



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Bauru - SP

Cíntia Renóbio

ALGUMAS ATIVIDADES E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O
ENSINO DE GEOMETRIA APLICADAS AO ENSINO MÉDIO

Bauru

2020

Cíntia Renóbio

ALGUMAS ATIVIDADES E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O
ENSINO DE GEOMETRIA APLICADAS AO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Orientadora:
Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Bauru

2020

R418a Renóbio, Cíntia
Algumas Atividades e Construções Geométricas
para o Ensino de Geometria Aplicadas ao Ensino
Médio / Cíntia Renóbio. -- Bauru, 2020
83 p. : tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual
Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientadora: Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

1. Educação em Matemática. 2. Ensino Médio. 3.
Ensino de Geometria. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp.
Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de Cintia Renofio, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto.

Aos 13 dias do mês de março do ano de 2020, às 14:00 horas, no(a) UNESP/Câmpus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA - Orientador(a) do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Bauru, Prof. Dr. GUSTAVO ANTONIO PAVANI do(a) Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, Profa. Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO do(a) Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de CINTIA RENOFIO, intitulada ***Algumas atividades de construções geométricas para o ensino de geometria aplicadas ao Ensino Médio***. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Tatiana Miguel Rodrigues de Souza

Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES DE SOUZA

Prof. Dr. GUSTAVO ANTONIO PAVANI

Gustavo Antonio Pavani

Profa. Dra. CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO

Cristiane Alexandra Lazaro

Cíntia Renóbio

ALGUMAS ATIVIDADES E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O
ENSINO DE GEOMETRIA APLICADAS AO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP – Bauru
Orientadora

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
UNESP – Bauru

Prof. Dr. Gustavo Antônio Pavani
UEMS – Nova Andradina

Bauru
2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu pai, homem de grande sabedoria, que desde muito cedo me fez entender a importância dos estudos e da educação como um todo.

Com a sua integridade e honestidade, orientou-me de maneira amorosa e atenciosa, por meio de seu exemplo e apoio a realizar este sonho e acreditar na minha capacidade cumprindo mais uma etapa fundamental na minha vida.

Neste momento tão importante o senhor não está mais entre nós, mas tenho certeza que comemora, ao lado de Deus está minha vitória.

Obrigada, pai! Tenho orgulho de ser sua filha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a Deus.

Agradeço a minha família por estar sempre ao meu lado me apoiando e incentivando na realização deste trabalho.

Agradeço a meu pai José Artur Renóbio, à minha mãe Olicéia Ramos Renóbio, ao meu tio Dr. Luiz Roberto F. Martins, à minha tia Maria Odila Renóbio Martins e às minhas irmãs Cristiane Renóbio e Luciana Renóbio.

Sou muito grata a minha querida orientadora Dra. Tatiana Miguel Rodrigues Souza pela paciência, amor e carinho que dedicou no desenvolvimento do meu trabalho, cuja a instrução foi de extrema importância para a conclusão deste.

“A matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela”

(Albert Einstein)

RESUMO

Ter acesso aos conhecimentos de geometria naquilo que se refere a expressão gráfica é muito importante para o desenvolvimento intelectual dos estudantes do ensino médio. A maior prova dessa assertiva é a falta de base que os alunos têm ao ingressar no ensino superior. Abordar a geometria nas aulas de matemática requer a elaboração de problemas bem planejados, capazes de incitar o raciocínio e a flexibilidade e devem utilizar as competências adquiridas nas demais disciplinas. Na formação inicial de professores da educação básica, tem sido bastante apontadas deficiências, inerentes ao conhecimento da geometria espacial básica. Isso aponta à necessidade de melhoria no aspecto político, um maior interesse em aperfeiçoar a estrutura acadêmica e intelectual de seus profissionais. O objetivo desse trabalho é identificar os principais recursos que podem ser aplicados na disciplina de geometria, tornando as aulas mais qualitativas. Da mesma forma, também são de interesse desse material, compreender os conceitos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação à temática; caracterizar as construções geométricas e a modelagem matemática; aplicar formas de avaliação pertinentes a esse conteúdo matemático e apresentar propostas de atividades envolvendo o conteúdo de geometria.

Palavras-chave: Geometria; Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio; Modelagem Matemática.

ABSTRACT

Having access to the knowledge of geometry in terms of graphic expression is very important for the intellectual development of high school students. The greatest proof of this assertion is the lack of basis that students have when entering higher education. Approaching geometry in mathematics classes requires the elaboration of well-planned problems, capable of inciting reasoning and flexibility and must use the skills acquired in other disciplines. In the initial training of basic education teachers, deficiencies have been pointed out, inherent to the knowledge of basic spatial geometry. These results lead to the need of the improvement of the political aspect, and a greater interest in improving the academic intellectual structures of these professionals. The aim of this study is to identify the key features that can be applied to geometry classes, making more qualitative classes. Likewise, it is also of interest for this material, to understand the concepts proposed by the National Curriculum Parameters, in relation to the theme; characterize geometric constructions and mathematical modeling; apply forms of assessment relevant to that mathematical content and present proposals for activities involving geometry content.

Keywords: Geometry; National Curriculum Parameters; Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Pontos e Retas.....	23
Figura 2: Reta e Pontos	23
Figura 3: Retas Paralelas, Retas Concorrentes e Retas Coincidentes	24
Figura 4: Retas perpendiculares	24
Figura 5: Pontos Colineares e Não Colineares	24
Figura 6: Semirretas.....	25
Figura 7: Círculo.....	25
Figura 8: Elementos de um círculo.....	26
Figura 9: Circunferência	26
Figura 10: Setor Circular	27
Figura 11: Ângulo	27
Figura 12: Ângulo de 180°.....	28
Figura 13: Ângulo agudo (esq.), ângulo reto (centro) e ângulo obtuso (dir.)	28
Figura 14: Ângulos opostos pelo vértice	28
Figura 15: Bissetriz.....	29
Figura 16: Triângulo ABC de vértices A , B e C	29
Figura 17: Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.)	30
Figura 18: Triângulos acutângulo (esq.), retângulo (centro) e obtusângulo (dir.)	30
Figura 19: Ângulos alternos internos e colaterais internos.....	31
Figura 20: Teorema do ângulo externo	31
Figura 21: Ângulo externo	31
Figura 22: Soma dos ângulos internos de qualquer triângulo	32
Figura 23: Dois triângulos congruentes.....	32
Figura 24: Caso de congruência LAL	33
Figura 25: Caso de congruência ALA.....	34
Figura 26: Caso de congruência LLL	34
Figura 27: Caso de congruência LAAo.....	35
Figura 28: Triângulo ABC	36
Figura 29: Desigualdade triangular	36
Figura 30: Quadrilátero não Convexo e Convexo	37
Figura 31: $ABCD$ trapézio $\Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$	37
Figura 32: $ABCD$ trapézio retângulo.....	37
Figura 33: Trapézio Isósceles	38
Figura 34: $ABCD$ paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	38
Figura 35: $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D} \Rightarrow ABCD$ paralelogramo.....	38
Figura 36: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$	39
Figura 37: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$	39
Figura 38: Retângulo $ABCD$	40
Figura 39: $ABCD$ paralelogramo $\overline{AC} = \overline{BD}$	40
Figura 40: Losango $EFGH$	41
Figura 41: $EG \perp FH \Rightarrow EFGH$ losango.....	41
Figura 42: Quadrado $ABCD$	42
Figura 43: Um polígono convexo de seis vértices e lados	43
Figura 44: Polígono não convexo de seis vértices e lados.....	43
Figura 45: Polígono regular – triângulo equilátero (esq.) e quadrado (dir.)	43

Figura 46: $A(ABCD) = a^2$	45
Figura 47: $A(ABCD) = a.b$	45
Figura 48: Área de um paralelogramo.....	46
Figura 49: Área de um triângulo.....	46
Figura 50: Área de um trapézio.....	47
Figura 51: Área de um losango.....	47
Figura 52: Poliedros.....	48
Figura 53: Poliedro Convexo e Poliedro Não convexo.....	48
Figura 54: Poliedros.....	48
Figura 55: Poliedro não convexo.....	49
Figura 56: Hexaedro regular $ABCDEFGH$	49
Figura 57: Prisma.....	50
Figura 58: Prisma regular de bases $A_1A_2...A_n$ e $A'_1A'_2...A'_n$	50
Figura 59: Prisma Reto.....	51
Figura 60: Prisma Oblíquo.....	51
Figura 61: Folha de Cartolina.....	52
Figura 62: Caixa Aberta.....	52
Figura 63: Pirâmide.....	54
Figura 64: Pirâmide Regular.....	55
Figura 65: Tetraedro Regular.....	55
Figura 66: Pirâmide Regular.....	56
Figura 67: Pirâmide.....	57
Figura 68: Pirâmide de Quéops.....	58
Figura 69: Cilindro.....	59
Figura 70: Eixo do Cilindro.....	59
Figura 71: Cilindro de Revolução.....	59
Figura 72: Cone.....	61
Figura 73: Cone Reto e Cone Oblíquo.....	61
Figura 74: Chapéu de Palhaço.....	62
Figura 75: Pirâmide Pentagonal e Cone.....	63
Figura 76: Compreensão das figuras.....	73
Figura 77: Finalização da atividade.....	73
Figura 78: Análise de poliedros na prática.....	74
Figura 79: Cálculo de poliedros na prática.....	74
Figura 80: Finalização da tarefa com poliedros.....	75
Figura 81: Avaliação prática 1.....	77
Figura 82: Avaliação Prática 2.....	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Organização curricular de matemática	17
Tabela 2: Organização do trabalho escolar.....	20
Tabela 3: Classificação de polígonos	44

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
http	Hype Text Tranfer Protocol.
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UFRS	Universidade Estadual do Rio Grande do Sul
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
VUNESP	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

LISTA DE SÍMBOLOS

cm	Centímetro
cm²	Centímetro ao quadrado
cm³	Centímetro cúbico
m	Metro
m²	Metro ao quadrado
m³	Metro cúbico

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
CAPÍTULO 1 - CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA, GEOMETRIA PLANA E GEOMETRIA ESPACIAL	23
1.1 Noções Primitivas	23
1.2 Geomtria Plana	25
1.2.1 Círculo.....	25
1.2.1.1 Circunferência.....	26
1.2.1.2 Comprimento da circunferência.....	26
1.2.1.3 Setor Circular.....	27
1.2.1.4 Área do círculo.....	27
1.2.2 Ângulos	27
1.2.3 Triângulos	29
1.2.4 Soma dos ângulos internos do triângulo	30
1.2.5 Congruência de Triângulos	32
1.2.6 Desigualdade Triangular	36
1.2.7 Quadrilátero	36
1.2.8 Polígonos	42
1.2.8.1 Áreas de polígonos.....	44
1.3.1 Poliedros	47
1.3.1.2 Poliedro convexo ou não convexo.....	48
1.3.1.3 Relação de Euler.....	48
1.3.1.4 Poliedros regulares.....	49
1.3.2 Prisma	50
1.3.2.1 Área da superfície de um prisma.....	51
1.3.2.2 Volume de um prisma.....	52
1.3.3 Pirâmides	54
1.3.3.1 Pirâmide regular.....	54
1.3.3.2 Tetraedro regular.....	55
1.3.3.3 Apótema da pirâmide.....	56
1.3.3.4 Área da superfície de uma pirâmide.....	56
1.3.3.5 Volume de uma pirâmide.....	57
1.3.4 Cilindro	58

1.3.4.1 Cilindro reto.....	59
1.3.4.2 Área da superfície de um cilindro.....	60
1.3.4.3 Volume de um cilindro.....	60
1.3.5 Cone	60
1.3.5.1 Área da superfície de um cone	61
1.3.5.2 Volume de um cone	62
CAPÍTULO 2 - CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E MODELAGEM MATEMÁTICA	64
2.1 Construções Geométricas	64
2.1.1 Conceituando a importância de utilizar as construções geométricas.....	65
2.2 Modelagem Matemática	67
CAPÍTULO 3 - ATIVIDADES DE GEOMETRIA DESENVOLVIDAS NA SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO	71
3.1 Etapa 1: Introdução dos Conceitos Básicos de Geometria	71
3.2 Etapa 2: Identificação de Figuras Planas	72
3.3 Etapa 3: Poliedros	73
3.4 Avaliações	75
3.4.1 Avaliação Teórica.....	75
3.4.2 Avaliação Prática	76
3.4.3 Conclusão das Avaliações	77
CAPÍTULO 4 - TRABALHOS FUTUROS E CONCLUSÃO	78
4.1 Trabalhos Futuros	78
4.2 Conclusão	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79
ANEXO 1	82
ANEXO 2	83

INTRODUÇÃO

Ter acesso aos conhecimentos de geometria, principalmente naquilo que se refere a expressão gráfica é muito importante para o desenvolvimento intelectual dos estudantes do ensino médio. A maior prova dessa assertiva é a falta de base que os alunos têm ao ingressar no ensino superior. Para tanto, é preciso que o professor tenha sensibilidade para trabalhar as formas visuais, seus conceitos e propriedades (OLIVEIRA; VELASCO, 2007).

De acordo com Fainguelernt e Nunes (2012), desde o início do ensino fundamental até o ensino médio, é importante investigar a geometria, tendo em vista que ela é capaz de desencadear diferentes competências e habilidades, melhorando a forma de compreender, descrever e se inter-relacionar com o espaço em que vive; e capaz de construir conhecimentos científicos e tecnológicos da qual todo o cidadão precisa se apropriar. Logo, a geometria é oriunda das práticas necessárias em áreas como a tecnologia, engenharia, arquitetura, astronomia, arte, geografia e agricultura.

“Ao concluir a educação básica, espera-se que os alunos tenham tido oportunidades de desenvolver suas capacidades de pensar e de aplicá-las em raciocínios lógicos, numéricos, espaciais, gráficos e outros”, corroboram Nina *et al.* (2005, p.19).

Perante esses preceitos, faz se interessante indagar: De que forma a geometria é apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) no âmbito educacional, e pelos estudiosos de renome, que se dedicam a essa área de estudo?

Segundo o Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2019), no ensino médio a geometria analítica pode ser utilizada para criar situações-problema de forma estratégica, através de atividades que exigem medidas de escala, semelhança de figuras com suas configurações trigonométricas ou eixos cartesianos. Assim, a geometria é capaz de ler e interpretar o mundo, por intermédio de suas mais variadas formas, e pode solucionar um problema de várias maneiras diferentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (BRASIL, 2019), direcionados as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, relatam que ensinar geometria no ensino médio deve ter significado científico e cultural, além de ser bem explicativo, ou seja, é preciso ultrapassar o ensino tradicional que se limita ao

cálculo de áreas e volumes de determinados sólidos, e não é capaz de fundamentar os paralelepípedos, retângulos na arquitetura e linhas paralelas ou perpendiculares em pinturas ou esculturas.

Oliveira e Velasco (2007) ratificam que o ensino da geometria não pode se limitar ao ensino tradicional, tratando apenas do cálculo de áreas e volume de sólidos, pois, essas premissas isoladamente, não justificam na prática a estrutura de paralelepípedos, esculturas, cristais e moléculas em formato de cubos. Igualmente, a aprendizagem tem de ser significativa, e dispensa excesso de pormenores nas explicações, para melhor aproveitamento do tempo.

Os PCNs (BRASIL, 2019) afirmam que o ensino médio trata de formas planas e tridimensionais representado por planificações, desenhos e objetos concretos, sendo a geometria plana, espacial, métrica e analítica. A Tabela 1 que segue exemplifica uma organização curricular, podendo ser apontada como referência, mas não como um currículo mínimo ou máximo, idealizado. Trata-se de um exercício de escola, condizente às temáticas abordadas no ensino médio.

Tabela 1: Organização curricular de matemática

Exemplo de uma possível programação		
1ª série	2ª série	3ª série
MATEMÁTICA		
Funções e trigonometria do triângulo retângulo Geometria plana Dados e suas representações	Trigonometria Geometria espacial de posição e métrica Análise de dados e contagem	Taxa de variação Geometria analítica Probabilidades

Fonte: PCN ENSINO MÉDIO (2003, p.134)

Observamos que função analítica é aqui considerada como expressão algébrica da função.

