ser calculado do seguinte modo:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{(a+bi)\cdot(c+di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}$$

3.5.6 Potenciação da unidade imaginária

Como $i^2 = -1$ e utilizando-se das propriedades da potenciação definidas em $\mathbb{R}$, é possível calcular as potências de i para todo $n \geq 0$. De modo que:

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = 4q \\ i, & \text{se} \quad n = 4q+1 \\ -1, & \text{se} \quad n = 4q+2 \\ -i, & \text{se} \quad n = 4q+3. \end{cases}$$

A valer,
como $i^2 = -1$, então $i^{2k} = (-1)^k$,
sendo o resultado 1, se k for par e -1, caso k seja ímpar.

Se k é par, $k = 2q$ com $q \in \mathbb{N}$, então $1 = (-1)^k = i^{2(2q)} = i^{4q}$. Assim, $i^n = 1$, se $n = 4q$.

Como $i^{4q} = 1$, então $i^{4q+1} = i^{4q} \cdot i = 1 \cdot i = i$. Logo, $i^n = i$, se $n = 4q+1$.

Se k é impar, $k = 2q+1$ com $q \in \mathbb{N}$, então $-1 = (-1)^k = i^{2(2q+1)} = i^{4q+2}$. Assim, $i^n = -1$, se $n = 4q+2$.

Como $i^{4q+2} = -1$, então $i^{4q+3} = i^{4q+2} \cdot i = -1 \cdot i = -i$. Logo, $i^n = -i$, se $n = 4q+3$.

Daí vemos que as potências de i repetem-se periodicamente com período igual a 4. Portanto, se r é o resto da divisão inteira de n por 4, temos que $i^n = i^r, \forall \quad n \geq 0$.

3.5.7 Módulo de um número complexo

Definição 3.6: Dado um número complexo $z = a + bi$, o módulo de z é o número real positivo denotado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geometricamente, $|z|$ é o módulo do vetor de origem em $(0,0)$ e de extremidade em (a,b), conforme figura 3.7.

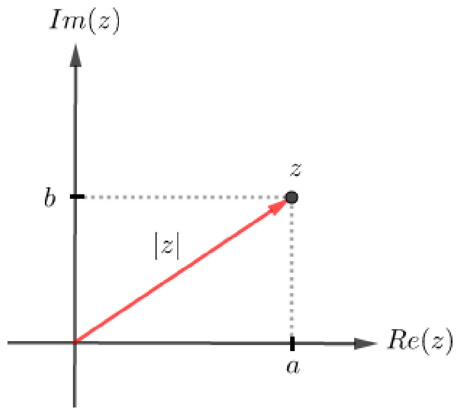

Figura 3.7: Interpretação geométrica do $|z|$.

A igualdade $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ decorre nesse caso do Teorema de Pitágoras. De fato

$$|z|^2 = a^2 + b^2, \text{então}\, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposição 3.7: Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $w \neq 0$, então o módulo tem as seguintes propriedades:

(1) $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$

(2) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$

(3) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$

(4) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z| \quad$ e $\quad Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

(5) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$

(6) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, para $z, w \in \mathbb{C}$ e w não nulo

Demonstração. (1) Se $|z| = 0$, então $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, assim $a = 0$ e $b = 0$, logo $z = a + bi = 0$. Reciprocamente se $z = 0 = 0 + 0i$, então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

(2) Sejam $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\ &= (a \cdot a - b \cdot (-b)) + (a \cdot (-b) + b \cdot a)\, i \\ &= (a^2 + b^2) + (-ab + ab)i \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

(3) Sejam $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ e $-z = -a - bi$, temos

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ e

$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$,

portanto $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

(4) Dado $z = a + bi$, então $Re(z) = a \leq |a| = |Re(z)|$, assim

$a \leq |a| = \sqrt{|a|^2} = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

De modo análogo $\quad b \leq |b| = \sqrt{|b|^2} = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

(5) Dados $z, w \in \mathbb{C}$, então utilizando a propriedade (2), temos

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}).$$

Pela propriedade (6) da proposição 3.5 segue que

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z} \cdot \overline{w}),$$

ou seja,

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

Consequentemente, $\quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(6) Dados $z, w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 0$. Escrevendo $z = w \cdot \left(\frac{z}{w}\right)$ e utilizando a propriedade (5) da proposição 3.5 temos que:

$$|z| = \left| w \cdot \left(\frac{z}{w}\right) \right| = |w| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|.$$

Logo, $\quad \dfrac{|z|}{|w|} = \left|\dfrac{z}{w}\right|$. $\square$

3.6 Forma trigonométrica ou polar

Como os números complexos possuem uma correspondência biunívoca com os pares de números reais (a, b), dado um número complexo $z = a + bi$ não nulo, através de sua representação geométrica é possível identificá-lo com o ponto $P(a, b)$, ou com o vetor de origem em $(0, 0)$ e extremidade em (a, b).

O vetor correspondente a z possui comprimento $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ e determina com o eixo $Re(z)$ um ângulo θ em radianos no sentido anti-horário, em que $0 \leq \theta < 2\pi$. O ângulo θ é denominado argumento principal de z e denotado por $\arg(z)$.

Utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, representado no plano Argand-Gauss da figura 3.8, observa-se que:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r},$$

ou seja, $\quad a = r\cos\theta \quad$ e $\quad b = r\operatorname{sen}\theta, \quad$ com $0 \leq \theta < 2\pi$.

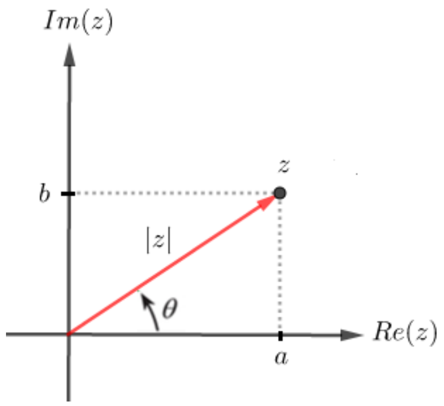

Figura 3.8: Argumento e módulo de z.

Assim, considerando $a = r\cos\theta$ e $b = r\operatorname{sen}\theta$, conforme proposto por Euler[1] a forma trigonométrica ou polar de um número complexo $z = a + bi$ não nulo é expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta i \\ &= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \end{aligned}$$

Desta forma, $\quad z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),$

onde $\quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0 \quad$ e $\quad \theta = \arg(z)$.

[1]Leonhard Euler possivelmente tenha sido o matemático mais prolífico da história, fez descobertas relevantes em vários campos como cálculo infinitesimal e aritmética. Euler nasceu na Suíça e, por oportunidades profissionais, emigrou para a Rússia com 20 anos e ali se estabeleceu, onde é considerado um herói nacional. Ademais, coube a ele facilitar a notação matemática ao introzuzir símbolos como: $f(x), \pi, e, i = \sqrt{-1}, \operatorname{sen} x, \cos x, \log x, \sum$ [4].

Proposição 3.8: Sejam os números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, temos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi l$, com $l \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponhamos que $z_1 = z_2$, então

$$r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2),$$

logo $r_1 = |z_1| = |z_2| = r_2 > 0$ de modo que cancelando r_1 na igualdade acima, obtemos $\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 = \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$. De $\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 = \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$ pela igualdade de números complexos, tem-se $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e $\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2$. Logo, pela periodicidade das funções trigonométricas, obtemos que $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi l$, com $l \in \mathbb{Z}$ [7]. □

3.6.1 Multiplicação na forma trigonométrica

Proposição 3.9: Dados na forma polar os números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, tem-se

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right].$$

Demonstração. A valer,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2\right) \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + (\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2) i\right]. \end{aligned}$$

E utilizando as identidades trigonométricas,

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2,$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2.$$

Portanto, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right].$ □

Assim, na forma polar o produto $z_1 \cdot z_2$ representa um número complexo que possui módulo igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2 e argumento principal igual a soma dos argumentos de z_1 e z_2, conforme figura 3.9.

Considerando os complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, o complexo z_1 ao ser multiplicado por z_2, geometricamente sofre uma dilatação ou contração de módulo r_2, seguido de uma rotação de θ_2 no sentido anti-horário.

O produto de números complexos na forma polar pode ser generalizado de modo que dados,

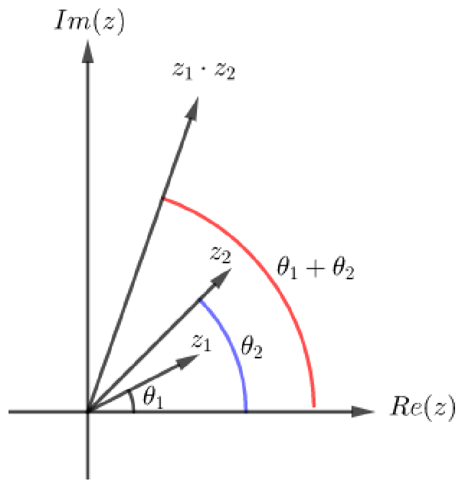

Figura 3.9: Interpretação geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1), z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2), \ldots, z_n = r_n(cos\theta_n + isen\theta_n),$$

temos que

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 r_2 \cdot \cdots \cdot r_n = [cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + sen(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \,.$$

3.6.2 Divisão na forma trigonométrica

Proposição 3.10: Dados na forma polar os números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, com $z_2 \neq 0$, tem-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right].$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 + i \operatorname{sen}^2\theta_2)}.
\end{aligned}$$

Como

$$\cos^2\theta_2 + i \operatorname{sen}^2\theta_2 = 1, \quad \cos\theta_2 = \cos(-\theta_2) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta_2 = -\operatorname{sen}(-\theta_2)$$

segue que,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2)).$$

Portanto, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right].$ $\square$

Assim, na forma polar o complexo $\dfrac{z_1}{z_2}$ representa um número complexo que possui módulo igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2 e argumento principal igual a diferença dos argumento de z_1 e z_2, nesta ordem. A figura 3.10 mostra essa representação.

Considerando os complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, com $z_2 \neq 0$. O complexo z_1 ao ser dividido por z_2, geometricamente sofre uma dilatação ou contração de módulo $\dfrac{1}{r_2}$, seguido de uma rotação de θ_2 no sentido horário .

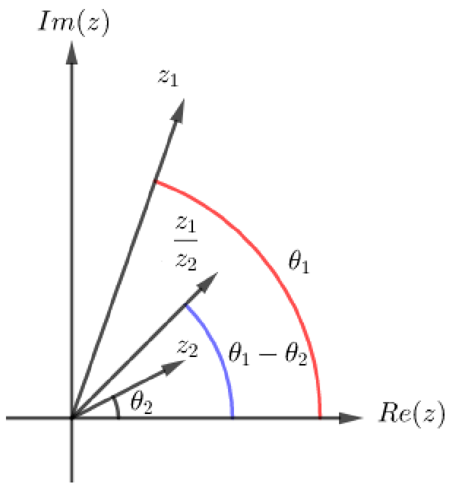

Figura 3.10: Interpretação geométrica do quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$

3.6.3 Potenciação na forma trigonométrica

Proposição 3.11: Dado um número complexo $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, por meio da multiplicação de números complexos na forma polar, temos que

$$\underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n} = \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{n}\left(\cos(\underbrace{\theta + \theta + \theta \cdots + \theta}_{n}) + i\,\mathrm{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \theta \cdots + \theta}_{n})\right),$$

ou seja,

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Fórmula que é devida ao matemático Francês De Moivre[2], e vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

[2]Abraham De Moivre (1667 – 1754) nascerá na França, mas logo foi para Inglaterra e tornou-se professor particular de matemática. Apesar de ter sido eleito para Royal Society, nunca foi professor de universidade, em parte por não ser Inglês de nascimento. De Moivre foi o responsável pelas fórmulas de radiciação e potenciação de números complexos na forma trigonométrica, além do mais seus estudos foram de grande relevância para a teoria das probabilidades [1].

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre o expoente n. Inicialmente iremos mostrar a validade para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ a verificação é imediata e a fórmula é válida. Consideremos $n \geq 1$ e suponhamos que a igualdade seja verdadeira para n, isto é, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$. Queremos mostrar que a igualdade também é válida para $n+1$, logo utilizando a hipótese de indução e a multiplicação de números complexos na forma polar, temos que

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z \cdot z^n \\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot (r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \\ &= r^{n+1}(\cos(\theta + n\theta) + i \operatorname{sen}(\theta + n\theta)) \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i \operatorname{sen}((n+1)\theta)), \end{aligned}$$

O que mostra a veracidade da fórmula para $(n+1)$. Deste modo, por indução mostramos a validade da fórmula para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resta provar a validade da fórmula para todo $n \leq 0$. Para $n = 0$ a igualdade é valida, uma vez que, $r^0 = 1$, $cos0 = 1$ e $sen0 = 0$. Assim

$$z^0 = 1 = r^0(\cos(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)).$$

Considerando $n < 0$ um inteiro, segue que $-n > 0$ e $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Como

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)),$$

Utilizando o fato que a fórmula é valida para os naturais temos

$$\begin{aligned} (z^{-1})^{-n} &= (r^{-1})^{-n}(\cos((-n) \cdot (-\theta)) + i \operatorname{sen}((-n) \cdot (-\theta)) \\ &= r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

A figura 3.11 representa a potenciação para $n = 4$.

