



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIA EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA MESTRADO
PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT



IGOR BRUNO DANTAS NUNES

Demonstrações visuais

Provas com e sem palavras

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes

Natal/RN - 2020

IGOR BRUNO DANTAS NUNES

Demonstrações visuais. Provas com e sem palavras

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof^o. Dr. Carlos A. Gomes

Natal/RN - 2019

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

IGOR BRUNO DANTAS NUNES

Demonstrações visuais. Provas com e sem palavras

Comissão Examinadora:

Prof^a. Dr^o. Carlos Alexandre Gomes (UFRN - Orientador)
Prof^o. Dr^o. Edgar Silva Pereira (UFRN - Membro interno)
Prof^o. Dr^o. Eurípedes Carvalho da Silva (IFCE - Membro externo)

Natal/RN - 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Nunes, Igor Bruno Dantas.

Demonstrações visuais: provas com e sem palavras / Igor Bruno Dantas Nunes. - 2020.
144f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2020.
Orientador: Carlos Alexandre Gomes.

1. Matemática - Dissertação. 2. Técnicas de demonstração - Dissertação. 3. Demonstrações visuais - Dissertação. 4. Ensino de matemática - Dissertação. I. Gomes, Carlos Alexandre. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51

Agradecimentos

Ao Deus criador de todas as coisas, que me concedeu o dom da vida e a oportunidade de poder lutar pelos meus objetivos.

Ao meu Pai, Sebastião Brito Nunes, que foi escolhido por Deus e cumpriu seu papel de Pai de modo espetacular, me ensinando a importância da honestidade e dedicação à família.

À minha mãe, Luzia de Souza Dantas Nunes, que ao final de 2018 foi diagnosticada com câncer, mas que nunca deixou de lutar pela vida e mesmo com todas as etapas difíceis da doença esteve com sorriso no rosto e não desistiu. Graças ao bom Deus foi curada e está vibrando com minha conquista.

À minha irmã Nayra, que sempre foi companheira desde a juventude e até hoje.

À minha amada esposa, Rogéria Nunes, que ao longo de todos esses anos de estudos suportou meus estresses e conviveu diariamente com minhas dificuldades, com muito amor e dedicação.

À minha prima Verônica Umbelino, inspiração na escolha de minha profissão, devido a sua dedicação e amor pela docência em especial a matemática.

À todos os amigos e familiares que de modo direto ou indireto esteve presente com conselhos e orações.

Aos professores, que mesmo nos momentos mais difíceis, durante o mestrado, apoiaram - me e ajudaram - me a não desistir.

Ao meu orientador Professor Dr. Carlos Alexandre Gomes pela imensa sensibilidade e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos colegas de turmas, pelo companheirismo e o espírito de coletividade.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Rogéria Nunes e aos meus filhos Pets Fofinho e Belinha, que com muito amor e paciência suportaram minha ausência durante a realização deste projeto.

Resumo

Nesta dissertação abordaremos demonstrações de vários teoremas estudados no ensino básico. Tais teoremas possuem demonstrações tradicionais, presentes nos livros didáticos, muito abstratas e de difícil entendimento aos discentes. Decidi trazer nessa dissertação demonstrações alternativas e visuais mais palpáveis afim de ajudar os professores a justificar esses resultados em sala de aula. Passaremos por vários ramos da matemática: Geometria Euclideana, Trigonometria, Identidades e Desigualdades.

PALAVRAS-CHAVE: Técnicas de demonstração, Demonstrações Visuais, Ensino de Matemática.

Abstract

In this dissertation we will cover demonstrations of several theorems studied in basic education. Such theorems have traditional demonstrations, present in textbooks, very abstract and difficult to understand by students. I decided to bring in this dissertation alternative and more palpable visual demonstrations in order to help teachers justify these results in the classroom class. We will go through various branches of mathematics: Euclidean Geometry, Trigonometry, Identities and Inequalities.

KEYWORDS: Demonstration techniques, Visual Demonstrations, Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

1.1	Demonstração clássica por áreas	17
1.2	$\triangle ABC \simeq \triangle DBA, \triangle ABC \simeq \triangle DAC, \triangle DBA \simeq \triangle DAC$	18
1.3	Demonstração visual por Semelhança	19
1.4	Critério para equivalência de triângulos	20
1.5	Demonstração dos elementos de Euclides	21
1.6	Demonstração de Leonardo da Vinci	23
1.7	Figura usada pelo presidente	24
1.8	A demonstração de Perigal	25
1.9	Triângulo Acutângulo	25
1.10	Triângulo Obtusângulo	26
1.11	Argumento de Polya	27
1.12	Lúnulas de Hipócrates	28
1.13	Lúnulas de Hipócrates	29
1.14	Demonstração de Pappus	30
1.15	Teorema de De Gua	31
1.16	Teorema de De Gua	32
1.17	$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$	41
1.18	Teorema de Viviani $x + y + z = h$	44
1.19	Volume do Cone	63
1.20	Volume do sólido de revolução: $V = 2\pi x.A$	66
1.21	Cálculo do volume de um cone via o Teorema Pappus.	66
2.1	Triângulo Obtusângulo	76
2.2	Triângulo Acutângulo	77
2.3	Figura para demonstração alternativa da lei dos cossenos	78

2.4	Demonstração alternativa da lei dos cossenos por áreas	79
2.5	Demonstração da lei dos senos presente nos livros didáticos	80
2.6	Quadrado ABCD - 1	98
2.7	Quadrado ABCD - 2.	101
2.8	Quadrado ABCD - 2.	102
2.9	Demonstração visual das fórmulas da prostaférese - 1.	111
2.10	Demonstração visual das fórmulas da prostaférese - 2.	112
3.1	Desigualdade de inteiros 1	119
3.2	desigualdade 2	120
3.3	Soma dos primeiros ímpares positivos	128
3.4	Quadrado de lado 1	135
3.5	Quadrado de lado 1	136
3.6	Soma de áreas menores	138
3.7	Soma de lados menores r	139
3.8	Soma P.G. por triângulos	139

Sumário

1	Geometria Euclideana	16
1.1	Teorema de Pitágoras	16
1.1.1	A demonstração mais simples	17
1.1.2	Demonstração Por Semelhança	18
1.1.3	Demonstração Visual por Semelhança	19
1.1.4	Demonstração Original - Euclides	20
1.1.5	Demonstração alternativa a original	22
1.1.6	Demonstração de Leonardo da Vinci	22
1.1.7	Demonstração do Presidente Americano	23
1.1.8	A demonstração de Perigal	24
1.1.9	Recíproca do Teorema de Pitágoras	24
1.2	Algumas generalizações do Teorema de Pitágoras	27
1.2.1	Argumento de Polya	27
1.2.2	Lúnulas de Hipócrates	28
1.2.3	Generalização do Teorema - Demonstração de Pappus	29
1.2.4	Pitágoras 3D - Teorema de De Gua	30
1.2.5	A Fórmula de Heron	33
1.2.6	Teorema de Vivivani	43
1.2.7	O Triângulo das medianas	46
1.3	O círculo e a circunferência	48
1.3.1	O comprimento de uma circunferência	49
1.3.2	A área de um círculo	51
1.4	Geometria espacial métrica	55
1.4.1	Volume da Pirâmide	56

1.4.2	Pirâmide de base triangular	57
1.4.3	Pirâmide de base qualquer	61
1.5	Volume de um cone	62
1.6	Volume de uma esfera	66
1.7	Área da superfície de uma esfera	71
2	Fórmulas Trigonométricas	75
2.1	Lei dos Cossenos	75
2.2	Lei dos Senos	79
2.2.1	Uma demonstração alternativa da Lei dos senos	82
2.3	Fórmulas de adição de arcos	83
2.3.1	Usando a Lei dos senos	92
2.4	Usando a lei dos cossenos	95
2.5	Usando o Teorema de Ptolomeu	97
2.5.1	Uma figura e seis fórmulas	98
2.5.2	Arcos duplos	102
2.5.3	Usando números complexos	104
2.5.4	Fórmulas de Moivre	105
2.6	Usando derivadas e integrais	108
2.6.1	Transformação em produto	109
3	Identidades e desigualdades	113
3.1	Desigualdades e identidades algébricas	113
3.2	Desigualdades	113
3.2.1	Desigualdade das médias	114
3.2.2	Dois desigualdades úteis e interessantes	117
3.2.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz	120
3.3	Identidades algébricas usuais	123
3.4	Somas de inteiros	125
3.4.1	Uma soma muito famosa - Carl Friederich Gauss	125
3.5	Soma dos termos de uma progressão geométrica	133
3.5.1	Soma dos termos de uma série geométrica	134

3.5.2	Uma identidade bem conhecida	135
3.5.3	Mais uma soma de áreas	137

Introdução

O professor de Matemática dos ensinos fundamental e médio tem vários desafios dos quais destacamos atrair a atenção dos seus alunos para o assunto que está ensinando. O que diga-se de passagem é cada vez mais difícil nos dias atuais, tendo em vista as várias atrações disponíveis à mão dos estudantes, como os infinitos recursos tecnológicos. Diante disso, cumprir a missão do professor não é uma tarefa fácil. Além disso, ainda existem as tradicionais heterogeneidades gigantescas das turmas; o grande número de estudantes com interesses e aptidões distintas que se encontram nas salas de aulas das escolas públicas e privadas. Como se não bastassem as dificuldades que acabamos de mencionar ainda há as dificuldades intrínsecas da Matemática, mesmo no seu nível mais elementar. O professor de matemática que está comprometido em dar uma formação básica adequada aos seus alunos encara constantemente o desafio de não ser formal demais para aquele nível de ensino e ao mesmo tempo ensinar o conteúdo da maneira mais honesta possível para o nível da sua turma.

Pensando nesse desafio, de não pecar nem por excesso nem por ausência de rigor, vamos ao longo desse trabalho exibir justificativas não usuais para vários resultados explorados ao nível dos Ensinos Fundamental e Médio, e ao mesmo tempo comparando com o modo como os livros didáticos escolares usuais justificam vários desses resultados tradicionais, como por exemplo o Teorema de Pitágoras, as Leis dos senos e cossenos, as fórmulas de adição trigonométricas, entre muitos outros resultados, com demonstrações alternativas. Muitas vezes usaremos bastante apelo geométrico, e após essa etapa inicial sempre justificaremos rigorosamente o que há por trás dessa intuição inicial, que pode ser, ao nosso ver, uma atitude muito educativa, para um estudante que terá o seu primeiro contato com o assunto.

Assim, neste trabalho, trataremos de demonstrações de resultados muito conhecidos e utilizados no dia a dia do professor dos ensinos fundamental e médio. Para isso muitas vezes sugeriremos um apelo visual com o intuito de facilitar o entendimento e convencimento do aluno em sala de aula sobre a razoabilidade de uma certa afirmação (teorema) matemática.

A nossa proposta é então oferecer uma gama de argumentos que possam auxiliar o professor na sua atividade diária de sala de aula, mostrando argumentos que apesar de serem sustentados por um rigor matemático, possam servir como uma atitude inicial de convencimento da veracidade do resultado em questão, oferecendo inicialmente uma “prova sem palavras” e em seguida, ofereceremos o argumento rigoroso que válida a primeira parte e por fim, compararemos com a forma clássica que os livros didáticos justificam tal resultado em questão.

No primeiro capítulo abordamos demonstrações de Teoremas clássicos da Geometria plana como, por exemplo, o teorema de Pitágoras (e a sua recíproca). Mostraremos várias demonstrações, desde a tradicional demonstração encontrada nos Elementos de Euclides [20], até demonstrações mais modernas e generalizações desse importante resultado. Ainda nesse capítulo, mostraremos como a noção de área de uma figura plana para justificar muitos outros resultados da geometria clássica. Além de tratar da geometria espacial como volume de algumas figuras.

No capítulo 2, trataremos de alguns resultados clássicos da trigonometria tais como as lei dos senos e cossenos, as fórmulas de adição seno e cosseno.

No capítulo 3 tratamos de algumas identidades algébricas e desigualdades. Veremos como usar um apelo visual para convencer sobre a razoabilidade de certos teoremas. Também serão oferecidas algumas justificativas rigorosas de tais resultados.

No último capítulo, considerações finais, apresentamos algumas propostas de atividades e aplicações para utilização pelos docentes.

Capítulo 1

Geometria Euclideana

Neste Capítulo, vamos tratar de vários resultados clássicos da chamada geometria Euclideana, assim chamada por serem resultados encontrados em [20]. Como dissemos na nossa introdução, os objetivos principais são fornecer argumentos simples e eficientes que demonstrem os resultados e comparar com o método tradicional como esses resultados são apresentados nos livros didáticos escolares.

1.1 Teorema de Pitágoras

Nesta seção trataremos de um dos resultados mais conhecidos por alunos e professores dos ensinos Fundamental e Médio: O Teorema de Pitágoras.

Enunciaremos o teorema e em seguida apresentaremos diversas demonstrações alternativas, a fim de oferecer a professores opções interessantes de justificar o teorema. Por fim mostraremos algumas generalizações desse teorema.

Teorema 1 (Euclides - Livro I - Proposição 47). *Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma das medidas dos quadrados dos catetos.*

A prova original (encontrada nos Elementos de Euclides) do Teorema de Pitágoras não será a que apresentaremos inicialmente. Essa demonstração é baseada na ideias de área de uma figura plana. Inicialmente vamos mostrar a demonstração mais simples e em seguida muitas outras demonstrações alternativas: desde a mais usual usando semelhança de triângulos (que é a mais encontrada nos livros didáticos brasileiros)

até a demonstração original de Euclides.

1.1.1 A demonstração mais simples

Esta demonstração é a mais simples e também aparece em alguns livros didáticos do ensino médio como [32] e [7].

Demonstração: No quadrado da figura abaixo (de lado $b + c$) podemos observar

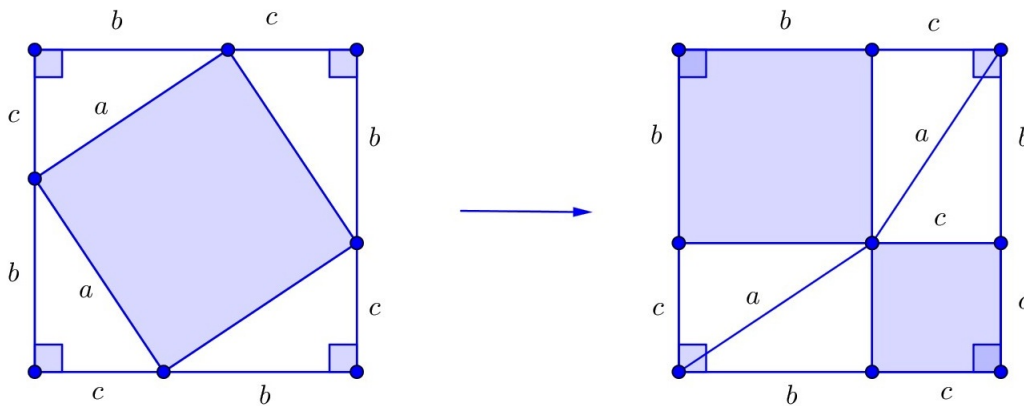


Figura 1.1: Demonstração clássica por áreas

4 triângulos retângulos congruentes de catetos b e c e hipotenusa a além de um quadrado de lado a . A área do quadrado lado a pode ser obtido subtraindo-se a área do quadrado original de lado $b + c$ das áreas dos 4 triângulos retângulos de catetos b e c . Assim,

$$\begin{aligned} a^2 &= (b + c)^2 - \frac{4bc}{2} \\ &= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc \\ &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar!

Essa demonstração é bastante simples e acreditamos ser uma ótima opção para um primeiro contato com o teorema. Apesar da simplicidade dessa demonstração que acabamos de exibir, a demonstração mais comum de ser encontrada nos livros didáticos brasileiros usa o conceito de semelhança de triângulos. Acreditamos que a razão pela qual a demonstração por semelhança seja a mais utilizada nos livros didáticos é que o conteúdo de semelhança em geral precede o de áreas. Vamos então apresentar essa demonstração.

1.1.2 Demonstração Por Semelhança

Sendo a demonstração mais encontrada nos livros escolares dos ensinos Fundamental([9], [31]) e Médio ([7],[15]) acreditamos ser a mais conhecida e utilizada pelos professores de Matemática em suas aulas.

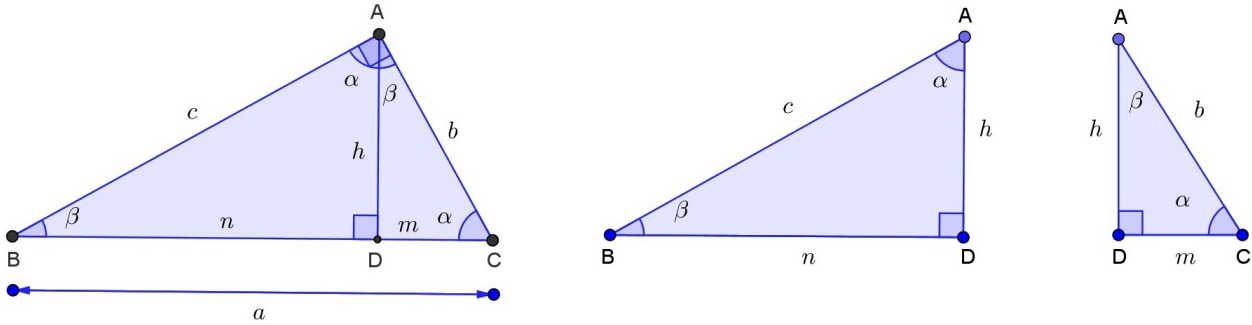


Figura 1.2: $\triangle ABC \simeq \triangle DBA$, $\triangle ABC \simeq \triangle DAC$, $\triangle DBA \simeq \triangle DAC$

Observação 1.1.1. O símbolo \simeq representa semelhança entre os triângulos.

Demonstração: Podemos observar na figura (1.2) três triângulos retângulos semelhantes: $\triangle ABC$, $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$. Colocando-os em uma mesma posição conforme figura (1.2), temos:

Da semelhança entre o $\triangle ABC$ e o $\triangle DAC$:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \tag{1.1}$$

Da semelhança entre o $\triangle ABC$ e o $\triangle DBA$:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \tag{1.2}$$

Adicionando (1.1) com (1.2), temos:

$$am + an = b^2 + c^2 \Rightarrow a \underbrace{(m + n)}_a = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.3}$$

como queríamos demonstrar!

1.1.3 Demonstração Visual por Semelhança

Esta demonstração também utiliza o fato de termos triângulos semelhantes, porém faz uso de apenas artifícios visuais.

Demonstração: Observemos na figura 1.3: Primeiramente, multiplicamos as me-

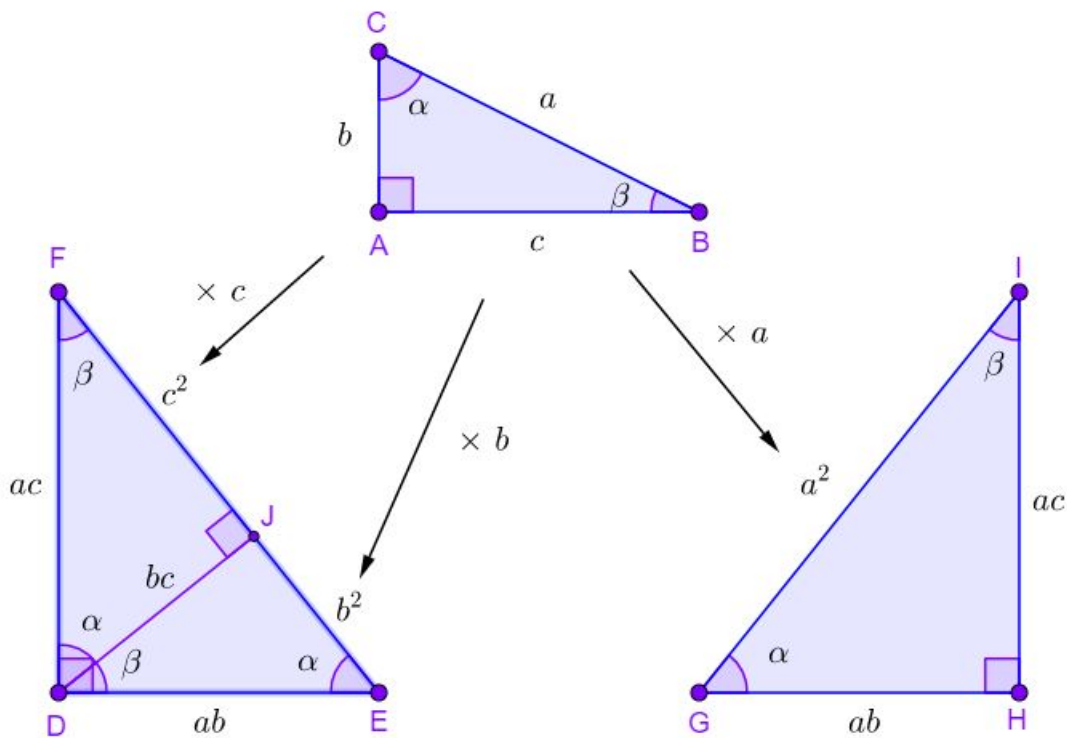


Figura 1.3: Demonstração visual por Semelhança

didadas do triângulo retângulo ABC por a gerando $\triangle HIG$. Em seguida, multiplicamos as medidas do mesmo triângulo retângulo ABC por b gerando $\triangle JDE$. Após esse procedimento, multiplicamos novamente as medidas do triângulo retângulo ABC, porém, agora por c , dando origem ao $\triangle JFD$ semelhante a ABC.

Por fim, unindo o lado \overline{DJ} dos triângulos $\triangle JDE$ e $\triangle JFD$, como $\alpha + \beta = 90^\circ$ o $\triangle DFE$ é retângulo com lados $\overline{FD} = \overline{HI} = ac$ e $\overline{DE} = \overline{HG} = ab$ o que torna $\triangle DFE \cong \triangle HIG$. Portanto,

$$\overline{GI} = \overline{EF} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

como queríamos demonstrar!

Observação 1.1.2. O símbolo \cong representa congruência entre os triângulos.

1.1.4 Demonstração Original - Euclides

Antes de Partirmos para demonstração apresentada por Euclides, faz-se necessário apresentarmos uma proposição a cerca das áreas de triângulos com mesma base e altura, presente em [28].

Observação 1.1.3. Usaremos os parênteses, com seus respectivos vértices, para representar a área de um polígono. Por exemplo, a área do triângulo ABC teremos (ABC) .

Proposição 1. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ triângulos tais que $AB \parallel CC'$. Então $(ABC) = (ABC')$.

Demonstração. Sendo h a distância entre as retas paralelas AB e CC' .

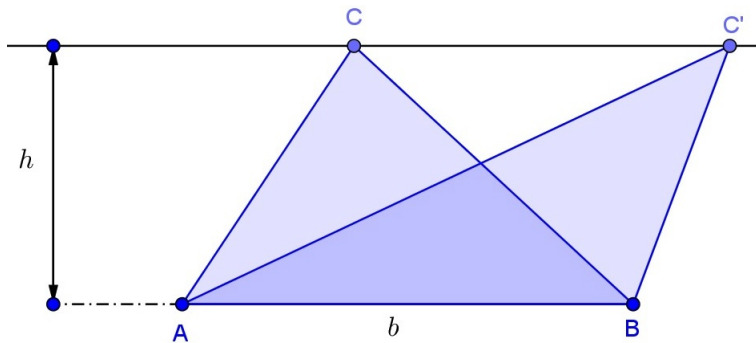


Figura 1.4: Critério para equivalência de triângulos

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{AB}}_b \cdot h = S_{ABC'}$$

□

Vejamos, agora, a demonstração original apresentada por Euclides na proposição I-4 de seus Elementos:

Demonstração: O ponto chave da primeira parte da demonstração consiste em estabelecer a igualdade entre o retângulo $B D L M$ e o quadrado $A B G F$.

Podemos ver na figura (1.5) que $\triangle ABD \cong \triangle BCG$, pelo caso LAL. Como: $\widehat{ABG} = \widehat{CBD} = 90^\circ$ e \widehat{ABC} comum.

Daí:

$$\overline{GB} \equiv \overline{AB}$$

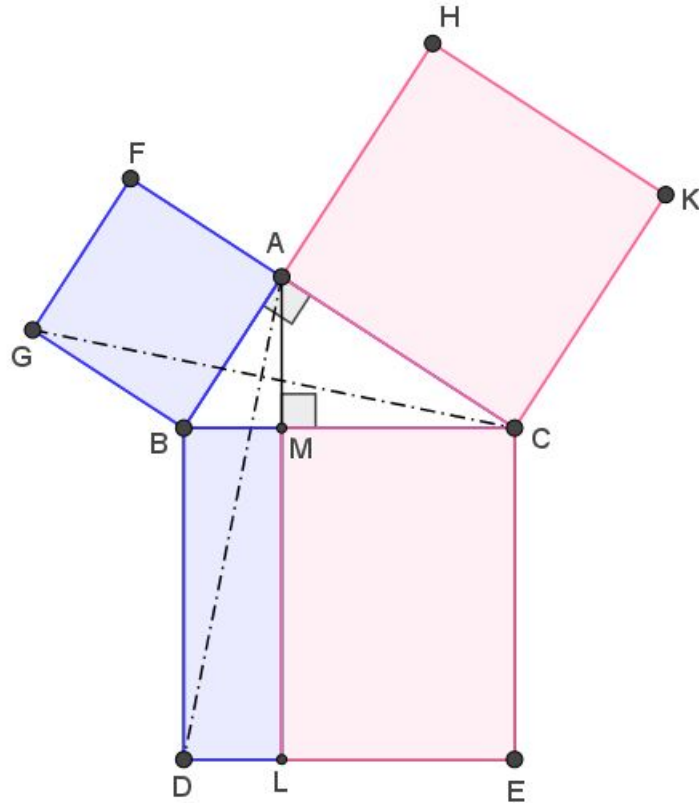


Figura 1.5: Demonstração dos elementos de Euclides

$$\widehat{GBC} = \widehat{ABD}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{BD}$$

Portanto, $\triangle BCG \equiv \triangle ABD$, o que revela que $(BCG) = (ABD)$. Além disso, $(ABG) = \frac{1}{2} \cdot (ABGF)$.

De mesmo modo, $(ABD) = (LBD)$, pois possuem a base BD em comum e a mesma altura em relação a essa base, visto que estão construídos sobre as paralelas \overleftrightarrow{BD} e \overleftrightarrow{AL} . Além disso, $(MBD) = \frac{1}{2} \cdot (BDLM)$. Portanto,

$$\begin{cases} (ABG) = \frac{1}{2} \cdot (ABGF) \\ (MBD) = \frac{1}{2} \cdot (BDLM) \end{cases} \Rightarrow (BDLM) = (ABGF)$$

Analogamente, prova-se que o paralelogramo $CELM$ é igual (mesma medida de área) ao quadrado $ACKH$. Consequentemente, o quadrado $BCED$, formado pelos paralelogramos $BDLM$ e $CELM$, é igual (mesma medida de área) aos dois quadrados $ABGF$ e $ACKH$.

como queríamos demonstrar!

1.1.5 Demonstração alternativa a original

Essa bela demonstração faz uso de apenas o segmento \overline{AL} traçado na figura 1.5. Antes de iniciarmos a demonstração consideremos, para facilitar o entendimento, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\widehat{ABM} = \hat{B}$, $\widehat{ACB} = \hat{C}$ e $\widehat{BAC} = \hat{A} = 90^\circ$

Do $\triangle ABM$ retângulo em M , temos:

$$\overline{BM} = \overline{AB} \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \cos \hat{B} \quad (1.4)$$

Por outro lado, no triângulo $\triangle ACM$ retângulo em M , temos:

$$\overline{CM} = \overline{AC} \cdot \cos \hat{C} = b \cdot \cos \hat{C} \quad (1.5)$$

Daí:

$$(BDLM) = \overline{ML} \cdot \overline{BM} \Rightarrow (BDLM) = a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad (1.6)$$

e

$$(CELM) = \overline{ML} \cdot \overline{CM} \Rightarrow (CELM) = a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \quad (1.7)$$

Portanto, a área do quadrado $BCED$ de lado a é igual a soma das áreas dos retângulos $BMLD$ e $CMLE$, ou seja,

$$a^2 = (c \cdot \cos \hat{B}) \cdot a + (b \cdot \cos \hat{C}) \cdot a \rightarrow a^2 = c \cdot \frac{c}{a} \cdot a + b \cdot \frac{b}{a} \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

como queríamos demonstrar!

1.1.6 Demonstração de Leonardo da Vinci

O teorema de Pitágoras nos afirma que $(ACED) + (BCFG) = (ABHJ)$. Leonardo da Vinci que nasceu na Itália em 15 de abril de 1452, criador do quadro Mona Lisa, também concebeu uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando apenas recursos visuais conforme a seguir:

Demonstração: Na figura 1.6 foi construído um triângulo HIJ congruente a ACB . Em seguida, desenha-se uma linha DG que passa por C e divide $ABGFED$ ao meio. De modo análogo, desenha-se um segmento CI dividindo em dois trapézios congruentes $ACIJ$ e $HICB$. Deletando metade das áreas geradas na figura 1.6,

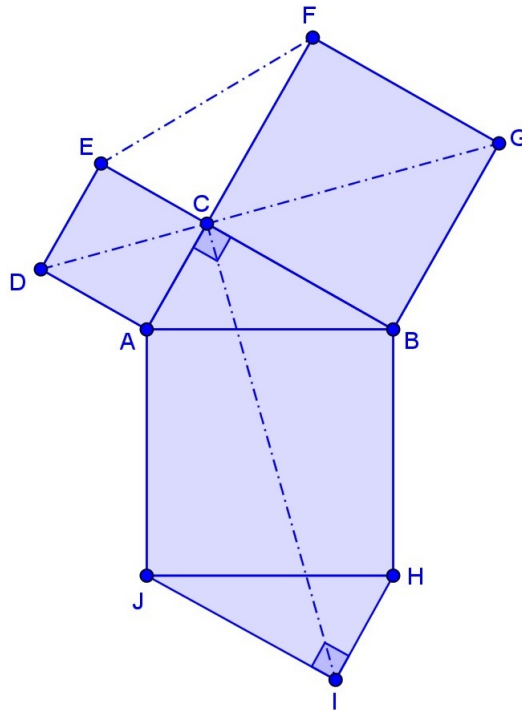


Figura 1.6: Demonstração de Leonardo da Vinci

observemos que $ACIJ$ e $ADGB$ são congruentes, pois $DA \cong CA$, $GB \cong IJ$ e $AB \cong AJ$. Deletamos os triângulos ABC e HIJ , temos:

$$(ACD) + (CBG) = (AJLK)$$

Dobrando os três polígonos conclui-se a demonstração do teorema.
como queríamos demonstrar!

1.1.7 Demonstração do Presidente Americano

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881), era também general e gostava de Matemática. Ele deu a seguinte prova, retirada de [25], do teorema de Pitágoras baseada na figura abaixo:

A área do trapézio com bases b, c e altura $b + c$ é igual à semissoma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas dos 3 triângulos. Portanto,

$$\frac{(b + c)(b + c)}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

como queríamos demonstrar!

