Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Fernando Montanaro Paiva de Almeida

Trabalhando com bolas e intervalos: uma abordagem introdutória da Topologia

Orientador:

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

Natal - RN

Março de 2020

Fernando Montanaro Paiva de Almeida

Trabalhando com bolas e intervalos: uma abordagem introdutória da Topologia

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

Natal - RN
Março de 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Almeida, Fernando Montanaro Paiva de.
Trabalhando com bolas e intervalos: uma abordagem introdutória da topologia / Fernando Montanaro Paiva de Almeida. - 2020.
81f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2020.
Orientador: Jaques Silveira Lopes.

1. Topologia - Dissertação. 2. Bolas - Dissertação. 3. Intervalos - Dissertação. 4. Espaços métricos - Dissertação. I. Lopes, Jaques Silveira. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 519.115.5

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Trabalhando com Bolas e Intervalos: Uma abordagem introdutória da Topologia

Fernando Montanaro Paiva de Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 23 de março de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes (Orientador)
UFRN

Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes
UFRN

Prof. Dra. Rainelly Cunha de Medeiros
IFRN

Natal - RN
Março de 2020

Dedico este trabalho a Deus, que sempre olha por mim em todas as graças e provações pelo que passo; e ao meu pai, que mesmo num plano superior, tenho certeza que continua me guiando pelos melhores caminhos e tendo orgulho da pessoa que sou hoje pelos ensinamentos que ele me deu em vida.

Agradecimentos

Agradecer a Deus, pois ele é o início, o meio e o fim de tudo. É dele que sempre tiro forças pra erguer a cabeça nas horas difíceis e pedir calma e clareza nas horas de dúvida.

Em seguida, agradecer às duas mulheres da minha vida: minha mãe Fátima, e minha esposa Lindayane. Obrigado por sempre estarem ao meu lado, nos momentos bons e ruins, e me orientar e me apoiar nas decisões que tomo. Sou uma pessoa melhor a cada dia com o convívio de vocês duas em minha vida.

Agradeço a meus amigos de Profmat, por todas as experiências trocadas, momentos de estudos, de ajuda mútua e descontração. Que todos tenham sucesso nas suas vidas e em suas carreiras.

Agradeço também à todo corpo docente do Profmat, por todos os ensinamentos transmitidos, a preparação para o Exame Nacional de Qualificação, sempre com excelência no que se destinaram a fazer. Em especial, um agradecimento ao meu orientador Jaques Silveira Lopes, por todo tempo, atenção e ajuda dada para a elaboração deste trabalho.

Agradeço também a meus amigos e familiares, que me apoiaram nesse mestrado, entendendo minhas ausências em compromissos e me incentivando a chegar no patamar que hoje estou.

"Aonde fica a saída?"
Perguntou Alice ao gato que ria.
"Depende", respondeu o gato.
"De quê?", replicou Alice;
"Depende de para onde você quer ir..." '
Alice no país das maravilhas - Lewis Carroll

Resumo

Topologia é um ramo da Matemática que estuda as características e propriedades de objetos e formas que são mantidas mesmo quando estes são submetidos a deformações. Desenvolvida a partir de necessidades que não eram atendidas apenas com conhecimentos de Geometria e aperfeiçoada com o passar do tempo com descobertas de vários matemáticos renomados, este ramo é comumente visto no ensino superior. Porém, a seguinte dissertação foi desenvolvida com o intuito de apresentar, de uma maneira introdutória, tópicos de Topologia Matemática que podem ser tratados e potencializados no ensino médio, considerando as limitações de saberes aplicadas ao nível de ensino - como a ideia de intervalos - e os conhecimentos já aprendidos durante a jornada estudantil. Para tal, serão apresentadas maneiras de introduzir ideias de Topologia, como o conceito de bolas e esfera, por intermédio de conceitos já vistos pelos alunos, aliando-se também a exemplos concretos que podem ser encontrados no seu cotidiano. Entendemos que o domínio de certos conhecimentos da Topologia de Espaços Métricos traz um maior conforto no trato das minúcias de modelos matemáticos que envolvam a reta e o plano. Aqui, a noção de métrica é abordada de maneira bastante intuitiva, uma vez que os alunos já estão habituados com a noção de distância entre dois pontos, seja na reta ou no plano.

Palavras-chave: topologia, espaços métricos, bolas, intervalos.

Abstract

Topology is a branch of mathematics that studies the characteristics and properties of objects and shapes that are maintained even when they are subjected to deformations. Developed from needs that were not answered only with knowledge of Geometry and improved over time with the discoveries of several renowned mathematicians, this branch is commonly seen in higher education. However, the following thesis was developed in order to present, in an introductory way, topics in Mathematical Topology that can be treated and enhanced in high school, considering the limitations of knowledge applied at the level of education - such as the idea of intervals - and the knowledge already learned during the student journey. To this end, ways will be presented to introduce Topology ideas, such as the concept of balls and spheres, through concepts already seen by the students, allying themselves with concrete examples that can be found in their daily lives. We understand that the mastery of certain knowledge of the Topology of Metric Spaces brings greater comfort in dealing with the minutiae of mathematical models involving the line and the plane. Here, the notion of metrics is approached in a very intuitive way, once students are already used to the notion of distance between two points, either on the straight or on the plane.

Keywords: Topology, metric spaces, balls, intervals.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

É durante o Ensino Fundamental que inicialmente estudamos alguns aspectos sobre Geometria: vemos a ideia de Geometria Plana, onde aprendemos o conceito de polígonos e suas características, como número de lados, áreas e propriedades comuns para figuras que sejam semelhantes entre si. Mais adiante, aprofundamos mais os estudos e entramos no mundo da Geometria Espacial, agora para figuras em três dimensões chamadas poliedros, os quais também possuem propriedades próprias para objetos semelhantes. Por fim, estudamos o que chamamos de Geometria Analítica, onde pontos, retas e planos começam a fazer parte do conteúdo escolar dos alunos.

Durante todo esse caminho feito através da Geometria durante a formação escolar, nos deparamos com ideias e propriedades de objetos que estimulam a interação do aluno com o meio em que está inserido, sejam polígonos, poliedros ou planos cartesianos. A Geometria baseia-se em objetos concretos, podendo então, de acordo com Piaseski (2010, p. 20), contribuir "para o desenvolvimento do raciocínio e permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive sendo essencial na formação do individuo". Entretanto, como Silva (2017, p. 9) cita em seu trabalho:

> "O excesso de formalismo nos conceitos e definições na Geometria Plana Euclidiana, bem como na Geometria Espacial Euclidiana e na Geometria Analítica Plana, contriui, de forma significativa, para um baixo nível de aprendizagem por torná-las enfadonhas."(SILVA, 2017, p. 9)

Além disso, em Geometria, temos figuras imutáveis, que não sofrem nenhum tipo de alteração e/ou deformação. Desde o surgimento da Geometria, com o passar do tempo surgiram problemas que necessitavam de algo a mais que a própria Geometria para a sua solução. O problema das pontes de Königsberg que analisa se era possível passar uma única vez por cada uma das sete pontes de uma cidade, fazendo um único caminho, e problemas com superfícies fechadas são exemplos de fatos que a Geometria conhecida até o momento não era capazes de responder, fazendo assim com que nesse período fossem necessários novos estudos que aprofundassem mais as ideias já conhecidas. A partir dessa necessidade, foram surgindo teorias que dão suporte ao que hoje conhecemos como Topologia.

A Topologia pode ser definida como a área que estuda as propriedades de objetos que possam ser deformados, sem que suas características intrínsecas sejam alteradas.

Vilches APUD Silva (2018, p. 14) reforça que "ela utiliza os mesmos objetos que a Geometria, mas independente da distância, medida dos ângulos e configuração dos pontos". Possivelmente por se tratar de um ramo mais específico, esse tema não é trabalhado com a devida atenção no Ensino Básico. Entretanto, uma solução seria a utilização de atividades que envolvessem objetos e situações concretas, despertando o interesse e o conhecimento de quem a vive. João Carlos Sampaio em sua obra "Topologia Geométrica"trabalha com elementos da Topologia para leitores que não tenham um nível universitário, de uma forma mais simples e acessível, onde "a simplicidade no tratamento dos conteúdos prevaleceu sobre a abrangência de temas e o rigor matemático"(Sampaio, 2008, p. 12).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000, p. 119), o ensino da Matemática deve se basear em "seu potencial explicativo, que permite ao aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação a fatos e questões desse mundo". Como já foi dito, a Topologia pode ser estudada com objetos e situações concretas, baseadas em estudos e teoremas que podem ser apresentados de uma forma mais prática a quem se interessar. Sendo assim, este trabalho pretende apresentar para o Ensino Médio tópicos da Topologia que possam ser úteis em sala de aula, através de exemplos práticos e acessíveis ao nível de escolaridade a que se destina. Para isso, é necessário introduzirmos alguns tópicos que serão utilizados para explicar conceitos topológicos.

Para o fim a que se destina, este trabalho foi organizado da seguinte forma: no capítulo 1, é feita uma breve contextualização histórica, falando sobre alguns matemáticos que deram contribuições importantes para o que hoje podemos chamar de Topologia, desde o surgimento do próprio termo "Topologia"até a obra de Felix Hausdorff, que conseguiu compilar as ideias descobertas até então numa nova teoria. No capítulo 2, revisaremos alguns tópicos vistos no Ensino Médio, além de uma noção básica de limites, que servirá como suporte para os conceitos vistos em sequência. Ideias sobre conjuntos, funções e intervalos fornecerão uma base para o melhor entendimento dos tópicos sobre Topologia que serão vistos. No capítulo 3, entraremos na Topologia propriamente dita, trabalhando a ideia de métricas, bolas, intervalos e conjuntos. De uma forma didática e para entendimento de um aluno de Ensino Médio, explicaremos alguns termos topológicos com base nas ideias vistas no capítulo anterior. Por fim, no capítulo 4 veremos algumas aplicações de ideias de Topologia que podem ser utilizadas no Ensino Médio, assim como a importância de serem vistas nesse nível de ensino.

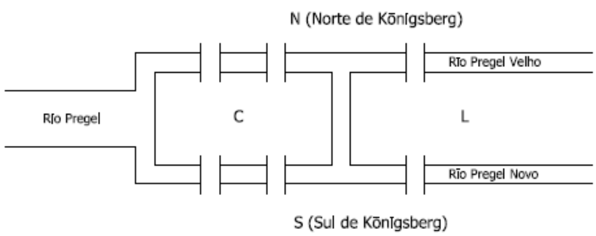
1 Alguns Aspectos Históricos

1.1 O Início

Desde seu surgimento no Egito, Babilônia e posteriormente na Grécia, a Geometria se preocupou em estudar propriedades de objetos e formas imutáveis. De acordo com Piaseski (2010, p. 8), o estudo da Geometria começou baseando-se em formas e meios de delimitação de terrenos - uma vez que inclusive seu nome significa "medida da Terra"(do grego, *Geo* = terra, + *metria* = medida) - cálculos de áreas e volumes, passando por atividades ligadas à agricultura até chegar ao momento de tratá-la como ciência de natureza lógica e dedutiva, com teoremas e demonstrações, através dos estudos de Euclides, Tales, Pitágoras, entre outros.

Porém, com o passar do tempo, surgiu a necessidade de se estudar objetos e formas que podiam ser deformados, mas mesmo assim manteriam suas propriedades; assim alguns matemáticos começaram a produzir trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento de um novo ramo da Matemática. Gottfried von Leibniz (1646-1716) usou o termo *"geometria situs"* para essa nova abrangência matemática, que já tinha como um resultado significativo a propriedade sobre o número de vértices (v), arestas (a) e faces (f) dos poliedros fechados simples ($a + f = v + 2$), descoberta por René Descartes (1596-1650) e provada por Leonhard Euler (1707-1783), levando hoje o seu nome. Euler também havia contribuido para esse novo ramo em um trabalho sobre grafos lineares baseado no problema das pontes de Königsberg, o qual Silva (2018, p. 22) explica em seu trabalho que esse problema consistia em descobrir se era possível traçar um caminho contínuo, passando uma única vez por cada uma das sete pontes da cidade de Königsberg, hoje conhecida como Kaliningrado, retornando ao ponto de partida ao final do percurso.

Figura 1.1: Esquema do problema das pontes de Königsberg



Fonte: Produzido pelo autor

Tais pontes ligavam quatro regiões da cidade, simbolizadas pelas letras N, C, L e S. Em seus estudos, Euler concluiu que tal problema não dependia das distâncias entre as regiões, mas sim de como elas estavam ligadas, e provou que o problema não havia solução, uma vez que para tal, cada área de terra deveria ter um número par de saídas (pontes), o que não se observa na figura 1.1. De acordo com Sampaio (2008, p. 16), o matemático "fez uso de conceitos e raciocínios matemáticos que mais tarde evoluíram para a moderna teoria dos grafos", conteúdo importante principalmente para o estudo de redes.

Além dele, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também contribuiu na elaboração da demonstração do teorema fundamental da Álgebra, o qual foi sua tese de doutorado, que afirma que todo polinômio de coeficientes complexos com grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa. Esse trabalho serviu de alicerce para trabalhos futuros de alguns de seus alunos que se aprofundaram em temas de Topologia, como Listing, Riemann e Möbius.

1.2 A contribuição alemã e a Topologia Algébrica de Henry Poincaré

Em meados do século XIX, estudiosos como Johann Benedict Listing (1808-1882), Bernhard Riemann (1826-1866) e August Ferdinand Möbius (1790-1868) - três alunos de Gauss - produziram grandes obras as quais precisavam de um ramo aliado a Geometria que tratasse do estudo desses corpos que sofrem deformações, mas mesmo assim mantém suas propriedades, o que hoje conhecemos como o estudo da Topologia, mas que até aquele momento não existia um nome para tal. Bergamini (1969, p. 176 APUD Müller e Baier, 2014, p. 1) conceitua Topologia como "tipo especial de geometria, relativo às maneiras pelas quais as superfícies podem ser torcidas, empenhadas, puxadas, estendidas e sofrer outras deformações, de uma aparência para outra." A Topologia (do grego *Tópos* = lugar, e *lógos* = tratado), desde sua criação, tratou de estudar as deformações de objetos, isométricas ou não, e as propriedades que não se alteram com tais deformações. Tal termo foi primeiramente introduzido de forma oficial na obra do alemão Listing, condendorado doutor em 1834 pela renomada Universidade de Göttingen, na Alemanha, chamada *Vorstudien zur Topologie* (Estudos Preliminares Sobre Topologia, tradução do autor), publicada em 1847. Como o próprio nome da obra remete, havia um trabalho preliminar sobre a Topologia, a qual o próprio descreveu da seguinte forma:

> "Por topologia, entenda-se a doutrina das características modais dos objetos, ou das leis da conexão, da posição relativa e da sucessão de pontos, linhas, superfícies, corpos e suas partes, ou agregados no espaço, sempre desconsiderando questões de medida ou quantidade."(Listing, 1851, APUD O'Connor e Robertson, 2000)

Figura 1.2: Johann Benedict Listing

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Listing.jpeg

Entretanto, esta não foi a primeira vez o que o termo foi usado pelo autor. Durante uma viagem sobre estudos em Física e Geologia, a qual foi convidado por um colega seu, Listing estudava matemática em seu tempo livre, e seus resultados foram enviados em uma carta para um antigo professor da escola. Nessa carta, datada de 1836, usou o termo "Topologia"justificando-se dizendo que não gostava da expressão que era até então utilizada, e considerou o termo que usou mais apropriado para a doutrina que ali se estabelecia.

Após isso, em 1858, Listing volta a contribuir com a Topologia, descobrindo praticamente as mesmas propriedades que Möbius descobriu com seu trabalho da Fita de Möbius. Além disso, também estudou sobre Euler e sua fórmula para poliedros tridimensionais, agora abrangindo-a para números complexos.

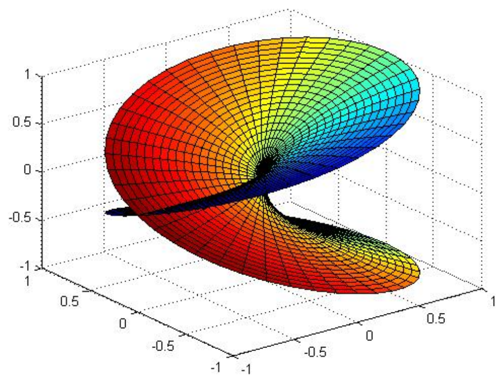
Apesar da contribuição que o alemão Listing deu aos estudos da Topologia, deve-se a Riemann, outro alemão, o primeiro grande trabalho sobre Topologia, em 1851, no qual se baseou sua tese de doutorado. Tendo estudado nas Universidades de Göttingen e de Berlim, ambas na Alemanha, seus trabalhos chamaram a atenção de alguns dos melhores matemáticos alemães, alavancando assim seu nome no hall dos melhores matemáticos, e o de Göttingen como um renomado centro pesquisa em Matemática do mundo.

Figura 1.3: Bernhard Riemann

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Riemann_2.jpeg

De acordo com Lima (2015, p. 61), em sua tese, "Riemann incorpora a Topologia à teoria das funções analíticas de variável complexa, introduzindo uma importante classe de surperfícies que, presentemente, levam o seu nome". As superfícies de Riemann, de um modo básico, podem ser definidas como deformações de um plano complexo. Para tal, Riemann generalizou funções de duas variáveis reais, as quais eram construídas no plano cartesiano, para funções de duas variáveis complexas. Como cada número complexo é formado por um par de números reais, ou seja, o número complexo z é da forma $z = a+bi$, onde a e b são números reais e i é o chamado "número imaginário", cujo valor é $i = \sqrt{-1}$, essa equação agora define uma superfície, alterando assim o desenho dos gráficos das funções, mas mantendo as suas mesmas propriedades. Com isso, "as superfícies de Riemann conectam a Análise e a Geometria no campo de variável complexa, de modo que permite relacionar a geometria com certas propriedades das funções analíticas"(Bandeira, 2012, p. 3).

Figura 1.4: Exemplo de Superfície de Riemann, para a função *raiz quadrada*



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Superfície_de_Riemann

Após Riemann, outro aluno de Gauss se destacou em um estudo que envolveu Topologia: Möbius. Alemão como os dois matemáticos citados anteriormente, formou-se doutor em 1815 na universidade de Leipzig, na Alemanha, enquanto evitava ser recrutado pelo exército prussiano da época; entretanto, seu doutorado era em Astronomia.

Figura 1.5: August Ferdinand Mobius

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Mobius_2.jpeg

Möbius publicou alguns trabalhos em Astronomia, mas também publicou trabalhos em Matemática, porém nem sempre eram trabalhos inéditos, mas possuíam ideias bem claras sobre o que se queria explicar. Baltzer (1885-1887) APUD O'Connor e Robertson (1997) cita, sobre os trabalhos em Matemática de Möbius:

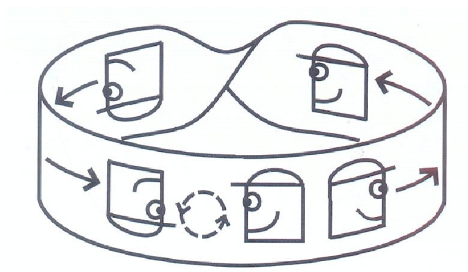
> "As inspirações para sua pesquisa ele encontrou principalmente no poço rico de sua própria mente original. Sua intuição, os problemas que ele se propôs e as soluções que encontrou, todos exibem algo extraordinariamente engenhoso, algo original de maneira descontrolada. Ele trabalhou sem pressa, silenciosamente por conta própria. Seu trabalho permaneceu quase trancado até que tudo tivesse sido colocado em seu devido lugar. Sem pressa, sem pomposidade e sem arrogância, ele esperou até que os frutos de sua mente amadurecessem. Somente após essa espera ele publicou seus trabalhos aperfeiçoados."(Baltzer (1885-1887) APUD O'Connor e Robertson (1997))

Mas seu trabalho mais marcante foi publicado em 1858, a chamada "Fita de Möbius". Consiste em uma fita simples, a qual gira-se um dos lados em 180º, e liga-se uma ponta a outra, como vista na figura 1.6. Com isso, forma-se assim o que é chamado de "objeto não orientável", já que não se pode definir quais os lados interno e externo da fita. Ao se caminhar por ela a partir de um ponto qualquer seu, é possível chegar ao lado oposto desse ponto de partida sem a necessidade de atravessar nenhuma das bordas da fita (figura 1.7). Tal descoberta foi feita durante estudos sobre a geometria de poliedros e foi importante para se classificar superfícies bidimensionais, e posteriormente incentivar outro alemão, chamado Felix Klein (1849 - 1925), num trabalho semelhante que ficou conhecido como "A Garrafa de Klein".