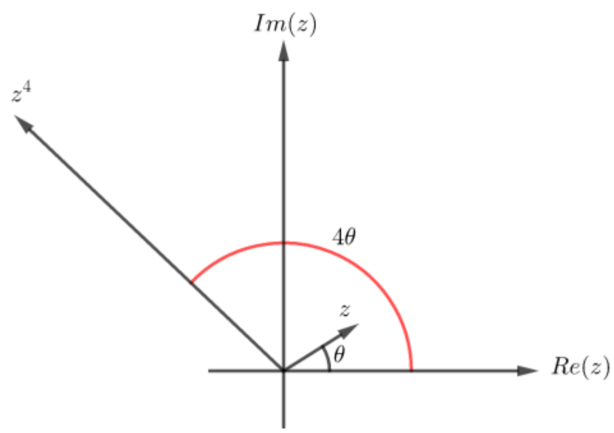

Figura 3.11: Interpretação geométrica de z^4

3.6.4 Raízes complexas n-ésimas

Definição 3.12: Sejam n um número natural dado e z pertencente a um corpo $\mathbb{K}$. Um elemento $w \in \mathbb{K}$ tal que $w^n = z$ é chamado de uma raiz n-ésima de z.

Proposição 3.13: Dado um número complexo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, diferente de zero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, z admite precisamente n raízes complexas n-ésimas, as quais são dadas por:

$$z_l = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right)\right), l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

onde $\quad r = |z| > 0 \quad$ e $\quad \theta = arg(z)$.

Demonstração. Considerando na forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, em que $r = |z| > 0 \quad$ e $\quad \theta = arg(z)$. Para $n \geq 2$ um número natural dado, calcular as raízes complexas n-ésimas de z é equivalente a determinar os números complexos da forma $w = \rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ que satisfazem $z = w^n$.

Do fato de $w^n = \rho^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha))$ e pela igualdade de números complexos, seque

$$\rho^n(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2\pi\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \rho \in \mathbb{Z}, \quad \rho > 0 \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2\pi\gamma}{n}, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Desse modo, temos que

$$z_\gamma = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi\gamma}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi\gamma}{n}\right)\right), \quad \text{onde} \quad \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Sejam $\gamma, \tau \in \mathbb{Z}$, da igualdade de números complexos, temos que

$$\begin{aligned} z_\gamma = z_\tau \quad &\iff \quad \frac{\theta + 2\pi\gamma}{n} - \frac{\theta + 2\pi\tau}{n} = 2\pi k, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \frac{2\pi\gamma}{n} - \frac{2\pi\tau}{n} = 2\pi k, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \frac{\gamma}{n} - \frac{\tau}{n} = k, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \gamma - \tau = kn, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \gamma = kn + \tau, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ou seja, $z_\gamma = z_\tau$ se, e somente se, γ e τ deixam o mesmo resto na divisão por n.

Logo, o que nos interessa é o resto que γ deixa na divisão por n. De modo que para cada resto há uma raiz n-ésima de z.

Dessa maneira, como existem existem $n-1$ restos na divisão por n, para cada $l = 0, 1 \cdots, n-1$ há uma raiz complexa n-ésima de argumento principal

$\alpha_l = \dfrac{\theta + 2\pi l}{n}$. Portanto, as raízes n-ésimas de z são dadas por

$$z_l = \sqrt[n]{r}\left(\cos\alpha_l + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_l\right), \text{onde} \quad \alpha_l = \frac{\theta + 2\pi l}{n}, \quad l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

[7] $\square$

As raízes complexas n-ésimas de z representam no plano complexo um polígono regular de n lados, sendo que o raio de tal polígono tem como medida $\sqrt[n]{r}$, onde $r = |z|$. Além disso, os argumentos dessas raízes formam uma progressão aritmética de primeiro termo igual a $\dfrac{\theta}{n}$ e razão $\dfrac{2\pi}{n}$, conforme figura 3.12.

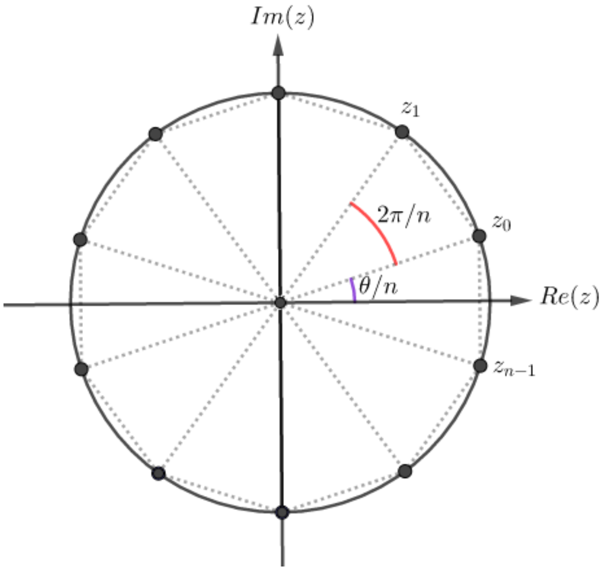

Figura 3.12: Interpretação geométrica das raízes n-ésimas de z

4

O Teorema Fundamental da Álgebra

Conforme já relatamos os números complexos surgiram a partir da insuficiência dos números reais. Vimos que eles foram os responsáveis para “destravar” as cúbicas irredutíveis, mas será que essa extensão dos números reais tem outras capacidades além das que já apresentamos? A resposta para essa pergunta é sim. Nesse contexto, o atual capítulo tem como objetivo mostrar que o corpo dos números complexos é plenamente satisfatório sob o ponto de vista aritmético e algébrico. Para averiguar tais fatos apresentamos aqui com base na referência [11] o Teorema Fundamental da Álgebra.

4.1 Conceitos e nomenclaturas inicias sobre polinômios

Definição 4.1: Por polinômio com coeficientes num corpo numérico $\mathbb{K}$, entende-se toda expressão da forma

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Onde x é um símbolo chamado de indeterminada do polinômio e $a_0, \ldots, a_n$ são constantes pertencentes a $\mathbb{K}$, ditas coeficientes do polinômio.

A fim de nem sempre explicitarmos os termos de um polinômio às vezes o denotamos por $p(x)$, ou notação semelhante. Assim, muitas vezes designamos um polinômio por $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Também quando um polinômio possuir coeficientes $a_k = 1$ é comum não escrevê-los, assim como é costume não escrever o termo $a_k x^k$ sempre que $a_k = 0$, de modo que identificamos:

$$2x^6 + 1x^5 + 0x^4 + 0X^3 - 1x^3 + 3x^2 + 0x + 5 = 2x^6 + x^5 - x^3 + 3x^2 + 5.$$

Definição 4.2: Sempre que um polinômio for da forma $0x^n + \cdots + 0x + 0$, o denominamos como polinômio nulo. De modo que:

$$0 = 0x = 0x + 0 = 0x^2 = 0x^2 + 0 = 0x^2 + 0x + 0 = \ldots .$$

Dessa maneira, toda vez que um polinômio $p(x)$ for nulo, o escrevemos como $p(x) = 0$. Por outro lado, polinômio não nulo é todo polinômio que não é igual ao identicamente nulo, isto é, todo polinômio que tem ao menos um coeficiente diferente de zero.

Definição 4.3: Dizemos que os polinômios $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$ são polinômios iguais se, e somente se, $a_k = b_k$ para todos os $0 \leq k \leq n$. Nesse caso escrevemos $p(x) = q(x)$ e também,

$$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0.$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 3 = ax^3 + bx^2 - cx + d &\Longleftrightarrow 0x^3 + 2x^2 - x + 3 = ax^3 + bx^2 - cx + d \\ &\Longleftrightarrow a = 0, \quad b = 2, \quad c = 1 \quad \text{e} \quad d = 3. \end{aligned}$$

Definição 4.4: Entende-se por equação polinomial de incógnita x, com coeficientes num corpo numérico $\mathbb{K}$, toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_nx^n + \cdots + a_1 + a_0 = 0,$$

onde $n \geq 1$ e $a_0, \ldots, a_n$ são constantes ao corpo $\mathbb{K}$. Por raízes de tal equação entende-se suas soluções que estão em $\mathbb{K}$.

Analisando a equação $x^2 + 9 = 0$, façamos a pergunta: quantas raízes tem essa equação? A resposta não pode ser respondida sem antes esclarecermos qual o corpo numérico envolvido. Por exemplo: se o corpo numérico for $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ a equação não possui nenhuma raiz racional ou real, entretanto se o corpo numérico for $\mathbb{C}$ a equação possui duas raízes complexas $x = 3i$ e $x = -3i$.

A partir das definições de polinômio e equação polinomial é possível fazermos as seguintes correlações:
Sendo $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, a todo polinômio de coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$ e da forma

$$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0,$$

está associada a seguinte equação em $\mathbb{K}$:

$$a_nx^n + \cdots + a_1 + a_0 = 0,$$

a qual pode ser denotada simplesmente por:

$$p(x) = 0.$$

Reciprocamente, toda equação polinomial

$$a_nx^n + \cdots + a_1 + a_0 = 0,$$

determina um polinômio correspondente, o qual é

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Definição 4.5: Dado $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ com coeficientes pertencentes ao corpo numérico $\mathbb{K}$. Uma raiz de $p(x)$ é todo valor $\alpha \in \mathbb{K}$, que satisfaz $p(\alpha) = 0$.

Definição 4.6: Por grau de um polinômio não nulo

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

entende-se o maior expoente de x com coeficiente não nulo na expressão do polinômio. (Aqui devemos considerar o termo constante como sendo: $a_0 = a_0 X^0$)
Analogamente, o grau de uma equação polinomial é o grau do polinômio a ela associado.

Logo, o polinômio $p(x) = 6$ é um polinômio de grau zero, assim como qualquer polinômio da forma $p(x) = t$ com $t \neq 0$, também tem grau zero. Já a equação $6x^4 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$ é de grau 4, uma vez que seu polinômio associado $6x^4 - 7x^2 + 5x - 1$, tem grau 4.

4.2 Teorema Fundamental da Álgebra (existencial)

Existem vários teoremas semelhantes que são descritos como o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Durante essa seção tratamos do mais relevante deles, o qual trata da existência de raízes para equações polinomiais no corpo dos números complexos. Sabemos que existem fórmulas algébricas para determinar as soluções de uma equação polinomial de grau um até quatro, mas não para as de grau cinco ou superior. Além do mais existem demonstrações puramente algébricas do TFA para equações de grau um a quatro, mas não para as de grau cinco ou maior. Fato nos sugere que há uma grande alteração nas propriedades de equações polinomiais ao passarmos de equações de grau quatro para as equações de grau cinco ou superior.

Teorema 4.7 (TFA–versão existencial): Toda equação polinomial com coeficientes no corpo dos números complexos tem ao menos uma raiz neste corpo.

Demonstração. Karl F. Gauss fez várias demonstrações desse teorema durante sua vida, a versão mais conhecida foi a primeira, a qual foi demonstrada em sua tese de doutorado, porém dela apresentamos aqui apenas a ideia básica.

Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, de coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, temos como intuito mostrar que a equação $p(z) = 0$ admite uma raiz no corpo dos números complexos. Como z é um número complexo, trabalhando com z em sua forma algébrica $z = x + iy$, onde x, $y \in \mathbb{R}$.

Segue que a equação a resolver fica:

$$\begin{aligned}0 &= p(z) = p(x+iy)\\ &= a_n(x+iy)^n + a_{n-1}(x+iy)^{n-1} + \cdots + a_2(x+iy)^2 + a_1(x+iy) + a_0.\end{aligned}$$

Como todos os coeficientes a_k também pertencem aos complexos, se escrevermos os coeficientes na forma algébrica

$$a_k = c_k + id,$$

e separarmos os termos da equação multiplicados por i dos termos que não estão multiplicados por i, vemos que ela pode ser escrita na forma:

$$u(x,y) + iv(x,y) = 0,$$

onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são polinômios em duas indeterminadas[1] e de coeficientes reais.

Assim, seque que

$$p(x+iy) = 0$$

tem raiz se, e só se, existir um par de números reais (x, y) que satisfaça o sistema de equações reais:

$$\begin{cases} u(x,y) = 0 \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Conforme foi observado por Gauss $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$ podem ser vistas como equações de curvas no plano cartesiano. Logo, mostrar a existência de uma raiz no corpo dos números complexos para a equação polinomial analisada é equivalente a mostrar que as duas curvas, $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$, têm pelo menos uma intersecção.

Consideremos o caso particular em que a equação $p(z) = 0$ tem grau um, isto é: $az + b = 0$. Apesar de nesse caso termos a solução óbvia $z = \dfrac{-b}{a}$, vamos utilizar esse caso particular a fim de explicitar e ilustrar a ideia de Gauss.

Escrevendo $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$ e substituindo essas igualdades em $az + b = 0$, segue que 4.1 se transforma no sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x - a_2y = b_1 \\ a_2x + a_1y = b_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Desse modo, para esse caso particular, mostrar que as curvas $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$ tem pelo menos uma intersecção é o mesmo que mostrar que as retas

[1] Um polinômio nas indeterminadas x e y, e com coeficientes em um corpo numérico $\mathbb{K}$, é uma expressão da forma $a_0 + a_{11}xy + \cdots + a_{ij}x^iy^j + \cdots + a_{mn}x^my^n$, onde m e n são naturais e $a_0, a_1, \ldots, a_{ij}, \ldots$, são elementos que pertencem a $\mathbb{K}$.

$a_1x - a_2y = b_1$ e $a_2x + a_1y = b_2$ se cortam. A valer, isso efetivamente ocorre, pois o determinante da matriz principal

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

do sistema 4.2 é não nulo. De fato, $\det A = a_1^2 + a_2^2 = |a|^2 \neq 0$, uma vez que $a \neq 0$.

