



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



GEORGE HOMER BARBOSA DE MEDEIROS

RÉGUA, COMPASSO E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

ORIENTADOR:

PROF. DR. ANDRÉ GUSTAVO CAMPOS PEREIRA

Natal (RN)
Março de 2020

GEORGE HOMER BARBOSA DE MEDEIROS

RÉGUA, COMPASSO E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFRN como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo
Campos Pereira.

Natal (RN)
Março de 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Medeiros, George Homer Barbosa de.

Régua, compasso e pontos notáveis de um triângulo / George Homer Barbosa de Medeiros. - 2020.

53f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2020.

Orientador: André Gustavo Campos Pereira.

1. Matemática - Dissertação. 2. Construções geométricas - Dissertação. 3. Pontos notáveis - Dissertação. 4. Régua e compasso - Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/CCET

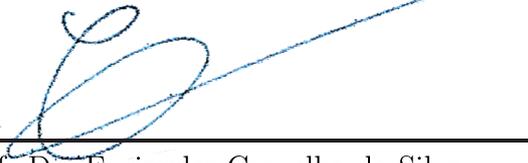
CDU 51

RÉGUA, COMPASSO E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

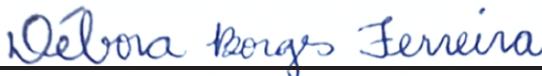
GEORGE HOMER BARBOSA DE MEDEIROS

Dissertação de Mestrado apresentada à
Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFRN como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em
Matemática, aprovada em 26 de março de
2020.

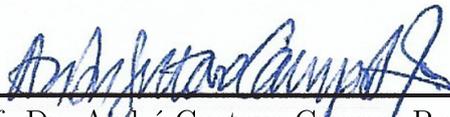
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Euripedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará



Prof. Dra. Débora Borges Ferreira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte



Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal (RN)
Março de 2020

*Dedico este trabalho aos meus pais, esposa e filhos,
por sempre acreditarem no meu potencial e me apoiarem,
e por entenderem minha ausência durante todo o PROFMAT.*

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus por ter me dado a maior bênção da minha vida que é minha família, meus pais, irmão, esposa, filhos e demais familiares.

Agradeço ao Senhor por mim presentear com pais maravilhosos, Geraldo e Tânia, os quais não mediram esforços na minha formação como ser humano, com eles aprendi que a maior demonstração de amor é a doação de si naquilo que te faz feliz, há muito de vocês no professor que sou hoje, meu caráter, meus valores e minha felicidade devo aos dois igualmente. Sou e serei eternamente grato por tudo que vocês dedicaram a mim. Eu tenho muito orgulho de ser filho de vocês e muita admiração pelos pais que tenho.

Agradeço ao Senhor pela minha esposa, Laine, a qual sinto um orgulho enorme em verificar que é uma mãe tão cuidadosa e tão amorosa. A forma como você cuida de mim e de nossos filhos é o que me fortalece na busca de uma vida melhor para nossa família. O meu eterno obrigado por tudo que você nos oferece todos os dias.

Agradeço ao Senhor pelos meus filhos, Grayce, Gabrielly e Gael, Tu me abençoastes com os melhores filhos do mundo. São o meu orgulho, a razão da minha vida e do grande amor que carrego no coração. Prometo que vou continuar fazendo tudo que estiver ao meu alcance para garantir que vocês tenham um futuro próspero.

Agradeço a todos meus amigos e colegas, principalmente aos colegas de sala, por confiarem em mim, sempre me dando forças e apoiando nos momentos que não pude estar presente. Desejo muito sucesso a todos e espero que a vida nunca nos afaste totalmente uns dos outros.

Agradeço a todos os professores pela dedicação e contribuição na minha formação, em especial ao meu orientador, professor André, que me conduziu de forma espetacular na conclusão deste trabalho.

*“Nem tão longe que eu não possa ver
Nem tão perto que eu possa tocar
Nem tão longe que eu não possa crer
Que um dia chego lá
Nem tão perto que eu possa acreditar
Que o dia já chegou”*

Humberto Gessinger

Resumo

Atualmente, com o avanço da tecnologia, temos vários recursos que auxiliam o ensino de diversos conteúdos da Matemática, em especial os que envolvem geometria como, por exemplo, os *softwares* GeoGebra, WinPlot, Graph entre outros. Porém, muitos professores preferem formas tradicionais na transmissão do conhecimento, ou seja, o simples uso do livro didático, permitindo que o aluno tenha uma aprendizagem puramente passiva e sem criatividade, dificultando a assimilação dos conteúdos de forma significativa. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino utilizando construções geométricas com régua e compasso, em especial o estudo dos principais pontos notáveis do triângulo (circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro) e algumas outras construções. O referido trabalho explora várias propriedades durante as construções geométricas propostas e em alguns problemas, permitindo que o aluno interaja na construção do seu conhecimento, possibilitando uma aprendizagem criativa e significativa.

Palavras-chave: Construções geométricas, Pontos notáveis, Régua e compasso.

Abstract

The Technology advances has generated several resources that are helping the teaching of various topics in elementary Mathematics, especially those involving geometry in the plane, such as GeoGebra, WinPlot, Graph, among others. However, many teachers prefer the old fashion way of transmitting knowledge, which is, follow the chronology proposed in the textbook. Such procedure makes the classes very straight and without creativity, which difficult the assimilation of the subject. The aim of this work is to present an alternative propose to develop the students criativite by using geometric constructions with ruler and compass, in particular in the study of the main notable points of a triangle (circumcenter, incenter, barycenter and orthocenter) and some other constructions. Various properties of the figures and objects can be explored in this approach and can be practised in some problems, allowing the student to build their own knowledge in a criative and consistent way.

Keywords: Geometric Constructions, Notable Points, Ruler and Compass.

Sumário

INTRODUÇÃO	9
1 Conceitos preliminares	12
1.1 Lugar Geométrico	12
1.1.1 Mediatriz	15
1.2 Cevianas	17
1.2.1 Bissetriz	18
1.2.2 Mediana	23
1.2.3 Altura	25
2 Pontos notáveis de um triângulo	29
2.1 Circuncentro	29
2.2 Incentro	31
2.3 Baricentro	32
2.4 Ortocentro	34
2.5 Reta de Euler	35
3 Problemas propostos	38
CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44
Apêndice A: Demonstração do Teorema de Ceva	45
Apêndice B: Ângulo entre a reta tangente à circunferência e seu raio	47
Apêndice C: Medida de um ângulo inscrito	48
Apêndice D: Congruência de triângulos	50
Apêndice E: Quadriláteros inscritíveis	52

INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática [2], para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, publicados em 1998, a prática mais frequente no ensino de Matemática é a tradicional apresentação do conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Esse método indica que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas pode não ter aprendido o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos.

Em conformidade com [2], é papel do professor buscar novos métodos que considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem. O professor deve exercer papel de organizador, facilitador e mediador da aprendizagem, selecionando problemas que possibilitem a construção do conhecimento através do processo de resolução, fornecendo apenas as informações necessárias para solução dos problemas. Além disso, o professor deve promover o debate sobre resultados e métodos, orientando e valorizando as soluções mais adequadas.

Ainda em [2], no estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma, onde é proposto o estudo da geometria, o ponto de partida é a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. Destacando que o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Além disso,

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51).

Para [7] é grande a importância das construções geométricas para os alunos e professores, uma vez que serve como base para Geometria. Dessa forma, acreditamos que o estudo da Geometria pode ser potencializado com uma proposta que valorize a utilização

de construções geométricas com régua e compasso, propiciando ao aluno a capacidade de planejar, projetar e abstrair.

Além disso, [6] afirma que o ambiente escolar é um lugar de produção social, um espaço para criação, descobertas e apropriação da ciência produzida na história humana. Dessa maneira, o professor acentua seu papel nesse processo, provocando a participação ativa dos alunos e intervindo quando necessário. Assim, é recomendado que o professor busque propostas de aprendizagem que propicie esse ambiente escolar.

Diante disso tudo, propomos neste trabalho um estudo dos pontos notáveis do triângulo a partir de várias outras construções geométricas, explorando a criatividade dos discentes para conjecturar algumas propriedades de alguns lugares geométricos. Para definir o tema central desse trabalho, foi realizada uma pesquisa no banco de dissertações do PROFMAT, onde foi observado que haviam 9 dissertações que traziam como tema os pontos notáveis do triângulo. Porém, nenhuma das dissertações utilizavam construções geométricas com régua e o compasso como proposta de ensino.

Boa parte dessas dissertações foi utilizado como proposta o uso do *software* GeoGebra como recurso didático. O que nos leva a refletir um pouco, uma vez que o GeoGebra não é tão acessível quanto a régua e o compasso, pois demanda um custo maior para as instituições de ensino, visto que para seu uso é necessário computadores ou smartphome.

Além do mais, o uso excessivo do computador possa vir a gerar no aluno a ideia equivocada de que apenas com o uso dessa tecnologia seja possível criar desenhos ou gráficos, desvalorizando o potencial artístico dos discentes. Isso não impede que o professor possa utilizar o *software* GeoGebra, ou outro similar, para mostrar os resultados já obtidos pelos alunos através das construções geométricas por régua e compasso. Nesse modelo de proposta, seria necessário apenas um computador e um projetor, o que condiz melhor com a realidade da escolas públicas do Brasil.

Neste sentido, no primeiro capítulo propomos, através de alguns teoremas e proposições, a construção de alguns lugares geométricos necessários para localização dos pontos notáveis abordados nesse trabalho. Além disso, é dado os referidos passos para a construção dos mesmos com régua e compasso, há também algumas construções de ângulos notáveis que valorizam as propriedades de algumas figuras já conhecidas pelos discentes.

No segundo capítulo, são apresentados, através de proposições, os seguintes pontos notáveis: circuncentro, incentro, baricentro e ortocentro. As proposições são todas demonstradas, utilizando-se do conhecimento apresentado no Capítulo 1, dando ênfase a algumas observações interessantes relativas a esses pontos. Além dos pontos notáveis é apresentada a denominada *Reta de Euler*, a qual passa por três pontos notáveis: o ortocentro, o baricentro e o circuncentro. A referida reta abre uma ótima possibilidade para a utilização dos recursos computacionais citados anteriormente, possibilitando a dinamização desse problema para muitas possibilidades.

dos pontos estudados,, o que pode ser proposto como conjectura para os discentes.

No terceiro e último capítulo, são propostos alguns problemas envolvendo os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores, oferecendo ao aluno a possibilidade de aplicar os conhecimentos absorvidos em situações problemas, alguns dos referidos problemas são adaptações de questões utilizadas anteriormente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Além disso, o trabalho possui exatamente 5 apêndices, pela ordem temos: a demonstração do Teorema de Ceva, a demonstração de que a reta tangente a uma circunferência é perpendicular a seu raio, a demonstração de que todo ângulo inscrito a um círculo unitário tem a metade da medida do arco correspondente, casos de congruência de triângulos e, por fim, a demonstração de que os quadriláteros inscritíveis possuem a soma de ângulos opostos igual a 180° .

Em nossas considerações finais, nos fixamos na análise da proposta de ensino com construções geométricas utilizando a régua e o compasso e destacamos como o professor pode avaliar a aprendizagem dos alunos através do método proposto nesse trabalho. Além disso, acreditamos que o método possa realmente contribuir para um aprendizado significativo.

1 Conceitos preliminares

Neste capítulo propomos algumas construções com régua e compasso que auxiliarão na determinação dos pontos notáveis que são apresentados nesta dissertação. Além disso, são apresentadas algumas definições importantes tais como: lugar geométrico, mediatriz, bissetriz, mediana e altura.

De acordo com [5] o conceito de lugar geométrico é essencial para uma compreensão mais profunda da abordagem da geometria Euclidiana. Dessa forma, começamos este capítulo com o importante conceito de lugar geométrico.

1.1 Lugar Geométrico

Definição 1. *Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

- (a) *Todo ponto de L possui a propriedade P .*
- (b) *Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L .*

Um bom exemplo para trabalhar tanto a definição de lugar geométrico quanto para introduzir o uso do compasso é a definição de circunferência, já que é uma das figuras que a maioria dos alunos consegue identificar com uma maior facilidade.

Definição 2. *Circunferência de raio r e centro C é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a um ponto fixo C é uma constante positiva r .*

Por exemplo, ao fixarmos a extremidade de um barbante no chão e um pedaço de giz na outra, ao girarmos o barbante esticado com o giz no chão, ao final da volta teremos desenhado uma circunferência. Desse modo, o aluno percebe que para desenhar uma circunferência, basta fixarmos uma distância e um ponto, onde o ponto fixado é o centro da circunferência e a distância, seu raio. Sendo assim, surge a oportunidade ideal de apresentar um instrumento que nos permite fixar uma distância e um ponto, a saber: o compasso.



Figura 1.1: Representação de um compasso.

Fonte: https://br.freepik.com/fotos-premium/divisores-de-engenharia-ferramentas-isoladas-no-fundo-branco_4698963.htm.

O próximo passo seria ensinar ao aluno o uso do compasso. Assim, dado um segmento com extremidades C e P se quisermos construir uma circunferência de centro C e raio \overline{CP} , devemos colocar a ponta seca (ponta fixadora) do compasso sobre o ponto C e a outra ponta sobre o ponto P , agora basta girar o compasso em alguma direção até formar uma circunferência sem alterar o ângulo de abertura, conforme Figura 1.2. Essa construção nos permite observar que qualquer ponto da circunferência está a uma mesma distância do centro C , que nesse caso é $\overline{CP} = r$.

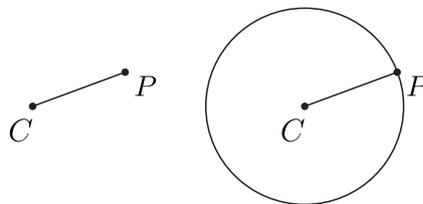


Figura 1.2: Circunferência de raio $r = \overline{CP}$.

Fonte: O autor.

Dessa maneira, seja $P_{C,r}$ a propriedade dos pontos do plano que estão a uma distância r do ponto C . Como achar um lugar geométrico referente a essa propriedade?

Como feito anteriormente, podemos traçar um segmento de tamanho r de extremos C e P e abrir o compasso com esse tamanho, fixando a ponta seca em C e a outra ponta na outra extremidade do segmento. Assim, ao girarmos o compasso obtemos um conjunto de pontos T que estão a uma mesma distância r de C . Logo, todos esses pontos estão em L_C (circunferência de centro C), uma vez que todos eles satisfazem a propriedade $P_{C,r}$, ou seja, $T \subset L_C$.