Um dos motivos que levou a organização dessa tabela é a busca por uma progressão do mais imediato e vivencial ao mais geral e abstrato, em que faz parte da realidade da vivência do aluno e ele consegue reconhecer a disciplina, dar a ela um sentido, inerente a qualidade de vida, geometria plana ou energia e ambiente. Posteriormente, é interessante avançar para temas complexos no aspecto técnico e científico.

Abordar a geometria nas aulas de matemática requer a elaboração de problemas bem planejados, capazes de incitar o raciocínio e a flexibilidade e devem utilizar as competências adquiridas nas demais disciplinas, mas é indispensável conhecer a realidade do conteúdo transmitido; e o professor pode instigar os alunos o potencial para resolver tais problemáticas (OLIVEIRA; VELASCO, 2007).

Nessa mesma linha de raciocínio, Nina *et al.* (2005) predizem que é substancial a elaboração de problemas que foquem em situações relacionadas ao dia a dia do aprendiz, levando a refletir valores e atitudes, como a capacidade de ser crítico, a solidariedade, a justiça e o respeito a todos ao seu redor.

Nas etapas da aprendizagem da geometria, o aluno consegue desenvolver suas estruturas mentais, partindo do conceito concreto para as operações formais, ou seja, práticas, facilitando a melhoria do ensino dessa disciplina (FAINGUELERNT; NUNES, 2012).

As funções e a geometria analítica são conteúdos que aparecem na maioria dos livros didáticos e ementas do ensino médio. As funções ocupam aproximadamente toda a 1ª série do ensino médio. A geometria analítica no plano também ocorre em um grande intervalo de tempo no ensino médio, variando entre a 2ª e a 3ª série. Esses dois conteúdos possuem diversas aplicações. Os exemplos de aplicação de geometria analítica em situações reais estão muitas vezes ligados à localização de coordenadas geográficas tais como distâncias entre cidades e outras aplicações tradicionais. As funções são aplicadas em modelos matemáticos diversos. Mas uma aplicação de funções e geometria analítica raramente é encontrada na literatura do ensino médio: a teoria de otimização (GARCIA, 2015, p.4).

Na visão de Oliveira e Velasco (2007) selecionar temas como a geometria, as medidas, a probabilidade, a álgebra, os números e a estatística, demanda enfatizar pontos norteadores ao abordar suas aplicações e origens, já que são extensas e acumulam muitas informações. A ideia é que o aluno avance a partir do que ele já sabe, desencadeando novas competências e percebendo a relevância científica e cultural, num processo ético e estético.

Em matemática, conforme está expresso nos documentos oficiais, “as crianças exploram o espaço ao seu redor e, progressivamente, por meio da percepção e da maior coordenação de movimentos, descobrem profundidades, analisam objetivos, formas, dimensões, organizam mentalmente seus deslocamentos” (BRASIL, 1998, p.230). Logo, as noções intuitivas, construídas a partir da movimentação no espaço, da interação com as pessoas e os objetivos, constituem as bases de um senso espacial e, conseqüentemente, de uma competência espacial, uma capacidade individual de modificar formas ao seu redor e orientar-se em meio a um mundo de objetos no espaço. Isso, mais adiante, se tornará conhecimento formal pelo estudo da Geometria [...] (GIGANTE; SANTOS, 2012, p.28).

Ao que se consta na respectiva colocação dos autores, analisar o mundo e suas relações espaciais é um processo simples, em que se percebe as propriedades dos objetos, levando em conta o fato de que a aprendizagem é pertinente a distintas áreas do conhecimento e tem uma ligação direta com o pensamento espacial e geométrico.

Ainda, Gigante e Santos (2012) redigem que, na matemática, a geometria analisa o espaço das figuras, das formas, das localizações, dos deslocamentos, dos movimentos e medidas. Na instituição de ensino, a geometria propicia o desenvolvimento da capacidade espacial, e por conseguinte, a matemática. Entretanto, as práticas pedagógicas da educação básica, que abrange desde o ensino infantil até o ensino médio, devem ser bem planejadas.

Aperfeiçoar o ensino da geometria nas escolas é essencial para organizar uma interferência efetiva na rede pública ou privada, de maneira que os conhecimentos teóricos sejam significativos no currículo do ensino médio (OLIVEIRA; VELASCO, 2007).

Caldeira (2009) preconiza que é comum alunos da educação básica sentirem dificuldades na classificação e diferenciação de formas planas e não planas, formando conceitos a partir dessa base. O tipo de ensino pode influir nesse resultado, já que muitas vezes os estudantes têm acesso ao conteúdo matemático pronto e acabado. Também é comum os professores de matemática enfrentarem maiores obstáculos na inserção da geometria em sala de aula, galgando uma aprendizagem significativa aos educandos.

Na formação inicial de professores da educação básica, tem sido bastante apontadas deficiências, inerentes ao conhecimento da geometria espacial básica. Isso aponta à necessidade de melhoria no aspecto político, um maior interesse em aperfeiçoar a estrutura acadêmica e intelectual de seus profissionais, ou seja, é preciso investir mais nesse sentido para obter resultados mais positivos (VIANA, 2011).

Rigonatto (2019) prevê que embora sejam realizados planejamentos no ensino da matemática, as aulas de geometria requerem alta capacidade cognitiva em cada uma das etapas escolares, pois, o sentido abstrato do aluno precisa estar muito maduro, não sendo possível considerar seu conteúdo para tornar a aprendizagem significativa.

Os PCNs (BRASIL, 2019) esclarecem ser enriquecedor que nas três séries do ensino médio seja desenvolvido um projeto de formação dos alunos, abrangendo todas as disciplinas da área. Na primeira série é recomendado colocar os alunos em contato direto com a leitura e interpretação de situações simples, com base em informações relacionadas ao ambiente da qual eles fazem parte. Na segunda série já poderia se mostrar a disciplina enquanto ciência, avançando a forma de pensar e moldar fatos e fenômenos. Na terceira série levaria o aluno a observar e utilizar bastante informações e procedimentos, ampliando a matemática ao examinar e intervir na realidade.

Na Tabela 2 que será apresentado na sequência corresponde a 4 aulas semanais que organiza os temas estruturadores do projeto em vigor.

Tabela 2: Organização do trabalho escolar

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: PCN ENSINO MÉDIO (2003, p.128)

É preciso considerar que a configuração da Tabela 2 pode variar de acordo com a quantidade de aulas, com o contexto do dia letivo, ou projetos já programados pela escola, podendo ocorrer um replanejamento se for o caso.

A consolidação do Estado democrático em parceria com as novas tecnologias e mudanças na produção de bens e serviços vem elaborando um novo currículo, para que os jovens se preparem para uma vida adulta de qualidade e conhecimento. Assim, o saber geométrico para o aperfeiçoamento da leitura e compreensão da realidade fazem parte dos objetivos traçados pela ciência da natureza, matemática e suas tecnologias, que instigam a adesão de habilidades e competências dos estudantes da educação básica (BRASIL, 2000).

A pesquisa foi estruturada em quatro capítulos da forma como o professor deveria introduzir o conteúdo de geometria espacial para que os alunos sejam capazes de desenvolver suas capacidades de pensar e de construir conhecimentos científicos e tecnológicos. São capítulos que abordam assuntos referentes à geometria, investigando a formação de conceitos de polígonos e poliedros.

Inicialmente, o Capítulo I definirá a respeito dos polígonos e dos poliedros, bem como, colocará exemplos dessas figuras e alguns de seus elementos. A proposta não se limita a tal investigação, mas se estende a conceitos dessas figuras a partir de seus atributos definidores, dentre exemplos e não-exemplos.

Em seguida, será tratado sobre as construções geométricas, justificando o uso da modelagem matemática, que é capaz de tornar as aulas mais interessantes aos alunos e ter como respaldo a realidade de seu cenário.

No terceiro Capítulo serão desvendadas as atividades que foram desenvolvidas com os alunos do ensino médio, que mostrou na prática como a geometria pode ser aplicada de maneira mais significativa.

Por fim, o último Capítulo irá considerar os trabalhos futuros e as conclusões, das quais se pretende atingir.

Tais premissas despertaram na autora o interesse em melhor conhecer a respeito do tema, que abrange sobre a geometria, que pode fazer todo um diferencial na sala de aula, inclusive no Ensino Médio, etapa impactante na vida dos estudantes.

Contudo, esse trabalho tem como objetivo precípuo, identificar os principais recursos que podem ser aplicados na disciplina de geometria, tornando as aulas mais qualitativas. Da mesma forma, também são de interesse desse material,

compreender os conceitos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, em relação à temática; caracterizar as construções geométricas e a modelagem matemática; e aplicar formas de avaliação pertinentes a esse conteúdo matemático.

Inicialmente, a metodologia aplicada nesse conteúdo abrangerá a pesquisa bibliográfica, que se idealizou, através de livros, dicionários, revistas, sites temáticos, cartilhas, apostilas, trabalhos acadêmicos, cds, vídeos e afins. Logo, renomes como Azevedo (2018), Pontes (2016) e Bassanezi (2015) acrescentarão novos saberes, através de suas obras relacionadas a questão da qualificação profissional. Em seguida, será realizado um experimento em sala de aula, capaz de avaliar a aprendizagem dos alunos do ensino médio da rede regular de ensino.

Pretende-se atrair a atenção dos leitores para esse conteúdo, a todos os gestores e professores do campo de exatas que se interessem pelo tema, e que tenham a necessidade de aperfeiçoar seu trabalho no ambiente escolar, e a tantos profissionais mais da área de educação ou similares, que se interessarem em aprender um pouco mais sobre o objeto de estudo.

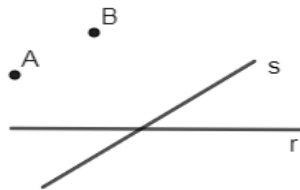
CAPÍTULO 1 - CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA, GEOMETRIA PLANA E GEOMETRIA ESPACIAL

1.1 Noções Primitivas

Os conceitos de ponto, reta e plano, são noções primitivas da Geometria Euclidiana, sabendo que o ponto não possui definições formais, mas os demais serão definidos abaixo.

Na Figura 1, tem-se os pontos A e B e as retas r e s . Designar-se-á pontos por letras maiúsculas e as retas por letras minúsculas.

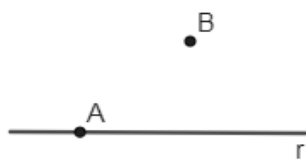
Figura 1: Pontos e Retas



Fonte: Elaborada pela autora

Definição: Uma reta é um conjunto de pontos. Dados uma reta r e um ponto P , ou o ponto pertence à reta ou o ponto não pertence à reta. Quando o ponto P pertence à reta r escrevemos $P \in r$. Quando o ponto P não pertence à reta r escrevemos $P \notin r$. Na Figura 2, escreve-se $A \in r$ (lê-se A pertence a r) ou $B \notin r$ (lê-se B não pertence a r).

Figura 2: Reta e Pontos



Fonte: Elaborada pela autora

Proposição: Dadas duas retas distintas no plano, temos somente três possibilidades para as mesmas, ou elas possuem um ponto em comum ou elas não possuem ponto algum em comum ou elas possuem todos os pontos em comum. No primeiro caso, as retas são chamadas de paralelas, que denotamos por $r // s$, no segundo caso as retas são concorrentes e por último retas coincidentes (Figura 3).

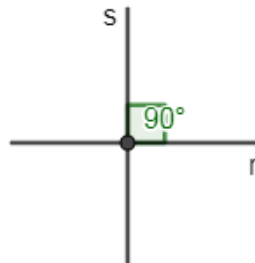
Figura 3: Retas Paralelas, Retas Concorrentes e Retas Coincidentes



Fonte: Elaborada pela autora

Proposição: Dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r é perpendicular a s , que s é perpendicular a r ou, ainda que r e s são perpendiculares quando r e s tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de 90° nesse ponto. Denotamos $r \perp s$.

Figura 4: Retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pela autora

Considere três pontos distintos no plano, nem sempre existe uma reta que passa por estes três pontos. Se existir uma reta que passe por estes pontos, dizemos que eles são colineares, caso contrário, diremos que os pontos não são colineares. Por exemplo na próxima figura, os pontos A , B e C são colineares, enquanto, os pontos D , E e F não são colineares.

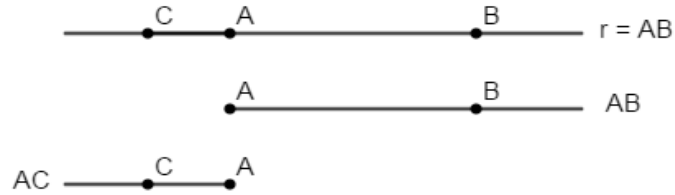
Figura 5: Pontos Colineares e Não Colineares



Fonte: Elaborada pela autora

Um ponto A , situado sobre uma reta r , a divide em duas partes, quais sejam, as semirretas de origem A . Para diferenciar essas semirretas vamos considerar mais dois pontos B e C sobre r , um em cada uma de tais partes, podemos denotar as semirretas de origem A por \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Figura 6: Semirretas



Fonte: Elaborada pela autora

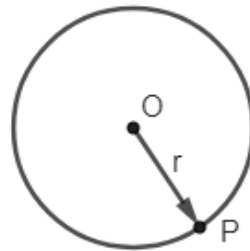
E se A e B são dois pontos distintos sobre uma reta r , o segmento de extremidade AB é a porção da reta r situada de A a B . Escrevemos \overline{AB} para denotar o comprimento do segmento AB .

1.2 GEOMETRIA PLANA

1.2.1 Círculo

Definição: Dados um ponto O e um real $r > 0$, o círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que estão à distância r de O , isto é, tais que $\overline{OP} = r$

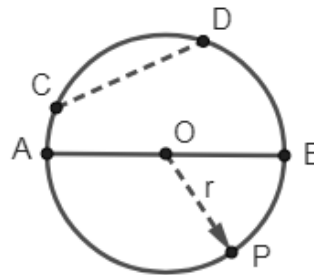
Figura 7: Círculo



Fonte: Elaborada pela autora

Identificar-se-á os círculos por letras gregas maiúsculas. Dado um círculo α (lê-se alfa) de centro O e raio r , denomina-se raio o segmento que une o centro O a um dos pontos do círculo; por exemplo, OA , OB e OP são raios do círculo α . Denomina-se corda todo segmento que une dois pontos quaisquer do círculo; diâmetro é uma corda que passa por seu centro. Nas notações da Figura 8, AB e CD são cordas de α , sendo AB um diâmetro.

Figura 8: Elementos de um círculo



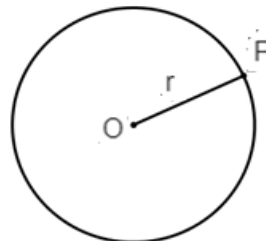
Fonte: Elaborada pela autora

Como pode se notar na Figura 8, todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, denominada semicírculo. Reciprocamente, se uma corda de um círculo o divide em duas partes iguais, então a corda deve, necessariamente, ser um diâmetro do círculo.

1.2.1.1 Circunferência

Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos que equidistam de um ponto fixo, chamado de centro.

Figura 9: Circunferência



Fonte: Elaborada pela autora

Assim, todos os pontos da circunferência têm a mesma distância ao centro O pela medida do raio r e que a linha que forma a circunferência seja formada por vários pontos P na mesma distância r do centro O .

1.2.1.2 Comprimento da Circunferência

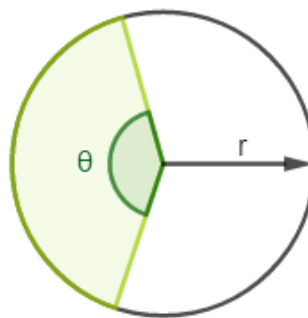
O cálculo do comprimento da circunferência é a razão entre o comprimento da circunferência (perímetro do círculo) e o diâmetro da mesma é conhecida como sendo número π (pi), ou seja, $\pi = \frac{C}{d}$. Então, para os babilônios, $\pi = 3$. Há cerca de 2000 anos, Arquimedes (287 a.C. 212 a.C.), publicou um tratado matemático

contendo do cálculo do valor do π como sendo um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$. Isso equivale a usar $\pi \approx 3,14$. Assim, usamos para o comprimento da circunferência $C = 2\pi r$.