Apresentamos o caso em que $p(x)$ é de grau 1, entretanto no caso em que $p(x)$ possui grau 2 ou maior, a prova da existência de um ponto comum as curvas $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$ é muito mais complicada. Para esses casos fazemos uma argumentação heurística que resume as ideias de Gauss. O ponto concludente de seu argumento consiste em analisar o aspecto das curvas $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$ bem longe da origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Como a curva $u(x,y) = 0$ é originada por uma equação polinomial complexa com grau $n \geq 2$, e por os termos de maior grau serem quem decidem o comportamento de curvas polinomiais bem longe da origem, Gauss pôde mostrar que a curva $u(x,y) = 0$ tem um ramo (ou "pedaço" contínuo) um dos lados do qual possui como assíntota[2] a reta que faz um ângulo $\theta = \dfrac{180}{2n}$ graus com o eixo x, e o outro lado do ramo tem como assíntota a reta que faz um ângulo de 3θ graus com o eixo x.

Analogamente, ele pôde mostrar que a curva $v(x,y) = 0$ tem um ramo que de um lado é assintótico a uma reta que faz um ângulo de 2θ com o eixo x, já outo ramo é assintótico como o próprio eixo x. Logo, conforme podemos ver na figura 4.1, a continuidade desses ramos, juntamente ao comportamento assintótico apresentado por ambos, faz com que os ramos acabem se interceptando, como queriamos justificar. □

Por exemplo, para o polinômio $p(z) = z^2 + 1$, escrevendo $z = x + yi$, obtemos

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$$

e

$$v(x, y) = 2xy.$$

Observe que $u(x, y) = 0$ é representado pela curva $y^2 - x^2 = 1$ que é uma hipérbole equilátera e $v(x, y) = 0$ é representado pelas curvas $x = 0$ e $y = 0$, logo resta analisarmos os aspetos dessas respectivas curvas. A figura 4.2 mostra as representações das mesmas.

Como $p(z)$ é de grau 2 temos que $\theta = 45°$, assim $u(x, y) = 0$ possui como assintótas as retas $y = x$ e $y = -x$, já $v(x, y) = 0$ é assintótico as retas $y = 0$ e

[2] Uma assíntota de uma curva C pode ser descrita como uma curva de onde os pontos de C se aproximam à medida que se percorre C, uma definição mais rigorosa pode ser dada usando a noção de limite, estudada em cursos de Cálculo Infinitesimal. Mas, ainda que aqui não possamos abordar esse termo de modo mais aprofundado, após analisar a figura 4.1, de forma intuitiva a condição descrita acima fica bem entendida.

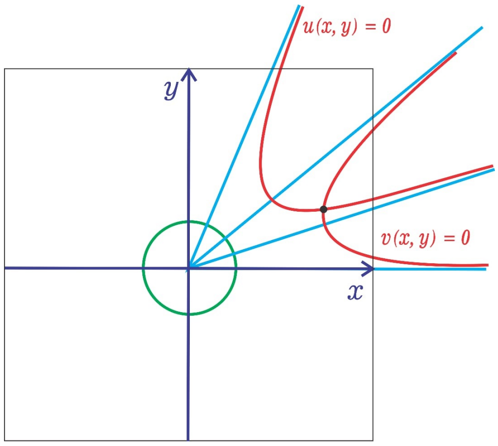

Figura 4.1: Interceptação de $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 0$.

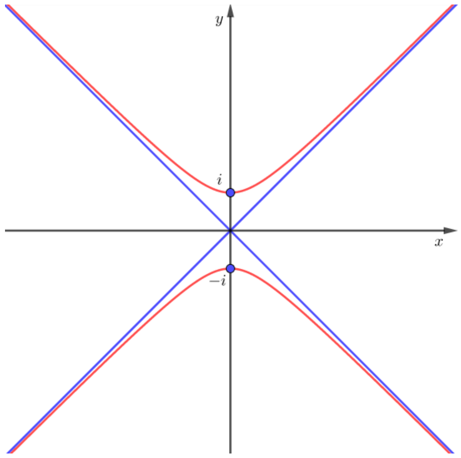

Figura 4.2: Interpretação das raízes de $p(z) = z^2 + 1$

$x = 0$. Portanto, as intersecções entre as referidas curvas são i e $-i$ como já era de se esperar.

4.3 Consequências preliminares sobre a igualdade e fatoração de polinômios

Todos os polinômios desta seção são considerados como tendo coeficientes num mesmo corpo númerico $\mathbb{K}$.

Proposição 4.8: $x - a$ é um fator de $x^n - a^n$, quaisquer que sejam $n \geq 2$ inteiro e $a \in \mathbb{K}$. Isto é, existe um polinômio $q(x)$, com coeficientes em $\mathbb{K}$, tal que:

$$x^n - a^n = (x - a) \cdot q(x)$$

Demonstração. Basta verificarmos, por multiplicação direta, as seguintes identidades (observe que as mesmas já dão explicitamente a expressão do polinômio $q(x)$).

$$
\begin{aligned}
x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) \\
x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2+ax+a^2) \\
x^4 - a^4 &= (x-a)(x^3+ax^2+a^2X+a^3) \\
&\cdots \\
x^n - a^n &= (x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.9 (Teorema da fatoração): Dada α raiz do polinômio $p(x)$, o respectivo polinômio $p(x)$ admitirá o polinômio $x-\alpha$ como fator. Ou seja, para um determinado polinômio $q(x)$, vale a identidade polinomial:

$$p(x) = (x-\alpha)q(x)$$

Demonstração. Suponhamos

$$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_0.$$

Como α é raiz da equação $p(x)=0$, segue que

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Assim, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= p(x) - 0 \\
&= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\
&= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x-\alpha).
\end{aligned}
$$

Observe que, pela proposição 4.8, cada parênteses do segundo membro da última igualdade possui $(x-\alpha)$ como um fator. Portanto,

$$p(x) = (x-\alpha)q(x).$$

□

Teorema 4.10: Sempre que um polinômio $p(x)$ puder ser fatorado como $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, onde α é um número pertencente ao mesmo corpo que os coeficientes dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$, podemos afirmar que α é uma raiz da equação polinomial $p(x)=0$. Isto é:

$$p(x) = (x-\alpha)q(x), \text{ então } \quad p(\alpha) = 0.$$

Assim, o conjunto das raízes da equação $p(x)=0$ tem como elementos α e as eventuais raízes da equação $q(x)=0$.

Demonstração. É imediato que α satisfaz $p(x) = 0$. Em contrapartida, a fatoração dada nos permite ver que toda raiz de $q(x) = 0$ tem de ser raiz de $p(x) = 0$. Reciprocamente, se $\beta \neq \alpha$ for raiz de $p(x) = 0$, temos que $0 = p(\beta) = (\beta - \alpha)q(\beta)$. Logo, como $(\beta - \alpha) \neq 0$, segue que $q(\beta) = 0$. □

Por exemplo, o polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 - 6x$, pode ser fatorado como

$$p(x) = x(x^2 + 5x - 6),$$

assim 0 é uma raiz da equação polinomial $p(x) = 0$. Desse modo, para encontrarmos as demais raízes reais dessa equação, basta resolvermos a equação do segundo grau:

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Teorema 4.11 (Teorema da fatoração repetida): Se forem conhecidos uma sequência de raízes (distintas) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de uma mesma equação polinomial $p(x) = 0$, existirá uma fatoração de $p(x)$ da forma

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)q(x),$$

para algum polinômio $q(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 4.9, temos $p(x) = (x - \alpha_1)q_1(x)$, para algum polinômio $q_1(x)$ apropriado. Pelo teorema 4.10, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ têm de ser raízes de $q_1(x) = 0$. Uma nova aplicação do teorema 4.9, agora no polinômio $q_1(x)$, exibe que $q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x)$, para um polinômio $q_2(x)$ apropriado. Então, podemos escrever

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x),$$

e utilizando novamente o teorema 4.10 podemos afirmar que $\alpha_3, \ldots, \alpha_k$ têm de satisfazer $q_2(x) = 0$. O mesmo argumento pode ser repetido várias vezes até chegarmos a raiz α_k. □

Teorema 4.12 (Teorema da enumeração finita): Toda equação polinomial, de grau $n \geq 1$ e coeficientes num corpo numérico $\mathbb{K}$, possui no máximo n raízes em $\mathbb{K}$.

Demonstração. Seja $p(x) = 0$ a equação dada de grau $n \geq 1$. Temos como intuito mostrar que se a mesma tiver raízes, a quantidade delas não pode ser maior que n. Suponhamos por absurdo que equação admitisse $n + 1$, ou mais raízes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ pelo teorema 4.11 podemos escrever:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})q(x).$$

Desse modo, obtemos as seguintes alternativas:

- ou o polinômio $q(x)$ é nulo, o que acarretaria $p(x)$ ser nulo. Fato que contraria hipótese de que $p(x)$ tem grau n, logo é um absurdo.

- ou $q(x)$ não é nulo, o que acarretaria ao produto da direita ser um polinômio de grau $\geq n+1$. Logo, maior do que grau de $p(x)$, o que é absurdo.

$\square$

Por exemplo, para equação $x^2 - 3 = 0$ que possui grau $n = 2$, pode-se afirmar:

- a equação não possui raízes no corpo numérico $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
- no corpo númerico $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, é fácil verificar que tal equação possui duas raízes $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, assim pelo teorema descrito acima ela só pode ter essas raízes reais. Deste fato, pode-se escrever $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

Não podemos deixar de observar que se $p(x)$ for um polinômio constante, a equação $p(x) = 0$ não tem nenhuma raiz. Entretanto se $p(x)$ for um polinômio nulo, a referida equação tem infinitas raízes.

Corolário 4.13: Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios de coeficientes num mesmo corpo numérico, ambos com grau $\leq n$ e não nulos. Se $p(a) = q(a)$, para $n+1$ valores diferentes de a no corpo, então $p(x) = q(x)$.

Demonstração. Sendo $p(a) = q(a)$, para $n+1$ valores distintos de a em um corpo numérico, assim temos que a equação polinomial $p(x) - q(x) = 0$ terá mais de n raízes nesse corpo. Segundo o Teorema 4.12 isso só pode ocorrer quando $p(x) - q(x) = 0$ for um polinômio nulo, ou seja, quando os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ forem iguais. $\square$

4.4 Teorema Fundamental da Álgebra (enumerativo)

Durante essa seção quando falarmos em equação polinomial, sempre estamos supondo que a mesma corresponde a um polinômio que não seja constante, tendo grau ≥ 1.

Os resultados exibidos até aqui, nos possibilitam apenas dizer que, dada uma equação polinomial de grau n com coeficientes no corpo dos números complexos, a mesma terá de uma a n raízes nesse corpo. Analisando por exemplo, a equação $x^6 - 3x + 1 = 0$, sabemos que no corpo dos números complexos ela terá de uma a seis raízes, mas seria melhor se pudessemos dizer a quantidade exata de raízes dessa equação. A fim de buscarmos esse resultado será necessário, para certos casos, haver a possibilidade de contar uma raiz mais de uma vez. O modo o qual fazemos isso é baseado na definição a seguir.

Definição 4.14: Dizemos que um número α é raiz de multiplicidade s de uma equação polinomial $p(x) = 0$ se, e só se, valer uma fatoração do tipo

$$p(x) = (x - \alpha)^s q(x),$$

onde $q(x)$ verifica $q(\alpha) \neq 0$.

Sempre que $s = 1$ dizemos que α é raiz simples, e quando $s = 2, 3, \ldots,$ dizemos que α é, respectivamente raiz dupla, tripla, etc.

Por exemplo, a equação $x^3 - 5x^2 - 5x - 3 = 0$ pode ser fatorada como

$$x^3 - 5x^2 - 5x - 3 = (x-1)^2(x-2),$$

desse modo ela tem uma raiz simples $x = 2$ e uma raiz dupla $x = 1$.

Lema 4.15: Se para todos os valores de x num corpo numérico valer uma igualdade do tipo

$$(x-\alpha)^{s_1}q_1(x) = (x-\alpha)^{s_2}q_2(x). \tag{4.3}$$

Onde $q_1(x)$ e $q_2(x)$ são polinômios, e s_1 e s_2 são números que satisfazem $s_1 < s_2$, então α é raiz da equação $q_1(x) = 0$. Assim, para todos os valores de x, inclusive de $x = \alpha$, vale

$$q_1(x) = (x-\alpha)^{s_2 - s_1}q_2(x).$$

Demonstração. Dividindo ambos os lados de 4.3 por $(x-\alpha)$, para $x \neq \alpha$, temos que $q_1(x) = (x-\alpha)^{s_2-s_1}q_2(x)$, para todos os vaores de $x \neq \alpha$. Por fim resta aplicarmos o corolário 4.13. □

Teorema 4.16: Em corpos numéricos, a cada raiz de uma equação polinomial fica atribuído um único grau de multiplicidade

Demonstração. • Existência do grau de multiplicidade.

Quando nos referimos a equação polinomial, estamos tratando com um polinômio $p(x)$ de grau $n \geq 1$, assim por hipótese existe um número α_1 que é raiz da equação $p(x) = 0$. Logo, pelo teorema 4.9 temos

$$p(x) = (x-\alpha_1)p_1(x),$$

onde $p_1(x)$ tem de ser um polinômio de grau $n-1$.

Caso $p_1(\alpha) \neq 0$, temos $s = 1$. Caso $p_1(\alpha) = 0$, como $p_1(x)$ não pode ser o polinômio identicamente nulo (pois isso faria com que $p(x)$ também fosse identicamente nulo), utilizando novamente o teorema 4.9, obtemos

$$p_1(x) = (x-\alpha_1)p_2(x),$$

e então

$$p(x) = (x-\alpha_1)^2p_2(x),$$

sendo $p_2(x)$ algum polinômio não identicamente nulo.