A pergunta agora é se os únicos pontos de L_C são os que estão em T .

Assim, seja D um ponto qualquer do plano, para sabermos a distância desse ponto a C , traçamos o segmento DC e medimos \overline{DC} (medida do segmento DC). Note que se juntarmos o conjunto T ao segmento DC , temos uma das três possíveis situações.

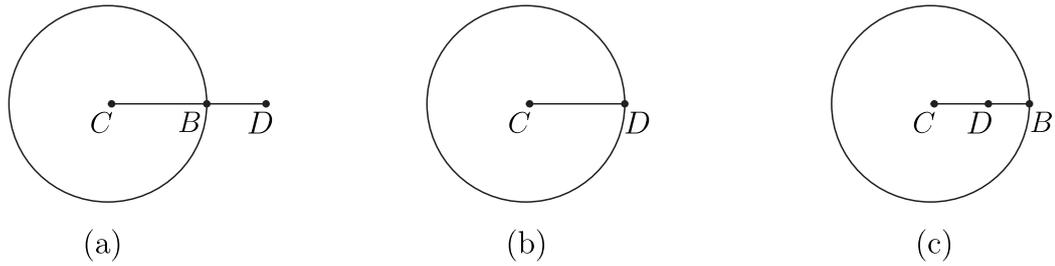


Figura 1.3: Verificando se um ponto pertence a circunferência.
Fonte: O autor.

Note que em (a) ao percorrermos do ponto C ao ponto D sobre o segmento CD , existirá um ponto B sobre T , e por estar sobre T a distância dele ao ponto C é r . Assim

$$\overline{CB} + \overline{BD} = \overline{CD} \Rightarrow r < \overline{CD}.$$

Portanto, o ponto D não possui a propriedade $P_{C,r}$, logo $D \notin L_C$.

Em (b) por D pertencer a T , temos que D possui a propriedade $P_{C,r}$, logo D pertence a L_C .

E por fim, no caso (c) estendendo CD até tocar em T , temos que

$$\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{CB} = r \Rightarrow \overline{CD} < r.$$

Portanto, o ponto D não possui a propriedade de $P_{C,r}$, logo $D \notin L_C$.

Com isso identificamos que todos os pontos do plano que possuem a propriedade $P_{C,r}$ estão em T . Portanto, $L_C = T$.

A partir deste momento, vamos aproveitar o exemplo anterior para verificar que o compasso também pode ser utilizado para replicar uma determinada medida. Assim, vamos construir uma circunferência com o triplo do raio da circunferência da Figura 1.2. Para isso, vamos seguir os seguintes passos:

1. Construa uma semirreta com origem no ponto O ;
2. Volte na Figura 1.2 e meça o comprimento \overline{CP} com o compasso, colocando a ponta seca no ponto C e a outra ponta no ponto P ;
3. Volte a semirreta construída e coloque a ponta seca sobre o ponto O e faça um arco intersectando a semirreta no ponto A . Agora, com a mesma abertura coloque a ponta seca sobre o ponto A e marque o ponto B . Logo após, repita o mesmo passo colocando a ponta seca sobre o ponto B e marcando o ponto C ;
4. Para finalizar, coloque a ponta seca sobre o ponto O e a outra ponta sobre o ponto C e gire o compasso, construindo a circunferência de raio \overline{OC} com o triplo do raio da circunferência da Figura 1.2, conforme a Figura 1.4.

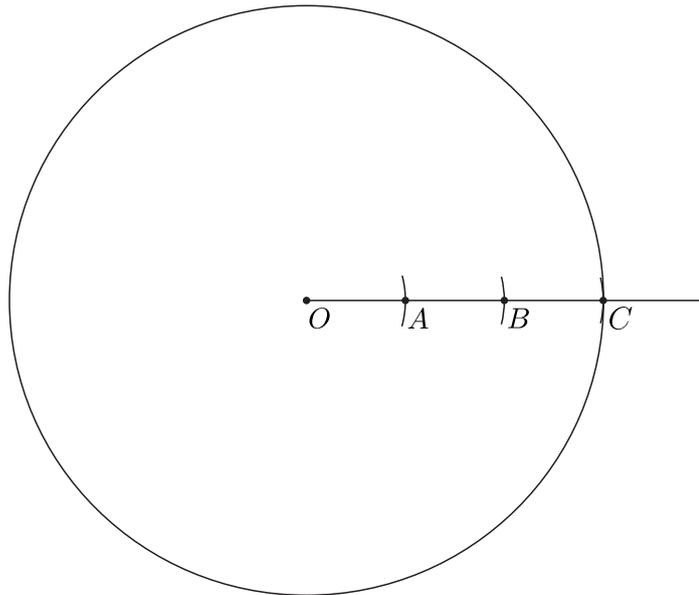


Figura 1.4: Circunferência de raio 3 vezes maior que o da Figura 1.2.
Fonte: O autor.

Alguns lugares geométricos, além da circunferência, são essenciais para o bom desenvolvimento do aluno no estudo da geometria. Assim, é fundamental que o discente conheça alguns teoremas e propriedades das figuras geométricas, para isso, um bom recurso para aprender e fixar tais conteúdos, é produzir esses conhecimentos partindo das construções geométricas, possibilitando que o aluno faça suas próprias descobertas. Dessa forma, estudaremos alguns lugares geométricos a partir de sua construção com régua e compasso.

1.1.1 Mediatriz

Um dos lugares geométricos essenciais para nosso estudo é a mediatriz.

Definição 3. *A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.*

Desse modo, vamos construir a mediatriz do segmento AB utilizando apenas régua e compasso. No entanto, vamos fazer algumas análises antes de elaborar um passo a passo.

Primeiramente vamos considerar um segmento com extremidade A e B , agora fazamos duas circunferências de raios distintos, uma centrada em A e outra centrada em B . Nesse caso, temos três possibilidades: na primeira as circunferências não se interceptam, na segunda as circunferências se interceptam em um único ponto, e por fim, na terceira as circunferências se interceptam em dois pontos.

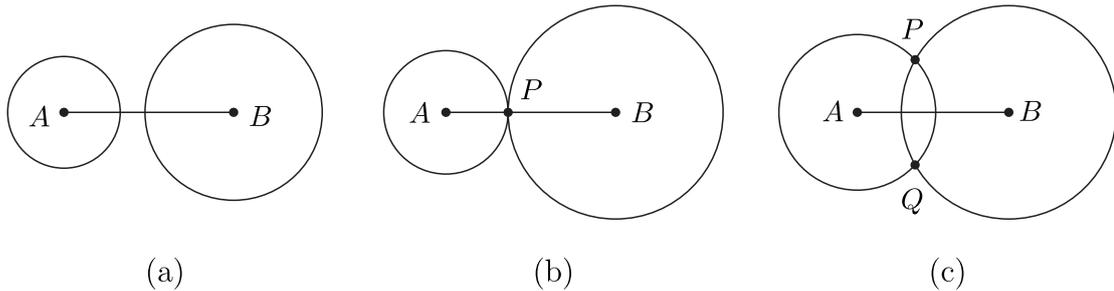


Figura 1.5: Intersecções entre duas circunferências.
 Fonte: O autor.

Observe a Figura 1.5 e note que (a) e (b) não nos permite deduzir nenhuma propriedade. Em contra partida, em (c) as circunferências se interceptam em dois pontos, o que nos permite traçar uma reta que passa por P e Q , conforme a Figura 1.6.

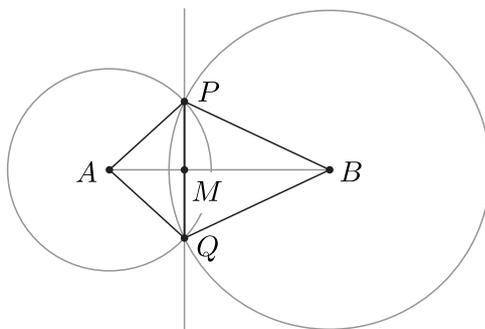


Figura 1.6: Reta PQ concorrente ao segmento AB .
 Fonte: O autor.

Ao analisar a Figura 1.6, podemos afirmar que o triângulo APB e AQB são congruentes pelo caso LLL (Lado, Lado, Lado), pois $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\overline{BP} = \overline{BQ}$ e \overline{AB} é comum a ambos os triângulos. Assim, temos que os ângulos \widehat{PAM} e \widehat{QAM} são iguais, e como $\overline{AP} = \overline{AQ}$ e \overline{AM} é comum aos triângulos AQM e APM segue pelo caso LAL (Lado, Ângulo, Lado) que APM e AQM são congruentes, implicando em $\widehat{PMA} = \widehat{QMA}$, e como $\widehat{PMA} + \widehat{QMA} = 180^\circ$, concluímos que $\widehat{PMA} = \widehat{QMA} = 90^\circ$. Logo a reta PQ é perpendicular ao segmento AB .

Com a construção anterior já somos capazes de produzir segmentos perpendiculares a um segmento AB qualquer, que é uma das características da mediatriz. Agora, vamos propor a mesma construção, só que dessa vez, faremos as circunferências com mesmo raio. No entanto, pelo o que já concluímos, as circunferências devem se intersectar em dois pontos, isso implica que o raio delas deve ter medida maior que $\frac{AB}{2}$. Além disso, não é mais preciso desenhar toda a circunferência, é suficiente traçar os arcos onde há intersecções entre os mesmos, conforme a Figura 1.7.

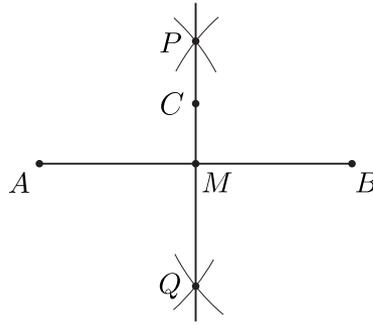


Figura 1.7: Traçando mediatriz com arcos.
Fonte: O autor.

Pelo o que foi exposto na construção anterior, temos que $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{BP} = \overline{BQ}$. Disto, temos que os triângulos $AMP \equiv BMP$ (assim como $AMQ \equiv BMQ$), pois $\overline{AP} = \overline{BP}$, \overline{MP} é comum e o triângulo é retângulo, portanto, $\overline{AM} = \overline{BM}$. Dessa forma, note que qualquer ponto C da reta PQ é equidistante dos pontos A e B , pela congruência dos triângulos retângulos AMC e BMC , pois \overline{CM} é comum a ambos os triângulos e M é o ponto médio de \overline{AB} , que é outra característica da mediatriz.

Esse fato também pode ser visualizado com o compasso, basta colocar a ponta seca sobre a reta PQ e a outra sobre o ponto A e ao construir o arco, o mesmo passará por B , isso para qualquer que seja o ponto C sobre a reta PQ , conforme a Figura 1.8.

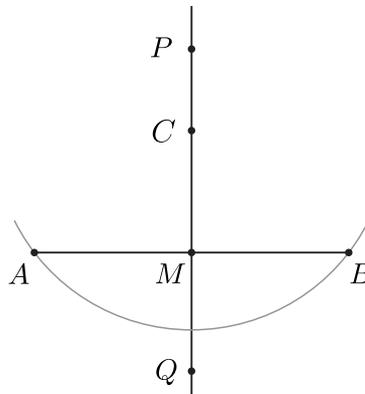


Figura 1.8: Verificando que qualquer ponto da mediatriz é equidistante de A e de B .
Fonte: O autor.

1.2 Cevianas

Definição 4. *Uma ceviana de um triângulo é um segmento que tem uma das extremidades num vértice qualquer e a outra em algum ponto da reta suporte ao lado oposto a esse vértice.*

Assim, na Figura 1.9, temos a representação das cevianas AD e AE relativas ao vértice A (ou relativas ao lado BC), onde os pontos D e E são os pés dessas cevianas.

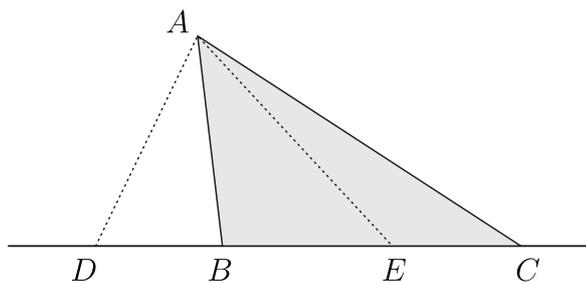


Figura 1.9: Cevianas AD e AE .
Fonte: O autor.

De acordo com essa definição e observando a figura acima, podemos deduzir que existem infinitas cevianas relativas a cada vértice, pois sempre podemos selecionar um ponto da reta suporte BC e ligar ao vértice A . Além disso, podemos concluir que não existe uma ceviana cujo comprimento seja maior que o comprimento de todas as outras, pois o ponto selecionado na reta BC pode ser cada vez mais distante do vértice A .

Por outro lado, existe um ponto da reta suporte BC que é o ponto mais próximo do vértice A , portanto, a ceviana que liga esse ponto ao vértice A é a ceviana de menor comprimento referente a esse vértice, essa ceviana recebe o nome de altura e é perpendicular à reta suporte BC , esse resultado é detalhadamente demonstrado por [1] nas páginas 51, 52 e 53.

Por apresentar características e consequências importantes, as cevianas estudadas nesse trabalho são: a bissetriz, a mediana e a altura.

O nome ceviana tem origem em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648 - 1734) que demonstrou alguns teoremas importantes, inclusive um deles recebe o nome de Teorema de Ceva, em sua homenagem.

Teorema 1 (Teorema de Ceva). *Três cevianas AD , BE e CF de um triângulo ABC são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

A demonstração do Teorema de Ceva encontra-se no Apêndice A.

1.2.1 Bissetriz

Definição 5. *A bissetriz de um ângulo \widehat{APB} é a semirreta \overrightarrow{PC} tal que $\widehat{APC} = \widehat{CPB}$.*

Vamos investigar algumas construções que possam nos ajudar a traçar a bissetriz de um ângulo qualquer.

Dada uma circunferência de centro C e um ponto P no exterior dessa circunferência, existem apenas duas retas que passam por P e são tangentes a circunferência dada, conforme a Figura 1.10.

