



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OTONIEL SOARES DE MARIA

CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO: noções de limites, derivadas e  
aplicações.

MOSSORÓ/RN

2013

OTONIEL SOARES DE MARIA

**CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO: noções de limites, derivadas e aplicações.**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Maurício Zuluaga Martinez

**Co-orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Josildo José Barbosa Da Silva

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

**Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e catalogação  
da Biblioteca “Orlando Teixeira” da UFRSA**

M332c Maria, Otoniel Soares de.

Cálculo diferencial no ensino médio: noções de limites,  
derivadas e aplicações / Otoniel Soares de Maria. – Mossoró, RN:  
2013.

62f. : il.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Maurício Zuluaga Martinez.

Coorientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Josildo José Barbosa da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Semi-  
Árido, Mestrado em Matemática, 2013.

1. Função. 2. Limite. 3. Derivada e otimização. I. Título.

CDD: 515.3

Bibliotecária: Marilene Santos de Araújo  
CRB-5/1033

OTONIEL SOARES DE MARIA

**CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO: noções de limites, derivadas e aplicações.**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFRSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM :

BANCA EXAMINADORA

---

Profº. Dr. Maurício Zuluaga Martinez - UFRSA  
Presidente

---

Profº. Dr. Josildo José Barbosa Da Silva - UERN  
Primeiro Membro

---

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN  
Segundo Membro

---

Profº. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFRSA  
Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 19 de Julho de 2013.

Dedico esse trabalho a toda minha família, em especial a minha mãe Sulamita Matilde de Maria e a meu pai Francisco Soares de Maria (*in memorian*) por terem nos ensinado a viver e a valorizar as oportunidades que a vida nos oferece.

À minha esposa Maria da Conceição Barbosa Soares e aos meus filhos João Paulo e Nathália Raquel que são os meus maiores presentes.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e as coisas que ele me presenteou.

Agradeço a minha família, pela paciência e compreensão nos momentos de minha ausência.

Aos amigos e colegas de curso que estiveram juntos por toda essa jornada suavizando por meio dessa amizade construída e reforçada durante essa dura caminhada

A todos aqueles que colaboraram diretamente e indiretamente o nosso muito obrigado.

Seja o que for que imaginemos, é finito.  
Portanto não existe qualquer ideia, ou  
concepção, de algo que denominamos  
infinito.(...)

Quando dizemos que alguma coisa é  
infinita, queremos apenas dizer que não  
somos capazes de conceber os limites e  
fronteiras da coisa designada, não tendo  
concepção da coisa, mas de nossa  
própria incapacidade.

Hobbes (1588-1679), filósofo Inglês.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01- FUNÇÃO DE 1º GRAU .....	21
FIGURA 02- FUNÇÃO DEFINIDA POR DUAS SENTENÇAS .....	22
FIGURA 03 – FUNÇÃO CONTÍNUA .....	28
FIGURA 04 - FUNÇÃO $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ .....	30
FIGURA 05 - FUNÇÃO $f(x) = \frac{1}{x-3}$ .....	31
FIGURA 06- FUNÇÃO EXPONENCIAL FUNDAMENTAL .....	34
FIGURA 07 - FUNÇÃO CONTINUA QUALQUER.....	37
FIGURA 08 FUNÇÃO CRESCENTE.....	47
FIGURA 09 - FUNÇÃO DECRESCENTE.....	48
FIGURA 10 - FUNÇÕES DE 2º GRAU.....	48
FIGURA 11 - FUNÇÃO CONTINUA.....	49
FIGURA 12 - FUNÇÃO CONTINUA NO PONTO P .....	50
FIGURA 13 - FUNÇÃO DE 2º GRAU .....	50
FIGURA 14 - FUNÇÃO DO 1º GRAU.....	53
FIGURA 15 - FUNÇÃO DE 2º GRAU .....	54

## LISTA DE SIGLAS

CDI	Cálculo Diferencial e Integral
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
PCN's	Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica
SI	Sistema Internacional

## RESUMO

Este trabalho se propõe a apresentar os resultados de um estudo sobre o ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: noções de limites, derivadas e aplicações são apresentadas de forma clara e objetiva. Faremos uma abordagem do Cálculo desde o surgimento com Newton e Leibniz, passando por sua importância em nossas vidas, objetivando com isso, mostrar a funcionalidade do assunto em todos os ramos da Ciências, inclusive humanas. Entretanto, colocamos em questão a sua aplicabilidade nos currículos do Ensino Médio, pois o mesmo ainda preserva a sua estrutura original, sendo considerada uma das disciplinas que apresenta grandes dificuldades iniciais de aprendizagem por parte dos alunos que ao se depararem com o Cálculo de Funções Reais de uma Variável Real ao ingressar em cursos de exatas, não tem aquele rendimento desejado. Vimos que uma das dificuldades está na assimilação do conteúdo e isto se dá, principalmente, no estudo sobre noções de limites e sua aplicação para definir a derivada.

Palavra-chave: **Função, limite, derivada e otimização**

## **ABSTRACT**

This paper aims to present the results of a study on the teaching of Calculus in High School: notions of limits, derivatives and applications are presented clearly and objectively. We will approach the calculation since the rise with Newton and Leibniz, to its importance in our lives, aiming thus to show the functionality of the subject in all branches of science, including human. However, put in question its applicability in the curricula of secondary education, because it still preserves its original structure, and is considered one of the disciplines that presents great difficulties early learning by the students when faced with the calculation of Real Functions a Real Variable to join courses accurate, does not have that desired income. We have seen that one of the difficulties lies in the assimilation content and this occurs mainly in the study of the notional boundaries and their application to set the derivative.