Desse modo, caso $p_2(\alpha) \neq 0$, temos $s = 2$, caso $p_2(\alpha) = 0$, repetimos com $p_2(x)$ o raciocínio feito com $p_1(x)$, e assim sucessivamente. De modo que construímos uma sequência de polinômios não identicamente nulos $p_1(x), p_2(x), \ldots$ de graus respectivamente $n-1, n-2, \ldots$. O mesmo processo pode-se repetir até $p_n(x)$, que tem de ser um polinômio de grau zero, em outras plavras, $p_n(x) = c \neq 0$ (polinômio constante), o que ocasionaria a fatoração

$$p(x) = (x-\alpha)^n p_n(x) = c(x-\alpha)^n,$$

a qual implicaria $s = n$. Portanto, a cada raiz α da equação $p(x) = 0$, está atribuída uma multiplicidade s, que terá um valor entre 1 e n.

- Unicidade do grau de multiplicidade.

Suponhamos que existam $s_1 < s_2, q_1(\alpha) \neq 0$ e $q_2(\alpha) \neq 0$, tal que

$$(x-\alpha)^{s_1} q_1(x) = (x-\alpha)^{s_2} q_2(x)$$

para todos os valores de x no respectivo corpo. Assim, aplicando o lema 4.15, temos que

$$q_1(x) = (x-\alpha)^{s_2 - s_1} q_2(x),$$

para todos os valores de x, inclusive α, o que implicaria ao absurdo $q_1(\alpha) = 0$. □

Por exemplo, para a equação $(x+1)^3(x-2) = 0$, podemos dizer que temos uma raiz tripla ($x = -1$) e uma raiz simples ($x = 2$). À vista disso, dizemos que a equação possui três raízes reais: $x = -1$ que é contada duas vezes e $x = 2$.

Teorema 4.17 (TFA–versão enumerativa): Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$, e coeficientes no corpo dos números complexos, tem exatamente n raízes nesse corpo, entendendo-se que contamos cada raiz tantas vezes quanto valer sua multiplicidade.

Demonstração. Sendo $p(x)$ o polinômio associado a equação, pelo TFA–versão existencial, a equação $p(x) = 0$ admite no corpo dos números complexos ao menos uma raiz α_1. Logo, pelo teorema 4.9 podemos escrever

$$p(x) = (x-\alpha_1)q_1(x),$$

para algum polinômio $q_1(x)$ de grau $n-1$.

Caso $q_1(x)$ não seja um polinômio constante, aplicando novamente o TFA–versão existencial a equação $q_1(x) = 0$, combinada com o teorema 4.9, nos assegura a existência de um número complexo α_2 , que é raiz tanto de $q_1(x) = 0$ como de $p(x) = 0$, tal qual assegura para algum polinômio $q_2(x)$ de grau $n-2$, a escrita

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)q_2(x).$$

Caso $q_2(x)$ não seja um polinômio constante, repetimos com ele o mesmo processo feito com $q_1(x)$, bem como com os polinômios $q_3, q_4, \ldots$ que serão obtidos através da repetição do raciocínio. Não é difícil ver que esse processo de sucessivas reduções de grau só terminará ao se obter um polinômio $q_k(x)$ constante, fato que só vai ocorrer quando $k = n$. Logo, nesta fase valerá a seguinte fatoração:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)q_n(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

onde c é o valor do polinômio constante.

Comparando os termos de grau n da esquerda e da direita da última igualdade obtemos que: $a_n x^n = cx^n$, logo $c = a_n$; de outo modo, vale a seguinte igualdade:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Dessa maneira, prova-se que a equação $p(x) = 0$ tem n raízes possivelmente repetidas.

Ainda resta provarmos que cada raiz aparece repetida tantas vezes quanto for o valor de sua multiplicidade. Denotando por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ os valores distintos das raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, com $m \leq n$, e agrupando os fatores iguais é possível escrever uma nova fatoração do seguinte modo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \beta_1)^{s_1}(x - \beta_2)^{s_2}\ldots(x - \beta_m)^{s_m}.$$

Entretanto, ainda nos resta provar que s_k é a multiciplidade da raiz β_k. A fim disso, consideremos a fatoração da forma:

$$p(x) = (x - \beta_k)^{s_k}q_k(x),$$

onde $q_k(x) \neq 0$, assim aplicando a definição de multiplicidade podemos afirmar β_k é raiz de multiplicidade s_k. □

Analizando por exemplo, a equação $x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = 0$, por meio do TFA–versão enumerativa sabemos que tal equação possui exatamente três raízes no corpo dos números complexos. De fato, elas são -3 e $\pm 2i$, e também vale a igualdade:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x + 2i)(x - 2i).$$

4.5 TFA–fatoração

Escrever qualquer polinômio real como um produto de fatores reais com o menor grau possível, foi historicamente um grande desafio para os matemáticos até meados de 1700. Nesse contexto a versão do TFA que examinamos nesta seção, mostra que essa escrita com coeficientes reais sempre é possível, desde de que eles tenham no máximo grau dois.

Teorema 4.18 (TFA–versão fatoração linear): Sendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ todas as raízes distintas ou não de uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, de grau n e cujos coeficientes pertencem ao corpo dos números complexos, nos possibilita escrever o polinômio associado pela fatoração:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

De modo equivalente, denotando por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ os valores distintos das raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e agrupando os fatores iguais, podemos reescrever a fatoração como

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \beta_1)^{s_1}(x - \beta_2)^{s_2} \ldots (x - \beta_m)^{s_m},$$

onde as multiplicidades das raízes são dadas por $s_1, s_2, \ldots, s_m$.

Demonstração. Esse teorema pode ser visto como uma expanção do TFA–versão enumerativa, no entanto a prova do próprio TFA–versão enumerativa já é o bastante para a prova do presente teorema. □

Corolário 4.19: Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes no corpo dos números reais. Então, para cada número complexo z é verdade que:

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z})$$

Demonstração. seja $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde os coeficientes são números reais. Dado um z pertencente aos complexos, aplicando sucessivamente as propriedades $(5), (6), (9)$ e (2) da proposição 3.5, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{p(z)} &= \overline{a_nz^n + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0} \\
&= \overline{a_nz^n} + \cdots + \overline{a_2z^2} + \overline{a_1z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_2}\,\overline{z^2} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z}^n + \cdots + \overline{a_2}\,\overline{z}^2 + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \\
&= a_n\overline{z}^n + \cdots + a_2\overline{z}^2 + a_1\overline{z} + a_0 \\
&= p(\overline{z}).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.20: Se um número complexo $a + bi$ for raiz de multiplicidade s de uma equação polinomial de coeficientes reais, a equação também admitirá como raiz de multiplicidade s o complexo conjugado $a - bi$.

Demonstração. Seja a equação $p(x) = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z, então

$$p(z) = 0.$$

Assim, segue que

$$\overline{p(z)} = \overline{0},$$

ou seja,

$$\overline{p(z)} = 0.$$

Pelo corolário 4.19 temos

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z}).$$

Portanto, $p(\overline{z}) = 0$. □

Examinemos por exemplo, a equação $x^2 - 6x + 10 = 0$, por meio das técnicas para resolução de uma equação quadrática, encontramos suas raízes $x_1 = 3 + i$ e $x_2 = 3 - i$, e de fato $x_2 = \overline{x_1}$.

Corolário 4.21: Todo polinômio de coeficientes reais, cuja equação associada tenha raízes complexas, tem fator quadrático real.

Demonstração. Pelo teorema 4.20 sabemos que essas raízes complexas aparecem aos pares conjugados, assim para chegarmos ao resultado esperado basta aplicarmos a identidade

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).$$

□

Teorema 4.22 (TFA–versão fatoração real): Todo polinômio $p(x)$ de coeficientes reais pode ser fatorado no corpo dos números reais, em termos de fatores reais lineares e/ou fatores reais quadráticos.

Demonstração. É um resultado do TFA-versão fatoração linear. Por esse teorema cada raiz real da origem a um fator linear real. No que diz respeito as raízes complexas, como o polinômio possui coeficientes reais, elas aparecem aos pares conjugados, e por meio do corolário 4.21, os mesmos fatores lineares complexos originam um fator quadrático real. □

Examinemos por exemplo, o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Por substituição direta sabe-se que $x = 1$ é raiz da equação $p(x) = 0$. Assim, $p(x)$ admite uma fatoração real linear/quadrática do Tipo:

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + 1).$$

4.6 Relações entre coeficientes e raízes de equações polinomiais

Através do TFA versão enumerativa sabemos que toda equação polinomial de grau n com coeficientes complexos admite exatamente n raízes complexas. Mas seria possível relacionar essas raízes com os coeficientes da respectiva equação polinomial? Nesse contexto, o objetivo dessa seção é determinar as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial qualquer.

Teorema 4.23 (Fórmulas de Newton-Viète (caso grau 2)): Denotando por α_1, α_2 as raízes (reais ou complexas, distintas ou não) de uma equação quadrática,

$ax^2 + bx + c = 0$ de coeficientes reais ou complexos, temos que valem as relações:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

Demonstração. Através do TFA–versão fatoração linear temos que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2),$$

de maneira que desenvolvendo os produtos do lado direito da equação acima, obtemos:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha_1 + \alpha_2) + a\alpha_1\alpha_2.$$

Por fim pela definição da igualdade entre polinomios, e comparando os coeficientes correspondentes, temos

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

□

Teorema 4.24 (Fórmulas de Newton-Viète (caso grau 3)): Denotando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as raízes (reais ou complexas, distintas ou não) de uma equação cúbica, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ de coeficientes reais ou complexos, temos que valem as relações:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{-b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= \frac{c}{a} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \frac{-d}{a}. \end{aligned}$$

Demonstração. Através do TFA–versão fatoração linear temos que:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3),$$

de maneira que desenvolvendo os produtos do lado direito da equação acima, obtemos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + a(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - a(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Assim, analogamente ao que fizemos para o caso de grau 2, podemos chegar ao resultado desejado. □

Para as equações polinomiais de grau $n \geq 1$ a prova é feita por indução.

Teorema 4.25 (Fórmulas de Newton-Viète (caso grau $n \geq 1$)): Denotando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ as raízes (reais ou complexas, distintas ou não) de uma equação polinomial, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-a} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais ou complexos, temos que valem as relações:

$$\begin{aligned}
\frac{-a_{n-1}}{a_n} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\
\frac{-a_{n-3}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_2\alpha_3\alpha_n \\
&\quad + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \\
&\dots \\
(-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n
\end{aligned}$$

Essas relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial, juntamente com uma informação adicional sobre as referidas raízes, nos possibilita em muitos casos encontrar tais soluções. Consideremos o seguinte caso: Resolvamos a equação $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$, sabendo que as suas raízes estão em progressão aritmética.

Sejam $x_1 = a - r$, $x_2 = a$ e $x_3 = a + r$ as raízes da equação. Pelo teorema 4.24 temos

$$\begin{cases}
15 = x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\
66 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3a^2 - r^2 \\
80 = x_1x_2x_3 = a(a^2 - r^2)
\end{cases}$$

Por meio da primeira equação, segue que $a = 5$. Da segunda, temos que $75 - r^2 = 66$, assim $r^2 = 9$, e então $r = \pm 3$. Portanto, obtemos que as raízes da equação são: 2, 5 e 8.

5

Existem números além dos Complexos?

No capítulo anterior vimos que o corpo dos números complexos é totalmente satisfatório, tanto do ponto de vista algébrico quanto do aritmético. Mas ainda assim, com o passar do tempo foram criados outros conjuntos númericos que tem um papel importante na resolução de problemas científicos e matemáticos, entre os quais estão, o dos números p-ádicos e dos reais não-standard. No entanto o estudo desses campos está acima dos contéudos matemáticos apresentados neste trabalho. Por isso, no atual capítulo damos ênfase apenas ao estudo dos números hipercomplexos, o qual tem total relação com que apresentamos até aqui.

5.1 Números hipercomplexos

Definição 5.1: Números hipercomplexos são os números da forma

$$z = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ são elementos ("unidades imaginárias") fora do universo dos números reais e distintos entre si.

Considera-se dois número hipercomplexos

$$z = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n \text{ e } z' = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + \cdots + b_n i_n,$$

como iguais se, e só se, valerem as igualdades de números reais: $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Como exemplos de números hipercomplexos podemos citar os quatérnios, que definiremos adiante, e os próprios números complexos. Sendo que os complexos representam um caso particular de apenas uma unidade imaginária, isto é, $n = 1$ e ela verifica $i_1^2 = -1$.

Definição 5.2: Dados dois números hipercomplexos

$$z = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + \cdots + a_n i_n \text{ e } z' = b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + \cdots + b_n i_n.$$

A adição $z + z'$ é definida por:

$$\begin{aligned} z + z' &= (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) + (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \cdots + (a_n + b_n) i_n. \end{aligned}$$

A multiplicação zz' é definida por:

$$\begin{aligned} zz' &= (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) \cdot (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 i_1 + \cdots + a_0 b_n i_n \\ &\quad + a_1 b_0 i_1 + a_1 b_1 i_1 i_1 + a_1 b_2 b i_1 i_2 + \cdots + a_1 b_n i_1 i_n + \cdots \\ &\quad \cdots + a_n b_0 i_n + a_n b_1 i_n i_1 + a_n b_2 i_n i_2 \cdots + a_n b_n i_n i_n. \end{aligned}$$

Contudo, para que possamos dizer que zz' é um número hipercomplexo, devemos fazer dois supostos:

- serão consideradas válidas as propriedades comutativa e associativa da adição, como também a propriedade distributiva da multiplicação.
- a cada produto de unidades imaginárias $i_p i_q$ (para $p, q \in \{1,2,\ldots,n\}$) é conferido um valor hipercomplexo, isto é,

$$i_p i_q = \alpha + \beta i_1 + \gamma i_2 + \cdots + \omega i_n,$$

onde $\alpha, \beta, \ldots, \omega \in \mathbb{R}$.