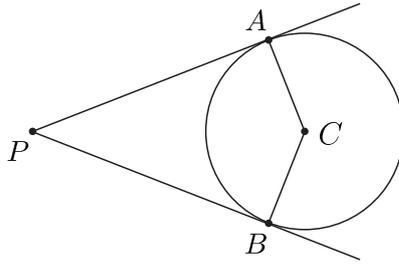


Figura 1.10: Retas tangentes a uma circunferência de centro C .
 Fonte: O autor.

Note que na figura anterior podemos traçar o segmento CP formando dois triângulos congruentes, pois os ângulos $\widehat{PAC} = \widehat{PBC} = 90^\circ$, prova no Apêndice B. Além disso, como A e B são pontos da circunferência, temos que $\overline{AC} = \overline{BC} = r$. Como PC é hipotenusa comum aos triângulos PAC e PBC , segue do critério cateto hipotenusa de congruência entre triângulos retângulos que $PAC \equiv PBC$. Portanto, $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\widehat{APC} \equiv \widehat{BPC}$, conforme a Figura 1.11. Portanto, a semirreta PC é bissetriz do ângulo \widehat{APB} .

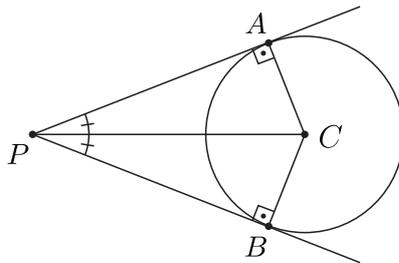


Figura 1.11: Triângulos congruentes.
 Fonte: O autor.

Note que se o ponto P estiver no exterior da circunferência, como proposto na construção anterior, sempre teremos que a medida do ângulo \widehat{APB} será menor que 180° . Consequentemente, dado um ângulo com medida menor que 180° , sempre será possível traçar duas retas perpendiculares aos lados desse ângulo, interceptando-se no ponto C , formando um quadrilátero $APBC$, conforme a Figura 1.12. Se a medida do ângulo dado \widehat{APB} é igual a α , teremos que o ângulo \widehat{ACB} formado pelas retas perpendiculares aos lados desse ângulo terá medida igual a $180^\circ - \alpha$.

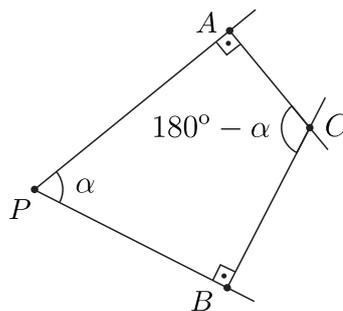


Figura 1.12: Ângulo opostos que somam 180° .
 Fonte: O autor.

Sendo assim, podemos construir as retas perpendiculares aos lados do ângulo a uma mesma distância do vértice P , garantindo assim, a construção de um quadrilátero com lados iguais dois a dois, ou seja, $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{AC} = \overline{BC}$, pois os triângulos APC e BPC são congruentes pelo critério de congruência cateto hipotenusa entre triângulos retângulos, conforme a Figura 1.13.

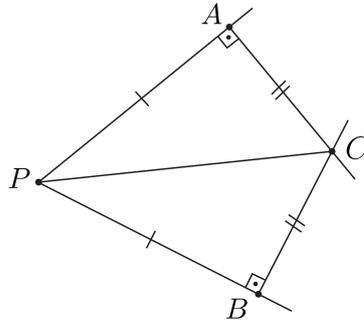


Figura 1.13: Retas perpendiculares aos lados de uma ângulo.

Fonte: O autor.

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, podemos construir a circunferência de centro C e raio $r = \overline{AC}$ que tangencia os lados do ângulo \widehat{APB} , conforme a Figura 1.14. Concluimos assim, que sempre é possível construir uma circunferência tangente aos lados de um dado ângulo com medida menor que 180° .

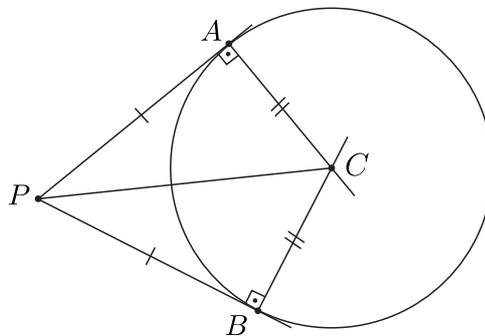


Figura 1.14: Circunferência tangente aos lados de um ângulo.

Fonte: O autor.

Assim, dado um ângulo $\widehat{APB} < 180^\circ$, para construir uma circunferência tangente aos seus lados, basta seguir os seguintes passos:

1. Colocamos a ponta seca do compasso sobre P e traçamos um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em M e N ;
2. Em seguida, traçamos duas retas perpendiculares uma a cada lado, passando pelos pontos M e N , cortando-se em C ;
3. Por fim, colocamos a ponta seca sobre o pontos C e a outra ponta sobre M e traçamos a circunferência de $r = \overline{CM}$.

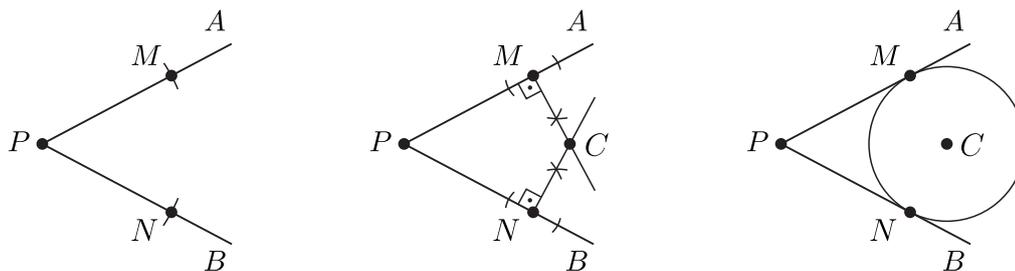


Figura 1.15: Construção da circunferência tangente a um ângulo.
 Fonte: O autor.

Para o caso em que o ângulo de vértice P tem medida igual a 180° , não é possível encontrar a intersecção das retas perpendiculares aos lados desse ângulo, pois essas retas são paralelas, conforme a Figura 1.16.

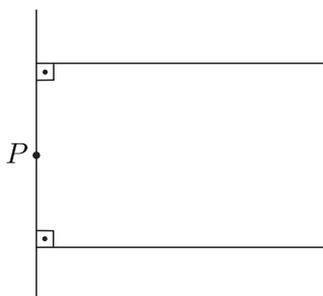


Figura 1.16: Ângulo de 180° com retas perpendiculares.
 Fonte: O autor.

Assim, não é possível construir a circunferência tangente aos lados desse ângulo. Porém, podemos traçar uma semirreta perpendicular aos lados do ângulo passando pelo vértice P e, dessa forma, escolher um ponto C pertencente a essa semirreta e traçar uma circunferência de centro C e $r = \overline{CP}$. Logo, essa circunferência será tangente ao vértice do ângulo P , e a semirreta PC é a bissetriz desse ângulo, conforme a Figura 1.17.

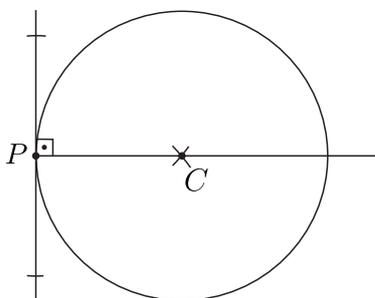


Figura 1.17: Circunferência tangente a um ponto da reta.
 Fonte: O autor.

A construção da Figura 1.17 é semelhante à construção da mediatriz. Para isso, colocamos a ponta seca sobre o vértice P e traçamos dois arcos de mesmo raio interceptando a reta que contém P em pontos diametralmente opostos. Logo após, colocamos a

ponta seca sobre cada uma das intersecção e com a mesma abertura de raio superior a medida anterior, a qual marcamos as intersecções, e traçamos dois arcos se intersectando no ponto C . Para finalizar, basta colocar a ponta seca em C e a outra ponto sobre P e traçar a circunferência de raio $r = \overline{CP}$.

Se o ângulo tem medida superior a 180° não é possível construir uma circunferência tangente aos seus dois lados ao mesmo tempo, porém podemos traçar a bissetriz do ângulo de forma semelhante ao exemplo anterior do ângulo de 180° . Para isso, devemos seguir os seguintes passos:

1. Colocamos a ponta seca do compasso sobre P e traçamos um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em M e N ;
2. Traçamos dois arcos de mesmo raio, com medida superior a \overline{PM} , com centros em M e N que se cortam em C , garantindo que C é equidistante de M e N ;
3. Por fim, traçamos a semirreta PC que é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$.

Para confirmar que a semirreta PC é bissetriz, observe a Figura 1.18 e note que, pela construção anterior, temos $\overline{PM} = \overline{PN}$, $\overline{CM} = \overline{CN}$ e \overline{PC} é comum aos triângulos CPM e CPN . Dessa maneira, pelo caso de congruência LLL (Lado, Lado, Lado), temos que $CPM \cong CPN$, implicando em $M\hat{P}C \cong N\hat{P}C$.

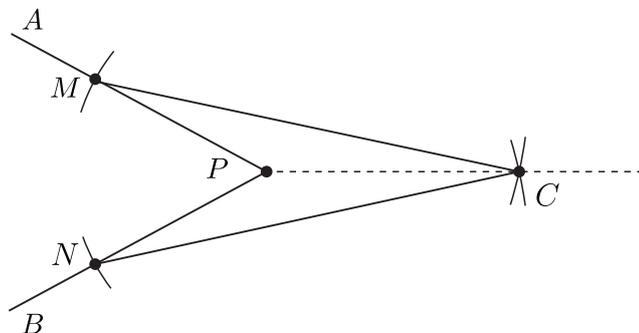


Figura 1.18: Bissetriz de um ângulo com medida maior que 180° .

Fonte: O autor.

Observe que essa sequência de passos para traçar a bissetriz é a mesma utilizada para o ângulo de 180° e também é válida para ângulos com medidas inferiores a 180° conforme Figura 1.19.

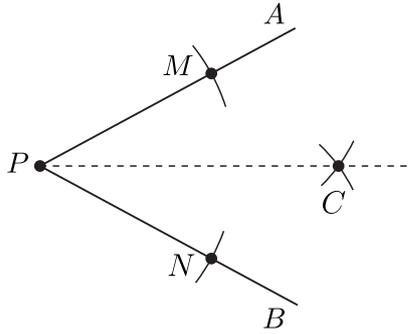


Figura 1.19: Construção da bissetriz com régua e compasso.
Fonte: O autor.

1.2.2 Mediana

Dado um triângulo ABC vamos traçar a ceviana que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto, conforme a Figura 1.20.

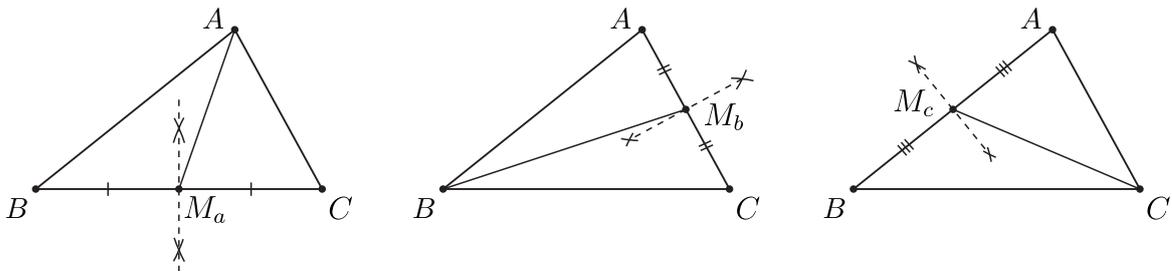


Figura 1.20: Medianas do triângulo ABC .
Fonte: O autor.

Definição 6. Dado um triângulo ABC e um ponto M da reta que contém B e C , o segmento AM chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC , se M for o ponto médio de BC .

Assim, pela Figura 1.20 as medianas relativas aos lados BC , AC e AB são respectivamente AM_a , BM_b e CM_c .

É simples traçar a mediana de um triângulo retângulo em relação a hipotenusa, basta apenas ligar seu vértice oposto ao ponto médio da hipotenusa. Porém, não é tão simples verificar que centrado a ponta seca do compasso no ponto médio da hipotenusa, com abertura de mesmo tamanho da mediana, ao traçarmos uma circunferência, ela conterà os três vértices e a hipotenusa será seu diâmetro.

Para fazer a construção do parágrafo anterior devemos seguir os seguintes passos:

1. Trace o ponto médio M da hipotenusa BC , como vimos em 1.1.1, e considere $\overline{BC} = a$, logo $\overline{MB} = \frac{a}{2}$;
2. Com a ponta seca em M e abertura $\frac{\overline{BC}}{2}$ trace a semicircunferência de diâmetro \overline{BC} . Mostremos que A pertence a essa semicircunferência, ou seja, $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

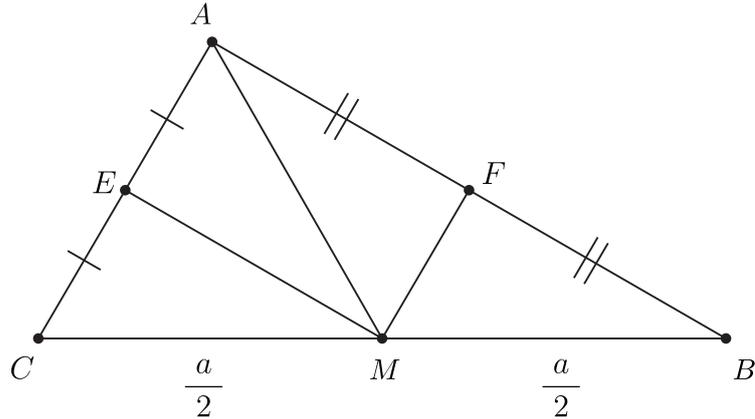


Figura 1.21: Medianas do triângulo ABC .
Fonte: O autor.

Note que ao ligarmos o ponto M aos pontos médios dos lados AB e AC temos que FM é paralelo a AC e EM é paralelo a AB , logo $EAMF$ é retângulo de lados $\frac{AC}{2}$ e $\frac{AB}{2}$, assim, por Pitágoras

$$\overline{AM}^2 = \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{\frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{4}} = \sqrt{\frac{\overline{BC}^2}{4}} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Logo, A pertence a semicircunferência e concluímos que ao centrarmos a ponta seca do compasso em M com raio igual a mediana, essa semicircunferência conterà os três vértices e seu diâmetro será a hipotenusa.