**Keyword: function, limit, derivative and optimization**

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL</b> .....	<b>14</b>
1.1 O Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral .....	16
1.2 O Cálculo Diferencial e Integral no currículo do Ensino Médio no Brasil.....	19
<b>2 NOÇÕES DE LIMITES E DERIVADAS</b> .....	<b>21</b>
2.1 Noções de Limites .....	21
2.1.1 Propriedades dos Limites .....	24
2.1.2 Continuidade .....	28
2.1.3 Limite trigonométrico fundamental .....	29
2.1.4 Limite envolvendo os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ .....	31
2.1.5 Limite exponencial fundamental .....	32
2.2 Noções de Derivadas .....	37
2.2.1 Significado geométrico da derivada .....	37
2.2.2 Função derivada.....	38
2.2.3 Derivadas de funções elementares .....	38
2.2.4 Função exponencial .....	40
2.2.5 Propriedades operatórias das derivadas .....	41
2.2.6 Função composta (Regra da cadeia) .....	42
2.2.7 Derivação implícita .....	43
2.2.8 Função inversa.....	44
2.2.9 Função logarítmica .....	44
2.2.10 Função potência de expoente real .....	45
2.2.11 Variação das funções.....	47
2.2.12 Aplicações das derivadas.....	50
2.2.13 A derivada e a cinemática .....	51
2.2.14 Problemas sobre máximos e mínimos.....	52
2.2.14.1 APRESENTAREMOS ALGUNS PROBLEMAS QUE PODEM SER APLICADOS A NÍVEL DE ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A DERIVADA .....	55
<b>3 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>56</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>57</b>
<b>APÊNDICE</b> .....	<b>58</b>

## INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade o homem utiliza a Matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade, pois a Matemática é a ciência dos números e dos cálculos e foi usada pelos egípcios na construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia e etc. Outros povos também utilizaram conhecimentos matemáticos para desenvolverem suas culturas, como é o caso dos gregos que utilizaram a Matemática como ciência dedutiva e lógica. Daí em diante inicia-se a construção do desenvolvimento matemático da Álgebra, Aritmética, Geometria e todos os conhecimentos posteriores com, entre eles, os infinitésimos e as quadraturas surgindo então o Cálculo Diferencial e Integral.

A Matemática está presente em várias áreas da sociedade como, por exemplo, Arquitetura, Informática, Medicina, Física, Química etc. Ela compreende uma constante busca pela veracidade dos fatos através de técnicas precisas e exatas, mantendo-se em constante evolução, investigando novas situações e estabelecendo relações gerais com os acontecimentos cotidianos. Com o surgimento e sistematização do Cálculo Diferencial e Integral criado por Isaac Newton (1642-1727), e Wilhelm Leibniz (1646 –1716) , criaram-se infinitas possibilidades de novas descobertas e aplicações, pois essa ferramenta Matemática estende-se a diversos campos das ciências tanto exatas quanto humanas, mostrando assim o grande potencial da descoberta afirmamos que em tudo que olhamos existe a Matemática. Por exemplo: para construção de um edifício é necessário utilização do cálculo de área, alturas, volumes etc. Atualmente, a educação vem recebendo desafios cada vez maiores e talvez o maior deles seja formar um cidadão capaz de comandar a economia, a produção, o lazer, dentre outros problemas que estão presentes na sociedade. O movimento em prol da educação Matemática, em especial nas últimas décadas, visa uma reestruturação nos currículos e nos métodos de ensino que forneçam capacidade de pensamento crítico e independente. O Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas mais tradicionais do Ensino Superior de Ciências Exatas e, também, base referencial para a compreensão do desenvolvimento científico e tecnológico, desde que foi proposto por Newton e Leibniz, há trezentos anos. Entretanto, apesar de sua importância e atualidade como conhecimento humano, o ensino do cálculo ainda preserva a sua

estrutura original, sendo considerada uma das disciplinas que apresenta as maiores dificuldades de aprendizado, por parte dos alunos e até mesmo professores.

Observamos que o ensino do cálculo é uma das disciplinas que o estudante ainda demonstra grandes dificuldades de aprendizagem, tendo em vista que os livros didáticos sempre tratam de maneira superficial e o reflexo disso é a dificuldade enfrentada por alguns alunos ao se depararem com a disciplina no Ensino Superior.

Muitos pesquisadores, atualmente, propõem que limites e derivadas sejam vistos nos currículos do Ensino Médio, e defendem a ideia da possibilidade de trabalhar noções de limite e derivada com os demais conteúdos curriculares nesse nível de ensino. Por exemplo a física e a química. É bom notar que nos currículos de Ensino Médio aprendia-se estas noções. Por esse motivo, o objetivo da nossa pesquisa é mostrar a necessidade que o aluno do Ensino Médio tem de trabalhar com noções de Cálculo Diferencial durante esse nível de ensino para facilitar o seu desenvolvimento na Universidade, principalmente nos cursos de Ciências Exatas.