1.2.1.3 Setor Circular

Um setor circular ou setor de círculo é uma fração do círculo limitada por dois raios e um arco.

Figura 10: Setor Circular



Fonte: Elaborada pela autora

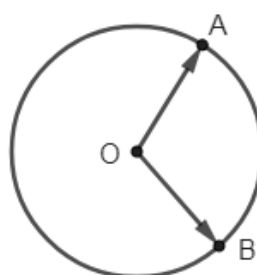
1.2.1.4 Área do círculo

A área do círculo é o produto entre a constante π e a medida do raio ao quadrado (r^2). Assim, a área do círculo, é $A = \pi r^2$.

1.2.2 Ângulos

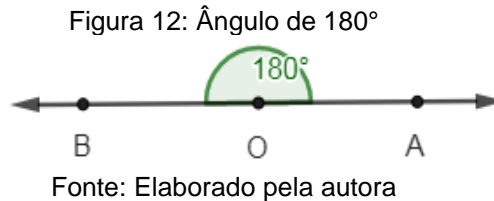
Definição: Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Figura 11: Ângulo



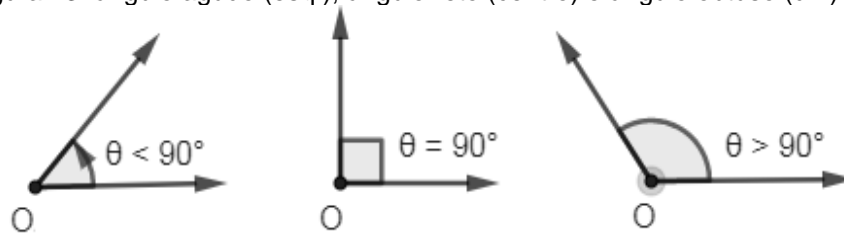
Fonte: Elaborado pela autora

O ângulo formado pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é denotado por $\angle AOB$. Existindo um ângulo $\angle AOB$ tal que \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} sejam semirretas opostas, então $\hat{A}OB = 180^\circ$ (Figura 12).



Um ângulo $\angle AOB$ (Figura 13) é agudo quando $0^\circ < \hat{A}OB < 90^\circ$, reto quando $\hat{A}OB = 90^\circ$ e obtuso quando $90^\circ < \hat{A}OB < 180^\circ$.

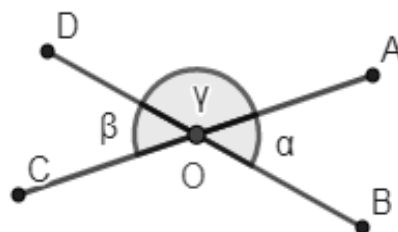
Figura 13: ângulo agudo (esq.), ângulo reto (centro) e ângulo obtuso (dir.)



Fonte: Elaborado pela autora

Definição: Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são opostos pelo vértice (abreviamos OPV) se seus lados forem semirretas opostas, e são denotados por complementares cuja a soma das medidas seja igual a 90° , ou seja, $\alpha + \beta = 90^\circ$ e suplementares cuja a soma das medidas seja igual a 180° , ou seja, $\gamma + \eta = 180^\circ$.

Figura 14: ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Elaborado pela autora

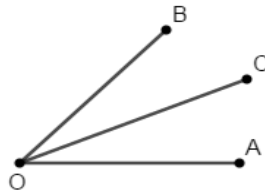
Os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da Figura 14 são OPV, uma vez que as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} , bem como as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} , são respectivamente opostas.

Proposição: Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Demonstração: Em relação a Figura 14, como \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} são semirretas opostas, segue que $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Analogamente, $\beta + \gamma = 180^\circ$. Portanto, $\alpha = 180^\circ - \gamma = \beta$.

Definição: Dado um ângulo $\angle AOB$ a bissetriz de $\angle AOB$ é a semirreta \overrightarrow{OC} que divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que OC bissecta $\angle AOB$.

Figura 15: Bissetriz



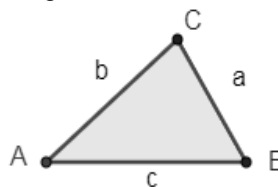
Fonte: Elaborado pela autora

A respectiva Figura 15, mostra que \overrightarrow{OC} bissecta $\angle AOB \Leftrightarrow \hat{AOC} = \hat{COB}$.

1.2.3 Triângulos

Definição: Um triângulo é formado por três pontos não colineares, delimitado pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A , B e C tais pontos, diremos que A , B e C são vértices do triângulo de segmentos AB , AC e BC (ou seus comprimentos).

Figura 16: o triângulo ABC de vértices A , B e C



Fonte: Elaborado pela autora

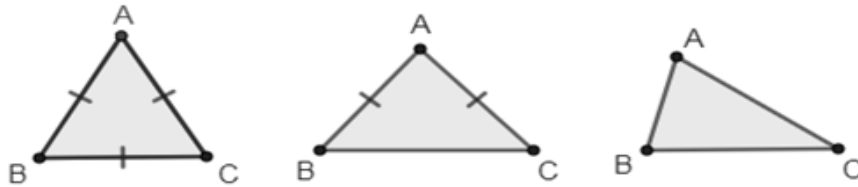
Os ângulos internos do triângulo são $\angle A = \angle BAC$, $\angle B = \angle ABC$ e $\angle C = \angle ACB$.

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos.

Classificação de um triângulo ABC quanto aos comprimentos de seus lados.

- I) **Equilátero**, se $AB = AC = BC$;
- II) **Isósceles**, se ao menos dois dentre AB , AC , BC forem iguais;
- III) **Escaleno**, se $AB \neq AC \neq BC \neq AB$.

Figura 17: Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.)

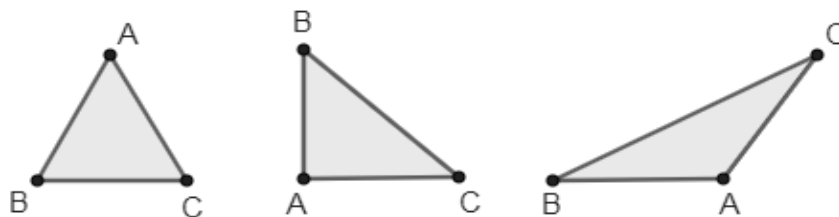


Fonte: Elaborado pela autora

Classificação de um triângulo ABC quanto às medidas de seus ângulos internos.

- I) **Acutângulo**: se todos os seus ângulos internos forem agudos (menor que 90°);
- II) **Retângulo**: se tiver um ângulo reto (igual a 90°);
- III) **Obtusângulo**: se tiver um ângulo obtuso (maior que 90°).

Figura 18: Triângulos acutângulo (esq.), retângulo (centro) e obtusângulo (dir.)



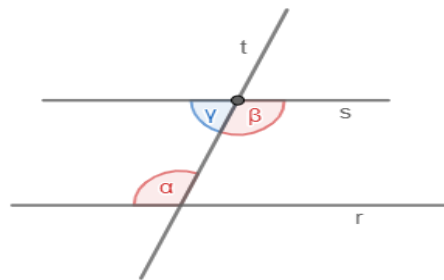
Fonte: Elaborado pela autora

1.2.4 Soma dos ângulos internos do triângulo

Para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , apresentaremos três resultados importantes a serem usados na sua demonstração.

Proposição (Retas Paralelas cortadas por uma Transversal): Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos α e β são congruentes e os ângulos colaterais internos α e γ são suplementares.

Figura 19: Ângulos alternos internos e colaterais internos



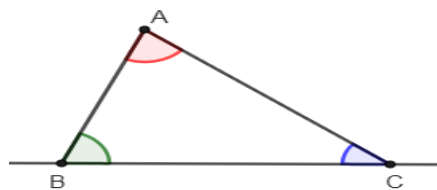
Fonte: Elaborado pela autora

Demonstração: Como $r \parallel s$ e $\beta + \gamma = 180^\circ$, temos que $\alpha = \beta$ (pelo caso OPV), então $\alpha + \gamma = 180^\circ$

Teorema 1.3.1 (Ângulo Externo): Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração: Considere o triângulo ABC na Figura 18 em que $\theta = \widehat{A} + \widehat{B}$, sendo A e B os ângulos internos do triângulo.

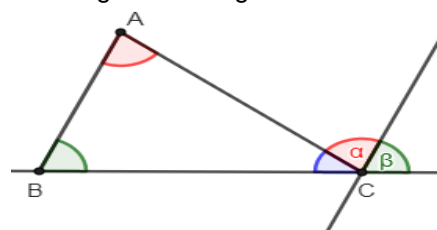
Figura 20: teorema do ângulo externo



Fonte: Elaborado pela autora

Traçando uma reta paralela ao segmento \overline{AB} passando por C , temos α e β , conforme a Figura 21.

Figura 21: Ângulo externo



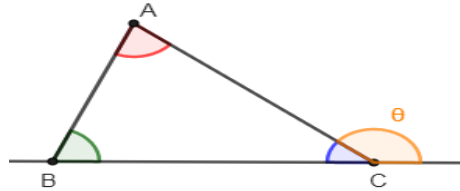
Fonte: Elaborado pela autora

Pela Proposição, temos que $\alpha = \widehat{A}$ e $\beta = \widehat{B}$, então $\theta = \widehat{A} + \widehat{B} = \alpha + \beta$.

Proposição: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Demonstração: Considere o triângulo ABC e seja θ o ângulo externo ao triângulo e adjacente a C como na Figura 22.

Figura 22: Soma dos ângulos internos de qualquer triângulo



Fonte: Elaborado pela autora

Como θ e \widehat{C} são ângulos suplementares, temos que,

$$\theta + \widehat{C} = 180^\circ \quad (\text{I})$$

E, pelo Teorema 1.3.1,

$$\theta = \widehat{A} + \widehat{B} \quad (\text{II})$$

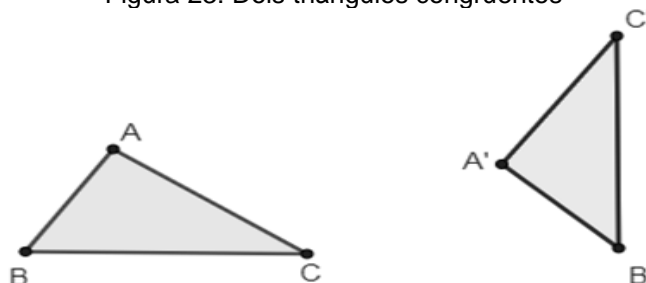
Portanto, substituindo (II) em (I), obtemos,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

1.2.5 Congruência de Triângulos

Definição: Dois triângulos serão considerados congruentes quando os lados e ângulos do primeiro triângulo estão em correspondência biunívoca com os lados e ângulos do segundo triângulo de tal forma que os lados e os ângulos correspondentes têm a mesma medida, ou seja, é possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Figura 23: Dois triângulos congruentes

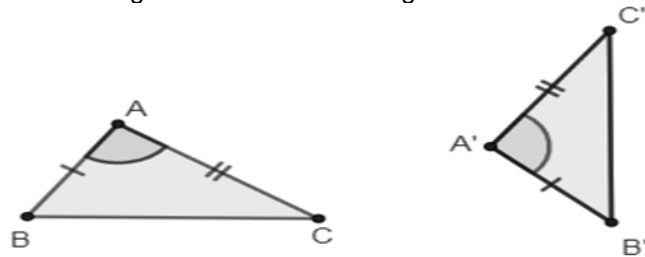


Fonte: Elaborado pela autora

Existem quatro casos em que é possível identificar os triângulos congruentes, sem que haja necessidade de todos os seus lados e/ou ângulos serem iguais. São eles:

Axioma: LAL (Lado, Ângulo e Lado): Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem, respectivamente, iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes, denotamos por (\cong).

Figura 24: o caso de congruência LAL



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 24, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

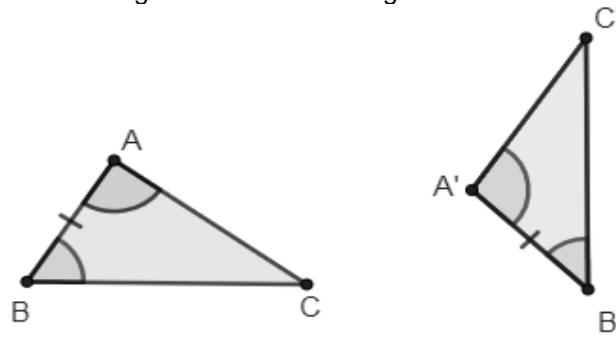
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow_{LAL} ABC \cong A'B'C',$$

com a correspondência de vértices, segue, daí, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right.$$

Axioma: ALA (Ângulo, Lado e Ângulo): Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 25: caso de congruência ALA



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 25, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

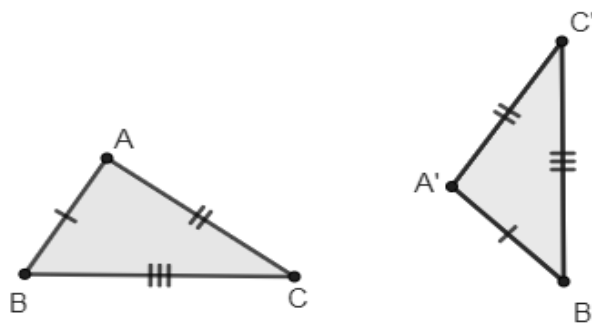
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow_{ALA} ABC \equiv A'B'C',$$

com correspondência de vértices, segue, daí, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C}' \end{array} \right.$$

Axioma: LLL (Lado, Lado e Lado): Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente, congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 26: caso de congruência LLL



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 26, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

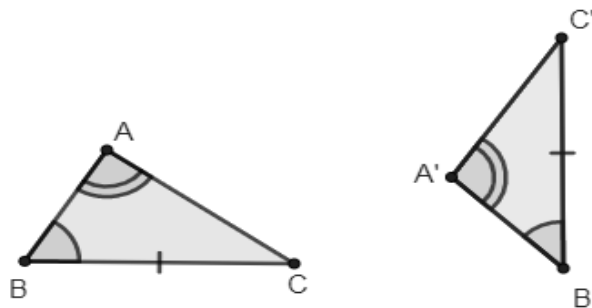
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \equiv A'B'C',$$

com correspondência de vértices, segue, daí que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{array} \right.$$

Axioma: LAAo (Lado, Ângulo e Ângulo Oposto): Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem, respectivamente, iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 27: caso de congruência LAAo



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 27, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \equiv A'B'C',$$

com correspondência de vértices, segue, daí, que

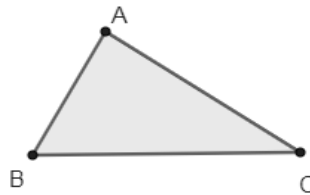
$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{C}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \end{array} \right.$$

1.2.6 Desigualdade Triangular

Proposição: Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração: Seja ABC um triângulo, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, como na Figura 28. Afirmação: $a < b + c$.

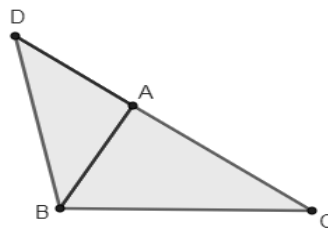
Figura 28: triângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora

Marque o ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{AC} , tal que $A \in CD$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Figura 29: desigualdade triangular



Fonte: Elaborado pela autora

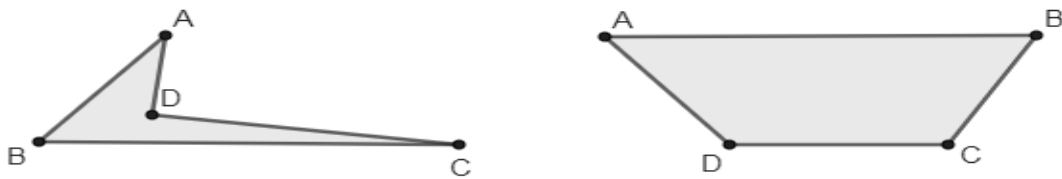
Como resultado do prolongamento, o triângulo ABD é isósceles de base BD e $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$, assim pela Proposição temos que $\widehat{BDC} < \widehat{DBC}$, então $\overline{BC} < \overline{CD}$, logo concluímos que $\widehat{BDC} < \widehat{DBC} \Rightarrow \overline{BC} < \overline{CD} \Rightarrow \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$

1.2.7 Quadrilátero

Definição: Um quadrilátero é formado por quatro pontos A , B , C e D no mesmo plano, que são chamados de vértices, quatro ângulos e quatro segmentos de retas que se unem. O quadrilátero pode ser convexo ou não convexo.