Sabemos que no conjunto dos números inteiros a multiplicação possui as propriedades comutativa, associativa e distributiva, além do mais este conjunto tem a estrutura de anel de integridade, uma vez que $\forall a,\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que $ab \neq 0$. Já nos corpos dos números racionais, reais e complexos a multiplcação possui as propriedade comutativa, associativa e distributiva, ademais todos os elementos não nulos desses corpos tem inverso multiplicativo, uma vez que para todo b não nulo pertencente a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, existe um b', tal que $bb' = 1$.

Em contrapartida para o conjunto dos hipercomplexos as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, bem como a existência de inversos (para números não nulos) são dispensáveis, sendo apenas a distributividade da multiplicação obrigatória. Um exemplo de números hipercomplexos no qual a multiplicação não é comutativa é o conjunto dos quatérnios.

Os quatérnios foram inventados por W.R.Hamilton em 1843, sendo os mais importantes hipercomplexos com três unidades imaginárias. Eles são definidos como os números da forma $a + bi + cj + dk$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j, k são as unidades imaginárias que verificam $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Além disso para as unidades imaginárias i, j, k, temos que

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j,$$

de modo que a multiplicação não é comutativa, pois conforme podemos ver

$$k = ij \neq ji = -k, \;\; i = jk \neq kj = -i, \;\; j = ki \neq ik = -j.$$

Definição 5.3: Um número hipercomplexo $z \neq 0$ é dito ser divisor de zero se valer $zz' = 0$ ou $z'z = 0$ para algum hipercomplexo $z' \neq 0$. Um conjunto de hipercomplexos onde não exista nenhum divisor de zero é dito ter integridade.

É interessante ressaltarmos que num conjunto onde há divisores de zero, sempre que ocorrer $ab = 0$ com $a \neq 0$, não há garantia de que $b = 0$.

Definição 5.4: Dado $z \neq 0$ pertencente a um conjunto de hipercomplexos, dizemos que z possui inverso multiplicativo, se existir um número hipercomplexo $z' \neq 0$, tal que $zz' = z'z = 1$. Aliás é costume escrever $z' = \dfrac{1}{z}$.

Por exemplo, em conjuntos de números hipercomplexos nos quais a multiplicação é associativa, temos que:

$$z \neq 0 \quad \text{tem inverso,} \quad \text{então} \quad z \quad \text{não é divisor de zero.}$$

De fato, suponhamos que z é invertível e divisor de zero, simultaneamente, então existem z' e w pertencentes ao conjunto de hipercomplexos, tais que

$$zz' = 1 \quad \text{e} \quad zw = 0.$$

Assim, multiplicando as igualdades acima na ordem em que aparecem por w e z' respectivamente, juntamente com o fato da multiplicação no conjunto ser associativa, obtemos

$$z'zw = w \quad \text{e} \quad z'zw = 0.$$

O que é um absurdo.

Além disto a multiplicação no campo dos quatérnios é associativa e todo $z \neq 0$ possui um inverso z'. Com efeito, se $z = a + bi + cj + dk$, temos que

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{bi}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{cj}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{dk}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

uma vez que $zz' = 1$. Logo, podemos dizer que não há divisores de zero entre os quatérnios.

5.2 Hipercomplexos com uma unidade imaginária

Na seção anterior vimos que apesar dos quatérnios terem três unidades imaginárias não há divisores de zero entre eles. Tal acontecimento, nos remete a ideia de que a existência de divisores de zero não tem relação com a quantidade de unidades imaginárias, mas sim, com o modo o qual foram definidos os produtos de pares de unidades imaginárias.

Nesse contexto, examinemos nesta seção alguns casos específicos de hipercomplexos com apenas uma unidade imaginária. Para simplificar a notação, vamos ulizar I no lugar de i_1. Logo, passamos à analisar o hipercomplexos da forma $a + bI$.

Pela definição da multiplicação entre números hipercomplexos, segue que $I^2 = \alpha + \beta I$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e I sendo a unidade imaginária. Dessa maneira, o produto de dois hipercomplexos da forma $a + bI$ é representado por:

$$\begin{aligned}(a + bI)(c + dI) &= (ac + bdI^2)(ad + bc)I \\ &= (ac + bd\alpha) + (ad + bc + bd\beta)I.\end{aligned}$$

Com base na escolha de números reais para α e β. Seguem três casos de hipercomplexos com apenas uma unidade imaginária, os chamados de formas canônicas:

- números complexos: quando $I^2 = -1 = -1 + 0I$ ($\alpha = -1$ e $\beta = 0$), assim tem-se
$$(a + bI)(c + dI) = (ac - bd) + (ad + bc)I;$$
- números duais: quando $I^2 = 0 = 0 + 0I$ ($\alpha = 0$ e $\beta = 0$), assim tem-se
$$(a + bI)(c + dI) = ac + (ad + bc)I;$$
- números hiperbólicos: quando $I^2 = 1 = 1 + 0I$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 0$), assim tem-se
$$(a + bI)(c + dI) = (ac + bd) + (ad + bc)I.$$

Vamos analisar estes três conjuntos canônicos no que diz respeito a existência de divisores de zero:

- números complexos ($I^2 = -1$)

Neste corpo I e $1 + I$ não são divisores de zero.

De fato, como a multiplicação no corpo dos complexos é associativa e todo $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ tem inverso, então todo $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ não é divisor de zero. Inclusive I e $1 + I$.

- números duais ($I^2 = 0$)

Neste conjunto I é divisor de zero e $1 + I$ não é divisores de zero.

A valer, I é divisor de zero, visto que

$$I \cdot I = I^2 = 0.$$

Já para mostrarmos que $1 + I$ não é divisor de zero, observem primeiro que a multiplicação no conjunto dos números duais é associativa, então basta verificarmos que $1 + I$ tem inverso. De fato, seu inverso é $1 - I$, dado que

$$(1 + I)(1 - I) = 1.$$

- números hiperbólicos ($I^2 = 1$)

Neste conjunto I não é divisor de zero e $1 + I$ é divisores de zero.

Realmente I não é divisor de zero, observem primeiro que a multiplicação no campo dos números hiperbólicos é associativa, então basta verificarmos que I tem inverso. De fato, ele é seu próprio inverso, uma vez que

$$I \cdot I = I^2 = 1.$$

Já para mostrarmos que $(I + 1)$ é divisor de zero, basta verificarmos que qualquer hiperbólico da forma $\beta - \beta I$, com β não nulo. satisfaz

$$(1 + I)(\beta - \beta I) = 0.$$

De modo geral para os números hiperbólicos, dados dois números $z \neq 0$ e $z' \neq 0$. temos que $zz' = 0 \Longleftrightarrow$

- ou $z = \alpha + \alpha i$ e $z' = \beta - \beta i$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
- ou $z = \alpha - \alpha i$ e $z' = \beta + \beta i$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ademais para os números duais, dados dois números $z \neq 0$ e $z' \neq 0$. temos que

$$zz' = 0 \Longleftrightarrow z = \alpha i \quad \text{e} \quad z' = \beta i, \quad \text{para quaisquer} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Assim, encontramos todas as formas dos divisores de zero para as chamadas formas canônicas. Nesse sentido, o teorema a seguir estabelece uma caracterização estrutural que nos possibilita evitar conjuntos de números hipercomplexos de uma unidade imaginária que tenham divisores de zero.

Teorema 5.5: Todo conjunto de números hipercomplexos com uma unidade imaginária I pode ser reduzido, por meio de uma mudança de variável conveniente, a uma das seguintes formas canônicas:

1) a dos números complexos, isto é, dos hipercomplexos com $I^2 = -1$;

2) a dos números duais, isto é, dos hipercomplexos com $I^2 = 0$;

3) a dos números hiperbólicos, isto é, dos hipercomplexos com $I^2 = 1$.

Demonstração. Indicando por $a+bI$ os números do conjunto analisado, e escrevendo $I^2=\alpha+\beta I$. Nosso propósito é mostrar que sempre existe um $J=a+bI$, tal que J^2 é igual a $-1,0$ ou 1, de acordo com os valores α e β. A fim disso, devemos considerar as três seguintes opções:

1º caso: quando $\beta^2+4\alpha<0$
neste caso, tomando $a=\dfrac{\beta}{\sqrt{-\beta^2-4\alpha}}$ e $b=\dfrac{-2}{\sqrt{-\beta^2-4\alpha}}$,
observamos que o complexo

$$J=\frac{\beta}{\sqrt{-\beta^2-4\alpha}}+\frac{-2}{\sqrt{-\beta^2-4\alpha}}I,$$

está bem definido, e diretamente vemos que ele verifica $J^2=-1$.

2º caso: quando $\beta^2+4\alpha>0$
igualmente ao primeiro, tomando $a=\dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}$ e $b=\dfrac{-2}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}$,
observamos que o complexo

$$J=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}+\frac{-2}{\sqrt{\beta^2+4\alpha}}I,$$

está bem definido, e diretamente vemos que ele verifica $J^2=1$.

3º caso: quando $\beta^2+4\alpha=0$
neste, caso tomando $a=\beta$ e $b=-2$, também está bem definido o hipercomplexo $J=\beta-2I$, e além do mais

$$J^2=(\beta-2I)(\beta-2I)=\beta^2-4\beta I+4I^2=\beta^2-4\beta I+4(\alpha+\beta I)=\beta+4\alpha=0.$$

□

Teorema 5.6: Nos conjuntos de números hipercomplexos de uma unidade imaginária, sempre valem as propriedades associativa e comutativa da multiplicação. Além disso entre eles:

- os conjuntos que têm como forma canônica os números complexos nunca têm divisores de zero;
- os conjuntos que têm como forma canônica os números duais ou hiperbólicos sempre têm divisores de zero.

Demonstração. É uma consequência imediata do teorema anterior. □

Todo o assunto que discorremos nas duas últimas seções tem por base [11]. Assim, caso o leitor queira obter mais informações acerca do que discorremos ele já sabe onde procurar.

5.3 Hipercomplexos normalizados

Definição 5.7: Um conjunto de hipercomplexos,

$$z = a + bi_1 + ci_2 + di_3 + \cdots + wi_n,$$

de n unidades imginárias, é dito ser normalizado quando valer $i_k^2 = -1$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dessa maneira, o corpo dos números complexos, bem como o conjunto dos quatérnios são normalizados. E entre os conjuntos canônicos de uma unidade imaginária, o único normalizado é o que não possui divisores de zero, ou seja, o corpo dos números complexos.

Teorema 5.8: Existe apenas um conjunto normalizado de números hipercomplexos cuja multiplicação é associativa, comutativa e não tem divisores de zero. Este conjunto é o dos números complexos.

Demonstração. Para o corpo dos números complexos de apenas uma unidade imaginária, já sabemos que o resultado é válido. Logo, resta mostrarmos que o resultado não será válido para os conjuntos que têm duas, ou mais, unidades imaginárias.

1) Caso de conjunto de duas unidades imaginárias

Neste caso, os números de tal conjunto têm a forma $a+bj+ck$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e as duas unidades imaginárias verificam $j^2 = k^2 = -1$.

Desse modo, pela definição do produto de hipercomplexos temos que $jk = a + bj + ck$. Então, multiplicando essa igualdade por j, e utilizando as supostas propriedades habituais da adição, bem como a associatividade, distributividade e comutatividade da multiplicação, obtemos:

$$\begin{aligned} -k = jjk &= aj - b + cjk \\ &= aj - b + c(a + bj + ck) \\ &= (-b + ac) + (a + bc)j + c^2k, \end{aligned}$$

isto é,

$$-k = (-b + ac) + (a + bc)j + c^2k,$$

o que acarreta:

$$\begin{cases} 0 = -b + ac \\ 0 = a + bc \\ -1 = c^2. \end{cases}$$

Entretanto o sistema de equações não possui solução, visto que é impossível $c \in \mathbb{R}$ verificar $c^2 = -1$.

2) Caso de conjunto de três unidade imaginárias

Neste caso, os números de tal conjunto têm a forma $a + bj + ck + dl$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e as três unidades imaginárias verificam $j^2 = k^2 = l^2 = -1$.

Desse modo, os produtos jk, kl, lj podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} jk &= a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l \\ kl &= a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l \\ lj &= a_3 + b_3 J + c_3 k + d_3 l. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim como fizemos para o caso de duas unidades imaginárias, nosso objetivo é mostrar que essas equações são contraditórias com as supostas propriedades da adição e multiplicação, bem como com a não existência de divisores de zero. Para esse fim, iremos multiplicar cada uma das equações de 5.1 por j, k, l, nessa ordem.