Segundo Gil (2002), pesquisa bibliográfica é desenvolvida com material que já foi elaborado, constituído de livros e artigos científicos. Para Minayo (2003), pesquisa qualitativa é o caminho do pensamento a ser seguido. Tomando como base esses dois autores, optamos por realizar uma pesquisa de cunho bibliográfico a partir de dados analisados em alguns artigos e livros de Ensino Médio, enfocando principalmente Silva (2005) onde dissertamos os exemplos aplicados.

A referida pesquisa está estruturada em uma Introdução e dois Capítulos. Inicialmente faremos a parte introdutória de nossa pesquisa, onde destacamos a necessidade que o aluno de Ensino Médio tem de trabalhar com as noções de limites e derivadas nesse nível de ensino. No Capítulo um, abordaremos uma breve história do Cálculo Diferencial e Integral e o seu desenvolvimento ao longo dos anos, como também faremos uma análise sobre Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Brasil e finalmente, no Capítulo dois iremos explorar as ideias utilizadas de noções de limites e derivadas no Ensino Médio, e no final do capítulo apresentaremos algumas noções sobre problemas de máximos e mínimos e como utilizá-lo no Ensino Médio.

E, por fim, apresentaremos as conclusões obtidas diante da pesquisa realizada, visando mostrar a importância de ações e estudos referentes à Matemática e o Cálculo Diferencial no Ensino Médio.

## 1 UMA BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Há séculos o conhecimento formal vem sendo construído e se estruturando em regras que precisam ser reformuladas. Regras que não podem ser ministradas através de um ensino rigoroso e restrito a uma determinada matéria, isolada de outras ciências. Privando o estudante de uma correta apreciação da matéria, cujo valor mais autêntico reside nas ideias e na criatividade, e não apenas no rigor ou encadeamento lógico das demonstrações, o ensino isolado não corresponderia a realidade histórica do fato, as exigências de desenvolvimento de teorias e métodos matemáticos em física, astronomia e nas demais ciências. As primeiras ideias do Cálculo surgiram na Grécia Antiga há 2500 anos. Naquela época, os gregos calculavam a área de qualquer região poligonal, dividindo-a em triângulos e somando as áreas obtidas. O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas, ou Cálculo Diferencial, e outra parte relacionada às áreas, ou Cálculo Integral. “O Cálculo” é uma expressão simplificada, adotada pelos matemáticos quando estes se referem à ferramenta matemática usada para analisar, qualitativamente ou quantitativamente, variações que ocorrem em fenômenos que abrigam uma ou mais componentes de natureza essencialmente física. Segundo Aurélio (2008): “cálculo é a realização de operação ou operações sobre números ou símbolos algébricos cômputo”

O Cálculo Diferencial e Integral foi criado por Isaac Newton<sup>1</sup> (1642-1727), e Wilhelm Leibniz<sup>2</sup> (1646 –1716). Criado para solucionar alguns problemas, mas a abstração e a sofisticação das ideias que a partir dali foram desenvolvidas fizeram com que se tornasse hoje um assunto fundamental para humanidade, com aplicações não só em Matemática, mas também em Física, Química, Estatística, Economia e muitas outras áreas do conhecimento está presente até nas áreas

---

<sup>1</sup> - Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 em Woolsthorpe Manor Em 1663, formulou o teorema hoje conhecido como Binômio de Newton. Fez suas primeiras hipóteses sobre gravitação universal e escreveu sobre séries infinitas e o que chamou de teoria das fluxões (1665), o embrião do Cálculo Diferencial e Integral. ([http://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](http://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) . Acesso em 17 de jan. 2013)

<sup>2</sup> Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha, no dia 1o de julho de 1646. Ingressou na Universidade aos quinze anos de idade e, aos dezessete, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal. (<http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>)

humanas. Por exemplo, na Geografia para resolver problemas sobre taxas de Crescimento Populacional. O trabalho destes cientistas foi uma sistematização de ideias e métodos surgidos principalmente ao longo dos séculos XVI e XVII, os primórdios da chamada Era da Ciência Moderna, que teve início com a Teoria Heliocêntrica de Copérnico<sup>3</sup> (1473 –1543). Na realidade nada restara provado sobre a exclusividade na criação do Cálculo, ambos foram geniais em suas formas de descrever essa ferramenta, segundo Bardi (2010, p.12):

Tanto Leibniz quanto Newton tiveram direito a autoria do cálculo, e hoje em geral são vistos como seus coautores independentes, dando-se ambos o crédito por terem dado à matemática seu maior impulso desde os gregos.

Segundo Eves (2011, p.444):

A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analítico e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido quanto a forma matemática.

O Cálculo Diferencial é usado para determinar órbitas de astros, satélites mísseis, na análise de crescimento de populações, em importantes problemas de otimização, tais como achar as quantidades ideais de produção que minimizam custos, as que maximizam lucros, como construir reservatório com máxima capacidade com custo fixado, entre outros. Por este motivo o Cálculo Diferencial e Integral é um instrumento indispensável do pensamento em quase todos os campos da ciência pura e aplicada.

---

<sup>3</sup>Foi um astrônomo e matemáticopolaco que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cónego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrólogo e médico. Sua teoria do Heliocentrismo, que colocou o Sol como o centro do Sistema Solar, contrariando a então vigente teoria geocêntrica (que considerava a Terra como o centro), é tida como uma das mais importantes hipóteses científicas de todos os tempos, tendo constituído o ponto de partida da astronomia moderna.