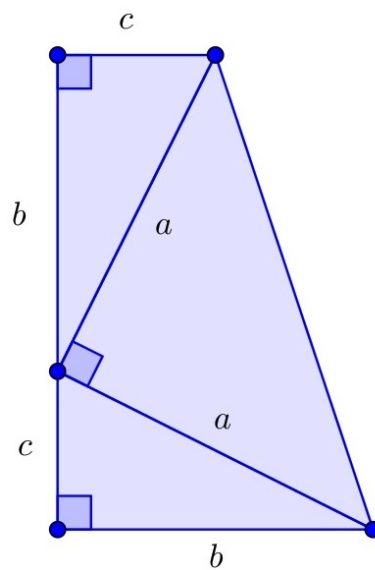


Figura 1.7: Figura usada pelo presidente

1.1.8 A demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração, retirada de [36], que se pode apreciar na figura a seguir.

Demonstração: Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

como queríamos demonstrar!

1.1.9 Recíproca do Teorema de Pitágoras

Teorema 2. *Dados 3 números reais positivos, caso o quadrado do maior deles seja igual a soma dos quadrados dos outros dois números menores, podemos afirmar que existe um triângulo retângulo cujos lados medem esses três números, sendo que o maior deles será a medida da hipotenusa desse triângulo.*

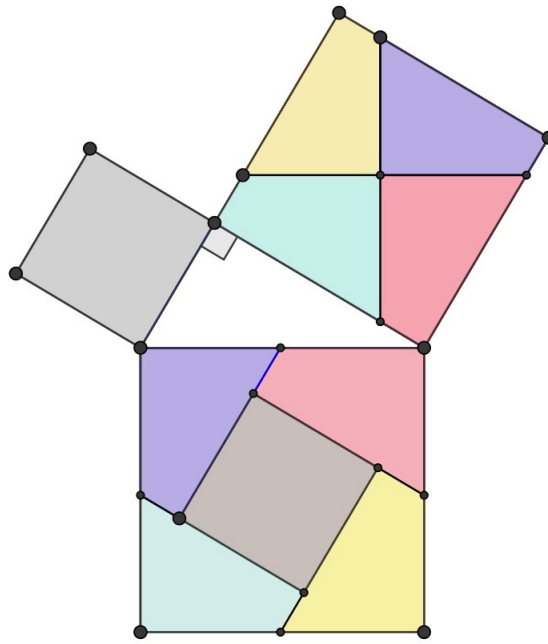


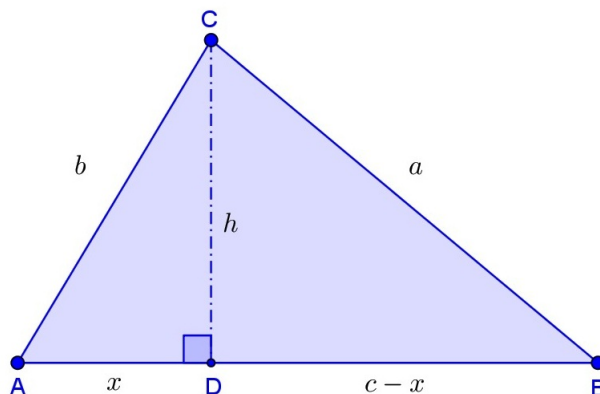
Figura 1.8: A demonstração de Perigal

Demonstração. Consideremos então um $\triangle ABC$ com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Por motivos de clareza a demonstração será dividida em dois casos:

1º Caso: $\hat{A} < 90^\circ$.

Seja o ponto D , projeção de C sobre AB , cai no interior do lado AB . Sejam $AD = x$ e $CD = h$.

Figura 1.9: Triângulo Acutângulo



Fonte: Teorema de Pitágoras e Áreas - PIC – página 9

Como $\triangle ADC$ é retângulo, temos:

$$h^2 = b^2 - x^2.$$

Como $\triangle BDC$ é retângulo, temos:

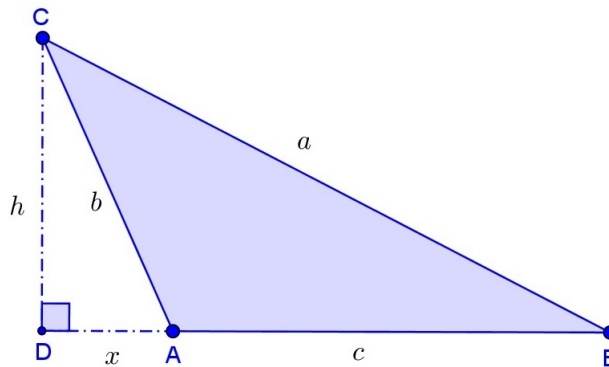
$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 \rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2º Caso: $\hat{A} > 90^\circ$.

Agora, o ponto D cai fora do lado AB . Como o triângulo ADC é retângulo, temos:

Figura 1.10: Triângulo Obtusângulo



Fonte: Teorema de Pitágoras e Áreas - PIC – página 9

$$h^2 = b^2 - x^2.$$

Assim como o triângulo BDC que também é retângulo, daí:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 \rightarrow a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial. Demonstramos então que em um triângulo ABC , de lados a, b e c ,

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\hat{A} = 90^\circ$.

□

1.2 Algumas generalizações do Teorema de Pitágoras

1.2.1 Argumento de Polya

O Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, imaginemos figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. Sejam então A , B e C as medidas das áreas de

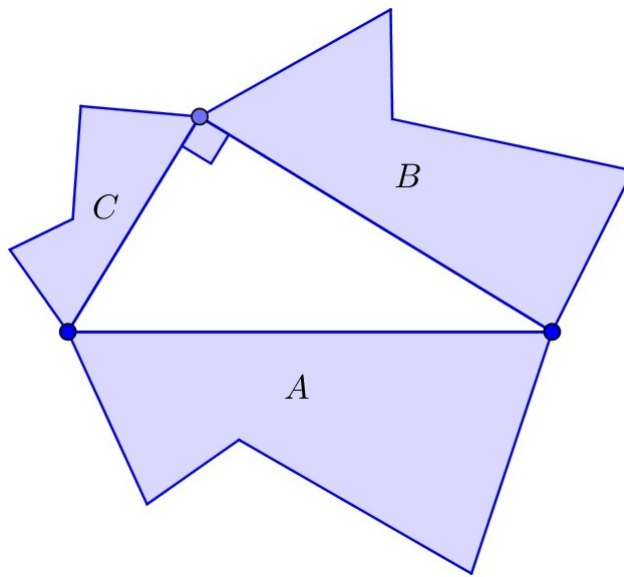


Figura 1.11: Argumento de Polya

figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura (1.11).

Daí:

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A}{C} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2},$$

o que nos permite concluir que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$$

Ora, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que: $A = B + C$.

como queríamos demonstrar!

1.2.2 Lúnulas de Hipócrates

Um outro interessantíssimo resultado relacionado ao Teorema de Pitágoras foi estabelecido por Hipócrates de Quios (cerca de 470 – 410 a.C). Hipócrates foi um dos pitagóricos. Apesar de haver poucos relatos de sua vida, sabe-se que foi um excelente geômetra, gostava muito de analisar as luas crescentes, que em matemática chama-se Lúnulas. Ensinou Geometria em Atenas e dedicou muito de seu tempo estudando problemas de meandros da história antiga, entre eles destaca-se A Quadratura do Círculo e Duplicação do Cubo (problemas que posteriormente, no século XVIII, foram mostrados insolúveis com a utilização de régua e compasso). Durante as tentativas de quadrar o círculo Hipócrates calculou áreas de algumas “lúnulas”, que resultou em um problema conhecido hoje como Lúnulas de Hipócrates, que trataremos nesta subseção.

Hipócrates concluiu utilizando a generalização do Teorema de Pitágoras, que a medida da área do triângulo retângulo ABC é igual à soma das medidas das áreas das lúnulas construídas sobre seus catetos.

Na figura a seguir, mostramos um triângulo retângulo ABC de área T e três semi-circunferências de diâmetros $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se S_1 e S_2 são as medidas

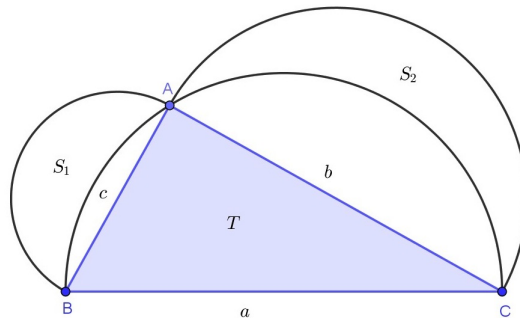


Figura 1.12: Lúnulas de Hipócrates

das áreas das lúnulas indicadas na figura acima, então

$$T = S_1 + S_2.$$

De fato, indicando por X e Y as medidas das áreas das regiões localizadas entre os catetos do triângulo ABC e as semi-circunferências que foram construídas sobre eles, conforme ilustra figura a seguir

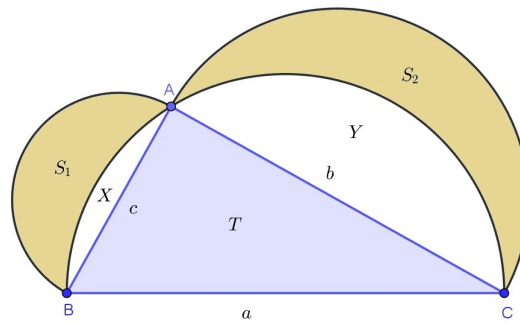


Figura 1.13: Lúnulas de Hipócrates

segue que

$$\begin{cases} T + X + Y = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ S_1 + X = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ S_2 + Y = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Adicionando as duas últimas equações obtemos:

$$S_1 + S_2 + X + Y = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8}.$$

Ora, como Por Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, segue que

$$S_1 + S_2 + X + Y = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8} \Rightarrow S_1 + S_2 + X + Y = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Por outro lado, pela primeira equação, tem-se que:

$$T + X + Y = \frac{\pi a^2}{8}$$

Portanto,

$$T + X + Y = S_1 + S_2 + X + Y \Rightarrow T = S_1 + S_2,$$

como havíamos enunciado!

1.2.3 Generalização do Teorema - Demonstração de Pappus

Agora vamos tratar de uma generalização bastante interessante do Teorema de Pitágoras que é conhecida como *Teorema de Pappus*, em homenagem ao seu descobridor, o Matemático Pappus de Alexandria (± 400 a.C). No lugar de um triângulo retângulo, toma-se um triângulo arbitrário ABC ; em vez de quadrados sobre os lados,

tomam-se paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de CD ser paralelo a HA , com o mesmo comprimento, conforme ilustra a figura (1.14).

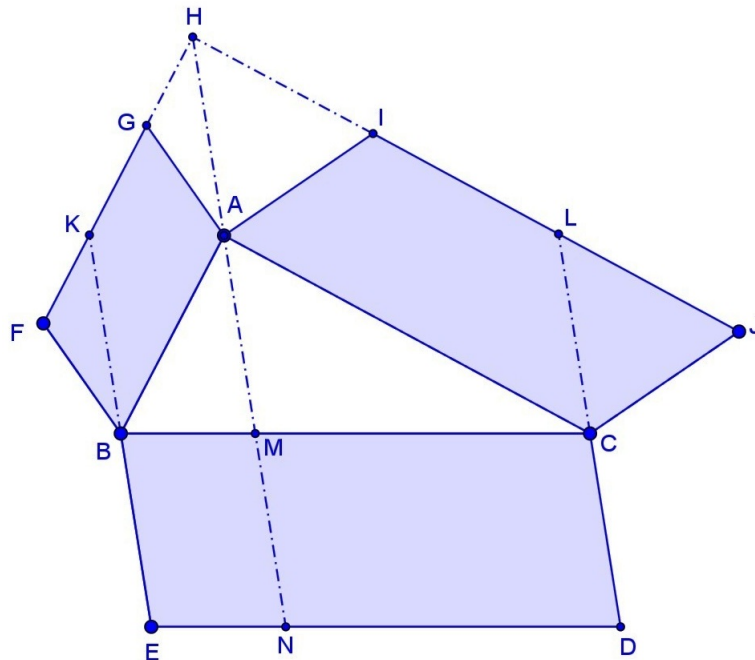


Figura 1.14: Demonstração de Pappus

O Teorema de Pappus afirma que a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas de $ABFG$ e $AIJC$. A demonstração se baseia na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento têm a mesma área.

Assim, por um lado, $AHBK$ tem a mesma área que $AGFB$ e, por outro lado, a mesma área que $BMNE$. Segue-se que as áreas de $BMNE$ e $AGFB$ são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de $CDNM$ e $CJIA$. Portanto, a área de $BCDE$ é a soma das áreas de $AGFB$ e $CJIA$.

Observação 1.2.1. *O teorema de Pitágoras é caso particular do de Pappus. Basta tomar o triângulo ABC retângulo e três quadrados em lugar dos três paralelogramos.*

1.2.4 Pitágoras 3D - Teorema de De Gua

Uma outra interessante generalização do Teorema de Pitágoras é um análogo tridimensional, que trataremos nesta subseção. Essa generalização é conhecida

na Literatura Matemática como *Teorema de Gua*. Esse nome faz referência ao matemático francês Jean Paul de Gua de Malves (vide [35]).

Teorema 3 (Pitágoras 3D - Teorema de De Gua). *Se um tetraedro possui um vértice O com três ângulos retos, então o quadrado da área de face oposta a esse vértice é igual a soma dos quadrados das áreas das outras faces, ou seja, sendo A_4 área da face oposta ao vértice O e A_1, A_2 e A_3 , respectivamente, as áreas das outras faces, então:*

$$A_4^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

Demonstração. Na figura 1.15 temos um tetraedro tri-retângulo.

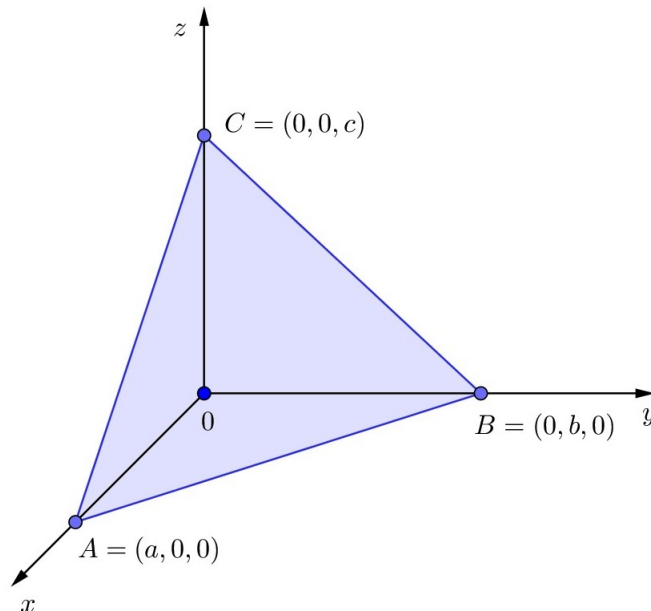


Figura 1.15: Teorema de De Gua

Traçando o segmento CD uma perpendicular ao lado AB (medindo H) e uma perpendicular a AB partindo de O (medindo h), conforme ilustra figura 1.16.

Por Pitágoras nos triângulos OCD e ABO , temos:

$$H^2 = c^2 + h^2 \text{ e } AB = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.8)$$

Além disso, sendo $A_1 = (ACO)$, $A_2 = (BCO)$, $A_3 = (ABO)$ e $A_4 = (ABC)$, podemos escrever:

$$A_1 = \frac{a \cdot c}{2}, A_2 = \frac{b \cdot c}{2}, A_3 = \frac{a \cdot b}{2} \text{ e } A_4 = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot H}{2}.$$

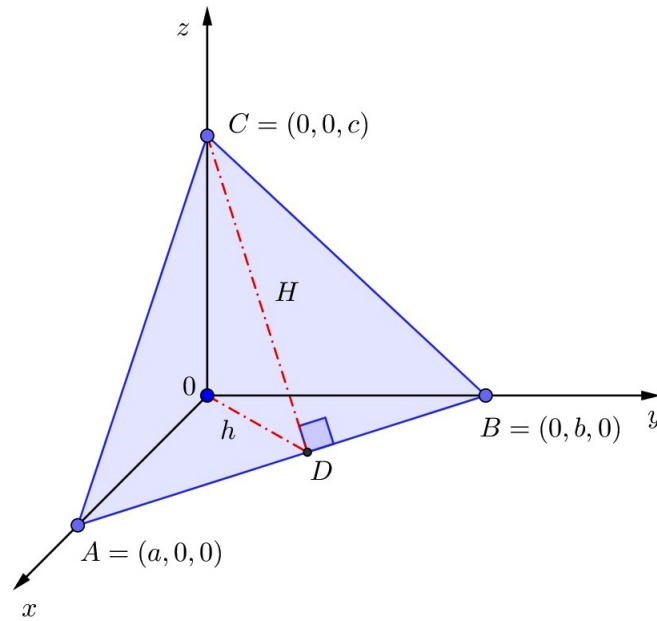


Figura 1.16: Teorema de De Gua

Por outro lado, também temos que $A_3 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}.h}{2}$. Assim,

$$A_3 = \begin{cases} \frac{b.c}{2} \\ \frac{\sqrt{a^2+b^2}.h}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a.c}{2} = \frac{h.\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow h^2 = \frac{(a.b)^2}{a^2+b^2}$$

Mas, por (1.8) ocorre que $H^2 = c^2 + h^2$. Portanto,

$$H^2 = c^2 + \frac{(a.b)^2}{a^2+b^2} \Rightarrow H^2 = \frac{(a.b)^2 + (a.c)^2 + (b.c)^2}{a^2+b^2} = \frac{4A_1^2 + 4A_2^2 + 4A_3^2}{a^2+b^2}$$

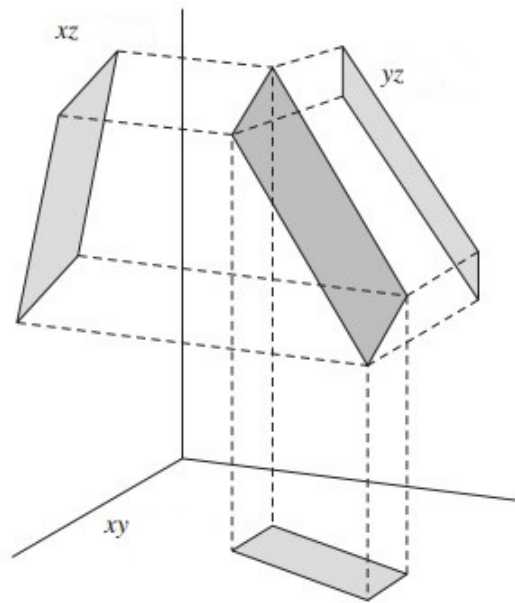
Por fim, lembrando que $A_4 = \frac{(a^2+b^2).H}{2}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} 4A_4^2 &= (a^2+b^2)H^2 \\ &= (a^2+b^2) \cdot \frac{(4A_1^2 + 4A_2^2 + 4A_3^2)}{a^2+b^2} \\ &= 4A_1^2 + 4A_2^2 + 4A_3^2 \end{aligned}$$

o que finalmente revela que $A_4^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. □

Observação 1.2.2. *Uma pequena observação sobre a demonstração acima é que utilizamos (sem demonstrar) o fato de que o ponto D sobre o segmento AB é o pé de ambas as perpendiculares à AB; os segmentos CD e OD. Mas isso pode ser facilmente verificado com o uso de coordenadas.*

Para finalizar essa seção, vamos registrar uma outra generalização do Teorema de Pitágoras no espaço Euclidiano n dimensional que é descrito em [5]. No espaço Euclidiano tridimensional, o quadrado da área de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados das áreas das suas projeções sobre os planos coordenados, como ilustra a figura a seguir:



O mesmo artigo termina demonstrando o seguinte teorema.

Teorema 4 (Pitágoras n -dimensional). *O quadrado do volume de um sólido $(n - 1)$ -dimensional gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ é igual a soma dos quadrados dos volumes dos sólidos que são as projeções sólido original sobre os hiperplanos coordenados.*

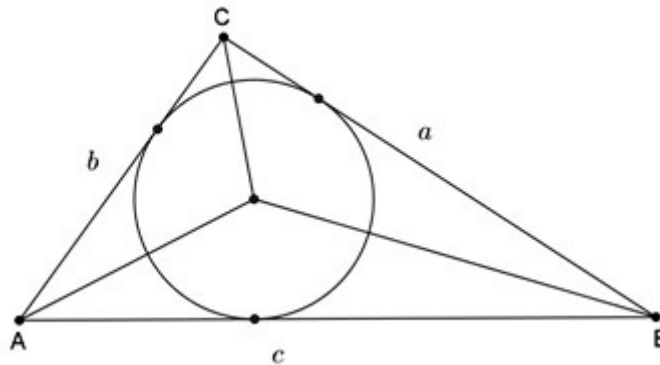
1.2.5 A Fórmula de Heron

A conhecida fórmula de Heron $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, para o cálculo da medida da área S , de um triângulo cujos lados medem a, b e c e semiperímetro p , pode ser provada de diversas maneiras. O propósito desta seção é exibir algumas demonstrações de tal fórmula, que muitas vezes são pouco divulgadas nos livros didáticos escolares, o que, muitas vezes deixa transparecer uma ideia que não é verdadeira; que a demonstração é difícil demais para alunos que estão fazendo um

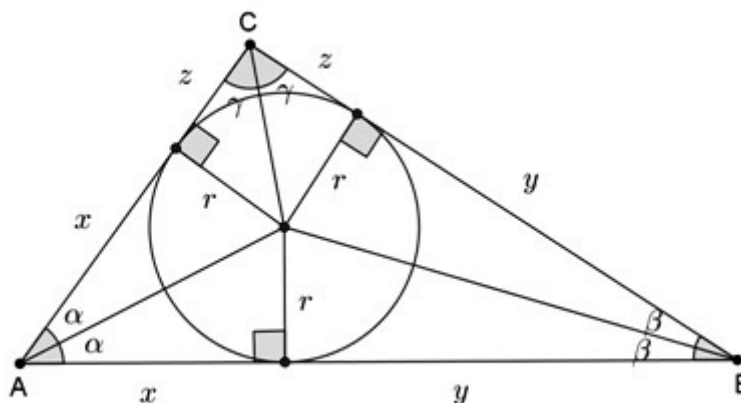
primeiro curso de geometria Euclideana. O nosso propósito é dar algumas sugestões de demonstração de tal fórmula para o uso em sala de aula, incluindo a prova original feita pelo Matemático Heron (200 d.C.) que viveu em Alexandria.

Para começar vamos mostrar uma bela demonstração dessa fórmula que foi publicada no THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, vol 32, N°4, september 2001 (Heron's formula via proofs without words). de autoria de Roger B. sen, Lewis Clark College, Portland, OR. e que foi traduzida por Carlos A. Gomes e publicada [34].

Seja ABC um triângulo com lados medindo a, b e c conforme ilustramos na figura abaixo. Nessa figura também representamos as bissetrizes dos ângulos internos



do triângulo ABC assim como a sua circunferência inscrita. Na figura a seguir mostramos os raio, de medida r , e os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo ABC . Perceba que o semiperímetro do ΔABC satisfaz as



seguintes relações:

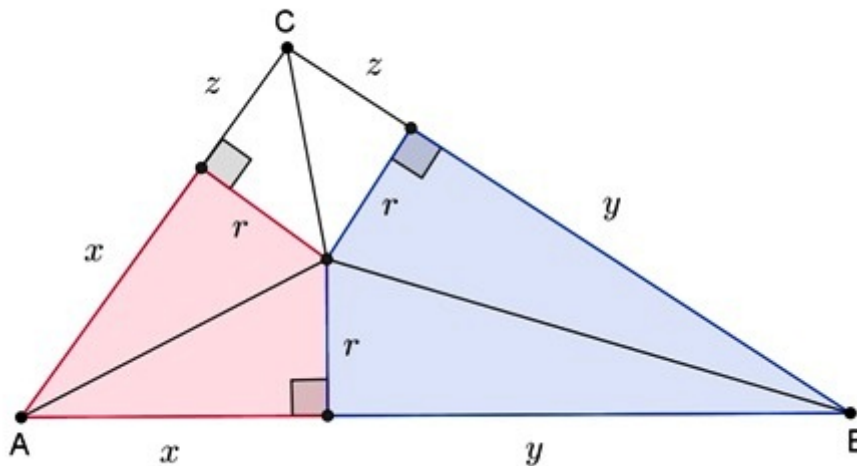
$$2p = 2x + 2y + 2z \Rightarrow p = x + y + z.$$

$$x + y = c, x + z = b \text{ e } y + z = a \Rightarrow \begin{cases} x = p - a \\ y = p - b \\ z = p - c \end{cases}$$

Agora vamos mostrar dois lemas (sem palavras) dos quais segue-se de modo imediato a fórmula de Heron.

Lema 1. *A medida da área S de um triângulo é igual ao produto da medida do raio da sua circunferência inscrita pela medida do seu semi-perímetro.*

Demonstração. Observe a decomposição do ΔABC mostrada na figura a seguir:



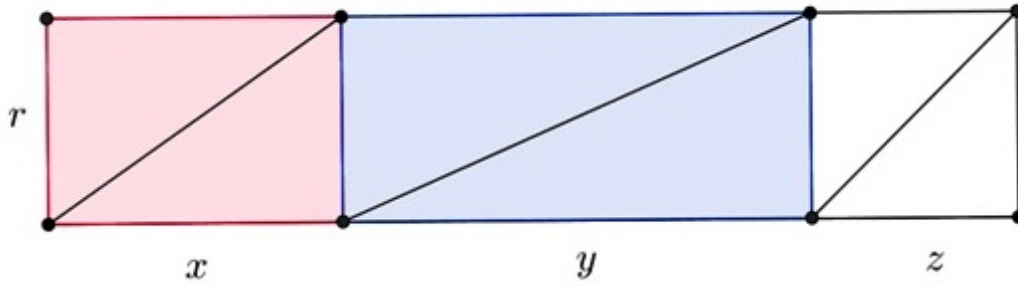
Note que podemos decompor o triângulo da figura acima, formando o seguinte retângulo: Observando as figuras acima tem-se que:

$$S = r(x + y + z) = pr.$$

□

Lema 2. *Se α, β e γ são medidas positivas de três ângulos tais que $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, então*

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma = 1$$



Demonstração. De fato,

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$$

Assim,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma = 1.$$

□

A partir desses lemas podemos enunciar e provar a fórmula de Heron.

Teorema 5 (Fórmula de Heron). *A medida da área S de um triângulo com lados medindo a, b e c é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro desse triângulo.*

Demonstração. Considere a figura a seguir: No triângulo ABC da figura acima, tem-se que:

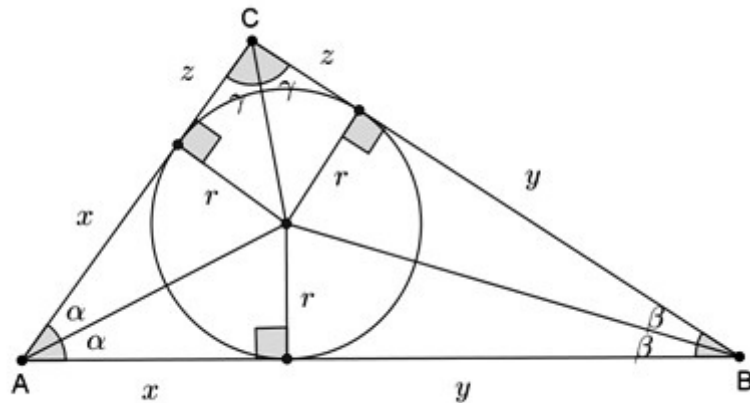
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Além disso, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{y}$ e $\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{z}$. Pelo lema 2, segue que

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma = 1 \Rightarrow \frac{r}{x} \frac{r}{y} + \frac{r}{x} \frac{r}{z} + \frac{r}{y} \frac{r}{z} = 1.$$

Assim,

$$1 = \frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = \frac{r^2 p}{xyz} = \frac{r^2 p^2}{pxyz} = \frac{S^2}{pxyz} \Rightarrow S = \sqrt{pxyz}.$$



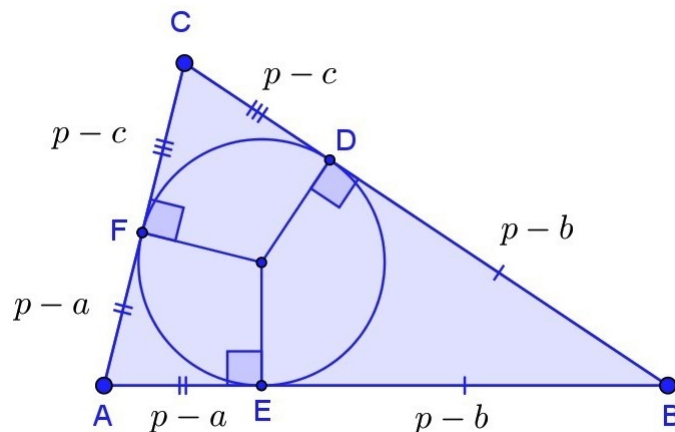
Lembrando que $x = p - a, y = p - b$ e $z = p - c$, segue que

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

□

Agora apresentaremos uma outra demonstração, que consideramos a mais simples para um primeiro contato com o assunto e portanto, ao nosso ver muito adequada para a sala de aula. Essa demonstração foi encontrada no livro F.I.C. - Elementos de Geometria, ver [4].

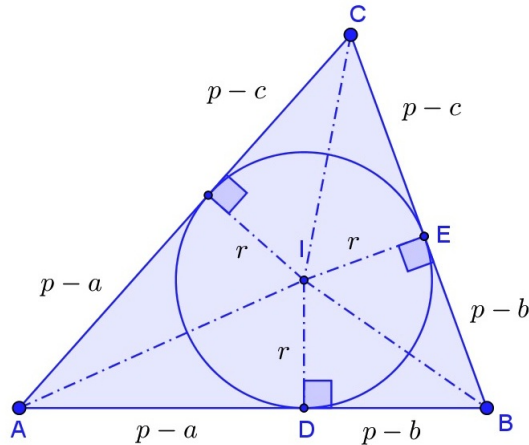
Demonstração. Considerando a figura a seguir e as relações $x = p - a, y = p - b$ e $z = p - c$, que estão resumidas na figura a seguir:



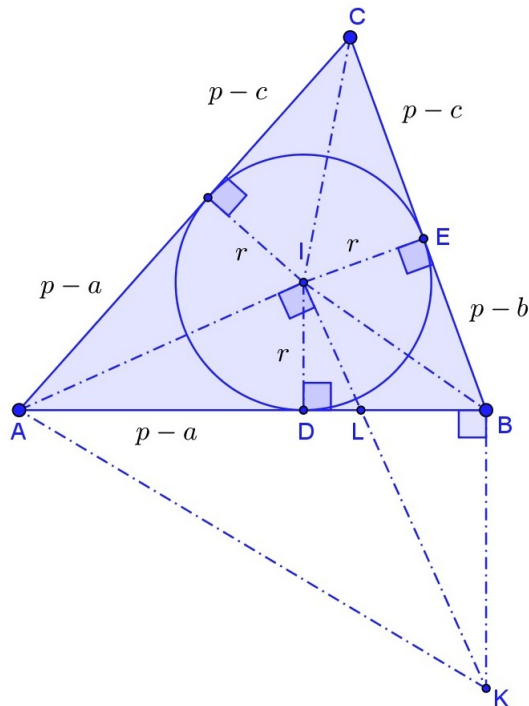
Considere a circunferência ex-inscrita ao ΔABC referente ao lado AC , conforme ilustra a figura a seguir: Note que:

baseada na apresentação feita por Mário Dalcin no artigo *A demonstração feita por Heron* publicado Revista do Professor de Matemática 36, ver [34].