Multiplicando a primeira igualdade por j temos:

$$\begin{aligned} -k &= jjk \\ &= j(a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l) \\ &= a_1 j - b_1 + c_1 jk + d_1 jl \\ &= a_1 j - b_1 + c_1(a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l) + d_1(a_3 + b_3 j + c_3 k + d_3 l) \\ &= (-b_1 + a_1 c_1 + a_3 d_1) + j(a_1 + b_1 c_1 + b_3 d_1) + k(c_1^2 + c_3 d_1) + l(c_1 d_1 + d_1 d_3), \end{aligned}$$

o que implica as equações:

$$\begin{cases} 0 = -b_1 + a_1 c_1 + a_3 d_1 \\ 0 = a_1 + b_1 c_1 + b_3 d_1 \\ -1 = c_1^2 + c_3 d_1 \\ 0 = c_1 d_1 + d_1 d_3. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda igualdade de 5.1 por k temos:

$$\begin{aligned} -l &= kkl \\ &= k(a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l) \\ &= a_2 k + b_2 jk - c_2 + d_2 kl \\ &= a_2 k + b_2(a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l) - c_2 + d_2(a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l) \\ &= (a_1 b_2 - c_2 + a_2 d_2) + j(b_1 b_2 + b_2 d_2) + k(a_2 + b_2 c_1 + c_2 d_2) + l(b_2 d_1 + d_2^2), \end{aligned}$$

o que implica as equações:

$$\begin{cases} 0 = a_1b_1 - c_2 + a_2d_2 \\ 0 = b_1b_2 + b_2d_2 \\ 0 = a_2 + b_2c_1 + c_2d_2 \\ -1 = b_2d_1 + d_2^2. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda igualdade de 5.1 por l temos:

$$\begin{aligned} -j &= llj \\ &= l(a_3 + b_3j + c_3k + d_3l) \\ &= a_3l + b_3lj + c_3kl - d_3 \\ &= a_3l + b_3(a_3 + b_3j + c_3k + d_3l) + c_3(a_2 + b_2j + c_2k + d_2l) - d_3 \\ &= (a_3b_3 + a_2c_3 - d_3) + j(b_3^2 + b_2c_3) + k(b_3c_3 + c_2c_3) + l(a_3 + b_3d_3 + c_3d_2), \end{aligned}$$

o que implica as equações:

$$\begin{cases} 0 = a_3b_3 + a_2c_3 - d_3 \\ -1 = b_3^2 + b_2c_3 \\ 0 = b_3c_3 + c_2c_3 \\ 0 = a_3 + b_3d_3 + c_3d_2. \end{cases}$$

Dos três grupos de quatro equações que obtivemos, basta examinarmos somente as equações que têm duas parcelas do lado direito. De modo que obtemos o seguinte agrupamento:

$$\begin{cases} -1 = c_1^2 + c_3d_1 & \quad 0 = c_1d_1 + d_1d_3 \\ -1 = d_2^2 + b_2d_1 & \quad 0 = b_1b_1 + b_2d_2 \\ -1 = b_3^2 + b_2c_3 & \quad 0 = b_3c_3 + c_2c_3. \end{cases} \tag{5.2}$$

A análise das equações da primeira coluna do sistema 5.2, juntamente com o fato de o quadrado de um número real nunca ser negativo, nos permite dizer que:

$$c_3d_1 \neq 0,\ b_2d_1 \neq 0,\ b_2c_3 \neq 0,$$

de forma que $b_2 \neq 0, c_3 \neq 0, d_1 \neq 0$, e essa ocorrência em conjunto com a não existência de divisores de zero, nos possibilita dizer que as equações da segunda coluna do sistema 5.2 podem ser simplificadas para:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + d_3 \\ 0 = b_1 + d_2 \\ 0 = b_3 + c_2, \end{cases} \tag{5.3}$$

consequentemente:

$$c_1 = -d_3,\ b_1 = -d_2,\ b_3 = -c_2.$$

Agora, nosso propósito é simplificar as equações da primeira coluna de 5.2. Para tal, montamos igualdades inferidas através das várias maneiras de se calcular o produto jkl, devido a comutatividade e associatividade do mesmo. De modo que temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{cases} (jk)l = j(kl) \\ (jk)l = k(lj) \\ (kl)j = k(lj). \end{cases}$$

Para $(jk)l = j(kl)$, temos:

$$\begin{aligned} (jk)l &= (a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l)l = a_1 l + b_1 jl + c_1 kl - d_1 \\ &= -d_1 + a_1 l + b_1(a_3 + b_3 j + c_3 k + d_3 l) + c_1(a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l) \\ &= (-d_1 + a_3 b_1 + c_1 a_2) + j(b_1 b_3 + c_1 b_2) + k(b_1 c_3 + c_1 c_2) + l(a_1 + b_1 d_3 + c_1 d_2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j(kl) &= j(a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l) = a_2 j - b_2 + c_2 jk + d_2 lj \\ &= a_2 j - b_2 + c_2(a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l) + d_2(a_3 + b_3 j + c_3 k + d_3 l) \\ &= (-b_2 + c_2 a_1 + d_2 a_3) + j(a_2 + c_2 b_1 + d_2 b_3) + k(c_2 c_1 + d_3 c_3) + l(c_2 d_1 + d_2 d_3). \end{aligned}$$

Comparando os membros de $(jk)l = j(kl)$, vemos que o único coeficiente que é dado por apenas duas parcelas, em ambos os membros é o coeficente de k. Lidando com ele, temos

$$b_1 b_3 + c_1 b_2 = c_2 c_1 + d_3 c_3,$$

o que acarreta

$$c_3(b_1 - d_2) = 0.$$

Como já sabemos que $c_3 \neq 0$, então $b_1 - d_2 = 0$ ou $b_1 = d_2$. Porém por 5.3, $b_1 = -d_2$. Logo, devido a concomitância de $b_1 = d_2$ e $b_1 = -d_2$, a única alternativa que nos resta é concluir que $b_1 = d_2 = 0$.

Para $(jk)l = k(lj)$, analogamente:

$$\begin{aligned} k(lj) &= k(a_3 + b_3 j + c_3 k + d_3 l) = a_3 k + b_3 jk - c_3 + d_3 kl \\ &= -c_3 + a_3 k + b_3(a_1 + b_1 j + c_1 k + d_1 l) + d_3(a_2 + b_2 j + c_2 k + d_2 l) \\ &= (-c_3 + b_3 a_1 + d_3 a_2) + j(b_3 b_1 + d_3 b_2) + k(a_3 + b_3 c_1 + d_3 c_2) \\ &\quad + l(b_3 d_1 + d_3 d_2). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de j que é o único dado por apenas duas parcelas, em ambos os membros da igualdade $(jk)l = k(lj)$, temos que

$$b_1b_3 + c_1b_2 = b_3b_1 + d_3b_2,$$

que é equivalente a

$$b_2(c_1 - d_3) = 0.$$

Como já sabemos que $b_2 \neq 0$, então $c_1 - d_3 = 0$ ou $c_1 = d_3$. Mas por 5.3 temos que $c_1 = -d_3$. Logo, o que nos resta é concluir que $c_1 = d_3 = 0$.

Ainda falta examinarmos o caso $(kl)j = k(lj)$. Nessa ocasião observem que ambos os produtos já foram calculados, visto que $(kl)j = j(kl)$. Assim temos:

$$\begin{aligned}(kl)j = j(kl) &= (-b_2 + c_2a_1 + d_2a_3) + j(a_2 + c_2b_1 + d_2b_3)\\ &\quad + k(c_2c_1 + d_2c_3) + l(c_2d_1 + d_2d_3)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}k(lj) &= (-c_3 + b_3a_1 + d_3a_2) + j(b_3b_1 + d_3b_2) + k(a_3 + b_3c_1 + d_3c_2)\\ &\quad + l(b_3d_1 + d_3d_2).\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de l que é o único dado por apenas duas parcelas, em ambos os membros da igualdade $(kl)j = k(lj)$, temos que

$$c_2d_1 + d_2d_3 = b_3d_1 + d_3d_2,$$

ou

$$b_2(c_1 - d_3) = 0.$$

Como já sabemos que $b_2 \neq 0$, então $c_2 - b_3 = 0$ ou $b_3 = c_2$. Logo, o que nos resta é concluir que $b_3 = c_2 = 0$.

Assim, por meio das três possibilidades, tem-se

$$b_1 = d_2 = c_1 = d_3 = b_3 = c_2 = 0.$$

Enfim, essas igualdades nos permitem simplificar as equações da primeira coluna do sitema 5.2, de forma a obtermos:

$$\begin{cases} -1 = c_3d_1 \\ -1 = b_2d_1 \\ -1 = b_2c_3. \end{cases}$$

Multiplicando essas três igualdades entre si, obtemos:

$$-1 = (b_2c_3d_1)^2,$$

O que é uma impossibilidade, visto que $b_2c_3d_1 \in \mathbb{R}$.

3) Caso de conjunto com quatro ou mais unidades imaginárias

Vimos que ocorreu uma grande complexidade para a prova ao passarmos de duas para três unidades imaginárias. Assim, há de se esperar que para conjuntos com quatro ou mais unidades imaginárias, a demonstração fique muito mais extensa e complexa. Devido a isso, exibimos nesse trabalho somente a prova até os conjuntos com três unidades imaginárias. Ademais, tudo que discorremos na presente seção tem como base [11]. □

6

Proposta de Atividade

6.1 Exposição

Neste capítulo é apresentada uma proposta de atividades, as quais podem ser desenvolvidas com o auxílio de recursos computacionais. Utilizamos aqui o software gratuito GeoGebra Clássico 6, versão para Windows. Entretanto esse modelo do programa, bem como a plataforma utilizada, não compromete a atividade.

O público alvo são alunos do terceiro ano do ensino médio. Seguindo [3] e [6] essas atividades enfatizam a representação geométrica dos complexos relacionando as operações em $\mathbb{C}$ com as transformações do plano.

As atividade estão divididas em 6 tópicos em um total de 12 aulas, no entanto fica a critério do professor fazer quaisquer alterações que julgue necessária.

No tópico 1 temos como

Metodologia: Aula expositiva para introduzir o assunto e na sequência realização da atividade.

Recursos didáticos: Caderno, quadro e pincel para a aula expositiva.

Verificação da aprendizagem: A avaliação será cotidiana, em sala de aula, acompanhando o progresso de cada aluno baseado em suas dúvidas, nos exercícios que consegue executar e na sua interação com seus colegas de classe.

Já nos tópicos de 2 a 6 temos como

Metodologia: Aula expositiva para introduzir o assunto e na sequência uso do programa GeoGebra com participação ativa dos alunos em estações individuais.

Recursos didáticos: Caderno, quadro e pincel para a aula expositiva, projetor e computador com o software GeoGebra.

Verificação da aprendizagem: A avaliação será cotidiana, em sala de aula, acompanhando o progresso de cada aluno baseado em suas dúvidas, nos exercícios que consegue executar e na sua interação com seus colegas de classe.

6.1.1 Tópico 1 (Conjuntos numéricos)

Esse primeiro segmento explora a noção de conjuntos numéricos, bem como as relações existentes entre eles.

Objetivo: Relembrar as definições dos conjuntos numéricos, desde os naturais até os reais; observar que a existência de solução para uma equação está relacionada ao conjunto numérico sobre o qual estamos trabalhando; ver que o conjunto dos números complexos é uma ampliação do conjunto dos números reais.

De início é necessário uma aula de revisão sobre o conjunto dos números reais, depois aula introdutória sobre o conjunto dos números complexos. Feito isso, os alunos já terão condições de realizar a atividade que tem duração de 1 aula.

(P_1) Defina os conjuntos numéricos abaixo:

(a) conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$);

(b) conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$);

(c) conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

(P_2) Em $\mathbb{Q}$ a equação $x^2 - 3 = 0$ possui solução? Se sim, ou não, por quê?

(P_3) As soluções do exercício anterior são exemplos de quais números?

(P_4) Qual a definição do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)? Já em $\mathbb{R}$ quantas soluções possui a equação $x^2 - 3 = 0$?

(P_5) Em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 + 16 = 0$ possui solução? Se sim, ou não, por quê?

(P_6) Já no conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) quantas soluções possui a equação $x^2 + 16 = 0$?

6.1.2 Tópico 2 (Representação geométrica dos números complexos)

Esse segmento explora a relação de equivalência existente entre os números complexos e os pares ordenados. Além disso, apresentaremos algumas ferramentas e comandos que serão utilizados no decorrer das atividades.

Objetivo: Observar a correspondência que existe entre os pares ordenados e os números complexos; reconhecer graficamente um número complexo e sua representação como vetor.

De início é necessário uma aula expositiva sobre a representação geométrica dos números complexos. Feito isso, utilizamos o software GeoGebra para realizar a atividade, totalizando 2 aulas.

Primeira atividade

(a) Crie dois pontos A e B. Faça a interpretação da *Janela de Álgebra.*

(b) Utilizando a ferramenta *Mover* movimente os pontos e observe o que acontece.

(c) Por meio da ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto A. Para o ponto B repita o mesmo procedimento.

(d) Selecione com o botão direito do *mouse* o ponto A, selecione *Configurações* $>$ *Exibir Rótulo* $>$ *Nome e Valor*. Para o ponto B repita o mesmo procedimento.

(e) Movimente novamente os pontos e veja o que acontece com os vetores criados anteriormente.(Figura 6.1)

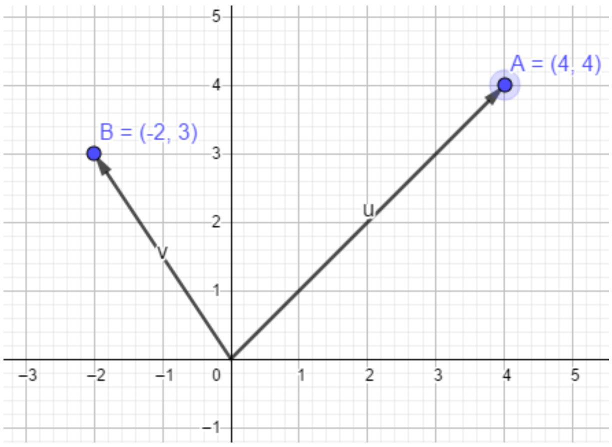

Figura 6.1

(f) Posicione os pontos A e B, respectivamente nas coordenadas $(3, 4)$ e $(-2, 5)$.

(g) Salve o arquivo como *tópico2 primeira atividade*.

Segunda atividade

Crie um novo arquivo com o nome *tópico2 segunda atividade*.

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie dois pontos z_1 e z_2. faça a interpretação da *Janela de Álgebra*.