Outra conclusão que podemos ressaltar é a de que quando desejamos desenhar um triângulo retângulo com uma dada hipotenusa \overline{AB} , bastar traçar uma semicircunferência com essa hipotenusa sendo seu diâmetro. Selecionando, a seguir, qualquer ponto C sobre a semicircunferência teremos que o triângulo ABC é retângulo. Além disso, esses são todos os possíveis triângulos retângulos que possuem a hipotenusa com essa medida.

De fato, note que podemos ter $a \leq b < c$, onde c é a hipotenusa e, por Pitágoras, temos que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

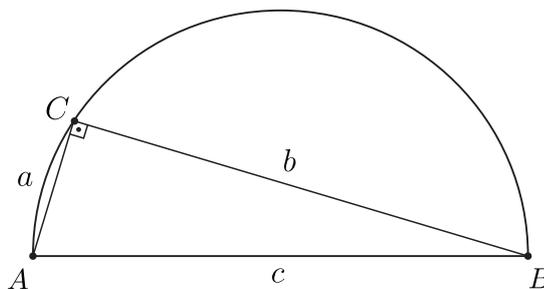


Figura 1.22: Triângulo retângulo inscrito em uma semicircunferência.
Fonte: O autor.

Note que a assume todos os possíveis valores de $0 \leq a \leq c$ no trajeto de A a B .

Retirando os extremos A e B temos que $0 < a < c$, percorrendo todas as possibilidades de tamanho de um cateto do referido triângulo.

1.2.3 Altura

Definição 7. A altura relativa a um vértice é a ceviana de menor comprimento relativo ao vértice dado.

Dessa forma, traçaremos a altura relativa a um vértice de um triângulo, ou seja, o segmento de reta perpendicular a reta que contém os outros dois vértices.

Para fazer essa construção, basta posicionar a ponta seca do compasso sobre o ponto A com uma abertura suficiente para marcar os pontos P e Q na reta BC . Continuando, traçamos a mediatriz de P e Q , a qual contém o ponto A , e marcamos o ponto médio H de BC , denominando o ponto H como *pé da altura*. Note que há três casos a considerar como representação da altura do triângulo ABC relativa ao lado BC , vejamos:

1º. H está entre B e C .

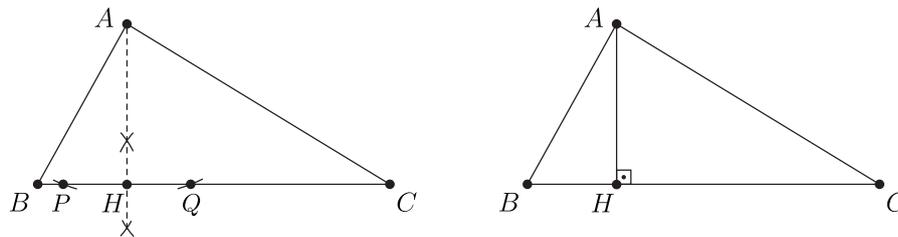


Figura 1.23: Altura relativa ao lado BC com H entre B e C .
Fonte: O autor.

2º. H pertence a reta BC , mas não está entre B e C .

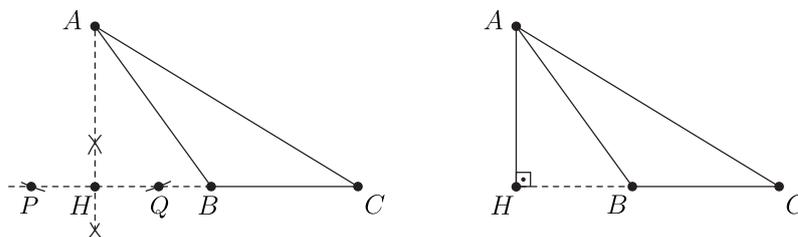


Figura 1.24: Altura relativa ao lado BC com H entre B e C .
Fonte: O autor.

3º. H é uma das extremidades do segmento BC .

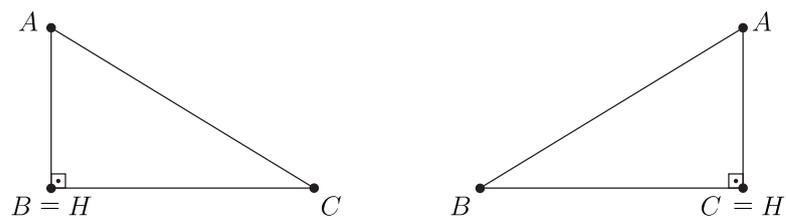


Figura 1.25: Altura do triângulo retângulo.
Fonte: O autor.

Voltando à Figura 1.8 verificamos que qualquer ponto pertencente à mediatriz é equidistante dos pontos A e B . Assim, escolhendo um ponto P qualquer pertencente à mediatriz e ligando os segmentos AP e BP formamos o triângulo isósceles ABP conforme a Figura 1.26.

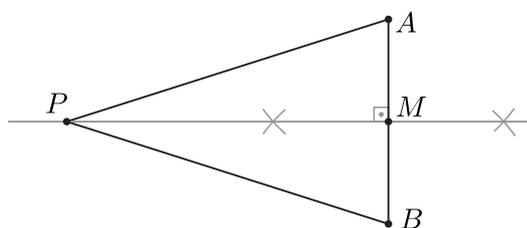


Figura 1.26: Triângulo isósceles.
Fonte: O autor.

Note que nessa construção PM é a altura relativa ao lado AB , pois $PM \perp AB$. Além disso, como M é o ponto médio de AB , temos que PM também é a mediana relativa ao lado AB e, por fim, temos que os triângulos APM e BPM são congruentes pelo caso LLL (Lado, Lado, Lado), implicando que PM é bissetriz do ângulo \widehat{APB} , pois $\widehat{APM} = \widehat{BPM}$. Em face do exposto, concluímos que em um triângulo isósceles a mediana relativa ao vértices dos lados iguais é igual a altura e ambas pertencem à bissetriz.

Um caso particular do exemplo anterior é a construção de um triângulo equilátero, tal construção é semelhante àquela do triângulo isósceles com apenas uma pequena modificação. Ao escolhermos um ponto da mediatriz, devemos garantir que ele tenha o mesmo tamanho do lado AB . Assim, devemos colocar a ponta seca do compasso sobre A e a outra ponta sobre B , após agarrar o tamanho desse segmento, basta traçar um arco de forma que intersecte a mediatriz no ponto P , formando o triângulo equilátero APB , conforme a Figura 1.27.

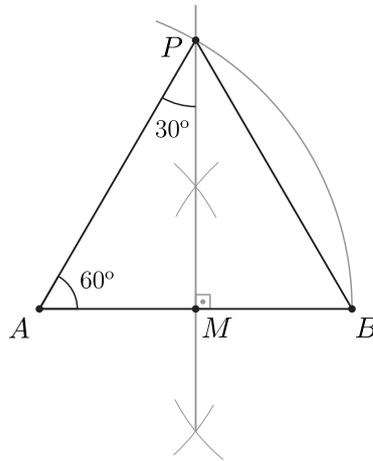


Figura 1.27: Triângulo equilátero e ângulos de 30° e 60° .
Fonte: O autor.

Essa construção é muito produtiva, pois com ela aprendemos a construir dois ângulos notáveis que são $\widehat{PAB} = 60^\circ$, pois o triângulo APB é equilátero; e o $\widehat{APM} = 30^\circ$, pois PM é a bissetriz de \widehat{APB} .

Uma outra maneira mais simples de construir um triângulo equilátero, e consequentemente um ângulo de 60° , em uma determinada reta r é a seguinte:

1. Marcamos dois pontos distintos A e B em r ;
2. Agora com a ponta seca sobre o ponto A e a outra ponta sobre B traçamos um arco de circunferência de aproximadamente 90° , garantindo que esse arco seja superior a 60° ;
3. Semelhante ao passo anterior, colocamos a ponta seca sobre B e a outra sobre A e traçamos outro arco de forma que os arcos construídos se intersectem no ponto P ;
4. Por fim, basta traçar os segmentos AP , garantindo a construção do ângulo de 60° , e o segmento BP , finalizando a construção do triângulo equilátero.

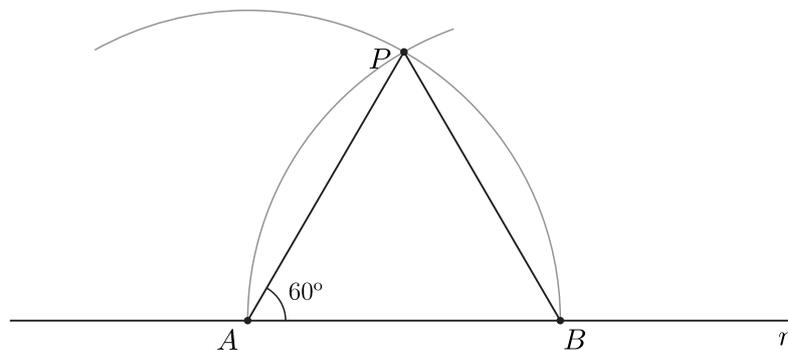


Figura 1.28: Triângulo equilátero.
Fonte: O autor.

Como vimos, já somos capazes de construir os ângulos notáveis de 30° e 60° , restamos a construção do ângulo de 45° . Uma forma de conseguir esse ângulo é traçar um segmento qualquer, logo após, traçar um segmento perpendicular e, por fim, traçar a bissetriz do ângulo formado por estes segmentos. Uma outra forma, é traçar a diagonal de um quadrado, repartindo-o em dois triângulos retângulos e isósceles, logo seus ângulos são dois de 45° e um de 90° .

Dessa última forma, vamos primeiro construir o quadrado, assim traçamos uma reta r e marcamos dois pontos distintos A e B , de tal forma que o segmento AB seja o lado do quadrado. Em seguida, traçamos duas perpendiculares ao segmento AB , sendo que uma passando por A e outra por B . Agora, com a ponta seca do compasso sobre A e a outra sobre B , traçamos um arco intersectando a reta criada que passa por A e é perpendicular ao segmento AB . Analogamente, traçamos o arco intersectando a reta criada que passa por B . Para finalizar, ligamos as intersecções formando assim um quadrado, pois todos os ângulos são retos e todos os lados tem a mesma medida \overline{AB} .

Finalizado o quadrado, basta traçar uma de suas diagonais e estará construído o ângulo desejado conforme a Figura 1.29.

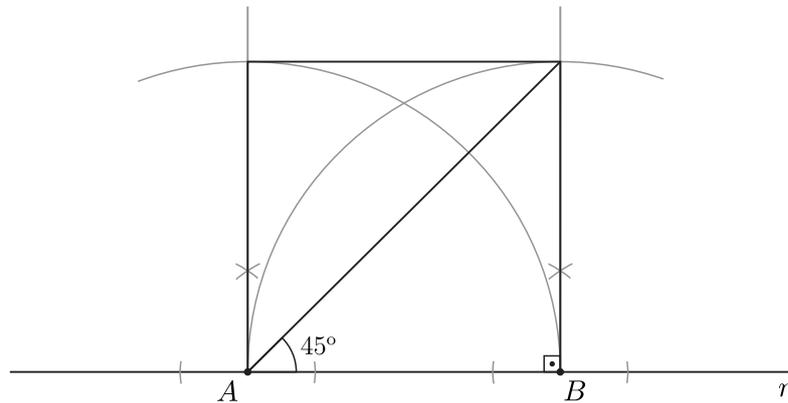


Figura 1.29: Quadrado e ângulo de 45° .
Fonte: O autor.

2 Pontos notáveis de um triângulo

A *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)*, ver [4], do professor americano Clark Kimberling da universidade Evansville nos Estados Unidos, traz milhares de pontos notáveis do triângulo e provavelmente existam muitos outros a serem descobertos. Embora existam milhares, quando nos referimos a pontos notáveis do triângulo no ensino básico, estamos pensando em quatro pontos que apresentam características bem interessantes, o circuncentro, o incentro, o baricentro e o ortocentro.

Dessa forma, apresentamos algumas propriedades dos quatro pontos citados e como localizá-los em um triângulo utilizando apenas régua e compasso.

2.1 Circuncentro

Proposição 1. *Em todo triângulo as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o circuncentro do mesmo.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer, r , s e t , respectivamente, as mediatrizes dos lados BC , CA e AB , e O o ponto de interseção das retas r e s , conforme a Figura 2.1.

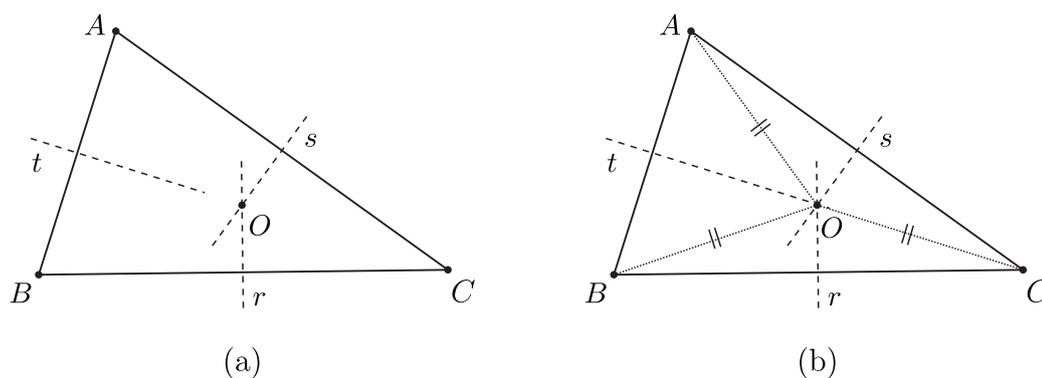


Figura 2.1: O circuncentro de um triângulo.

Fonte: O autor.

Pela caracterização da mediatriz de um segmento como lugar geométrico, visto no capítulo anterior, temos $\overline{OB} = \overline{OC}$ (pois $O \in r$) e $\overline{OC} = \overline{OA}$ (pois $O \in s$). Portanto, $\overline{OB} = \overline{OA}$ e segue novamente da caracterização da mediatriz como lugar geométrico que $O \in t$. \square

Pela demonstração da proposição anterior, vimos que as mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram no circuncentro O . Assim, ao traçarmos uma circunferência centrada em O e raio \overline{OA} , ela passará pelos vértices A , B e C . Dessa forma, o circuncentro é o ponto equidistante dos três vértices do triângulo.