Demonstração. Considere o triângulo ABC , sua circunferência inscrita cujo raio mede r .



A partir do ponto B traçamos uma reta (s) perpendicular ao segmento AB . Sobre a reta (s) consideremos o ponto K tal que o segmento KI seja perpendicular ao segmento AI , conforme ilustra a figura a seguir:



Note que o quadrilátero $AKBI$ é inscrivível numa circunferência de diâmetro AK ,

visto que $\widehat{AIK} = \widehat{ABK} = 90^\circ$. Lembrando que num quadrilátero cíclico a soma das medidas dos ângulos opostos é 180° , segue que:

$$\widehat{AIB} + \widehat{AKB} = 180^\circ.$$

A seguir usaremos esse fato para garantir a semelhança de alguns triângulos. Além disso,

$$AD \equiv AF, BD \equiv BE, CE \equiv CF.$$

Sendo J um ponto da semirreta AB tal que $BJ \equiv CE$. Nesse caso,

$$AJ = \frac{AD + AF}{2} + \frac{BD + BE}{2} + \frac{CE + CF}{2} = \frac{AB + BC + CA}{2} = p.$$

Portanto,

$$p - c = AJ - AB = BJ, p - b = AJ - AC = DB, p - a = AJ - BC = AD.$$

Note que $\triangle CIE \simeq \triangle AKB$, o que nos permite escrever a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BK} = \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r}.$$

No triângulo $\triangle ALI$, tem-se que $r^2 = DL \cdot AD$. Por outro lado, $\triangle DLI \simeq \triangle DLK$, o que nos permite escrever a seguinte proporção

$$\frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL}.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{BK} = \frac{CE}{r} = \frac{BJ}{r} \\ \frac{BK}{LB} = \frac{r}{DL} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AB}{BJ} = \frac{LB}{DL} \Rightarrow \frac{AB + BJ}{BJ} = \frac{LB + DL}{DL} \Rightarrow$$

$$\frac{AJ}{BJ} \cdot \frac{AJ}{AJ} = \frac{DB}{DL} \cdot \frac{AD}{AD}.$$

Essa última relação, juntamente com $r^3 = DL \cdot AD$ nos leva a:

$$AJ^2 \cdot r^2 = BJ \cdot AJ \cdot BD \cdot AD.$$

Por fim utilizando as relações

$$p - c = AJ - AB = BJ, p - b = AJ - AC = DB, p - a = AJ - BC = AD$$

segue que

$$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

como queríamos demonstrar!

□

Para finalizar essa seção, e para poder comparar com as demonstrações alternativas da fórmula de Heron que apresentamos acima, vamos apresentar a demonstração encontrada nos livros [29] e [10], porém nos livros mais utilizados no ensino médio, em especial os do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), não apresentam justificativa para a fórmula.

Essa demonstração parte da tradicional fórmula para o cálculo área de uma triângulo $S = \frac{ah_a}{2}$, onde h_a é a medida da altura relativa ao lado a do triângulo $\triangle ABC$, determinando a altura h_a em função das medidas dos lados a, b e c do referido triângulo.

Teorema 6. *Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo $\triangle ABC$,*

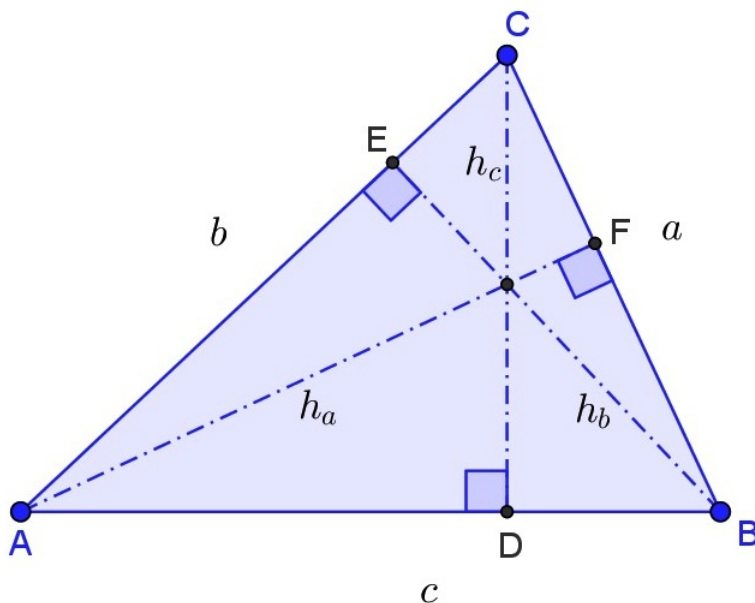


Figura 1.17: $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.

então

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demonstração. De fato, supondo que $BF = x$, segue que $CF = a - x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle AFB$ e $\triangle AFC$, segue que:

$$c^2 = h_a^2 + x^2.$$

$$b^2 = h_a^2 + (a - x)^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} b^2 &= h_a^2 + (a - x)^2 \\ &= h_a^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ &= a^2 + (h_a^2 + x^2) - 2ax \\ &= a^2 + c^2 - 2ax \end{aligned}$$

Portanto,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo esse resultado em $c^2 = h_a^2 + x^2$, segue que

$$\begin{aligned} h_a^2 &= c^2 - x^2 \\ &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 \\ &= \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \\ &= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2} \\ &= \frac{((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2} \end{aligned}$$

Assim, $h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}$. Por outro lado,

$$2p = a + b + c \Rightarrow \begin{cases} a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \\ b + a - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ b - a + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)} \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a)} \\ &= \frac{4}{2a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

De modo completamente análogo pode-se provar que

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ e } h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Por fim,

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{ah_a}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Mas ocorre que $S = \frac{ah_a}{2}$, então $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, como queríamos demonstrar. \square

1.2.6 Teorema de Viviani

Nesta seção trataremos de um interessantíssimo resultado da geometria Euclidiana, o *Teorema de Viviani*, formulado pelo matemático e cientista italiano Vincenzo Viviani (1622-1703). Esse Teorema afirma que a soma das distâncias de um ponto qualquer localizado no interior de um triângulo equilátero aos lados desse triângulo é constante e igual a altura desse triângulo.

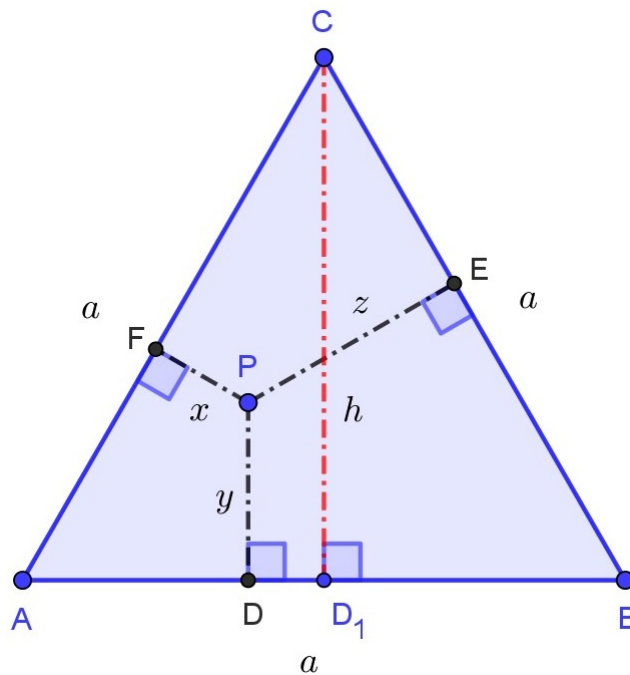


Figura 1.18: Teorema de Viviani $x + y + z = h$

Teorema 7 (Teorema de Viviani). *Num triângulo equilátero $\triangle ABC$, a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior desse triângulo aos lados é constante e igual a altura desse triângulo.*

Demonstração. A prova tradicional desse teorema consiste em ligar o ponto (arbitrário) P aos vértices do triângulo equilátero ABC , dividindo-o em três triângulos, conforme ilustra figura a seguir: Agora basta perceber que:

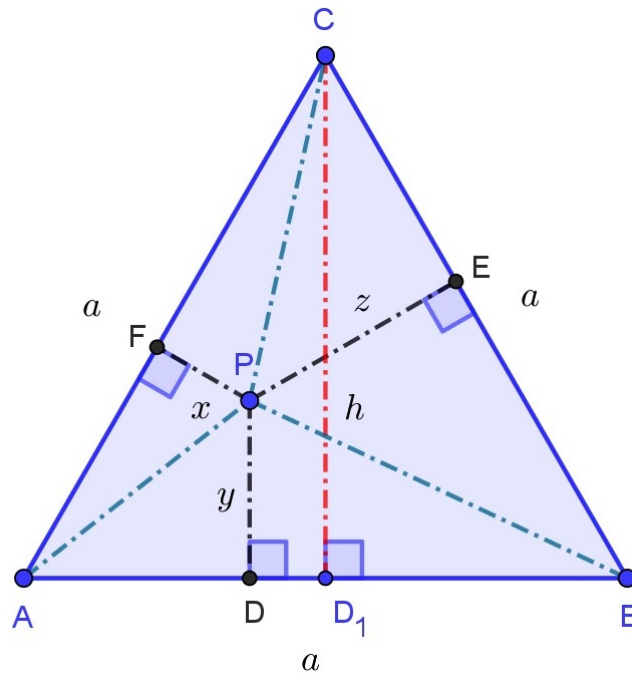
$$(ABC) = \frac{ah}{2}, (ACP) = \frac{ax}{2}, (ABP) = \frac{ay}{2} \text{ e } (BCP) = \frac{az}{2}$$

e que

$$(ACP) + (ABP) + (BCP) = (ABC) \Leftrightarrow \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2} \Leftrightarrow x + y + z = h.$$

□

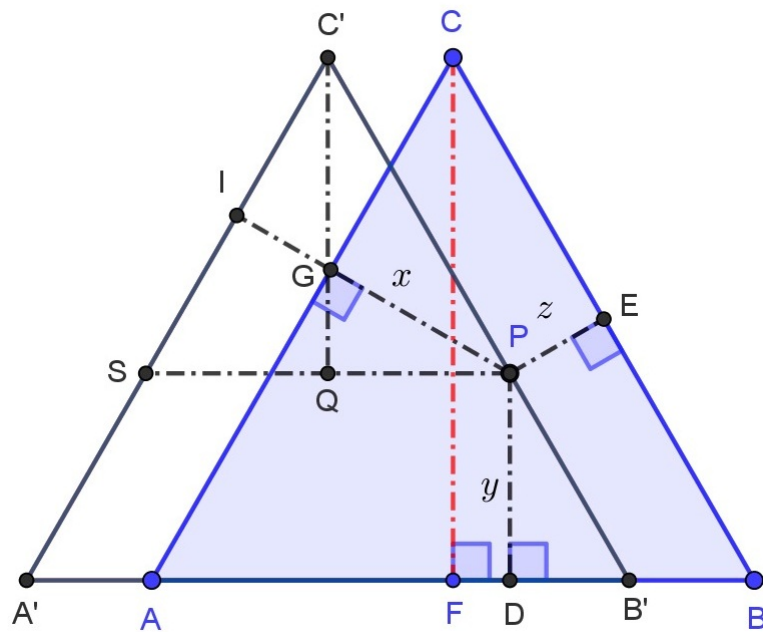
Observação 1.2.3. *Mesmo que o ponto P pertencesse a um dos lados do triângulo ABC , uma das três distâncias x, y ou z seria nula, mas mesmo assim o resultado ainda seria válido. Além disso há um outro fato mais curioso ainda; mesmo que o ponto P estivesse fora do triângulo ABC , se considerarmos uma medida algébrica*



dos segmentos x , y e z o resultado ainda é verdadeiro. Por fim gostaria de registrar que o Teorema de Vivivani tem um análogo tridimensional, a saber seja P um ponto arbitrário tomado no interior de um tetraedro regular $ABCD$, então a soma das distâncias de P à cada uma das faces desse tetraedro é constante e iguala altura desse tetraedro. Há muitas outras generalizações e fatos muito interessantes sobre o Teorema de Vivivani, que podem ser encontrados, por exemplo em [1].

Seguindo a nossa proposta de comparar as demonstrações clássicas com demonstrações mais alternativas, vamos apresentar um argumento visual que sugerem uma demonstração visual para o Teorema de Vivivani.

Considere o triângulo ABC com um ponto P arbitrário no seu interior e um triângulo $A'B'C'$ que é obtido a partir do triângulo ABC por um deslocamento lateral para a esquerda de modo que o ponto P pertença ao lado $B'C'$. Nesse caso, note que



$GI \equiv PE$. Assim,

$$\begin{aligned}
 h &= C'Q + PD \\
 &= PI + PD \\
 &= PG + GI + PD \\
 &= PG + PE + PD \\
 &= x + y + z
 \end{aligned}$$

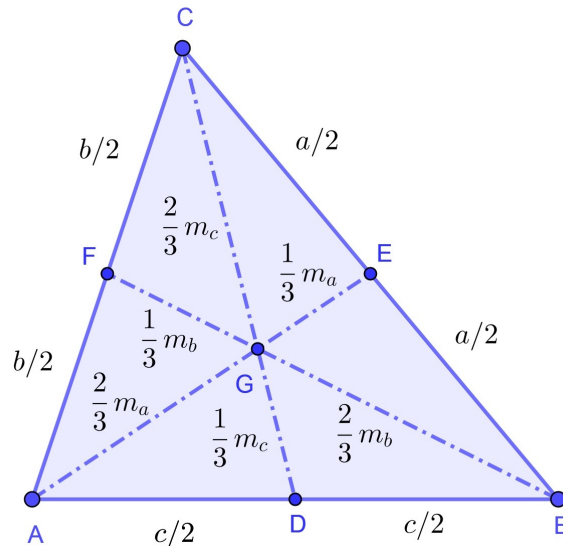
, o que demonstra o teorema.

1.2.7 O Triângulo das medianas

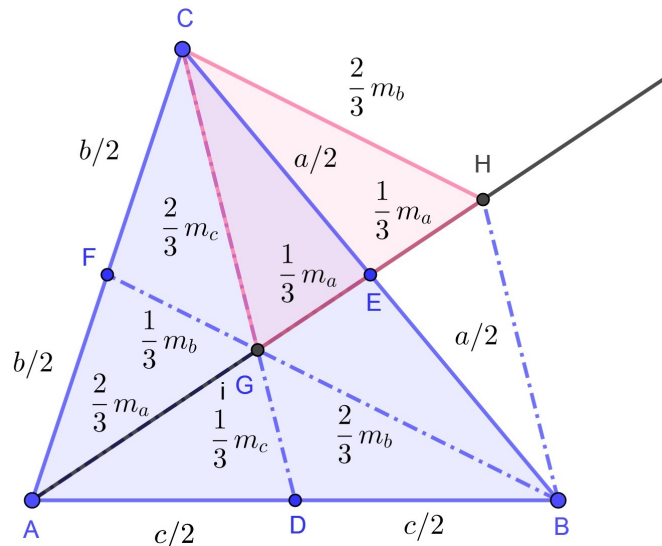
Há um famoso teorema de geometria que aqui estamos chamando “Triângulo das medianas”. Nesta pequena subseção vamos tratar esse resultado, mostrando a solução tradicional e uma demonstração visual para tal problema. Vamos então ao teorema.

Teorema 8 (O triângulo das medianas). *Seja ABC um triângulo cujos lados medem $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Se m_a , m_b e m_c são as medidas das medianas relativas aos lados BC , AC e AB , respectivamente, mostre que existe um triângulo cujos lados medem m_a , m_b e m_c .*

Demonstração. A ideia da da prova clássica desse teorema reside no fato de que o baricentro de um triângulo divide cada uma das medianas em dois segmentos tais que um deles é o dobro do outro, conforme ilustra a figura abaixo:



Prolongando o segmento GE até o ponto H tal que $GE = EH$ e conectando os pontos C e H formamos o triângulo CGH , conforme ilustra a figura a seguir: Note



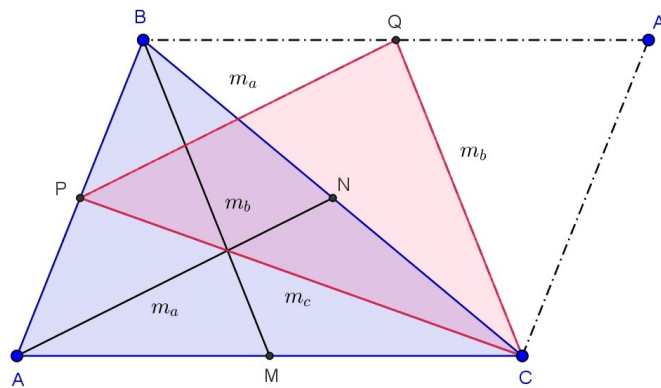
que os triângulos CEH e BEG são congruentes (caso LAL, $GE \equiv EH$, $BE \equiv EC$ e $\widehat{BEG} = \widehat{CEH}$). Desse congruência, segue que $CH = BG = \frac{2}{3}m_b$. Por fim, perceba que o ΔCGH tem lados $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ e $\frac{2}{3}m_c$.

Por outro lado, se existe um triângulo de lados a, b e c , então para qualquer número real $k > 0$, também existe o triângulo de lados ka, kb e kc , visto é semelhante ao triângulo de lados a, b e c , com razão de semelhança k .

Diante do exposto, como existe o triângulo de lados $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b$ e $\frac{2}{3}m_c$, segue que existe o triângulo de lados $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}m_a = m_a, \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}m_b = m_b$ e $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}m_c = m_c$. \square

Para fechar essa subseção mostraremos a seguir uma demonstração alternativa (mais visual) desse mesmo resultado. Vejamos:

Dado o triângulo ABC , cujos pontos médios dos lados são os pontos M, N e P , construa o paralelogramo $ABA'C$, conforme ilustra a figura abaixo:



Sendo Q o ponto médio do lado $A'B$, segue que $PQ = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}2m_a = m_a$ (Teorema da base média de um triângulo). Os triângulos ABM e $A'CQ$ são congruentes (LAL), o que revela que $QC = BM = m_b$. Assim o triângulo CPQ tem lados cujas medidas são m_a, m_b e m_c .

1.3 O círculo e a circunferência

Nesta pequena seção trataremos das duas fórmulas clássicas, $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, do comprimento de uma circunferência de raio r e da medida da área de um círculo de raio r , respectivamente.

1.3.1 O comprimento de uma circunferência

Esse é um tópico que raramente é abordado adequadamente nos livros didáticos escolares, dando um sensação de que seria um tópico muito complexo para ser devidamente explicado naquele nível de ensino a que o livro se destina. Isso não é verdade! É possível dar um tratamento honesto e sem rigor excessivo que pode ser compreendido por alunos iniciantes no assunto. A seguir como em [24], vamos mostrar uma sugestão de como fazer isso e em seguida, como de costume no nosso trabalho, daremos alguns argumentos geométricos que tornam razoáveis tais fórmulas, e que ao nosso ver são bastante adequadas para apresentar em sala de aula para alunos que estão tendo o primeiro contato com o assunto.

Demonstraremos, inicialmente, que os comprimentos de duas circunferências são proporcionais aos seus respectivos diâmetros.

De fato, sejam C e C' duas circunferências de raios R e R' , respectivamente. Seja x o comprimento de um segmento tal que

$$x = \frac{R'}{R} \cdot C.$$

Considerando dois polígonos regulares e semelhantes (de lados l_n e l'_n inscritos nessas circunferências, podemos escrever:

$$\frac{l_n}{l'_n} = \frac{R}{R'}.$$

Por outro lado,

$$n \cdot l_n = 2p \text{ e } n \cdot l'_n = 2p'.$$

Portanto,

$$\frac{l_n}{l'_n} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{n \cdot l_n}{n \cdot l'_n} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'}.$$

Como $x = \frac{R'}{R} \cdot C$, segue que $\frac{R}{R'} = \frac{C}{x}$. Então,

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{R}{R'} \text{ e } \frac{R}{R'} = \frac{C}{x} \Rightarrow \frac{2p}{2p'} = \frac{C}{x} \Rightarrow x = \frac{C}{2p} \cdot 2p'$$

Como $\frac{C}{2p} > 1$, segue que $x > 2p'$.

Seguindo as mesmas ideias, mas agora considerando dois polígonos regulares e semelhantes (de perímetros $2P$ e $2P'$ circunscritos à circunferência C , tem-se que

$$\frac{2P}{2P'} = \frac{2p}{2p'} = \frac{C}{x} \Rightarrow x = \frac{C}{2P} \cdot 2P'.$$

Ora, como $\frac{C}{2P} < 1$, segue que $x < 2P'$.

De acordo com a discussão acima, temos que

$$x > 2p' \text{ e } x < 2P' \Rightarrow 2p' < x < 2P'.$$

Por fim, quando $n \rightarrow \infty$ tem-se que $2p' \rightarrow C'$ e $2P' \rightarrow \infty$, o que nos permite concluir que $x = C'$.

Lembrando que $x = \frac{R'}{R} \cdot C$, segue que

$$x = \frac{R'}{R} \cdot C \Rightarrow C' = \frac{R'}{R} \cdot C \Rightarrow \frac{C'}{C} = \frac{R'}{R} = \frac{2R'}{2R} = \frac{d'}{d},$$

onde d' e d são os diâmetros das circunferências de raios R' e R , respectivamente.

Essa razão constante, $\frac{C'}{C} = \frac{2R'}{2R}$ é tradicionalmente representada pela letra Grega π , isto é,

$$\frac{C'}{C} = \frac{2R'}{2R} := \pi \Rightarrow C = 2\pi R.$$

Observação 1.3.1. Note que apenas utilizamos a razão $\frac{C'}{C} = \frac{2R'}{2R}$ para definir uma constante que, como de costume na literatura, representamos pela letra π (qualquer outra letra pederia ter sido utilizada!), mas esse definição nada revela sobre o valor dessa constante. Para obter o valor dessa constante, o caminho tradicional é avaliar os perímetros de polígonos regulares inscritos (ou circunscritos) numa circunferência de raio 1.

A tabela a seguir traz (para alguns valores de n os valores de l_n (comprimento do lado de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência) e p_n (perímetro de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência)).

n	l_n	$p_n = n \cdot l_n$
4	$\sqrt{2}$	5,6568
8	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	6,1232
16	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	6,2416
32	$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$	6,2720

segundo esse mesmo raciocínio, quando o número de lados do polígono for 2^{n+1} , segue que

$$l_{2^{n+1}} = \sqrt{\underbrace{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicais}}}$$

Por outro lado, quando $n \rightarrow \infty$, segue que $p_{2^{n+1}} \rightarrow C = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Assim,

$$2\pi \simeq 2^{n+1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

Portanto,

$$\pi \simeq 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

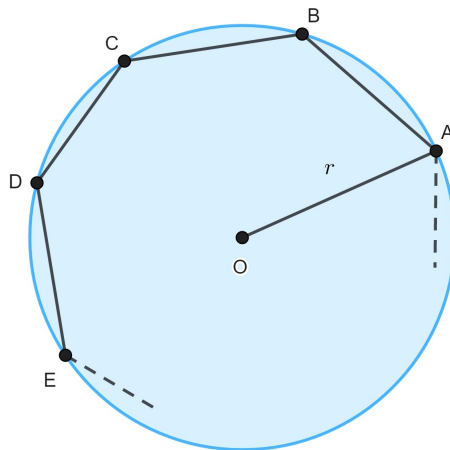
Tomando valores cada vez maiores de n obtemos aproximações cada vez melhores para a constante $\pi = 3,1415926\dots$

1.3.2 A área de um círculo

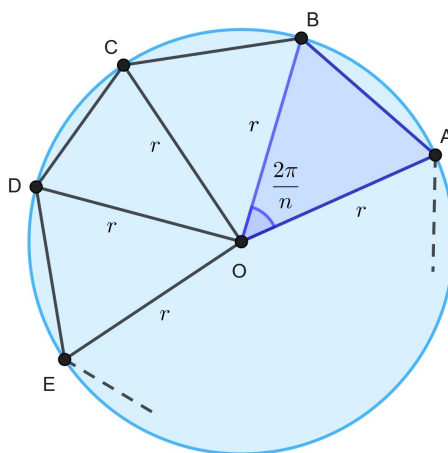
Agora vamos tratar da medida da área A de um círculo de raio r , demonstrando que $A = \pi \cdot r^2$.

Assim como no caso da comprimento da circunferência, são poucos os livros escolares brasileiros que tentam dar alguma justificativa para tal fato. Mostraremos aqui que é plenamente possível dar uma demonstração honesta e relativamente simples para tal fato. Para isso usaremos o conhecido limite trigonométrico $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$.

Consideremos um círculo de raio r e um polígono regular de n lados inscrito na sua circunferência, conforme ilustra a figura abaixo: Traçando-se os segmentos que



ligam o centro desse polígono aos seus vértices, formamos n triângulos isósceles com dois lados iguais a r e um ângulo de medida $\frac{2\pi}{n}$ entre eles, como ilustra a figura a seguir: A soma das áreas desses n triângulos é dada por



$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \Rightarrow S_n = \frac{nr^2}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

Por fim, note que quando $n \rightarrow \infty$ tem-se que $A_n \rightarrow A$, onde A é a medida da área do

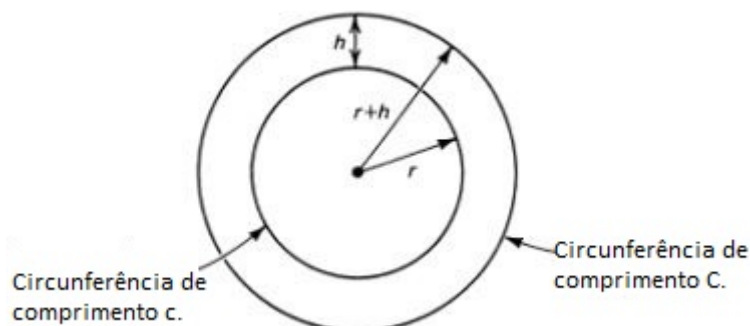
círculo de raio r , ou seja,

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi nr^2}{2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \\
 &= \pi \cdot r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{\left(\frac{2\pi}{n} \right)} \\
 &= \pi \cdot r^2 \cdot 1 \\
 &= \pi \cdot r^2,
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar!

Observação 1.3.2. Uma vez conhecido a fórmula $A = \pi \cdot r^2$ para o cálculo da medida da área A de um círculo de raio r , podemos oferecer uma demonstração alternativa para o cálculo do comprimento de uma circunferência de raio r , seguindo [21].

Considere h um número real positivo, e duas circunferências concêntricas de raios r e $r + h$, cujos comprimentos medem c e C , respectivamente, conforme ilustra a figura a seguir:

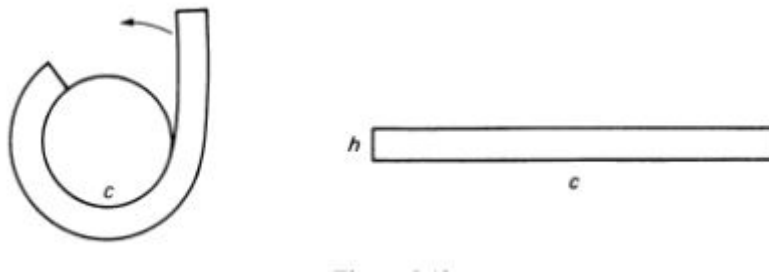


Na figura acima circunferência de raio r está cercada por um anel de largura h . A medida da área S desse anel corresponde a diferença entre as medidas das áreas

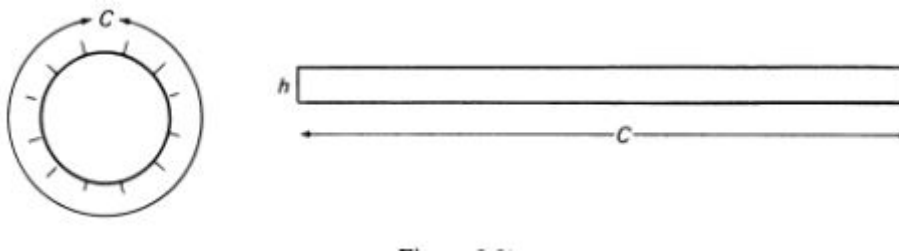
do círculo de raio $r + h$ e do círculo de raio r , ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \pi(r + h)^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(r^2 - 2rh + h^2) - \pi r^2 \\ &= 2\pi rh + \pi h^2 \end{aligned}$$

Para pequenos valores de h o anel circular pode ser aproximado (por falta) por um retângulo cuja base mede c e altura h , como ilustra a figura abaixo: Analogamente,



o anel também pode ser aproximado (por excesso) por um retângulo de base C e altura h , como ilustra a figura a seguir: Diante do exposto, segue que $ch < S < Ch$.



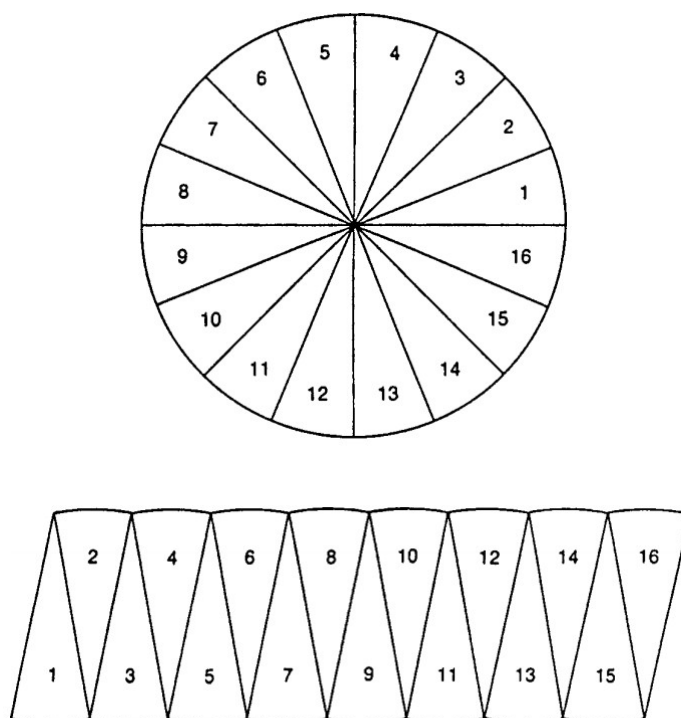
Portanto,

$$ch < S < Ch \Rightarrow ch < 2\pi rh + \pi h^2 < Ch \Rightarrow c < 2\pi r + \pi h < C.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, segue que $C \rightarrow c$, o que revela que $c \leq 2\pi r \leq c$, o que prova que $c = 2\pi r$, como queríamos demonstrar!

Seguindo a nossa proposta de demonstrações visuais, apresentaremos a seguir um argumento que pode ser bastante útil para apresentar o fato de que a medida da área A de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$.

Inicialmente fatie o círculo em n setores circulares iguais. (A figura abaixo ilustra o caso em que $n = 16$) Podemos reorganizar esses setores circulares formando a



configuração a seguir. Quando o número n de setores circulares cresce, isto é, $n \rightarrow \infty$ a configuração acima tende a um retângulo cuja base é metade do comprimento da circunferência, ou seja, $\frac{1}{2}2\pi r = \pi r$ e altura igual a r , revelando, pois que a medida da área do retângulo e portanto do círculo que lhe deu origem é $A = \pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$.