Alguns pesquisadores afirmam que o Cálculo foi criado numa tentativa de resolver os problemas científicos do século XVII, Segundo Moar(2003), vários matemáticos como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler utilizaram conceitos do cálculo para resolver problemas.

### 1.1 O Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral é uma fonte de inspiração criativa e crítica, uma vez que atualiza a compreensão do fenômeno científico contribuindo, de maneira expressiva, para o resgate do conhecimento no campo da matemática e suas ramificações CDI (Cálculo Diferencial e Integral).

Rezende (2003) destaca seis das dimensões mais representativas dessa imagem do conhecimento, como rede, a saber:

1. a caracterização dos significados como feixes de relações;
2. a diversidade das relações constitutivas de cada feixe;
3. a dualidade objetos/relações;
4. a não-linearidade na articulação dos nós/significados;
- 5.a não-existência de caminhos necessários ligando dois nós quaisquer;
6. a permanente abertura das transformações.

(REZENDE, 2003, p. 40)

Nesse ângulo, o autor entende que o Cálculo é uma grande rede que interage com várias outras redes, onde as conexões internas dessa rede são passíveis de (e estão em) constante mudança. Sendo o Cálculo Diferencial e Integral a base para o desenvolvimento dos estudos nas áreas de conhecimento que tem por atividade principal o uso de cálculo, como, por exemplo, a Matemática, Ciência da Computação, Engenharia Civil, Física, entre outros. Podemos dividir o Cálculo em duas partes: uma relacionada às derivadas, ou Cálculo Diferencial e outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral .A derivada e a integral são duas noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral. Do ponto de vista geométrico, a derivada está ligada ao problema de traçar a tangente a uma curva, enquanto que a integral está relacionada com o problema de determinar a área de certas figuras planas, mas também possui muitas outras interpretações possíveis.

Na realidade, a grande descoberta de Newton e de Leibniz foi que a Matemática, além de lidar com grandezas, é capaz de lidar com a variação das mesmas. Entretanto, o Cálculo Integral era visto separadamente por Newton e Leibniz. Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico. Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684. O Cálculo de Newton foi simplesmente visto como derivadas “reversas”. Esses dois homens, com visões diferentes, foram reconhecidos como os inventores do Cálculo por seus contemporâneos. O objetivo do Cálculo relaciona-se com quatro classes principais de problemas científicos a serem estudados:

- Determinação da reta tangente a uma curva, em um dado ponto desta.
- Determinação do comprimento de uma curva, da área de uma região e do volume de um sólido.
- Determinação dos valores máximos e mínimos de uma quantidade.
- Determinação da velocidade e aceleração da função distância percorrida por um corpo.

Na rede de conhecimentos do Cálculo, dois conceitos historicamente assumem o papel de *nós* dessa rede: as noções de limite e de infinitésimo. Via de regra, a noção de limite é a perspectiva dominante de apresentação do Cálculo na maioria dos autores. Percorrendo a história em busca de respostas e discutindo os aspectos pedagógicos associados, Rezende (2003) identificou “cinco dualidades essenciais do Cálculo e de seu ensino: **discreto/contínuo; finito/infinito; variabilidade/permanência; local/global; sistematização/construção.**” (REZENDE, 2003, p. 325). Dentro de cada uma dessas dualidades, Rezende (2003) pontua algumas questões associadas a conceitos que entendemos como essenciais para o aprendizado do Cálculo e problematiza o tratamento dado a eles no contexto de sala de aula. Na dualidade discreto/contínuo, ele apresenta alguns exemplos como: o uso da regra prática para se obter a dízima periódica 0,333... como a representação decimal da fração  $1/3$  (aritmética); ou quando, no ensino médio, ensina-se que a soma infinita de uma progressão geométrica  $(a_n)$  de razão  $q$  ( $0 < |q| < 1$ ) é dada pela fórmula algébrica  $\frac{a_1}{1-q}$ . Nestes momentos, perde-se a oportunidade de preparar o terreno para o aprendizado do Cálculo e o amadurecimento da dualidade discreto/contínuo, e certos objetos matemáticos como, por exemplo, as séries numéricas, que são relegadas a um segundo plano no ensino básico de Matemática.

“E, desse modo, torna-se inevitável, no campo pedagógico, o hiato entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e a sua representação geométrica (contínua)” (REZENDE, 2003, p. 330).

Segundo Boulos (1999):

[...] se você vai trabalhar com números reais, deve fazê-lo de acordo com as regras que regem sua manipulação. Existem algumas que são básicas, das quais outras são dedutíveis. Não é aqui a melhor hora para tratar o assunto, desse modo, quando acharmos que é interessante deduzir alguma fórmula, nós o faremos, mas em geral elas serão apenas enunciadas. É bom deixar claro que o objetivo é fornecer, da maneira mais fácil e direta, informações sobre como lidar com a álgebra dos números reais. (BOULOS, 1999, p.2)

Por outro lado, tal circularidade do conceito do número real pode decorrer da prática pedagógica que define um número irracional por exclusão, isto é, como sendo o número real que não é racional; mas, por outro lado, o conjunto dos números reais é definido pela reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Rezende (2003) adverte para o fato de que a organização didática dos conteúdos de Cálculo, que fundamenta seus conceitos básicos nas noções de limite e número real, tende a uma prática pedagógica que perpetua a não superação da dualidade discreto/contínuo e dificulta a aprendizagem do Cálculo. O uso do Teorema Fundamental do Cálculo desloca o cálculo da integral definida de sua concepção como série.