Figura 1.6: Exemplo de construção da Fita de Möbius

Fonte: Silva (2018, p. 28)

Figura 1.7: Orientação da Fita de Möbius



Fonte: Sampaio (2008, p. 38)

Além dos 3 discípulos de Gauss, outro grande matemático que contribuiu em estudos de Topologia foi o francês Henry Poincaré (1854-1912). Em 1895, ele publicou o primeiro trabalho exclusivo sobre Topologia, como um ramo distinto da Matemática, chamado *Analysis Situs* (do latim, "Análise de Posição"). Poincaré estudou matemática e física em três universidades: École Polytechnique em Paris, Escola de Mineração em Caen, e na Universidade de Paris, onde recebeu seu título de doutor em 1879. Inicialmente baseou seus estudos em geometria não-euclidiana, ganhando notoriedade entre os matemáticos da época, e depois em equações diferenciais, usando como base o movimento do sistema solar, o qual o levou a definir o "problema dos 3 corpos". Esse teorema afirma que dentro de um sistema contendo dois corpos maciços orbitando em torno de um centro de gravidade em comum e um pequeno corpo orbitando esses dois corpos, "mesmo pequenas mudanças nas condições iniciais poderiam produzir mudanças grandes e imprevisíveis na órbita resultante"(Gray, 2019), caracterizando assim um sistema caótico.

Figura 1.8: Henry Poincaré

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Poincare.jpeg

Com base nesse trabalho, começou a estudar espaços matemáticos, chamados "variedades", onde as coordenadas influenciam na posição de um ponto. Auxiliado pelos trabalhos de Riemann sobre superfícies, começou a pensar sobre curvas fechadas e a possibilidade de reduzi-lás a um ponto. Com isso, propôs em 1900 um dos problemas mais famosos da Matemática, a chamada "Conjectura de Poincaré", sendo resolvido apenas em 2003, pelo matemático russo Grigory Perelman.

Depois de várias descobertas no ramo da Topologia, o francês juntou seus trabalhos e publicou, em 1895, sua obra *Analysis Situs*, onde, acordo com Freire (2015, p. 61), "através de conceitos algébricos, introduziu as noções topológicas de *homotopia* e *homologia*, inaugurando assim a *Topologia Algébrica*.

1.3 A conquista da solidez matemática

De acordo com Carlson (2017), simultaneamente a tudo que acontecia na Alemanha e por seguinte com Poincaré, outra vertente da Topologia se desenvolveu através do estudo de convergências. Nesse "lado"do desenvolvimento, nomes como o de Maurice Frechét (1878-1973), Georg Cantor(1845-1918), Luitzen Brouwer (1881-1966) e Felix Hausdorff (1868-1942) partiram para uma visão topológica associada a séries e convergências. O'Connor e Robertson (1996) citam que o matemático tcheco Bernard Bolzano (1781-1848) foi o primeiro que pensou em noções topológicas fora do ramo da Geometria, dentro do ramo da Aritmética, por meio de convergência de sequências dentro do contexto de subconjuntos infinitos e limitados dos números Reais. Posteriormente Karl Weierstrass (1815 - 1897) contribuiu para a nova vertente criando a definição de ponto de acumulação - que será apresentado no decorrer deste trabalho - e o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Outros matemáticos contribuíram com suas descobertas para que, ao final, obtivéssemos os conceitos e ideias básicas para a Topologia atualmente conhecida. Um deles foi o francês Maurice Fréchet, que estudou Matemática na École Normale Supérieure não por sua primeira preferência, mas sim porque para estudar física, ele também precisaria de conceitos matemáticos, coisa a qual não o agradava. Mesmo sem ser sua principal opção, Fréchet escreveu dezenas de artigos curtos, tendo publicações em renomados locais, como a *American Mathematics Society*, nos Estados Unidos.

Figura 1.9: Maurice Fréchet

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Frechet.jpeg

Seu maior legado na área de Topologia foi sua tese de doutorado, em 1906. Ele introduziu e propôs os axiomas que mais tarde seriam usados para definir os *espaços métricos*, além de traçar um paralelo entre análise e teoria de grupos, possibilitando dessa forma uma abstração de conceitos sobre sistemas algébricos, que segundo O'Connor e Robertson (2005), poderiam ser muito bem utilizados nos estudos de limites e continuidade de funções, tratando-as como elementos de um espaço vetorial, além de introduzir uma maneira de medir comprimentos e distâncias entre as funções para produzir um espaço métrico (EncyclopÆdia Britannica, 2019), dando início assim aos estudos de análise funcional, sendo um dos pioneiros desse ramo da topologia.

Após sua tese, Fréchet foi incorporado ao exército inglês como intérprete na Primeira Guerra Mundial, devido ao seu vasto conhecimento linguístico. Mesmo durante a guerra, continuou prosseguindo nos seus estudos e publicando trabalhos, tendo pedido a alguns matemáticos americanos que continuassem a publicar seus trabalhos caso ele morresse na guerra. Após a guerra, continuou publicando artigos - chegando a publicar 36 artigos entre 1924 e 1925, sendo a maioria deles sobre análise geral e topologia, contribuindo assim para o crescimento do ramo.

Outro colaborador para a teoria topológica foi o russo Georg Cantor. Iniciou seus estudos acadêmicos na Höhere Gewerbeschule, em Darmstad (Alemanha), enviado por seu pai para se tornar engenheiro. Porém após um breve período, mudou-se para Universidade de Zurique, na Suíça, para estudar matemática, agora um desejo seu, onde ficou até a morte de seu pai, em 1863. Então, voltou para Alemanha e continuou seus estudos na Universidade de Berlim, onde estudou um breve período também na Universidade de Göttingen, retornando em seguida para Berlim, onde concluiu sua tese de doutorado sobre Teoria dos Números.

Figura 1.10: Georg Cantor

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Cantor_4.jpeg

Após sua tese, continuou a trabalhar e publicar artigos focado em Teoria dos Números. Posteriormente se afastou um pouco desse ramo e passou a estudar também sobre Análise. Utilizou-se de trigonometria, algo que tinha muito apreço e aptidão nos tempos da escola, juntamente com séries para provar a singularidade da representação de funções. Após isso, publicou vários trabalhos importantes, como por exemplo o que mostra a existência de uma correspondência entre números racionais e irracionais fazendo uso de sequências e também entre racionais e naturais.

Em seguida, Cantor focou seus trabalhos nos números transcedentais - números irracionais que não são raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros - e nas correspondências biunívocas entre conjuntos e números transinfinitos. O próprio matemático alegou um certo paradoxo em seus estudos com o passar do tempo: “Percebo que, nesse empreendimento, coloco-me em certa oposição às visões amplamente defendidas sobre o infinito matemático e às opiniões frequentemente defendidas sobre a natureza dos números”(Cantor APUD O’Connor e Robertson, 1998). Em 1895 e 1897 publicous dois artigos sobre Teoria dos Conjuntos, seus últimos trabalhos de relevância, uma vez que Cantor ficou doente, o que afetou profundamente sua produção daquele ponto em diante.

O holandês Luitzen Brouwer foi outro que contribuiu para o crescimento da Topologia. De acordo com Freire (2015, p. 62), Brouwer ”através de uma nova abordagem à teoria - na qual argumentos das demonstrações não apelavam à intuição geométrica -, obteve resultados de extrema significância". O holandês estudou na Universidade de Amsterdã entre 1897 e 1904, onde sempre associou questões filosóficas aos seus estudos em matemática, indo de encontro a vários métodos que se usava naquele tempo, como os fundamentos da lógica matemática e o princípio do terceiro excluído. Tais ideias o levaram a moldar a escola intuicionista de Matemática, que de acordo com a EncyclopÆdia Britannica, "vê a natureza da matemática como construções mentais governadas por leis evidentes", em detrimento a axiomas que o regem.

Figura 1.11: Luitzen Brouwer

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Brouwer.jpeg

Estudando os trabalhos de outro matemático, o alemão David Hilbert (1862-1943), ele chegou a resultados sobre teoremas de pontos fixos num plano cartesiano, que contribuíram para outros ramos, como equações diferenciais. Além disso, ampliou seu estudo, provando que os teoremas valiam não só para duas dimensões, mas também para n dimensões, trabalhando assim a questão da invariância da dimensão e do domínio. Além disso, ao conseguir unir os trabalhos de Cantor com os do *Analysis Situs* de Poincaré, foi considerados por muitos matemáticos como um dos fundadores da Topologia.

Entretanto, muitos matemáticos não aceitavam bem alguns dos seus trabalhos, como sua Teoria dos Conjuntos de 1918, sua Teoria da Medida de 1919 e sua Teoria das Funções de 1923, todas discriminadas pelo fato de Brouwer não ter se utilizado do principio do terceiro excluído. Apesar disso, não só sua contribuição para a Topologia, mas também a escola intuicionista que fundou, foram de grande importância para o desenvolvimento da Matemática.

Finalmente, falemos sobre Felix Hausdorff, nascido na Prússia, numa região hoje é de território polonês, considerado o principal colaborador para o desenvolvimento dos conceitos topológicos que hoje conhecemos. Estudou na Universidade de Berlim, recebendo o título de doutor com um trabalho de aplicações matemáticas na astronomia. Grande admirador de filosofia e literatura, publicou livros de poemas e obras literárias antes de adentrar mais afundo seus estudos em Matemática, a partir de 1904.

Figura 1.12: Felix Hausdorff

Fonte: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/BigPictures/Hausdorff_2.jpeg

Começou trabalhando em ordenamento de conjuntos, provando uma série de resultados nessa área. Além disso, fez estudos sobre cardinalidade, baseado no trabalhos de Cantor e de Borel. Mas sua grande obra vem em 1914, chamada *Grundzüge der Mengenlehre*, que baseia-se no trabalho de Fréchet para criar o conceito de espaço topológico e espaço métrico. Katetov APUD O'Connor e Robertson (2004) definem dessa forma o trabalho do matemático:

> "Ele conseguiu criar uma teoria dos espaços topológicos e métricos nos quais os resultados anteriores se encaixavam bem e enriqueceu-a com muitas novas noções e teoremas. Do ponto de vista moderno, o *Grundzüge* continha, além de outros tópicos especiais, o início das teorias dos espaços topológicos e métricos, que agora estão incluídas em todos os livros didáticos sobre o assunto."(Katetov (1970) APUD O'Connor e Robertson, (2004))

Segundo Scholz (2020), sua obra pode ser dividida em três partes: na primeira, Hausdorff mostrou como poderia a teoria de conjuntos ser mais amplamente usada em matemática, apresentando a ideia de espaços métricos e topológicos; na segunda aprofundou os estudos de Fréchet sobre espaços métricos, aliando também axiomas sobre vizinhança; e na terceira introduziu a teoria da medida, baseando-se nos estudos de Borel e Lebesgue, e que mais tarde foi aprofundada por Banach e Tarski.

2 Algumas Noções Preliminares

Para ter um melhor aprofundamento nos estudos sobre a Topologia no ensino médio, é vital que façamos um referencial teórico com assuntos também do ensino médio, os quais serão de suma importância para o entendimento do que se quer mostrar nesse trabalho.

2.1 Teoria dos Conjuntos

Como bem cita no início de sua obra *Elementos de Topologia Geral*, de 1970, Elon Lages Lima diz:

> "Os pré-requisitos formais para a leitura deste livro são: a linguagem, os conceitos básicos e as propriedades elementares relativos a conjuntos e funções; a noção de número real, em particular os conceitos de supremo, ou extremo superior, e ínfimo, ou extremo inferior, de um conjunto limitado de números reais."(Lima, 2009, p. 1)

Abe (1989, p. 113) cita em seu trabalho que "todas as ideias matemáticas são definíveis em termos da noção de conjunto e que as linguagens de todas as teorias matemáticas são particularizações da linguagem da Teoria dos Conjuntos."A partir da ideia de Conjuntos, trabalha-se com outras Estruturas Matemáticas, que o próprio Abe (1989, p. 117) explica ter como origem certas funções ou relações definidas dentro de determinados conjuntos específicos dados. Para exemplificar, o autor cita, dentre outros exemplos, as estruturas de ordem dentro do conjunto dos reais $\mathbb{R}$, munido de uma relação binária simbolizada por "$\leq$"(menor ou igual), onde os seguintes preceitos devem ser respeitados:

- **Reflexividade:** Se $x \in \mathbb{R}$, então $x \leq x$;
- **Anti-simetria:** Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;
- **Transitividade:** Se $x, y, z \in \mathbb{R}$, com $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Sendo assim, é interessante iniciar-se um estudo sobre Teoria dos Conjuntos antes de adentrar-se na Topologia propriamente dita.

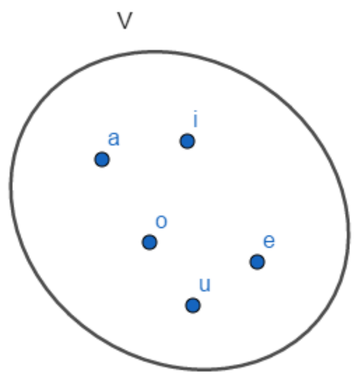
2.1.1 A Noção de Conjunto

Um conjunto é uma coleção de objetos, de qualquer natureza, chamado de *elementos*. Costuma-se especificar letras maiúsculas para representar conjuntos e letras minúsculas para representar elementos. Um elemento pode ou não pertencer a um determinado conjunto, o que representa-se com o uso dos símbolos "$\in$"e "$\notin$": caso um elemento x faça parte de um conjunto X, escreve-se "$x \in X$", caso contrário, escreve-se "$x \notin X$". Por exemplo, considerando-se o conjunto V das vogais do alfabeto latino, tem-se que $a \in V$, porém $b \notin V$.

Pode-se representar um conjunto de três maneiras distintas. Tomando como exemplo o conjunto V, tendo como elementos as letras a, e, i, o e u, tem-se as seguintes representações:

- Através do chamado *Diagrama de Venn*, onde os elementos são colocados dentro de uma figura fechada:

Figura 2.1: Representação do diagrama de Venn



Fonte: Produzido pelo autor

- Através da listagem dos elementos entre chaves e separados por vírgulas - "{ }": $V = \{a, e, i, o, u\}$

- Através de uma propriedade que os represente: $V = \{x;\ x \text{ é uma vogal do alfabeto latino}\}$.

Vale frisar que representar $V = \{\text{conjunto das vogais do alfabeto}\}$ é uma expressão errônea, uma vez que a própria representação entre chaves já denota um conjunto. Além disso, representar os conjuntos por uma propriedade também pode ser uma forma de representar um *subconjunto* de um conjunto Y, que é definido como um conjunto cujos elementos também pertencem a Y. Mantendo-se no exemplo citado, denotando o conjunto $Y = \{\text{letras do alfabeto}\}$, pode-se escrever $V = \{x \in Y;\ x \text{ é uma vogal}\}$. Em particular, tem-se que V é um subconjunto de Y.

Cada representação é adequada para certas ocasiões. As duas primeiras fornecem uma visão mais explícita dos elementos do conjunto, o que facilita o trabalho com operações entre conjuntos; já a representação por uma propriedade evita que se exiba todos os elementos, o que é útil especialmente quando o conjunto possui infinitos. Além do mais, isso possibilita o tratamento da Teoria dos Conjuntos aliada com a Lógica Proposicional, podendo assim utilizar-se das propriedades desta.

Dois curiosos conjuntos são o *conjunto vazio* e o *conjunto unitário*. O primeiro, representado pelo símbolo $\varnothing$ é o único conjunto que não possui elementos. Lima (2013, p. 3), ao defender sua importância, afirma que "ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio". Por exemplo, considere um conjunto A formado por números naturais negativos, esse conjunto não terá elementos, uma vez que os conceitos de números naturais e números negativos são contraditórios - qualquer número natural obrigatoriamente deve ser não-negativo -, ou seja, $A = \varnothing$. Já o segundo, é um conjunto que só possui um elemento. É o caso do conjunto B dos números naturais que são pares e primos, ou seja, $B = \{2\}$. É importante ressaltar que a e $\{a\}$ estritamente falando não são a mesma coisa, uma vez que o primeiro representa apenas um objeto qualquer, e o segundo, um conjunto contendo esse objeto. Entretanto, em alguns casos essa distinção pode ser suprimida apenas por uma questão estilística, como no caso de interseção de duas retas r e s, obtendo assim um ponto P: livros didáticos geralmente expressam a forma $r \cap s = P$, onde a maneira realmente correta de representação seria $r \cap s = \{P\}$.

Além destes conjuntos, podemos conceituar *conjuntos finitos* e *conjuntos infinitos*. Conjunto finito, a grosso modo, é aquele que tem uma quantidade finita de elementos, ou seja, pode-se contar quantos elementos ele possui, mesmo que a quantidade seja muito grande. Mais formalmente:

> "Um conjunto A chama-se *finito* quando for vazio ou quando existirem um inteiro positivo n e uma aplicação biunívoca $f\colon A \to I_n = \{1, 2, ..., n\}$ de A sobre o conjunto dos inteiros $1, 2, ..., n$. Quando A for vazio, diz-se que A possui 0 elementos. No segundo caso, diz-se que A possui n elementos."(Lima, 1970, p. 12)

Em outras palavras, é possível criar uma função que relacione cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, "contando"assim quantos elementos esse conjunto possui, e podemos representar a quantidade de elementos de um conjunto A qualquer como $n(A)$. No exemplo supracitado do conjunto V das vogais do alfabeto arábico, representamos a quantidade de elementos que esse conjunto possui como $n(V) = 5$.

Em contrapartida, um conjunto B é infinito quando não é finito, ou seja, é não vazio e não se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de B e os elementos do conjunto $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Os conjuntos numéricos já conhecidos - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ - são exemplos de conjuntos infinitos.

Alguns conjuntos infinitos são ditos *enumeráveis*. Um conjunto que recebe essa denominação é aquele que ou é finito ou que é infinito relacionando-se biunivocamente com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Como exemplo, considerando o conjunto D dos números múltiplos de 3, isto é, $D = \{3, 6, 9, 12...\}$, podemos estabelecer a seguinte relação com o conjunto dos números naturais:

$$f\colon \begin{array}{c} D \to \mathbb{N} \\ d \mapsto n \end{array}, \text{ onde } d = 3n \in D \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Outros exemplos de relações entre conjuntos enumeráveis que podemos citar são a do conjunto P dos números pares ($p = 2n$, onde $p \in P$ e $n \in \mathbb{N}$) e o conjunto I dos números ímpares ($i = 2n - 1$, onde $i \in I$ e $n \in \mathbb{N}$). Sempre que existir uma relação biunívoca entre dois conjuntos, diz-se que eles possuem a mesma *cardinalidade*.

2.1.2 A Relação de Inclusão

Na subseção anterior foram vistas a relação de pertinência (entre um elemento e um conjunto) e a definição de subconjunto, que estabelece uma relação entre dois conjuntos: a de inclusão. Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que o conjunto A *está contido* em B se todo elemento que pertence a A também pertence a B, ou seja, A é um *subconjunto* de B, o que se representa com a notação $A \subset B$.

Exemplo 2.1.1. *Sendo dois conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, como para todo elemento $x \in A$, verifica-se também que $x \in B$, conclui-se que $A \subset B$.*

Em contrapartida, usando-se das ideias do raciocínio lógico, a negação da afirmativa *para todo elemento que obedece a propriedade P* é dizer que *existe pelo menos um elemento que não obedece a propriedade P*, ou seja, se existir pelo menos um elemento de A que não seja elemento de B, o primeiro não será subconjunto do segundo, o que denota-se por $A \not\subset B$.