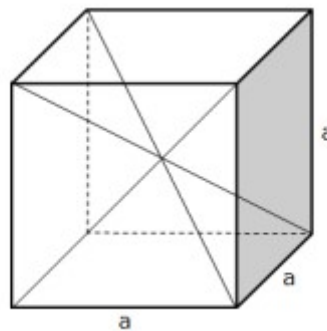
1.4 Geometria espacial métrica

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados clássicos da Geometria espacial métrica, sempre no mesmo espírito de sempre; apresentaremos algumas demonstrações clássicas e em seguidas algumas demonstrações alternativas, que pode ser úteis para o trabalho dos professores que tem a difícil missão de levar esses conhecimentos à estudantes que nunca tiveram um contato anterior com o assunto. No estudo da Geometria espacial métrica, a nível do Ensino médio há três pontos que são críticos para se introduzir aos alunos que estão tendo um primeiro contato com o assunto; os cálculo do volumes das pirâmides, dos cones e das esferas. Aqui nessa seção vamos sugerir algumas alternativas que acreditamos que possam ser úteis para o uso do professor em sala de aula.

1.4.1 Volume da Pirâmide

Para o calcular do volume V de uma pirâmide de área da base A e altura h utiliza-se a fórmula $V = \frac{1}{3}Ah$. Esse fator $\frac{1}{3}$ costuma ser um incômodo, pois ele aparece ali subitamente e evidentemente requer alguma explicação, o que nem sempre ocorre nos livros texto escolares. Aqui nesta seção vamos exibir algumas explicações diferentes para o surgimento desse “misterioso” fator $\frac{1}{3}$; umas mais rigorosas e outras mais intuitivas, o que podem ser bastante úteis tanto para os estudantes que se depararem pela primeira vez com esse tópico, quanto para seus professores, que sempre buscam explicações simples e convincentes para repassarem aos seus alunos.

Antes de qualquer coisa, para o uso em sala de aula, especialmente para alunos que terão o primeiro contato com o assunto, há uma abordagem simples onde podemos utilizar um cubo para mostrar que a fórmula do volume de uma pirâmide (reta) de base quadrada é $V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h$. Para isso consideremos um cubo de aresta a , conforme ilustra a figura a seguir: Note que traçando as quatro diagonais do cubo ele fica



dividido em seis pirâmides congruentes. Assim,

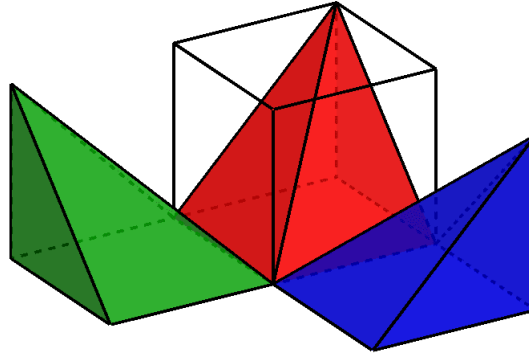
$$V_{cubo} = 6 \cdot V_{pirâmide} \Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{6}V_{cubo}.$$

Ora, como cada uma das seis pirâmides tem altura $h = \frac{a}{2}$ e cada face do cubo tem área $A = a^2$, segue que

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}a^2a = \frac{1}{3}a^2\frac{a}{2} = \frac{1}{3}A_{Base}h.$$

Ao nosso ver, esse argumento pode ser bastante educativo para alunos que estejam tendo o primeiro contato com o assunto.

O mesmo argumento que acabamos expor pode ser utilizado na figura a seguir para sugerir que o cálculo do volume V de uma pirâmide de área da base A e altura h seja dado por $V = \frac{1}{3}Ah$.



Para um tratamento mais rigoroso, iniciaremos mostrando o volume de uma pirâmide triangular, apresentarmos uma demonstração presente nos livros do ensino médio ([8], [33] e [13]). Em seguida, daremos uma outra opção de demonstração para os docentes aplicarem em sala de aula.

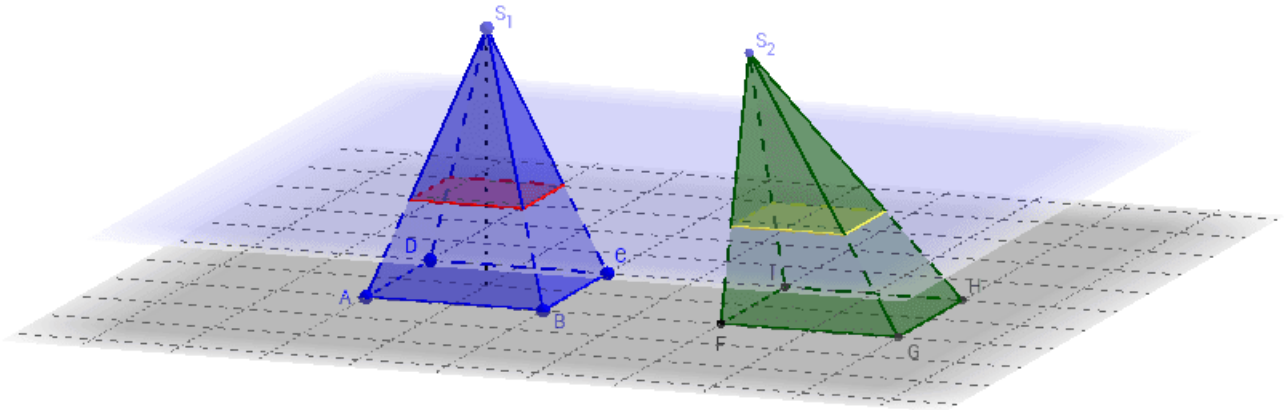
1.4.2 Pirâmide de base triangular

Para de fato, demonstrarmos a fórmula $V = \frac{1}{3}Ah$ para o cálculo do volume V de uma pirâmide cuja área da base mede A e altura h , iniciaremos com uma pirâmide de base triangular. Para calcular o seu volume, começaremos com o seguinte resultado.

Teorema 9. *Duas pirâmides triangulares com bases de mesma área e apresentando a mesma altura, possuem volumes iguais.*

Demonstração. Suponha duas pirâmides distintas apresentando bases paralelas e de mesma área S . As alturas das duas pirâmides são congruentes e medem H . Seja α o plano que contém as duas bases da pirâmides. Seja β um plano qualquer, paralelo a α , que determina nas pirâmides seções de áreas iguais a S_1 e S_2 , conforme a figura anterior. Considere que a distância de β aos vértices das duas pirâmides é igual a h . Por semelhança de triângulo segue que o triângulo de área S_1 é semelhante ao triângulo da base da pirâmide 1, sendo $\frac{h}{H}$ a razão de semelhança. Daí:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$



De modo análogo:

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Desse modo, cada plano traçado paralelamente ao plano que contém as bases determina nos sólidos seções de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri pode-se afirmar que $V_1 = V_2$. \square

Observação 1.4.1. *O princípio de Cavalieri afirma que de dois sólidos estão apoiados sobre um mesmo plano α e todo plano paralelo β paralelo a α secciona dos dois sólidos em duas seções de mesma área, então os dois sólidos têm volumes iguais.*

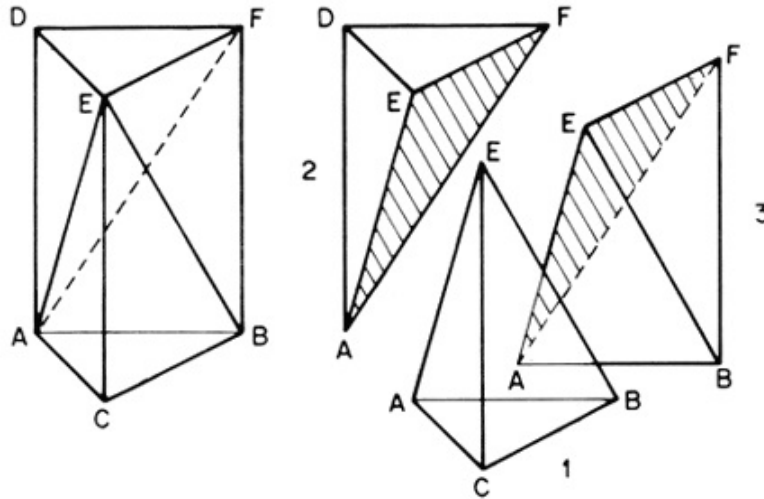
Agora vamos ao resultado principal desta seção; o cálculo do volume de uma pirâmide de base triangular.

Teorema 10. *O volume V de uma pirâmide triangular cuja base vale S e cuja altura vale h é $V = \frac{1}{3}Sh$.*

Demonstração. Considere um prisma $ABCDEF$ de base triangular. É possível particionar este prisma em três pirâmides triangulares, conforme a

Perceba que as pirâmides $ABCE$ e $DEFA$ possuem base de mesma área, pois os triângulos DFE e ABC são congruentes, e mesma altura (distância entre os planos definidos pelas bases das pirâmides). Assim, $V_1 = V_2$

Observe agora que as pirâmides $DEFA$ e $ABEF$ possuem mesma área de base (AEF) uma vez que AF é a diagonal do paralelogramo $ABDF$) e a mesma altura



(distância de E ao plano $ABFD$). Desse modo tem-se que $V_2 = V_3$. Logo, $V_1 = V_2 = V_3$. Portanto,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow S_b \cdot h = V \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$$

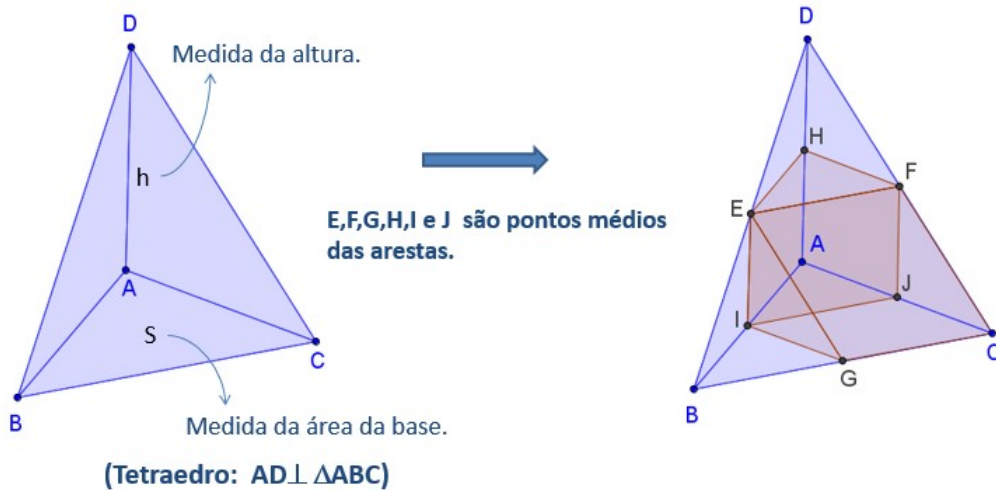
□

Como já comentamos, num primeiro contato com esse tópico do cálculo do volume de uma pirâmide, os alunos e até mesmo professores costumam incomodar-se bastante com a presença do 13 na fórmula do cálculo do volume de uma pirâmide. Agora, seguindo [2] vamos exibir uma demonstração alternativa para chegarmos ao “misterioso” $\frac{1}{3}$ na fórmula do cálculo do volume da pirâmide.

Para isso consideremos uma pirâmide de base triangular ABC , de volume V , cujas faces pertencem aos planos coordenados de um sistema de coordenadas Cartesianas xyz (veja a figura abaixo). Marcando os E, F, G, H, I e J pontos médios das arestas da pirâmide, formamos dois prismas, a saber $AIJFHE$ e $IGCJFE$, conforme ilustra a figura a seguir:

Na figura a seguir destacamos os dois prismas $AIJFHE$ e $IGCJFE$, calculando seus respectivos volumes. Diante do exposto, a soma dos volumes desses dois prismas corresponde a $\frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh$.

Além dos prismas $AIJFHE$ e $IGCJFE$ temos também duas pirâmides $EFHD$ e $BGIE$ (semelhantes à pirâmide original), conforme ilustra a figura a seguir. Tomando os pontos médios das arestas dessas duas pirâmides e repetindo o mesmo



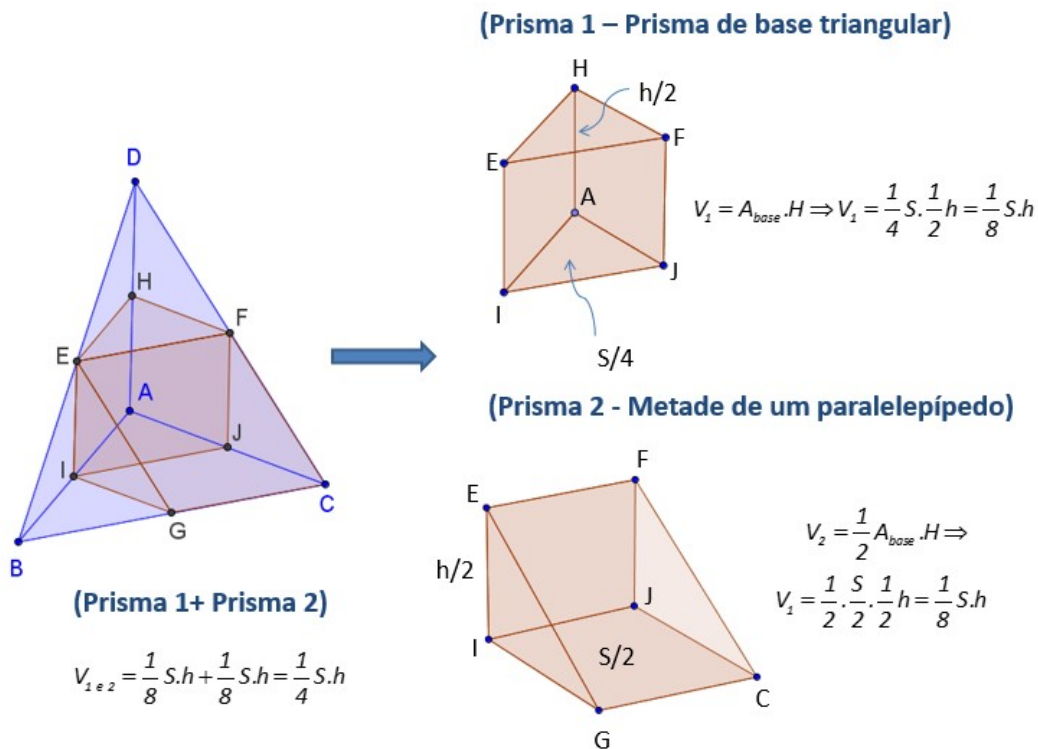
processo nessas pirâmides menores podemos determinar quatro novos prismas cujos volumes são calculados na figura a seguir:

Assim, a soma dos volumes desses quatro novos prismas corresponde a:

$$\frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh = \frac{1}{16}Sh.$$

Seguindo ilimitadamente com esse mesmo procedimento determinamos uma coleção de prismas cuja soma dos volumes corresponde ao volume da pirâmide original. Assim,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}Ah + \frac{1}{16}Ah + \frac{1}{64}Ah + \dots \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) Ah \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} Ah = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} Ah \\ &= \frac{1}{3}Ah \end{aligned}$$



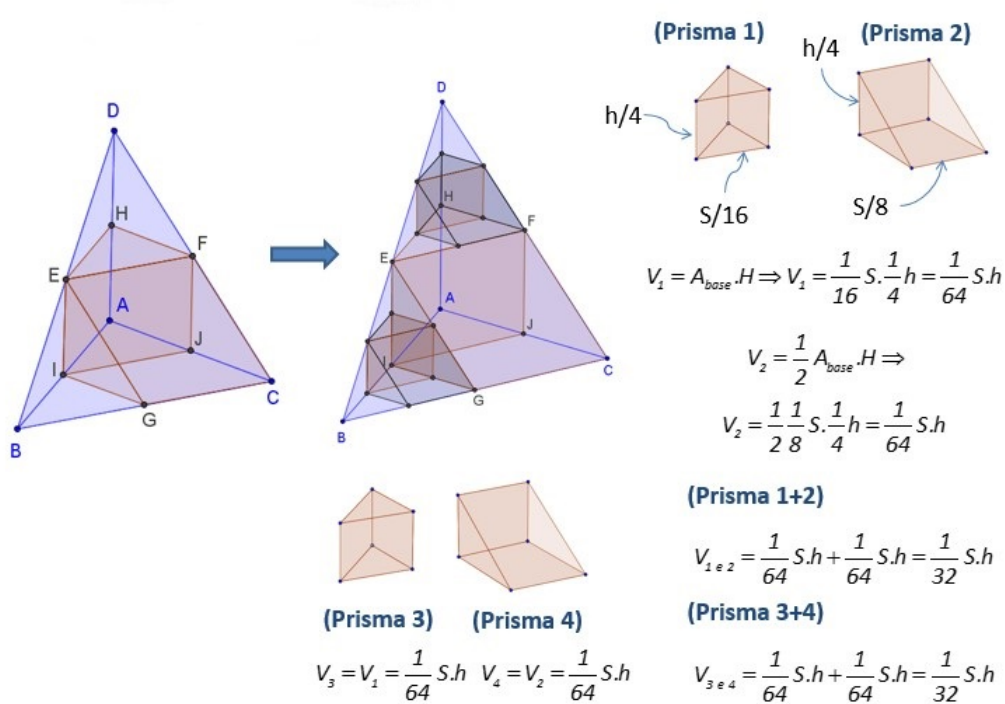
1.4.3 Pirâmide de base qualquer

Mesmo que a base da pirâmide de área da base A e altura h , não seja triangular, vamos mostrar que ainda funciona a expressão $V = \frac{1}{3}Ah$ para o cálculo do seu volume.

De fato, nesse caso, podemos utilizar o caso anterior, fazendo uma triangularização da base, conforme ilustra a figura a seguir

Considere uma pirâmide cuja base é um polígono convexo qualquer. Tome um dos vértices da base e trace as diagonais a partir deste vértice. a pirâmide original ficou particionada em pirâmides menores, todas de base triangular e mesma altura da pirâmide original. assim, o volume das pirâmides original é igual à soma dos volumes das pirâmides triangulares:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h \\ &= \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot h \end{aligned}$$



como queríamos demonstrar!

1.5 Volume de um cone

Nesta seção trataremos do cálculo do volume de um cone. Mostraremos que para um cone de área da base A e altura h funciona uma fórmula análoga à da pirâmide, ou seja, o volume do cone corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela sua altura.

De fato, considere uma pirâmide de base A e altura h e um cone também de base A e altura h . Os dois sólidos possuem suas bases sob o mesmo plano, conforme ilustra a figura 1.19. A uma distância d dos vértices dos sólidos é traçado um plano paralelamente às bases, determinando uma seção de área A_1 na pirâmide e uma seção de área A_2 no cone. Por semelhança de triângulos, na pirâmide tem - se que $\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$. de mesmo modo, agora no cone, demonstra - se que $\frac{A_2}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$. Assim, conclui - se que $A_1 = A_2$. Portanto, qualquer plano paralelo às bases dos sólidos determina seções de mesma área nos mesmos. Pelo Principio de Cavalieri, tem - se que $V_{cone} = V_{piramide}$. Portanto,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$$

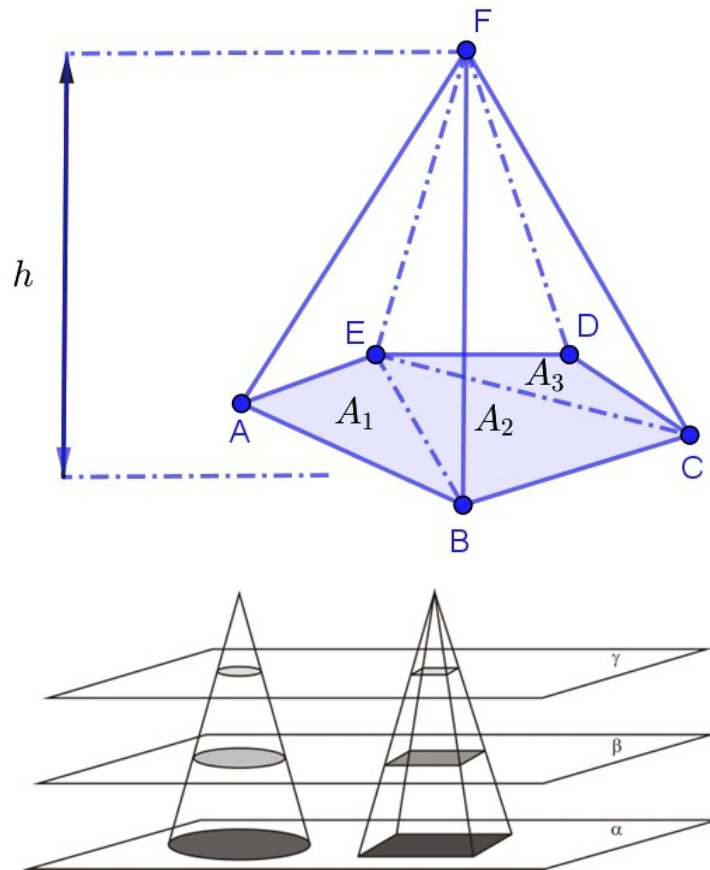


Figura 1.19: Volume do Cone

Agora apresentaremos uma maneira alternativa para chegar à fórmula $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ para o cálculo do volume de um cone cujo raio da base mede r e altura h . Essa abordagem segue o artigo [3].

Antes de tudo isso, consideremos o seguinte lema, que será uma peça chave para a nossa demonstração.

Lema 3. *Seja n um inteiro positivo, segue que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{3}.$$

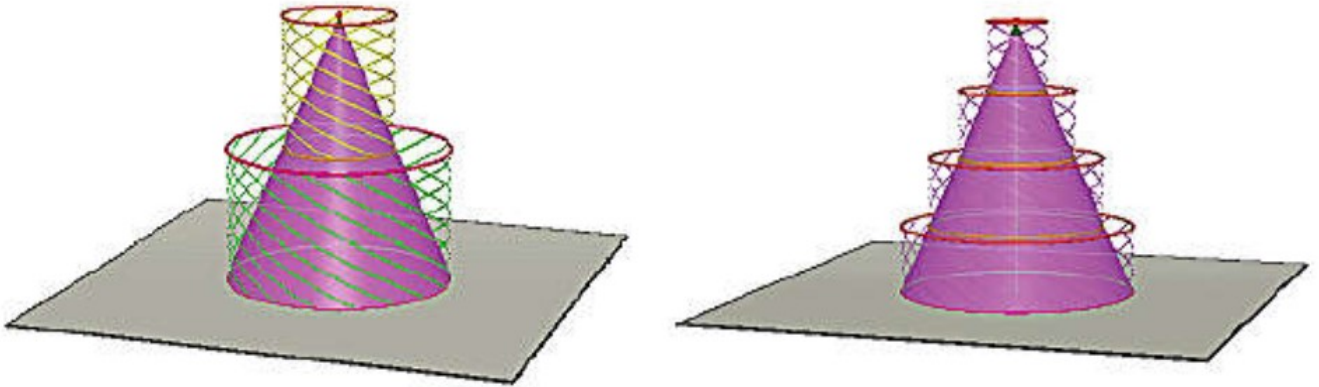
Demonstração.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right] =$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n^3(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Na figura a seguir, consideremos um cone cujo raio da base mede r e altura h . Para ilustrar o método, seccionando esse cone por planos paralelos ao plano da base separados por uma distância $\frac{h}{4}$, conforme ilustra a figura abaixo



Desse forma, o construímos quatro cilindros. A soma dos volumes desses cilindros é uma aproximação para o volume do cone, ou seja,

$$\begin{aligned} V_{cilindro} &\simeq v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\ &\simeq \pi r^2 \frac{h}{4} + \pi \left(\frac{3r}{4}\right)^2 \frac{h}{4} + \pi \left(\frac{2r}{4}\right)^2 \frac{h}{4} + \left(\frac{r}{4}\right)^2 \frac{h}{4} \\ &\simeq \frac{\pi r^2 h}{4^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \end{aligned}$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, mas seccionando o cone por n planos paralelos à base do cone e igualmente espaçados por uma distância $\frac{h}{n}$, obtemos:

$$\begin{aligned} V_{cilindro} &\simeq v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \\ &\simeq \pi r^2 \frac{h}{n} + \pi \left(\frac{3r}{4}\right)^2 \frac{h}{n} + \pi \left(\frac{2r}{4}\right)^2 \frac{h}{n} + \dots + \left(\frac{r}{n}\right)^2 \frac{h}{4} \\ &\simeq \frac{\pi r^2 h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Por outro lado, sabe-se que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Assim, definindo

$$V_n := \frac{\pi r^2 h}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\begin{aligned} V_{cilindro} &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2 h}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi r^2 h}{n^3} \cdot \frac{n^3(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \\ &= \pi r^2 h \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 \end{aligned}$$

Há uma demonstração alternativa muito elegante, mas que é pouco divulgada nos livros escolares brasileiros. Essa demonstração é baseada num Teorema de Pappus (vide [22]), cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 11 (Pappus). *Se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume do sólido gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Especificamente no caso do cone temos que $x = \frac{1}{3}R$ e $A = \frac{R \cdot H}{2}$, conforme ilustra da figura abaixo:

Portanto, aplicando o Teorema de Pappus, segue que:

$$V = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{R \cdot H}{2} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

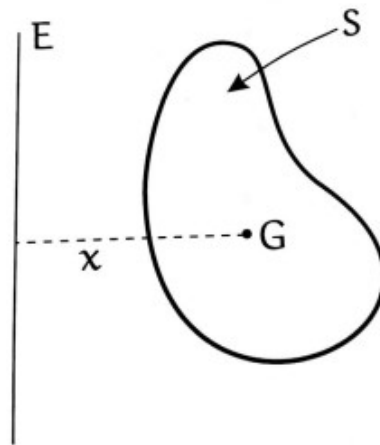


Figura 1.20: Volume do sólido de revolução: $V = 2\pi x \cdot A$

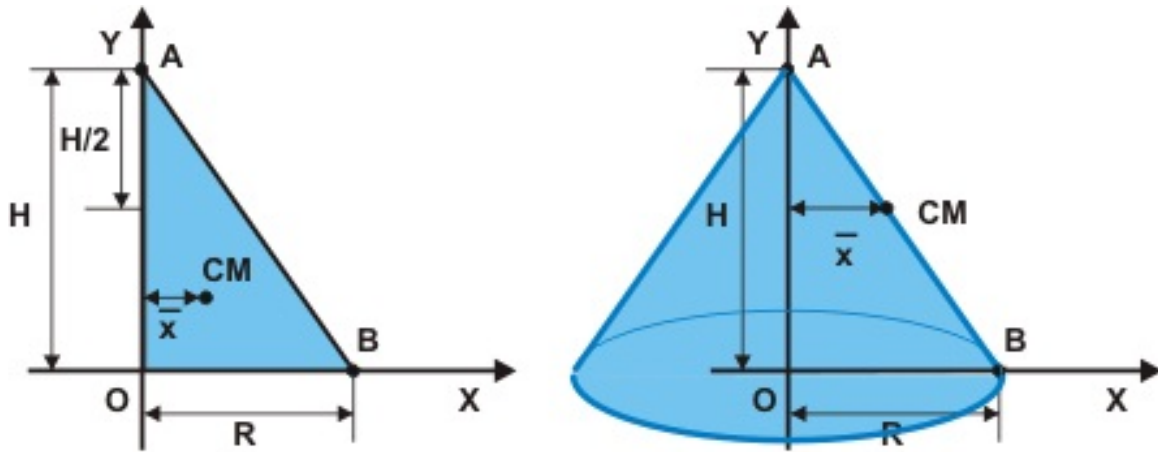


Figura 1.21: Cálculo do volume de um cone via o Teorema Pappus.

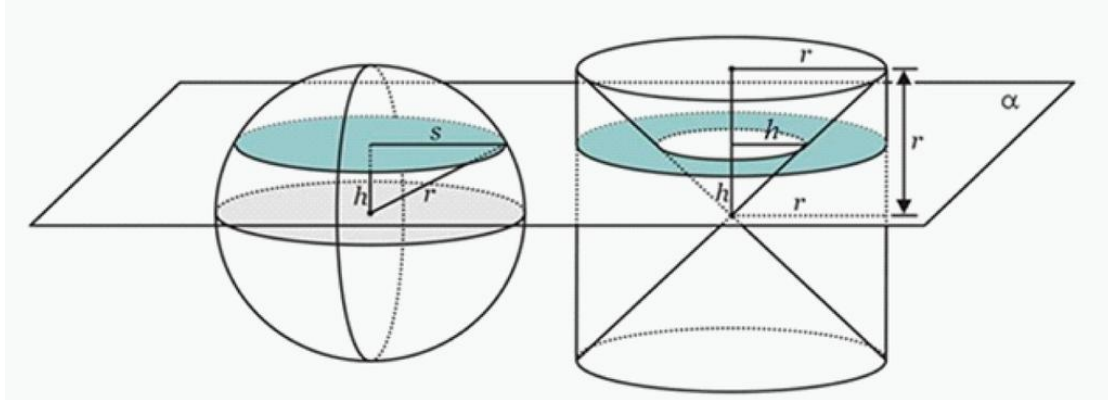
1.6 Volume de uma esfera

Nesta seção trataremos do volume do cálculo do volume de uma esfera. Analisando os livros escolares a maneira mais comum de dar uma justificativa para a fórmula $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$, para o cálculo do volume de uma esfera de raio r é via o princípio de Cavalieri, como mostramos a seguir.

Considere uma esfera de raio r e um cilindro equilátero de raio da base r e altura $h = 2r$. Considerando dois cones inscritos no cilindro (esse sólido composto pelos dois cones é chamado na literatura de *Clepsidra*) forma-se um sólido pelos pontos interiores ao cilindro e exteriores aos cones (esse sólido é chamado na literatura de *Anti-clepsidra*) e um plano α paralelo às bases do cilindro, intersecta esse sólido

segundo uma coroa circular e a esfera segundo um círculo de raio s , conforme ilustra a figura a seguir:

Supondo que o plano α está a uma distância h do vértice dos cones, segue que:



- Na esfera, temos um triângulo retângulo de catetos h e s e hipotenusa r . Por Pitágoras, $r^2 = s^2 + h^2 \Rightarrow s^2 = r^2 - h^2$, o que revela que na esfera a medida da área de seção é $A_1 = \pi s^2 = \pi(r^2 - h^2)$.
- Já na figura da direita, a medida da área A_2 que a seção que o plano α determina corresponde a medida da área de uma coroa circular cujos raios são r e h , ou seja, $A_2 = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$.

Ora, como para cada plano α paralelo às bases do cilindro tem-se que $A_1 = A_2$, segue pelo Princípio de Cavalieri, que

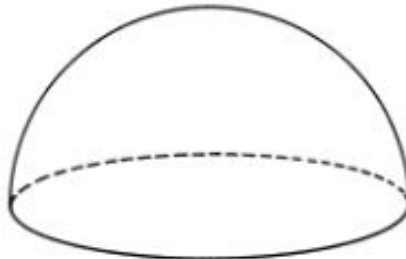
$$\begin{aligned} V_{esfera} &= V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} \\ &= \pi r^2 \cdot 2h - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Seguindo a nossa proposta, agora apresentaremos uma maneira alternativa para chegarmos à fórmula $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, para o cálculo do volume de uma esfera de raio r , seguindo as ideias desenvolvidas em [21].