Segundo Rezende (2003):

Para se apreender o significado de integração é preciso que se explore mais as tramas e urdiduras da sua malha de significações. Calcular uma integral através de processos numéricos aproximados, ou mesmo usando determinados tipos de séries – como fizeram Newton, Euler e outros – também são exercícios que contribuem para o processo de tecedura da noção de integral. (REZENDE, 2003, p. 350)

Essa conduta revela a predominância da técnica sobre a construção do significado e está, por muitas vezes, ligada, segundo Baldino (1998 apud REZENDE, 2003), ao fato do “matemático-professor” insistir “em priorizar o significado lógico dos resultados em relação aos seus sentidos. É nesse contexto que devemos interpretar a afirmação do professor Baldino de que ‘o critério de verdade da matemática é sintático, e não semântico’” (REZENDE, 2003, p. 11).

## 1.2 O Cálculo Diferencial e Integral no currículo do Ensino Médio no Brasil

No Brasil o Ensino Secundário, teve sua origem com o modelo clássico humanista europeu, implantado aqui pelos jesuítas, mas perdeu sua organicidade quando os mesmos foram expulsos e passou a ser apenas conteúdos ministrados em aulas ou disciplinas isoladas, inspiradas em ideias francesas.

O Colégio D. Pedro II, fundado em meados do séc. XIX tinha o objetivo de atender a uma determinada classe social, a burguesia. Foi a primeira Escola Pública do Brasil e teve o Cálculo Diferencial e Integral introduzido no terceiro ano, o que provocou significativas mudanças no ensino brasileiro. Segundo Barbosa (2004, p. 32) a relação existente entre os conteúdos e seu ensino nas escolas, foi introduzido numa formação mais científica, em vez de uma formação humanística. O ensino da Matemática no Brasil nas décadas de 60 e 70 e em outros países foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna e, como consequência, houve a exclusão de alguns conteúdos dos antigos programas, dentre eles o Cálculo. Atualmente, os temas como Limite, Derivada e Integral não são ensinados no Ensino Médio e não aparecem em alguns livros didáticos tendo como justificativa serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restrito apenas ao Ensino Superior. Dessa forma, o Cálculo faz parte do livro didático, mas não do Currículo do Ensino Médio. O professor Geraldo Ávila, em artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, questiona a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio:

Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) no Brasil, propõem que o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de forma que assegure ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados aos temas em estudo, isto é objetivando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e a continuação de seus estudos em níveis superiores.

Em resultados obtidos nas avaliações de matemática aplicadas por instituições como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), promovidos pelo Governo Federal, mostram que muitos alunos terminam o Ensino Médio com dificuldades em conceitos e procedimentos fundamentais, tais como operar com números reais, interpretar gráficos e tabelas, dentre outras coisas.

Esses mesmos alunos ao ingressarem nas faculdades deparam-se com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina esta que figura como obrigatória em muitos cursos de diversas áreas e tem um alto índice de reprovação, segundo estudos desenvolvidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP).

A noção do Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta necessária para compreensão da Física, Química, Biologia e na própria Matemática, presentes no Ensino Médio e a falta desse tópico neste nível de ensino torna para o aluno as ciências mais difícil do que realmente parece ser.

O professor Geraldo Ávila no mesmo artigo já citado diz que a ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. (ÁVILA, 1991,p.1).

Para que o aluno do Ensino Médio sinta-se familiarizado com as ideias do Cálculo Diferencial e Integral, no Ensino Superior, se faz necessário, que os mesmos tenham contato com essas noções no decorrer de uma formação básica de uma forma agregada aos demais conteúdos, para evitar um cenário insatisfatório para aluno, professor e sociedade que vemos na atualidade.

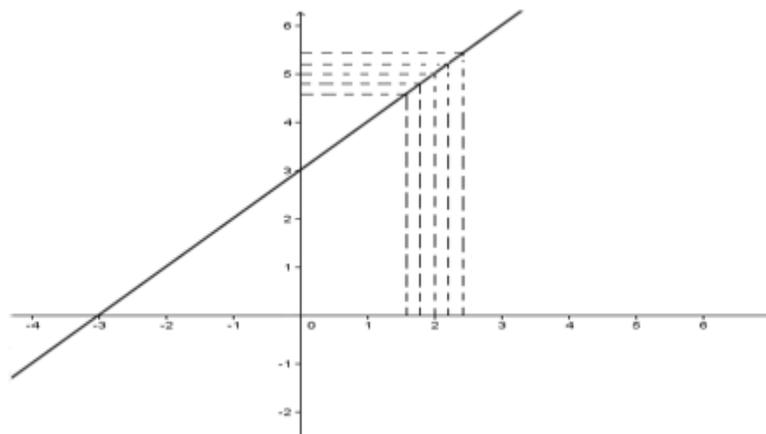
## 2 NOÇÕES DE LIMITES E DERIVADAS

O termo limite em nosso sentido moderno é um produto do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, e nossa definição moderna tem menos de 150 anos de idade. Até este período, existiram apenas raras ocasiões nas quais a ideia de limite foi usada rigorosamente e corretamente. A origem da derivada está nos problemas geométricos clássicos de tangência, por exemplo, para determinar uma reta que intersecta uma curva em apenas um ponto dado. A derivada tem dois aspectos básicos, o geométrico e o computacional. As aplicações das derivadas são muitas e novas aplicações aparecem todos os dias.