Definição: Uma região do plano designa-se por convexa quando qualquer segmento de reta que tenha as extremidades dentro da região, tem todos os seus pontos na região. Caso contrário, diremos que é uma região não convexa.

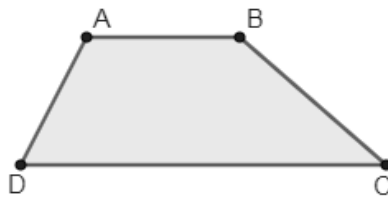
Figura 30: Quadrilátero não Convexo e Convexo



Fonte: Elaborado pela autora

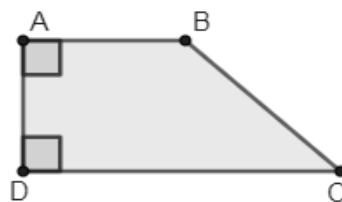
O trapézio, paralelogramo, quadrado, retângulo e losango são quadriláteros notáveis pois possuem propriedades particulares. Destarte, apresentaremos, os quadriláteros notáveis e suas propriedades.

Definição (Trapézio): É um quadrilátero convexo se, e somente se, possuir um par de lado oposto paralelo.

Figura 31: $ABCD$ trapézio $\Leftrightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$ 

Fonte: Elaborado pela autora

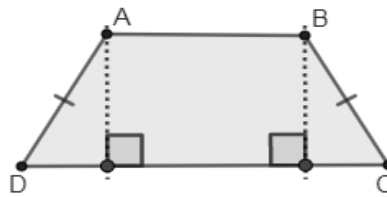
Definição (Trapézio Retângulo): Um trapézio é chamado de retângulo, quando um lado é perpendicular às bases.

Figura 32: $ABCD$ trapézio retângulo

Fonte: Elaborado pela autora

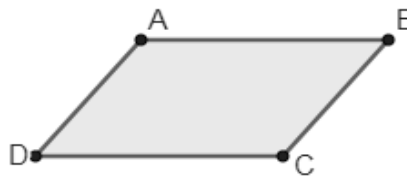
Definição (Trapézio Isósceles): Um trapézio é chamado de isósceles quando os lados não paralelos e as diagonais são congruentes e os ângulos de cada base são congruentes.

Figura 33: Trapézio Isósceles



Fonte: Elaborado pela autora

Definição (Paralelogramo): Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Figura 34: $ABCD$ paralelogramo $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 

Fonte: Elaborado pela autora

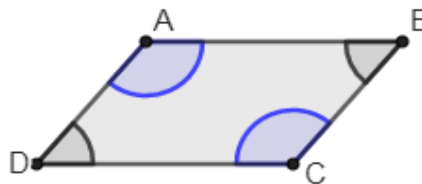
Proposição: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem iguais.

Demonstração: Da definição anterior, temos $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ e, como os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ do paralelogramo são colaterais internos em relação a reta \overrightarrow{AB} , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \end{array} \right. \quad (i) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ \end{array} \right. \quad (ii)$$

Assim, de (i) e (ii) temos que o ângulo $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} = \widehat{C}$. Do mesmo modo que $\widehat{B} = \widehat{D}$

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$, Figura 35.

Figura 35: $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow ABCD$ paralelogramo

Fonte: Elaborado pela autora

Como $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D}$ e $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, temos que

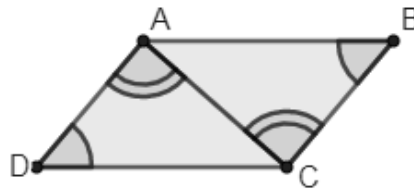
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ.$$

Analogamente, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, o que garante que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, de maneira que $ABCD$ tem lados opostos paralelos, isto é, um paralelogramo.

Proposição: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se seus pares de lados opostos forem iguais.

Demonstração: Da definição anterior, temos $\widehat{A} = \widehat{C}$. Por outro lado, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, temos $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$. Portanto, os triângulos ABD e CDB são congruentes por LAAo e segue, daí, que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Figura 36: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$

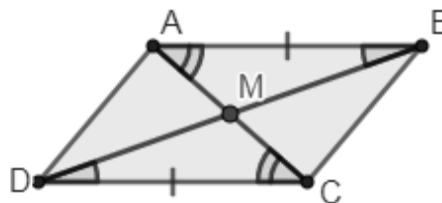


Fonte: Elaborado pela autora

Proposição: Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

Demonstração: Considere um quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo e M o ponto de interseção de suas diagonais, Figura 37. De $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, segue que $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$ e $\widehat{ABM} = \widehat{CDM}$. Como, $\overline{AB} = \overline{CD}$, segue que os triângulos ABM e CDM são congruentes por ALA. Logo $\overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$.

Figura 37: $ABCD$ paralelogramo $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{CM}$ e $\overline{BM} = \overline{DM}$



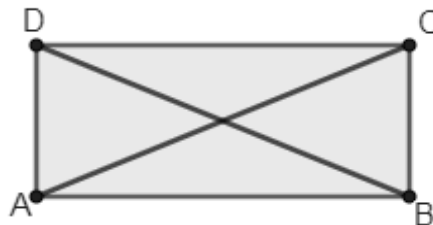
Fonte: Elaborado pela autora

Definição (Retângulo): Um quadrilátero convexo é um retângulo se todos os seus ângulos internos forem iguais, como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360° , segue que um quadrilátero é um retângulo se, e somente se, todos os ângulos internos forem iguais a 90° .

Proposição: Um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.

Demonstração: Se $ABCD$ é um retângulo de diagonais AC e BD , Figura 38, então $\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{DC}$. Mas, como os triângulos DAB e ADC partilham o lado AD , os mesmos são congruentes por LAL. Em particular, $\overline{AC} = \overline{BD}$.

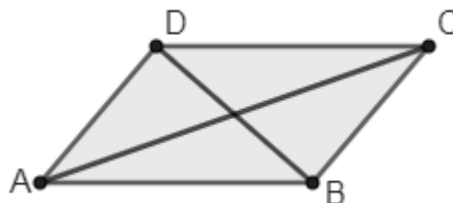
Figura 38: retângulo $ABCD$



Fonte: Elaborado pela autora

Reciprocamente, suponha que $ABCD$ é um paralelogramo tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$, Figura 39. Como $\overline{AB} = \overline{DC}$, os triângulos DAB e ADC , que tem o lado AD em comum são novamente congruentes, agora pelo caso LLL. Logo, $\widehat{DAB} = \widehat{ADC}$. Mas, uma vez que $ABCD$ é um paralelogramo, temos $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ e, daí, $\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Analogamente, $\widehat{ABC} = \widehat{DCB} = 90^\circ$ e $ABCD$ é um retângulo.

Figura 39: $ABCD$ paralelogramo $\overline{AC} = \overline{BD}$



Fonte: Elaborado pela autora

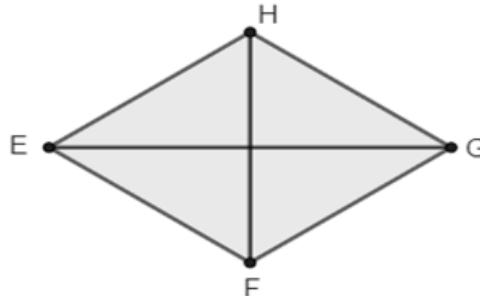
Definição (Losango): Um quadrilátero convexo é um losango se todos os seus lados forem iguais.

Proposição: Um paralelogramo é um losango se, e somente se, tiver diagonais perpendiculares.

Demonstração: Considere $EFGH$ é um losango de diagonais EG e FH (ver Figura 40). Como $\overline{EF} = \overline{EH}$ e $\overline{GF} = \overline{GH}$, os triângulos EFG e EHG são congruentes por LLL. Portanto, sendo M o ponto de interseção das diagonais EG e FH , temos $\widehat{FEM} = \widehat{FEG} = \widehat{HEG} = \widehat{HEM}$.

Assim, EM é bissetriz do ângulo $\angle FEH$ do triângulo EFH , o qual é isósceles de base FH , então EM é altura relativa a FH . Logo $\overrightarrow{FH} \perp \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EG}$.

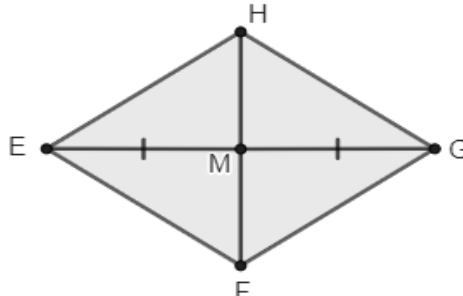
Figura 40: losango $EFGH$



Fonte: Elaborado pela autora

Reciprocamente, seja $EFGH$ um paralelogramo de diagonais perpendiculares EG e FH (ver Figura 41). Como EG e FH se intersectam no ponto médio M de ambas, pois $EFGH$ é um paralelogramo, segue que, no triângulo EHG , o segmento HM é mediana e altura relativamente ao lado EG . Portanto, temos que $\overline{EH} = \overline{GH}$. Mas, como $\overline{EH} = \overline{FG}$ e $\overline{EF} = \overline{GH}$, assim $EFGH$ é um losango.

Figura 41: $EG \perp FH \Rightarrow EFGH$ losango



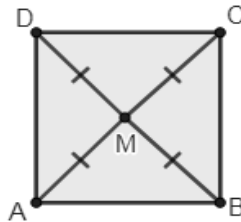
Fonte: Elaborado pela autora

Definição (Quadrado): Um quadrilátero convexo é um quadrado quando for, simultaneamente, um retângulo e um losango, isto é, possuem todos os ângulos

internos de 90° , suas diagonais são perpendiculares e intersectam no ponto médio e todos os lados são congruentes.

Proposição: Em todo quadrado as diagonais formam ângulos de 45° com os lados do quadrilátero.

Figura 42: quadrado $ABCD$



Fonte: Elaborado pela autora

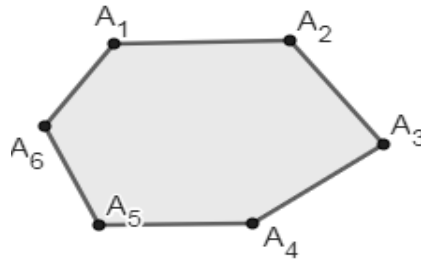
1.2.8 Polígonos

Definição: Polígono é uma figura plana fechada que é formado por segmentos de reta a partir de uma sequência de pontos de um plano, todos distintos e não colineares, onde cada extremidade de qualquer um desses segmentos é comum a apenas um outro. O contorno e sua região interna formam uma superfície ou região poligonal.

Definição: polígono convexo é o segmento de reta que, se traçado unindo dois pontos quaisquer internos ao polígono, fica completamente contido nele. Ou seja, se $n \geq 3$ é um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano, dizemos que A_1, A_2, \dots, A_n é um polígono (convexo) se, $1 \leq i \leq n$, a reta $\overline{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).

Definição: Vértice é o ponto de encontro entre dois lados. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são os vértices dos polígonos; os segmentos $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$ (ou, por vezes, seus comprimentos) são os lados do polígono.

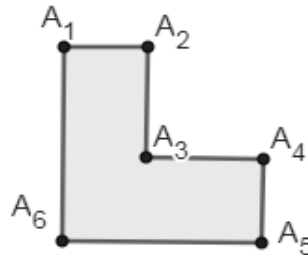
Figura 43: um polígono convexo de seis vértices e lados



Fonte: Elaborado pela autora

Definição: Polígono não Convexo é o segmento de reta que, se traçado unindo dois pontos quaisquer internos ao polígono, fica parcialmente na região externa ao polígono.

Figura 44: polígono não convexo de seis vértices e lados

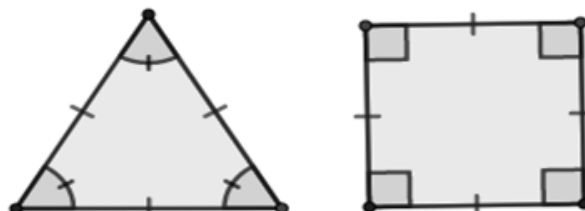


Fonte: Elaborado pela autora

Definição: Polígonos Regulares é um polígono é considerado regular quando possui as mesmas medidas dos lados e seus ângulos internos forem todos congruentes.

São exemplos de polígonos regulares: o triângulo equilátero e o quadrado.

Figura 45: polígono regular – triângulo equilátero (esq.) e quadrado (dir.)



Fonte: Elaborado pela autora

Definição: Diagonal de polígono é qualquer um dos segmentos $A_i A_j$ que não seja um lado do mesmo.

Definição: Ângulos internos são os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um polígono. Os ângulos convexos $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (ou simplesmente $\angle A_i$, $1 \leq i \leq n$) são os ângulos internos do polígono. Assim, todo polígono de n vértices possui exatamente n ângulos internos.

Em geral, diz-se que um polígono A_1, A_2, \dots, A_n é um n -ágono, em referência a seu número n de lados (e de vértices), conforme tabela abaixo.

Nome dos polígonos conforme os lados:

Tabela 3: Classificação de polígonos

número de lados	nome
3	Triângulo ou trilátero
4	Quadrângulo ou quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Hendecágono ou Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono
n	n -Látero

Fonte: Elaborado pela autora

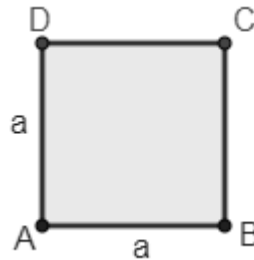
1.2.8.1 Áreas de polígonos

Definição: Área ou superfície de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado.

Segue o cálculo de áreas de algumas regiões simples do plano.

Proposição: Um quadrado de lado a tem área a^2 .

Figura 46: $A(ABCD) = a^2$



Fonte: Elaborado pela autora

Proposição: Um retângulo de lados a e b tem área $a.b$.

Figura 47: $A(ABCD) = a.b$



Fonte: Elaborado pela autora

Proposição: A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a $a.h$.

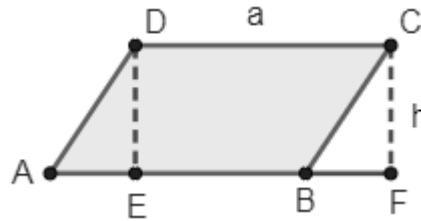
Demonstração: Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD , Figura 48, e E e F , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta \overline{AB} . Suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$ e que os triângulos ADE e BCF sejam congruentes pelo caso LAL, de modo que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{DE} = \overline{CF}$ e $\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$. Então temos

$$A(ABCD) = A(ADE) + A(BEDC) = A(BCF) + A(BEDC) = A(CDEF).$$

Por outro lado, $CDEF$ é um retângulo de altura h e base $\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$.

Portanto, segue que $A(ABCD) = A(EFCD) = a.h$.

Figura 48: área de um paralelogramo



Fonte: Elaborado pela autora

Proposição: Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e alturas h_a, h_b e h_c , respectivamente relativas aos lados a, b e c .

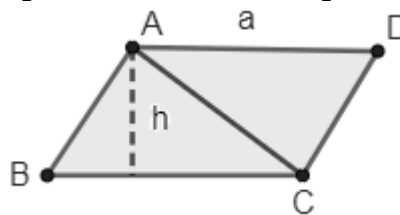
$$\text{Então, } A(ABC) = \frac{h_a}{2} = \frac{h_b}{2} = \frac{h_c}{2}.$$

Em particular, $a.h_a = b.h_b = c.h_c$.

Demonstração: Seja $S = A(ABC)$ e D a interseção da paralela a \overline{BC} por A com a paralela \overline{AB} por C (ver Figura 49). Então $ABC \cong CDA$ por ALA, de modo que $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, AC é lado comum e $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$, assim $A(ABC) = A(CDA)$. Mas como $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura h , segue da proposição anterior que $2S = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = a.h$.