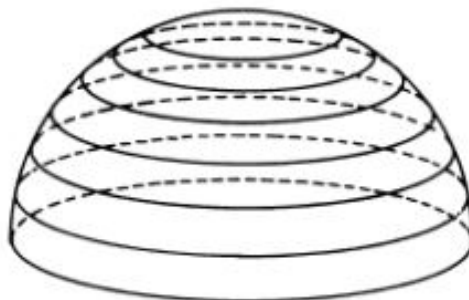
Inicialmente vamos mostrar que o volume de uma esfera de raio 1 é igual a $V = \frac{4}{3} \pi$. Depois, usando o fato de que uma esfera de raio r é semelhante a uma esfera de raio

1, com razão de semelhança r , vamos mostrar que o volume V de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Considere um hemisfério de raio 1, como ilustra a figura abaixo. Agora vamos

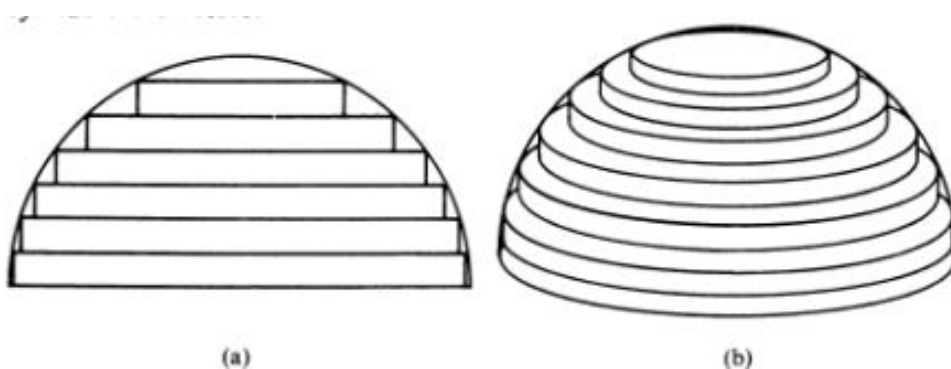


fatiar (por exemplo) esse hemisfério por seis planos horizontais igualmente espaçados, conforme ilustra a figura abaixo: Podemos aproximar essas fatias por cilindros



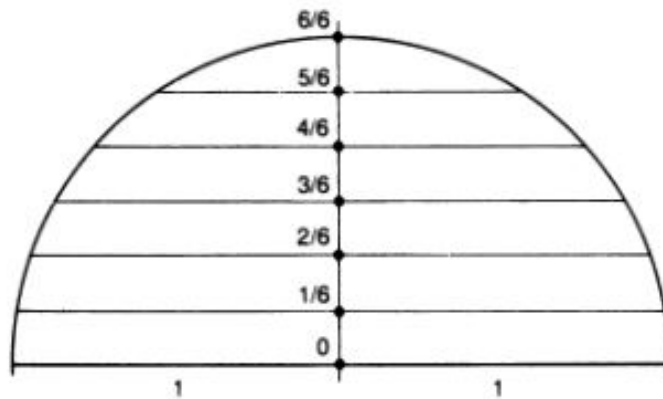
conforme ilustra a figura a seguir:

Dessa forma a soma dos volumes desses seis cilindros é uma aproximação (por falta)



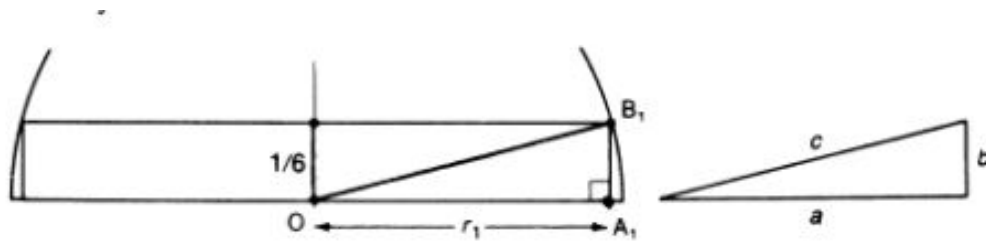
para o volume do hemisfério. A figura a seguir mostra a secção transversal da figura anterior e os pontos de divisão de um dos raios desse hemisfério.

Considerando que cada um dos seis cilindros tem a mesma altura, segue que cada



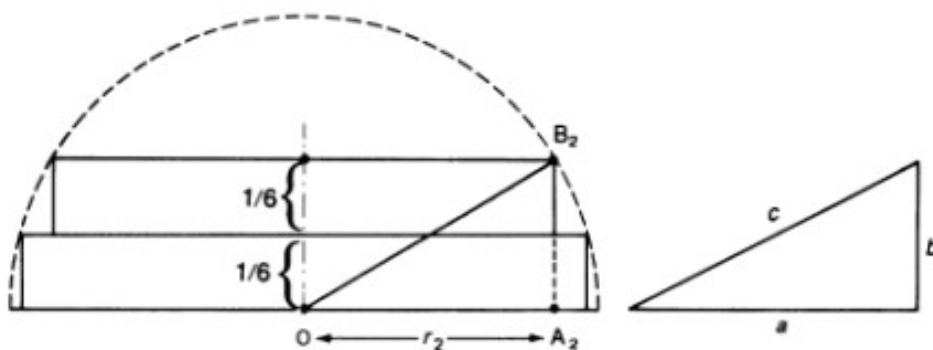
um deles tem altura $\frac{1}{6}$. A medida do raio da base de cada um desses seis cilindros pode ser calculado da seguinte forma:

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo OA_1B_1 , obtemos:



$$r_1^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow r_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

De modo completamente análogo podemos calcular a medida do raio do segundo cilindro, conforme ilustra a figura abaixo: Aplicando Pitágoras no triângulo OA_2B_2 ,



obtemos:

$$r_2^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow r_2^2 = 1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2.$$

Procedendo de modo completamente análogo podemos obter as medidas r_3, r_4, r_5 e r_6 dos raios dos demais cilindros. Esses valores são:

$$r_3^2 = 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^2.$$

$$r_4^2 = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2.$$

$$r_5^2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

$$r_6^2 = 1 - \left(\frac{6}{6}\right)^2.$$

Além disso, a altura de cada um dos seis cilindros é $\frac{1}{6}$. Portanto a soma dos volume desses seis cilindros (que é uma aproximação para o volume do hemisfério) é:

$$V_{hemisfério} \simeq \pi \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{6} + \pi \left(1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{6} + \dots + \pi \left(1 - \left(\frac{6}{6}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{6}$$

Seguindo exatamente esse mesmo raciocínio, mas considerando n cilindros, cada um de altura $\frac{1}{n}$, os seus respectivos raios da base serão

$$r_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2, r_2^2 = 1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, r_n^2 = 1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

Portanto a soma dos volumes desses n cilindros (que corresponde a uma aproximação para o volume do hemisfério) é:

$$\pi \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n} + \pi \left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n} + \dots + \pi \left(1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ essa soma converge para o volume do hemisfério, ou seja,

$$\begin{aligned}
 V_{hem} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \pi \left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n} + \dots + \pi \left(1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) + \dots + \left(1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[n - \left(\frac{1}{n}\right)^2 + - \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + - \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \\
 &= \pi - \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right]
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$V_{hemisfério} = \pi - \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, o volume de uma esfera de raio 1 é

$$V_{esfera} = 2v_{hemisfério} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Por fim, como uma esfera de raio r é semelhante a uma esfera de raio 1, com razão de semelhança r , segue que a razão entre os volumes V (da esfera de raio r) e $\frac{4\pi}{3}$ (da esfera de raio 1) é r^3 . Assim,

$$\frac{V}{\frac{4\pi}{3}} = r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

como queríamos demonstrar!

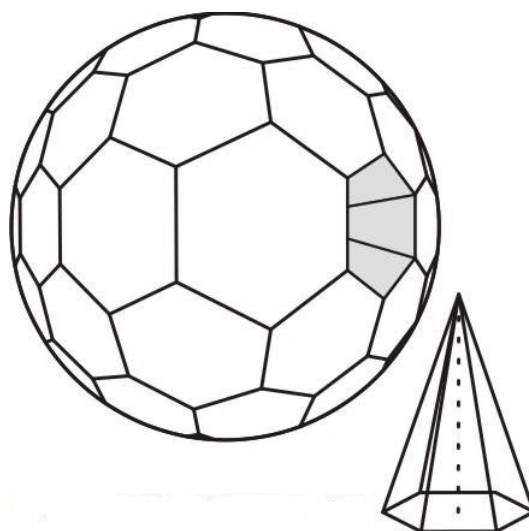
1.7 Área da superfície de uma esfera

Para finalizar esta breve visita à Geometria espacial métrica, trataremos nesta seção final do cálculo da área da superfície esférica de raio R , estabelecendo a conhecida expressão $S = 4\pi R^2$.

Infelizmente boa parte dos livros didáticos brasileiros apenas apresentam essa fórmula sem nenhuma explicação. Entre os poucos que tentam esboçar alguma justificativa, a mais comum é a seguinte:

Sabendo que o volume da esfera é dado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Use o volume da pirâmide, para mostrar que a área da superfície esférica é $A = 4\pi R^2$.

Inicialmente imagine que você desenhe sobre a superfície externa da esfera n “polígonos regulares” congruentes entre si, por exemplo hexágonos regulares (que não são planos, por estarem sobre a superfície da esfera) e em seguida, tomando o centro O da esfera dada como vértice você construa n sólidos ligando o ponto O a cada um dos vértices dos hexágonos, conforme ilustra a figura a seguir: É claro que para cada



um dos n hexágonos que foram desenhados sobre a superfície da esfera teremos um sólido cujo vértice é o centro da esfera e portanto o volume da esfera corresponde a soma dos volumes destes n sólidos, ou seja, se denotarmos por V_1, V_2, \dots, V_n os volumes destes n sólidos, teremos

$$V_{esfera} \simeq V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Além disso, perceba que a medida que tomamos valores de n cada vez maiores, duas coisas ocorrem: a primeira é que a altura de cada um dos n sólidos fica cada vez mais próxima da medida R do raio da esfera e a segunda é que os hexágonos regulares ficam cada vez menores e mais próximos de serem planos, e portanto cada um dos

n sólidos se aproxima da uma pirâmide cujo volume é $V_i = \frac{1}{3}S_iR$ onde S_i (com $1 \leq i \leq n$) é a medida da área do i -ésimo polígono, o que intuitivamente, sugere que:

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \dots + \frac{1}{3}S_nR \right) \\ &= \frac{1}{3}R \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \end{aligned}$$

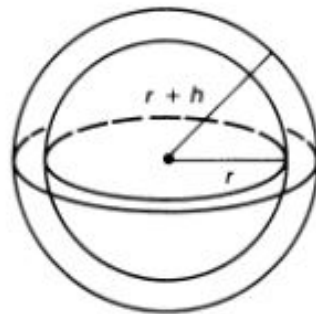
Por outro lado,

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = A_{esfera}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 &= \frac{1}{3}R \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \Rightarrow \\ 4\pi R^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \Rightarrow A_{esfera} = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Neste ponto mostraremos um argumento encontrado em [21]. Considere uma esfera de raio r e outra concêntrica com a primeira cujo raio é $r + h$, conforme ilustra a figura. Sejam s e S as medidas das áreas das esferas de raio r e $r + h$, respectivamente



e v e V as medidas dos volumes das esferas de raio r e $r + h$. De forma a diferença entre os volumes dessas esferas é

$$\begin{aligned} \Delta V &= V - v = \frac{4}{3}\pi(r + h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} [(r + h)^3 - r^3] \\ &= \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] h \end{aligned}$$

Por outro lado, a medida do volume da região limitada pelas esferas de raios r e $r + h$ é aproximadamente a medida da área da esfera vezes a espessura dessa região. Assim,

$$sh < \Delta V < Sh$$

Portanto,

$$sh < \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] h < Sh \Rightarrow$$

$$s < \frac{4\pi}{3} [3r^2 + 3rh + h^2] h < S$$

Assim, quando $h \rightarrow 0$, tem-se que $s \rightarrow S$, o que faz com que a expressão do meio se aproxima de $\frac{4\pi}{3}3r^2 = 4\pi r^2$, o que revela que a medida da área A de uma esfera de raio r é $A = 4\pi r^2$.

Capítulo 2

Fórmulas Trigonométricas

Neste Capítulo, vamos tratar de várias fórmulas trigonométricas que são apresentadas aos alunos do ensino básico. Seguiremos apresentando demonstrações presentes nos livros tradicionais e disponibilizando demonstrações alternativas as usuais.

2.1 Lei dos Cossenos

Nesta seção apresentaremos uma demonstração da lei dos cossenos que está presente na maior parte dos livros didáticos do ensino básico, a que apresentamos encontra-se em [32]. Em seguida, apresentaremos elegantes demonstrações alternativas [25] para que o professor possa utilizá-las em sala de aula com seus alunos.

Teorema 12. *Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

Demonstração. Consideremos um triângulo de lados a , b e c . Temos duas possibilidades: ou o triângulo é acutângulo ou é obtusângulo.

Inicialmente vamos analisar o caso em que o triângulo é obtusângulo, conforme a figura 2.1.

Observação 2.1.1. *Lembre-se que se $0 < \alpha < 180^\circ$, tem-se que $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.*

Observando a figura 2.1 podemos escrever:

$$m = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cdot \cos \alpha \quad (2.1)$$

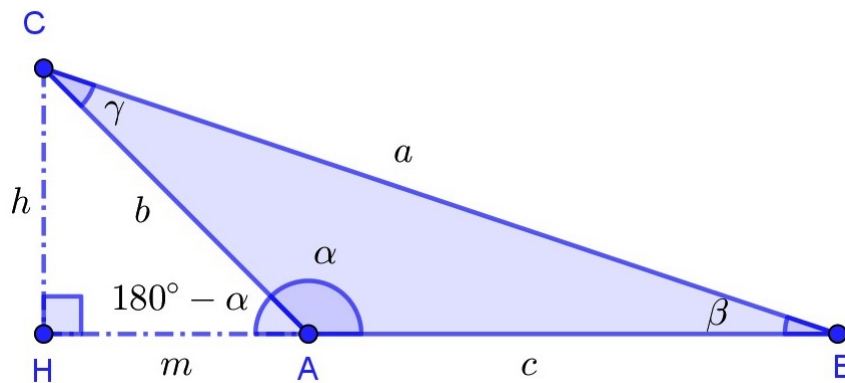


Figura 2.1: Triângulo Obtusângulo

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2 \quad (2.2)$$

$$b^2 = h^2 + m^2 \quad (2.3)$$

Isolando h em (2.3) e substituindo em (2.2), temos:

$$a^2 = (b^2 - m^2) + (c + m)^2$$

$$a^2 = b^2 - \cancel{m^2} + c^2 + 2cm + \cancel{m^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (2.4)$$

Agora substituindo o valor de m obtido em (2.1) em (2.4) chegamos a:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cdot \cos \alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Agora vamos analisar o caso em que o triângulo é acutângulo, conforme a figura a seguir: 2.2.

Seja D a projeção do vértice D sobre a reta AC . Como $\hat{A} < 90^\circ$ então D está na semirreta AC . No triângulo BDC o teorema de Pitágoras fornece:

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad h^2 = c^2 - x^2 \quad (2.5)$$

e o triângulo BCD , pelo mesmo teorema, nos fornece:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2 \quad (2.6)$$

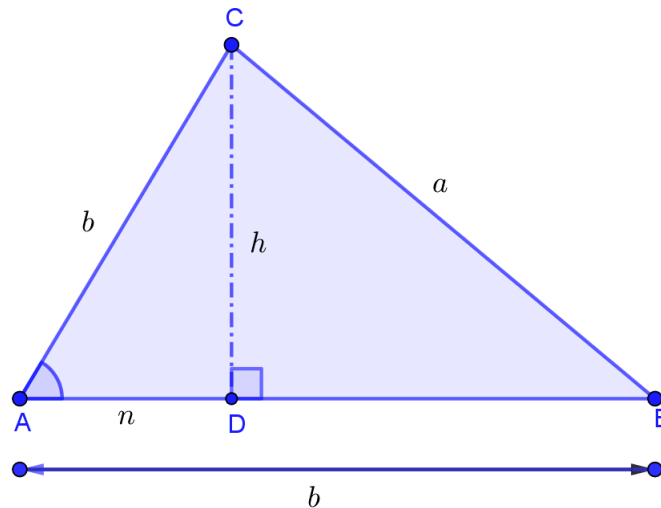


Figura 2.2: Triângulo Acutângulo

Do triângulo ABD , também temos:

$$\cos \alpha = \frac{x}{c} = c \cdot \cos \alpha \quad (2.7)$$

Substituindo (2.5) e (2.7) em (2.6), temos:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad (2.8)$$

□

Agora apresentaremos duas demonstrações para a lei dos cossenos utilizando a Figura (2.3).

A figura (2.3) é uma circunferência de raio a na qual foi inscrito um triângulo cujo um dos lados, AB , coincide com o diâmetro da circunferência. De acordo com conhecimentos básicos de geometria plana, o triângulo ABC é retângulo em C . A seguir foi traçado um diâmetro na circunferência, DF , de modo que $DF \parallel AC$. Utilizando trigonometria chegamos ao seguinte valor para o segmento CE :

$$\cos \theta = \frac{b+x}{2a} \Rightarrow x = 2a \cos \theta - b \quad (2.9)$$

Agora vamos utilizar o conceito de Potência de um ponto em relação a uma circunferência. Vejamos: Utilizando a potência de E com relação à circunferência, segue que:

$$x \cdot b = (a+c) \cdot (a-c).$$

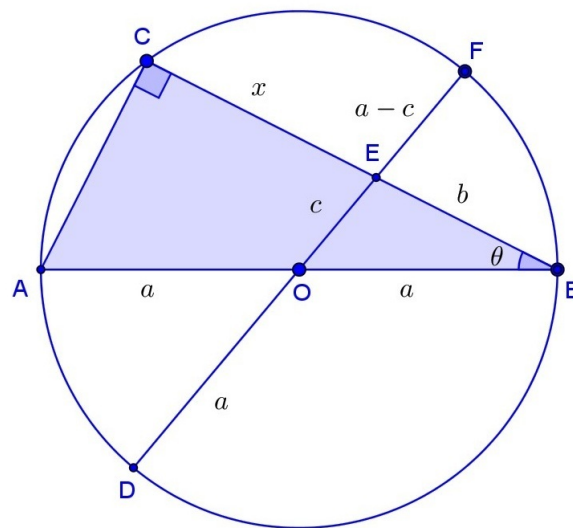


Figura 2.3: Figura para demonstração alternativa da lei dos cossenos

Substituindo o valor de x encontrado em (2.9), obtemos:

$$(2a \cos \theta - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c) \Rightarrow$$

$$2ab \cos \theta - b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta,$$

como queríamos demonstrar!

Agora vamos mostrar uma belíssima demonstração que faz uso de áreas de quadrados e retângulos sendo uma ótima alternativa para justificar a lei dos cossenos em sala de aula.

Observemos a figura 2.4. Note que:

$$(BGPM) = (BHNJ) = ac \cos \beta.$$

$$(AFPM) = (AKLE) = bc \cos \alpha.$$

$$(CDLK) = (JCIN) = ab \cos \varphi.$$

Além disso, $(ABGF) = c^2$, $(ACDE) = b^2$ e $(BCIH) = a^2$. Por outro lado,

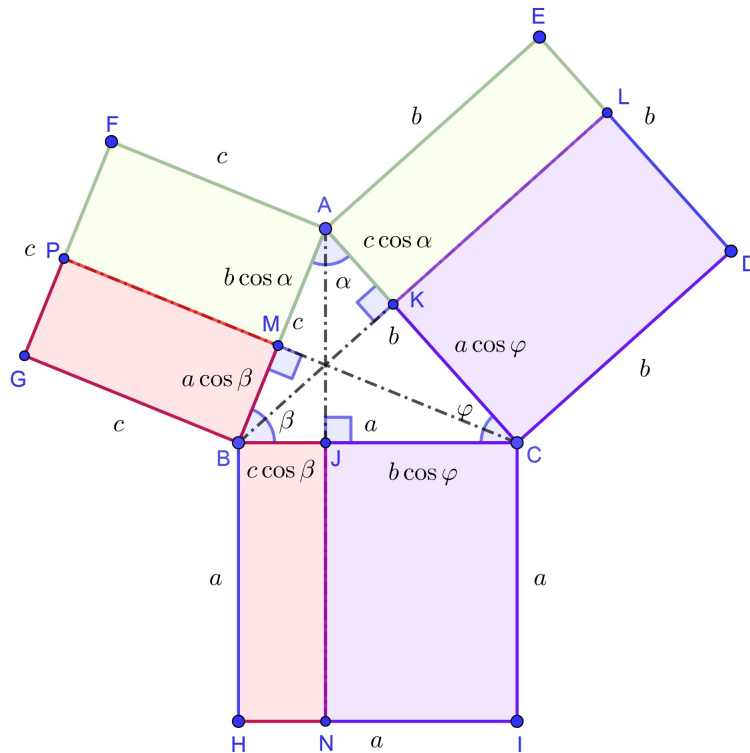


Figura 2.4: Demonstração alternativa da lei dos cossenos por áreas

$$\begin{cases} a^2 = a \cdot b \cdot \cos \gamma + a \cdot c \cdot \cos \beta \\ b^2 = a \cdot b \cdot \cos \gamma + b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ c^2 = a \cdot c \cdot \cos \beta + b \cdot c \cdot \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \cdot b \cdot \cos \gamma + a \cdot c \cdot \cos \beta \\ -b^2 = -a \cdot b \cdot \cos \gamma - b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ -c^2 = -a \cdot c \cdot \cos \beta - b \cdot c \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Adicionando as três últimas expressões, segue que:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

como queríamos demonstrar!

2.2 Lei dos Senos

Nesta seção apresentaremos o enunciado e uma demonstração da lei dos senos que está presente nos livros didático no ensino médio como em [32] e [8], porém em seguida apresentaremos um enunciado e demonstração mais completa presente em [16]. Por fim, apresentaremos uma elegante demonstração alternativa para que o professor tenha mais uma opção de justificativa aos seus alunos.

Teorema 13 (Lei dos senos). *Em qualquer triângulo ABC , as medidas dos lados são proporcionais ao seno dos ângulos opostos correspondentes, ou seja,*

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Demonstração. Para demonstrar a lei dos senos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo ABC .

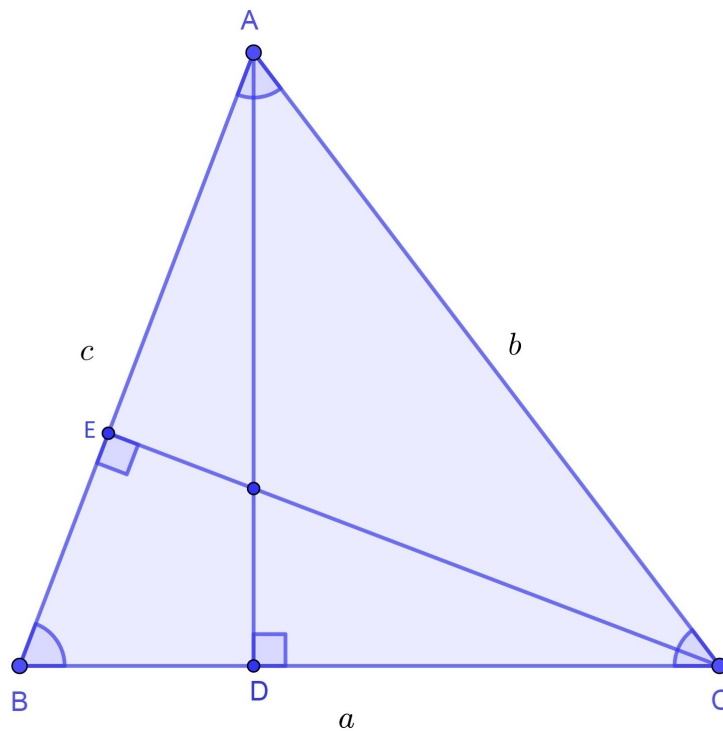


Figura 2.5: Demonstração da lei dos senos presente nos livros didáticos

Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados AB e BC , temos:

$$\begin{cases} \Delta BCE \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{CE}{a} \Rightarrow CE = a \cdot \sin \hat{B} \\ \Delta ACE \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{CE}{b} \Rightarrow CE = b \cdot \sin \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}.$$

Analogamente,

$$\begin{cases} \Delta ACD \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \sin \hat{C} \\ \Delta ABD \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \sin \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

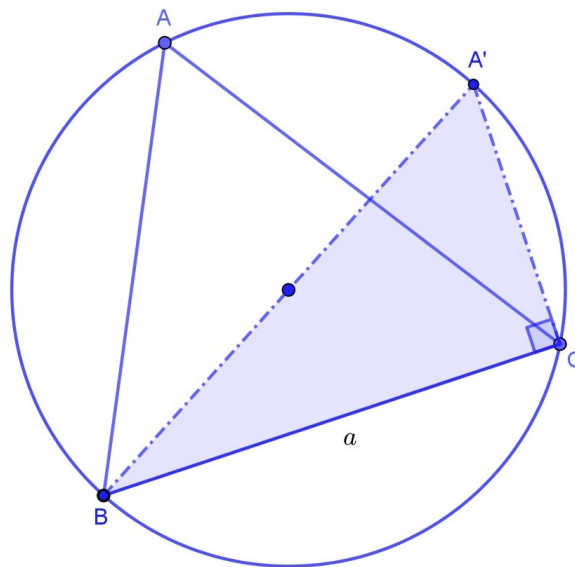
□

Observação 2.2.1. *O enunciado da lei dos senos acima (que encontramos em alguns livros didáticos brasileiros é incompleto, pois não revela que a razão constante entre o comprimento de cada lado e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Além do fato, da demonstração apresentada, considerar apenas o caso particular do triângulo ser acutângulo. A seguir, mostraremos o resultado mais completo com algumas sugestões para apresentá-lo para alunos que terão o primeiro contato com esse teorema.*

Teorema 14 (Lei dos senos). *Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita, isto é,*

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2R$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R . Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C .



Sabemos que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC . O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito numa semicircunferência. Temos

então:

$$a = 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A} \Rightarrow a = 2R \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \hat{A}} = 2R.$$

Analogamente,

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}} \hat{B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \hat{C}} = 2R.$$

o que nos permite concluir que

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \hat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \hat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \hat{C}} = 2R$$

□

2.2.1 Uma demonstração alternativa da Lei dos senos

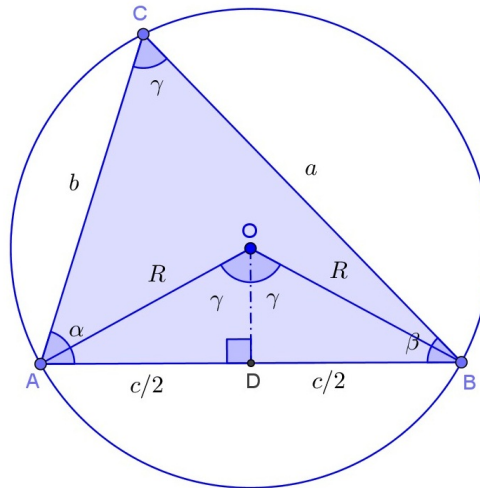
No livro *Trigonometric Delights* [23], há uma demonstração alternativa, muito semelhante à demonstração usual, mas que vale a pena ser vista, como e exibimos a seguir:

No $\triangle ABC$ da figura abaixo seja γ a medida do ângulo \widehat{ACB} . Como esse ângulo é inscrito na circunferência a medida do arco AB é 2γ (A medida, em graus, do arco é o dobro da medida do correspondente ângulo inscrito). Assim, sendo O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , segue que o ângulo \widehat{AOB} tem medida 2γ pois é o ângulo central correspondente ao arco AB , cuja medida é 2γ . Por fim, como o triângulo $\triangle AOB$ é isósceles de base AB , pois $OA = OB = R$, onde R é a medida do raio de circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, segue que OC é altura relativa ao lado AB desse triângulo e também bissetriz do ângulo \widehat{AOB} . Diante do exposto, tem-se que cada um dos ângulos \widehat{AOC} e \widehat{BOC} mede γ , conforme ilustra a figura a seguir Assim, no $\triangle AOC$, tem-se que

$$\widehat{\text{sen}} \gamma = \frac{c/2}{R} \Rightarrow \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \gamma} = 2R.$$

Procedendo de modo completamente análogo para os demais lados do $\triangle ABC$, podemos concluir que $\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \alpha} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \beta} = 2R$. Portanto,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \alpha} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \beta} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \gamma} = 2R,$$



como queríamos demonstrar!

□

2.3 Fórmulas de adição de arcos

Neste ponto vamos mostrar algumas alternativas para demonstrar as famosas fórmulas de adição de arcos

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta \pm \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen } \alpha \text{sen } \beta.$$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \text{tg}\beta}.$$

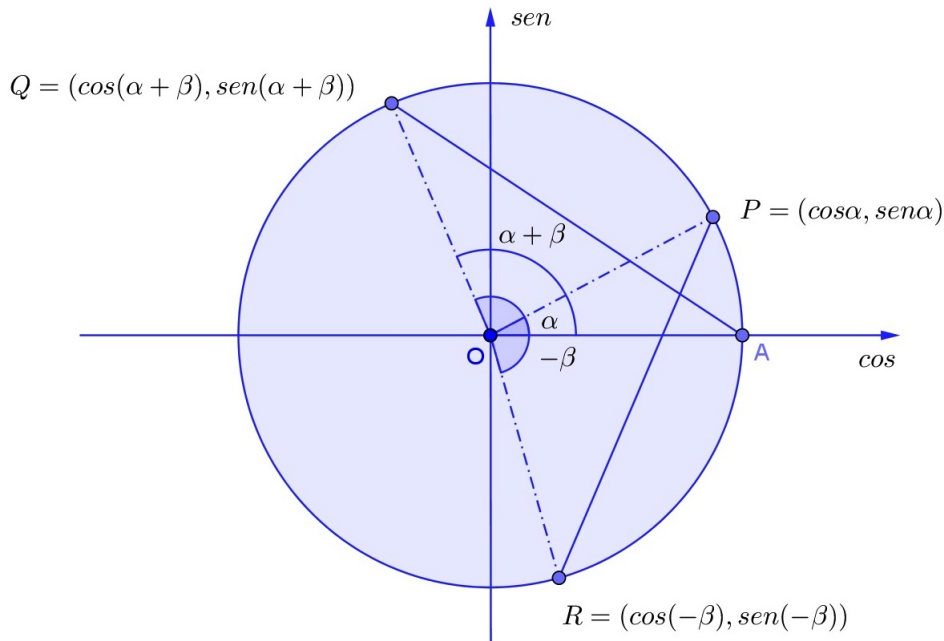
Nos livros didáticos escolares essas fórmulas em geral costumam ser justificadas com o uso da fórmula da distância entre dois pontos, como ilustramos a seguir:

Na figura a seguir os arcos PR e AQ medem $\alpha + \beta$, o que relevava que as cordas PR e AQ têm a mesma medida. Além disso as coordenadas dos pontos A, R, P e Q são

$$A = (0, 0), R = (\cos(-\beta), \text{sen}(-\beta)), P = (\cos\alpha, \text{sen } \alpha) \text{ e } Q = (\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta)).$$

Assim,

$$AQ = PR \Leftrightarrow d(A, Q) = d(A, R) \Leftrightarrow d^2(A, Q) = d^2(P, R),$$



Lembrando que a distância entre dois pontos de coordenadas $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ pode ser calculado por

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

segue que

$$\begin{aligned} d^2(A, Q) &= [\cos(\alpha + \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha + \beta) - 0]^2 \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cdot \cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} d^2(P, R) &= [\cos \alpha - \cos(-\beta)]^2 + [\sin \alpha - \sin(-\beta)]^2 \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Ora, como $d^2(A, Q) = d^2(P, R)$, segue que:

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos(\alpha + \beta) &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \Rightarrow \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

De posse dessa primeira fórmula de adição, usando as propriedades $\cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(90^\circ - x) = \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(90^\circ - x) = \cos x$ podemos facilmente deduzir as outras três fórmulas, a saber:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta;$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha;$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

Essa demonstração tem um lado positivo se funcional para quaisquer valores reais de α e β , mas pode ser técnica demais para um primeiro contato com o assunto, além de utilizar a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, que em geral não é conhecida pelos alunos do 2º ano do ensino médio, onde a trigonometria é apresentada pela primeira vez aos estudantes do ensino médio.