### 2.1 Noções de Limite

Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo; de fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo da álgebra, geometria e o resto da matemática. Entretanto, em termos do desenvolvimento ordenado e lógico do cálculo, limites devem vir primeiro. Porém, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limite eram confusas, com ideias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito. O estudo do limite de uma função visa determinar o que acontece (estudo do comportamento) com os valores da imagem de uma função quando, no domínio dessa função, tomamos valores suficientemente próximos de um determinado ponto (número).

FIGURA 01 - FUNÇÃO DE 1º GRAU



(Fonte: Xavier&Barreto.p.223 com Geogebra)

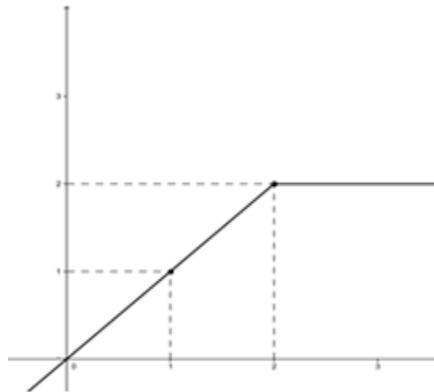
Observamos na figura 01 que para valores de  $x$  cada vez mais próximos de 2, resultam em valores de  $f(x)$  cada vez mais próximos de 5. Isso acontece quando  $x$  tende a 2 pela esquerda, ou seja, se aproxima por valores menores que 2, também podemos observar que quando  $x$  tende a 2 pela direita, ou seja, se aproxima por valores maiores do que 2,  $f(x)$  resultam em valores cada vez mais próximos de 5. Assim podemos escrever que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

Podemos observar ainda outro exemplo, considerando a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 2 \\ 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

FIGURA 02 - FUNÇÃO DEFINIDA POR DUAS SENTENÇAS



(Fonte: Xavier&Barreto.p.225 Modificado. com Geogebra)

Observamos na figura 02 que existe o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 2. Isso aconteceria mesmo que a função não estivesse definida para  $x = 2$ . Assim podemos escrever:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

Em vista disso, vamos definir de uma maneira mais formal limite e limites laterais:

1º) Definição de limite: Dizemos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é  $L$  e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Se para todo  $\varepsilon > 0$  existir em correspondência em numero  $\delta > 0$  que depende  $\varepsilon$  ,tal que para todo  $x, x \neq a$  ,temos:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Graficamente, podemos resumir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

da seguinte forma:



É muito importante observarmos nesta definição que nada é mencionado sobre o valor da função quando  $x = a$  , isto é, não é necessário que a função assuma valores em  $a$ . É preciso ter em mente que no cálculo do limite de uma função o que interessa é o comportamento da função quando  $x$  se aproxima de  $a$  e não o que ocorre com a função quando  $x = a$ .

Para exemplificar o que foi dito, considere a função  $f(x) = 2x + 1$ . Vamos atribuir valores a  $x$  próximos de 1, mas diferente de 1, porém menores que 1, temos:

$x$	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Vamos atribuir a  $x$  valores próximos de 1, porém maiores que 1,

temos:

$x$	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Podemos observar que quanto mais  $x$  se aproxima de 1,  $f(x)$  se aproxima de 3, assim podemos escrever que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

2º) Definição de limites laterais: Dizemos que a função  $f$  tende ao limite  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$  pela esquerda se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que:

$$\text{Se } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Indicamos isto por:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

Dizemos que a função  $f$  tende ao limite  $L$  quando  $x$  tende a  $x_0$  pela direita se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que:

$$\text{Se } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Indicamos isto por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

### 2.1.1 Propriedades dos Limites

Existem oito propriedades do limite de uma função para  $x$  tendendo a um  $a \in \mathbb{R}$ . Vamos apresentar algumas dessas propriedades com base no livro “Fundamentos de Matemática Elementar” do autor Gelson Iezzi (Volume.8).

1º Limite da função constante:

“Se  $c \in \mathbb{R}$  e  $f$  é uma função definida por  $f(x) = c$ , para todo  $x$  real, então

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

*Demonstração:* Devemos provar que:

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

É sempre verdadeiro, pois

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

Vamos tomar como exemplo:

Seja  $\varepsilon = 0,1$  e  $a = 1$ , como tem que existir um  $\delta$  para que  $|x - 1| < \delta$  implique  $|f(x) - c| < 0,1$ . Observamos que:

$$f(x) = c, \text{ então: } |f(x) - c| = |c - c| = 0 < 0,1, \text{ logo qualquer } \delta \text{ serve.}$$

2º Propriedade

Se  $c \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L$

*Demonstração:* Devemos considerar dois casos:

1º Caso:  $c = 0$

Se  $c = 0$ , então  $c \cdot f(x) = 0$  e  $c \cdot L = 0 \cdot L = 0$

Pela 1ª propriedade, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0 = c \cdot L$$

2º Caso:  $c \neq 0$ . Devemos provar:

Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$

Temos, por hipótese:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Isto é, Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Então, Para todo  $\epsilon > 0$ , considerando  $\frac{\epsilon}{|c|}$ , temos:

existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$

Isto é, existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |c| \cdot |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|} \cdot |c| = \epsilon$