A relação de inclusão nos leva a três propriedades fundamentais, que são de uso não só em Teoria dos Conjuntos, mas em vários outros ramos da Matemática. Sejam A, B e C três conjuntos, tem-se:

- **Reflexividade:** $A \subset A$
- **Anti-simetria:** Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$
- **Transitividade:** Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

A primeira propriedade é auto-suficiente, pois todo elemento de A por consequência já é um elemento de A. A segunda é muito usada para se provar igualdade entre dois conjuntos. Já a terceira, como sugere Lima (2013, p. 4), "é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo*", com o quais pode-se deduzir, inclusive sobre proposições lógicas, uma vez que a teoria de conjuntos tem estreita ligação com a lógica, como já supracitado. Sendo assim, dizer que uma propriedade P define os elementos de um conjunto A e uma propriedade Q define elementos de um conjunto B, então podemos escrever $P \Rightarrow B$ para representar que $A \subset B$.

2.1.3 Conjunto das Partes e Classes ou Coleções de Conjuntos

Agora que está entendida a ideia de subconjuntos, somos capazes de agrupar os subconjuntos de um único conjunto, formando assim um novo conjunto. Domingues (1982, p. 3) define o chamado *conjunto das partes* de um conjunto A - representado por $P(A)$ - o conjunto de todos os subconjuntos de A. Por exemplo, considerando o conjunto $A = \{a, b, c\}$, consideremos os seus seguintes subconjuntos:

- Conjunto vazio: $\varnothing$
- Conjuntos unitários possíveis com os elementos de A: $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$.
- Conjuntos com exatamente dois elementos, os quais também são elementos de A: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$
- Conjuntos com exatamente três elementos, os quais também são elementos de A: $\{a, b, c\}$

Com isso, temos que $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. É possível determinar a quantidade de elementos desse conjunto das partes: sabendo que o conjunto A tem 3 elementos, é possível visualizar que o conjunto das partes possui 8 elementos. Diante isso, pode-se provar que dado um conjunto finito X qualquer que possua n elementos, isto é, $n(X) = n$, o conjunto $P(X)$ de suas partes é composto por 2^n elementos.

2.1.4 A Ideia de Conjunto Universo e Conjunto Complementar

Um conjunto especial a ser colocado em questão é o *conjunto universo*, ou simplesmente U. Relacionando a ideia de conjunto universo com uma pesquisa de opinião, todas as pessoas entrevistadas, independente da resposta que deram, fazem parte do conjunto universo da pesquisa. A ideia de universo é um conjunto que irá abranger todos os elementos e subconjuntos em questão. Por exemplo, quando se fala sobre funções do primeiro grau - aquelas da forma $f(x) = y = ax+b$, com a e b constantes reais - o conjunto universo é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), pois qualquer valor de x e y encontrados na função será um valor real.

Então, a partir daqui, sempre será considerado um conjunto universo dentro do que for trabalhado. Sendo assim, conhecendo a ideia de conjunto universo, pode-se definir um conjunto A que será um subconjunto de U, ou seja, $A \subset U$. Dado um elemento $x \in U$, esse elemento só terá duas opções relacionadas ao conjunto A: ou ele será um elemento de A ($x \in A$) ou não ($x \notin A$), não existindo uma terceira hipótese para tal, o que é conhecido em Lógica como *princípio do terceiro excluído*. Com isso, o conjunto dos elementos que não pertencem a A é chama-se *complementar* de A, representado por A^c (alguns autores usam a notação $\overline{A}$ para se referir ao complementar de A; entretanto, usaremos a notação A^c para diferenciar da notação de *fecho* de um conjunto, cuja definição será posteriormente vista). Sendo assim, dentro de U, afirma-se que se $x \notin A$, então $x \in A^c$, e vice-versa. Tal conceito retorna a dois princípios que serão mostrados e demonstrados a seguir:

Proposição 2.1.1. *Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$.*

Demonstração:

De fato, como dito anteriormente, basta comprovar que $(A^c)^c \subset A$ e $A \subset (A^c)^c$. Para cada inclusão, devemos mostrar que um elemento qualquer x contido no primeiro conjunto está contido no segundo. Assim sendo:

- Demonstrando que $(A^c)^c \subset A$: Dado um elemento qualquer $x \in (A^c)^c$, tem-se que:

$$x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A$$

- Demonstrando que $A \subset (A^c)^c$: Dado um elemento qualquer $x \in A$, tem-se que:

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c$$

Como foi mostrado que $(A^c)^c \subset A$ e $A \subset (A^c)^c$, conclui-se que $(A^c)^c = A$. ■

Proposição 2.1.2. *Para dois conjuntos A e B, tais que $A \subset U$ e $B \subset U$, tem-se que se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$.*

Demonstração:

Para provar tal proposição, necessita-se considerar um elemento qualquer x em B^c, e através de implicações e da hipótese de que $A \subset B$, chegar ao fato de que esse mesmo elemento pertence a A^c. De fato, supondo $x \in B^c$, tem-se que $x \notin B$. Pela hipótese que foi dada, se um elemento pertence a um conjunto A, obrigatoriamente ele pertence a B; dessa forma como $x \notin B$, não existe possibilidade de pertencer a A. Assim, prova-se que $x \notin A$, o que acarreta em $x \in A^c$, como queríamos demonstrar. ■

É importante observar que a recíproca da propriedade também é válida, ou seja, se $B^c \subset A^c$, então $A \subset B$, o qual é demonstrada de maneira análoga. Com isso, podemos concluir que $A \subset B$ é uma *condição necessária e suficiente* para $B^c \subset A^c$, ou seja, uma inclusão implica a outra, o que pode ser representado por $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

Novamente relacionando a Teoria dos Conjuntos com a Lógica Proposicional, o complementar de um conjunto também pode ser representando em relação a propriedades. Quando se fala de um elemento não pertencer a um certo conjunto - ou seja, pertencer ao seu complementar -, em Lógica se diz que um elemento não se apropria de uma certa propriedade. Sendo assim, caso um elemento x não pertença a um conjunto A definido por uma certa propriedade P, é equivalente dizer que esse elemento não goza dessa propriedade, ou seja, se x pertencer a A^c, então x gozará da *negação* de P, representada por "$\neg P$". Também são válidas as proposições 2.1.1 e 2.1.2 transformadas em lógica proposicional, sendo representadas respectivamente, para duas propriedades P e Q, como $\neg\neg P = P$ e $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

2.1.5 União e Interseção

Continuando os estudos sobre interação entre conjuntos, dados dois conjuntos A e B diferentes, podemos trabalhar com os conceitos de *união* e *interseção* entre eles. A ideia de unir dois conjuntos é criar um novo conjunto, chamado "conjunto união", que contemple todos os elementos desses dois; enquanto a ideia de interseção é reunir o que estes conjuntos tem em comum, ou seja, criar um novo conjunto chamado "conjunto interseção"que tenha elementos que estejam em A e em B ao mesmo tempo. Mais formalmente, dados dois conjuntos A e B, temos as seguintes definições:

Definição 2.1.1 (União de Conjuntos)**.** *Um elemento x faz parte do conjunto união de A com B, que será denotado $A \cup B$, se x pertencer ao conjunto A ou x pertencer ao conjunto B.*
Em símbolos: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

Definição 2.1.2 (Interseção de Conjuntos)**.** *Um elemento x faz parte do conjunto interseção de A com B, que será denotado $A \cap B$, se x pertencer aos conjuntos A e B simultaneamente.*
Em símbolos: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$.

Exemplo 2.1.2. *Sendo dois conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, tem-se:*

- *O conjunto união entre A e B é $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*

- *O conjunto interseção entre A e B é $A \cap B = \{3\}$*

Quando se tem dois conjuntos em questão, as ideias de união e interseção se relacionam com os conectivos "ou"e "e"da lógica proposicional. Dados um conjunto A definido por uma certa propriedade P e um conjunto B definido por uma certa propriedade Q, dizer que um elemento x pertence ao conjunto $A \cup B$ significa dizer que *pelo menos* uma das seguintes afirmações é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$, assim como dizer que um elemento x satisfaz $P \vee Q$ quando ele satisfaz pelo menos uma das sentenças P ou Q. É importante ressaltar que quando se fala de "pelo menos uma", não se exclui a possibilidade de um mesmo elemento pertencer aos dois conjuntos ou gozar das duas propriedades ao mesmo tempo. Do mesmo modo, dizer que um elemento x está no conjunto $A \cap B$ significa dizer que *ambas* afirmações são verdadeiras: $x \in A$ e $x \in B$, assim como dizer que se x cumpre $P \wedge Q$, então x satisfaz ambas as sentenças P e Q.

Assim como outras operações algébricas, as operações de união e interseção obedecem algumas propriedades. Dados conjuntos A, B e C, tem-se:

- **Comutatividade:** $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.
- **Associatividade:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- **Distributividade:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Como já vem sendo retratado nesse trabalho, vale salientar a relação entre a Teoria dos Conjuntos e a Lógica Proposicional. Supondo três conjuntos A, B e C que gozam, respectivamente, das propriedades P, Q e R, são válidas as relações mostradas a seguir:

Tabela 2.1: Relações entre Teoria dos Conjuntos e Lógica Proposicional

Propriedade	**Teoria dos Conjuntos**	**Lógica Proposicional**
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$	$P \vee Q = Q \vee P$
	$A \cap B = B \cap A$	$P \wedge Q = Q \wedge P$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Complementar	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$
	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

Fonte: Produzido pelo autor

A propriedade do complementar se assemelha com as "Leis de De Morgan", apresentadas pelo matemático Augustus De Morgan (1806 - 1871). Elas trabalham com a negação de proposições sobre alternância ou aditividade.

2.1.6 Produto Cartesiano

O conceito de *produto cartesiano* vem da ideia de relacionar dois conjuntos A e B quaisquer, onde cada elemento $x \in A$ se relaciona com cada elemento $y \in B$. Em outras palavras:

Definição 2.1.3 (Produto Cartesiano)**.** *Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano entre eles é o conjunto:*

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \ \text{e}\ y \in B\}$$

Tal conceito é importante, pois agora temos um conjunto formado por pares ordenados (x, y), onde o primeiro elemento pertence ao conjunto que é o primeiro fator do produto cartesiano, e o segundo elemento pertence ao segundo conjunto. Essa ideia será utilizada no estudo de funções.

Exemplo 2.1.3. *Supondo dois conjuntos, a seguir:*

- *Conjunto* $J = \{a, b, c\}$*,*
- *Conjunto* $K = \{l, m, n, o\}$*.*

O produto cartesiano do conjunto J com o conjunto K será o conjunto:
$J \times K = \{(a, l), (a, m), (a, n), (a, o), (b, l), (b, m), (b, n), (b, o), (c, l), (c, m), (c, n), (c, o)\}$

2.2 Números Reais

O principal conjunto que será utilizado neste trabalho será o conjunto dos Números Reais, representado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Ele será visto dentro do conceito da *reta real*, na qual relaciona-se a posição de dois números a e b de acordo com uma relação de ordem: se a posição de a estiver à esquerda de b, denota-se isso como $a < b$.

Define-se os *intervalos de extremos* a *e* b os conjuntos os quais incluem os números que estão situados entre a e b dentro da reta real. Esses intervalos dividem-se em *fechados*, *abertos* ou *semi-abertos*, onde representamos na reta real com o símbolo "$\circ$"quando um extremo do intervalo for dito aberto e com "$\bullet$"para um extremo dito fechado. O estudo dos intervalos será aprofundado posteriormente, mas em uma primeira ideia, o que diferencia os conceitos entre cada intervalo é o fato dos extremos pertencerem ou não a esse conjunto. De uma forma geral, tem-se:

- **Intervalo aberto:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
- **Intervalo fechado:** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo semi-aberto:** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ ou $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

Assim como a notação de acordo com a propriedade de cada um dos intervalos, podemos representá-los na reta real, como mostra as figuras 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5:

Figura 2.2: Intervalo aberto

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.3: Intervalo fechado

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.4: Intervalo semi-aberto à direita

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.5: Intervalo semi-aberto à esquerda

Fonte: Produzido pelo autor

Ressaltamos também que os intervalos não precisam ser exatamente de um ponto a a um ponto b. Um intervalo pode ser também todos os números que são maiores (estão à direita) ou menores (estão à esquerda) do que um certo valor a, dentro da reta real. Tais intervalos são os que possuem extremidade no infinito - positivo ou negativo. Tais intervalos também são chamados de *semi-retas*, e são representados por:

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$: semi-reta com origem em a aberto, com orientação para a direita (figura 2.6);
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$: semi-reta com origem em a fechado, com orientação para a direita (figura 2.7);
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$: semi-reta com origem em a aberto, com orientação para a esquerda (figura 2.8);
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$: semi-reta com origem em a fechado, com orientação para a esquerda (figura 2.9).

Figura 2.6: Intervalo aberto em "a" até o infinito positivo

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.7: Intervalo fechado em "a" até o infinito positivo

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.8: Intervalo aberto em "a" até o infinito negativo

Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.9: Intervalo fechado em "a" até o infinito negativo

Fonte: Produzido pelo autor

Os intervalos fechados também podem ser definidos como conjuntos *limitados*, pois existem dois números a e b (supondo-se $a < b$, sem perda de generalidade) tais que para qualquer valor de x pertencente a um intervalo fechado ou um conjunto $S \subset [a, b]$, tem-se $a \leq x \leq b$. Porém, os conjuntos podem ser limitados apenas superiormente ou inferiormente, quando respectivamente, tem-se $x \leq b$ ou $x \geq a$, para todo valor de $x \in S$. Nesse caso, diz-se que a é uma *cota inferior* de S, e b é uma *cota superior* de S.

Neto (2015, p. 69) cita em sua obra que qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}$ que seja não vazio e limitado superiormente possui uma menor cota superior, o chamado *Axioma da Completude*. Por exemplo, no conjunto $X = (1, 2)$, o número 2 é considerado como cota superior, mas nenhum número real menor que 2 é cota superior desse conjunto, uma vez que para todo número a tal que $1 < a < 2$, o número $1 + \dfrac{a}{2}$ também está entre 1 e 2, mas $a < 1 + \dfrac{a}{2}$. Essa menor cota superior de um conjunto é chamada *supremo*. Lima (1970, p. 17) define o conceito de supremo através de duas condições:

Definição 2.2.1 (Supremo)**.** *Dado um conjunto não-vazio X limitado superiormente, s será o supremo do conjunto X (representado por $supX$) se:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq s$ (isto é, s é uma cota superior de X);*

2. *Se t é um número real tal que $x \leq t$ para todo $x \in X$, então $s \leq t$ (isto é, s é a menor das cotas superiores de X), que também pode ser expressa como $s - \epsilon < x < s$ dado qualquer $\epsilon > 0$.*

Analogamente, para um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ que seja não-vazio e limitado inferiormente, existe uma maior cota inferior. A esse valor, dá-se o nome de *ínfimo*, o qual Lima (1970, p. 17) também define:

Definição 2.2.2 (Ínfimo)**.** *Dado um conjunto não-vazio X limitado inferiormente, i será o ínfimo do conjunto X (representado por $infX$) se:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $i \leq x$ (isto é, i é uma cota inferior de X);*

2. *Se j é um número real tal que $j \leq x$ para todo $x \in X$, então $j \leq i$ (isto é, i é a maior das cotas inferiores de X), que também pode ser expressa como $i < x < i + \epsilon$ dado qualquer $\epsilon > 0$.*

O supremo e o ínfimo de um conjunto X qualquer podem não pertencer a esse X. Além disso, para dois conjuntos X e Y são válidas as seguintes propriedades de supremo e ínfimo:

- Se $X \subset Y$ e $X \neq \varnothing$, então $supX \leq supY$ e $infY \leq infX$.

- Para o conjunto $X + Y = \{x + y; x \in X, y \in Y\}$, tem-se que $sup(X + Y) = supX + supY$ e $inf(X + Y) = infX + infY$.

2.3 Funções

Anteriormente, vimos como podemos relacionar dois conjuntos, através de operações de união e interseção ou relações de inclusão. A partir daqui, adentraremos em uma outra forma de relacionar dois conjuntos, através do que chamamos *função*, onde, de acordo com Lima (2013, p. 36), associaremos cada elemento de um conjunto com um único elemento de um outro conjunto por meio de uma regra ou um conjunto de instruções.

2.3.1 Conceito de Função

Dados dois conjuntos, já foi visto anteriormente a relação entre eles por meio de um produto cartesiano (definição 2.1.3). Dentre todos os possíveis pares ordenados que são elementos do conjunto formado entre o produto cartesiano de um conjunto A com um conjunto B, podemos observar subconjuntos dele os quais os pares ordenados não possuem um mesmo valor no seu primeiro elemento. Tendo como base o exemplo 2.1.3, podemos considerar apenas, por exemplo, o subconjunto $\{(a,l),(b,m),(c,n)\}$ do conjunto $J \times K$, onde cada elemento do conjunto J só aparece uma vez na primeira posição em cada par ordenado (x,y) - ou seja, na posição do x. A ideia de função é um subconjunto específico desde produto cartesiano, o qual é dita a seguir:

Definição 2.3.1 (Função)**.** *Dados dois conjuntos A e B, função $f : A \to B$ é uma associação que relaciona todo elemento de A, chamado x, com um único elemento de B, chamado y, de modo que $f(x) = y$. Em símbolos matemáticos, tem-se que: $\forall x \in A, \exists! y \in B; f(x) = y$.*

Na definição acima, o conjunto A chama-se *domínio da função* e é denotado por D_f, enquanto que o conjunto B é chamado de *contra-domínio da função*, representado por CD_f. Cada elemento $y \in CD_f$ que é associado a um elemento $x \in D_f$ é chamado de *imagem de x pela função f*, e assim podemos definir o conjunto $Im_f = \{y \in CD_f;\ y = f(x)$ para algum $x \in D_f\}$ chamando-o de *conjunto imagem*. Representa-se por $x \mapsto f(x) = y$ a forma como um elemento x do domínio se associa a um elemento y do contra-domínio, e para essa associação, geralmente se faz necessário o uso de uma *lei de formação da função*, que nada mais é que uma fórmula matemática, que pode ou não ser dividida em duas ou mais partes, que relaciona cada elemento x do domínio com um elemento y do contra-domínio.

É importante observar que toda função é composta destas três informações: o domínio, o contra-domínio e a lei de formação, mesmo que as duas primeiras sejam suprimidas comumente em alguns exemplos. Lima (2013, p. 37) reitera que mesmo ao se falar apenas "a função f", seu domínio e seu contra-domínio estão subentendidas na frase. Com isso, segue-se que duas funções f e g serão iguais se, e somente se, seus domínios forem iguais, seus contra-domínios forem iguais e suas leis de formação também forem iguais. Ou seja, sendo as funções $f : A \to B$ e $g : X \to Y$, elas serão iguais apenas se $A = X$, $B = Y$ e $f(x) = g(x)$.

Tomemos como exemplo a função f definida em $\mathbb{R}$ como sendo seu domínio, e com contra-domínio $\mathbb{R}$, ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde sua lei de formação é $f(x) = 2x - 1$. Dado um valor $x \in D_f = \mathbb{R}$, encontramos o seu correspondendo $y = f(x) \in CD_f = \mathbb{R}$ substituindo o valor de x dentro da lei de formação. Sendo assim, temos:

Exemplo 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada pela lei de formação $f(x) = 2x - 1$. A seguir, exibimos as imagens dos números reais 2, -3 e $\frac{2}{3}$:*

- $f(2) = 2.2 - 1 = 3$
- $f(-3) = 2.(-3) - 1 = -7$
- $f(\frac{2}{3}) = 2.(\frac{2}{3}) - 1 = \frac{1}{3}$

2.3.2 Tipos de Função: Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva

Em relação ao domínio e ao contra-domínio das funções e como se relacionam, a função pode admitir três classificações. Seja $f : A \to B$ uma função, define-se:

1. **Função injetiva:** Sejam $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2 \in B$. Se $x_1 \neq x_2$, então $y_1 \neq y_2$. Em outras palavras, ao considerarmos dois elementos distintos do domínio, esses necessariamente devem ser relacionados com dois elementos distintos do contradomínio. Uma forma equivalente de expressar essa característica é usando sua contra-positiva: dois elementos iguais do conjunto imagem relacionam-se com dois elementos iguais do domínio, o que em termos matemáticos, é expressado por "se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$".

2. **Função sobrejetiva:** Para todo $y \in B$, existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, temos que $CD_f = Im_f$, ou seja, todo elemento do contra-domínio de uma função é imagem de algum elemento do seu domínio.

3. **Função bijetiva:** Quando a função é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva.