Além disso, observe que o circuncentro pode ser interno, externo ou pertencer a um dos lados do triângulo, ver Figura 2.2. Antes de detalharmos os três casos, é bom lembrar que todo ângulo inscrito em uma circunferência de raio unitário tem a metade da medida do arco correspondente, esse resultado encontra-se provado no Apêndice C.

Vejam os três casos:

1. O centro O está no interior de ABC se, e somente se, ABC for acutângulo, isto é, os ângulos internos são menores que 90° .

De fato, se o centro O está no interior do triângulo ABC , temos que as cordas opostas aos vértices A , B e C estão associadas, respectivamente, aos arcos \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , como todos são menores que 180° , temos que os ângulos inscritos referente a cada arco são todos menores que 90° , o que implica em ABC ser um triângulo acutângulo (triângulo que possui um ângulo agudo, ou seja, com medida menor que 90°), conforme o item (a) da Figura 2.2.

2. O centro O está no exterior de ABC se, e somente se, ABC for obtusângulo, isto é, um dos ângulos internos é maior que 90° .

De fato, seja BC a corda que permita o centro O ficar no exterior do triângulo ABC , portanto o arco \widehat{BC} é maior que o arco referente um diâmetro da circunferência que mede 180° , logo o ângulo central do arco \widehat{BC} é maior que 180° , implicando que o ângulo inscrito a esse arco é maior que 90° . Assim, o triângulo ABC é obtusângulo (triângulo que possui um ângulo obtuso, ou seja, com medida maior que 90°), conforme o item (b) da Figura 2.2.

3. O centro O está sobre um lado de ABC se, e somente se, ABC for retângulo, isto é, um dos ângulos internos é igual 90° .

De fato, seja BC a corda que contém o centro O , logo BC é um diâmetro da circunferência, isto implica que o arco \widehat{BC} tem medida 180° , logo seu ângulo inscrito mede 90° . Assim, o triângulo ABC é retângulo, conforme o item (c) da Figura 2.2.

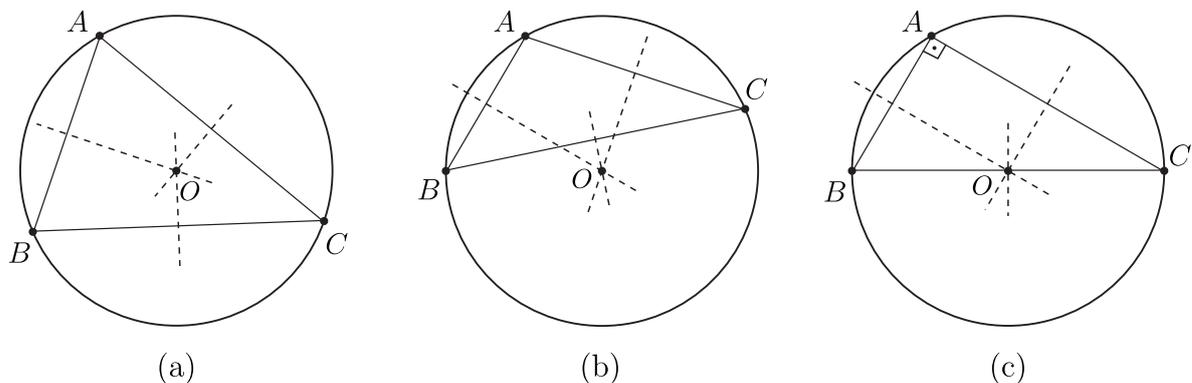


Figura 2.2: Os três casos do circuncentro de um triângulo.

Fonte: O autor.

Vimos que a circunferência que passa pelos vértices do triângulo tem centro no circuncentro, portanto pelos exemplos acima, o circuncentro pode ser interno ao triângulo, sobre um de seus lados ou externo ao triângulo.

2.2 Incentro

Proposição 2. *As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o incentro do triângulo.*

Demonstração. Sejam r , s e t , respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} do triângulo ABC (Figura 2.3) e I o ponto de interseção das semirretas r e s . Como $I \in r$, segue da caracterização das bissetrizes como lugar geométrico (ver seção 1.2.1) que I equidista dos lados AB e AC de ABC .

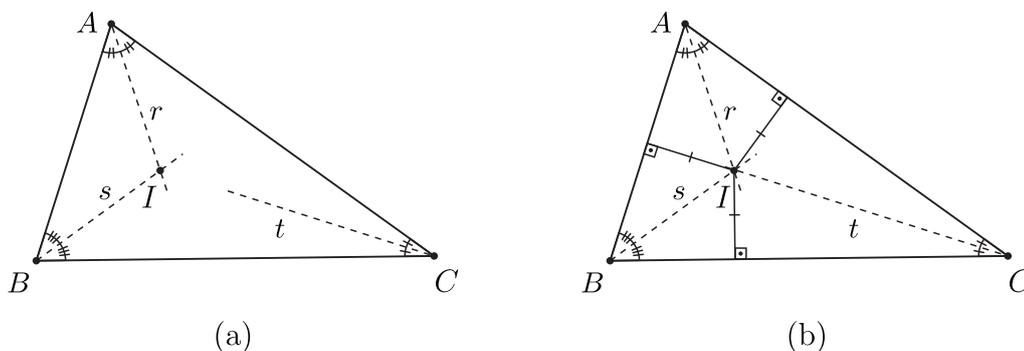


Figura 2.3: Incentro de um triângulo.
Fonte: O autor.

Analogamente, $I \in s$ garante que I equidista dos lados AB e BC . Portanto, I equidista de AC e BC e, usando novamente a referida caracterização das bissetrizes, concluímos que I pertence à bissetriz do ângulo \widehat{ACB} , ou seja, à semirreta t . Assim, r , s e t concorrem em I . \square

Pela demonstração da proposição anterior, definimos o incentro de um triângulo como sendo o ponto de interseção de suas três bissetrizes internas. Dessa forma, o incentro de um triângulo ABC equidista dos seus lados. Chamando de r a distância comum de I aos lados do triângulo ABC , o círculo de centro I e raio r está inscrito em ABC . Logo, a circunferência tangencia os lados de ABC e seu centro é o incentro do referido triângulo, conforme a Figura 2.4.

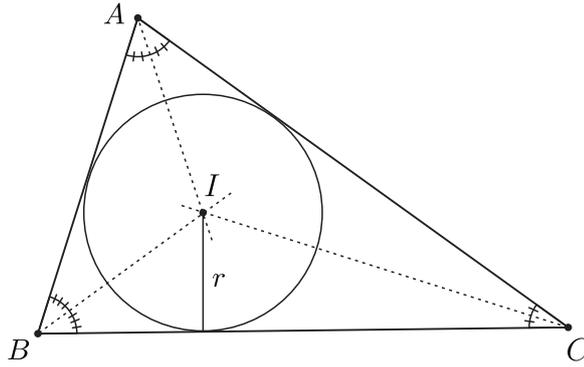


Figura 2.4: Incentro de um triângulo.
Fonte: O autor.

2.3 Baricentro

Proposição 3. *As medianas de um triângulo concorrem em um único ponto, o Baricentro do triângulo. Além disso, o ponto de concorrência está situado, ao longo de cada mediana, a $\frac{2}{3}$ da distância do vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer, R, S e T , os pontos médios dos lados BC, AC e AB , respectivamente. Assim, temos que AR e BS são as medianas do triângulo ABC relativas aos vértices A e B . Elas se intersectam em um ponto X interno ao triângulo ABC . Sejam P e Q os pontos médios de AX e BX , respectivamente. Conforme a Figura 2.5.

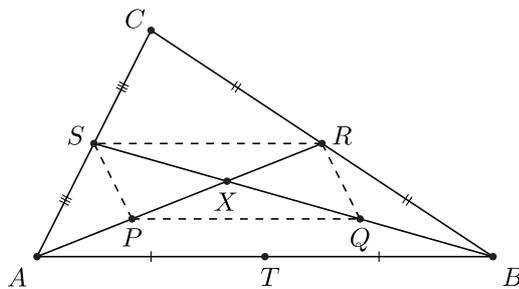


Figura 2.5: Encontro das medianas \overline{AR} e \overline{BS} .
Fonte: O autor.

Dessa forma, temos que SR é base média do triângulo ABC e, portanto, SR é paralela a AB e $\overline{SR} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Analogamente, no triângulo ABX , temos que PQ é paralela a AB e $\overline{PQ} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Logo, RS e PQ são lados opostos paralelos do quadrilátero $PQRS$, com $\overline{SR} = \overline{PQ}$. Na Figura 2.6 temos a representação do quadrilátero $PQRS$ da figura anterior. Como SR e PQ são paralelas temos que $\widehat{PRS} = \widehat{RPQ}$ e $\widehat{RSQ} = \widehat{SQP}$, pois são ângulos alternos internos. Logo os triângulos RSX e PQX são congruentes, implicando em $\overline{PX} = \overline{RX}$ e $\overline{SX} = \overline{QX}$.

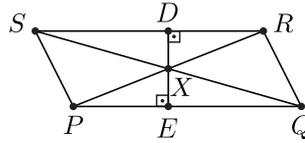


Figura 2.6: X é ponto médio de PR e QS .
Fonte: O autor.

Assim, $\overline{RX} = \overline{XP} = \overline{PA}$ e $\overline{SX} = \overline{XQ} = \overline{QB}$, assim, $\overline{AX} = 2\overline{RX}$ e $\overline{BX} = 2\overline{SX}$, também concluímos que $\overline{AR} = 3\overline{XR}$.

Analogamente, utilizando as medianas AR e CT , encontramos um ponto de interseção Y , com $\overline{AY} = 2\overline{RY}$ e, também, $\overline{AR} = 3\overline{RY}$. Conforme a Figura 2.7.

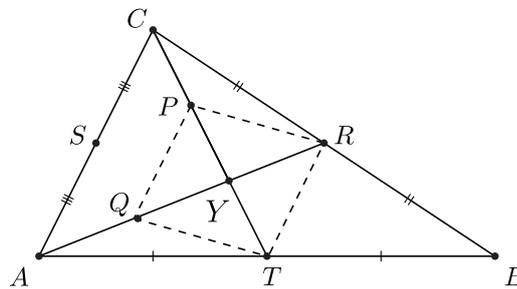


Figura 2.7: Encontro das medianas \overline{AR} e \overline{CT} .
Fonte: O autor.

Mas, como $\overline{AR} = 3\overline{RX}$ e X também pertence a AR , segue que $\overline{XR} = \overline{YR}$ e, portanto, $X = Y$. Em particular, as medianas AR , BS e CT se intersectam num mesmo ponto $G = X = Y$, com $\overline{AG} = 2\overline{RG}$, $\overline{BG} = 2\overline{SG}$ e $\overline{CG} = 2\overline{TG}$. Conforme a Figura 2.8.

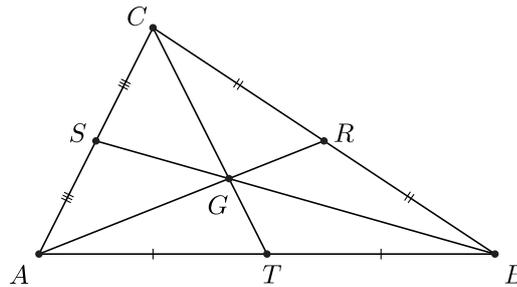


Figura 2.8: Encontro das três medianas e o baricentro G .
Fonte: O autor.

□

Por definição temos que a mediana sempre se encontra no interior do triângulo, isso implica que o baricentro sempre estará também no seu interior. Além disso, observamos que o baricentro possui uma importante propriedade, a distância do vértice ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice. Outra característica interessante sobre o baricentro é que ele é conhecido como *centro de massa*. Essa característica possui uma grande aplicabilidade em outras áreas como, por exemplo, na construção civil.

2.4 Ortocentro

Proposição 4. *Em todo triângulo, as retas que contém as alturas se intersectam em um só ponto, chamado de ortocentro do triângulo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, traçando por A , B e C , respectivamente, as retas r , s e t paralelas aos lados BC , CA e AB respectivamente, e sejam $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$ e $t \cap r = \{N\}$, conforme a Figura 2.9. Como $CB \parallel AN$ (CB é paralelo a AN) e $MB \parallel AC$ temos que $\widehat{NAC} = \widehat{CBM}$. De $CB \parallel AN$ temos que $\widehat{ANC} = \widehat{BCM}$ e daí temos que os triângulos ANC e BCM tem os seus ângulos iguais. Além disso, $\widehat{CAB} = \widehat{ACN}$ por serem ângulos alternos internos, bem como \widehat{BCM} e \widehat{CBA} . Juntando essas informações temos $\widehat{CAB} = \widehat{ACN}$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCM} = \widehat{ANC}$ e, assim, $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{CAB} = 180^\circ - \widehat{ANC} - \widehat{ACN} = \widehat{NAC}$. Logo, pelo caso ALA os triângulos NAC e BCA são congruentes, com isso $\overline{NC} = \overline{AB}$. Analogamente, temos que ABC e MCB também são congruentes, implicando em $\overline{MC} = \overline{AB}$. Portanto $\overline{MN} = 2\overline{AB}$ e C é o ponto médio de MN . Da mesma forma temos que B é o ponto médio de MP e A o ponto médio de PN .

Por outro lado, a altura relativa a BC também é perpendicular a PN , já que BC e PN são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são perpendiculares respectivamente a MP e MN . Implicando que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados dos triângulo MNP . Porém, já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, desse modo, as alturas de ABC devem ser concorrentes.

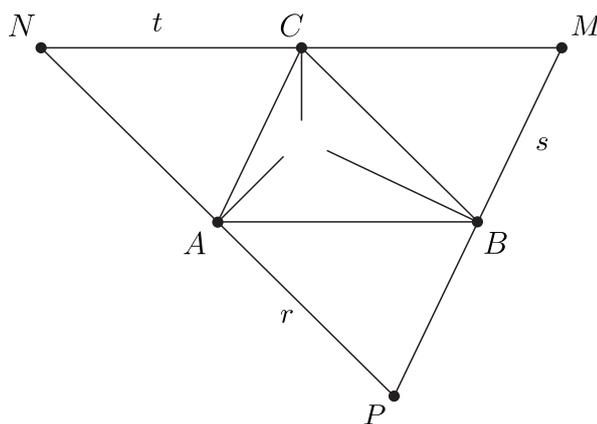


Figura 2.9: Ortocentro de um triângulo acutângulo.