Ou seja:

existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$

3º Propriedade

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = L + M$

*Demonstração:* Devemos provar:

Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$

Para todo  $\epsilon > 0$ , consideremos  $\frac{\epsilon}{2}$ , temos:

existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$

existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$

Considerando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  e, portanto,  $\delta \leq \delta_1$ , e  $\delta \leq \delta_2$ , vem

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Mas, pela desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| = |(f + g)(x) - (L + M)|$$

Então:

existe  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tal que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$

4° Propriedade

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$

*Demonstração:* Notemos inicialmente que:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - LM + LM$$

Isto é,

$$(f \cdot g)(x) = [f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM$$

Considerando que:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ ,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (g(x) - M) = 0$ ,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) - L) \cdot g(x)] = 0$

Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \{ [f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM \} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \{ [f(x) - L] \cdot g(x) \} + \lim_{x \rightarrow a} \{ L \cdot [g(x) - M] \} + \lim_{x \rightarrow a} LM \\ &= 0 + L \cdot \lim_{x \rightarrow a} [g(x) - M] + LM = L \cdot 0 + LM = LM \end{aligned}$$

Vamos exemplificar as considerações 1,2 e 3:

$$1) f(x) = 2x^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 9) = 0$$

$$2) g(x) = 3x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) - 5) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 9) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(f(x) - 9) \cdot g(x)] = 0$$

5° Propriedade

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}.$$

*Demonstração:* Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

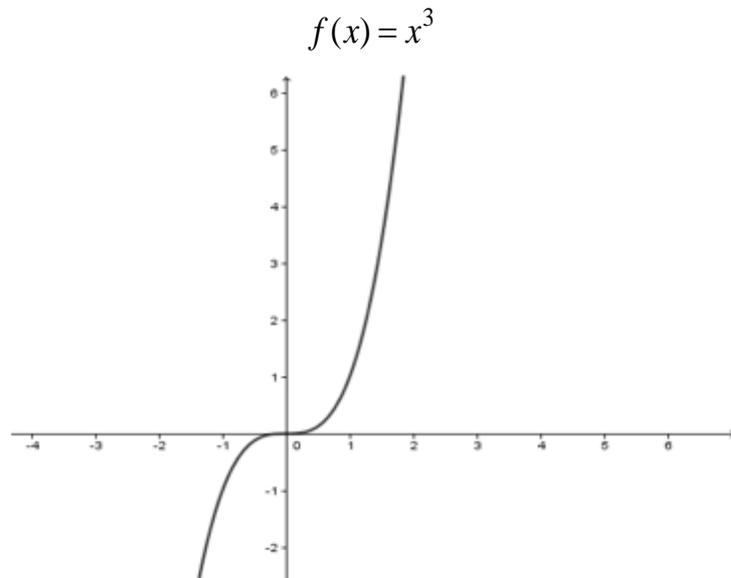
e então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

### 2.1.2 Continuidade

O gráfico de uma função contínua em um intervalo real é representado por uma curva que não apresenta ponto de descontinuidade, ou seja, não possui saltos nem furos. Como mostra o exemplo da figura 03:

FIGURA 03 - FUNÇÃO CONTÍNUA



(Fonte: Xavier&Barreto.p.230 com Geogebra)

Mas para identificarmos se uma função  $f$  é contínua em  $a$ , ela deve satisfazer três condições:

1ª – Existe  $f(a)$

2ª – Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3ª –  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (O valor da função em  $a$  é igual ao valor da função numa vizinhança de  $a$ ).

Como exemplo, temos:

Dada a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Verificamos que é contínua em  $x = 2$ , pois:

- 1)  $f(2) = 7 - 2 \cdot 2 = 3$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (7 - 2x) = 3$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$

### 2.1.3 Limite trigonométrico fundamental

Seja a função  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ . Considerando uma tabela dessa função, observamos que para valores cada vez mais próximo de 0, obtemos valores para função cada vez mais próximo de 1. Assim, temos:

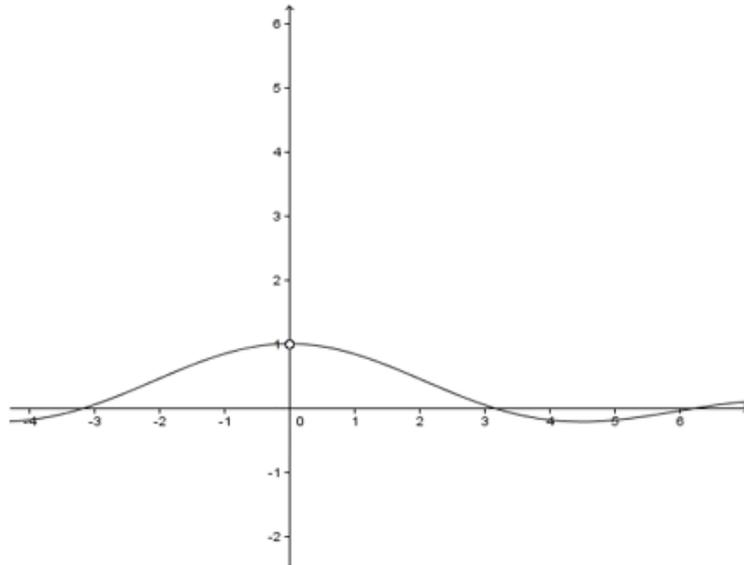
$x$	$\text{sen } x$	$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$
-0,04	-0,039989	0,999733
-0,03	-0,029995	0,999850
-0,02	-0,019998	0,999993
-0,01	-0,009999	0,999983
-0,001	-0,000999	0,999999
0,04	0,039989	0,999733
0,03	0,029995	0,999850
0,02	0,019998	0,999993
0,01	0,009999	0,999983
0,001	0,000999	0,999999

(Fonte: Xavier&Barreto.p:231)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Podemos observar através do gráfico da função que o  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ , como mostra a figura 04.