Portanto, $A(ABC) = S = \frac{1}{2}a.h$, e as outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo.

Figura 49: área de um triângulo



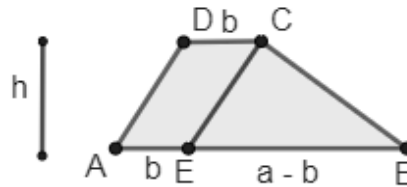
Fonte: Elaborado pela autora

Proposição: Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h , então $A(ABCD) = \frac{(a+b).h}{2}$.

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade, que $a > b$ (ver Figura 50). Se $E \in AB$ for tal que $\overline{AE} = b$, então o quadrilátero $AECD$ tem dois lados paralelos iguais, de modo que é um paralelogramo. Como $\overline{BE} = a - b$, temos

$$A(ABCD) = A(AECD) + A(EBC) = b.h + \frac{(a-b).h}{2} = \frac{(a+b).h}{2}.$$

Figura 50: área de um trapézio



Fonte: Elaborado pela autora

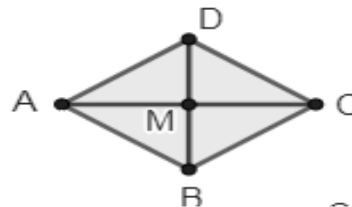
Proposição: Se $ABCD$ é um losango de diagonais AC e BD , então

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Demonstração: Observe a Figura 51, temos $A(ABCD) = A(ABC) + A(ACD)$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BM} + \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Figura 51: área de um losango



Fonte: Elaborado pela autora

1.3.1 Poliedros

Definição: Um poliedro é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste na união de um número finito de polígonos satisfazendo as condições a seguir:

- Dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano;
- Se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado comum.

Cada lado de um polígono comum a exatamente duas faces e denomina-se aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também um vértice do poliedro.

(a) Se dois polígonos P e Q não se intersectam, então existe polígonos $P_1 = P, P_2, \dots, P_k = Q$, tais que P_i e P_{i+1} se intersectam, para $1 \leq i < k$.

Figura 52: Poliedros

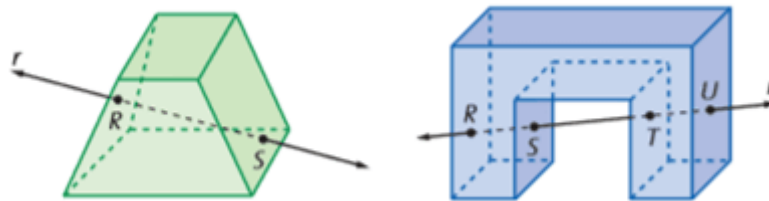


Fonte: Dante, 2008

1.3.1.2 Poliedro convexo ou não convexo

Definição: Um poliedro é convexo se, dados quaisquer dois pontos pertencentes a superfície desse poliedro, o segmento que tem esses pontos como extremidades está inteiramente contido no poliedro. Caso exista algum segmento que não satisfaça essa condição, trata-se de um poliedro não convexo.

Figura 53: Poliedro Convexo e Poliedro Não convexo



Fonte: Dante, 2008

1.3.1.3 Relação de Euler

Em todo poliedro convexo com vértices (V), arestas (A) e faces (F), vale a relação $V + F = A + 2$.

Figura 54: Poliedros



Fonte: Elaborado pela autora

Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo.

Figura 55: Poliedro não convexo



Fonte: Dante, 2008

Lema 1: Se um poliedro tem A arestas e F_k faces de k lados, então

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

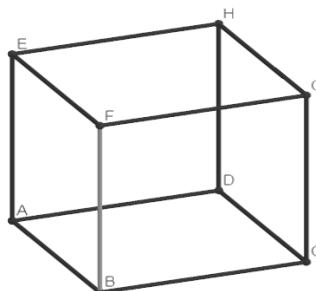
Lema 2: Se um poliedro tem A arestas e V_k vértices de k arestas, então

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

1.3.1.4 Poliedros regulares

Definição: Um poliedro convexo é dito regular se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

- Todas as suas faces forem polígonos regulares com um mesmo número de arestas.
- Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas.

Figura 56: hexaedro regular $ABCDEFGH$ 

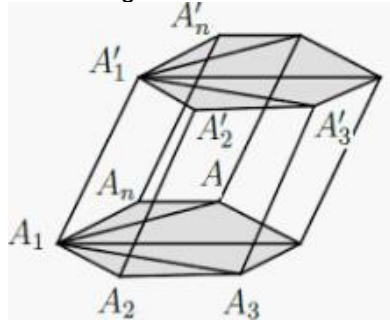
Fonte: Elaborado pela autora

Teorema: Todo poliedro convexo regular é um tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro ou icosaedro.

1.3.2 Prisma

Definição: O prisma de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ é a porção limitada do espaço, delimitada pelos polígonos $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Figura 57: Prisma

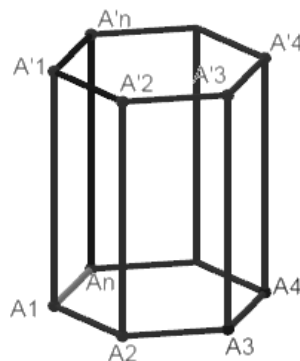


Fonte: Elaborado pela autora $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$

Dizemos que os pontos $A_1A_2\dots A_n$, $A'_1A'_2\dots A'_n$ são os vértices do prisma, e os segmentos A_iA_{i+1} , $A'_iA'_{i+1}$ e $A_iA'_i$ são suas arestas e os segmentos $A_iA'_i$, para $1 \leq i \leq n$, são as arestas laterais. Os paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$ são faces laterais do prisma, que vamos referir como suas faces. O interior de um prisma é o conjunto dos pontos do prisma que não pertencem a nenhuma das faces do mesmo.

Uma vez que as bases do prisma acima definido são polígonos de n lados, dizemos que ele se trata de um prisma n -gonal.

Figura 58: Prisma regular de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$

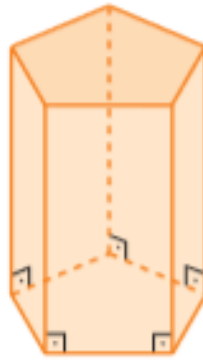


Fonte: Elaborado pela autora

a) Prisma reto

Definição: Um prisma reto é um prisma cujas as arestas laterais são perpendiculares aos planos de suas bases; em particular, se $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ são as bases de um prisma reto, então $A_1A'_1 = A_2A'_2 = \dots = A_nA'_n$, e tal valor comum coincide com a altura do prisma. Um prisma reto é regular se suas bases forem polígonos regulares.

Figura 59: Prisma Reto

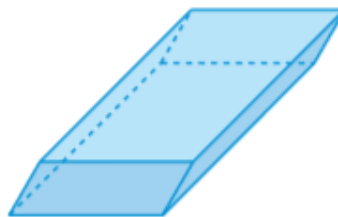


Fonte: Dante, 2008

b) Prisma oblíquo

Definição: o prisma é oblíquo quando as arestas laterais formam com a base ângulos agudos ou ângulos obtusos.

Figura 60: Prisma Oblíquo



Fonte: Dante, 2008

1.3.2.1 Área da superfície de um prisma

A área total de um prisma seja ele regular ou oblíquo, é a soma da área de suas bases e sua área lateral, que deve ser realizado exatamente da maneira que é feito na Geometria Plana.

Exemplo: Dispondo de uma folha de cartolina de 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta cortando um quadrado de 8

cm de lado em cada canto da folha (ver figura). Quantos centímetros quadrados do material são necessários para que seja construída essa caixa?

Figura 61: Folha de Cartolina



Fonte: Dante, 2008

Montando a caixa, temos a figura:

Figura 62: Caixa Aberta



Fonte: Dante, 2008

Solução: Observando a caixa montada, temos:

Duas regiões retangulares de 14 cm por 8 cm: $A_1 = 14 \cdot 8 = 112 \text{ cm}^2$

Duas regiões retangulares de 34 cm por 8 cm: $A_2 = 34 \cdot 8 = 272 \text{ cm}^2$

Uma região retangular (fundo da caixa) de 34 cm por 14 cm: $A_3 = 34 \cdot 14 = 476 \text{ cm}^2$

Portanto, a quantidade de material necessário para construir a caixa é $2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + A_3$.

$$A_2 + A_3 = 2 \cdot 112 + 2 \cdot 272 + 476 = 1244 \text{ cm}^2.$$

1.3.2.2 Volume de um prisma

Definição: A cada sólido geométrico mensurável (determinável) S , é possível associar um real positivo $V(S)$, denominado o volume de S , de tal maneira que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- 1) Se S é um cubo de aresta 1 então $V(S) = 1$

- 2) Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis (delimitáveis), tais que $\text{Intersecte}(S_1) \cap \text{Intersecte}(S_2) = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2$ é mensurável (delimitável), então $V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$
- 3) Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis (delimitáveis), tais que $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \leq V(S_2)$.
- 4) Princípio de Cavalieri: Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis (delimitáveis) e α é um plano tal que, para todo plano $\alpha' // \alpha$, tenhamos $A(S_1 \cap \alpha') = A(S_2 \cap \alpha')$ então $V(S_1) = V(S_2)$.
- 5) Se S_1 é um sólido mensurável (delimitável), e S_2 puder ser obtido de S_1 por meio de uma translação ao longo de um vetor, uma rotação ao longo de um eixo ou uma reflexão ao longo de um plano, então S_2 também é mensurável (delimitável) e $V(S_1) = V(S_2)$.

Proposição: Seja P um paralelepípedo de base B e altura h . Então, $V(P) = AB(h) = (\text{Área da base}) \cdot (\text{altura})$.

Demonstração: P é um paralelepípedo reto retângulo, cujas arestas tem comprimentos a, b , e c : particionando P em abc cubos de aresta 1, segue dos postulados 1. e 2. de medição de volumes que $V(P) = abc = A(B)h$.

Corolário: Seja P um prisma de base B e altura h , então $V(P) = A(B)h$.

Demonstração: Seja P' um paralelepípedo de mesma altura h que P , cuja base B' é um paralelogramo de área igual a área de B e tal que B e B' estejam contidas em um mesmo plano α , com P e P' contidos em um mesmo semiespaço, dos que α determina.

Se α' é um plano paralelo a α , a igualdade das alturas do prisma e do paralelepípedo garante que $P \cap \alpha' \neq \emptyset$ se, e só se, $P' \cap \alpha' \neq \emptyset$. Ademais, quando tal ocorre, tais interseções são respectivamente congruentes a B e B' , logo, tem áreas iguais. Portanto, segue a proposição anterior, que $V(P) = V(P') = A(B')h = A(B)h$.

Exemplos: Quantos dados podem ser colocados em uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, se esses dados forem cubos de 2 cm de aresta?

Solução: Primeiramente calcular o volume da caixa cúbica.

Temos que área de base é a^2 . Neste caso $20^2 = 400 \text{ cm}^2$.

Para o cálculo do volume = área da base x altura = $400 \cdot 20 = 8000 \text{ cm}^3$.

Agora, vamos calcular o volume de um dado.

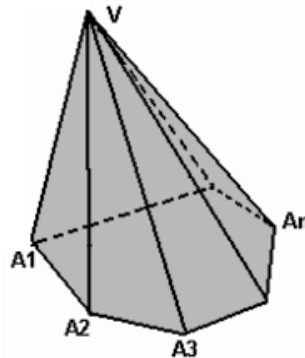
Temos que área de base = $b^2 = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$. O volume é = área da base x altura = $4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3$.

Portanto, podem ser colocados $8000 : 8 = 1000$ dados dentro da caixa cúbica.

1.3.3 Pirâmides

Definição: Dados um polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano de V , definimos a pirâmide $VA_1A_2\dots A_n$, de vértice V e base $A_1A_2\dots A_n$, como a porção limitada do espaço, delimitado por $A_1A_2\dots A_n$ e pelos triângulos VA_iA_{i+1} , para $1 \leq i \leq n$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$.

Figura 63: Pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora

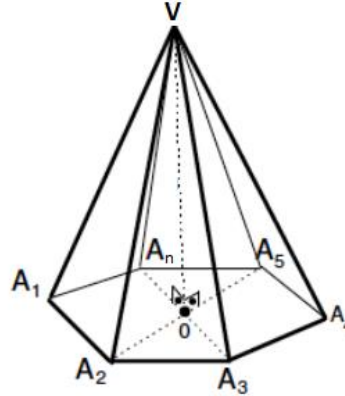
Dizemos, ainda, que os segmentos VA_i e A_iA_{i+1} são as arestas e os triângulos VA_iA_{i+1} são as faces laterais da pirâmide, O interior de uma pirâmide é o conjunto dos pontos da pirâmide que não pertencem a nenhuma das faces da mesma. Uma vez que a base da pirâmide acima definida é um polígono de n lados, dizemos que se trata de uma pirâmide n -gonal.

1.3.3.1 Pirâmide regular

Definição: Se P é o pé da perpendicular baixada do vértice V ao plano da base $A_1A_2\dots A_n$ de uma pirâmide $VA_1A_2\dots A_n$, dizemos que o segmento VP (ou, por vezes, sua medida) é a altura da pirâmide. A referida pirâmide é dita regular se sua base $A_1A_2\dots A_n$ for um polígono regular de centro P . Nesse caso, uma vez que

$\overline{A_i P} = \overline{A_{i+1} P}$, $\widehat{VPA_i} = \widehat{VPA_{i+1}} = 90^\circ$ e VP é lado comum, concluímos que $VPA_i \cong VPA_{i+1}$ pôr *LAL* e, portanto, que $\overline{VA_i} = \overline{VA_{i+1}}$, para $1 \leq i \leq n$.

Figura 64: Pirâmide Regular



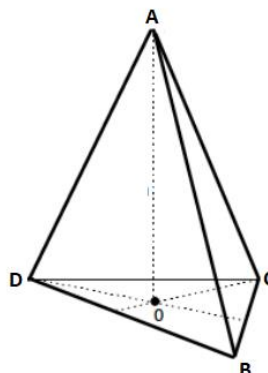
Fonte: Elaborado pela autora

1.3.3.2 Tetraedro regular

Definição: Uma pirâmide triangular $VABC$ (de base ABC) também pode ser vista como uma pirâmide triangular de bases VAB , VAC ou VBC (e vértices C , B ou A , conforme o caso). Esse ponto de vista é importante principalmente nos casos em que a escolha de uma base particular seja irrelevante e, sendo esse o caso, nos referimos a $VABC$ simplesmente como o tetraedro de vértices V , A , B e C e faces VAB , VAC , VBC e ABC .

Nos tetraedros, como cada face de um tetraedro pode ser considerada como sua base, denominamos altura de um tetraedro a qualquer um dos segmentos que une um vértice do mesmo ao pé da perpendicular baixada de tal vértice a face oposta. E dizemos que $ABCD$ é um tetraedro regular se suas seis arestas tiverem um mesmo comprimento.

Figura 65: Tetraedro Regular



Fonte: Elaborado pela autora

1.3.3.3 Apótema da pirâmide

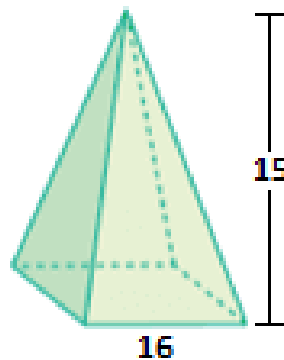
Apótema da pirâmide é a altura do triângulo de uma das faces laterais.

1.3.3.4 Área da superfície de uma pirâmide

A área total de uma pirâmide, seja ela regular ou oblíqua, é a soma da área de base e suas áreas laterais.

Exemplo: Determine a área total de uma pirâmide regular cuja altura é 15 cm e cuja base é um quadrado de 16 cm de lado.

Figura 66: Pirâmide Regular



Fonte: Dante, 2008

Na figura, temos que:

a_b = aresta da base = 16 cm; h = altura da pirâmide = 15 cm; a_1 = apótema da

base = $a_b : 2$; a = apótema da pirâmide = $a^2 = a_1^2 + h^2$

Sabemos que:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$$

Solução:

Temos que o Cálculo de A_{base} (área da base): $A_{base} = a_b^2 = 16^2 = 256cm^2$.