Fonte: O autor.

□

Com essa última demonstração concluímos que as três alturas de um triângulo ABC se intersectam em um ponto chamamos de ortocentro.

2.5 Reta de Euler

A partir deste momento surge uma ótima oportunidade de aguçar ainda mais a curiosidade dos discentes, conhecendo os pontos anteriormente apresentados podemos propor como atividade a localização do ortocentro, do baricentro e do circuncentro em um mesmo triângulo. Primeiramente, é interessante fazer isso em triângulo equilátero que, pela própria definição desses pontos, apresenta os três pontos coincidentes. Dando sequência a esse exercício, é pertinente propor o mesmo exercício em um triângulo isósceles, o qual eles poderão observar com facilidade que, embora esses pontos não coincidam, eles são colineares.

E, por fim, esse exercício deve ser praticado em um triângulo escaleno (comprimento dos lados diferentes) o que deve servir de investigação para que o aluno observe que os pontos mencionados anteriormente ainda continuam alinhados, e a essa reta damos o nome de *Reta de Euler*, em homenagem ao matemático Leonhard Euler.

Teorema 2. *O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, não equilátero, são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de Reta de Euler.*

Demonstração. Sejam M e N os pontos médios de BC e AC e O o circuncentro, respectivamente. De M e N serem os pontos médios de BC e AC temos que $MN \parallel AB$ e $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$, pois MN é base média do triângulo ABC . De O ser o circuncentro, pelo Apêndice C, temos que a medida $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$, além disso, temos que $\overline{OA} = \overline{OC}$, o que implica em $\widehat{AON} = \widehat{ABC}$, já que ON , além de altura do triângulo AOC , é bissetriz do ângulo \widehat{AOC} pela congruência dos triângulos ANO e CNO pelo caso *LLL* (Lado, Lado, Lado). Isso implica que os triângulos ABD e AON são semelhantes pelo caso *AA* (Ângulo, Ângulo) e, portanto, $\widehat{BAD} = \widehat{OAN}$, conforme a Figura 2.10.

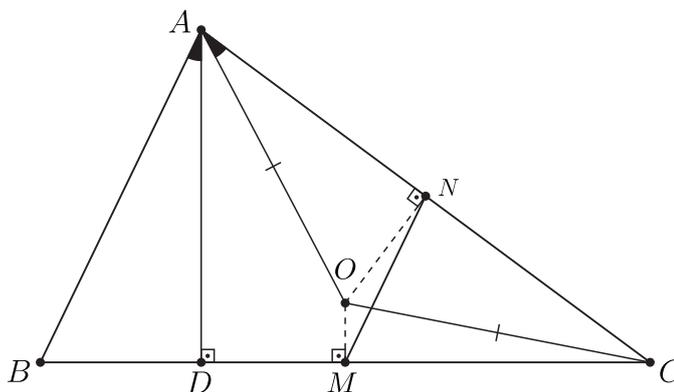


Figura 2.10: $\widehat{BAD} = \widehat{OAN}$.
Fonte: O autor.

Agora, na Figura 2.11, acrescentamos a altura BE obtendo o ortocentro H . Note que o quadrilátero $MCNO$ possui dois ângulos opostos medindo 90° , dessa forma, a soma da medida de seus ângulos opostos é 180° , implicando que $MCNO$ é um quadrilátero

inscritível (Apêndice E), então $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = \widehat{OMN}$, já que \widehat{OMN} e \widehat{OCN} possuem o mesmo arco. De forma análoga, o quadrilátero $DCEH$ também é inscritível e, com isso, $\widehat{DHE} = \widehat{MON}$, logo $\widehat{AHB} = \widehat{DHE}$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Assim, concluímos que o triângulo AHB é semelhante ao triângulo MON e, com isso, $\frac{\overline{AH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = 2$, pois MN é base média do triângulo ABC .

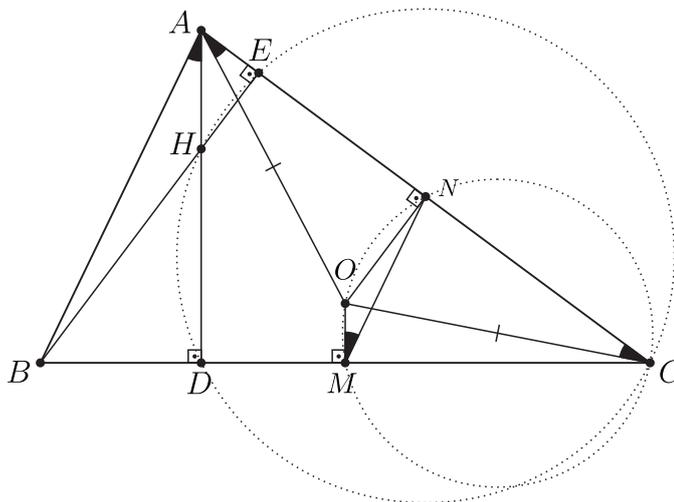


Figura 2.11: A semelhança dos triângulo AHB e MNO .
Fonte: O autor.

Observe a Figura 2.12, acrescentamos o baricentro G . Note que $\widehat{HAG} = \widehat{GMO}$ pois AH é paralelo a OM e, logo esses ângulos são alternos e internos. Como G é o baricentro, $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = 2$. Portanto, o triângulo AHG é semelhante ao triângulo MOG pelo caso LAL, implicando em $\widehat{HGA} = \widehat{MGO}$ e $\overline{HG} = 2\overline{GO}$, isso implica que os ângulos \widehat{HGA} e \widehat{MGO} são opostos pelo vértice G .

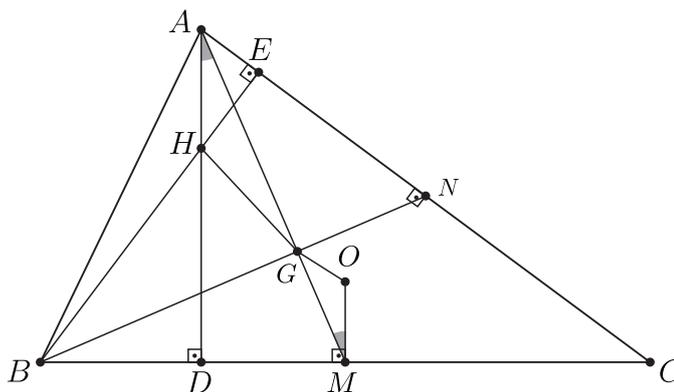


Figura 2.12: A semelhança dos triângulo AHG e GOM .
Fonte: O autor.

Dessa forma, concluímos que H , G e O estão alinhados, conforme a Figura 2.13.

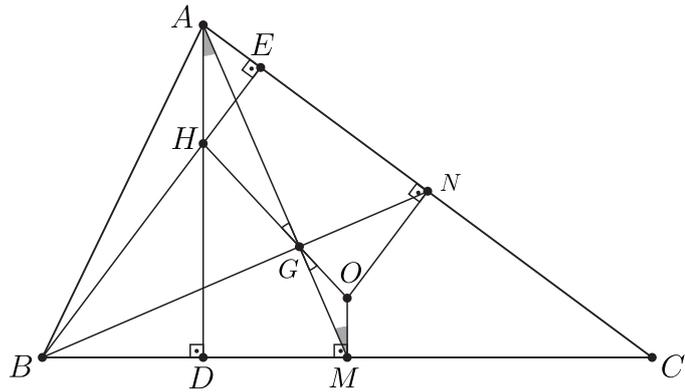


Figura 2.13: H , G e O colineares pela semelhança dos triângulos AHB e MNO .
 Fonte: O autor.

O que nos dá a mencionada Reta de Euler.

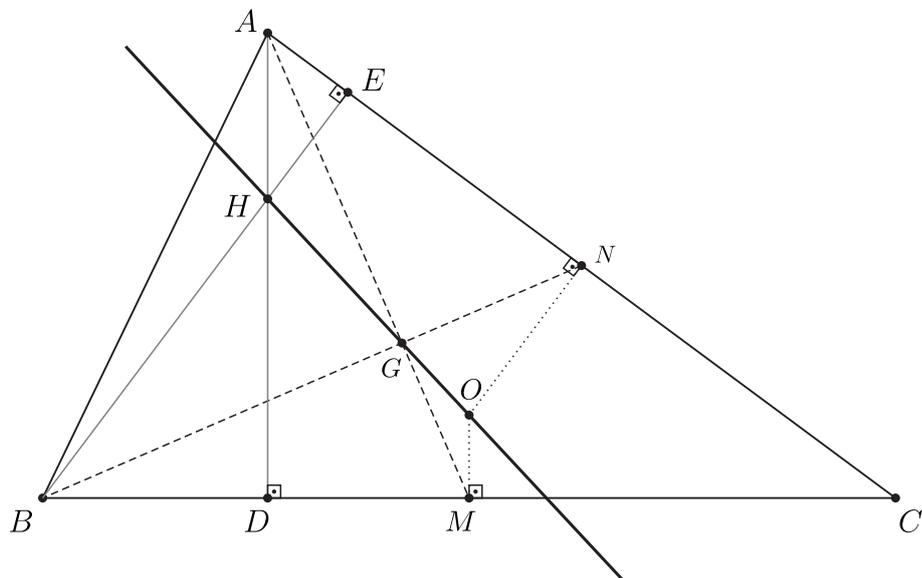


Figura 2.14: Reta de Euler.
 Fonte: O autor.

□

Nesse momento surge uma ótima oportunidade do professor utilizar-se do software *Geogebra* para construir a *Reta de Euler* e mostrar visualmente que, embora mesmo movimentando os vértices e modificando o triângulo, os referidos pontos continuam alinhados e que quando o triângulo é equilátero essa reta deixa de existir pois os pontos se coincidem.

3 Problemas propostos

Neste capítulo são propostos alguns problemas envolvendo as propriedades dos pontos notáveis, dando ênfase à aplicação dos conhecimentos adquiridos anteriormente.

Problema 1 (Enem 2013 - Adaptada)

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas na Figura 3.1.

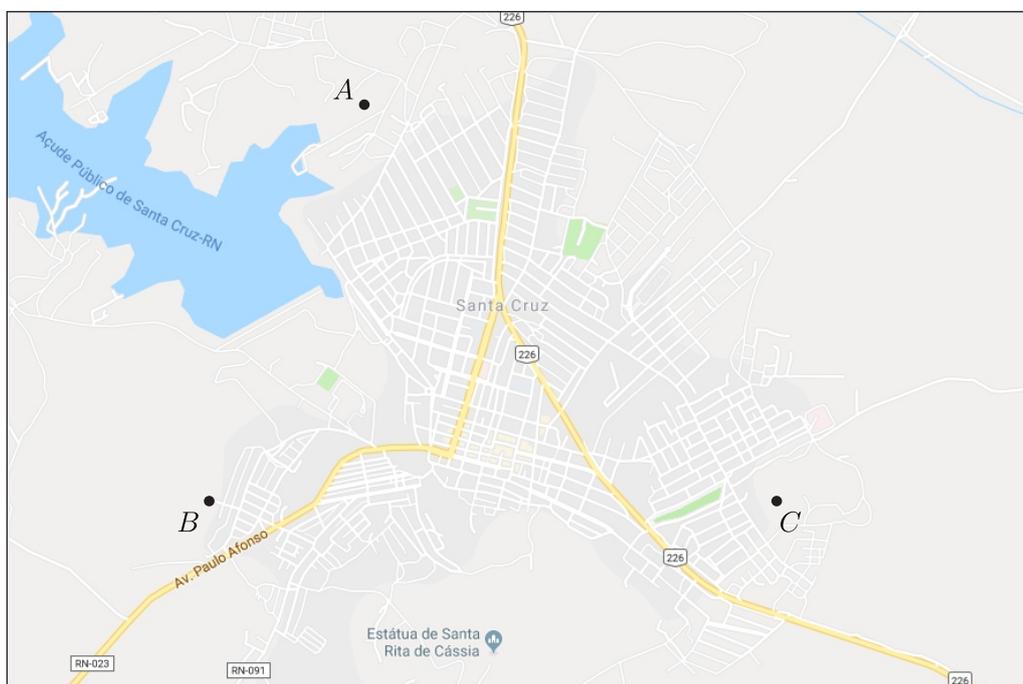


Figura 3.1: Mapa da cidade de Santa Cruz (RN).
Fonte: Google Maps adaptado pelo autor.

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. Dessa forma, qual é o local adequado para a construção dessa torre?

Solução:

Já vimos anteriormente na Seção 2.1 que o ponto notável de um triângulo que está a uma mesma distância de seus vértices é o circuncentro. Dessa forma, para encontrar o local onde a torre deve ser instalada basta traçar segmentos com os pontos A , B e C , formando o triângulo ABC . Logo após, traçar a mediatriz em dois lados desse triângulo, encontrando a interseção P dessas mediatrizes, que é o circuncentro do triângulo ABC . Logo, a torre deve ser instalada sobre o ponto P .

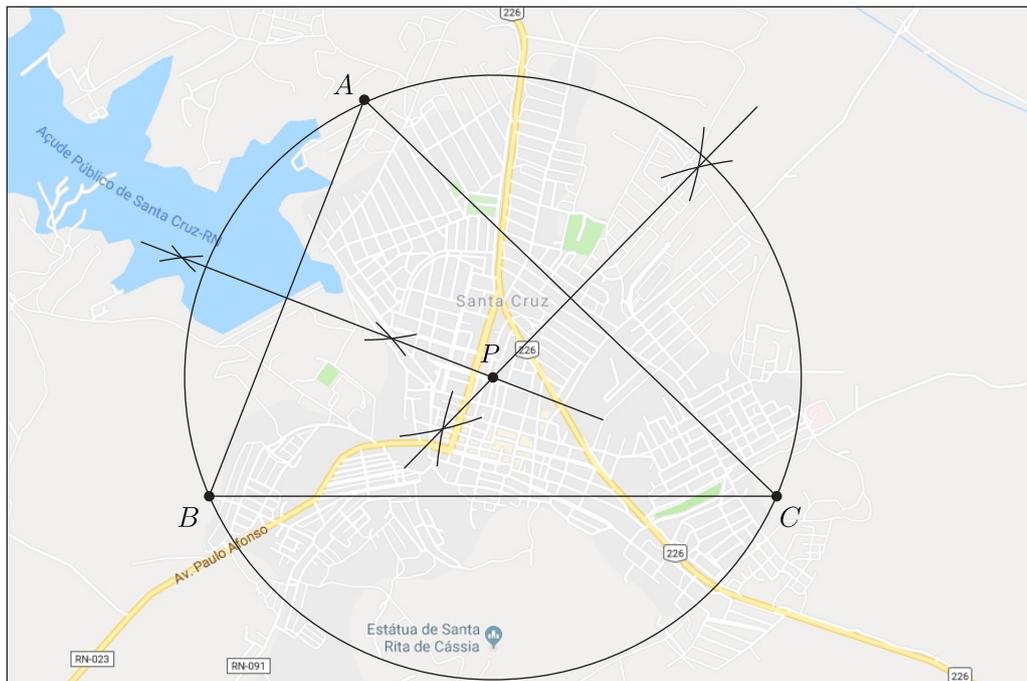


Figura 3.2: Solução do problema 1.
Fonte: Google Maps adaptado pelo autor.