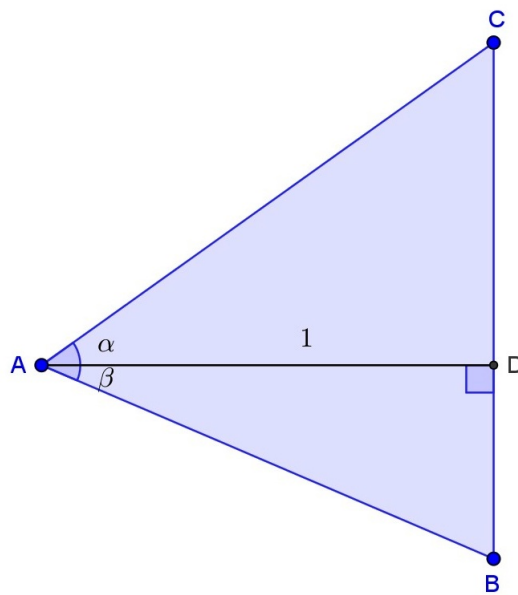
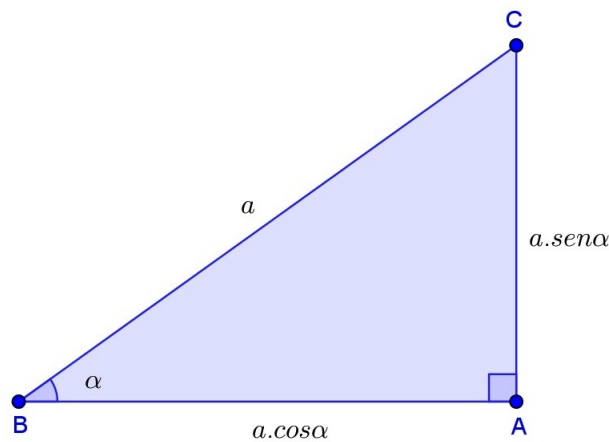
Diante do exposto, julgamos ser bastante educativo para um primeiro contato com o assunto, apresentar justificativas mais geométricas, baseadas em ideias como áreas que já fazem parte do repertório dos alunos do ensino médio. Essa abordagem apesar de ser mais geométrica e intuitiva tem a limitação de oferecer uma “demonstração” para casos particulares dos ângulos, como por exemplo para ângulos agudos, apesar de que as fórmulas são verdadeiras para quaisquer medidas de ângulos. Ao nosso ver, para um primeiro contato com o assunto, isso não consiste de um grande problema, visto que num primeiro contato com o assunto, dar uma justificativa sobre a razoabilidade da fórmula já tem um grande valor educativo, mesmo que sejam necessárias algumas hipóteses adicionais, que num tratamento mais amplo podem ser descartadas.

Inicialmente vamos lembrar que num triângulo retângulo de hipotenusa a e um dos seus ângulos agudos medindo α , os catetos medem $a \cos \alpha$ e $a \operatorname{sen} \alpha$.

Para iniciar com as nossas sugestões de “demonstrações” alternativas das fórmulas de adição, vamos mostrar como obter tais fórmulas a partir da conhecida fórmula da área de um triângulo em função de dois dos seus lados e da medida do ângulo formado entre eles.

Vamos representar por da medida da área do ΔABC por (ABC) . Na figura a seguir $(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot AC \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Mas no ΔADB ,

$$\cos \alpha = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{DC}{1} \Rightarrow DC = \operatorname{tg} \alpha.$$



$$\cos \beta = \frac{1}{AB} \Rightarrow AB = \frac{1}{\cos \beta} \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{DB}{1} \Rightarrow DB = \operatorname{tg} \beta.$$

Além disso,

$$(ABC) = (ADB) + (ADC) \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} AD \cdot DB + \frac{1}{2} AD \cdot DC.$$

Portanto,

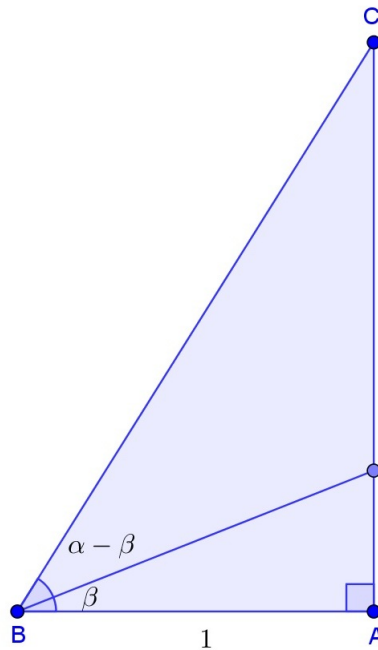
$$\frac{1}{\cos \beta} \frac{1}{\cos \alpha} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1 \cdot \operatorname{tg} \beta + 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

Utilizando as mesmas ideias vamos mostrar que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

Para tal consideremos a figura a seguir: No $\triangle ABC$,



$$\cos \alpha = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \operatorname{tg} \alpha.$$

No $\triangle ABD$,

$$\cos \beta = \frac{1}{BD} \Rightarrow BD = \frac{1}{\cos \beta} \text{ e } \operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \operatorname{tg} \beta.$$

Por outro lado,

$$(\triangle ABC) = (\triangle ABD) + (\triangle BCD) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos \beta \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \right) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha,$$

como queríamos demonstrar.

Como comentamos anteriormente, essas duas demonstrações acima particularizam os ângulos (pois usamos o fato dos ângulos envolvidos serem ângulos internos de certos triângulos), mas para o uso numa sala da aula onde o público são alunos que estão tendo um primeiro contato com o assunto são, ao nosso ver, bastante adequadas

pelo fato de serem sustentadas pelo cálculo de áreas, que são ferramentas conhecidas do aluno desse nível de ensino.

De posse das fórmulas

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

podemos deduzir as correspondentes fórmulas para $\cos(\alpha \pm \beta)$ utilizando a conhecida propriedade; quando dois ângulos não nulos complementares o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, isto é,

$$\gamma + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \cos \gamma = \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \gamma = \cos \varphi \end{cases}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(90^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \operatorname{sen}[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}(90^\circ - (\alpha - \beta)) \\ &= \operatorname{sen}[(90^\circ - \alpha) + \beta] \\ &= \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Uma vez dadas as justificativas para as fórmulas de adição e subtração de arcos do seno e do cosseno, julgamos que a maneira tradicional de deduzir as correspondentes fórmulas para a tangente, é bastante adequada, visto que utiliza as fórmulas que acabamos de deduzir e o fato de que a tangente é a razão entre o seno e o cosseno, conforme ilustramos a seguir:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha \pm \beta)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \pm \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \pm \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \mp \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}
 \end{aligned}$$

A seguir mostraremos muitas outras “demonstrações” alternativas para as fórmulas de adição de arcos. Apresentaremos agora uma demonstração usual presente nos livros [16] e [30], e bastante utilizada por professores do ensino médio.

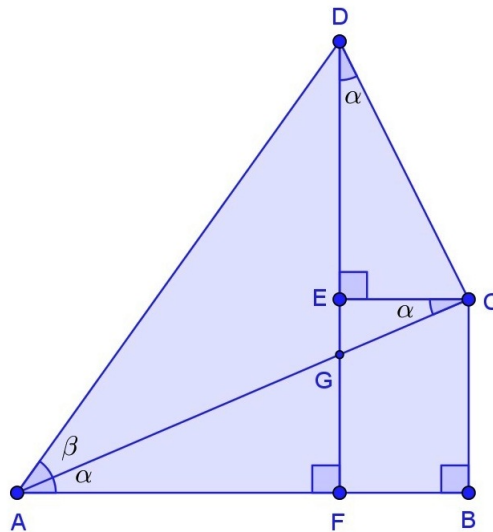
Agora vamos apresentar mais algumas demonstrações alternativas para as fórmulas acima. Apesar do fato de que muitas das demonstrações que apresentaremos funcionaram apenas para casos particulares dos ângulos, julgamos que elas podem ser bastante educativas, principalmente para o uso em sala de aula, especialmente para alunos que estiverem tendo o primeiro contato com o assunto.

Vamos à primeira dessas provas: Sejam α e β são ângulos tais que $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ vamos mostrar que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Consideremos a figura a seguir:



Dois triângulos retângulos, ABC e ACD , são justapostos de modo que a hipotenusa AC de ABC coincide com o cateto AC de ACD , conforme a figura. Suponha que $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{CAD} = \beta$

Seja F o pé da perpendicular traçada desde o vértice D com relação a AB e seja E o pé da perpendicular traçada desde o vértice C com relação a DF . Suponha que G é a interseção de DF e AC .

Como $AB \parallel CE$ segue que $\widehat{ACE} = \alpha$. Além disso, tem-se que: $\widehat{CDE} = 90^\circ - \widehat{CGE} = \alpha$. No ΔADF tem-se que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{DF}{AD} = \frac{DE + EF}{AD} = \frac{DE}{AD} + \frac{EF}{AD} = \frac{DE}{AD} + \frac{BC}{AD}$$

No triângulo DEC observa-se que $DE = DC \cos \alpha$ No triângulo ABC segue que $BC = AC \cdot \text{sen} \alpha$. Deste modo:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{DE}{AD} + \frac{BC}{AD} = \frac{DC}{AD} \cdot \cos \alpha + \frac{AC}{AD} \cdot \text{sen} \alpha$$

Do triângulo ACD tem-se que: $\frac{DC}{AD} = \text{sen} \beta$ e $\frac{AC}{AD} = \cos \beta$ Logo:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$$

Analogamente:

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AF}{AD} = \frac{AB - BF}{AD} = \frac{AB}{AD} - \frac{BF}{AD} = \frac{AC}{AD} \cdot \cos \alpha - \frac{DC}{AD} \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$ como queríamos demonstrar!

Analogamente,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \frac{AF}{AD} = \frac{AB + BF}{AD} = \frac{AB}{AD} + \frac{CE}{AD} \\ &= \frac{AC}{AD} \cdot \cos \alpha + \frac{DC}{AD} \cdot \sin \alpha \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar!

2.3.1 Usando a Lei dos senos

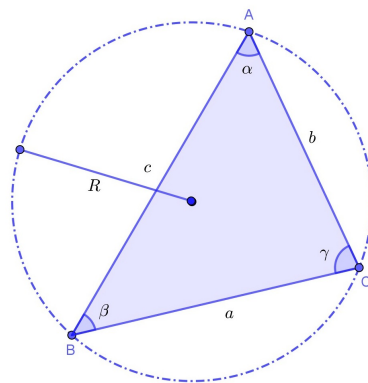
Essa demonstração é muito interessante, pois na sequência natural dos conteúdos, o discente aprende primeiro a lei dos senos. E no mesmo período letivo verá a soma de arcos. Portanto, nessa demonstração faremos uso de um conhecimento muito próximo cronologicamente.

Como vimos anteriormente:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R,$$

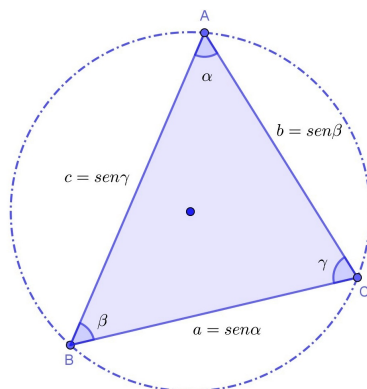
que é a famosa lei dos senos.

Demonstração. Observemos a figura a seguir que é bem tradicional da lei dos senos.

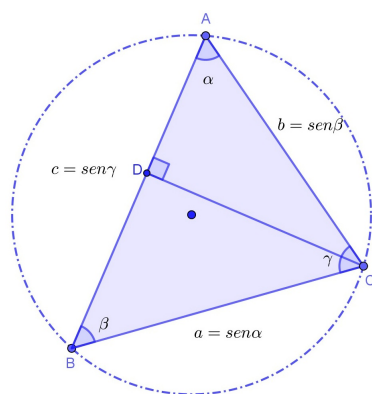


No caso em que $R = \frac{1}{2}$ tem-se:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \operatorname{sen} \alpha \\ b = \operatorname{sen} \beta \\ c = \operatorname{sen} \gamma \end{cases}$$



Nesse caso, No $\triangle ABC$, traçando a altura CD (relativa ao lado AB), obtemos dois triângulos retângulos, a saber: $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$, conforme a figura seguir:



No $\triangle ADC$ tem-se que:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha.$$

Por ouyto lado, no $\triangle BDC$ tem-se que :

$$\cos \beta = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta.$$

Mas ocorre que $AB = BD + AD$. Portanto,

$$\text{sen } \gamma = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$$

mas $\text{sen } \gamma = \text{sen}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \text{sen}(\alpha + \beta)$ o que nos permite concluir que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$$

como queríamos demonstrar! □

Uma outra belíssima demonstração para as fórmulas de adição utilizando a Lei dos senos é a seguinte:

Considere o $\triangle ABC$ cujos ângulos internos medem α, β, γ , e lados medem a, b e c , respectivamente. Pela lei dos senos, sabemos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R \Rightarrow \begin{cases} a = 2R \operatorname{sen} \alpha \\ b = 2R \operatorname{sen} \beta \end{cases} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a \cos \beta + b \cos \alpha &= 2R \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + 2R \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ &= 2R(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \end{aligned}$$

Portanto,

$$2R = \frac{a \cos \beta + b \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Por outro lado, $\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$. Assim,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a \cos \beta + b \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Mas ocorre que $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$. Então,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a \cos \beta + b \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{c}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Por fim, como α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo, segue que $\gamma + \alpha + \beta = 180^\circ$, o que implica que $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Então

$$\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \operatorname{sen}(\alpha + \beta),$$

o que revela que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$. Para obter as outras duas fórmulas de adição, $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, basta usar os seguintes fatos:

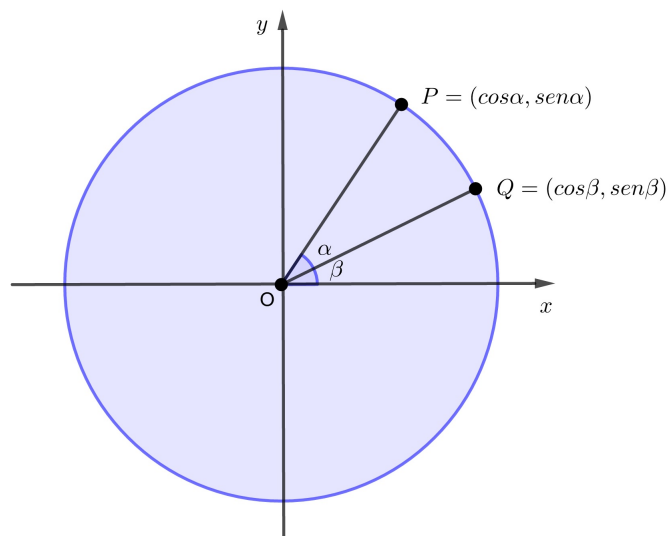
$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \text{ e } \cos(-x) = \cos x.$$

como fizemos na seção (2.3).

2.4 Usando a lei dos cossenos

Nesta seção vamos utilizar a lei dos cossenos para estabelecer as fórmulas de adição de arcos do seno e do cosseno.

Sejam P e Q dois pontos da circunferência unitária centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, conforme ilustra a figura a seguir:



Nesse sistema de coordenadas, os pontos P e Q possuem as seguintes coordenadas $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e $Q = (\cos \beta, \sin \beta)$. Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle POQ$, segue que:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 + 2 \cdot OP \cdot OQ \cos(\alpha - \beta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2OP \cdot OQ} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - PQ^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2}PQ^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}[(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2] \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Agora, substituindo α por $90^\circ - \alpha$ em $\cos(\alpha - \beta)$, segue que

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos(90^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Observação 2.4.1. *Utilizando a mesma figura acima, ainda poderíamos deduzir a fórmula do $\cos(\alpha - \beta)$ via o produto escalar de dois vetores. De fato, considerando os vetores*

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ \vec{OQ} &= (\cos \beta, \sin \beta)\end{aligned}$$

Lembrando que se φ é a medida do menor ângulo entre os vetores \vec{OP} e \vec{OQ} , então

$$\langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle = \|\vec{OP}\| \cdot \|\vec{OQ}\| \cdot \cos \varphi$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} \cdot \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \\ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Para obter as outras duas fórmulas de adição, $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$, basta usar os seguintes fatos:

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ e } \cos(-x) = \cos x.$$

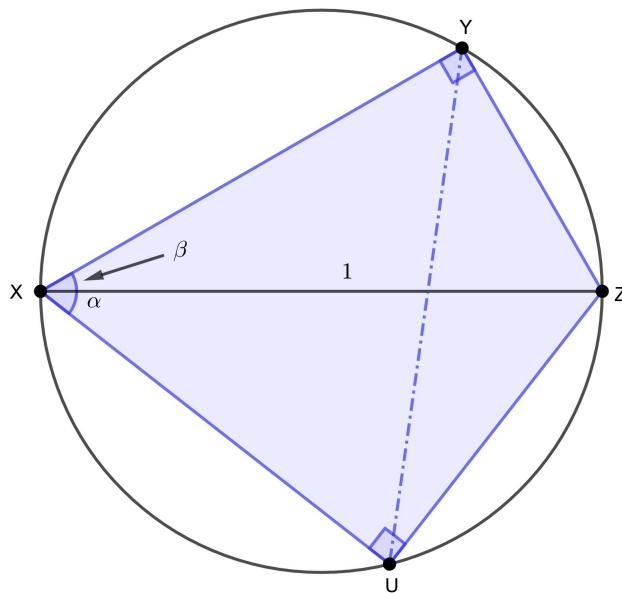
como fizemos na seção (2.3).

2.5 Usando o Teorema de Ptolomeu

Agora vamos mostrar como utilizar o Teorema de Ptolomeu, segundo o qual num quadrilátero inscrito numa circunferência o produto dos comprimentos diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos, para dar mais uma alternativa para provarmos as fórmulas de adição de arcos.

Seja $XYZU$ um quadrilátero inscrito numa circunferência tal que XZ seja um diâmetro da circunferência, conforme ilustra a figura a seguir:

Na figura acima, tem-se que:



$$XY = \cos \beta, YZ = \sin \beta, ZU = \sin \alpha, XU = \cos \alpha \text{ e } YU = \sin(\alpha + \beta).$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $XYZU$, segue que

$$XZ \cdot YU + XY \cdot ZU + XU \cdot YZ \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Para obter as demais fórmulas de adição $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$, basta utilizarmos os seguintes fatos:

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x, \sin(90^\circ - x) = \cos x \text{ e } \cos(90^\circ - x) = \sin x.$$

como fizemos na seção (2.3).

2.5.1 Uma figura e seis fórmulas

Agora apresentaremos uma maneira de deduzir as seis fórmulas $\text{sen}(\alpha \pm \beta)$, $\text{cos}(\alpha \pm \beta)$ e $\text{tg}(\alpha \pm \beta)$ a partir de uma única figura.

Essa demonstração alternativa é muito interessante de fácil aplicação em sala de aula, pois só faz uso das razões trigonométricas tradicionais como seno e cosseno no triângulo retângulo. Observemos a figura abaixo:

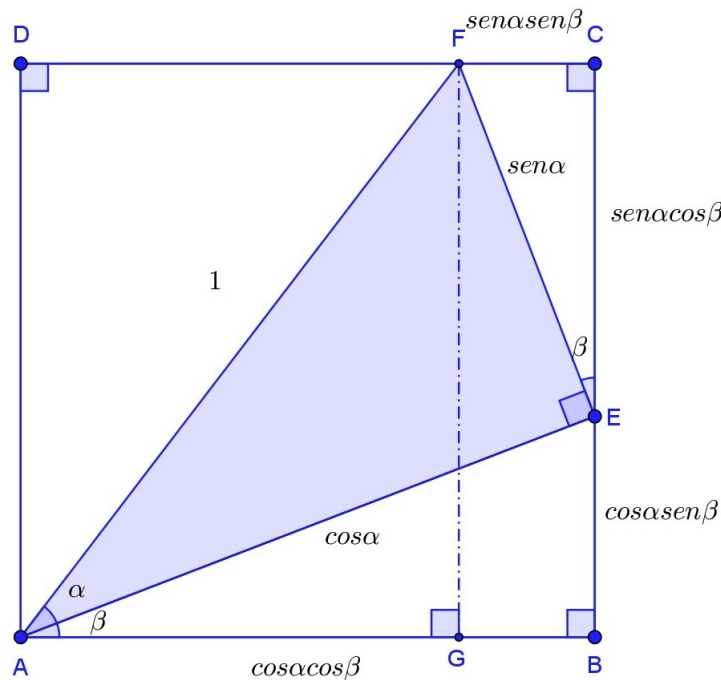
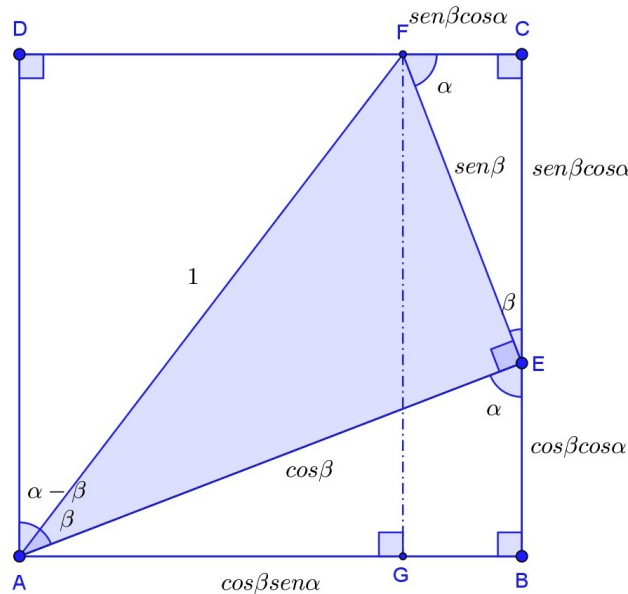


Figura 2.6: Quadrado ABCD - 1

Na figura acima temos um triângulo retângulo AEF de hipotenusa $AF = 1$ inscrito em um retângulo $ABCD$.

O primeiro passo é determinar todos os ângulos presentes na figura. De início note que $AE = \text{cos } \alpha$ e $EF = \text{sen } \alpha$. Além disso, como $\widehat{DAB} = 90^\circ$ tem-se $\widehat{DAF} = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ e que nos permite concluir que $\widehat{DFA} = \alpha + \beta$. Daí, no $\triangle AEF$ tem-se $\widehat{AFE} = 90^\circ - \alpha$. Além disso, como $\widehat{DFC} = 180^\circ$ conclui-se que $\widehat{EFC} = 90^\circ - \beta$ e por consequência do $\triangle EFC$ extraímos $\widehat{CEF} = \beta$. Por fim, do $\triangle ABE$ pode-se facilmente perceber que $\widehat{AEB} = 90^\circ - \beta$.

Agora, com todos os ângulos determinados conforme a figura a seguir, vamos partir para a demonstração.



No $\triangle ABE$ tem-se que $BE = \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$ e $AB = \cos \alpha \cdot \cos \beta$. Por outro lado, $\triangle ADF$ tem-se que $AD = \text{sen}(\alpha + \beta)$ e $DF = \cos(\alpha + \beta)$.

Por fim, no $\triangle ECF$ tem-se que $FC = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$ e $CE = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta$. Tudo isso está resumido na figura a seguir:

Agora, com todas as medidas do quadrilátero $ABCD$ determinadas, podemos concluir a demonstração.

De fato, $AB = CD$, o que revela que:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

Além disso, $AD = BC$, o que nos permite concluir que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$$

como queríamos demonstrar!

Agora utilizaremos a mesma figura para provar que

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Para isso, observando primeira figura dessa seção, no $\triangle ADF$ podemos ver que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{DF}{1} = DF \text{ e } \cos(\alpha - \beta) = \frac{AD}{1} = AD.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= DF \\ &= DC - FC \\ &= AB - FC \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha. \end{aligned}$$

Na mesma figura,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= AD \\ &= BC \\ &= BE + EC \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

Agora vamos utilizar figura a seguir demonstrar que

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Para isso consideremos a figura abaixo

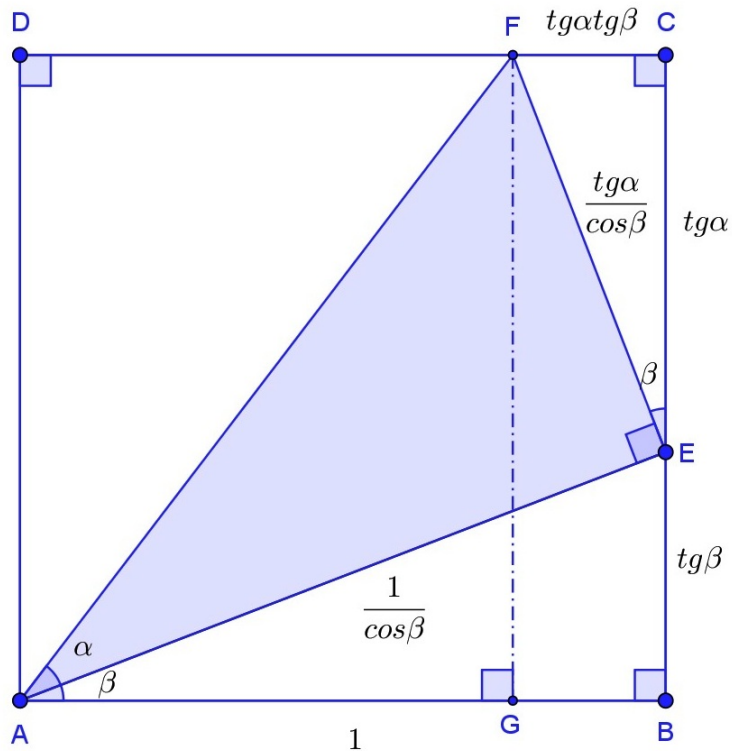


Figura 2.7: Quadrado ABCD - 2.

No $\triangle AFG$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{FG}{AG} \\ &= \frac{BF + FC}{AB - GB} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos mostrar como utilizar a figura abaixo para provar que:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

De fato,

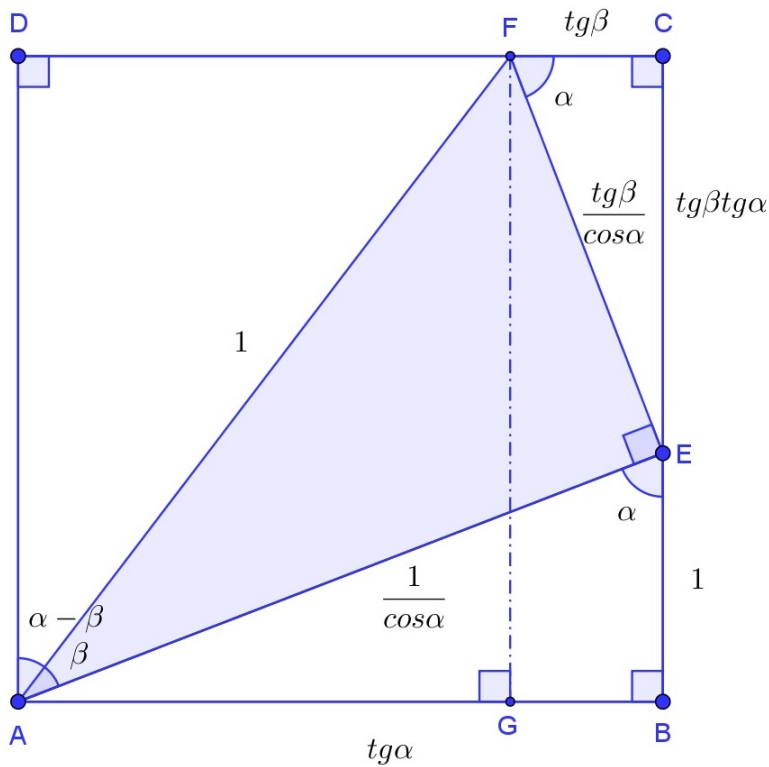


Figura 2.8: Quadrado ABCD - 2.

No $\triangle ADF$,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{DF}{AD} \\
 &= \frac{DC - FC}{AD} \\
 &= \frac{AB - FC}{AD} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}
 \end{aligned}$$

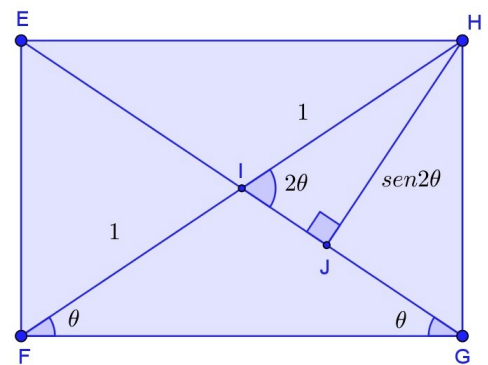
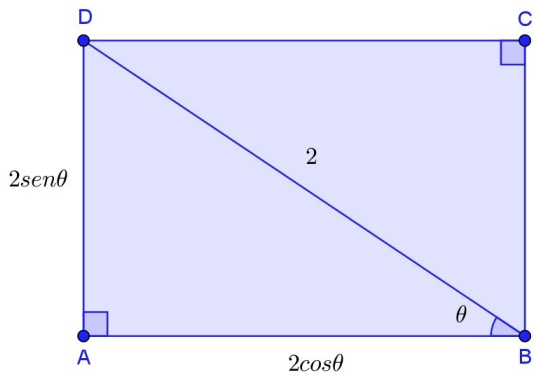
2.5.2 Arcos duplos

Com as fórmulas de adição que acabamos de deduzir podemos facilmente obter as conhecidas fórmulas do arco duplo, a saber

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta,$$

bastando tomar $\alpha = \beta = \theta$.

Para o caso do arco duplo as duas figuras a seguir fornecem uma bela demonstração visual para a identidade $\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta$.



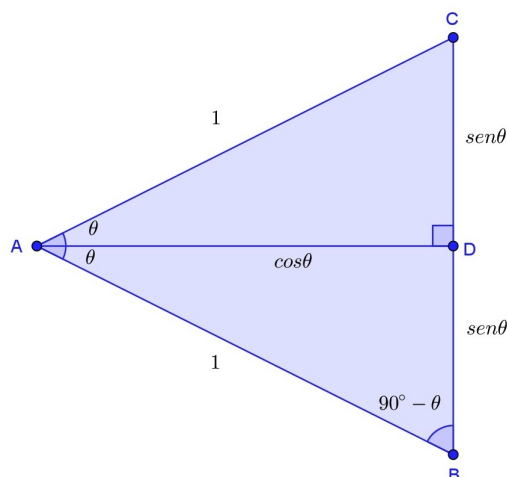
De fato,

$$(FGH) = \begin{cases} \frac{2 \text{sen } \theta \cdot 2 \cos \theta}{2} \\ \frac{2 \text{sen } 2\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2 \text{sen } 2\theta}{2} = \frac{2 \text{sen } \theta \cdot 2 \cos \theta}{2} \Rightarrow \text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta.$$

A figura e seguir também fornece uma demonstração alternativa para a mesma identidade.