Cálculo de a_1 (apótema da base): $a_1 = a_b : 2 = 16 : 2 = 8cm$.

Cálculo de a (apótema da pirâmide):

$$a^2 = a_1^2 + h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289cm$$

$$a = \sqrt{289} = 17cm$$

Cálculo de $A_{lateral}$ (área lateral): $A_{lateral} = 4 \cdot \frac{a_b \cdot a}{2} = 2 \cdot 16 \cdot 17 = 544 \text{cm}^2$.

Cálculo de A_{total} (área total): $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 256 + 544 = 800 \text{cm}^2$.

1.3.3.5 Volume de uma pirâmide

Proposição: Se T é um tetraedro de base B e altura h , então

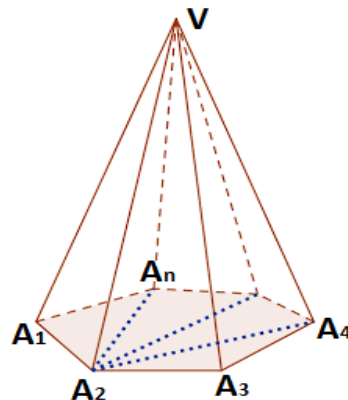
$$V(T) = \frac{1}{3} A(B)h.$$

Corolário: Se P é uma pirâmide de base B e altura h , então

$$V(P) = \frac{1}{3} A(B)h.$$

Demonstração: Sejam V o vértice da pirâmide e $B = A_1 A_2 \dots A_k$ sua base. Para $2 \leq k \leq n-1$, sejam T_k o tetraedro $VA_1 A_k A_{k+1}$ e $BA_1 A_k A_{k+1}$.

Figura 67: Pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora

Se h é a altura de T , então h também é a altura de T_k , para $2 \leq i \leq n-1$.

Portanto, o Postulado (de medição de volumes) juntamente com Proposição, resultam em:

$$\begin{aligned} V(P) &= V(T_2) + \dots + V(T_{n-1}) = \frac{1}{3} A(B_2)h + \dots + \frac{1}{3} A(B_{n-1})h \\ &= \frac{1}{3} (A(B_2) + \dots + A(B_{n-1}))h = \frac{1}{3} A(B)h. \end{aligned}$$

Exemplo: A pirâmide de Quéops é conhecida como a Grande Pirâmide do Egito. Sua base tem aproximadamente 230 m de aresta e sua altura é de 147 m. Qual é o volume dessa pirâmide?

Figura 68: Pirâmide de Quéops



Fonte: Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pirâmide_de_Quéops>. Acesso em: 10 fev. 2020

Na figura, temos que:

$$a_b = \text{aresta da base} = 230 \text{ m e } h = 147 \text{ m}$$

Sabemos que:

$$V_{\text{volume}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

Temos que o cálculo de A_{base} (área da base) é dado por:

$$A_{\text{base}} = a_b^2 = 230^2 = 52900 \text{ m}^2$$

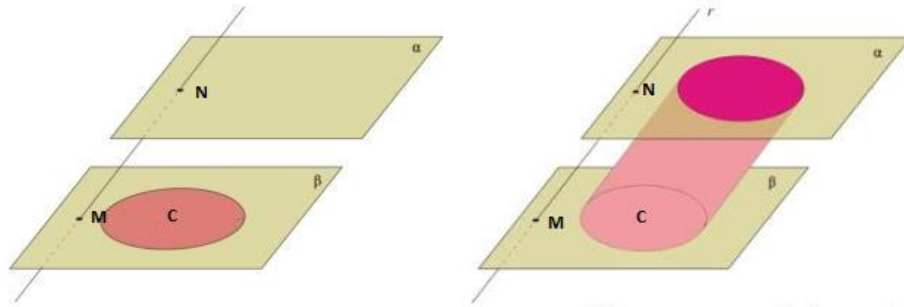
E o volume V_{volume} (Volume) é dado por:

$$V_{\text{volume}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 52900 \cdot 147 = 2592100 \text{ m}^3$$

1.3.4 Cilindro

Definição: Considere dois planos α e β , distintos e paralelos, e um segmento de reta MN com M pertencente a α e N pertencente a β . Dado um círculo C de centro O e raio r , contido em α , chamamos **cilindro circular** (ou simplesmente cilindro) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento MN , que unem um ponto do círculo C a ponto de β . No caso de MN ser perpendicular à α , o cilindro é reto.

Figura 69: Cilindro

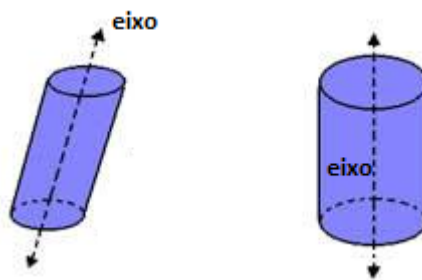


Fonte: Dante, 2008

A superfície do cilindro é formada por duas figuras planas, que são as bases, e uma superfície lateral não plana, “arredondada”.

A altura do cilindro é a distância entre os planos das bases. E a reta que passa pelos centros das bases de um cilindro é chamada de **eixo do cilindro**.

Figura 70: Eixo do Cilindro

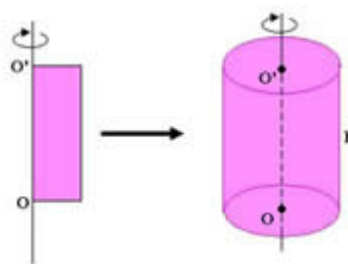


Fonte: Dante, 2008

1.3.4.1 Cilindro reto

Definição: Um cilindro reto também é chamado de **cilindro de revolução**. Esse nome se baseia na ideia de que é possível obter um cilindro por meio do espaço delimitado pela rotação de uma superfície retangular em torno da reta que contém um de seus lados. Esse lado tem medida igual à da altura do cilindro e o outro lado do retângulo tem medida igual à do raio r da base do cilindro.

Figura 71: Cilindro de Revolução



Fonte: Dante, 2008

1.3.4.2 Área da superfície de um cilindro

A superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das duas bases.

Assim, o cálculo da Área lateral: $A_l = (2\pi r)h = 2\pi rh$, da Área da base: $A_b = 2\pi r^2$ e da Área total: $A_l + A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

Exemplo: Uma lata de refrigerante tem forma cilíndrica, com 8 cm de diâmetro nas bases e 15 cm de altura. Quantos centímetros quadrados de material são necessários, aproximadamente, para fabricar essa lata de refrigerante? (Use $\pi \approx 3,14$).

Solução:

Temos que $\text{raio} = \text{diâmetro} / 2 = 8 / 2 = 4\text{cm}$. A Área total vale $2\pi r(h + r) \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 4(15 + 4) \approx 25,12 \cdot 19 \approx 477,28\text{cm}^2$.

Portanto, o material necessário para a fabricação da lata é de aproximadamente $477,28\text{ cm}^2$.

1.3.4.3 Volume de um cilindro

Corolário: Seja C um cilindro sólido de revolução, de raio R e altura h , então $V(C) = \pi R^2 h$.

Exemplo: O reservatório de tinta de uma caneta esferográfica tem a forma cilíndrica. Seu diâmetro é de 0,2 cm e o seu comprimento é de 12 cm. Quantos ml de tinta podem ser acondicionados nesse reservatório. ($1\text{cm}^3 = 1\text{ ml}$)

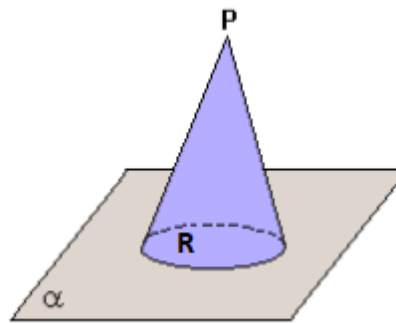
Solução:

Temos que $\text{raio} = \text{diâmetro} : 2 = 0,2 : 2 = 0,1\text{cm}$ e o seu volume vale: $V_{\text{olume}} = \pi \cdot R^2 \cdot h \approx 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 12 \approx 0,3768\text{cm}^3 \approx 0,3768\text{ml}$

1.3.5 Cone

Definição: Consideramos um plano α , uma região circular R nesse plano e um ponto P não pertencente a α . A reunião de todos os segmentos que unem cada ponto de R ao ponto P é um sólido chamado cone circular.

Figura 72: Cone



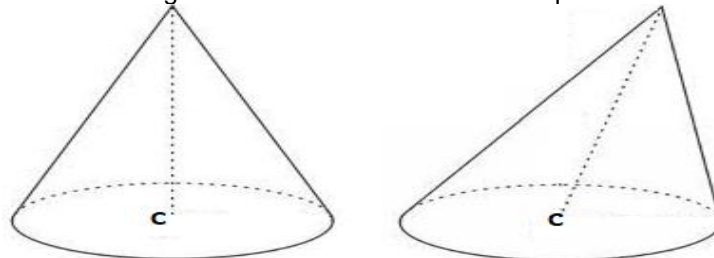
Fonte: Dante, 2008

1.3.5.1 Área da superfície de um cone

A superfície total do cone é formada por uma superfície plana, que é a sua base, e uma superfície lateral não plana, “curva”, “arredondada”, que é a sua superfície lateral.

O **eixo de um cone** é o segmento de reta que liga o vértice ao centro da base. E sendo o eixo perpendicular à base, denomina-se **cone reto** e se o eixo é oblíquo a base, denomina-se cone oblíquo.

Figura 73: Cone Reto e Cone Oblíquo



Fonte: Elaborado pela autora

A **altura do cone** é o segmento de reta perpendicular traçado do vértice ao plano da base, no caso do cone reto, a medida do eixo coincide com a da altura, ou seja, a área de um setor circular é proporcional à área do círculo correspondente, de forma que:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360^\circ} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r}$$

Logo, podemos calcular a área do setor como $A_{\text{setor}} = \frac{l}{2\pi R} \cdot \pi R^2$.

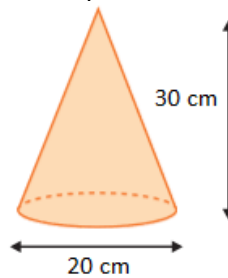
Neste caso, do cone temos $l = 2\pi r$ e $R = g$, assim: $A_{\text{lateral}} = \frac{2\pi r}{2\pi g} \cdot \pi g^2 = \pi r g$

A área da base é a área do círculo de raio r : $A_{base} = \pi r^2$.

Portanto, a área total do cone reto é $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

Exemplo: Quantos centímetros quadrados de cartolina serão gastos para fazer o chapéu de palhaço cujas medidas estão na figura abaixo?

Figura 74: Chapéu de Palhaço



Fonte: Dante, 2008

Na Figura 74, temos: d = diâmetro da base = 20 cm e h = altura do cone = 30 cm e g = geratriz e r = raio da base

Solução:

Temos que o cálculo de r (raio da base) é $r = d : 2 = 20 : 2 = 10\text{cm}$ e o cálculo de g (geratriz) é $g^2 = r^2 + h^2 = 10^2 + 30^2 = 100 + 900 = 1000$. Logo, $g = \sqrt{1000}; 31,62\text{cm}$.

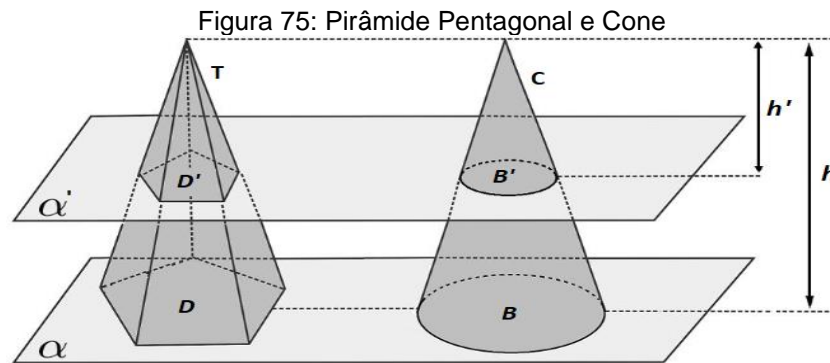
Finalmente o cálculo de $A_{lateral}$ (área lateral) é $A_{lateral} = \pi r g \approx 3,14 \cdot 10 \cdot 31,62 \approx 993\text{cm}^2$

Portanto, serão necessários aproximadamente 993cm^2 de cartolina.

1.3.5.2 Volume de um cone

Corolário: Se C é um cone sólido de raio R e altura h , então $V(C) = \frac{1}{3} \pi R^2 h$.

Demonstração: Seja T um tetraedro de mesma altura h que C , cuja a base B é um triângulo de área igual a área do disco D , base do cone, e tal que B e D estejam contidas em um mesmo plano α , com C e T contidos em um mesmo semiespaço, dos que α determina.



Fonte: Elaborado pela autora

Se α' é um plano paralelo a α , a igualdade das alturas do cone e do tetraedro garante que $T \cap \alpha' \neq \emptyset$ se, e só se, $C \cap \alpha' \neq \emptyset$. Nesse caso, seja h' a distância do vértice do cone (ou do tetraedro, tanto faz) a α' , $C \cap \alpha' = D'$ e $T \cap \alpha' = B'$, segue que onde R' é o raio de D' . Mas, como $A(B) = A(D)$, segue daí que $A(B') = A(D')$. Portanto pelo princípio de Cavalieri, temos:

$$V(C) = V(T) = \frac{1}{3} A(B)h = \frac{1}{3} A(D)h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Exemplo: Qual é a capacidade de uma casquinha de sorvete de forma cônica cujo diâmetro é de 6 cm e cuja altura é de 10 cm? (Use $\pi = 3,14$).

Solução: Como o volume de um cone é $V_{\text{volume}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, temos:

$$d = \text{diâmetro} = 6 \text{ cm}, h = \text{altura} = 10 \text{ cm e } r = \text{raio da base}$$

Temos que o cálculo de r (raio da base) é $d = r : 2 = 6 : 2 = 3 \text{ cm}$ e o cálculo do o

$$\text{do } V_{\text{volume}} \text{ (volume) é } V_{\text{volume}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 10 = 94,2 \text{ cm}^3$$

Como $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$, a capacidade da casquinha de sorvete é de 94,2 ml.

Na sequência, será desenvolvida a relação entre as construções geométricas e a modelagem matemática, que podem ser muito úteis, nas aulas de matemática.

CAPÍTULO 2 - CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Construções Geométricas

Neste capítulo serão apresentadas ideias que relacionarão a modelagem matemática e construções geométricas para sala de aula. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

A geometria desempenha um papel fundamental no currículo, à medida que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive. Também é o fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações (BRASIL, PCN, 1998, p.122).

Ao que se compreende no esclarecimento do PCN, a geometria tem potencial muito grande, pois através dela é possível interpretar o mundo em que se vive, de maneira mais simples, e a tendência é que os alunos de ensino médio tenham interesse voluntário desse conteúdo. O fato de serem utilizadas situações-problemas, facilita bastante na aprendizagem da geometria, dando um verdadeiro sentido a mesma.

Provavelmente a geometria seja a área mais oportuna para desenvolver uma aprendizagem estruturada de novos saberes e na solução de problemas, através da exploração e da investigação. Seria enriquecedor aplicar a geometria na praxe da sala de aula do ensino médio, mas em verdade, essas aulas acontecem de maneira rápida, através de fórmulas e regras decoradas, sem que novas descobertas sejam feitas pelos alunos. O ideal seria combinar a geometria com outros campos da matemática, como a aritmética, a análise e a álgebra; além de combiná-la com outras áreas do conhecimento, e diretamente vinculada com a realidade (FAINGUELERNT; NUNES, 2012).

Para Fainguelernt e Nunes (2012) as avaliações nacionais, como o SAEB e o ENEM mostram que os alunos do ensino médio têm muita dificuldade em relação ao ensino da geometria, principalmente a de categoria espacial. Para que haja sucesso nas aulas de geometria espacial, é preciso desenvolver no aluno o entendimento para visualização e a intuição ao examinar objetos bidimensionais ou tridimensionais. É interessante que os estudantes consigam desenhar, representar e

construir sólidos, a partir de representações planas em diferentes posições. Portanto, é necessário entrosar competências como a imagem, o raciocínio visual e a visualização geométrico-espacial.