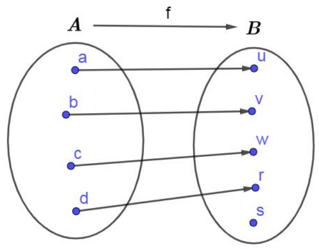
Vamos exemplificar as três classificações citadas:

Exemplo 2.3.2. *A função $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; com $f(x) = x^2$ é uma função injetiva, pois quaisquer x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $x_1 \neq x_2$ implicam em $(x_1)^2 \neq (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Exemplo 2.3.3. *A função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; com $f(x) = x^2$ é uma função sobrejetiva, pois para cada $y \in \mathbb{R}_+$, existe pelo menos um $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.*

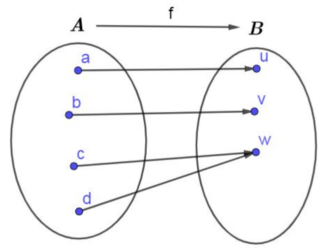
Exemplo 2.3.4. *A função $f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; com $f(x) = x^2$ é uma função bijetiva, pois atende, ao mesmo tempo, os requisitos para ser injetiva e sobrejetiva.*

Figura 2.10: Exemplo de função injetora, mas não sobrejetora



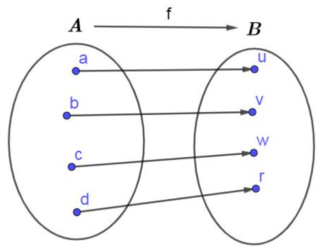
Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.11: Exemplo de função sobrejetora, mas não injetora



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.12: Exemplo de função bijetora



Fonte: Produzido pelo autor

Dados os exemplos, observamos que as funções podem variar de acordo com seu domínio e seu contra-domínio, e que a simples mudança de domínio pode alterar a classificação de uma função. Além disso, é importante notar também que existem funções que não são nem injetoras e nem sobrejetoras. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, por exemplo, não pode admitir valores negativos, isto é, para qualquer valor de x, $f(x) = x^2 \geq 0$, sendo então a imagem de f $Im_f = \mathbb{R}_+$, diferente do contradomínio, logo a função não é sobrejetora. Ao mesmo tempo, como $(x)^2 = (-x)^2$ para qualquer valor de x, temos dois elementos diferentes tendo a mesma imagem pela função f, o que a caracteriza como não sendo injetora.

Tal classificação é importante pra saber sobre que tipo de função estamos falando, e quais propriedades ela irá possuir. Além disso, é importante frisar que algumas propriedades só existirão se tivermos uma relação biunívoca - ou seja, uma função bijetora - entre dois conjuntos estudados. Também é válido salientar que existem alguns tipos de função mais simples de serem trabalhadas do que as outras.

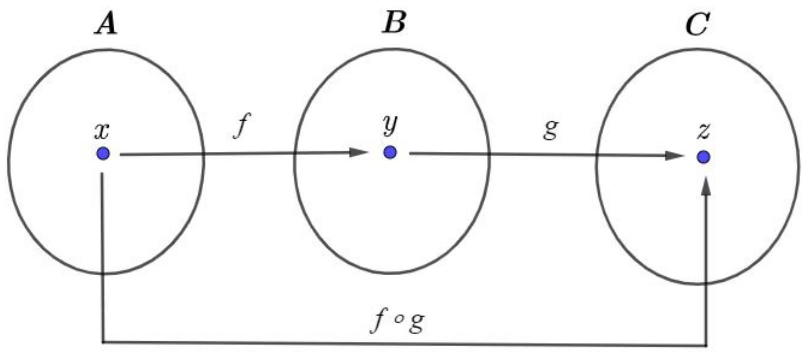
2.3.3 Função Composta

O conceito de função composta baseia-se na ideia de que dados três conjuntos A, B e C, existem duas formas de se ir de um conjunto ao outro: suponhamos que queremos sair do conjunto A e chegar no conjunto C. Para isso, existe uma função $f : A \to B$ (ou seja, levando de A para B) e outra função $g : B \to C$ (levando do conjunto B ao conjunto

C). Entretanto, pode-se traçar um caminho direto do conjunto A para o conjunto C, sem necessariamente “visitar”o conjunto B; para isso usamos do conceito de uma função composta.

Definição 2.3.2 (Função Composta)**.** *Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, chama-se função composta de g com f a função $h : A \to C$, definida por $h(x) = g(f(x))$. Podemos também representar $g(f(x))$ pelo símbolo $(g \circ f)(x)$.*

Figura 2.13: Comportamento das Funções f, g e h



Fonte: Produzido pelo autor

Pela definição, percebe-se que nessa nova função, o domínio e o contradomínio são, respectivamente, o domínio de f e o contradomínio de g. Além disso, é importante observar que para ter uma função composta, a imagem da primeira função (a mais “interna”) deve ser igual ao domínio da segunda função (a mais “externa”). Em outras palavras, a função f pega um elemento x do domínio A e leva a um elemento y do Contra-Domínio B, para em seguida esse elemento y de B - agora domínio da função g - ser levado a um elemento z do contradomínio C. O que a função composta h faz é levar diretamente esse elemento x de A até um elemento z de C.

Para se encontrar essa função $h = g \circ f$, o modo é semelhante ao do exemplo 2.3.1, só que ao invés de substituirmos o valor de x por um valor do domínio da função, aplicamos a própria função f na função g, seguindo um sentido “de dentro para fora”. O exemplo a seguir ilustra a forma de encontrar a lei de formação da composição de duas funções:

Exemplo 2.3.5. *Sejam as funções f e g definidas como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 2x - 1$; e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = x^2 + 2$. Sendo assim, podemos encontrar:*

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2.g(x) - 1 = 2.(x^2 + 2) - 1 = 2x^2 + 4 - 1 = 2x^2 + 3$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 2 = (2x - 1)^2 + 2 = (2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 + 2 = 4x^2 - 4x + 1 + 2 = 4x^2 - 4x + 3$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2.f(x) - 1 = 2.(2x - 1) - 1 = 4x - 2 - 1 = 4x - 3$

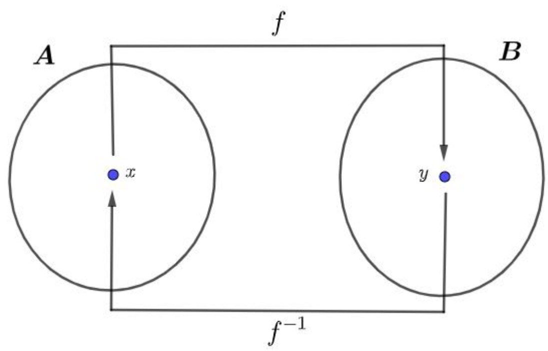
d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = (x^2 + 2)^2 + 2 = (x^2)^2 + 2.x^2.2 + 2^2 + 2 = x^4 + 4x^2 + 6$

Os itens *c*) e *d*) do exemplo 2.3.5 mostram que é possível compor uma função com ela própria. Entretanto, para que tal função h seja possível, as funções devem atender certos requisitos. Pela definição 2.3.1, o conjunto B funciona como domínio da função g. Assim, todo elemento y de B deve ter um único correspondente z em C, o que obriga a todo elemento y de B ser um correspondente de algum elemento x de A, exigindo assim que a função f seja uma função sobrejetiva.

2.3.4 Função Inversa

Conhecendo a relação biunívoca entre dois conjuntos por meio de uma função, pode-se trabalhar com uma outra função que faça o caminho inverso. Em outras palavras, dada uma função $f : A \to B$ bijetiva, onde cada elemento $x \in A$ relaciona-se com um único elemento $y \in B$ na forma $f(x) = y$, existe uma outra função $g : B \to A$ onde cada $y \in B$ se relaciona com um elemento $x \in A$ da forma $g(y) = x$. Nesse caso, a função g é denominada *função inversa de* f, e denotada por f^{-1}.

Figura 2.14: Esquema de função inversa



Fonte: Produzido pelo autor

Como foi dito, uma função $f : A \to B$ precisa ser bijetiva para admitir função inversa, pois somente dessa forma $f^{-1} : B \to A$, vista como a relação inversa de f, cumprirá a definição de função. Sendo assim, podemos estabelecer como condição necessária e suficiente para uma função f admitir uma função inversa a seguinte relação:

Proposição 2.3.1 (Função Inversa)**.** *f admite função inversa f_{-1} se, e somente se, f é bijetiva.*

Como a proposição remete uma dupla indicação, faremos a demonstração em duas partes: primeiro provando que se f_{-1} é uma função, então f deve ser bijetiva; e em seguida a sua recíproca (se f é bijetiva, então f_{-1} é função).

Demonstração:

($\Rightarrow$) **Se f admite função inversa f^{-1}, então f é bijetiva.**

- Suponha uma função $f : A \to B$, que não seja sobrejetiva. Nesse caso, tem-se que $CD_f \neq Im_f$, ou seja, existe algum elemento do conjunto B (digamos y_0) que não é imagem de um elemento x do conjunto A; ou seja, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = y_0$. Caso exista uma função inversa de f, o seu conjunto domínio agora será B, que possui o elemento y_0 que não se relaciona com nenhum elemento de A, contrariando assim a definição de função (todos os elementos do domínio devem ter um correspondente no contradomínio). Logo, para admitir inversa, f deve ser sobrejetiva.

- Suponha agora que $f : A \to B$ não é injetora, ou seja, existem x_1, $x_2 \in A$ e $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2 \in B$, tais que $x_1 \neq x_2$, mas $y_1 = y_2 = y$. Caso exista uma função inversa de f, o seu conjunto domínio agora será B, cujo elemento y terá dois correspondentes em A, contradomínio de f^{-1}, que são x_1 e x_2, também contrariando a definição de função. Com isso, a função f também deve ser injetiva.

- Portanto, a função deve ser sobrejetiva e injetiva, i. e., bijetiva. $\blacksquare$

($\Leftarrow$) **Se $f : A \to B$ é bijetiva, então f admite função inversa f_{-1}.**

- Dado $y \in B$, se f é bijetora, então existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Assim, $f^{-1}(y) = x$ está bem definido. Agora suponha que $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$. Então, $f(x_1) = y = f(x_2)$. Como f é injetora, segue que $x_1 = x_2$. Logo, a cada $y \in B$, $f^{-1} : B \to A$ associa um único elemento de A. Ou seja, f^{-1} é uma função. $\blacksquare$

Dada a lei de uma função f que admita inversa, a sua inversa f^{-1} é tal que a composição das duas deve dar a função identidade - representada como I -, a qual leva um elemento x até ele mesmo, ou seja, $x \mapsto x$. Com isso, temos que $f(f^{-1}(x)) = x$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.

Exemplo 2.3.6. *Supondo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = 2x - 1$, para encontrar a inversa f^{-1}, temos:*

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow 2.(f^{-1}(x)) - 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

2.3.5 Função Modular

Na educação básica, inicia-se os estudos do módulo de um número. Nesse período escolar, é visto que a definição de módulo se dá como sendo a distância do número o qual se quer saber o módulo até o 0, sendo representado por um número entre duas barras | |. Por exemplo, $|5|$ é 5, uma vez que a distância do 5 até o 0 são cinco unidades de medida, assim como $|-2| = 2$, pois a distância do -2 ao 0 são de 2 unidades de medida. Como se estuda a reta dos números naturais $\mathbb{R}$, essa "unidade de medida"é dita uma unidade de comparação para elementos de uma mesma espécie.

Quando se adentra no ensino médio, a definição de módulo é melhor trabalhada dentro da ideia de função. Tomando como base a definição de função, tem-se que:

Definição 2.3.3 (Módulo)**.** *O módulo de um número é a imagem dele pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x, \ se \ x < 0 \end{cases}$$

onde f é chamado de função modular.

Percebe-se que tal definição está de acordo com o que foi ensinado no ensino básico. Tomando os mesmos exemplos como base, como $5 \geq 0$, tem-se que $|5| = 5$, e como $-2 < 0$, obtém-se $|-2| = -(-2) = 2$. Mas tratar a definição de módulo dessa forma traz uma ampliação do entendimento de função: agora uma função pode ser definida por partes utilizando duas ou mais leis condicionadas. No caso do da função módulo, para valores de x maiores que ou iguais a 0, se usa a expressão $|x| = x$ para achar sua imagem; e para valores de x menores que 0, usa-se $|x| = -x$.

Além disso, a ideia de função pode ser ampliada junto com a ideia de função composta. Pensando no x dentro do módulo como a função identidade, pode-se trabalhar com funções variadas dentro da definição de módulo. Ou seja, sendo assim, pode-se definir função modular como:

Definição 2.3.4 (Módulo de Função)**.** *O módulo de uma função $f : A \to B$, é uma função g tal que:*

$$g(f(x)) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \ se \ f(x) \geq 0 \\ -f(x), \ se \ f(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplificaremos com a mesma função $f(x) = 2x-1$ que já vem sendo trabalhada:

Exemplo 2.3.7. $|f(x)| = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, \ se \ 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1), \ se \ 2x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1; \ x \geq \dfrac{1}{2} \\ -2x+1; \ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

O exemplo nos mostra que o módulo de uma função basicamente é definido por duas leis, onde podemos calcular o módulo de uma função, ou seja, o seu comportamento de acordo com os valores do domínio que são aplicados nela: para valores de x menores que $\frac{1}{2}$, a imagem é calculada pela lei de formação $-2x+1$, enquanto que para valores de x maiores que $\frac{1}{2}$, calcula-se a imagem usando a lei de formação $2x-1$.

Uma relação importante sobre as funções modulares, e que será de grande uso nos conteúdos que serão vistos posteriormente, é quando se trata de inequações envolvendo módulos. Desse modo, define-se a seguinte relação:

Definição 2.3.5 (Inequação Modular)**.** *Dado o módulo de uma função* $f : A \to B$*, e um número* $\alpha \in \mathbb{R}$*, tem-se que:*

- $|f(x)| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq \alpha$ *e* $f(x) \geq -\alpha \Rightarrow -\alpha \leq f(x) \leq \alpha$.
- $|f(x)| \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq \alpha$ *ou* $f(x) \leq -\alpha$.

Como foi frisado, essa definição será importante em estudos futuros, uma vez que podemos trabalhar com a ideia de intervalos - um dos alvos da topologia - dentro de uma reta real, ou seja:

- $f(x) \leq \alpha$ ou $f(x) \geq -\alpha \Rightarrow f(x) \in [-\alpha, \alpha]$.
- $f(x) \geq \alpha$ ou $f(x) \leq -\alpha \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$.

Essa definição será melhor entendida quando tratarmos de intervalos e de distância no capítulo seguinte deste trabalho.

2.4 Limite e Continuidade

2.4.1 Limite

Aprofundando mais o estudo de funções, entramos na ideia de *limite*. No cálculo de limites, não estamos preocupados com o que acontece quando o x de uma função *é* um determinado valor, e sim quando ele *tende* a esse valor, ou seja, vai se aproximando dele. Calcular o limite de uma função quando o seu valor de x tende a um certo valor é "prever"qual será o comportamento da imagem desse valor de x. Por exemplo, numa função $f(x) = 2x - 1$, o que acontece com os valores de $f(x)$ quando os valores de x se aproximam de 2? Para isso, deve se considerar aproximações de $p = 2$ por dois lados: por valores maiores que 2 e por valores menores que 2. Sendo assim, obtem-se:

Exemplo 2.4.1. *Supondo* $f(x) = 2x - 1$ *com o valor de* x *se aproximando de* 2 *por valores maiores e menores que ele, tem-se:*

Tabela 2.2: Comportamento de $f(x) = 2x - 1$ quando o valor de x se aproxima de 2

Valores maiores que 2		Valores menores que 2	
$x = 3$	$f(x) = 5$	$x = 1$	$f(x) = 1$
$x = 2,5$	$f(x) = 4$	$x = 1,5$	$f(x) = 2$
$x = 2,1$	$f(x) = 3,2$	$x = 1,9$	$f(x) = 2,8$
$x = 2,01$	$f(x) = 3,02$	$x = 1,99$	$f(x) = 2,98$
$x = 2,001$	$f(x) = 3,002$	$x = 1,999$	$f(x) = 2,998$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Fonte: Produzido pelo autor

Percebe-se que à medida que o valor de x aproxima-se de 2, tanto por valores maiores ou menores que ele, a imagem $f(x)$ aproxima-se de 3. Diz-se então que quando x *tende* a 2, a $f(x)$ *tende* a 3, ou dito de outra forma, considera-se que o *limite* da função $f(x) = 2x - 1$ quando x tende a 2 é 3, o valor de $f(x)$ torna-se tão próximo de 3 quanto se queira, bastando apenas fazer o x ser suficientemente próximo de 2. De maneira geral, representamos limite de uma função f quando x tende a a como sendo: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ou seja, "o limite de uma função f quando x tende a a é L", desde que o valor de L exista.

Com os conhecimentos que temos, para que se possa definir limite é essencial que os valores de $f(x)$ se aproximem do mesmo valor L tanto pela direita - ou seja, quando o x se aproxima de a por valores maiores que a - quanto pela esquerda - quando x se aproxima de a por valores menores que a. No exemplo 2.4.1 dado, percebe-se a ocorrência disso: a imagem da função se aproxima de 3 dos dois lados, o que não é observado no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4.2. *Supondo* $g(x) = \frac{1}{x}$ *com o valor de* x *se aproximando de* 0 *por valores maiores e menores que ele, tem-se:*

Tabela 2.3: Comportamento de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ quando o valor de x se aproxima de 0

Valores maiores que 0		Valores menores que 0	
$x = 1$	$f(x) = 1$	$x = -1$	$f(x) = -1$
$x = 0,5$	$f(x) = 2$	$x = -0,5$	$f(x) = -2$
$x = 0,1$	$f(x) = 10$	$x = -0,1$	$f(x) = -10$
$x = 0,01$	$f(x) = 100$	$x = -0,01$	$f(x) = -100$
$x = 0,001$	$f(x) = 1000$	$x = -0,001$	$f(x) = -1000$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

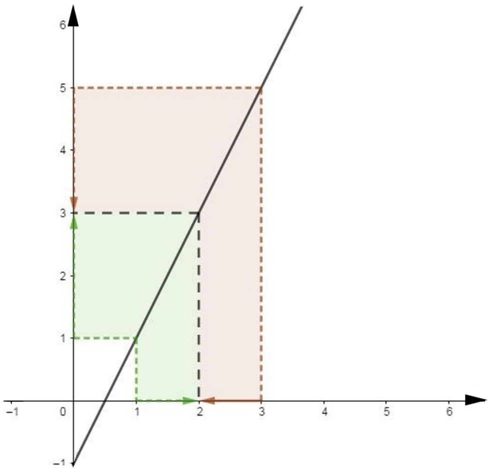
Fonte: Produzido pelo autor

Comparando as tabelas 2.2 e 2.3, percebe-se que na segunda os valores das aproximações pela direita e pela esquerda são divergentes (ou seja, tanto pela esquerda quanto pela direita os valores de $f(x)$ não se aproximam de um valor de L), donde conclui-se que a função $g(x) = \frac{1}{x}$ não possui limite quando x tende a 0. Com isso, para que possamos dizer que o limite de uma função f quando o valor de x tende a um valor a *exista* e seja um valor L, é necessário que $f(x)$ se aproxime tanto pela esquerda quanto pela direita do mesmo valor L. Em outras palavras, dizemos que os *limites laterais* devem ser iguais. Para tal, representamos da seguinte maneira a ideia desses limites laterais:

- Representamos por $\lim_{x \to a_+} f(x)$ o limite de uma função quando o x tende a a por valores maiores que ele, ou seja, $x > a$. Chamamos de *limite pela direita*.
- Representamos por $\lim_{x \to a_-} f(x)$ o limite de uma função quando o x tende a a por valores menores que ele, ou seja, $x < a$. Chamamos de *limite pela esquerda*.

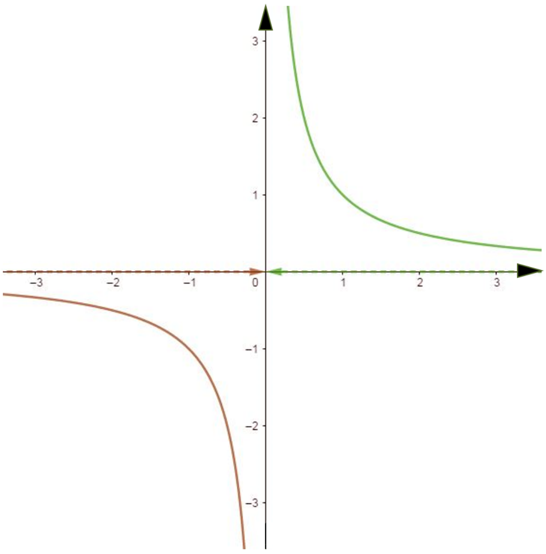
Podemos visualizar a existência do limite por meio de seus limites laterais na representação gráfica dos exemplos 2.2 e 2.3, os quais já vimos que apenas no primeiro exemplo os limites laterais tendem a um mesmo valor.