Problema 2

Um marceneiro foi contratado para fazer uma mesa de forma circular, com o intuito de economizar na compra de material, ele decidiu utilizar uma peça de madeira que havia sobrado de um outro serviço. Mas, a referida peça tem a forma de um triângulo com lados distintos. Se o marceneiro quer aproveitar ao máximo a peça, como ele deve proceder na produção da referida mesa?

Solução:

Para aproveitar ao máximo a madeira disponível, a mesa, que tem a forma circular, terá que tangenciar os lados da peça de madeira, que possui forma triangular.

Assim, seja ABC o triângulo dado. O centro da circunferência inscrita (incentro) é o ponto de interseção das bissetrizes internas, conforme visto na seção 1.2.1. Então precisamos traçar as bissetrizes de dois ângulos do triângulo conforme a Figura 3.3.

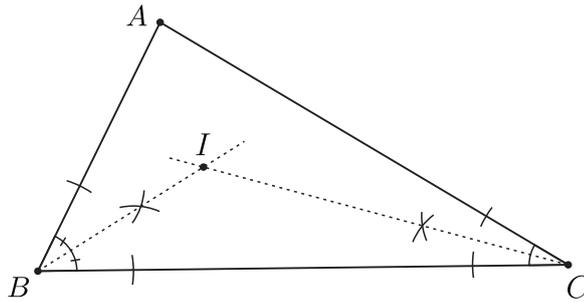


Figura 3.3: Incentro do triângulo ABC .
Fonte: O autor.

O ponto de interseção das duas bissetrizes (I) é o centro da circunferência inscrita, agora traçamos por I uma reta perpendicular a BC , cortando BC em M . Para isso, com centro em I devemos traçar uma circunferência qualquer cortando o lado BC nos pontos D e E como mostra a Figura 3.4 a seguir.

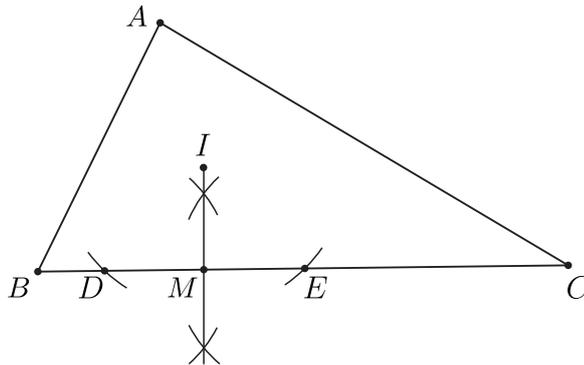


Figura 3.4: Perpendicular passando pelo incentro do triângulo.
Fonte: O autor.

Temos agora um ponto por onde passa a circunferência inscrita. Traçamos então a circunferência de centro I e raio \overline{IM} como na Figura 3.5 e o problema está resolvido.

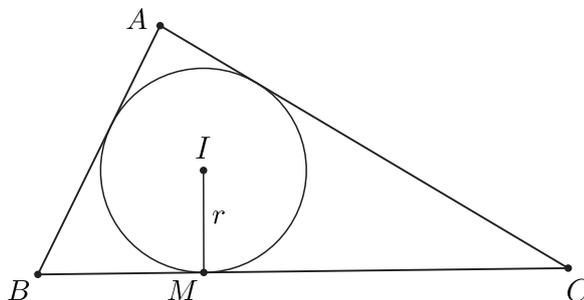
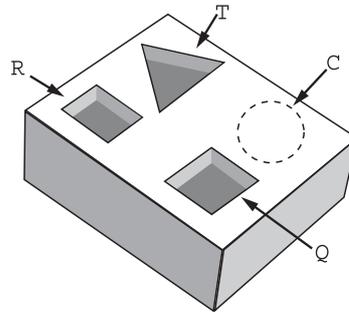


Figura 3.5: Circunferência inscrita no triângulo ABC .
Fonte: O autor.

Problema 3 (Enem 2016 - Adaptada)

Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de

madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C).



O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Entre suas ferramentas, o marceneiro dispõe de régua e compasso para fazer o desenho antes de realizar o corte. Dessa forma, como ele pode proceder para que seja atingido o seu objetivo?

Solução:

Existem diversos tamanhos para que o diâmetro atinja o objetivo determinado. Assim, vamos determinar todas as possibilidades de medida para o diâmetro. Note que:

- O diâmetro tem que ser maior que 3 cm, para garantir que a base circular não entre na perfuração retangular.
- O diâmetro tem que ser maior que 4 cm, para garantir que a base circular não entre na perfuração em forma de quadrado.
- O diâmetro tem que ser maior que o diâmetro da circunferência que podemos inscrever no triângulo, como visto na questão anterior. Nesse caso, deve-se traçar duas medianas para determinar o baricentro B do referido triângulo. Ou seja,

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6,8 = 3,4\sqrt{3}.$$

Portanto, o raio da circunferência circunscrita é $\frac{h}{3} = \frac{3,4\sqrt{3}}{3}$. Ou seja, o diâmetro não pode ser menor que $\frac{6,8\sqrt{3}}{3}$.

- O diâmetro deve ser menor que a diagonal da base quadrada, para que a peça de base quadrada não entre na base circular. Logo, por Pitágoras, temos que o diâmetro deve ser menor que $4\sqrt{2}$.

- O diâmetro deve ser menor diagonal da base retangular, para que a peça de base retangular não entre na base circular. Logo, por Pitágoras, temos que o diâmetro deve ser menor que 5.
- Por fim, o diâmetro deve ser menor que o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo que, neste caso, tem raio igual a $\frac{2}{3}h$ do triângulo equilátero, ou seja, $r = \frac{6,8\sqrt{3}}{3}$.

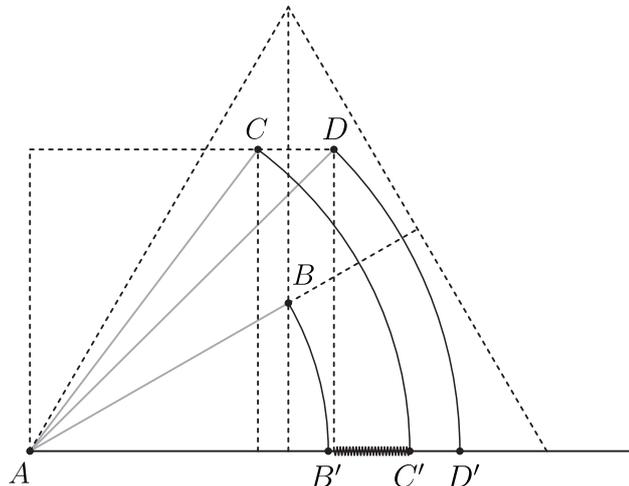
Assim podemos concluir que $3 < \frac{6,8\sqrt{3}}{3} < 4 < \text{diâmetro} < 5 < 4\sqrt{2} < 6,8$.

Uma forma de o marceneiro fazer o referido diâmetro sem precisar medir os lados das bases é traçar uma semirreta partindo do ponto A e, logo após, desenhar as três formas já existentes, partindo, também, desses vértice e com suas bases sobre essa semirreta.

Para garantir que a base circular não entre na perfuração triangular, deve-se traçar duas medianas para determinar o baricentro B do referido triângulo. Logo após, deve-se posicionar a ponta seca do compasso sobre o ponto A e a outra ponta sobre o ponto B , e projetar a medida \overline{AB} sobre a semirreta, marcando o ponto B' . Ao marcar o referido ponto, pode-se observar que essa medida é menor que o lado do quadrado. Assim, concluímos que o diâmetro deve ter sua medida maior que o lado do quadrado. Determinamos, assim, que a menor medida para o diâmetro deve ser maior que o lado do quadrado. Agora, vamos determinar a maior medida para o referido diâmetro.

Note que a diagonal AD do quadrado de medida \overline{AD} é menor que o lado do triângulo, isso pode ser observado claramente pela projeção feita com o compasso sobre a semirreta, marcando o ponto D' . Porém, a diagonal AC do retângulo é menor que \overline{AD} . Assim, temos que o diâmetro deve possuir medida menor que a diagonal do retângulo, representada na reta por $\overline{AC'}$, para que as outras peças não caibam na perfuração circular.

Assim, concluímos que o diâmetro deve ser maior que o lado do quadrado e menor que a diagonal do retângulo, logo o marceneiro pode escolher qualquer ponto P do setor destacado na semirreta determinada anteriormente, conforme a figura abaixo. Pois, pelo que determinamos acima, temos $4 \text{ cm} < \overline{AP} < 5 \text{ cm}$.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir este trabalho, desenvolvemos um material com uma leitura mais leve e prazerosa do que a apresentada em alguns livros que abordam o mesmo assunto desenvolvido no referido trabalho. Uma vez que procuramos desenvolver todos os passos que geralmente ficam omitidos em outros textos.

É comum os professores da educação básica evitarem a apresentação de alguns conteúdos ou as demonstrações de algumas propriedades, devido ao fato do livro texto e as leituras complementares omitirem alguns passos, o que dificulta a compreensão do tema, fazendo com que os discentes e, até mesmo, docentes passem muito tempo tentando compreender uma passagem, o que desmotiva a leitura.

Neste trabalho, por tratarmos de um tema básico, nosso foco foi apresentar os assuntos de forma mais transparente possível, de modo a estimular os professores, que por ventura acessem esse material, a desenvolver esse conteúdo em sala de aula, principalmente, naquelas escolas onde não há outra forma de desenvolver esse assunto, a não ser usando régua e compasso.

Mesmo nas escolas que possuem uma boa estrutura computacional, acreditamos que o uso desse material pode ajudar na compreensão do assunto, obtendo uma otimização do potencial dos softwares geométricos.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [2] BRASIL. Secretaria do Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF, 1998.
- [3] DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos da matemática elementar 9: Geometria plana*. 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [4] KIMBERLING, Clark. *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*. Disponível em: <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 14/09/2019.
- [5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. Coleção do Professor de Matemática, v. 2, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] VIGOTSKI, Lev Semenovich. *Pensamento e Linguagem*. 3.ed. São Paulo. Martins Fontes, 2005.
- [7] WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. v. 4, Rio de Janeiro: SBM, 2000.
- [8] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Mestrado) - UFMG, Faculdade de Educação, 2001.

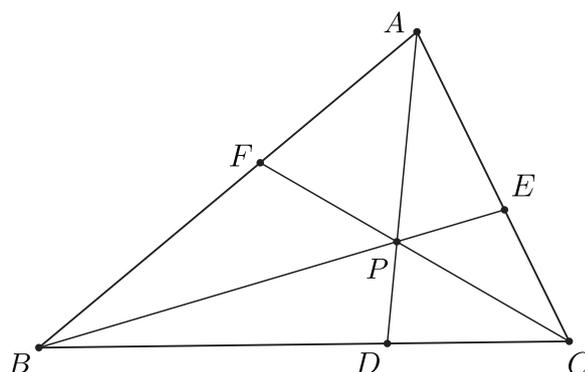
Apêndice A

Teorema de Ceva

Três cevianas AD , BE e CF de um triângulo ABC são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Demonstração. Suponha que, no triângulo ABC , as cevianas AD , BE e CF sejam concorrentes.



Seja P o ponto de interseção das três cevianas. Denote por $A_{(ABC)}$ a área do triângulo ABC . Agora, observe que os triângulos BDP e CDP possuem a mesma altura h referente às bases BD e DC , respectivamente. Observe, também, que os triângulos ABD e ACD têm a mesma altura H referente às bases BD e DC , respectivamente. Assim,

$$A_{(ABD)} = \frac{H \cdot \overline{BD}}{2}, \quad A_{(ACD)} = \frac{H \cdot \overline{DC}}{2}, \quad A_{(BDP)} = \frac{h \cdot \overline{BD}}{2} \quad \text{e} \quad A_{(CDP)} = \frac{h \cdot \overline{DC}}{2}.$$

Isto implica que

$$\frac{A_{(ABP)}}{A_{(ACP)}} = \frac{A_{(ABD)} - A_{(BDP)}}{A_{(ACD)} - A_{(CDP)}} = \frac{\frac{H \cdot \overline{BD}}{2} - \frac{h \cdot \overline{BD}}{2}}{\frac{H \cdot \overline{CD}}{2} - \frac{h \cdot \overline{CD}}{2}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{A_{(ABP)}}{A_{(ACP)}}.$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{A_{(BCP)}}{A_{(ABP)}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{A_{(ACP)}}{A_{(BCP)}}.$$

Fazendo o produto das três igualdade, temos que

$$\frac{A_{(ABP)}}{A_{(ACP)}} \cdot \frac{A_{(BCP)}}{A_{(ABP)}} \cdot \frac{A_{(ACP)}}{A_{(BCP)}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Agora, supondo que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \quad (1)$$

Vamos mostrar que as três cevianas são concorrentes.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AD} e \overline{BE} . Mostraremos que \overline{CF} passa por P .