(b) Utilizando a ferramenta *Mover* movimente os pontos e observe o que acontece.

(c) Por meio da ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(d) Selecione com o botão direito do *mouse* o ponto z_1, selecione *Configurações* $>$ *Exibir Rótulo* $>$ *Nome e Valor*. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(e) Movimente novamente os pontos e veja o que acontece os vetores criados anteriormente.(Figura 6.2)

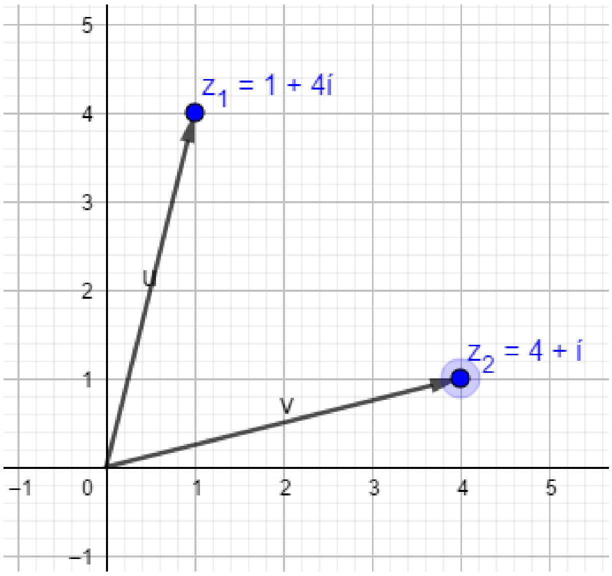

Figura 6.2

(f) Posicione os pontos z_1 e z_2, respectivente nas coordenadas $(3, 4)$ e $(-2, 5)$.

(g) Salve o arquivo.

(P_1) O que você observa sobre as coordenadas dos pontos A e B e os números complexos z_1 e z_2? Qual a relação existe entre eles?

O objetivo aqui é fazer com que os alunos comprovem experimentalmente a relação de correspondência entre os pares ordenados e os números complexos.

(P_2) É possível determinar as partes real e imaginária de um número complexo através de um par ordenado?

(P_3) O par ordenado $(0, 2)$ é associado a qual número complexo?

6.1.3 Tópico 3 (Operações com números complexos)

Esse segmento explora a soma de números complexos, bem como o produto por um escalar.

Objetivo: Reconhecer a representação geométrica da adição e subtração de números complexos; reconhecer a representação geométrica do produto de um número complexo por um escalar.

De início é necessário uma aula expositiva sobre a adição de números complexos e o produto deles por um escalar, aula que tabém abordará a definição de módulo de um número complexo. feito isso, utilizamos o software GeoGebra para realizar a atividade, totalizando 3 aulas.

Primeira atividade: Adição de números complexos

Crie um arquivo com o nome *tópico3 primeira atividade.*

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie dois pontos z_1 e z_2.

(b) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(c) Através da ferramenta *Vetor a Partir de um Ponto* crie um vetor semelhante a u a partir de v, para isso clique sobre z_2 e em seguida clique em u.

(d) Repita o mesmo procedimento criando um vetor semelhante a v.(Figura 6.3)

(e) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano

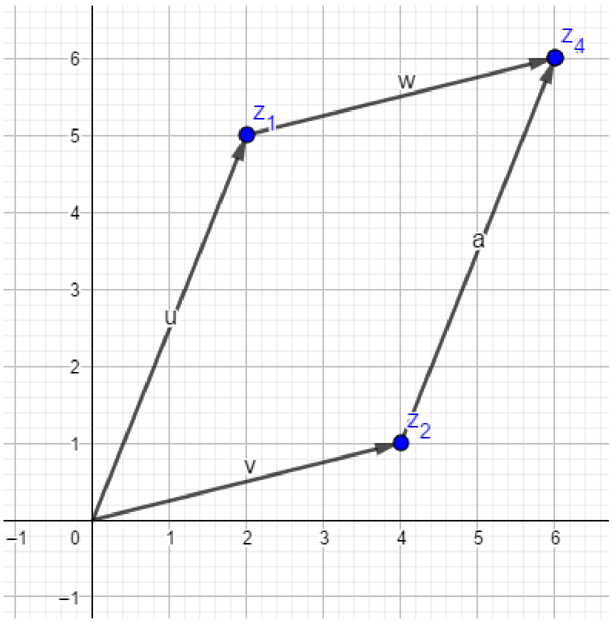

Figura 6.3

até o ponto de encontro entre z_3 e z_4.

(f) Desabilite o rótulo de z_3 e z_4. Sobre o ponto de encontro de ambos, clique com botão direito do *mouse*, selecione $>$ *Renomear* e altere o nome para z_5.

(g) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações* $>$ *Exibir Rótulo* $>$ *Nome e Valor*. Para os pontos z_2 e z_5 repita o mesmo procedimento.

(h) Observe na *Janela de Álgebra* os valores de z_1, z_2 e z_5.(Figura 6.4)

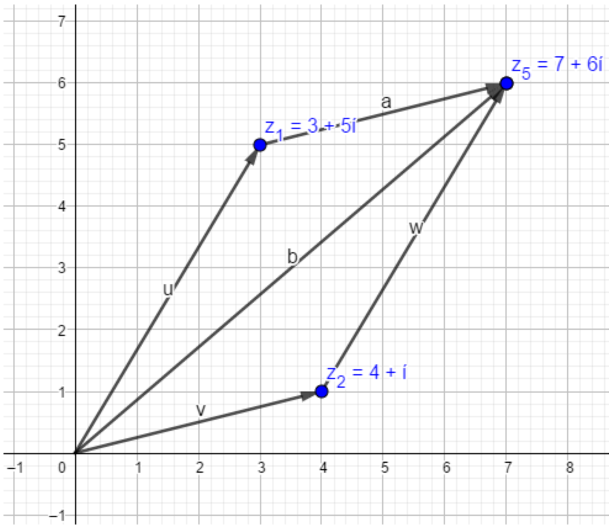

Figura 6.4

(P_1) É possível estabeler uma relação entre os valores dos referidos números complexos?

(P_2) O que o complexo z_5 representa?

O objetivo aqui é fazer com que os alunos comprovem experimentalmente a relação geométrica que existe na adição de números complexos.

(P_3) Ao movimentar os complexos z_1 e z_2, o que acontece com o complexo z_5?

(P_4) Sobrepondo z_1 e z_2 sobre o eixo x e depois sobre o eixo y, o que acontece?

(P_5) Após analisar a representação geométrica da adição dos complexos z_1 e z_2. De que modo seria possível representar a subtração $z_1 - z_2$?

Salve o arquivo.

Segunda atividade: Exercícios

(P_1) Dados os complexos $z = 2 - 3i$, $v = -4 + 5i$ e $w = 3 + 4i$. Faça os cálculos no caderno e depois represente no plano:

a) $z + v$ b) $z + w$ c) $v + w$ d) $z - v$

e) $z - w$ f) $v - w$ g) $z + v - w$ h) $v - w + z$.

Salve está atividade como *tópico3 segunda atividade.*

Terceira atividade: Multiplicação de um número complexo por um escalar

Crie um arquivo novo com o nome *tópico3 terceira atividade*

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie o ponto z_1.

(b) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1.

(c) Através do *campo de Entrada* efetue o produto $3 \cdot z_1$. Clique sobre o ponto obtido e ele será nomeado como z_2.(Figura 6.5)

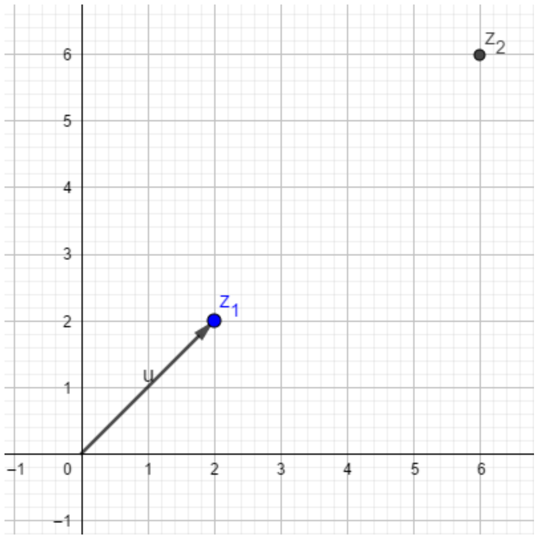

Figura 6.5

(d) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações > Exibir Rótulo > Nome e Valor*. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(e) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_2.(Figura 6.6)

(f) Movimente o ponto z_1 e observe o que acontece com z_2.

(g) Calcule os módulos de z_1 e z_2.

(P_1) Que relação existe entre os complexos z_1 e z_2 e seus respectivos módulos?

(P_2) O que deve acontecer se multiplicarmos o complexo z_1 por -3?

(P_3) O que deve acontecer se multiplicarmos o complexo z_1 por um $\alpha \in \mathbb{R}$?

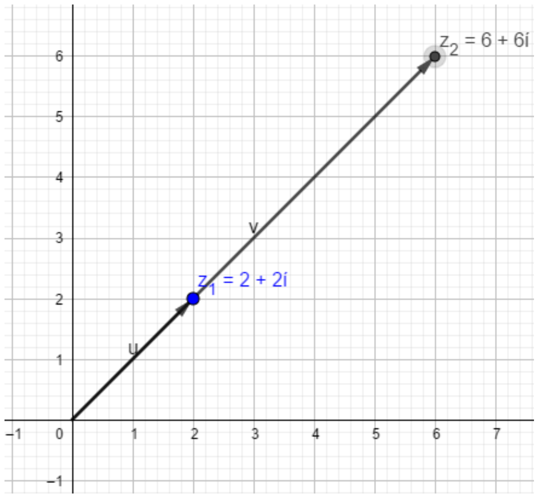

Figura 6.6

Aqui espera-se que os alunos já tenham compreendido a relação geométrica que existe ao se multiplicar um número complexo por um escalar.

Salve o arquivo.

6.1.4 Tópico 4 (O conjugado de um número complexo)

Esse segmento explora a relação existente entre um número complexo e seu conjugado.

Objetivo: Reconhecer a representação geométrica do conjugado de um número complexo; observar que o conjugado é uma reflexão em relação ao eixo x.

De início é necessário uma aula expositiva sobre o conjugado de um número complexo. Feito isso, utilizamos o software GeoGebra para realizar a atividade, totalizando 1 aula.

Crie um arquivo com o nome *tópico4* .

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie o ponto z_1.

(b) Utilizando a ferramenta *Reflexão em Relação a Uma Reta* crie o ponto z_2. Para isso, clique em z_1 e em seguida clique no eixo x.(Figura 6.7)

(c) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1. Repita o mesmo para z_2.

(d) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações > Exibir Rótulo > Nome e Valor*. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.(Figura 6.8)

(e) Movimente z_1 e veja o que acontece com z_2.

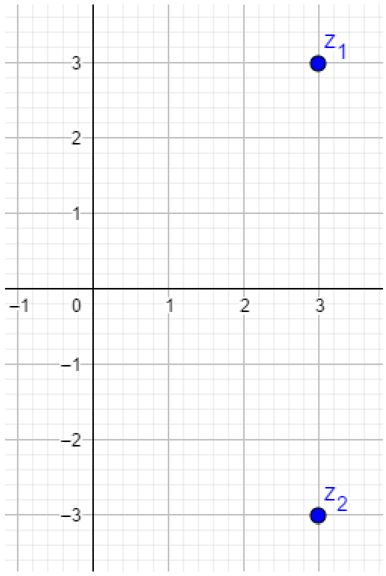

Figura 6.7

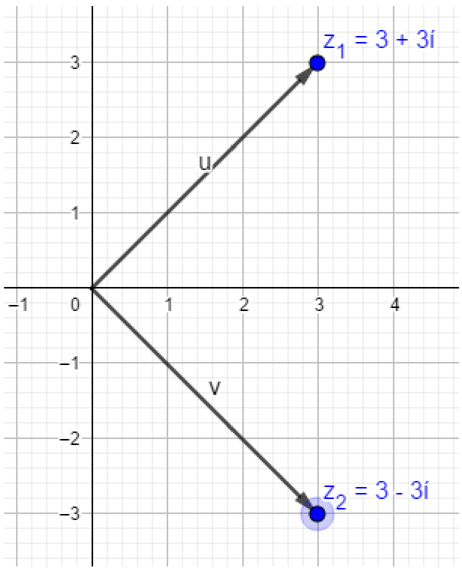

Figura 6.8

(P_1) Que relação existe entre z_1 e z_2?

O objetivo aqui é fazer com que os alunos possam ver experimentalmente a relação geométrica que existe entre um número complexo e seu conjugado.

(g) Sobreponha z_1 sobre o eixo x, e veja o que acontece com $z_2 = \overline{z_1}$.

(P_2) Em que casos $z = \overline{z}$?

(P_3) É sempre verdade que $|z| = |\overline{z}|$?

Salve o arquivo.

6.1.5 Tópico 5 (Multiplicação e divisão na forma trigonométrica)

Esse segmento explora a relação geométrica que existe ao se multiplicar e dividir números complexos.

Objetivo: Reconhecer a interpretação geométrica do produto de números complexos; reconhecer a interpretação geométrica do quociente entre dois números complexos.

De início é necessário uma aula expositiva sobre multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica. Feito isso, utilizamos o software GeoGebra para realizar a atividade, totalizando 3 aulas.

Primeira atividade: O produto de números complexos

Crie um arquivo com o nome *tópico5 primeira atividade.*

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie dois pontos z_1 e z_2.

(b) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1. Repita o mesmo para z_2.