Figura 2.15: Gráfico da função $f(x) = 2x - 1$



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.16: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Produzido pelo autor

Sendo assim, dizemos que se $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{x\to a_-} f(x) = L$, então o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e seu valor é L. Também é importante ressaltar que mesmo funções que não sejam definidas em algum número real α podem ter limite com sua variável tendendo a esse α. Para exemplificarmos tal fato, considere o mesmo exemplo 2.4.1, mas agora com algumas poucas alterações no domínio e na lei de formação:

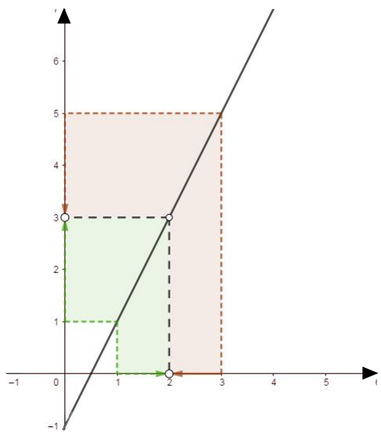
Exemplo 2.4.3. *Sejam as funções:*

a) $f_1 : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, *com* $f_1(x) = 2x - 1$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *com* $f_2(x) = \begin{cases} 2x - 1, \ se\ x \neq 2 \\ 4, \ se\ x = 2 \end{cases}$

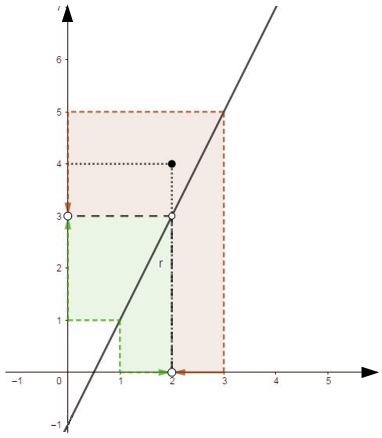
As duas funções possuem semelhanças, em relação a suas leis de formação, mas com algumas peculiaridades. Mesmo assim, percebe-se que ao esboçar seus gráficos (figuras 2.17 e 2.18), encontra-se que o limite das duas funções quando x tende a 2 mantém-se 3. O exemplo da função f_1 mostra que quando o x tender a um certo valor a, não é necessário que este a esteja no domínio da função para que haja limite, uma vez que $2 \notin D_{f_1}$, mas $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = 3$. Ao mesmo tempo, a função f_2 exemplifica que não é necessário que o limite de f_2 quando o x tender a um x_0 tenha o mesmo valor de $f_2(x_0)$, pois a ideia de limite é que o valor de x *se aproxime* de x_0, e não *seja* x_0. No exemplo, vemos que $f_2(2) = 4$, mas $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x) = 3$.

Figura 2.17: Gráfico da função f_1



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 2.18: Gráfico da função f_2



Fonte: Produzido pelo autor

Entretanto, cabe um questionamento: como se medir essa aproximação, essa distância que os valores de x terão de um determinado valor fixo? No exemplo 2.4.1, como se medir essa distância dos valores de x até o 2, e de $f(x)$ até 3? Posteriormente neste trabalho, depois de se definir a ideia de *métrica*, poderemos nos aprofundar mais nos conceitos formais de limite.

2.4.2 Continuidade

Nos exemplos 2.4.2 e 2.4.3, percebe-se que o gráfico das respectivas funções não possuem uma linha contínua, ou seja, o desenho dá "saltos"em determinados pontos, como são observados respectivamente nas figuras 2.16, 2.17 e 2.18. Tal fato já não é observado no exemplo 2.4.1, onde $f(2) = 2.2 - 1 = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2} 2x - 1 = 3$. Com isso, podemos distinguir este último exemplo dos outros revelando que trata-se de uma *função contínua* no ponto $x = 2$, pois não é necessário "retirar a linha do papel"para se desenhar o gráfico da função em torno do ponto $x = 2$.

Munem e Foulis (2008, p. 61) definem função contínua em um ponto a como sendo uma função f que deve atender três condições:

1. $f(a)$ é definido na função

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se isso ocorrer para todos os pontos pertencentes ao domínio da função, podemos dizer que a função é contínua em todo seu domínio, ou simplesmente que ela é contínua. Através desta definição, é fácil se observar que o exemplo 2.4.1 é um função contínua em $x = 2$, diferentemente dos demais exemplos: a função não é definida quando $x = 0$

no 2.4.2, assim como a função não é definida em $x = 2$ na letra "a"do exemplo 2.4.3, enquanto na letra "b"do mesmo exemplo, temos que $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Entretanto, um problema que surge é que como podemos definir se uma função é contínua para todos seus pontos? Uma vez que a função $f(x) = 2x - 1$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$, fica praticamente impossível calcular se essa função será contínua para todos seus pontos pela definição dos autores supracitados, uma vez que seu domínio é um conjunto infinito. Porém, no capítulo seguinte trabalharemos com uma outra definição de função contínua, que assim como a definição formal de limite, também poderá ser melhor entendida quando aprofundarmos mais o estudo de distâncias e métricas, que veremos no capítulo a seguir.

3 Um Pouco de Topologia

Como foi explanado na introdução deste trabalho, este capítulo tratará de alguns conceitos introdutórios sobre Topologia. Não será algo tão aprofundado, visto que esse trabalho é voltado também para estudantes do ensino médio. Ademais, com os conhecimentos que possuem nesse nível de ensino, principalmente das noções vistas no capítulo 2, o leitor desta dissertação terá condições para um bom entendimento da mesma.

3.1 Métricas e Espaços Métricos

Quando apresentamos a noção de convergência de funções, vimos que uma função $f : A \to B$ é *contínua* em um ponto qualquer $\alpha \in A$ se todos os valores $f(x)$ encontrados a partir de um certo momento forem tão próximos quanto se queira de $f(\alpha)$ a medida que os valores de x se tornam mais próximos a α. Além disso, apresentamos a noção de convergência de sequências: diz-se que uma sequência (A_n), $n = 1, 2, 3, ...$ cujos termos pertencem a um conjunto A *converge* para um certo $\alpha \in A$ quando a partir de um certo valor de n, os termos A_n se aproximem de α tanto quanto se queira. Diante disso, cabe-nos a pergunta: como mensurar essa distância que deixa os valores próximos uns dos outros?

Para responder, primeiramente é necessário definir bem o que seria *distância* num conjunto M. Esses conjuntos nos quais podemos definir distâncias são casos particulares de *espaços topológicos*, chamados de *espaços métricos*. Antes de definir espaço métrico, é crucial definir o que é *métrica*, a qual Elon (1970, p. 21) define:

Definição 3.1.1 (Métrica)**.** *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância do ponto x ao ponto y, de tal modo que:*

1. $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ *se* $x \neq y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; *quaisquer que sejam* $x, y, z \in M$.

Se uma relação obedecer essas três diretrizes, então podemos dizer que ela é uma métrica de um conjunto, ou seja, é uma forma de se medir distância entre pontos. Dada uma métrica d dentro de um conjunto M, um *espaço métrico* é o par (M, d) formado por esses dois elementos.

Neste trabalho, voltado para o ensino médio, nosso foco principal será nos conjuntos que usualmente são usados durante o ensino básico e médio: $\mathbb{R}$ e o $\mathbb{R}^2$ (o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), citando brevemente algumas características também do $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Para tal, as métricas sempre levarão em consideração o vetor "$x - y$", ou seja, de um ponto até outro. Mas vale ressaltar que a ideia de métrica vai além, pois é válida em $\mathbb{R}^n$ (o produto cartesiano do conjunto $\mathbb{R}$ "n"vezes), para quaisquer elementos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

A primeira métrica que estudaremos relaciona-se com álgebra, mais especificamente com *espaços vetoriais*. Define-se *produto escalar* de dois vetores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertencentes a $\mathbb{R}^n$ por $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. A partir daí, define-se *norma* do vetor x (representada por $\|x\|$) como sendo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}$, e obtém-se a fórmula da definição da métrica chamada *métrica euclidiana*, a qual Lourêdo et. al. (2012, p. 18) define como:

Definição 3.1.2 (Métrica Euclidiana)**.** *Dados* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *a distância entre* x *e* y *com relação à norma* $\|\cdot\|$ *é definida por:*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

O espaço $\mathbb{R}^n$ com essa métrica d é chamado *Espaço Euclidiano*. Como foi falado, resumiremos os estudos até o $\mathbb{R}^3$, onde temos para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

- No $\mathbb{R}$: $d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$
- No $\mathbb{R}^2$: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- No $\mathbb{R}^3$: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

A métrica euclidiana é a formalmente utilizada na educação básico e no ensino médio, em estudos sobre Módulos e na questão da distância de dois pontos em Geometria Analítica, por exemplo. Sendo assim, devido à sua importância provaremos que a métrica euclidiana da reta - ou seja, do $\mathbb{R}$ - obedece os requisitos para ser definido como uma métrica, para três pontos x_1, x_2 e x_3 distintos:

1. $d(x_1, x_1) = 0$, $d(x_1, x_2) > 0$ se $x_1 \neq x_2$:
   $d(x_1, x_1) = |x_1 - x_1| = |0| = 0$. Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| > 0$, uma vez que o módulo de um número diferente de 0 é sempre um valor positivo.

2. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$:
   $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| = d(x_2, x_1)$.

3. $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$; quaisquer que sejam $x_1, x_2, x_3 \in M$.
   Essa propriedade é a chamada desigualdade triangular.
   $d(x_1, x_3) = |x_1 - x_3| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3|$. Sabemos que para qualquer valor $a \in \mathbb{R}$, temos que $-|a| \leq a \leq |a|$, sendo assim ampliaremos a ideia para $(x_1 - x_2)$ e $(x_2 - x_3)$, obtendo $-|x_1 - x_2| \leq x_1 - x_2 \leq |x_1 - x_2|$ e $-|x_2 - x_3| \leq x_2 - x_3 \leq |x_2 - x_3|$. Somando as duas expressões, membro a membro, temos: $-(|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|) \leq x_1 - x_3 \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$.
   Se $x_1 - x_3 \geq 0$, então $|x_1 - x_3| = x_1 - x_3 \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$.
   Se $x_1 - x_3 < 0$, então $|x_1 - x_3| = -(x_1 - x_3) \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$.
   Com isso, em qualquer um dos casos, temos que $d(x_1, x_3) = |x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Agora, verifiquemos os requisitos de métrica para a métrica euclidiana no plano - ou seja, no $\mathbb{R}^2$ -, usando como exemplos dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$. Ressaltamos que para o requisito 3, usaremos a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, que será provada no anexo A desta dissertação, baseada no trabalho de Silva (2019, p. 39):

Teorema 3.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Sejam* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, *então* $(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq ({a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2)({b_1}^2 + \ldots + {b_n}^2)$.

Extrairemos a raiz quadrada dos dois membros da desigualdade, obtendo assim a desigualdade $|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| \leq \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2}.\sqrt{{b_1}^2 + \ldots + {b_n}^2}$. Uma vez que $x \leq |x|$, será mais prático para a o que queremos provar usar a desigualdade $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2}.\sqrt{{b_1}^2 + \ldots + {b_n}^2}$, a qual será usada mais adiante.

1. $d(P_1, P_1) = 0$, $d(P_1, P_2) > 0$ se $P_1 \neq P_2$:
   $d(P_1, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{0 + 0} = 0$. Se $P_1 \neq P_2$, então $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Como $(x_1 - x_2)^2 > 0$ e $(y_1 - y_2)^2 > 0$, teremos a raiz quadrada de um número positivo, que por sua vez também é maior que zero.

2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$:
   $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P_2, P_1)$.

3. $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$; quaisquer que sejam $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$.
   Considere $[d(P_1, P_3)]^2$, e provaremos que $[d(P_1, P_3)]^2 \leq [d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)]^2$. Temos que $[d(P_1, P_3)]^2 = [\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}]^2 = |(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2|$, e como foi visto na definição 2.3.3 sobre módulos, uma vez que $(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \geq 0$, então $|(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2| = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$. Sendo assim, podemos escrever:

   $[d(P_1, P_3)]^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = [(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)]^2 + [(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)]^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + (y_2 - y_3)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2[(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)]$.

Usando-se da desigualdade obtida pelo teorema 3.1.1, obtemos $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$. Com isso, substituindo na última parcela da igualdade obtida anteriormente para $[d(P_1, P_3)]^2$, obtemos:

$$\begin{gathered}
[d(P_1, P_3)]^2 \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \\
2[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}] \Rightarrow \\
[d(P_1, P_3)]^2 \leq [\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}]^2 \Rightarrow \\
[d(P_1, P_3)]^2 \leq [d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)]^2 \Rightarrow \\
d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).
\end{gathered}$$

Agora, vamos exemplificar com valores numéricos, respectivamente em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

Exemplo 3.1.1 (Métrica Euclidiana em $\mathbb{R}$)**.** *Dados dois pontos na reta real $a = 7$ e $b = 4$, a distância entre eles pela métrica de Euclides é:*
$d(a, b) = \sqrt{(7 - 4)^2} = |7 - 4| = |3| = 3$

Exemplo 3.1.2 (Métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dados dois pontos no plano $a = (7, 2)$ e $b = (4, 6)$, a distância entre eles pela métrica de Euclides é:*
$d(a, b) = \sqrt{(7 - 4)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

Exemplo 3.1.3 (Métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^3$)**.** *Dados dois pontos no espaço $a = (7, 2, 8)$ e $b = (4, 6, -4)$, a distância entre eles pela métrica de Euclides é:*
$d(a, b) = \sqrt{(7 - 4)^2 + (2 - 6)^2 + (8 - (-4))^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$

Pelos exemplos, vemos que a métrica usada em $\mathbb{R}$ no exemplo 3.1.1 assemelha-se muito com a ideia de módulo vista no ensino básico, a qual definimos na seção de módulo do capítulo 2 como a distância do valor o qual queremos calcular o módulo até a origem da reta, uma vez que $d(7, 4) = |7-4| = |3| = 3$. Já no exemplo 3.1.2, a fórmula da métrica euclidiana assemelha-se com a de distância entre dois pontos vista em Geometria Analítica no ensino médio, assim como a equação geral da circunferência no plano cartesiano. Isso demonstra que tal métrica já é utilizada dentro de determinados conteúdos, mesmo que não seja dada de forma explícita.

Entretanto, essa métrica não é a única que existe nos espaços euclidianos. Apresentamos agora duas outras normas importantes quando falamos de $\mathbb{R}^n$: são as normas da *soma* e do *máximo*. São outras formas de se medir distância entre dois pontos:

Definição 3.1.3 (Métrica da Soma)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, define-se métrica da soma, representada por $d_S(\cdot, \cdot)$, como sendo:*

$$d_S(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Definição 3.1.4 (Métrica do Máximo)**.** *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, define-se métrica do máximo, representada por $d_M(\cdot, \cdot)$, como sendo:*

$$d_M(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

Essas duas métricas cumprem os três requisitos da definição 3.1.1. Assim como foi feito para a métrica euclidiana, restringimo-nos a estudar as métricas da soma e do máximo nos conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, obtendo em $\mathbb{R}^3$ respectivamente $d_S(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$ e $d_M(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}$. Para exemplificar, vamos usar os mesmos pontos dos exemplos 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, agora com as métricas da soma e do máximo:

Exemplo 3.1.4 (Métrica da Soma em $\mathbb{R}$)**.** *Dados dois pontos na reta real $a = 7$ e $b = 4$, a distância entre eles pela métrica da soma é:*
$d_S(a, b) = |7 - 4| = |3| = 3$

Exemplo 3.1.5 (Métrica da Soma em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dados dois pontos no plano $a = (7, 2)$ e $b = (4, 6)$, a distância entre eles pela métrica da soma é:*
$d_S(a, b) = |7 - 4| + |2 - 6| = |3| + |-4| = 7.$

Exemplo 3.1.6 (Métrica da Soma em $\mathbb{R}^3$)**.** *Dados dois pontos no espaço $a = (7, 2, 8)$ e $b = (4, 6, -4)$, a distância entre eles pela métrica da soma é:*
$d_S(a, b) = |7 - 4| + |2 - 6| + |8 - (-4)| = |3| + |-4| + |12| = 3 + 4 + 12 = 19.$

Exemplo 3.1.7 (Métrica do Máximo em $\mathbb{R}$)**.** *Dados dois pontos na reta real $a = 7$ e $b = 4$, a distância entre eles pela métrica do máximo é:*
$d_M(a, b) = max\{|7 - 4|\} = max\{|3|\} = max\{3\} = 3.$

Exemplo 3.1.8 (Métrica do Máximo em $\mathbb{R}^2$)**.** *Dados dois pontos no plano $a = (7, 2)$ e $b = (4, 6)$, a distância entre eles pela métrica do máximo é:*
$d_M(a, b) = max\{|7 - 4|, |2 - 6|\} = max\{|3|, |-4|\} = max\{3, 4\} = 4.$

Exemplo 3.1.9 (Métrica do Máximo em $\mathbb{R}^3$)**.** *Dados dois pontos no espaço $a = (7, 2, 8)$ e $b = (4, 6, -4)$, a distância entre eles pela métrica do máximo é:*
$d_M(a, b) = max\{|7 - 4|, |2 - 6|, |8 - (-4)|\} = max\{|3|, |-4|, |12|\} = max\{3, 4, 12\} = 12.$

Quando vemos os exemplos, nota-se que em $\mathbb{R}$ as três métricas resultam iguais, o que é justificável uma vez que $\sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = max\{|x - y|\}$. Quando estamos na reta real, só temos uma direção a seguir, então a distância é medida em apenas uma dimensão, não ocasionando assim diferenças entre os meios de medir uma certa distância. Já em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, nota-se que os resultados são diferentes, o que implicará também na representação gráfica dessas distâncias, que serão estudadas na seção seguinte.

Porém, espaços métricos não se destinam apenas a medir a distância entre pontos de um conjunto. Pode-se medir não só a distância entre um ponto e um conjunto, mas também entre dois conjuntos quaisquer. Dentro de um espaço métrico M qualquer e tomando uma métrica d, Lima (1970, p. 24) define a distância de um ponto $x \in M$ a um subconjunto não-vazio $A \subset M$ como sendo $d(x, A) = inf\{d(x, a); a \in A\}$, ou seja, é a menor distância entre x e um elemento qualquer do conjunto A. Já quanto tem-se dois conjuntos não-vazios A e B dentro de um mesmo espaço métrico M, a distância entre eles é tomada por $d(A, B) = inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$.

3.2 Bolas e Esferas

Quando escutamos as palavras “bola”e ” “esfera”, pensamos logo em figuras com o formato que comumente conhecemos, com o corpo redondo em toda sua extensão. A ideia é que dada uma certa medida α e um ponto qualquer x, todos os pontos que estão a essa distância α de x fazem parte da bola ou da esfera centrada em x. Entretanto, essa ideia somente existe quando estamos falando da métrica euclidiana. Na seção anterior, vimos que existem outras formas de medir distância, como a métrica da soma e do máximo. Sendo assim, cada forma de se medir gerará um formato diferente para as bolas e esferas.