De fato,

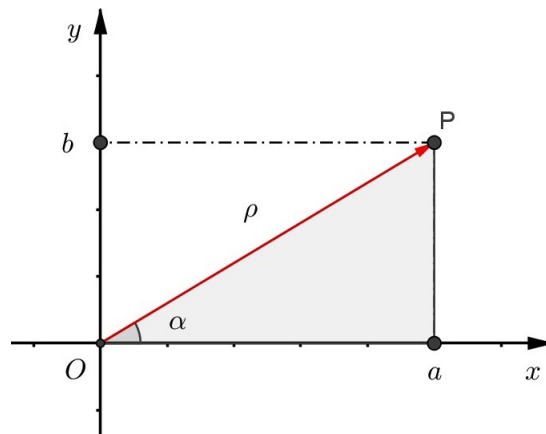
$$(ABC) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{sen } \theta \cos \theta \\ \frac{2 \text{sen } \theta \cdot \cos \theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta.$$



2.5.3 Usando números complexos

Uma maneira bastante rápida de demonstrar as fórmulas de adição e subtração de arcos é usando números complexos.

Todo número complexo não nulo $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, pode ser representado geometricamente num sistema de coordenadas ortogonais, onde o eixo horizontal é chamado de eixo real e o eixo vertical é chamado de eixo imaginário, conforme ilustra a figura a seguir: Um plano munido desse sistema de coordenadas



é chamado de **Plano de Argand-Gauss** e o ponto P cujas coordenadas são (a, b) é chamado de **Afixo de z** . Na figura acima, o comprimento do vetor \overrightarrow{OP} é representado por ρ (ou $|z|$). e é chamado de **módulo** do números complexo z . Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Além disso, o ângulo que o vetor \overrightarrow{OP} forma com o eixo horizontal, é chamado de **argumento** de z , e sua medida representado por $\alpha = \operatorname{arg}z$, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Ainda na figura acima, temos que:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\rho} = \rho \cdot \operatorname{cos} \alpha.$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{\rho} = \rho \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Assim,

$$z = a + bi = \rho \cdot \operatorname{cos} \alpha + i \cdot \rho \cdot \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow z = \rho \cdot (\operatorname{cos} \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha),$$

que é a chamada **forma polar (ou trigonométrica)** do número complexo z .

2.5.4 Fórmulas de Moivre

Dados dois números complexos na forma polar $z = \rho_1 \cdot (\cos\alpha_1 + i.\text{sen}\alpha_1)$ e $w = \rho_2 \cdot (\cos\alpha_2 + i.\text{sen}\alpha_2)$, as operação de multiplicação e divisão podem ser feitas de acordo com o resultado do teorema a seguir.

Teorema 15 (Moivre). *Dados os números complexos $z = \rho_1 \cdot (\cos\alpha_1 + i.\text{sen}\alpha_1)$ e $w = \rho_2 \cdot (\cos\alpha_2 + i.\text{sen}\alpha_2)$, então*

$$z.w = \rho_1.\rho_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i.\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i.\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)].$$

A demonstração desse fato é uma mera manipulação algébrica e pode ser encontrada, por exemplo, em [17]. É uma consequência imediata do Teorema anterior, a chamada *Fórmula da potenciação de Moivre*, a saber: se n é um número inteiro e $z = \rho \cdot (\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)$, então:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\alpha) + i.\text{sen}(n\alpha)).$$

Utilizando a fórmula de Euler, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\text{sen}\alpha$, todo número complexo não nulo de módulo ρ e argumento α pode ser representado na forma exponencial $z = \rho e^{i\alpha}$.

Essas ferramentas nos fornecem demonstrações simples das fórmulas de adição da trigonometria, como mostraremos a seguir.

Sejam z e w dois números complexos de módulo 1, cujos argumentos são α e β , respectivamente. Nesse caso,

$$z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\text{sen}\alpha.$$

$$w = e^{i\beta} = \cos\beta + i.\text{sen}\beta.$$

Então,

$$\begin{aligned} z.w &= e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ &= e^{i(\alpha+\beta)} \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i.\text{sen}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Por outro lado, por Moivre, tem-se que:

$$\begin{aligned} z.w &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \end{aligned}$$

Igualando-se as partes reais e imaginárias de $z.w$, segue que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$

Seguindo o mesmo raciocínio e efetuando a divisão $\frac{z}{w}$ pode-se chegar as fórmulas

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.$$

Podemos utilizar essa abordagem via números complexos para obter as conhecidas fórmulas do arco duplo e do arco triplo. Na verdade podemos obter fórmulas mais gerais para qualquer arco $n\alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e n é um número natural. Nesse ponto vamos mostrar como isso pode ser feito.

Pela fórmula do Binômio de Newton, tem-se que:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \alpha)^{n-k} (i \operatorname{sen} \alpha)^k.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Moivre (para potenciação de um número complexo), segue que

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \alpha)^{n-k} (i \operatorname{sen} \alpha)^k \\ &= \left[\binom{n}{0} \cos^n(\alpha) - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \dots \right] \\ &\quad + i \left[\binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \operatorname{sen} \alpha - \binom{n}{3} (\cos \alpha) \operatorname{sen}^3 \alpha + \dots \right] \end{aligned}$$

igualando-se as partes reais dos dois membros, segue que

$$\cos(n\alpha) = \binom{n}{0} \cos^n(\alpha) - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \dots$$

$$\operatorname{sen}(n\alpha) = \binom{n}{1} \cos^{n-1}(\alpha) \operatorname{sen} \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \dots$$

Em particular, podemos por esse caminho deduzir as conhecidas fórmulas do arco duplo e do arco triplo. Vejamos:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \binom{2}{0} \cos^2 \alpha - \binom{2}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\alpha) &= \binom{2}{1} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \binom{3}{0} \cos^3 \alpha - \binom{3}{2} \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha. \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3\alpha) &= \binom{3}{1} \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \binom{3}{3} \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= 3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= 3(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= 3 \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \end{aligned}$$

2.6 Usando derivadas e integrais

Mesmo não sendo o enfoque do nosso trabalho, que visa o professor o aluno do Ensino Médio, nesta seção vamos utilizar a derivada e a integral de uma função real de variável real para estabelecer as fórmulas de adição e subtração de arcos.

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + a) \cos(x - a) - \cos(x + a) \operatorname{sen}(x - a),$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Calculando a derivada de f em relação a x , podemos concluir que $f'(x) \equiv 0$, o que nos permite concluir que f é constante. Ora, como

$$\begin{aligned} f(a) &= \operatorname{sen}(a + a) \cos(a - a) - \cos(a + a) \operatorname{sen}(a - a) \\ &= \operatorname{sen}(2a) \cos 0 - \cos(2a) \operatorname{sen} 0 \\ &= \operatorname{sen}(2a) \cdot 1 - \cos(2a) \cdot 0 \\ &= \operatorname{sen}(2a) \end{aligned}$$

Ora, como f é constante, temos a seguinte igualdade:

$$\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(x + a) \cos(x - a) - \cos(x + a) \operatorname{sen}(x - a)$$

Por fim, fazendo a mudança de variáveis $\alpha = x + a$ e $\beta = a - x$, segue que $2a = \alpha + \beta$, o que revela que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Uma outra demonstração seguindo o mesmo caminho é a seguinte:

Considerando a função real de variável real $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(\alpha) = [\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta]^2,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ é uma constante. Calculando a derivada de g em relação a α , obtem-se que $g'(\alpha) = 0$, o que revela que g é constante. Ora, como $g(0) = 0$, segue que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Para finalizar esta seção, onde estamos utilizando ferramentas do Cálculo, para provar as fórmulas de adição, mostraremos como utilizar uma integral apropriada para se chegar à identidade

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta.$$

Considera a integral $I = \int_0^\beta \cos(\alpha + x) \cos(\beta - x) dx$. Calculando essa integral por partes, segue que:

$$\begin{aligned} I &= [\text{sen}(\alpha + x) \cos(\beta - x)]_0^\beta - \int_0^\beta \text{sen}(\alpha + x) \text{sen}(\beta - x) dx \\ &= \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen } \alpha \cos \beta + [\cos(\alpha + x) \text{sen}(\beta - x)]_0^\beta + I \\ &= \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta + I. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta$, como queríamos demonstrar!

Para obter as outras duas fórmulas de adição, $\cos(\alpha + \beta)$ e $\text{sen}(\alpha - \beta)$, basta usar os seguintes fatos:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x \text{ e } \cos(-x) = \cos x.$$

como fizemos na seção (2.3).

2.6.1 Transformação em produto

Neste ponto faremos um breve abordagem das chamadas fórmulas de transformação em produto (ou da prostaférese), a seguir:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta &= 2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \text{sen } \alpha - \text{sen } \beta &= 2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Na maioria dos livros que tratam do assunto, a demonstração dada para essas identidades é feita da seguinte forma:

Considerando as já conhecidas fórmulas de adição,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha \quad (2.10)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha \quad (2.11)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \quad (2.12)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \quad (2.13)$$

podemos fazer

$$(2.10) + (2.11): \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta$$

$$(2.10) - (2.11): \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha$$

$$(2.12) + (2.13): \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$(2.12) - (2.13): \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Fazendo a mudança de variável $A + B = \alpha$ e $A - B = \beta$ obtém - se

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ e } B = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Substituindo esta mudança nas últimas equações se obtém as fórmulas de transformação em produto:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Agora, seguindo a nossa proposta, vamos mostrar um argumento geométrico que sugere a veracidade das fórmulas de transformação em produto.

Considerando $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ e $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ na Figura (2.9), e usando o fato de que o ponto de coordenadas (t, s) é o ponto médio dos pontos de coordenadas $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$ e $(\cos \beta, \operatorname{sen} \beta)$, segue que:

$$s = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{2} \text{ e } t = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$$

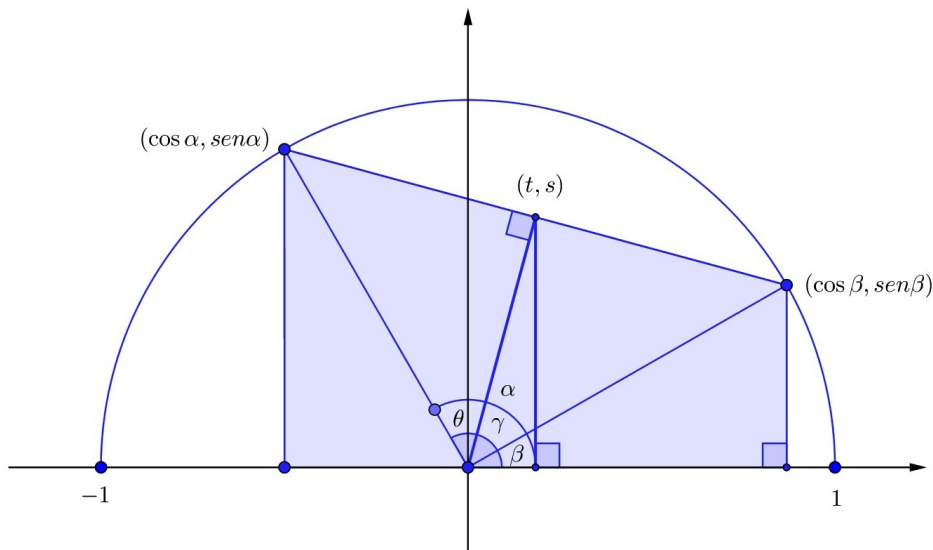


Figura 2.9: Demonstração visual das fórmulas da prostaferese - 1.

Por outro lado,

$$s = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ e } t = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Portanto,

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Para as outras duas fórmulas de transformação em produto consideremos a figura a seguir:

Considerando $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ e $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ na Figura (2.10) obtemos:

$$v = \sin \alpha - \sin \beta$$

$$u = \cos \beta - \cos \alpha$$

Por outro lado,

$$v = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$u = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

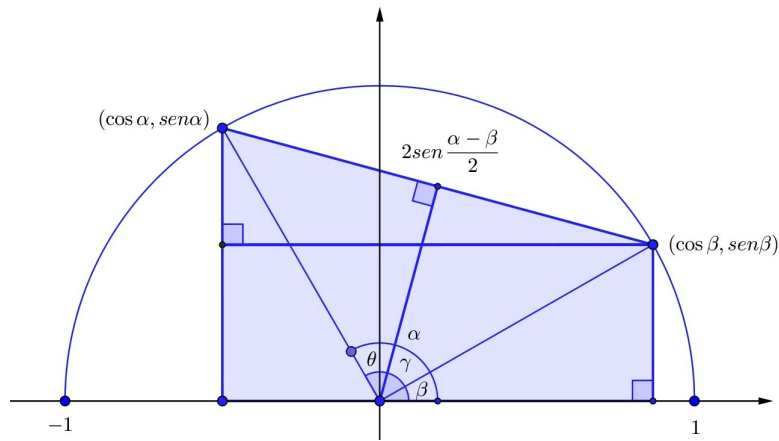


Figura 2.10: Demonstração visual das fórmulas da prostaferese - 2.

Então,

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

$$\cos \beta - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Capítulo 3

Identities and Inequalities

In this chapter we will treat some algebraic identities, as well as some classic inequalities, giving them many times a geometric interpretation, which in our view can be quite educational and convincing for students less experienced who still do not have a significant fluency in manipulating algebraic expressions, obeying the maxim that “a picture is worth a thousand words”, especially when the dose of rigor cannot be too high.

3.1 Inequalities and Algebraic Identities

3.2 Inequalities

In this section we will address some classic inequalities, such as for example, the inequalities between the harmonic, geometric, arithmetic and quadratic means of positive real numbers, some other classic elementary inequalities that serve as a tool for solving various problems, the famous and most useful inequality of Cauchy-Schwarz and some inequalities involving trigonometric functions, all this always in the same spirit of always: comparing the usual demonstrations with alternative demonstrations, with a strong geometric appeal, which in our view are stimulating and quite convincing for students who are having their first contact with the subject.

3.2.1 Desigualdade das médias

Dada uma lista a_1, a_2, \dots, a_n de números reais positivos, as médias Aritmética (A), Geométrica (G), Harmônica (H) e Quadrática (Q) são calculadas pelas expressões

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n};$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

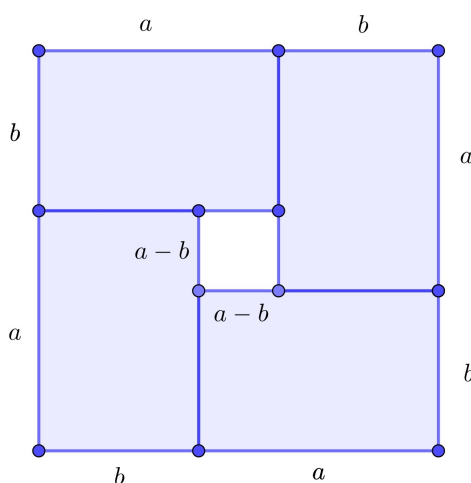
Teorema 16 (Desigualdade das médias). *Se a_1, a_2, \dots, a_n são números reais positivos, então $H \leq G \leq A \leq Q$. Além disso, a igualdade $H = G = A = Q$ ocorre se, e somente se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.*

Algumas demonstrações desse Teorema podem ser encontradas em [6].

Para o caso particular em que $n = 2$ apresentaremos a seguir um simples argumento geométrico que sugere a desigualdade $G \leq A$, ou seja,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

De fato, considere um quadrado de lado $a + b$, conforme ilustra a figura a seguir: Na figura acima o quadrado maior tem área $(a + b)^2$ e o quadrado menor tem área



$(a - b)^2$. Além disso, a diferença entre as áreas dos dois quadrados corresponde as áreas dos quatro retângulos cujos lados medem a e b , isto é,

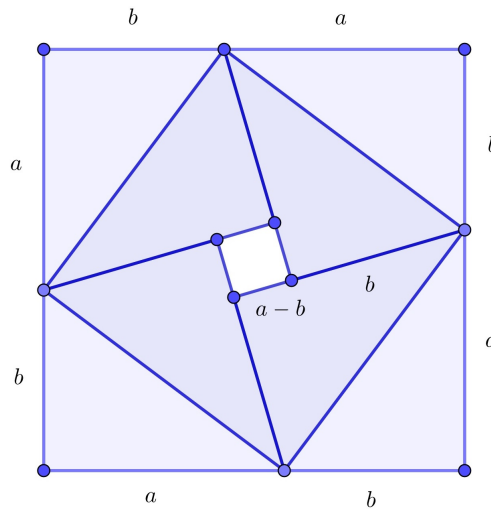
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 \geq 4ab$$

ou seja,

$$(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{(a + b)^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se $a = b$.

Uma pequena variante desse argumento geométrico pode ser dado utilizando-se a figura a seguir:



Observando a figura acima podemos ver que a área do quadrado de lado $a + b$ é maior do que ou igual a soma das áreas dos 8 triângulos retângulos cujos catetos medem a e b , ou seja,

$$(a + b)^2 \geq 8 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Além disso, note que a igualdade $G = A$ ocorre se, e somente se, $a - b = 0$, ou seja, se, e somente se, $a = b$.

Um outro fato que é comentado em [6], que merece destaque é que no caso para $n = 2$ podemos visualizar geometricamente as desigualdades entre as quatro principais médias,

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

como sugere a figura a seguir: Para visualizar esses fatos, considere que o semicírculo da figura acima tem raio de medida R . Note que $MN = a + b$, como $MN = 2R \Rightarrow 2R = a + b$, isto é, $R = \frac{a+b}{2}$. Por outro lado, $OS = R = \frac{a+b}{2} = A$, então $A = \frac{a+b}{2}$. No triângulo retângulo MNP podemos aplicar a relação métrica $PT^2 = AT \cdot TN$

Como $PV \leq PT$, segue que $H \leq G$. Resumindo,

$$PV \leq PT \leq OS \leq TS \Rightarrow H \leq G \leq A \leq Q.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $PV = PT = OS = TS$, o que ocorre se, e somente se $a = b$.

3.2.2 Duas desigualdades úteis e interessantes

Agora apresentaremos duas outras desigualdades menos conhecidas, mas que são úteis principalmente em questões de competições matemáticas.

Teorema 17. *Sejam a, b e c três números inteiros positivos. Então,*

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se $a = b = c$.

Demonstração. A demonstração clássica dessa desigualdade parte do fato de que o quadrado de qualquer número real é sempre maior do que ou igual a zero. Como a, b e c são números reais, segue que:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + ac + bc. \end{aligned}$$

Além disso a igualdade $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ ocorre se, e somente se

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

□

O exemplo a seguir, é um tradicional problema que constantemente aparece em provas e listas de preparação de competições de Matemática. A solução desse problema é intimamente relacionada com a discussão anterior.

Exemplo 3.2.1. *Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ΔABC . Mostre que o triângulo ΔABC é equilátero se, e somente se, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.*

Resolução:

De fato, se o triângulo ΔABC for equilátero, tem-se que $a = b = c$. Nesse caso,

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

$$ab + ac + bc = a.a + a.a + a.a = 3a^2.$$

Nesse caso, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Reciprocamente, se $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, segue que

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Leftrightarrow$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Agora apresentaremos um argumento geométrico (presente em [26]) que fornece uma demonstração visual para tal desigualdade.

Demonstração:

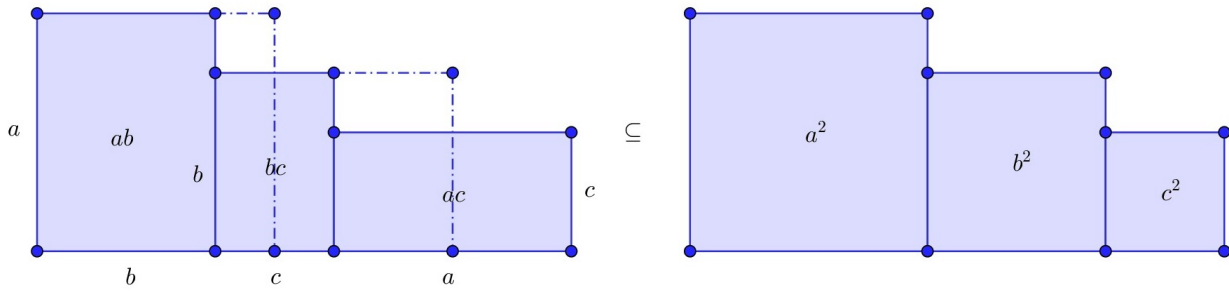


Figura 3.1: Desigualdade de inteiros 1

Na figura 3.1, comparando-se as áreas dos retângulos pode-se observar que:

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se $a = b = c$.

Agora apresentaremos uma desigualdade que costuma desafiar mesmo professores e estudantes mais experientes. Vejamos

Teorema 18. *Sejam a, b e c três números reais positivos. Então, $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$.*

Demonstração. A prova (clássica) de tal desigualdade passa pela seguinte identidade:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Como a, b e c são números inteiros positivos tem-se que $a + b + c \geq 0$. Além disso, já vimos que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, o que é equivalente a

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ab - bc \geq 0.$$

Como o produto de dois números reais não negativos também é maior do que ou igual a zero, segue que:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0.$$

Então, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. □

Para finalizar essa seção apresentaremos uma demonstração visual muito interessante dessa desigualdade que se encontra no livro [26].

Na figura a seguir, comparando as áreas dos retângulos, podemos observar que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

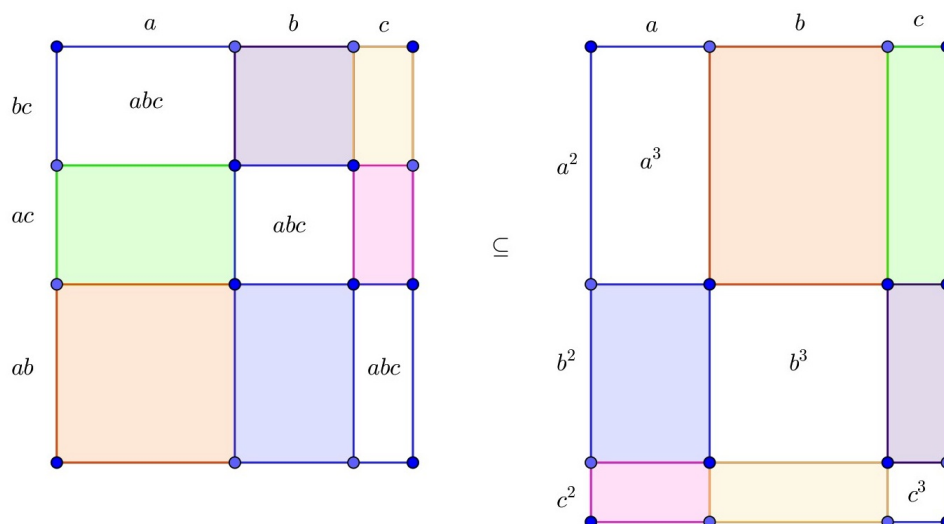


Figura 3.2: desigualdade 2

como queríamos demonstrar!

3.2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Mesmo não sendo abordada no ensino básico a desigualdade de Cauchy-Schwarz é conhecida por boa parte dos professores e bastante interessante para aqueles alunos mais curiosos que se dedicam as olimpíadas de matemática, visto que é uma ferramenta bastante poderosa para resolver problemas que envolvem outras desigualdades.

Teorema 19 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais, então:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

com a igualdade valendo se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos a prova mais tradicional. Para demonstrar a desigualdade considera -se esta função:

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2$$

Perceba que cada parcela dessa função é uma função quadrática na variável x , tal que $f(x) \geq 0$ para todo x real. Nesse caso, $\Delta \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 - b_1x)^2 + (a_1 + b_2x)^2 + \dots + (a_n + b_nx)^2 \\ &= a_1^2 - 2a_1b_1x + b_1^2x^2 + \dots + a_n^2 - 2a_nb_nx + b_n^2x^2 \\ &= (b_1^2 + \dots + b_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) + (a_1^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

Ora, como $\Delta \geq 0$, segue que:

$$\begin{aligned} [-2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)]^2 - 4 \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \cdot (a_1^2 + \dots + a_n^2) &\leq 0 \\ 4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 &\leq 4(b_1^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) \\ (a_1b_1 + \dots + a_nb_n) &\leq \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \end{aligned}$$

Agora, analisaremos quando ocorre a igualdade.

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2$$

No caso em que $\Delta = 0$ a equação $f(x) = 0$ tem apenas uma raiz real, isto é, existe um único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. Nesse caso,

$$(a_1 - b_1x)^2 + \dots + (a_n - b_nx)^2 = 0$$

Para que essa soma seja nula, cada parcela deverá ser também nula, ou seja,

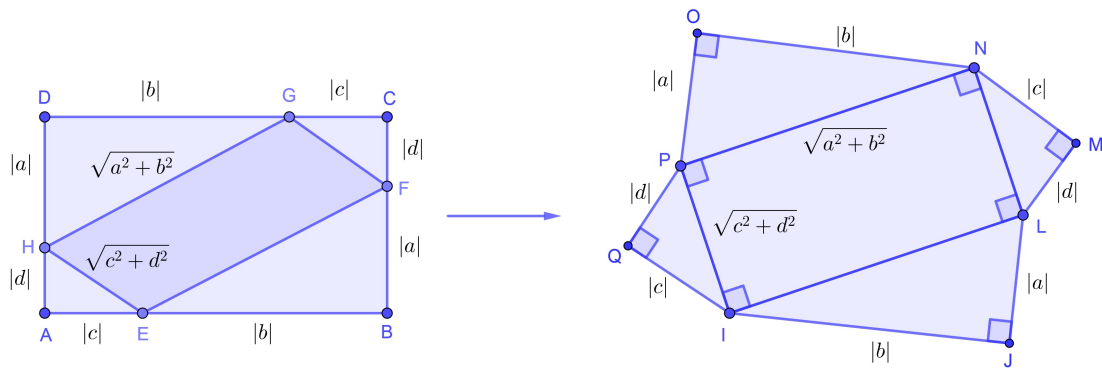
$$a_1 - b_1x_0 = 0, a_2 - b_2x_0 = 0, \dots, a_n - b_nx_0 = 0$$

Portanto, $x_0 = \frac{a_1}{b_1}, x_0 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, x_0 = \frac{a_n}{b_n}$, o que revela que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. □

Seguindo a proposta do nosso trabalho, agora apresentaremos uma motivação geométrica para desigualdade de Cauchy - Schwarz, no caso em que $n = 2$. Nesse caso a desigualdade de Cauchy-Schwarz assume a seguinte forma: dados os pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais, então

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \tag{3.1}$$

Demonstração: Consideremos as figuras abaixo:



Na figura da esquerda temos um par de triângulos retângulos cujos catetos são $|a|$ e $|b|$; um par de triângulos retângulos cujos catetos medem $|c|$ e $|d|$ e um paralelogramo de lados $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{c^2 + d^2}$. Na figura da direita, temos os mesmos quatro triângulos retângulos e um retângulo cujos lados medem $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{c^2 + d^2}$. Lembrando que a medida da área de um retângulo é sempre maior do que ou igual a medida da área de um paralelogramo com os mesmos lados, segue que área da figura da esquerda não excede a área da direita, isto é,

$$\begin{aligned} (|a| + |d|) \cdot (|c| + |b|) &\leq \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{|a| \cdot |b|}{2} + 2 \cdot \frac{|c| \cdot |d|}{2} \right) + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |a| \cdot |b| + |c| \cdot |d| + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Mas ocorre que

$$(|a| + |d|) \cdot (|c| + |b|) = |a| \cdot |b| + |a| \cdot |d| + |c| \cdot |b| + |c| \cdot |d|$$

Portanto,

$$|a| \cdot |c| + |a| \cdot |b| + |d| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq |a| \cdot |b| + |c| \cdot |d| + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

Assim, $|a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$.

Por outro lado, pela desigualdade triangular,

$$ac + bd \leq |ac + bd| \leq |ac| + |bd| = |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d|$$

Por fim,

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

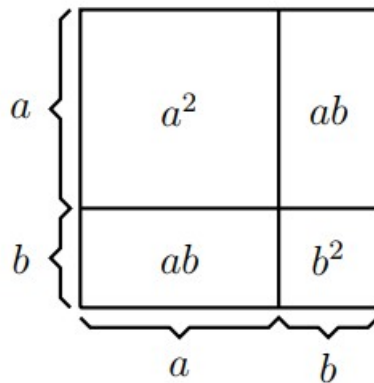
Além disso, a igualdade de 3.1 se verifica quando o paralelogramo da esquerda for retângulo, ou seja, a semelhança dos triângulos gerados pelo paralelogramo possui $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, como queríamos demonstrar!

3.3 Identidades algébricas usuais

Nesta seção faremos uma breve incursão nas principais identidades algébricas usuais, via uma interpretação geométrica. Especificamente daremos visualizações geométricas para as seguintes identidades:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

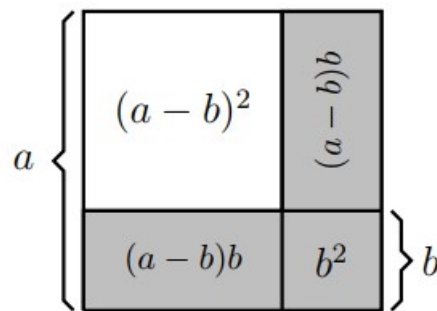
Um argumento geométrico que sugere a primeira dessas identidades podemos utilizar a seguinte figura. Na figura acima, um quadrado de lado $a + b$ foi dividido em dois



quadrados, um lado a , outro de lado b e dois retângulos cujos lados medem a e b . Igualando-se as áreas do quadrado maior e das quatro partes em que ele foi dividido, segue que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

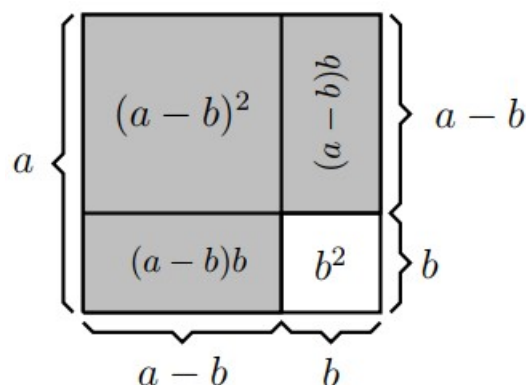
No caso da segunda identidade podemos considerar a seguinte figura onde temos um



quadrado de lado a , outro de lado $(a - b)^2$ e dois retângulos cujas dimensões são $a - b$ e b . Igualando as áreas correspondentes, segue que:

$$a^2 = (a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2 \Rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Para a terceira identidade, utilizaremos a figura a seguir: Nessa figura a soma das



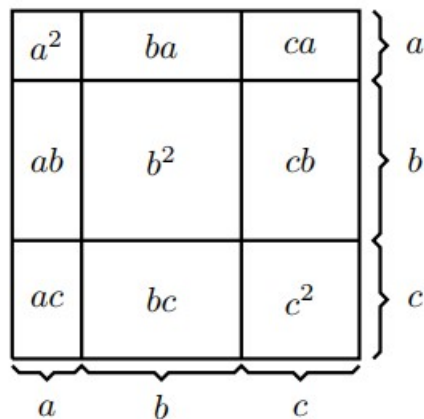
áreas dos retângulos de dimensões $(a - b)$ e b e do quadrado de lado $(a - b)$ (área hachurada) é igual a:

$$a(a - b) + b(a - b) = (a + b)(a - b).$$

Por outro lado essa área corresponde a diferença entre a área do quadrado de lado a e o quadrado de lado b , ou seja, $a^2 - b^2$. Portanto,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Por fim, para a última identidade, utilizaremos a figura a seguir: onde a soma das



áreas do quadrado de lado $a + b + c$ corresponde à soma das áreas dos retângulos menores, ou seja,

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

3.4 Somas de inteiros

Nesta seção vamos trabalhar com algumas identidades algébricas muito conhecidas, no mesmo espírito dos capítulos anteriores; inicialmente mostraremos a maneira que usualmente os livros-texto as demonstram e em seguida apresentaremos uma argumentação geométrica que fornece um argumento de razoabilidade da identidade em questão. Apesar de apresentarmos nessa ordem, talvez para o uso em sala de aula, seja mais adequada ao professor a ordem inversa, isto é, usar a visualização geométrica para estimular o aluno iniciante. À descobrir uma fórmula geral a partir de casos particulares e em seguida lançar a pergunta: como podemos garantir que realmente tal identidade seja verdadeira? Ao nosso ver isso pode ser bastante educativo para estimular o estudante iniciante no processo de descoberta e na produção de conjecturas gerais a partir de casos particulares.