Há décadas, muitos pesquisadores vêm citando que a geometria foi abandonada pelo ensino no Brasil, e muitos são os motivos que tentam justificar esse cenário realista. Desde 1970 os professores de matemática têm mostrado preocupação em recuperar a aplicação da geometria na sala de aula do ensino médio (BICUDO, 2010).

Em 1995 aconteceu uma conferência com a temática “Perspectiva para o ensino da Geometria no século XXI na Itália”, em Catânia. Nesse evento foi discutido como deveria acontecer o ensino da geometria, tanto no aspecto didático, como em termos de conteúdo, e várias dessas recomendações foram adotadas pelos PCNs (BRASIL, MEC/SEF, 1997).

Com as reformas na área da educação, ocorridas nos anos de 1990, a LDB (Lei 9.394/96) determinou a formação de nível superior ao professor, e regia que os ensino fundamental e médio tivessem base comum, iniciando o PCN. Esse documento se referia a matemática como uma ferramenta capaz de interpretar o mundo, de modo a estimular o interesse, a curiosidade, e a capacidade de resolver problemas, devendo se estabelecer uma ligação entre a matemática e as demais disciplinas. Mesmo com a Coordenadoria de Estados e Normas Pedagógicas do Estado de São Paulo, na década de 1980, que visava a formação continuada de professores, a matemática trabalhava a aritmética e não frisava com ênfase campos como a geometria e a estatística (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2017).

É interessante que se aplique projetos e atividades de geometria no ensino médio, de maneira que desperte o interesse dos alunos e os prepare para avaliações que proporcione o ingresso a novos cursos, sejam eles de nível técnico ou superior, como vestibulares e similares.

Em seguida será mostrada a importância que existe na utilização das construções geométricas em sala de aula, que precisa superar a monotonia, e partir para um momento prazeroso com os alunos.

2.1.1 Conceituando a importância de utilizar as construções geométricas

As formas geométricas estão espalhadas por toda a parte, sendo comum na praxe do ser humano. Esse conceito precisa ser significativo e bem trabalhado na

sala de aula, sem que se limite a memorização de fórmulas, como é comum acontecer; pois, esse tipo de didática não apresenta bons resultados na educação matemática, que por sua vez, procura formar cidadãos críticos, autônomos e ativos na sociedade (MINATO, 2013).

Para Sobrinho e Cantuário (2016), o professor precisa ser bem qualificado, ter uma formação continuada que o permita trabalhar de forma inovadora, despertando no aluno um pensamento que lhe permita compreender, descrever e representar de maneira organizada o mundo em que ele vive. Saber organizar, tratar dados, e lidar com representações gráficas são alguns dos interesses nas aulas de matemática; importantes para que se possa entender áreas como a ciência, a química, a geometria molecular, física e cálculo de vetores.

É interessante que o professor trabalhe com situações-problema na educação matemática, atribuindo sentido ao conteúdo ensinado, e o fato de explorar objetos do mundo físico leva o aluno a estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, sem limitar seu conhecimento intelectual (MINATO, 2013).

Correa (2018) prediz que no ensino fundamental a geometria espacial é trabalhada com noções de espaços e formas, utilizando imagens como quadrado, círculo e triângulo; em seguida, no ensino médio são adotadas fórmulas algébricas e resoluções de exercícios, com conteúdos agregados anteriormente. É enriquecedor usar objetos sólidos com o espaço, e formas contidas no meio social, como pinturas, artesanatos, esculturas e similares, e não apenas apresentar figuras achatadas pertinentes a geometria plana em livros.

A geometria espacial permite que o aluno questione, pense de maneira lógica e espacial, e não fique preso ao uso de fórmulas. Elementos como a visualização, a construção e o raciocínio são essenciais nesse processo. Todavia, os métodos inerentes a resolução de problemas ainda são desconhecidos por muitos, e eles acabam sendo trabalhados isoladamente (SALIN, 2013).

Minato (2013) define que a geometria espacial pode ser ensinada através da modelagem matemática, de maneira a deixar o aspecto abstrato, partindo para o mundo concreto. No entanto, os alunos têm bastante dificuldade em interpretar, organizar e estabelecer estratégias para a resolução de problemas.

Contudo, provavelmente a geometria é a parte mais intuitiva, concreta e ligada à realidade, na disciplina da matemática, capaz de ativar as estruturas

mentais em seus experimentos, e os exercícios não devem acontecer de forma repetitiva, no interesse de que o aluno apenas os fixe.

Na sequência será mais bem desvendado a respeito da modelagem matemática, pertinente ao tema inicialmente proposto nesse trabalho em pauta, para melhor agregação do curso.

2.2 Modelagem Matemática

Foi através de uma reunião ocorrida na UNICAMP, em 1981, com professores de Cálculo, que se tornou perceptível a importância de trabalhar com modelagem matemática, tendo em vista, a deficiência entre a prática pedagógica e a participação efetiva do educador em seu cenário de atuação. A capacidade de criar novos recursos na sala de aula e aumentar o préstimo dos professores se limitava ao material didático, comumente fora da realidade do contexto (BASSANEZI, 2015).

Em 1982 na cidade de Guarapuava, aconteceu o primeiro curso de modelagem matemática através de um Programa de Aperfeiçoamento de professores, que abrangeu principalmente, docentes da rede de ensino fundamental e médio que tinham formação em Licenciatura Curta, na Universidade do Paraná. Posteriormente, foram realizados novos cursos similares a esse, que utilizava a modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem (BASSANEZI, 2015).

Tais cursos apresentaram melhoras na postura do professor e nos projetos de pesquisa de Biomatemática (mestrado e doutorado) sendo abordadas problemáticas e temas pertinentes a essa proposta de especialização (BASSANEZI, 2015).

A intenção dos educadores que buscam cursos de aperfeiçoamento, geralmente é progredir em sua prática na sala de aula, galgando explicações relacionadas a trigonometria e aos polinômios, além de seguir uma forma de avaliação tradicional junto aos alunos, advinda da escola aristocrática, já que ainda não conheceram outro tipo de processo avaliativo, sendo considerada uma falha no Brasil. É preciso se desvencilhar desse tipo de padrão e pautar outras questões mais relevantes, como a estrutura do ensino e a inserção da matemática em prol da sociedade (BASSANEZI, 2015).

Muitos dos cursos de matemática apontados como excelentes são desenvolvidos fora da realidade social, sendo na verdade programas antiquados que não atingem as expectativas dos profissionais que almejam melhorias na educação

matemática. Portanto, o ideal seria um programa inerente a valores cultural, utilitário, sociológico, político e estético (BASSANEZI, 2015).

Para Reinheimer, Dullius e Quartieri (2013), existe um caráter transformador na modelagem matemática, já que esse tipo de metodologia de ensino ajuda a construir o conhecimento no processo de aprendizagem significativa.

A matemática é essencial na formação dos sujeitos na aprendizagem, trata-se de uma ferramenta que será utilizada pela vida inteira, através da interpretação da estatística, das decisões direcionadas a economia, da participação no âmbito político e social; entretanto, a modelagem e a resolução de problemas facilitam essas premissas. A matemática também é apontada como um instrumento de trabalho, em que os alunos de todas as camadas sociais precisam ter acesso ao computador e a outras tecnologias comuns no mercado de trabalho (BASSANEZI, 2015).

Nessa mesma forma de pensamento, Pontes (2016) afirma que além de abranger a resolução de problema, uma atividade inerente a modelagem matemática, pode fazer uso da tecnologia na elaboração de uma tabela ou gráfico, mostrando que essa tendência pode ser muito proveitosa no meio educacional, se tornando um tipo de ensino transdisciplinar, pois, envolve outras áreas do conhecimento e relações sociais existentes. Isso mostra que a modelagem matemática não se restringe a um currículo definido, com conteúdos estabelecidos, mas que ela pode transformar a ignorância em sabedoria e o cidadão comum em um cidadão crítico.

Bragança (2009) compreende que manter a proximidade da modelagem com o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC) são imprescindíveis para a aproximação do trabalho com projetos, facilitando o processo de pesquisa, análise dos dados e resultados.

A ação pedagógica eficiente tem utilizado a modelagem matemática em sua prática, e todo tipo de modelo não se finaliza numa verdade definitiva, pois está sujeito a mudanças, ou seja, é dinâmico. É um desafio para o professor tomar a modelagem como método de ensino, ajudando o aluno a entender, construir relações matemáticas importantes em cada etapa do processo. Utilizar esse tipo de recurso nas etapas da aprendizagem pode tornar as aulas de qualquer etapa, mais agradáveis e atraentes, mas é comum os professores temerem algum tipo de situação embaraçosa nesse tipo de aplicação, e pela falta de confiança não adotarem a modelagem (BASSANEZI, 2004).

Outros obstáculos que não permitem a inserção da modelagem é a programação a ser colocada em prática; a formação heterogênea da sala de aula; o medo do professor sair da zona de conforto e similares, complementa Bragança (2009).

Burak (2004) escreve que faz parte do desenvolvimento do trabalho com a modelagem, a escolha do tema; a pesquisa exploratória; o levantamento dos problemas; a resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática condizente ao tema; e a análise da crítica das soluções. Utilizar temas escolhidos pelo grupo, torna o trabalho mais dinâmico, vivo e significativo aos alunos, favorecendo a ação investigativa, e deve levar em conta os conhecimentos que os mesmos já possuem.

São distintas as origens da matemática na sociedade, onde cada grupo utiliza uma lógica formal e deve ser respeitada na escola, tais culturas e conhecimentos do aluno (BASSANEZI, 2015).

Bassanezi (2004) afirma que os objetivos da modelagem é despertar a criatividade e capacidade de resolver problemas, inclusive em diferentes áreas e cenários; desencadear o espírito crítico.

O programa curricular das escolas é insuficiente em sua forma de ensino, pois deveriam adotar hipóteses e resultados prévios para melhorar sua qualidade. A modelagem é capaz de criar modelos estratégicos interligados à realidade do aprendiz, seu contexto social, político, econômico e cultural similar ao conhecimento etnomatemático em situações-problema (BASSANEZI, 2015).

O aspecto estético da matemática tem diferentes olhares no ambiente escolar, pois, alguns apreciam os jogos, outros, a arte e a geometria aplicada disponibilizam esses encontros com a natureza (BASSANEZI, 2015).

Bragança (2009) conceitua que a modelagem é capaz de resultar em um ambiente descontraído, prazeroso, cooperativo, um ambiente de permuta de saberes, colaboração e interação, através de problematizações, investigações e diálogo.

Correa (2018) concorda que expressar situações-problemas da rotina do aluno é uma das habilidades da modelagem matemática, que adota uma prática metodológica com técnicas e estratégias diferenciadas, que facilita a aprendizagem dos alunos e supre suas necessidades. No entanto, é preciso levar em conta o meio de convivência de todos, ou seja, vincular a educação matemática ao contexto

sociocultural de sua região, vocabulário, e outros elementos que influem diretamente na aquisição de novos saberes.

A modelagem matemática é uma tendência na educação matemática e tem como intuito descobrir soluções em problemas reais, no meio social e cultural em que os aprendizes vivem, facilitando as etapas da aprendizagem, dando abertura a participação de todos. Trata-se de um momento em que a construção dos conceitos e dos conhecimentos matemáticos são vivenciados pelos alunos, em que se rompe os obstáculos do ensino tradicional (MINATO, 2013).

Bragança (2009) alega que a modelagem matemática na educação é apontada como uma prática educativa que proporciona um ambiente de aprendizagem que valoriza as experiências dos estudantes e propõem novas experiências no processo de busca e produção do conhecimento. Trata-se de um método pedagógico que requer como base, uma observação da realidade, ensejo em que se busca compreender através da matemática, processos e situações, inclusive como se deve agir sobre os mesmos.

É interessante que o professor trabalhe com situações-problema na educação matemática, atribuindo sentido ao conteúdo ensinado, e o fato de explorar objetos do mundo físico leva o aluno a estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, sem limitar seu conhecimento intelectual (MINATO, 2013).

Esse tipo de estratégia de aprendizagem sistematiza e aplica conteúdos matemáticos, e tende a ser um modelo bem sucedido; ocasião em que os alunos são convidados a investigar e indagar através da matemática, situações complexas de outros campos da realidade. Premissas como a motivação; o desenvolvimento de habilidades diversas; interação dos estudantes; mudança na postura do aluno e do professor; melhorias entre a relação ensino e pesquisa e transformação curricular, são alguns dos argumentos da modelagem na educação (BRAGANÇA, 2009).

Em seguida, o próximo capítulo descreverá a atividade de geometria que foi colocada em prática no ensino médio, numa complementação a teoria aplicada até o momento, partindo para um experimento em sala de aula.

CAPÍTULO 3 - ATIVIDADES DE GEOMETRIA DESENVOLVIDAS NA SALA DE AULA DO ENSINO MÉDIO

Levando em consideração as metas de aprendizagem norteadas pelo Ministério da Educação, aderidas nos PCNs, fora realizada uma proposta de trabalho aos alunos do ensino médio, dentre as tantas possibilidades que poderiam ser aderidas e adequadas nessa disciplina.

O trabalho foi desenvolvido em 4 (quatro) etapas no decorrer do segundo bimestre de 2019, totalizando 36 (trinta e seis) aulas com duração de 50 (cinquenta) minutos cada aula, junto aos 20 (vinte) alunos da 2ª série do Ensino Médio.

3.1 Etapa 1: Introdução dos Conceitos Básicos de Geometria

1- TEMA:

Introdução dos Conceitos Básicos de Geometria

2- OBJETIVOS:

Retomar o conteúdo dos conceitos básicos de geometria plana, que abrange os conceitos como, ponto, reta, plano, ângulos, número de lados de uma figura plana, número de vértices, identificação de figuras, ângulo interno, soma dos ângulos internos e externos, áreas de polígonos e perímetro.

Conceituar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono.

3- PROCEDIMENTO METODOLÓGICO:

Apresentar-se-á durante 3 (três) aulas teóricas o conteúdo dos conceitos básicos de geometria e 1(uma) aula prática conceituar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono.

Durante a aula cada aluno recebeu uma folha sulfite, régua e transferidor.

4- ATIVIDADE

Em sala a professora solicitou aos alunos que desenhassem um triângulo qualquer, em seguida que medissem os três ângulos internos da figura desenhada e, realizassem a soma dos ângulos internos. Dessa forma, concluíram que a soma dos ângulos internos de um triângulo equivale a 180° .

Em continuidade à atividade, foi determinado que:

- Desenharem um quadrilátero, um pentágono e um hexágono;
- De um único vértice, traçassem todas diagonais possíveis para cada figura desenhada;
- Verificassem a relação entre o número de lados e a quantidade de triângulos formados no interior de cada figura, ou seja, que o número de lados, subtraídos de duas unidades, corresponde ao número de triângulos formados.

Portanto, os alunos concluíram que a fórmula dos ângulos internos de qualquer polígono é $S_n = (n-2).180^\circ$, sendo n o número de lados.

3.2 Etapa 2 – Identificação de Figuras Planas

1- TEMA:

Identificação de figuras planas

2- OBJETIVOS:

- Identificar e classificar uma figura plana;
- Compreender o número de lados e vértices;
- Calcular a soma dos ângulos internos, a área da figura plana, a área da folha retangular (tapete).

3- PROCEDIMENTO METODOLÓGICO:

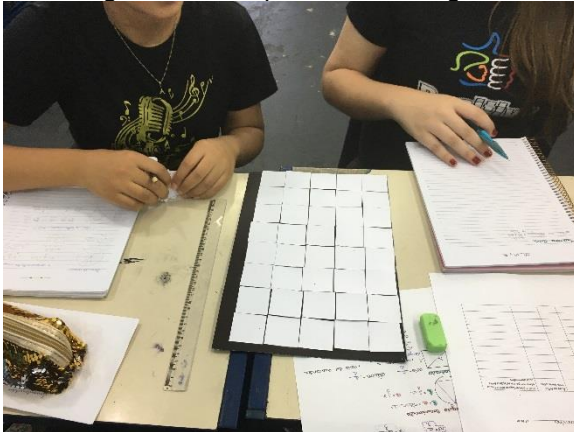
A atividade foi realizada em dupla, durante 4 (quatro) aulas práticas, sendo entregue uma folha contendo as informações do Anexo 1, uma folha retangular (tapete) de dimensão 33cmx22cm e um envelope contendo 50 (cinquenta) de cada uma das seguintes figuras planas: triângulo equilátero, triângulo retângulo, quadrado, retângulo, trapézio isósceles, losango, pentágono regular, hexágono regular, círculo, setor circular.