Sejam M um espaço métrico, $a \in M$ e r um número real positivo. Em Marcon (2000, p. 27) encontramos as seguintes definições:

Definição 3.2.1 (Bola Aberta)**.** *Uma bola aberta de centro a e raio r - representada por $B(a, r)$ - é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r, ou seja, $B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$.*

Definição 3.2.2 (Bola Fechada)**.** *Uma bola fechada de centro a e raio r - representada por $B[a, r]$ - é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual do que r, ou seja, $B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$.*

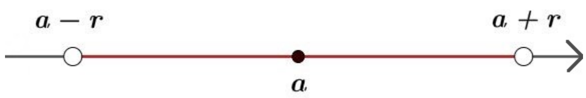
Definição 3.2.3 (Esfera)**.** *Uma esfera de centro a e raio r - representada por $S(a, r)$ - é o conjunto dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r, ou seja, $S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}$.*

Das definições, percebe-se que $B[a, r] = B(a, r) \cup S(a, r)$, uma vez que a bola aberta contempla a região em torno das figuras formadas, sem considerar a linha que as forma (ou seja, onde a distância é menor que o raio), enquanto que a esfera é apenas a linha, desprezando a região interna da figura (apenas onde a distância será igual ao raio). Ao unir esses dois conjuntos, tem-se os pontos onde a distância será menor ou igual ao raio, ou seja, a bola fechada. Para exemplificar, suponha uma laranja: a laranja completa, com casca e gomos, seria a ideia da bola fechada; a laranja descascada - ou seja, só seus gomos - seria a ideia da bola aberta; enquanto que se pudéssemos organizar apenas a casca para que ela voltasse ao seu formato original, teríamos a esfera.

Quando falamos em bolas e esferas, não necessariamente estamos falando de objetos esféricos propriamente ditos, como uma bola de futebol ou simplesmente um círculo, por exemplo. Para cada conjunto - neste trabalho em especial, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ - deve-se associar os conceitos de acordo com o espaço com o qual estamos trabalhando. Por exemplo, quando trata-se do $\mathbb{R}$, vimos na seção anterior que as três métricas estudadas não se diferenciam. Sendo assim, veremos o comportamento das bolas e esferas na reta real:

- A bola aberta é o intervalo $(a - r, a + r)$, pois contempla todos os pontos cuja distância para o ponto a é menor que r, ou seja, para todo $x \in (a - r, a + r)$, tem-se $d(a, x) = |a - x| < r$.

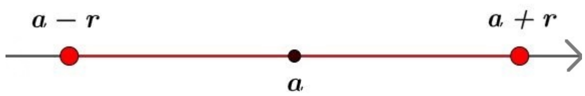
Figura 3.1: Representação Gráfica da Bola Aberta no $\mathbb{R}$



Fonte: Produzido pelo autor

- A bola fechada é o intervalo $[a - r, a + r]$, pois contempla todos os pontos cuja distância para o ponto a é menor ou igual que r, ou seja, para todo $x \in [a - r, a + r]$, tem-se $d(a, x) = |a - x| \leq r$;

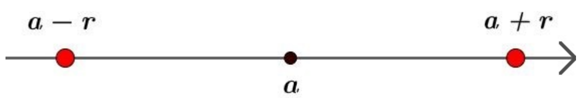
Figura 3.2: Representação Gráfica da Bola Fechada no $\mathbb{R}$



Fonte: Produzido pelo autor

- A esfera são apenas os pontos $a - r$ e $a + r$, pois são os pontos cuja distância para o valor a é igual a r, ou seja, $|a - (a - r)| = |r| = r$, e $|a - (a + r)| = |-r| = r$.

Figura 3.3: Representação Gráfica da Esfera no $\mathbb{R}$



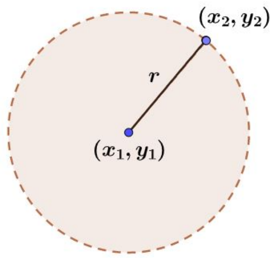
Fonte: Produzido pelo autor

Quando consideramos o espaço $\mathbb{R}^2$, podemos trabalhar o conceito das bolas e esferas dentro de um plano cartesiano, aliado com as diferentes normas já citadas. Como nesse conjunto já encontramos uma diferença entre os resultados para a distância entre dois pontos obtidos com diferentes métricas, nota-se que bolas e esferas terão não formatos semelhantes para métricas diferentes. Consideremos $a = (x_1, y_1)$ e $x = (x_2, y_2)$, e aplicaremos as definições 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 no caso do plano.

- Para a norma euclidiana:

  Bola aberta: $d(a,x) < r \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < r \Rightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 < r^2$, ou seja, temos um disco de raio r e centro a, cujo contorno não pertence ao conjunto.

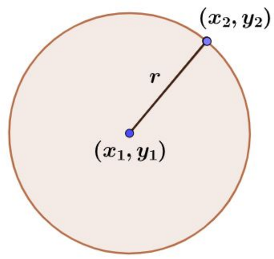
Figura 3.4: Bola Aberta pela Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Produzido pelo autor

Bola fechada: $d(a,x) \leq r \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq r \Rightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \leq r^2$, ou seja, temos um disco de raio r e centro a, cujo contorno pertence ao conjunto.

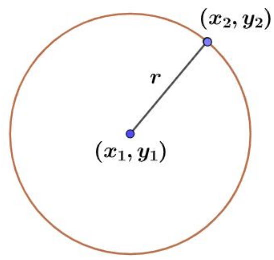
Figura 3.5: Bola Fechada pela Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Produzido pelo autor

Esfera: $d(a,x) = r \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = r \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = r^2$, ou seja, temos uma circunferência de raio r e centro a.

Figura 3.6: Esfera pela Norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$

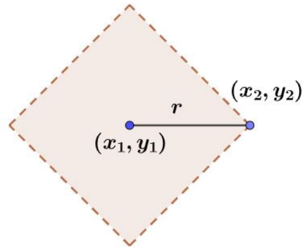


Fonte: Produzido pelo autor

- Para a norma da soma:

  Bola aberta: $d(a,x) < r \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < r$, ou seja, uma superfície em forma de um losango, de centro a e diagonais iguais a $2r$ e paralelas aos eixos Ox e Oy, cujo contorno não pertence ao conjunto.

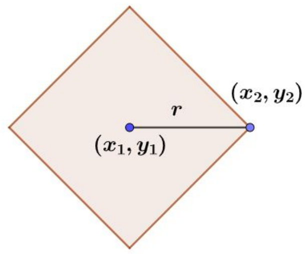
Figura 3.7: Bola Aberta pela Norma da Soma em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Produzido pelo autor

Bola Fechada: $d(a,x) \leq r \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq r$, ou seja, uma superfície em forma de um losango, de centro a e diagonais iguais a $2r$ e paralelas aos eixos Ox e Oy, cujo contorno pertence ao conjunto.

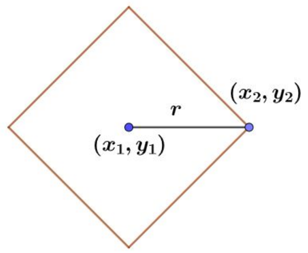
Figura 3.8: Bola Fechada pela Norma da Soma em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Produzido pelo autor

Esfera: $d(a,x) = r \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = r$, ou seja, um losango de centro a e diagonais iguais a $2r$ e paralelas aos eixos Ox e Oy.

Figura 3.9: Esfera pela Norma da Soma em $\mathbb{R}^2$

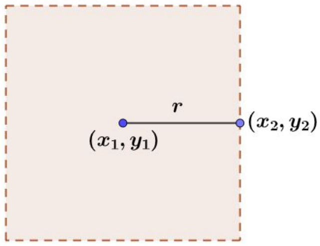


Fonte: Produzido pelo autor

- Para a norma do máximo:

  Bola aberta: $d(a,x) < r \Rightarrow max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < r$, ou seja, uma superfície quadrada de centro a e lados iguais a $2r$, paralelos aos eixos Ox e Oy, cujo contorno não pertence ao conjunto.

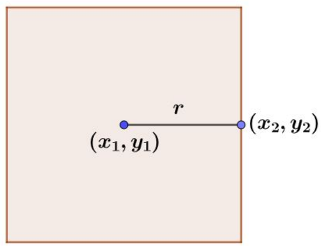
Figura 3.10: Bola Aberta pela Norma do Máximo



Fonte: Produzido pelo autor

Bola fechada: $d(a,x) \leq r \Rightarrow max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \leq r$, ou seja, uma superfície quadrada de centro a e lados iguais a $2r$, paralelos aos eixos Ox e Oy, cujo contorno pertence ao conjunto.

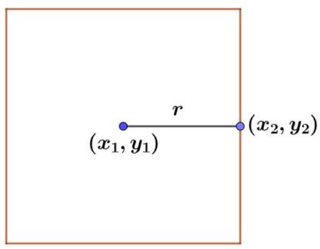
Figura 3.11: Bola Fechada pela Norma do Máximo



Fonte: Produzido pelo autor

Esfera: $d(a,x) = r \Rightarrow max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = r$, ou seja, um quadrado de centro a e lados iguais a $2r$, paralelos aos eixos Ox e Oy.

Figura 3.12: Esfera pela Norma do Máximo



Fonte: Produzido pelo autor

Já no $\mathbb{R}^3$, temos a formação de sólidos geométricos: a norma euclidiana produz bolas em formato de um corpo de superfície esférica, a norma da soma produz bolas em formato de octaedros com diagonais paralelas aos eixos, enquanto a norma do máximo produz bolas em formato cúbico, com arestas paralelas aos eixos (Lima, 2012b, p. 12).

Vale lembrar que as definições de bola aberta, bola fechada e esfera também são aplicadas no $\mathbb{R}^3$: na bola aberta, não temos uma "casca", ou seja, uma superfície para os sólidos citados, casca essa que aparecerá na bola fechada de cada sólido; e por fim, a esfera só temos essa "casca", ou seja, é como se o sólido fosse oco por dentro. O autor ainda salienta que independente da norma utilizada, as bolas em $\mathbb{R}^n$ - em particular, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ - são *conjuntos convexos*, ou seja, um segmento de reta ligando dois pontos x e y de uma bola $[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$ está completamente incluso nesta (se $x, y \in B$, então $[x, y] \subset B$).

Com isso, percebe-se que num mesmo conjunto, a representação gráfica de um objeto pode se apresentar de maneiras diferentes dependendo da métrica que se trabalha, ou seja, da forma como se mede a distância entre dois pontos. Mais adiante, detalharemos melhor sobre a construção das representações das bolas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, nas três métricas comentadas nesta subseção.

3.3 Ponto Interior, Exterior, Fronteira e Vizinhança

A fim de se chegar ao entendimento de conjuntos abertos e fechados, é necessário trazer a tona conceitos como o de pontos interior, exterior e de fronteira. Dado um subconjunto S de um espaço topológico X, chama-se ponto interior de S todo ponto que pertencer a uma bola aberta $A \subset S$. O conjunto de todos os pontos interiores de S chama-se *interior* de S, ou simplesmente, $int(S)$. Como o $int(S)$ é formado por todos os pontos interiores, que por sua vez, pertencem a uma bola aberta, pode-se dizer então que $int(S)$ é formado pela união de todos as bolas abertas de S. Além disso, dado um subconjunto S de um espaço métrico M, diz-se que $x \in int(S)$ se, e somente se, existe uma bola aberta de centro x completamente contida em S. Da mesma forma, o conjunto de pontos os quais podemos encontrar uma bola aberta F que não esteja contida S formam o *exterior* de S, sendo representado por $ext(S)$.

O conjunto V será considerado *vizinhança* de um ponto $x \in X$ de um espaço topológico quando $x \in int(V)$. Dado um subconjunto $S \subset X$, todos os pontos x que contenham em sua vizinhança pontos de S e de $X - S$, esses pontos são classificados como *pontos de fronteira*, e formam o conjunto $fr(S)$, denominado fronteira de S em X. Em outras palavras, para um elemento $x \in S$ ser um ponto de fronteira, $x \notin int(S)$ e $x \notin ext(S)$.

Lourêdo et. al (2012, p. 22) usa a definição 3.2.1 de bola aberta para conceituar pontos de um conjunto. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto , tem-se uma das seguintes possibilidades:

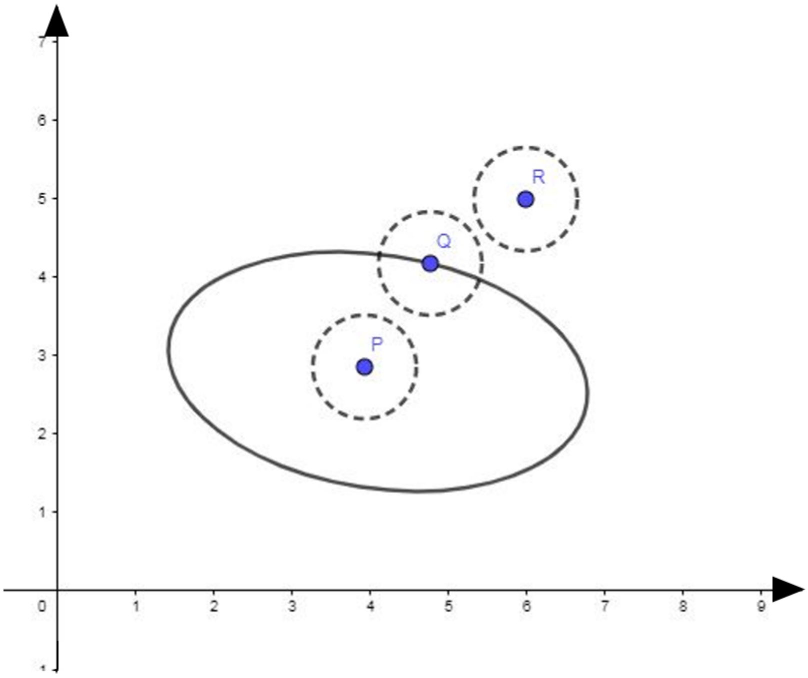
1. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$;

2. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A^c = \mathbb{R}^n - A$;

3. Para qualquer $\epsilon > 0$, a bola aberta $B(x, \epsilon)$ possui pontos tanto de A como de A^c.

Os itens 1, 2 e 3 representam, respectivamente, as definições de *ponto interior*, *ponto exterior* e *ponto de fronteira*. Respectivamente, tais pontos formam $int(A)$, $ext(A)$ e $fr(A)$.

Figura 3.13: Exemplo de pontos interior (P), exterior (R) e de fronteira (Q)



Fonte: Produzido pelo autor

3.4 Conjuntos Abertos, Fechados e um pouco de Topologia

Lima (1970, p. 53) define: "um subconjunto A de um espaço métrico M é *aberto* quando todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A". Em outras palavras, pode-se definir um conjunto aberto A num espaço métrico M através de uma constante ϵ: A é é um conjunto aberto se para todo $a \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset A$. Já Lipschutz (1980, p.70) define conjunto aberto como um conjunto tal que todos seus pontos são pontos interiores. Sendo assim:

Definição 3.4.1 (Conjunto Aberto)**.** *Um subconjunto $A \subset M$ é dito aberto em M se $int(A) = A$.*

Os conjuntos abertos de um espaço métrico M gozam de algumas propriedades:

- O próprio espaço inteiro M e o conjunto vazio $\varnothing$ são subconjuntos abertos em M;
- A união de subconjuntos abertos em M ainda é um subconjunto aberto em M, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos abertos em M, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ também é um conjunto aberto em M. Essa propriedade também vale para a união de infinitos conjuntos abertos;
- A intersecção finita de subconjuntos abertos em M ainda é um subconjunto aberto em M, ou seja, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos abertos em M, então $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ também é um conjunto aberto em M.

Usando a definição de conjunto aberto, podemos definir um *conjunto fechado*. Dado um espaço topológico (X, d), o subconjunto $F \subset X$ será um conjunto fechado se o seu complementar, ou seja, $X - F$, for aberto. Dessa forma, por exemplo, o conjunto $B = [a, b]$ é fechado, uma vez que seu complementar $B^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ é um conjunto aberto, já que a união de dois conjuntos abertos continua sendo um conjunto aberto.

Outra forma de se definir um conjunto fechado é através da ideia de *ponto de acumulação*, que Domingues (1982, p. 84) define como sendo:

Definição 3.4.2 (Ponto de acumulação)**.** *É todo ponto $a \in X$ cujo o conjunto $(B(a, \delta) - a) \cap X$ é infinito, para todo $\delta > 0$.*

Em outras palavras, seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico, o ponto $a \in M$ é um ponto de acumulação de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a. Lipschutz (1980, p.72) complementa a definição de conjuntos fechados como sendo um subconjunto que contém cada um de seus pontos de acumulação. Denotamos X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X, e temos que:

Proposição 3.4.1. *Seja M um espaço métrico. O conjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, F' está contido em F.*

Como a proposição remete a uma dupla indicação, faremos a demonstração em duas partes, provando a ida, considerando como hipótese que F é fechado; e em seguida provando a volta, com a hipótese de que $F' \subset F$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) **Se F é fechado, então $F' \subset F$.**

- Suponha que existe a um ponto de acumulação de F, tal que $a \notin F$, então $a \in F^c$, que é aberto. Logo, existe $\delta > 0$ tal que a bola centrada em a esteja contida em F^c, ou seja, $B(a, \delta) \cap F = \varnothing$. Porém, como $a \in F'$, $(B(a, \delta) - a) \cap F$ é infinito, o que acarreta em $B(a, \delta) \cap F$ também ser infinito, obtendo assim uma contradição.

($\Leftarrow$) **Se $F' \subset F$, então F é fechado.**

- Seja $a \in F^c$. Como $F' \subset F$, vimos no capítulo sobre conjuntos que $F^c \subset (F')^c$, ou seja, temos que $a \in (F')^c$, ou seja, a não é ponto de acumulação de F, logo existe $\delta > 0$ tal que $(B(a,\delta) - a) \cap F = \varnothing$. Mas como também $a \notin F$, temos que $(B(a,\delta)) \cap F = \varnothing$, equivalentemente a $(B(a,\delta) \subset F^c$, ou seja, todos os pontos de F^c são interiores, logo F^c é aberto, e com isso, F é fechado.

Um ponto p é aderente a A se para todo $\epsilon > 0$, a bola aberta centrada em p com raio ϵ possui alguma interseção com A (ou seja, $B(p,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$). Domingues (1982, p. 82) usa essa definição para definir o *fecho* de um conjunto A num espaço métrico M, denotado por $\overline{A}$, como sendo o conjunto de todos os pontos aderentes desse subconjunto A. É importante observar também que $\overline{A} = A \cup fr(A)$, onde é imediato observar que $A \subset \overline{A}$. Por exemplo, sejam os conjuntos $A_1 =]a,b]$, $A_2 = [a,b[$ e $A_3 =]a,b[$, o fecho desses três conjuntos é $\overline{A} = [a,b]$, uma vez que qualquer bola com centro num elemento pertencente a $\overline{A}$ interceptará tanto A_1, A_2 e A_3. Dada a definição de fecho, pode-se definir conjunto fechado como sendo aquele que contém seu fecho.

Da mesma forma que os conjuntos abertos, os fechados gozam das seguintes propriedades:

- O próprio espaço inteiro X e o conjunto vazio $\varnothing$ são subconjuntos fechados em X;
- A união finita de subconjuntos fechados em X ainda é um subconjunto fechado em X, ou seja, se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são subconjuntos fechados em X, então $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ também é um conjunto fechado em X;
- A intersecção de subconjuntos fechados em X ainda é um subconjunto fechado em X, ou seja, se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são subconjuntos fechados em X, então $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ também é um conjunto fechado em X. Essa propriedade também vale para a interseção de infinitos conjuntos fechados.

É importante se ressaltar que há conjuntos que nem são ditos abertos e nem fechados. O conjunto $X = (a,b]$ não é aberto, pois $b \in X$ não é ponto interior de A, pois não é capaz de existir uma bola aberta de centro b completamente contida em X; mas também X não é fechado, pois a é um ponto de acumulação de X, mas $a \notin X$.

As propriedades vistas para conjuntos abertos e fechados se assemelham aos axiomas dos chamados *espaços topológicos*. Considere um conjunto não-vazio X, e uma classe $P(X)$ de seus subconjuntos, então essa classe será uma topologia caso obedeça-se três axiomas:

- X e o conjunto vazio $\varnothing$ pertencem a $P(X)$;

- A união de um número qualquer de conjuntos de $P(X)$ pertence a $P(X)$;
- A intersecção de dois conjuntos quaisquer de $P(X)$ pertence a $P(X)$.

Tais propriedades definem uma *topologia* num conjunto X qualquer, onde a classe $P(X)$ possui elementos chamados "conjuntos $P(X)$-abertos"(ou simplesmente "abertos") e "conjuntos $P(X)$-fechados"(ou simplesmente "fechados") satisfazendo as três propriedades supracitadas. Um *espaço topológico* é o par $(X, P(X))$.