3.4.1 Uma soma muito famosa - Carl Friederich Gauss

Para começar vamos tratar da conhecidíssima fórmula da soma dos n primeiros inteiros positivos.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Nos livros didáticos do Ensino Médio como [12], a demonstração mais usual dessa identidade é baseada na famosa ideias de Gauss, a seguir:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$$

adicionando-se membro a membro essas duas igualdades, segue que

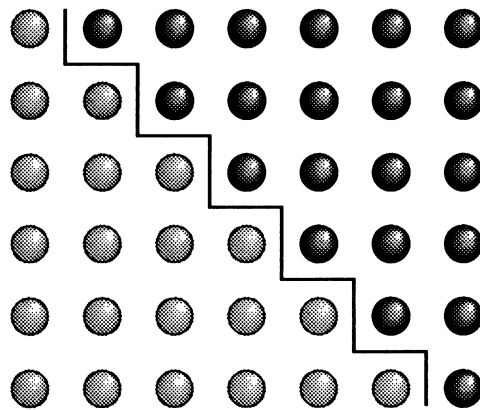
$$2S = \underbrace{(1 + n) + (1 + n) + \dots + (1 + n)}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

que é um caso particular da fórmula de dá a soma dos n primeiros termos de da soma dos termos de uma progressão aritmética. De fato, como a sequência $1, 2, 3, 4, \dots, n$ é uma progressão aritmética de razão $r = 1$ onde o primeiro termo $a_1 = 1$ e o n -ésimo termo $a_n = n$, usando o fato de que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, segue que $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$, como queríamos demonstrar!

Em alguns livros, mesmo mais avançados que os do Ensino médio, essa identidade é demonstrada utilizando-se o método da indução Matemática. Mas para utilizar esse caminho é preciso ter uma conjectura sobre o valor da soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Como obter essa conjectura? Uma boa sugestão é visualizar casos particulares (pequenos valores de n). Uma boa alternativa para se fazer isso é utilizar uma visualização geométrica da soma, conforme ilustra a figura a seguir onde $n = 6$.

Imagine que queira obter o valor da soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. Para isso você pode representar cada um dos algarismos $1, 2, 3, 4, 5$ e 6 por pequenas bolinhas (em cinza claro). Colocando uma bolinha na primeira linha; duas na segunda linha, e assim sucessivamente até colocar seis bolinhas na última linha formando uma espécie de triângulo de bolinhas (cinza claro), representando a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$



Dessa forma podemos "encaixar" (de cabeça para baixo) uma figura idêntica a essa configuração formada por bolinhas pretas, formando um retângulo com 6 linhas e 7 colunas, mas a soma que queremos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ é exatamente a metade do número total de bolinhas presentes nesse retângulo 6×7 , isto é,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \times 7}{2} = 21.$$

No caso geral $1 + 2 + 3 + \dots + n$, montaríamos uma configuração triangular com uma bolinha na primeira linha, duas na segunda linha, e assim sucessivamente até que tivéssemos n bolinhas na última linha. Encaixando (de cabeça para baixo) uma configuração triangular idêntica a essa formaríamos uma configuração retangular com n linhas e $n + 1$ colunas e portanto composta de $n(n + 1)$ bolinhas. Nesse caso a soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ seria igual à metade do número total de bolinhas presentes no retângulo, isto é,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Soma dos Primeiros ímpares positivos

Uma segunda fórmula bastante conhecida é a soma dos n primeiros números ímpares positivos, isto é,

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Nesse caso também poderíamos o usar o raciocínio de Gauss ou diretamente a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (que essencialmente

são a mesma coisa). Nesse caso,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2.$$

Uma maneira bastante intuitiva para conjecturar e igualdade

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

é considerar, por exemplo a figura 3.3 a seguir, onde vamos obter a soma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$. Como no exemplo anterior, representaremos geometricamente o número 1 por uma bolinha; o número 3 por três bolinhas, e assim sucessivamente até que o número 15 é representado por 15 bolinhas. Podemos então dispor essas bolinhas conforme a ilustra a figura 3.3:

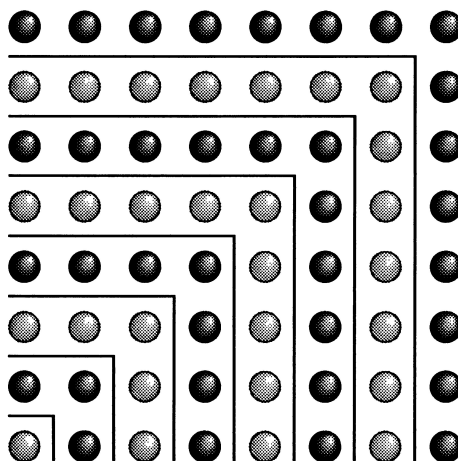


Figura 3.3: Soma dos primeiros ímpares positivos

Nessa figura temos então $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$ bolinhas formando um quadrado com 8 linhas e 8 colunas, totalizando $8^2 = 64$ bolinhas, revelando que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8^2.$$

No caso geral, isto é, para obtermos a soma, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, podemos seguir o mesmo padrão obtendo uma configuração quadrada com n linhas e n colunas, resultando então em n^2 bolinhas, sugerindo a igualdade

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Um outra identidade bem conhecida é a seguinte:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A maioria dos livros que trazem essa identidade e a demonstram, fazem a demonstração utilizando o método da indução. Como já comentamos, há um problema nisso que é preciso ter a conjectura de que a soma dos quadrados dos primeiros n números inteiros positivos é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, o que não é nada intuitivo. Mas como obter essa conjectura. Nesse caso daremos duas sugestões; uma primeira algébrica e outra geométrica. Vejamos:

Inicialmente vamos investigar a fração $F_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$

- $n = 1 \Rightarrow F_1 = \frac{1^2}{1} = 1 = \frac{3}{3}$.
- $n = 2 \Rightarrow F_2 = \frac{1^2+2^2}{1+2} = \frac{5}{3}$.
- $n = 3 \Rightarrow F_3 = \frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = \frac{7}{3}$.
- \vdots

Note que os denominadores das frações F_1, F_2 e F_3 são iguais 3 enquanto os numeradores foram os números 3, 5 e 7, que são os primeiros inteiros positivos da forma $2n + 1$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, o que sugere que no caso geral devemos ter:

$$F_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2n + 1}{3}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

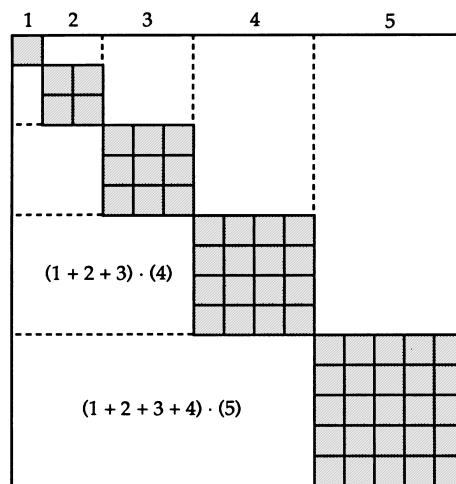
Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{3} &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

então

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n + 1}{3} \cdot \frac{n(n + 1)}{2} \\ = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Agora vamos dar uma motivação geométrica para identidade acima. Para isso vamos considerar a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$. Podemos representar cada uma das parcelas dessa soma como quadradinhos, onde a parcela 1^2 é representada por um quadradinho de lado 1; a parcela 2^2 é representada por um quadrado de lado 2 e assim sucessivamente até que 5^2 é representado por um quadrado de lado 5, sendo que todos eles estão encaixados num quadrado de lado $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, conforme ilustra a figura a seguir:



Diante do exposto, podemos interpretar a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ em termos das áreas dos quadrados e dos retângulos apresentados na figura acima da seguinte forma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - \\ 2[1 \cdot 2 + (1 + 2) \cdot 3 + (1 + 2 + 3) \cdot 4 + (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5] \\ = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 - \\ 2[1 \cdot 2 + (1 + 2) \cdot 3 + (1 + 2 + 3) \cdot 4 + (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 5]$$

Note que podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \left(\sum_{k=1}^5 k \right)^2 - \sum_{k=1}^4 \left[\left(\sum_{i=1}^k \right) (k+1) \right]$$

No caso geral, para obtermos a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ podemos considerar um quadrado de lado $1 + 2 + 3 + \dots + n$ com quadrados de lados $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ encaixados seguindo o mesmo padrão do caso particular $n = 5$ que fizemos acima. Observando as áreas dos quadrados e retângulos presentes na figura, podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^k \right) (k+1) \right]$$

Para finalizar essa seção mostraremos uma motivação geométrica para a identidade

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

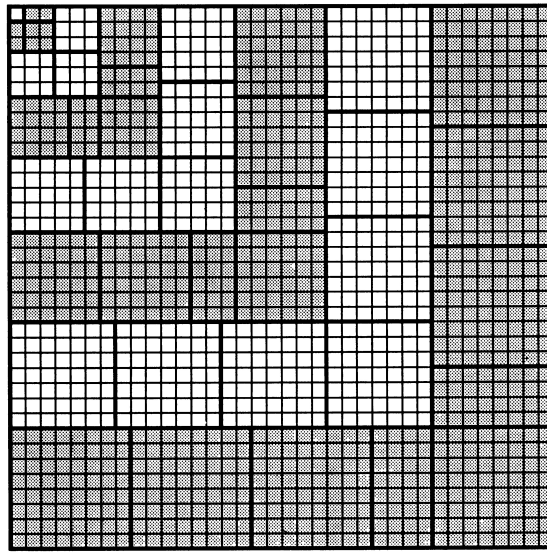
que costuma ser provada por indução nos livros tradicionais, como por exemplo em [19] Para tal considere a figura a seguir onde temos um quadrado cujo lado mede $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. Nesse caso, vamos argumentar para chegar na igualdade

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2.$$

Na figura, note que a parcela 1^3 está representada por um único quadradinho branco no canto superior esquerdo. A parcela 2^3 está representada por 8 quadradinhos brancos representados no canto superior esquerdo e assim sucessivamente, até que a parcela 8^3 está representada pelos quadradinhos escuros da lateral direita e da parte inferior da figura abaixo

Agora vamos contar todos os quadradinhos presentes na figura de duas formas, a saber: primeiro vamos contar todos os quadradinhos contando-os a partir do canto superior esquerdo, o que nos leva a soma $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$, depois olhamos a figura completa como um quadrado composto de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ linhas e $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ colunas, o que nos permite concluir que existem $(1 + 2 + 3 + \dots + 8)(1 + 2 + 3 + \dots + 8) = (1 + 2 + 3 + \dots + 8)^2$ quadradinhos na figura. Assim,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2.$$



No caso geral, podemos raciocinar de modo completamente análogo: basta considerarmos um quadrado cujo lado mede $1 + 2 + 3 + \dots + n$ e subdividi-lo em $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ quadradinhos seguindo o mesmo padrão da figura acima. Esse procedimento sugere que

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

Há várias formas de provar essa identidade formalmente. Como já dissemos, usar o método da Indução Matemática é o mais comum nos livros que tratam do assunto. Apresentaremos a seguir uma outra demonstração dessa identidade que também pode ser encontrada nos livros usuais.

Para todo inteiro k , sabemos que

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \Rightarrow (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

Fazendo $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, segue que

$$\begin{cases} 1^4 - 0^4 = 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 \\ 2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ 3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ 4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\ \vdots \\ (n+1)^4 - n^4 = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima obtemos:

$$\begin{aligned} n^4 &= 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + \dots + n) + n \\ &= 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) &= n^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n \\ &= [n(n+1)]^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = [n(n+1)]^2 \Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

como queríamos demonstrar!

3.5 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Neste ponto vamos mostrar um argumento que sugere a fórmula da soma de uma série geométrica de primeiro termo a e razão q tal que $|q| < 1$, a saber $S = \frac{a}{1-q}$.

Para demonstrar essa fórmula, necessitamos demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q .

Essa demonstração aparece em boa parte dos livros didáticos utilizados pelos professores do ensino básico, como [7], [12].

Demonstração. Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ como sendo uma progressão geométrica não constante de razão q . Seja S_n a soma dos seus n primeiros termos, ou seja,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (3.2)$$

Multiplicando esta última expressão por q , obtém-se:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n \quad (3.3)$$

Subtraindo as equações (3.3) e (3.2) obtém-se:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

□

3.5.1 Soma dos termos de uma série geométrica

Agora suponhamos que $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma progressão geométrica de infinitos termos tal que a sua razão q satisfaz a condição $|q| < 1$. Neste caso, vamos demonstrar que a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é convergente, ou seja, que a soma dos seus infinitos termos é finita. De fato, para qualquer série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a sua soma é definida como o

limite da sua sequência de somas parciais $(s_n)_{n \geq 1}$, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, onde $s_n = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n$

No caso em que $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma progressão geométrica já provamos que

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

Como estamos supondo que $|q| < 1$, tem-se que quando n tende para infinito, o valor de q^n tende para zero. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

como queríamos demonstrar!

A prova que acabamos de fazer, apesar de correta, costuma incomodar professores e alunos do ensino médio pela presença do limite, que naquele momento da vida escolar não é uma conceito matemático bem estabelecido. Em virtude disso vamos, a seguir, apresentar alguns argumentos geométricos de razoabilidade para tal fórmula, o que pode ser, ao nosso ver, bastante adequado para um primeiro contato com o assunto.

Antes de apresentarmos a primeira demonstração visual, mostraremos um caso particular dessa demonstração por ser muito comum o aparecimento como questão nos livros didáticos, como por exemplo em [12].

3.5.2 Uma identidade bem conhecida

É bastante conhecida a soma dos infinitos termos da da progressão geométrica infinita $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$. Inicialmente, note que $q = \frac{1}{2}$. Utilizando a igualdade $S = \frac{a_1}{1-q}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Agora daremos um argumento geométrico que nos leva a tal identidade. Considerando a figura a seguir:

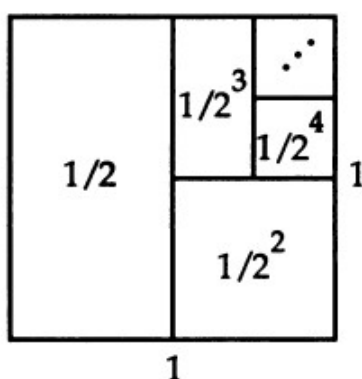


Figura 3.4: Quadrado de lado 1

Seja um quadrado de lado $l = 1$. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, mantere-mos intacto o lado esquerdo e dividindo o lado direito em duas partes iguais.

Ao dividir o lado direito ao meio continuaremos com a parte de baixo e dividiremos a parte superior em duas partes iguais.

O procedimento poderá ser repetido indefinidamente. A soma das áreas dos "infinitos" retângulos construídos deve ser igual a área do quadrado original, ou seja, 1. Assim,

$$1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Agora, apresentaremos uma demonstração que generaliza a identidade anterior. Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $1 - r, (1 - r)^2, (1 - r)^3, \dots$, com $-1 < r < 1$ Assim:

$$1 - r + (1 - r)^2 + (1 - r)^3 + \dots = 1$$

Daremos um argumento geométrico para tal identidade. Considere a figura a seguir

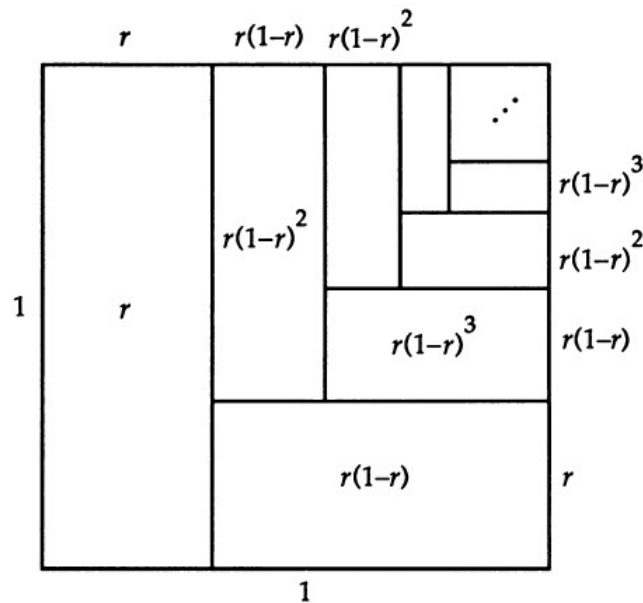


Figura 3.5: Quadrado de lado 1

que é um quadrado de lado $l = 1$. Vamos dividi-lo em duas partes uma de base r e a outra de base $1 - r$, manteremos intacto o lado esquerdo e dividindo o lado direito em duas partes: uma de lado r e outra de lado $1 - r$.

Ao dividir o lado direito continuaremos com a parte de baixo e dividiremos a parte superior em duas partes: uma de base $1 - r$ e a outra de lado $(1 - r)^2$.

O procedimento poderá ser repetido indefinidamente. A soma das áreas dos "infinitos" retângulos construídos deve ser igual a área do quadrado original, ou seja, igual a 1. De outro modo,

$$1 \cdot r + r \cdot (1 - r) + r \cdot (1 - r)^2 + r \cdot (1 - r)^3 + \dots = 1$$

Portanto podemos concluir que:

$$r + r \cdot (1 - r) + r \cdot (1 - r)^2 + r \cdot (1 - r)^3 + r \cdot (1 - r)^4 + \dots = 1$$

3.5.3 Mais uma soma de áreas

De mesmo modo começaremos com um exemplo e depois passaremos a uma generalização.

Exemplo 3.5.1. *Determine a soma dos termos da P.G. infinita $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots)$.*

Primeiramente, observemos que $q = \frac{1}{4}$. Ora, como $|q| < 1$, podemos utilizar a fórmula $s = \frac{a_1}{1-q}$. Desse modo, temos:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Agora, veremos uma solução geométrica para o problema representada. Na figura (3.6) temos um quadrado de lado 1 que foi dividido em quatro partes iguais. Tomamos uma das partes (inferior esquerdo) cuja a área é $\frac{1}{4}$, em uma outra parte (superior direito) repetimos o mesmo procedimento, dividimos em quatro partes igual, tomamos uma delas, cuja a área é $\frac{1}{16}$ e tomamos uma outra parte e repetimos o procedimento.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

Generalizando o exemplo anterior, consideremos um quadrado de lado 1 na figura (3.7).

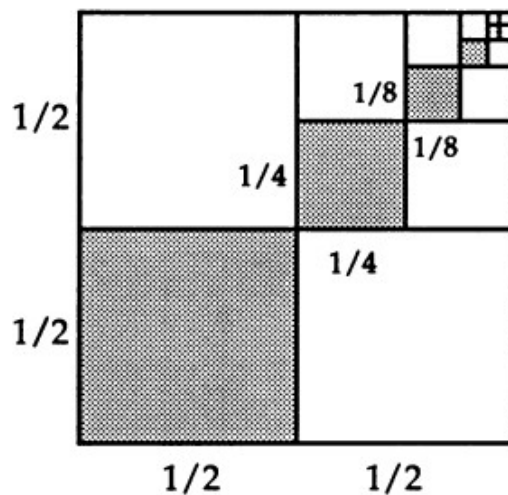


Figura 3.6: Soma de áreas menores

Seguindo um procedimento análogo ao do item anterior tomaremos um quadrado (parte inferior esquerda) de lado $1 - r$ cuja a área mede $(1 - r)^2$. No canto superior direito no quadrado de lado r tomemos um quadrado de lado $r(1 - r)$ e assim infinitamente. Gerando a soma:

$$(1 - r)^2 + r^2 \cdot (1 - r)^2 + r^4 \cdot (1 - r)^2 + \dots = \frac{(1 - r)^2}{(1 - r)^2 + 2r \cdot (1 - r)} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

Para finalizar, neste ponto apresentaremos duas generalizações muito interessantes presentes em [25] que podem ser utilizado pelo professor para justificar a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com razão q tal que $|q| < 1$ via dois argumentos geométricos. Vamos ao primeiro: Considere a figura a seguir:

Da figura acima temos que

$$b = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots \text{ e } h = \frac{1}{r}$$

Além disso esse triângulo, é semelhante ao triângulo hachurado. Como $b = a \cdot r$ e $h = 1 - r$, segue que:

$$\frac{a \cdot r}{a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots} = \frac{1 - r}{\frac{1}{r}} \Rightarrow$$

$$a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \dots = \frac{a}{1 - r}.$$

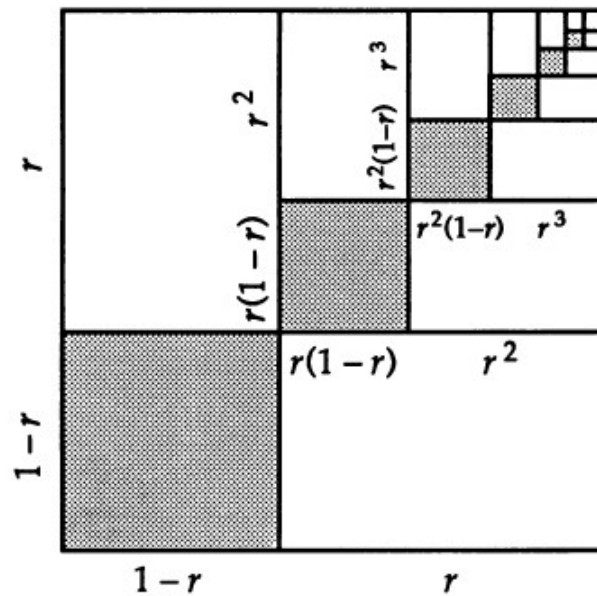


Figura 3.7: Soma de lados menores r .

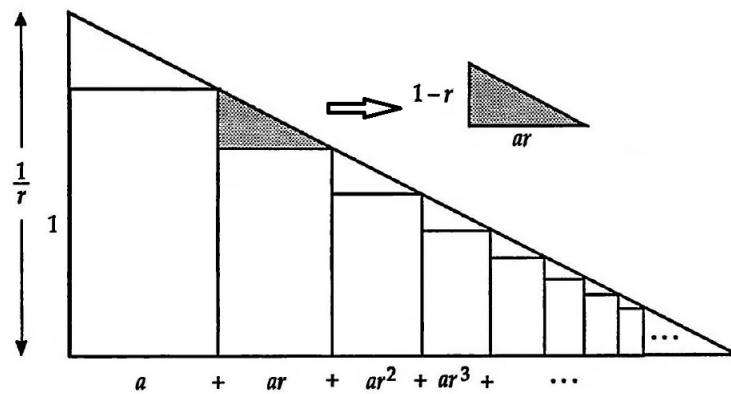
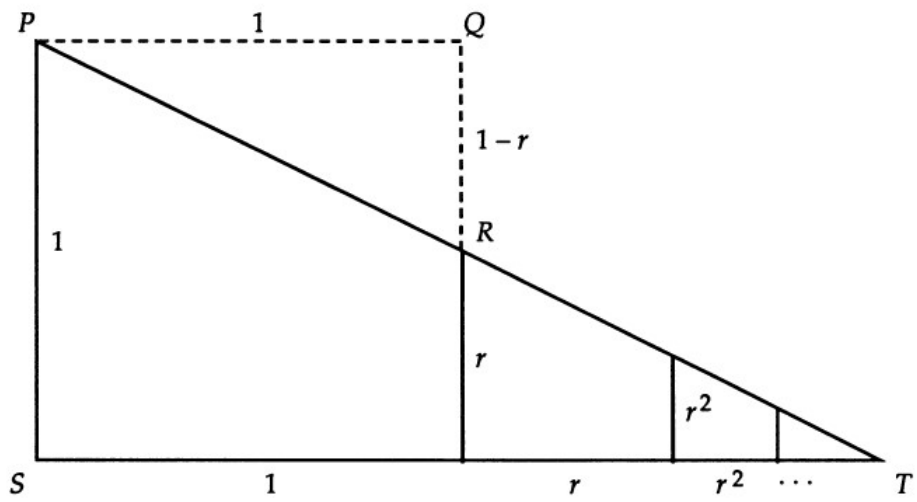


Figura 3.8: Soma P.G. por triângulos

Uma segunda possibilidade para obter a soma da série geométrica $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$, com $|r| < 1$, é utilizar a figura a seguir:

Note que o ΔPQR e o ΔPST são semelhantes, o que nos permite escrever:

$$\frac{1}{1 + r + r^2 + \dots} = \frac{1 - r}{1} \Rightarrow 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1 - r}.$$



Conclusão

Em todos os níveis de ensino o professor tem sempre duas difíceis decisões a tomar; o que o ensinar sobre um dado tema e como introduzir e ensinar aquele tema. Uma vez escolhido o que ensinar sobre um dado tema, dependendo do público ao qual o professor irá de reportar, a forma de como introduzir e abordar o conteúdo serão decisivos para atingir o seu objetivo de transmitir o conteúdo e ser entendido por aquele público.

Nas últimas décadas, novas propostas de ensino vêm sendo introduzidas no ensino da Matemática em todos os níveis e saber modelar para aplicar a tecnologia está sendo cada vez mais necessário para que o aluno possa programar. Porém, há uma grande dificuldade em justificar fórmulas e equações, pois tanto alunos como professores estão acostumados a utilizá-las prontas sem se preocupar com o seu porquê. Isso ocorre por vários fatores, desde a formação à grande da carga horária de trabalho docente que impossibilita buscar a formação continuada.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir com sugestões de demonstrações e recomendações que possam ajudar a árdua tarefa que nós professores temos em introduzir e seduzir jovens que muitas vezes estarão tendo um primeiro contato com um determinado assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] Abboud, Elias. On Viviani's Theorem and its Extensions, 2010. <https://arxiv.org/abs/0903.0753>.
- [2] Andrade, Sandro A. Godeiro - A Pirâmide e seu volume. Dissertação de Mestrado, 2013. PROFMAT - UFPB.
- [3] Bonciovanni, Vicanzo. Revisitando a fórmula do volume do cone. RPM- Revista do professor de Matemática 73. 2017.
- [4] Chaput, Frère Ignace. F.I.C. - Elementos de Geometria - 13^a edição - F. Briguiet & Cia - Rio de Janeiro, 1950.
- [5] Cook, J. William. An n -dimensional Pythagorean Theorem. The College Mathematics Journal Vol. 44, No. 2 (March 2013), pp. 98-101.
- [6] Costa, Pedro. As Dediqualdades elementares e suas aplicações - Dissertação de Mestrado - PROFMAT, 2019.
- [7] Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto aplicações - volume 1, Ed. Ática, 2016.
- [8] Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto aplicações - volume 2, Ed. Ática, 2016.
- [9] Dante, Luiz Roberto. Teláris matemática, 9º ano : ensino fundamental, anos finais, Ed. Scipione, 2018.
- [10] Dolce, Osvaldo, Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar vol.9. Atual Editora - São Paulo, 1992.

- [11] Eves, Howard. Introdução à História de Matemática. 3^a edição - Editora de Unicamp, 2002.
- [12] Gelson, Iezzi. Dolce, Osvaldo. Degenszajn, David. Périgo, Roberto. Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações - volume 1 - 9^a edição - Editora Saraira- São Paulo, 2017.
- [13] Gelson, Iezzi. Fundamentos de Matemática Elementar vol.10. Atual Editora - São Paulo, 2014.
- [14] Gelson, Iezzi. Fundamentos de Matemática Elementar vol.6. Atual Editora - São Paulo, 2014.
- [15] Gelson, Iezzi. Dolce, Osvaldo. Degenszajn, David. Périgo, Roberto. Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações - volume 2 - 9^a edição - Editora Saraira- São Paulo, 2017.
- [16] Gelson, Iezzi. Fundamentos de Matemática Elementar vol.3. Atual Editora - São Paulo, 2014.
- [17] Gelson, Iezzi. Fundamentos de Matemática Elementar vol.7. Atual Editora - São Paulo, 2014.
- [18] Gelson, Iezzi. Dolce, Osvaldo. Degenszajn, David. Périgo, Roberto. Almeida, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações - volume 3 - 9^a edição - Editora Saraira- São Paulo, 2017.
- [19] Gomes, Carlos A; Gomes, José M. Pinheiro, Matemática - IME - IAT - Olimpíadas. Editora Vestseller - Fortaleza, CE, 2010.
- [20] Heath, Thomas Little and others, The thirteen books of Euclid's Elements, Dover Publications, 1956.
- [21] Lang, Serge. Murruow, Gene. Geometry- Second Edition. Springer Verlag- 1980.
- [22] Lima, Elon Lages; Morgado, A. C.; Wagner, E.; Carvalho, Paulo Cezar Pinto. A Matemática do Ensino Médio - vol 2. SBM - Rio de Janeiro, 2006.

- [23] Maor, Eli, *Trigonometrics Delights*, Princeton 1998.
- [24] Morgado, A. C.; Wagner, E.; Jorge, M. *Geometria II*. Editora FC & Z Livros - Rio de Janeiro, 2003.
- [25] Nelsen, Roger B. *Proofs Without Words: Exercises in visual thinking - Number 1*, Classroom Resource Materials. The Mathematical Association of America, 1993.
- [26] Nelsen, Roger B. *Proofs Without Words: Exercises in visual thinking - Number 2*, Classroom Resource Materials. The Mathematical Association of America, 2000.
- [27] Nelsen, Roger B. *Proofs Without Words: Exercises in visual thinking - Number 3*, Classroom Resource Materials. The Mathematical Association of America, 2015.
- [28] Neto, Antonio Caminha Muniz. *Geometria*. Coleção PROFMAT. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.
- [29] Oliveira, Marcelo Rufino de. Pinheiro, Márcio Rodrigo da Rocha. *Elementos da Matemática vol.2 - 3ª edição* - Editora VestSeller - Fortaleza, 2016.
- [30] Oliveira, Marcelo Rufino de. Pinheiro, Márcio Rodrigo da Rocha. *Elementos da Matemática vol.5 - 3ª edição* - Editora VestSeller - Fortaleza, 2018.
- [31] Patarro, Patrícia Moreno. *Matemática essencial 9º ano : ensino fundamental, anos finais*, Ed.Ática, 2018.
- [32] Souza, Joamir roberto de. Garcia, Jacqueline da Silva. *Conato matemática, 1º ano*, Ed. FTD, 2018.
- [33] Souza, Joamir roberto de. Garcia, Jacqueline da Silva. *Conato matemática, 2º ano*, Ed. FTD, 2018.
- [34] RPM - *Revista do Professor de Matemática*. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.

[35] Gua's Theorem: <https://www.uni-due.de>.

[36] Wagner, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. IMPA - Rio de Janeiro, 2015.