Além dos materiais descritos, utilizaram como recurso um caderno, uma régua e uma calculadora.

4- ATIVIDADE

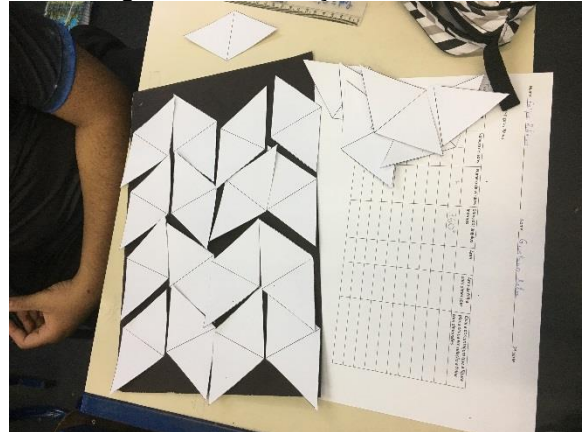
Em sala a professora orientou as duplas a preencherem o tapete com as figuras que eles possuíam e que analisassem qual a porcentagem que cada conjunto de figuras da mesma forma ocupava no tapete.

Figura 76: Compreensão das figuras



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 77: Finalização da atividade



Fonte: Elaborado pela autora

No decorrer da atividade algumas dúvidas surgiram em relação ao cálculo da área do pentágono regular e do hexágono regular. Para sanar as dúvidas foi lembrado que os alunos deveriam:

- traçar todas as diagonais;
- observar por qual figura plana se formou, momento em que eles identificaram que o pentágono regular era formado por 5 (cinco) triângulos isósceles, enquanto o hexágono regular era formado por 6 (seis) triângulos equiláteros;

Após realizar os passos descritos os alunos conseguiriam calcular a área de cada figura.

3.3 Etapa 3: Poliedros

1- TEMA:

Poliedros

2- OBJETIVOS:

Conceituar a respeito dos poliedros, a Relação de Euler, poliedros regulares, prisma, cilindro, pirâmide e cone.

- Identificar e nomear o poliedro;
- Compreender por quais e quantas figuras planas o formavam;
- Numerar a quantidade de faces, de vértices e arestas;
- Utilizar a Relação de Euler.
- Calcular área e o volume dos poliedros.

3- PROCEDIMENTO METODOLÓGICO:

Ao todo foram ministradas 26 (vinte e seis) aulas, sendo: 20 (vinte) aulas teóricas e 4 (quatro) aulas práticas.

Nas aulas teóricas abordou-se o conceito de poliedros, a relação de Euler e os poliedros regulares. Por fim, estudou-se o prisma, o cilindro, a pirâmide e o cone, apresentando suas características, suas áreas e seus volumes.

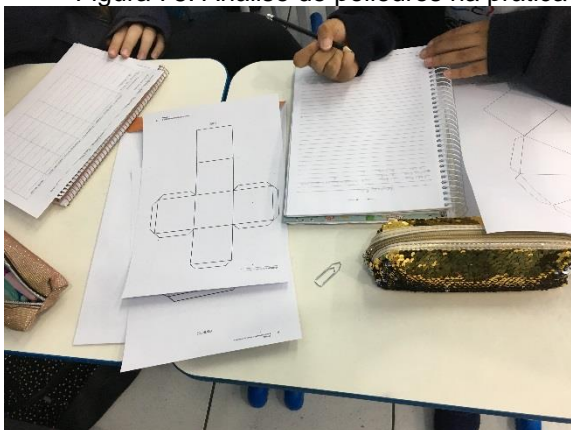
Nas aulas práticas, os alunos receberam uma folha contendo as informações do Anexo 2 e as planificações de alguns poliedros, devendo preencher o anexo de acordo com as planificações.

Para a realização das atividades descritas, cada aluno dispôs de caderno, régua e calculadora.

4- ATIVIDADE:

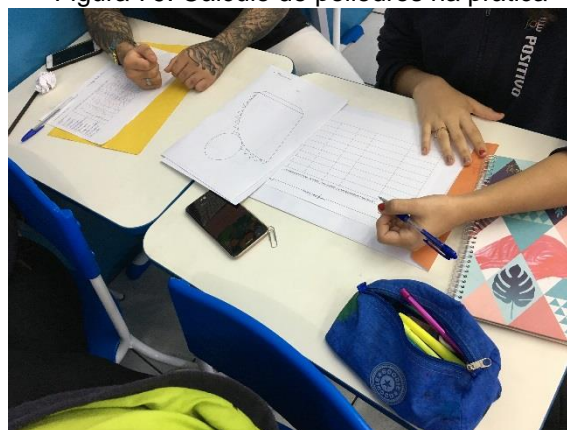
Em sala a professora orientou as duplas que eles deveriam analisar as planificações e preencher o Anexo 2 ao preencherem os mesmos deveriam calcular a área dos poliedros.

Figura 78: Análise de poliedros na prática



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 79: Cálculo de poliedros na prática

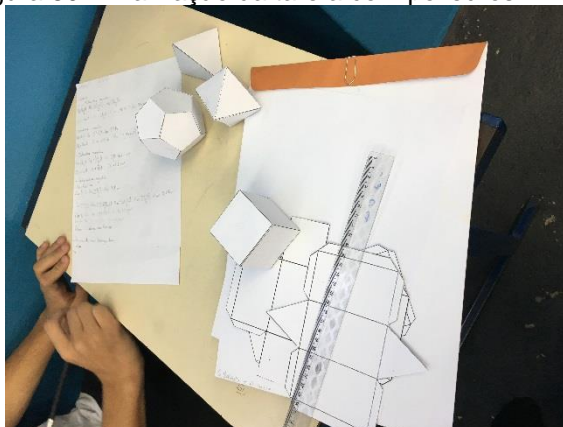


Fonte: Elaborado pela autora

Depois do preenchimento do Anexo 2 e do cálculo da área, foi orientado que:

- Montassem as planificações, deixando uma base aberta;
- Observar dentro da figura, se conseguia colocar algo dentro da figura;
- Calcular o volume dos poliedros.

Figura 80: Finalização da tarefa com poliedros



Fonte: Elaborado pela autora

No decorrer das atividades, os alunos conseguiram compreender a diferença entre uma figura bidimensional e uma figura tridimensional.

3.4 Avaliações

Para finalizar a tarefa em pauta, aconteceu uma avaliação teórica e uma avaliação prática, realizada em duas aulas de 50 minutos cada, para melhor compreensão dos efeitos do conteúdo transmitido até então. Para a realização das avaliações, cada aluno dispôs de caderno, régua e calculadora.

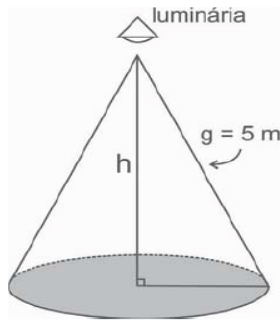
3.4.1 Avaliação Teórica

1- (UFRS) Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. O número de arestas e de vértices do poliedro é:

2- (FUVEST – SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide, 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1m^2 . Supondo

que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), qual o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado?

3- (ENEM 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26\text{m}^2$, considerando $\pi(\text{pi}) = 3,14$, a altura h será igual a:

4- (Unicamp – 2014) Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura duplicada, o volume do cilindro:

- a) É reduzido em 50%
- b) Aumenta em 50%
- c) Permanece o mesmo
- d) É reduzido em 25%

5- (VUNESP) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço. Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3m e que a altura da pirâmide será de 4m, qual é o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide?

3.4.2 Avaliação Prática

Na avaliação os alunos foram orientados a calcular a área e o volume das embalagens trazidas por eles, por exemplo: embalagem de creme dental, lata de achocolatado, bastão de cola, e similares. Esse pedido foi feito para que os alunos observassem que as construções geométricas estão presentes no nosso dia a dia.

Figura 81: Avaliação prática 1



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 82: Avaliação Prática 2



Fonte: Elaborado pela autora

3.4.3 Conclusão das Avaliações

Apesar de os resultados apresentados na avaliação teórica não terem superados as expectativas, devido à dificuldade de interpretação; a avaliação prática foi satisfatória, pois os educandos desenvolveram os cálculos corretamente, utilizando embalagens de produtos consumidos nos seus próprios cotidianos, facilitando o processo da tarefa e o interesse pela aula.

Enfim, se tornou perceptível, o fato de que os alunos atingiram melhor conhecimento e aprendizagem, na prática, superando a avaliação limitada à teoria.

CAPÍTULO 4 - TRABALHOS FUTUROS E CONCLUSÃO

4.1 Trabalhos Futuros

As atividades futuras que podem ser praticadas em sala de aula seriam: preencher uma caixa de papelão (daquelas de supermercado, de medidas ____x____) com figuras geométricas que também estão no supermercado como, por exemplo, laranjas, caixas iguais de sabão em pó, latas de leite condensado e após preencher a caixa calcular o volume ocupado pelo objeto, o volume da caixa e depois calcular a proporção do volume dos objetos em relação à caixa. Esta etapa concluída, propõe-se fazer uma reflexão com os alunos sobre qual dos objetos é melhor para preencher a caixa.

Uma outra atividade é propor aos alunos abrirem as caixas e observar o objeto contendo três dimensões (comprimento, largura e profundidade) passando para duas dimensões (comprimento e largura). Aqui salientar que desta forma também são feitos os filmes de 2D para 3D.

4.2 Conclusão

Conclui-se como este trabalho que é importantíssimo modificar as aulas de matemática para assim retirar essa disciplina essencial na formação do cidadão do posto de vilã de ensino.

Em particular, a geometria fornece ao aluno a capacidade de visualizar, aumentar a sua percepção da realidade. Através da geometria é possível relacionar o abstrato ao concreto (por exemplo, o cálculo do volume do sorvete em uma casquinha e a degustação do mesmo).

Assim, esse trabalho apresentou os conceitos matemáticos que seriam usados, os preceitos da modelagem matemática que promovem a ligação do pensamento abstrato da matemática e a realidade do estudante. Finalizou – se esse trabalho com praticas aplicadas em sala de aula.

Estas atividades foram muito relevantes e importantes para os alunos e a professora, pois para os primeiros possibilitou – se uma nova visão da matemática e para mim, docente, uma nova prática para ensinar matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, Luciano Bráulio Caetano de. **Ensinando geometria plana na EJA**. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional – Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160280243> Acesso em: 15 jul. 2019 22h02min.

BASSANEZI, Carlos. **Modelagem matemática: teoria e prática**. Rio de Janeiro: FGV, 2015.

BASSANEZI, Rodney C. **Modelagem Matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. Campinas: Unicamp - IMEECC, 2004. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~rodney/>>. Acesso em: 8 jan. 2020. 23h59min.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

BRAGANÇA, Bruno. **Modelagem matemática na educação: compreensão e significados**. Belo Horizonte, MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2009. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/cp120597.pdf>>. Acesso em: 10 jan. 2020 14h12min.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+). Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Parte III. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 25 out. 2019 23h59min.

_____. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em: 20 out. 2019 18h15min.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ensino Médio. Parte I - Bases Legais Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>> Acesso em: 22 out. 2019 22h01min.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática e a sala de aula**. Ponta Grossa: UEPG, 2004. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_pdp_liliane_tonial.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2020 00h18min.

CALDEIRA, Ana Maria de Andrade (org.). **Ensino de ciências e matemática, II: temas sobre a formação de conceitos**. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2009. Disponível em: <<http://books.scielo.org/id/htnbt/pdf/caldeira-9788579830419.pdf>>. Acesso em: 01 nov. 2019 22h15min.

CONCEITOS básicos de geometria. Disponível em: <C> Acesso em: 20 out. 2019 19h19min.

CORREA, Delliene da Silva; OLIVEIRA, Geyce Magalhães de; NASCIMENTO, Lucas Morais do. **Modelagem matemática na construção de figuras geométricas espaciais**. Cascavel, PR: VIII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, out. 2018. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/viiiiepmem/Caderno_Resumos.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2020 03h58min.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único. São Paulo: Ática, 2005.

EINSTEIN, Albert. **Frases interessantes sobre a matemática**. Disponível em: <<https://mensagens.culturamix.com/frases/frases-interessantes-sobre-a-matematica>> Acesso em: 30 jan. 2020 14h24min.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Kátia Regina Ashton. **Matemática: práticas pedagógicas para o ensino médio**. Porto Alegre: Artmed, 2012.

GARCIA, Antonio Carlos. **Geometria analítica: resolvendo problemas**. São Paulo: Clube de Autores, 2015.

GIGANTE, Ana Maria Beltrão; SANTOS, Monica Bertoni dos; ilustrações de Eloar Guazzelli. **Práticas pedagógicas em matemática: espaço, tempo e corporeidade**. Erechim: Edelbra, 2012.

LOPES, Francinilda Alves. **Como trabalhar geometria no 9º ano do ensino fundamental**. Disponível em: <<https://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/matematica/como-trabalhar-geometria-no-9-ano-ensino-fundamental.htm>>. Acesso em: 25 out. 2020 18h02min.

MINATO, Dayse Anne Dalmagro. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Produções Didático-Pedagógicas. Paraná: Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, 2013. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unioeste_mat_pdp_dayse_anne_dalmagro_minato.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2020 02h11min

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglione. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Rio de Janeiro: Autêntica, 2017.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria** - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NINA, Clarissa Trojack Della [et al]. PORTANOVA, Ruth (org.). **Um currículo de matemática em movimento**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.

OLIVEIRA, Liliane Lelis de; VELASCO, Angela Dias. **O ensino da geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá**. Revista Graphica de Curitiba, 2007, 9 flhs. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/OENSINO.pdf>. Acesso em: 01 nov. 2019 19h32min.

PONTES, Helaine Maria de Souza; BURAK, Dionísio. **10 Modelagem Matemática na Educação Básica: uma experiência vivida**. In: BRANDT, C. F., BURAK, D., and KLÜBER, T. E., orgs. Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]. 2nd ed. rev. and enl. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, pp. 183-200. Disponível em: <<http://books.scielo.org/id/b4zpq/epub/brandt-9788577982325.epub>> Acesso em: 25 jan. 2020 14h59min.

REINHEIMER, Jeison Rodrigo; DULLIUS, Maria Madalena; QUARTIERI, Marli Teresinha. **O uso da Modelagem Matemática no ensino da Geometria – Estudo de Caso: EJA**, 2013. Disponível em: <<https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/244/1/JeisonRodrigo.pdf>> Acesso em: 21 jan. 2020 21h15min.

RIGONATTO, Marcelo. **Ensino da geometria**. Disponível em: <<https://educador.brasilecola.uol.com.br/trabalho-docente/ensino-geometria.htm>>. Acesso em: 03 nov. 2019 02h57min.

SALIN, Eliana Bevilacqua. **Geometria Espacial: a aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas**. Florianópolis, SC: Revemat, 2013, v.08, n.2, p.261-274. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p261>> Acesso em: 21 jan. 2020 14h12min.

SOBRINHO, Jalauenne dos Santos; CANTUÁRIO, Marcivaldo Santos. **Modelando as embalagens: uma aplicação em sala de aula**. São Paulo: Encontro Nacional de Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5950_3660_ID.pdf> 25jan. 2020 10h44min.

VIANA, Odaléa Aparecida. **Conhecimentos prévios e organização de material potencialmente significativo para a aprendizagem da geometria espacial**. Ciência Cognitiva, vol.16, n.3. Rio de Janeiro, dez. 2011. Disponível em: <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-58212011000300003> Acesso em: 02 nov. 2019 18h03min.