Seja $\overline{CF'}$ a ceviana que passa por P . Pela primeira parte deste teorema, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = 1. \quad (2)$$

Logo, devemos mostrar que $F = F'$. Mas, por (1) e (2), obtemos

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

Como F e F' pertencem ao mesmo segmento AB , podemos imaginar que estes pontos estão sobre uma reta e associar as coordenadas a, b, f, f' aos pontos A, B, F e F' . Note que $a < b$ e f, f' estão entre a e b , para que as cevianas se interceptem. Assim,

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \Rightarrow \frac{f' - a}{b - f'} = \frac{f - a}{b - f}$$

e então

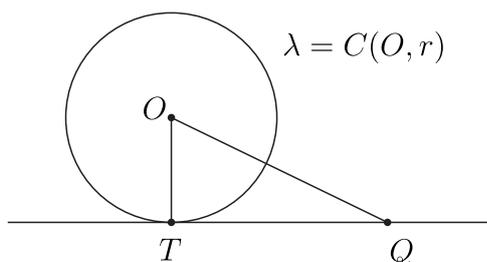
$$\begin{aligned} fb - ff' - ab + af &= bf - ab - cd + af' \Rightarrow f'b + af = bf + af' \\ &\Rightarrow f'b - af' = bf - af \\ &\Rightarrow f'(b - a) = f(b - a) \\ &\Rightarrow f = f'. \end{aligned}$$

Logo, $F = F'$. □

Apêndice B

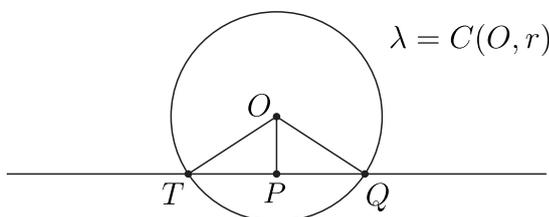
Teorema 3. *A reta perpendicular a um raio de uma circunferência, passando pela extremidade que pertence à circunferência, é tangente a ele nesse ponto. Reciprocamente, toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio da circunferência que contém o ponto de tangência.*

Demonstração. Sejam $\lambda = C(O, r)$ uma circunferência de centro O e raio r e \overline{OT} um de seus raios. Seja t a reta perpendicular a \overline{OT} em T , conforme a figura abaixo.



Se Q é um ponto de t distinto de T , então \overline{OQ} é a hipotenusa do triângulo retângulo OTQ , de forma que $\overline{OQ} > \overline{OT}$. Portanto, Q não pertence a λ , e concluímos que T é o único ponto em comum a λ e t . Mas, isso é o mesmo que dizer que t é tangente a λ .

Reciprocamente, seja t uma reta que passa por um ponto T de λ , mas tal que t não é perpendicular ao raio \overline{OT} em T , conforme a figura abaixo.



Seja P o pé da perpendicular a t passando pelo centro O de λ . A unicidade da perpendicular baixada de um ponto a uma reta garante que $T \neq P$. Considere um ponto Q sobre t , situado na semirreta oposta à semirreta \overrightarrow{PT} e com $\overline{TP} = \overline{QP}$. Em relação aos triângulos OPQ e OPT , temos que \overline{OP} é um lado de ambos, $\widehat{OPQ} = \widehat{OPT} = 90^\circ$ e $\overline{PQ} = \overline{PT}$ (por construção); portanto, tais triângulos são congruentes pelo caso LAL . Assim, $\overline{OQ} = \overline{OT} = r$, o que mostra que o ponto Q também pertence a λ . Portanto t não é tangente a λ em T . \square

Apêndice C

Proposição 5. *Todo ângulo inscrito em uma circunferência de raio unitário tem a metade da medida do arco correspondente.*

Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro, item (a) da Figura 6 (a). Seja A o vértice do ângulo inscrito e B e C os pontos em que seus lados cortam a circunferência. Suponha que o centro O da circunferência pertença ao lado AC . Nesse caso, a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito é a medida do ângulo \widehat{BOC} . Como $\overline{BO} = \overline{AO}$ então o triângulo OAB é isósceles e portanto $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Pelo Teorema do ângulo externo $\widehat{BOC} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 2 \cdot \widehat{CAB}$. Portanto, nesse caso particular a proposição é verdadeira.

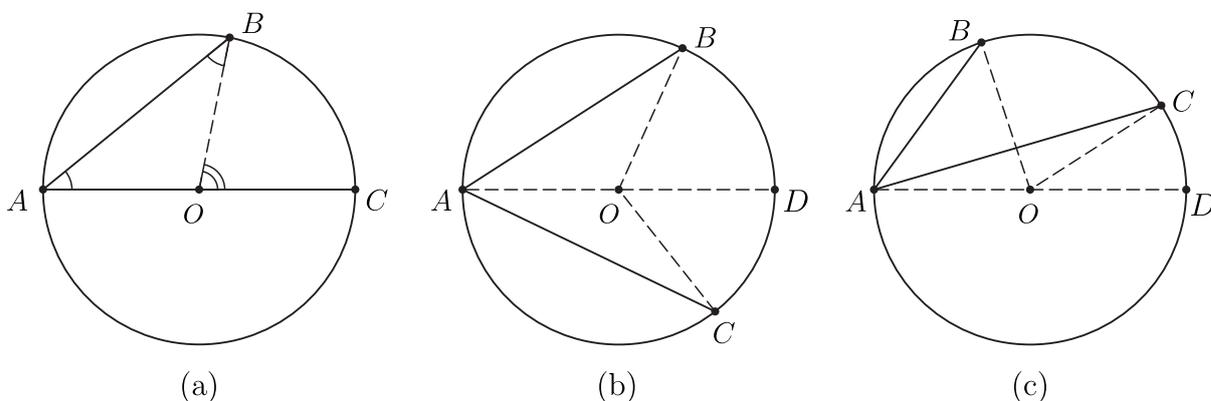


Figura 6: Medida de um ângulo inscrito.
Fonte: O autor.

Suponhamos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Traçemos então o diâmetro que passa pelo vértice A do ângulo inscrito. Seja D a outra extremidade deste diâmetro. Pelo primeiro caso concluiremos que $\widehat{BOD} = 2 \cdot \widehat{BAD}$ e que $\widehat{DOC} = 2 \cdot \widehat{DAC}$.

Neste ponto temos de distinguir dois casos: o diâmetro AD divide o ângulo \widehat{BAC} ou o diâmetro não divide o ângulo \widehat{BAC} . No primeiro caso, item (b) da Figura 6, temos que $\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC}$. A demonstração se completa somando-se as igualdades já encontradas:

$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} = 2 \cdot (\widehat{BAD} + \widehat{DAC}) = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

Observe que $\widehat{BOD} + \widehat{DOC}$ é exatamente a medida do arco correspondente ao

ângulo \widehat{BAC} . Já no item (c) da Figura 6, podemos ainda dividir em duas situações distintas: AC divide o ângulo \widehat{BAD} ou AB divide o ângulo \widehat{CAD} . A prova nos dois casos é essencialmente a mesma. Dessa forma, faremos o primeiro caso.

No primeiro caso, temos que $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD}$. Então, utilizando-se as duas igualdades obtidas inicialmente, tem-se

$$\widehat{BOD} - \widehat{COD} = 2 \cdot (\widehat{BAD} - \widehat{CAD}) = 2 \cdot \widehat{BAC}.$$

Agora observe que $\widehat{BOD} - \widehat{COD}$ é exatamente a medida do arco correspondente ao ângulo \widehat{BAC} . □

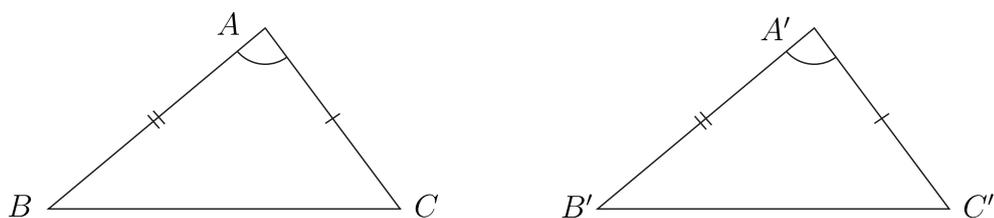
Apêndice D

Congruência de Triângulos

Existem cinco casos nos quais podemos concluir que dois triângulos são congruentes, estes casos são chamados de casos ou critérios de congruência de triângulos. As demonstrações desses casos podem ser encontradas nas referências [1] e [3]. Veremos a seguir estes casos de congruência.

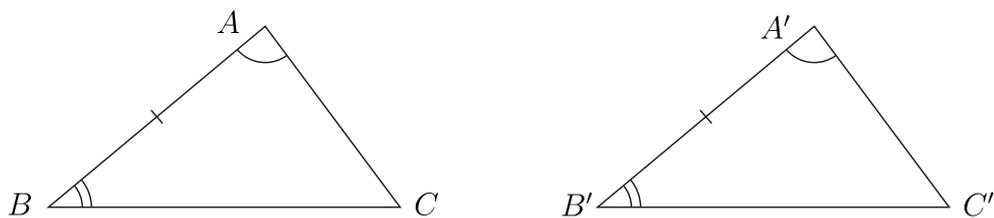
1º Caso (LAL - Lado, Ângulo, Lado)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, então $ABC \equiv A'B'C'$.



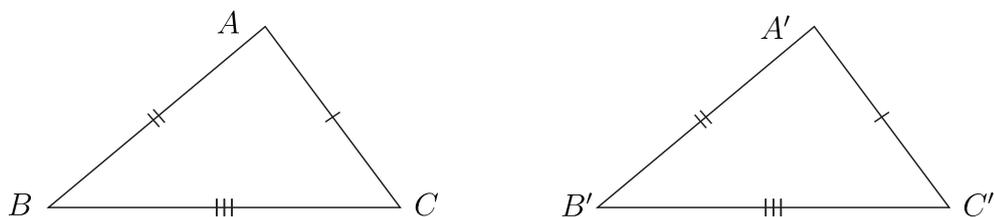
2º Caso (ALA - Ângulo, Lado, Ângulo)

Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ com $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $ABC \equiv A'B'C'$.



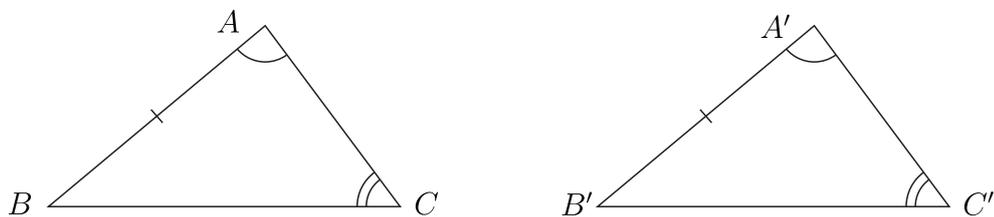
3º Caso (LLL - Lado, Lado, Lado)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, então $ABC \equiv A'B'C'$.



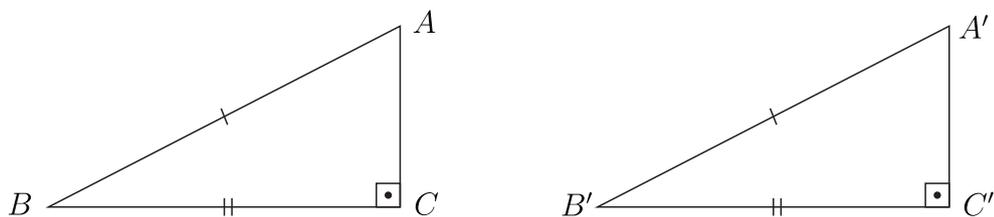
4º Caso (LAAo - Lado, Ângulo, Ângulo oposto)

Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ com $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$, então $ABC \equiv A'B'C'$.



5º Caso (Caso Especial: CH - Cateto, hipotenusa)

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são \widehat{C} e $\widehat{C'}$. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ (ou $\overline{AC} = \overline{A'C'}$), então $ABC \equiv A'B'C'$.



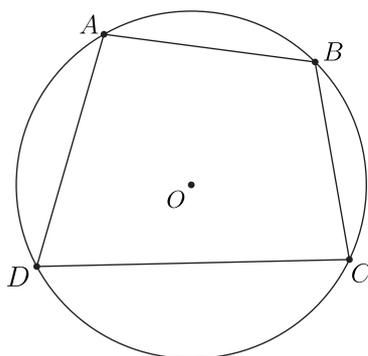
Apêndice E

Quadriláteros Inscritíveis

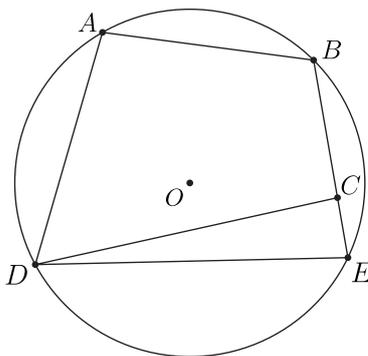
Teorema 4. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos é 180° .*

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Temos que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ$, ou seja, $2\widehat{A} + 2\widehat{C} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de quadrilátero convexo é 360° , então $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$



(\Leftarrow) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$. Vamos admitir, de maneira falsa, que $ABCD$ não é inscritível. Seja E a intersecção de BC com a circunferência circunscrita ao triângulo ABD . Sendo assim, $\widehat{A} + \widehat{E} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E}$, o que é um absurdo pela propriedade do ângulo externo. Portanto, $ABCD$ é inscritível.



□

O resultado acima nos permite concluir que dado qualquer retângulo é possível desenhar uma circunferência circunscrita ao mesmo, pois a soma de seus ângulos opostos é 180° . Basta traçar as diagonais e sobre a interseção das mesmas colocar a ponta seca do compasso e a outra ponta sobre qualquer vértice para determinar o raio da circunferência. Em seguida, basta girar o compasso e observar que a circunferência passará sobre todos os vértices, conforme a figura abaixo.

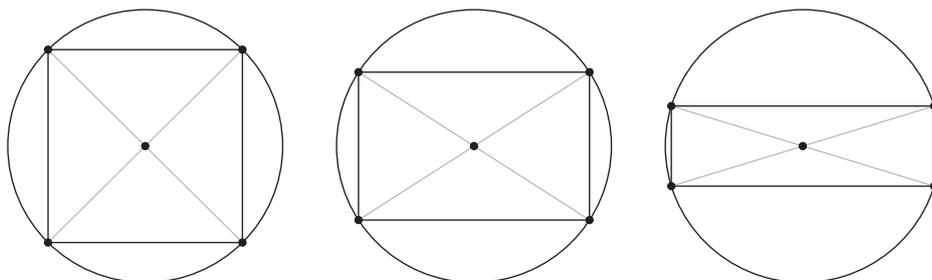


Figura 7: Retângulos inscritos em uma circunferência.

Fonte: O autor.