4 Aplicações

4.1 Limites e Continuidade

Agora que entendemos a ideia de medir distâncias, podemos aprofundar a ideia de limites e continuidade de uma função que vimos no capítulo 2. Vimos que a ideia de limite está ligada a ideia de o que acontece com o valores de $f(x)$ quando esse x se aproxima de um certo valor a. Em outras palavras, quando os valores de x se aproximam de um valor a, dizemos que $d(a,x)$ se aproxima de 0. Entretanto, como dissemos, no conceito de limite nunca teremos $x = a$, sendo assim é impossível ocorrer $d(a,x) = 0$. A mesma situação acontece com os valores de $f(x)$: eles se aproximam de algum valor L (não existe a obrigação de $f(a) = L$), entretanto sem necessariamente termos $f(x) = L$.

4.1.1 Limite e continuidade no contexto das métricas

Seja a um ponto de acumulação (definição 3.4.2)de um conjunto X. Como cada eixo se comporta como uma reta real $\mathbb{R}$, temos $d(x,a) = |x-a|$ para as métricas euclidiana, da soma e do máximo, logo calculando $d(x,a)$ e $d(f(x),L)$ por $|x-a|$ e $|f(x)-L|$, respectivamente. E como são valores maiores que 0, padronizamos $|x-a| < \delta$ e $|f(x)-L| < \varepsilon$. Com isso, podemos definir:

Definição 4.1.1 (Limite)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. O número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a quando para cada número real $\varepsilon > 0$ arbitrário, pode-se encontrar um $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ toda vez que $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$.*

Em outras palavras, temos duas bolas abertas: uma no eixo Ox, com centro em a e raio igual a δ, e outra no eixo Oy, com centro em L e raio igual a ε. Lima (2012a, p. 196) resume de uma forma mais simples como sendo "possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de a". Ou seja, dado um intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um conjunto $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ o qual todos os seus elementos possuem imagem em $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (ver figuras 2.15, 2.17 e 2.18).

Exemplo 4.1.1. *Usando a definição de limite, provaremos agora que $\lim\limits_{x\to 2} 2x - 1 = 3$. De fato, deseja-se encontrar $\delta > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ e $|x-2| < \delta$ implique em*

$|f(x) - 3| < \varepsilon$. De fato, $|f(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2|$. Como queremos $|x - 2| < \delta$, tem-se que $|f(x) - L| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon$.

Ou seja, dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomarmos um $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ que provamos que $\lim\limits_{x\to 2} 2x - 1 = 3$. Como foi colocado no capítulo 2, agora também podemos encontrar uma forma de discutir a continuidade de uma função para todo o seu domínio. Lima (2012a, p. 222) dá a seguinte definição de função contínua:

Definição 4.1.2 (Função contínua)**.** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um valor $a \in X$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se achar um $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Percebe-se que a definição é praticamente igual a definição 4.1.1 de limite, porém agora calcula-se exatamente sobre o valor de $f(a)$. Para exemplificar, tomemos a função $f(x) = 2x - 1$:

Exemplo 4.1.2. *Seja um $a \in Df$ arbitrário, deseja-se encontrar $\delta > 0$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$, $x \in Df$ e $|x - a| < \delta$ implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
De fato, $|f(x) - f(a)| = |2x - 1 - (2a - 1)| = |2x - 2a| = 2|x - a|$. Como $|x - a| < \delta$, tem-se que $|f(x) - f(a)| = 2|x - a| < 2\delta = \varepsilon$.

Logo, para um $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomarmos um $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ na definição e concluímos que a função $f(x) = 2x - 1$ será continua.

4.1.2 Funções Contínuas Em Espaços Métricos

Agora que temos o entendimento de o que é um conjunto aberto e uma função contínua, podemos aplicar a ideia de continuidade dentro da ideia de intervalos.

Primeiramente, é importante ressaltarmos que dado um subconjunto aberto $A \subset M$ e uma função contínua $f : M \to N$, não podemos definir que a imagem $f(A)$ será um conjunto aberto em N. Como exemplo, podemos citar o caso da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^2$. Tomando um conjunto aberto $A = (-a, a)$, sua imagem é $f(A) = [0, a^2)$, que não é aberto.

No capítulo 2, vimos a definição de continuidade para funções reais. Agora, usaremos a definição de funções contínuas no contexto das métricas para expandir a ideia de continuidade para conjuntos. Pela definição 4.1.2, temos que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$, e usando a definição 2.3.5 de inequação modular, essa implicação pode ser reescrita como $a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$, e finalmente, $x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Com isso, intera-se que a continuidade também pode determinada em termos de bolas: tem-se que $f(a-\delta, a+\delta) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. Em Lipschutz (1980, p. 77) encontramos a seguinte definição:

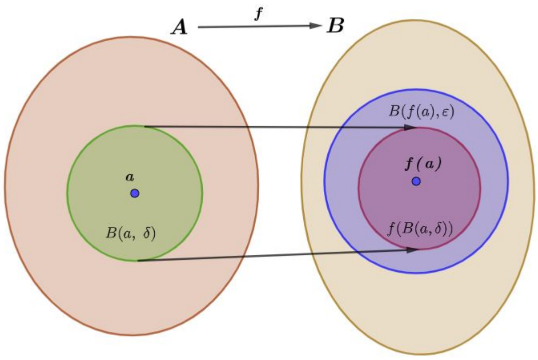
Definição 4.1.3 (Função Contínua em Espaços Métricos)**.** *Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\alpha \in \mathbb{R}$ se para qualquer conjunto aberto*

$A \subset M$ que contenha α, exista um outro conjunto aberto $B \subset N$ que contenha $f(\alpha)$ tal que $f(A) \subset B$.

Domingues (1982, p. 89) formata tal definição para a ideia de métricas. Supondo A e B espaços métricos munidos de uma métrica d qualquer. Uma função $f : A \to B$ é dita contínua num ponto $a \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Temos que $d(x, a) < \varepsilon$ representa em $\mathbb{R}$ o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, e mais geralmente, uma bola de centro a e raio δ. Já $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ representa em $\mathbb{R}$ o intervalo $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, e mais geralmente, uma bola de centro $f(a)$ e raio ε. Então, uma função $f : A \to B$ é contínua em $a \in A$ se, e somente se, $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

Figura 4.1: Continuidade de uma Função no ponto a



Fonte: Do autor

As funções para as quais a imagem $f(A)$ de qualquer conjunto aberto A será um conjunto aberto no contradomínio, chama-se *aplicação aberta*. Todavia, pode-se verificar que $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo subconjunto aberto $B \subset N$ é um subconjunto aberto de N.

4.1.3 Limites no Ensino Médio

O conceito de limites e continuidade não é algo tão abordado durante o Ensino Médio, por não ser cobrado em exames vestibulares e no ENEM. Entretanto, a ideia de limite pode ser considerada como uma continuação no estudo de funções, que se iniciam no último ano do ensino fundamental, perdurando até o 3º ano do ensino médio. O conteúdo de funções é de extrema importância para o aluno, uma vez que não só é algo bastante concreto no mundo real, indo ao encontro de uma das competências de Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000, p. 113), a saber, "contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico"; mas como também é base para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, do ensino superior.

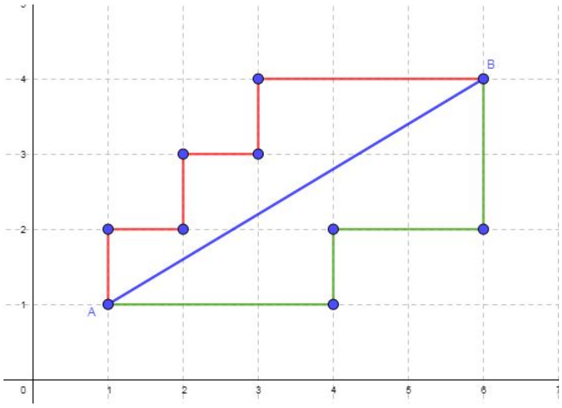
Nílson José Machado, professor da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, afirma na entrevista que deu a Simões (2015) que é possível já iniciar estudos de Cálculo já no ensino médio, mas ressalta que deve ser da forma correta, não sendo ensinado todo o conteúdo em si, apenas ideias fundamentais de cada um; ao invés de "antecipar"o que se é ensinado na faculdade. Ele exemplifica com o ensino de limites: "a ideia intuitiva de limite é simples, pois é a ideia de aproximações sucessivas, porém o conceito formal de limite é pesadíssimo; ainda assim, passou a ser decisivo."Essas ideias fundamentais precisam ser explicadas utilizando-se apenas de linguagem cotidiana ao invés da técnica e estarem relacionadas com outras ideias da mesma disciplina e também de outras disciplinas, como ele exemplifica: "Mapas, por exemplo, são uma ideia fundamental da geografia, mas você não pode ver um plano cartesiano como uma espécia de mapa?"Para Nílson, essas ideias fundamentais do cálculo seriam em relação a movimentos e mudanças, como em questões sobre variação de velocidade, e deveriam ser trabalhadas com funções mais simples, como as polinomiais.

4.2 A Geometria do Táxi: uma proposta para o ensino médio

Um exemplo do uso da norma da soma apresentada no capítulo 3 e que pode ser aplicado no ensino médio é a chamada *geometria do táxi*. Nos anos iniciais da vida educacional, sempre nos foi ensinado que a menor distância entre dois pontos a e b é um segmento de reta que vai do ponto a até o ponto b. Essa ideia nos leva a crer que existe um único menor caminho que sai de a até b. Claramente, de todos os caminhos possíveis entre esses dois pontos, dizemos que a distância entre eles é o ínfimo desses caminhos, sendo então o segmento de reta de extremos a e b. Entretanto, quando colocamos esses dois pontos em uma malha com a condição que os caminhos entre os pontos passem apenas pelas retas paralelas aos eixos, não será possível de ligá-los através de um único segmento reta.

O nome dessa geometria vem de um exemplo comum do cotidiano: quando considera-se um táxi sai de uma posição inicial até uma posição final, em uma cidade cujas ruas são todas paralelas e ortogonais, deve-se salientar que não é possível que o veículo "passe por cima"ou "sobrevoe"quarteirões que possuam prédios, casas ou outros estabelecimentos. Como cita César (2010, p. 4), "a Geometria do Táxi é a Geometria do pedestre que caminha pelas ruas de uma cidade". Nessa Geometria, a métrica da Geometria Euclidiana é substituída por uma nova métrica, e não teremos um único menor caminho. Para exemplificar, vamos supor dois pontos $A(1,1)$ e $B(6,4)$, como representado na figura 4.2. A linha em azul determina a distância a ser medida na métrica euclidiana, enquanto as linhas em vermelho e em verde representam dois possíveis caminhos pela métrica do táxi:

Figura 4.2: Exemplo da Geometria do Táxi



Fonte: Do autor

A distância entre os pontos A e B pela métrica euclidiana é dada por: $d(A, B) = \sqrt{(6-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \cong 5,83$.

Como foi dito anteriormente, o caminho azul não respeita as linhas da malha em que estão inseridos, uma vez que o segmento passa "dentro"dos quarteirões. Os caminhos verde e vermelho se baseiam em um conjunto de segmentos horizontais e verticais, sempre por cima das linhas da malha, sendo mais "real"quando estamos falando de ir de um lugar até o outro dentro de uma cidade com ruas ortogonais em seu projeto. Apesar de existirem várias formas de ir de A até B, consideremos apenas as que percorrem o menor percurso possível. Os dois caminhos representados, por mais que possuam diferenças de percurso, baseiam-se na mesma ideia: andar 5 unidades de medida para a direita e 3 unidades de medida para cima, independente da ordem em que elas aconteçam, andando assim um total de 8 unidades de medida. Essas quantidades vem, respectivamente, da diferença das coordenadas de cada eixo: $|6-1|$ no eixo das abcissas e $|4-1|$ no eixo das ordenadas, e o total da distância percorrida é exatamente a soma destas diferenças, obtendo-se assim a norma da soma definida em 3.1.3: $d(A, B) = |6-1| + |4-1| = |5| + |3| = 5 + 3 = 8$.

Kaleff e Nascimento (2004, p. 13) ressaltam a importância dessa forma alternada de medir distâncias por ser algo que está no mundo em que vivemos, estando assim no dia-a-dia dos alunos e não podendo ser evitada. Com isso, os autores afirmam que "o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos". Apesar dos autores basearem seu trabalho em elementos de geometria como circunferência e mediatriz, a geometria do táxi se assemelha muito com a métrica da soma, vista em 3.1.3, como citamos anteriormente. Concluímos que é possível apresentar uma nova forma de medir distâncias para alunos de ensino médio, com exemplos práticos e presentes no seu cotidiano.

4.3 Bolas e intervalos

Com o conceito de bolas e esferas apresentado no capítulo 3, podemos associar essa ideia com a ideia de intervalos, que foi previamente vista no capítulo 2. Uma bola nada mais é que um intervalo, no qual é dado um ponto central e o raio de abrangência da área que se quer. Quando definimos uma bola aberta $B(a, r)$ dentro de um espaço métrico M, são todos os elementos $x \in M$ tais que $d(x, a) < r$, ou seja, a distância entre esse ponto central e o ponto a qual se quer averiguar deve ser menor do que o raio dado. Em $\mathbb{R}$, onde as métricas euclidiana, da soma e do máximo são iguais - essa distância entre um ponto x qualquer e a é dada por $|x - a|$.

Nesta seção sugere-se uma abordagem introdutória da ideia de bolas e esferas no estudo de intervalos. Para isso, citemos três exemplos que demonstram a relação entre os dois assuntos:

Exemplo 4.3.1. *Denote a bola aberta $B(3, 5)$ em forma de intervalo.*
Pela definição de bola aberta, são todos os pontos x tais que $d(x, 3) < 5$. Como estamos falando de intervalos na reta real, temos que $d(x, y) = |x - y|$. Com isso, temos:
$d(x, 3) < 5 \Rightarrow |x - 3| < 5 \Rightarrow -5 < x - 3 < 5 \Rightarrow -2 < x < 8$. *Logo, o intervalo procurado é* $(-2, 8)$.

Exemplo 4.3.2. *Denote a bola fechada $B[6, 2]$ em forma de intervalo.*
Pela definição de bola fechada, são todos os pontos x tais que $d(x, 6) \leq 2$. Como estamos falando de intervalos na reta real, temos que $d(x, y) = |x - y|$. Com isso, temos:
$d(x, 6) \leq 2 \Rightarrow |x - 6| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 6 \leq 2 \Rightarrow 4 \leq x \leq 8$. *Logo, o intervalo procurado é* $[4, 8]$.

Exemplo 4.3.3. *Denote a esfera $S(1, 2)$ em forma de pontos da reta real.*
Pela definição de esfera, são todos os pontos x tais que $d(x, 1) = 2$. Como estamos falando de intervalos na reta real, temos que $d(x, y) = |x - y|$. Com isso, temos:
$d(x, 1) = 2 \Rightarrow |x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = 2$ *ou* $x - 1 = -2 \Rightarrow x = 3$ *ou* $x = -1$. *Logo, os pontos procurados são* 3 *e* -1.

Os exemplos acima mostram que uma vez entendido o conceito de bolas e esferas, o professor em sala pode fazer uma relação com a ideia de intervalos, mostrando que pode transformar uma bola em um intervalo ou uma esfera em dois pontos bastando o conhecimento em desigualdades modulares. No sentido oposto ao dos exemplos anteriores, dado um determinado intervalo ou dois pontos da reta, é possível definir a bola aberta, a bola fechada ou a esfera que coincide com o conjunto de pontos dado. Vejamos como encontrar tais bolas e esferas:

- De intervalo aberto para Bola aberta:
  Seja o intervalo $I = (b, c)$. Desse intervalo, existe um ponto central, o qual chamaremos de a e que pode ser calculado por $a = \dfrac{c + b}{2}$. Como b e c são os extremos desse intervalo, denotaremos $b = a - r$ e $c = a + r$, onde esse r é o raio

da bola, a "abrangência"do intervalo partindo de a. Sendo assim, o intervalo $I = (b, c) = (a - r, a + r)$, onde todo $x \in I$ está obrigatoriamente entre $a - r$ e $a + r$, ou seja, $a - r < x < a + r \Rightarrow -r < x - a < r \Rightarrow |x - a| < r$, que é a definição de uma bola aberta $B(a, r)$.

- De intervalo fechado para Bola fechada:
  Seja o intervalo $I = [b, c]$. Desse intervalo, existe um ponto central, o qual chamaremos de a e que pode ser calculado por $a = \dfrac{c+b}{2}$. Como b e c são os extremos desse intervalo, denotaremos $b = a - r$ e $c = a + r$, onde esse r é o raio da bola, a "abrangência"do intervalo partindo de a. Sendo assim, o intervalo $I = [b, c] = [a - r, a + r]$, onde todo $x \in I$ está obrigatoriamente entre $a - r$ e $a + r$ - inclusive podendo ser um deles -, ou seja, $a - r \leq x \leq a + r \Rightarrow -r \leq x - a \leq r \Rightarrow |x - a| < r$, que é a definição de uma bola fechada $B[a, r]$.

- De dois pontos quaisquer para uma esfera: Seja dois pontos quaisquer b e c, com $c > b$. Entre eles, existe um ponto central, o qual chamaremos de a e que pode ser calculado por $a = \dfrac{c+b}{2}$, onde denotaremos $b = a - r$ e $c = a + r$, onde esse r é o raio da esfera, a distância de a até os dois pontos dados, b e c. Sendo assim, como os pontos x que pertencem a esfera só podem ser $x = b$ ou $x = c$, temos que $x = a - r$ ou $x = a + r \Rightarrow x - a = -r$ ou $x - a = r \Rightarrow |x - a| = r$.

Para um melhor entendimento, exemplificamos como isso pode ser trabalhado:

Exemplo 4.3.4. *Denote no formato de uma bola aberta o intervalo* $(5, 17)$.
Para denotar o intervalo na forma de uma bola aberta $B(a, r)$*, precisamos do ponto central* a *e do raio* r*. Sendo assim, temos:*
$a = \dfrac{17+5}{2} = 11$. *Com isso,* $(5, 17) = (11 - r, 11 + r)$*, de onde tiramos que* $r = 6$.
Logo, $(5, 17) = B(11, 6)$.

Exemplo 4.3.5. *Denote no formato de uma bola fechada o intervalo* $[3, 4]$.
Para denotar o intervalo na forma de uma bola fechada $B[a, r]$*, precisamos do ponto central* a *e do raio* r*. Sendo assim, temos:*
$a = \dfrac{4+3}{2} = 3,5$. *Com isso,* $[3, 4] = [3,5 - r, 3,5 + r]$*, de onde tiramos que* $r = 0,5$.
Logo, $[3, 4] = B[3,5; 0,5]$.

Exemplo 4.3.6. *Denote no formato de uma esfera os pontos* 6 *e* 9.
Para denotar o intervalo na forma de uma esfera $S(a, r)$*, precisamos do ponto central* a *e do raio* r*. Sendo assim, temos:*
$a = \dfrac{6+9}{2} = 7,5$. *Com isso,* $6 = 7,5 - r$ *e* $9 = 7,5 + r$*, de onde tiramos que* $r = 1,5$.
Logo, os pontos 6 *e* 9 *definem a esfera* $S(7,5; 1,5)$.

Os exemplos acima mostram como é simples explorar o estudo de bolas e esferas dentro de intervalos da reta real e vice-versa, alternando de uma forma de representação para a outra, inclusive mostrando aos alunos que a representação gráfica é a mesma nos dois casos, como vimos no capítulo 3.

Outra forma de se aplicar as ideias de bolas e esferas no Ensino Médio é usando-as para definir um conjunto. Por exemplo, podemos definir o conjunto dos números reais como sendo a bola fechada $B[0,1]$ para a métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = y \\ 1, \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

Primeiramente, é importante provar que essa é uma métrica válida, através das regras vistas na definição 3.1.1:

1. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = 1 > 0$ se $x \neq y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow 1 \leq 1 + 1$; quaisquer que sejam $x, y, z \in M$.