(c) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações > Exibir Rótulo > Nome e Valor*. Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(d) A fim de encontrarmos os ângulos que os complexos z_1 e z_2 fazem com o eixo x, devemos marcar um ponto B qualquer sobre o mesmo. Feito isso, por meio da ferramenta *Ângulo* selecionamos o ponto B, a origem e z_1. Depois selecionamos o ponto B, a origem e z_2. (Figura 6.9)

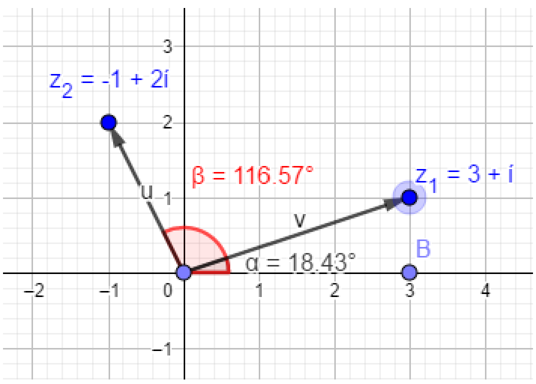

Figura 6.9

(e) Observe os valores dos ângulos α e β. Agora calcule $|z_1|$ e $|z_2|$.

(f) Através do *Campo de Entrada* efetue o produto $z_1 \cdot z_2$.

(g) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_3 que representa o produto $z_1 \cdot z_2$.(Figura 6.10)

(h) Determine o ângulo γ que z_3 faz com o eixo x. E também calcule $|z_3|$.

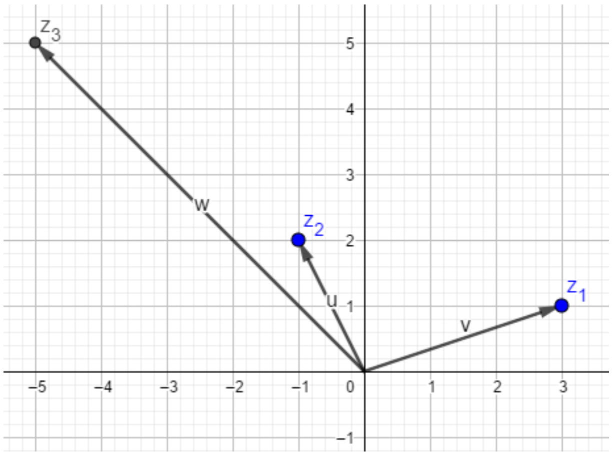

Figura 6.10

(P_1) Qual a relação existente entre γ, α e β?

(P_2) Qual a relação existente entre $|z_3|$, $|z_1|$ e $|z_2|$?

(P_3) De que modo pode ser interpretado o produto $z_1 \cdot z_2$?

Aqui espera-se que os alunos já tenham compreendido a relação geométrica que existe ao se multiplicar dois números complexos.

Salve o arquivo.

Segunda atividade: Exercícios

(P_1) Qual a representação trigonométrica dos números complexos $1+2i$ e $(1+i)(1-i)$?

(P_2) O que acontece quando multiplicamos um número complexo $z \neq 0$ por i? E se multiplicarmos o mesmo por $-i$?

(P_3) Quais as coordenadas do ponto $B(-4, 3)$ após uma rotação de $90°$ graus no sentido horário?

(P_4) Qual o número complexo na forma algébrica, é preciso utilizar para termos uma rotação de $45°$ no sentido horário?

(P_5) Qual o número complexo na forma algébrica, é preciso utilizar para termos uma rotação de 180° no sentido anti-horário.

Terceira atividade: O quociente de números complexos

Crie um arquivo com o nome *tópico5 terceira atividade.*

(a) Por meio da ferrramenta *Número Complexo* crie dois pontos z_1 e z_2.

(b) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_1. Repita o mesmo para z_2.

(c) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações* > *Álgebra* > *Coordenadas* > *Coordenadas Polares.* Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(d) Com o botão direito do *mouse*, clique no ponto z_1, selecione *Configurações* > *Exibir Rótulo* > *Nome e Valor.* Para o ponto z_2 repita o mesmo procedimento.

(e) Observem a *Janela de Álgebra* e vejam que cada complexo é dado por suas coordenadas polares, sendo a primeira entrada seu módulo e a segunda seu argumento.(Figura 6.11)

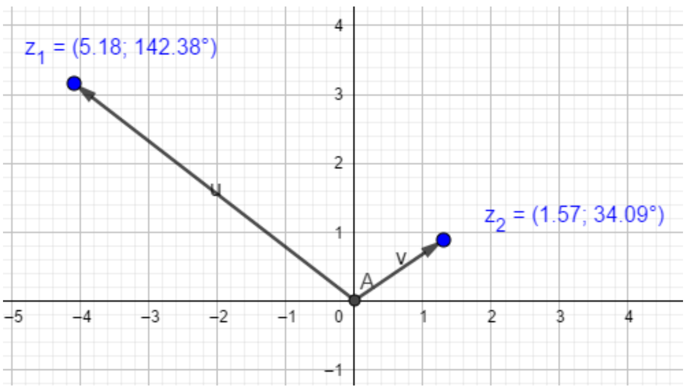

Figura 6.11

(f) Através do *Campo de Entrada* efetue o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(g) Utilizando a ferramenta *Vetor*, construa um vetor a partir da origem do plano até o ponto z_3 que representa o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(h) Exiba as coordenadas polares de z_3, assim como foi feito para z_1 e z_2.(Figura 6.12)

(P_1) Deixe z_1 fixo e movimente z_2 tentando não alterar seu argumento. O que acontece com o módulo de z_3?

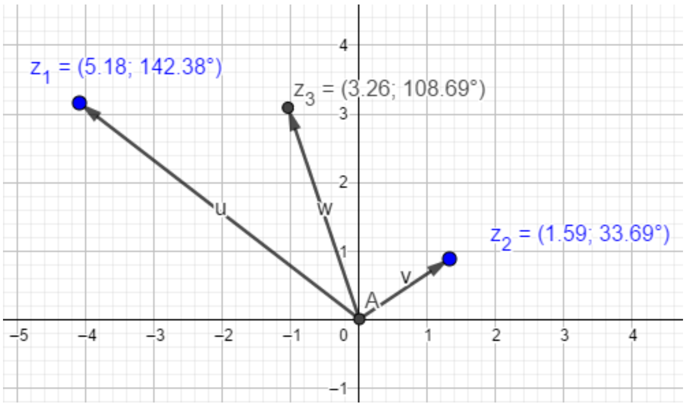

Figura 6.12

(P_2) Que relação existe entre $|z_3|$, $|z_1|$ e $|z_2|$?

(P_3) Deixe z_1 fixo e movimente z_2 tentando não alterar seu módulo. O que acontece com o argumento de z_3?

(P_4) Que relação existe entre os argumentos de z_3, z_1 e z_2?

(P_5) De que modo pode ser interpretado o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$?

Aqui espera-se que os alunos já tenham compreendido a relação geométrica que existe ao se dividir dois números complexos.

Salve seu arquivo.

6.1.6 Tópico 6 (Extração de raízes n-ésimas na forma trigonométrica)

Esse segmento explora a relação geométrica que existe ao se extrair as raízes n-ésimas de um número complexo.

Objetivo: Reconhecer a representação geométrica das raízes n-ésimas de um número complexo.

De início é necessário uma aula expositiva sobre as raízes n-ésimas as de um número complexo. Feito isso, utilizamos o software GeoGebra para realizar a atividade, totalizando 2 aulas.

Primeira atividade

Crie um arquivo com o nome *tópico6 primeira atividade*.

A fórmula

$$z_l = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2\pi l}{n}\right)\right), l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

onde $r = |z| > 0$ e $\theta = arg(z)$, é utilizada para a extração das raízes n-ésimas de um número complexo na forma trigonométrica.

(a) Utilizando a fórmula acima determine as raízes quartas de $z = 1$.

(b) Represente essas raízes no plano.

(c) Construa os vetores com origem no plano até os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 que representam as raízes.

(d) Exiba as *Coordenadas Polares* e o *Nome e Valor* dessas raízes.(Figura 6.13)

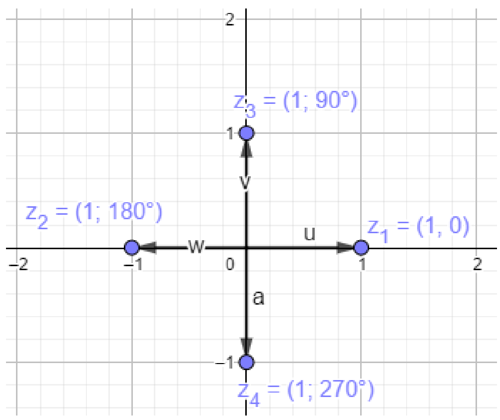

Figura 6.13

(e) O que você observa em relação aos módulo das raízes?

(f) Qual relação existe entre os argumentos das raízes?

(g) Utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, selecione primeiro a origem do plano e depois qualquer uma das raízes.(Figura 6.14)

(P_1) Que polígono convexo é possível construírmos ligando as quatro raízes?

(P_2) Qual a interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 1$?

(P_3) Que interpretação geométrica temos para as raízes n-ésimas do complexo $z = 1$?

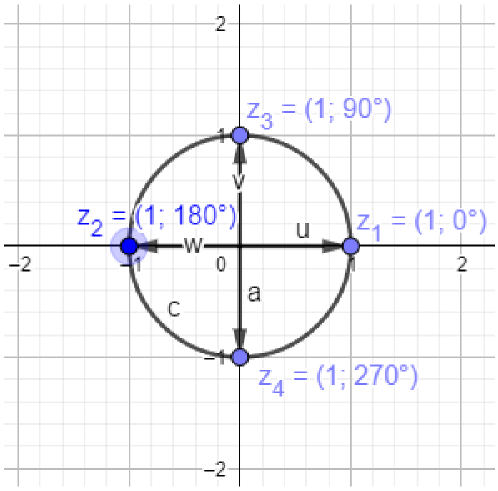

Figura 6.14

Segunda atividade: Exercícios

(P_1) Qual as raízes sextas de 1?

(P_2) Qual as raízes cúbicas de 8?

(P_3) Qual as raízes cúbicas de $z = -27i$?

(P_4) Qual as raízes (reais e complexas) da equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$?

7 Considerações Finais

Durante o desenvolvimento deste trabalho apresentamos a história dos números complexos, bem como do surgimento dos números reais. Procuramos dar ênfase aos acontecimentos históricos que gradativamente impulsionaram a construção dessas classes numéricas. É relevante ressaltar que esse fundo histórico é de suma importância, pois através dele vimos como foi difícil para que os números complexos fossem de fato aceitos, processo que foi árduo e demandou um longo tempo.

Ao contrário dos livros didáticos do ensino médio que tradicionalmente priorizam a forma algébrica dos números complexos, nesta pesquisa tratamos o assunto de modo mais amplo, versando sobre as diversas formas de representar um número complexo. Dando destaque principalmente às formas geométricas e trigométricas, uma vez que essas representações possibilitam ao professor estabeler uma abordagem mais dinâmica para os estudantes.

Além disso, quando discorremos sobre o Teorema Fundamental da Álgebra e números hipercomplexos pudemos ver que os números complexos estabelecem conexões com outros temas matemáticos. O que realça a importância deles perante a ciência, matemática.

Com o intuito de apresentarmos uma proposta didática que auxiliasse o ensino do conteúdo números complexos, optamos por trabalhar especialmente as formas geométricas e trigonométricas desses números. Para tal fizemos uso do programa GeoGebra, a fim de que as aulas fossem mais atraentes aos discentes e por ser um recurso computacional que une a teoria e prática.

As atividades que sugerimos seguem um pouco as recomendações presentes no Conteúdo Base Comum de Matemática Ensino Fundamental e Médio da Secretaria de Educação de Minas Gerais, documento que apresenta sugestões e orientações para se trabalhar os números complexos. Contudo, esse documento traz os números complexos como um tópico complementar para o ensino médio, assim a proposta apresentada por ele pode não ser levada adiante.

Vale destacar que apenas a figura 4.1 foi construída pelo programa CorelDRAWX8, versão para Windows. As demais foram feitas no software GeoGebra Clássico 6, versão para Windows.

Por fim, espera-se que outros docentes possam utilizar essa dissertação como uma ferramenta que auxilie em seus estudos e na elaboração de suas aulas.

Bibliografia

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática.* 1ª Ed. EDGARD BLUCHER, 1996, p. 496.

[2] Caon, F. et al. "Números Complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações" (2013).

[3] Carneiro, M. J. D., Spira, M. e Sabatucci, J. *Contéudo Base Comum de Matemática Ensino Fundamental e Médio.* Vol. único. Secretária de Educação de Minas Gerais, 2007.

[4] D'AMBROSIO, U. "Euler, um Matemático Multifacetado". *Revista Brasileira de História da Matemática. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática* 9.17 (2009), pp. 13–31.

[5] Faria, N. A. "Um estudo sobre Numeros Irracionais e Transcendentes" (2019).

[6] Gomes, R. "Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do Geogebra." (2013).

[7] Hefez, A. e Villela, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas.* 1ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2012, p. 269.

[8] Júnior, U. P. "A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:"das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"" (2009).

[9] Massad, R. C. "A Construção dos Números Reais" (2014).

[10] Niven, I. *Números: racionais e irracionais.* SBM, 1984.

[11] Ripolli. *Números Racionais, Reais e Complexos.* 1ª Ed. UFRGS, 2011, p. 528.

[12] Soares, M. G. *Cálculo em uma variável complexa.* 5ª Ed. COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA. impa, 2016, p. 196.