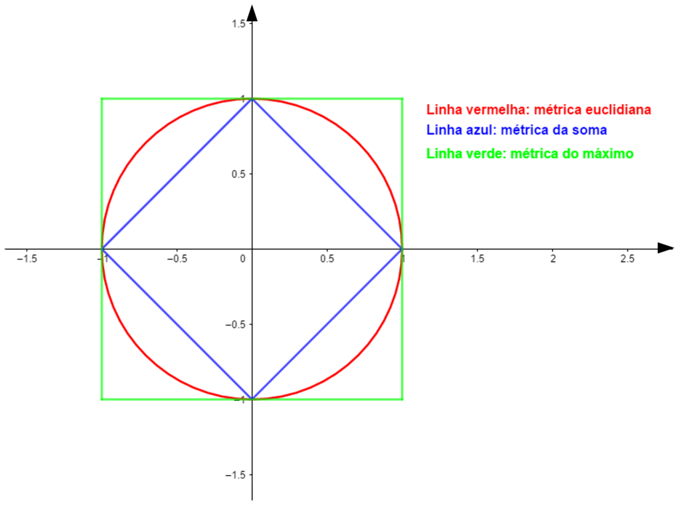
Sendo assim, como a distância é apenas 0 ou 1, temos que a bola fechada $B[0,1] = \{x \in \mathbb{R}; d(x,0) \leq 1\}$, onde, $d(x,0) = 0$ ou $d(x,0) = 1$. A primeira situação ocorre apenas se $x = 0$, que pode ser representado pelo conjunto $\{0\}$, enquanto a segunda acontecerá sempre que $x \neq 0$, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}^*$. Como qualquer uma das situações podem ocorrer, temos que $B[0,1]$ ocorre por essa métrica no conjunto $\{0\} \cup \mathbb{R}^*$, que é o próprio conjunto dos $\mathbb{R}$.

Da mesma forma, podemos representar a bola aberta $B(0,1)$ e a esfera $S(0,1)$. Como a distância é apenas 0 ou 1, a bola aberta $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x,0) < 1\}$ só pode admitir o valor de 0 para a distância, e para que isso ocorra, o valor de x deve ser 0, formando o conjunto $\{0\}$. Já a esfera $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x,0) = 1\}$ só pode admitir o valor de 1 para a distância, o que ocorre para todo $x \neq 0$, logo $S(0,1) = \mathbb{R}^*$. Dessa forma, comprova-se mais uma vez que $B[0,1] = B(0,1) \cup S(0,1)$.

Tendo abordado as bolas e esferas da reta real, surge a questão: como adaptar o ensino destas para o Ensino Médio dentro do âmbito dos planos, do $\mathbb{R}^2$? A partir daqui já devemos ter uma atenção maior, umas vez que as métricas agora não possuem os mesmos valores - vide os exemplos 3.1.2, 3.1.8 e 3.1.5. Geometricamente falando, a depender da métrica, as bolas possuem formatos diferentes dentro de um plano cartesiano, a saber: a métrica euclidiana forma um círculo, a da soma forma um losango, e a do máximo forma um quadrado. O importante para o professor é induzir o aluno a entender a construção gráfica do que se procura.

Para visualizar, considere para cada uma das três métricas vistas, a construção de suas respectivas esferas centradas na origem do plano cartesiano e de raio unitário, ou seja, $S(O,1)$, onde $O = (0,0)$ e $r = 1$, mostradas num mesmo plano cartesiano na figura 4.3. Na figura, observa-se que $S_S(O,1) \subset S(O,1) \subset S_M(O,1)$.

Figura 4.3: Representação Gráfica de esferas nas três métricas estudadas



Fonte: Do autor

• Para a métrica euclidiana.

A métrica euclidiana é a métrica usual, a que é ensinada durante o ensino médio nas escolas. Para o $\mathbb{R}^2$, dado dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do eixo cartesiano, a distância entre eles é dada por $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. A fórmula em si é conhecida pelos alunos do ensino médio desde quando adentram nos estudos de Geometria Analítica, especialmente quando iniciam o conteúdo de circunferência. Ao elevar ao quadrado os dois membros da equação, verifica-se que ela é semelhante à equação reduzida da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, na qual o ponto (a, b) representa o centro da circunferência, enquanto R representa seu raio. Mas o que é a circunferência, senão uma esfera na métrica euclidiana, a qual vimos no capítulo 3?

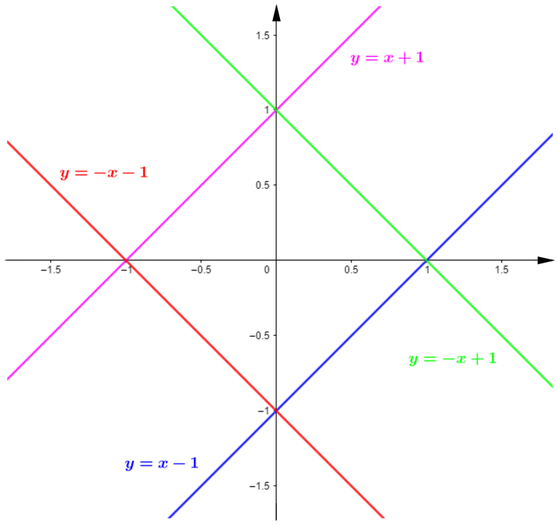
Ao entrar no assunto de circunferência, o professor pode introduzir a ideia de bolas e esferas, apresentando seu conceito e comparando-os com a ideia de circunferência já proposta no livro didático; e a partir daí mostrar a comparação entre a equação da circunferência e a da esfera, relacionando seus centros e raios, que possuem a mesma função. Com isso, temos que $S(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; d((x, y), (0, 0)) = 1\}$, logo $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$, que nada mais é que a equação de uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano e possui raio 1.

• Para a métrica da soma.

Como vimos anteriormente, a métrica da soma pode ser introduzida através da geometria do táxi, trazendo o aluno para uma realidade a qual está exposto. Além disso, o professor pode trabalhar a ideia da métrica da soma através de funções afins. Trazendo o exemplo proposto para o tema, temos que $S(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; d((x, y), (0, 0)) = 1\}$, onde $d_S(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Logo, temos que $|x - 0| + |y - 0| = 1 \Rightarrow |x| + |y| = 1$. Nesse ponto, aliando com as ideias de módulo vistas em 2.3.3, temos quatro situações possíveis:

I) $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$
II) $x + (-y) = 1 \Rightarrow y = x - 1$
III) $(-x) + y = 1 \Rightarrow y = x + 1$
IV) $(-x) + (-y) = 1 \Rightarrow y = -x - 1$

Figura 4.4: Representação gráfica das quatro funções oriundas da métrica da soma



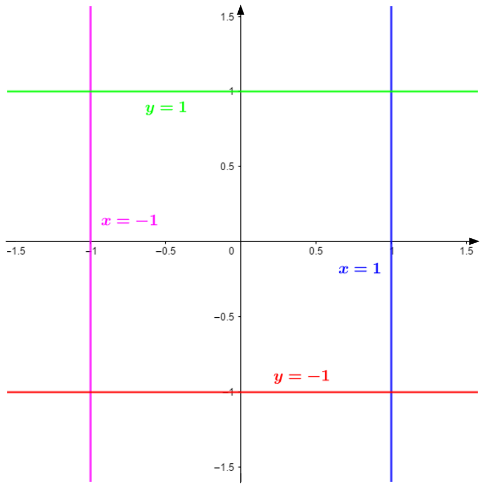
Fonte: Do autor

Percebe-se que as situações possíveis são quatro retas, quatro funções afins, assunto visto desde o último ano do ensino fundamental e aprofundado durante o ensino médio. Com isso, o gráfico da métrica da soma pode ser encontrado como sendo os segmentos de reta cujos extremos são as interseções entre uma reta e outra. Por exemplo, o segmento de reta proveniente da função $y = -x - 1$ é obtido do ponto $(-1, 0)$, que é o ponto de interseção com a função $y = x + 1$, até o ponto $(0, -1)$, que é o ponto de interseção com a função $y = x - 1$, e assim analogamente para as outras funções. Com isso, cabe ao professor observar que essa métrica pode ser trabalhada junto com a ideia de função do primeiro grau, podendo então estimular os alunos a encontrarem as equações que formam a representação gráfica de uma esfera na métrica da soma.

• Para a métrica do máximo.

Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a métrica do máximo é calculada como sendo $d_M(P_1, P_2) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Exemplificando para a esfera trabalhada aqui, temos que $S(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; d((x, y), (0, 0)) = 1\}$, logo temos $max\{|x - 0|, |y - 0|\} = 1 \Rightarrow max\{|x|, |y|\} = 1$. Como o valor máximo necessariamente é 1, então pelo menos um dois dos valores deve ser 1, ou seja, $|x| = 1$ ou $|y| = 1$. Para ocorrer isso, novamente recorremos aos conceitos vistos em 2.3.3 para obtermos mais quatro situações possíveis: $x = 1$ ou $y = 1$; $x = 1$ ou $y = -1$; $x = -1$ ou $y = 1$; e $x = -1$ ou $y = -1$

Figura 4.5: Representação gráfica das quatro retas oriundas da métrica do máximo



Fonte: Do autor

Em resumo, são quatro retas paralelas aos eixos do plano cartesiano, que novamente se interceptam duas a duas, como mostra a figura acima. Semelhante à métrica da soma, basta tomarmos os segmentos que estão entre os pontos de interseção da reta considerada. Por exemplo, o segmento de reta proveniente da reta $y = 1$ é o que possui como extremos o ponto $(1, 1)$ que é o que intercepta a reta $x = 1$, e o ponto $(1, -1)$ que é o que intercepta a reta $x = -1$. Mais uma vez, o professor pode trabalhar em sala de aula modos de encontrar as quatro retas que darão origem à representação gráfica da esfera na métrica do máximo, incentivando os alunos a eles mesmos construírem os gráficos.

É importante ressaltar que a partir da ideia da esfera, o professor também pode introduzir a ideia das bolas abertas e fechadas, ressaltando a diferença entre cada uma delas. Como vimos, a esfera contempla apenas a "casca", a linha que desenha o gráfico; já as bolas levam em consideração apenas a região interna dessas linhas no caso das bolas abertas, ou juntamente com essa "casca", a linha do gráfico propriamente dita, no caso das bolas fechadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como vimos neste trabalho, apesar de ser um assunto prioritariamente visto no ensino superior, podemos aplicar alguns tópicos sobre Topologia durante o ensino médio. Tomadas as devidas limitações, e com a ajuda de conceitos já conhecidos do nível de ensino em foco, podemos aplicar em sala de aula conteúdos sobre métricas, bolas e intervalos, adaptando-os para que sejam utilizados dentro dos conteúdos vistos na grade curricular.

Trazer conteúdos que historicamente são do Ensino Superior para o Ensino Médio não é uma tarefa fácil, afinal o nível de complexidade é maior do que aquele exigido entre alunos de 15 e 17 anos. Para isso, é necessário limitar os conteúdos a serem explicados para um nível que possa ser entendido pelos alunos com a base que eles já possuem de estudos anteriores; e principalmente adaptar a forma como esse conteúdo é explicado, trazendo para a realidade dos estudantes, indo ao encontro do que propõe as Diretrizes Curriculares Nacionais, quando cita que é dever da educação no ensino médio dar "acesso a conhecimentos que permitam a compreensão das diferentes formas de explicar o mundo, seus fenômenos naturais, sua organização social e seus processos produtivos."(2013, p. 147)[**?**]. Quando citamos a ideia da Geometria do Táxi, por exemplo, é uma forma de aplicação da ideia da métrica da soma para uma turma de ensino médio que pode não apenas ser vista aliando-se à ideia de funções, mas também para outros tópicos de matemática, como por exemplo a análise combinatória. Além disso, esse tipo de aplicação é coerente com o dia-a-dia a quem está destinado, colocando-o como um caso real e cotidiano de cada estudante, o que pode facilitar não só a aplicação, mas também o entendimento do conteúdo ministrado.

Trazer alguns conteúdos de fora do currículo do ensino médio para apresentar aos alunos pode ser uma estratégia interessante, uma vez que estes alunos estão se preparando para o ensino superior e alguns deles poderão reencontrar tais conteúdos, agora de uma forma mais aprofundada. Porém, a importância dessa estratégia é ampliar o conhecimento deles, dando uma nova forma de visualizar conteúdos vistos em sala de aula. Faz-se necessário um trabalho conjunto entre professor e escola: o professor pode trazer tais assuntos a tona em suas aulas, sendo apoiado pela escola, que de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais, deve incentivar ações "capazes de gerar sujeitos inventivos, participativos, cooperativos, preparados para diversificadas inserções sociais, políticas, culturais, laborais e, ao mesmo tempo, capazes de intervir e problematizar as formas de produção e de vida"(2013, p. 152)[**?**].

Referências Bibliográficas

ABE, Jair Minoro. **A noção de estrutura em matemática e física.** Estud. av., v. 3, n. 6, p. 113-125: São Paulo, 1989. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40141989000200007 Acesso em: 11 fev. 2020.

BANDEIRA, Ivana Soares. **Superfícies Mínimas Completas e Estáveis em $\mathbb{R}^3$.** Manaus, AM: UFAM, 2012. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/3690 Acesso em: 04 set. 2019.

BRASIL, M. E. C. SEB. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEB, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf Acesso em 30 jan 2020.

BRASIL, M. E. C. SEB. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192 Acesso em 02 mar 2020.

CARLSON, Stephan C. **History Of Topology.** Topology. EncyclopÆdia Britannica, inc: Inglaterra, 2017 Disponível em: https://www.britannica.com/science/topology/History-of-topology Acesso em 19 fev 2020.

ENCYCLOPÆDIA Britannica. **Luitzen Egbertus Jan Brouwer.** EncyclopÆdia Britannica, inc: Inglaterra, 2019. Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Luitzen-Egbertus-Jan-Brouwer Acesso em 09 set 2019.

ENCYCLOPÆDIA Britannica. **Maurice Fréchet.** EncyclopÆdia Britannica, inc: Inglaterra, 2019. Disponível em: `https://www.britannica.com/biography/Maurice-Frechet` Acesso em 06 set 2019.

CÉSAR, Sulamita Maria Comini. **Minicurso de Geometria Táxi**. Belo Horizonte: PUC-MG, 2010. Disponível em: `http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20150306113049.pdf` Acesso em 27 nov 2019.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia.** São Paulo: Atual Editora, 1982.

GRAY, Jeremy John. **Henri Poincaré.** EncyclopÆdia Britannica, inc: Inglaterra, 2019. Disponível em: `https://www.britannica.com/biography/Henri-Poincare` Acesso em 06 set 2019.

KALEFF, Ana Maria. NASCIMENTO, Rogério dos Santos. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi. **Boletim Gepem** Rio de Janeiro, nº 44, dezembro 2004, 11-42. Disponível em: `http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011892.pdf` Acesso em 14 fev 2020.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise vol. 1. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012a.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise vol. 2. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012b.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo, 1970.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais** 1 ed. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Ronaldo Freire de. **Topologia e Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Topologia Geral: Resumo da Teoria, 650 problemas resolvidos, 391 problemas propostos.** Coleção Schaum Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo, SP: McGraw-Hill do Brasil, 1980.

LOURÊDO, Aldo Trajano; OLIVEIRA, Alexandro Marinho; LIMA, Osmundo Alves. **Cálculo Avançado** 2 ed. Campina Grande: EDUEPB, 2012.

MARCON, Divane. **Espaços Métricos.** Florianópolis, SC: UFSC, 2000. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96813/Divane_Marcon.PDF Acesso em: 15 out 2019.

MÜLLER, Jonathan Gil; BAIER, Tânia. **Topologia: Fatos Históricos e Curiosidades.** In: IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia, 2014. 12, Ponta Grossa, PR. Disponível em: http://www.sinect.com.br/2014/down.php?id=2960&q=1 Acesso em: 02 set. 2019.

MUNEM, Mustafa; FOULIS, David J. **Cálculo.** Tradução André Lima Cordeiro... et al. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

NETO, Antonio Caminha Muniz. **Fundamentos de Cálculo** 1 ed. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **A history of Topology.** University of St Andrews: Escócia, 1996. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Topology_in_mathematics.html Acesso em: 06 set. 2019

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **August Ferdinand Möbius.** University of St Andrews: Escócia, 1997. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius.html Acesso em: 05 set. 2019

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Felix Hausdorff.** University of St Andrews: Escócia, 2004. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hausdorff.html Acesso em: 09 set. 2019

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor.** University of St Andrews: Escócia, 1998. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html Acesso em: 09 set. 2019

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Johann Benedict Listing.** University of St Andrews: Escócia, 2000. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Listing.html Acesso em: 03 set. 2019

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **René Maurice Fréchet.** University of St Andrews: Escócia, 2005. Disponível em: https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frechet.html Acesso em: 06 set. 2019

PIASESKI, Claudete Maria. **A Geometria No Ensino Fundamental.** Erechim, RS: URI, 2010. Disponível em: http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf Acesso em: 03 set. 2019

SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Uma Introdução à Topologia Geométrica: passeios de Euller, superfícies, e o teorema das quatro cores.** São Carlos: EdUFSCar, 2008.

SCHOLZ, Erhard. **Felix Hausdorff.** Complete Dictionary of Scientific Biography. Encyclopedia.com, 2020. Disponível em: https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/felix-hausdorff Acesso em 19 fev 2020.

SILVA, Antonio Roberto da. **Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica.** Natal: UFRN, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/24613/1/AntonioRobertoDaSilva_DISSERT.pdf Acesso em 10 fev 2020.

SILVA, Camila Tolin Santos da. **Descobrindo a Topologia: um compêndio de fundamentos teóricos e atividades lúdicas para auxiliar na formalização de conceitos topológicos no Ensino Básico**. Presidente Prudente: Unesp-SP, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160820094 Acesso em 22 jan 2020.

SILVA, Pedro Costa da. **As desigualdades elementares e as suas aplicações**. Natal-RN: UFRN, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/27608/1/Desigualdadeselementaresaplica%C3%A7%C3%B5es_Silva_2019.pdf Acesso em 05 mar 2020.

SIMÕES, Márcio. Cálculo no ensino médio: já passou da hora. **Imaginário Puro**, 2015. Disponível em: https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora Acesso em 14 fev 2020.

A Demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Neste apêndice, provaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o teorema 3.1.1 visto no capítulo 3 deste trabalho. Relembrando a desigualdade, temos que para números reais $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, então é válida a desigualdade $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \ldots + {b_n}^2)$.

É notável que se $a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_n = 0$, a desigualdade é verdadeira, uma vez que teremos $(0.0+0.0+\ldots+0.0)^2 \leq (0^2+0^2+\ldots+0^2)(0^2+0^2+\ldots+0^2) \Rightarrow 0 \leq 0$. Com isso, basta provarmos a desigualdade para pelo menos um valor a_i - com $1 \leq i \leq n$ - diferente de 0, assim como pelo menos um b_j - com $1 \leq j \leq n$ - também diferente de 0. Para isso, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2$, ou seja, $f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$. Desenvolvendo o quadrado da diferença de dois termos encontrado em cada parcela e agrupando os termos com partes literais semelhantes em seguida, obtemos:

$f(x) = ({a_1}^2x^2 - 2a_1xb_1 + {b_1}^2) + ({a_2}^2x^2 - 2a_2xb_2 + {b_2}^2) + \ldots + ({a_n}^2x^2 - 2a_nxb_n + {b_n}^2)$
$f(x) = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \ldots + {b_n}^2)$
$f(x) = Ax^2 - 2Bx + C$, assemelhando-se assim a uma função do tipo quadrática, onde:
$A = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2)$, $B = (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$ e $C = ({b_1}^2 + {b_2}^2 + \ldots + {b_n}^2)$.

Por outro lado, relembrando que para todo valor $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha^2 \geq 0$, percebe-se que a função f é inteiramente maior ou igual a zero, pois todas suas parcelas são números não-negativos, como pode-se observar na forma original como a função foi designada. Logo, podemos afirmar que $f(x) \geq 0$. Além disso, o coeficiente de x^2, que determina a concavidade da parábola - que é gráfico da função quadrática - é um número positivo, uma vez que pelo menos um dos a_i's é diferente de zero. Sendo assim, isso só é possível se o discriminante Δ da função é um valor menor ou igual a zero; o que em termos matemáticos significa que $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0$. Lembrando que dada uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu discriminante é calculado pela fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, a seguinte relação pode ser obtida aplicando os coeficientes da função do problema na relação com o discriminante:

$\Delta \leq 0 \Rightarrow (-2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow 4B^2 \leq 4AC \Rightarrow B^2 \leq AC$. Trocando os valores A, B e C pelas respectivas expressões que os representam, obtemos a desigualdade procurada $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \ldots + {b_n}^2)$. ■