FIGURA 04 -  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$



(Fonte: Geogebra)

Como exemplos desse limite muito importante, temos:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{4x} = \frac{1}{4} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

- 1) Como  $\frac{1}{4}$  é uma constante. Podemos aplicar a propriedade de que o limite de uma constante vezes uma função é o constante vezes o limite dessa função, assim temos:

$$\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

- 2) Multiplicando o numerador e denominador pela expressão  $(\cos x + 1)$  que é o conjugado do numerador, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) \cdot (\cos x + 1)}{x^2 \cdot (\cos x + 1)}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria  $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow -\text{sen}^2 x = \cos^2 x - 1$ . Substituindo no limite acima, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 \cdot (\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x^2 \cdot (\cos x + 1)}$$

Aplicando o limite do produto, fica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\cos x + 1)} = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(1 + 1)} = \frac{-1}{2}$$

3) Multiplicando o numerador e denominador por 4, temos:

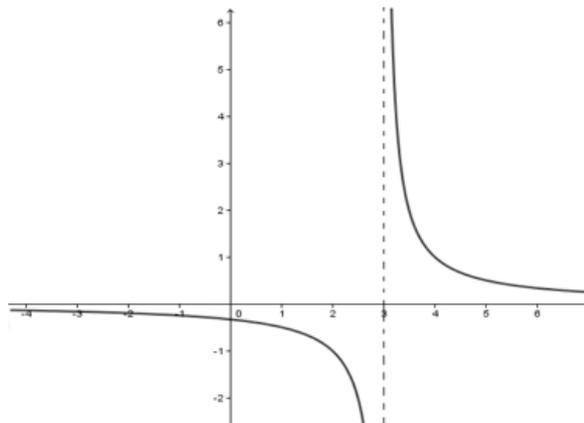
$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} 4x}{3 \cdot 4x}$ , como  $\frac{4}{3}$  é uma constante. Podemos aplicar a propriedade, assim temos:

$$\frac{4}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

#### 2.1.4 Limite envolvendo os símbolos $+\infty$ e $-\infty$

Observamos que os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  não podem ser considerados números com base nessa informação analisaremos o gráfico da figura 05:

FIGURA 05 -  $f(x) = \frac{1}{x-3}$



(Fonte: Xavier&Barreto.p.234 com Geogebra)

Observamos pela figura acima que quando  $x$  tende a 3 pela direita,  $f(x)$  assume valores cada vez maiores e quando  $x$  tende a 3 pela esquerda,  $f(x)$  assume valores cada vez menores. Assim escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty.$$

Para podermos mostra isso: seja dado  $\varepsilon > 0$ , é possível encontrar  $\delta > 0$  tal que:

Se  $0 < x - 3 < \delta$ , então  $f(x) > \varepsilon$

Da condição,  $f(x) > \varepsilon$  podemos escrever que  $\frac{1}{x-3} > \varepsilon \Rightarrow 0 < x - 3 < \frac{1}{\varepsilon}$ , pois  $x \rightarrow 3^+$ , assim basta, portanto, tomar  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$  que teremos  $0 < x - 3 < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > \varepsilon$  que o que queríamos provar.

Notamos ainda que fazendo  $x$  tender a  $-\infty$  ou  $x$  tendendo a  $+\infty$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

### 2.1.5 Limite exponencial fundamental

O limite da função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , de base positiva, quando  $x$  tende a  $-\infty$ , ou  $x$  tende a  $+\infty$  é o número irracional  $e = 2,71828\dots$  (número de Euler) que é a base do logaritmo natural.

Para a demonstração do limite dessa função vamos enunciar o teorema do confronto:

Sejam  $f, g, h$  três funções e suponhamos que exista  $r > 0$  tal que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Para  $0 < |x - p| < r$ . Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

*Demonstração:* Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que:

a) Se  $0 < |x - x_0| < \delta_1$ , tem-se  $|g(x) - L| < \varepsilon$ , ou seja

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

b) Se  $0 < |x - x_0| < \delta_2$ , tem-se  $|h(x) - L| < \varepsilon$ , ou seja.

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Assim, para  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos que, se  $0 < |x - x_0| < \delta$ , então

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Donde

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

E portanto

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Isto significa que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

(Fonte: Aref Antar Neto. p. 167 Vol. 8)

*Demonstração:* Sejam  $n$  e  $n + 1$  dois números inteiros positivos e consecutivos.

Dado  $x$ , existe  $n$  tal que  $n \leq x < n + 1$ , temos:

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n + 1}$$

Considerando que  $n \leq x < n + 1$ , resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + 1}$$

Mas:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n + 1}}{1 + \frac{1}{n + 1}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n + 1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right) \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

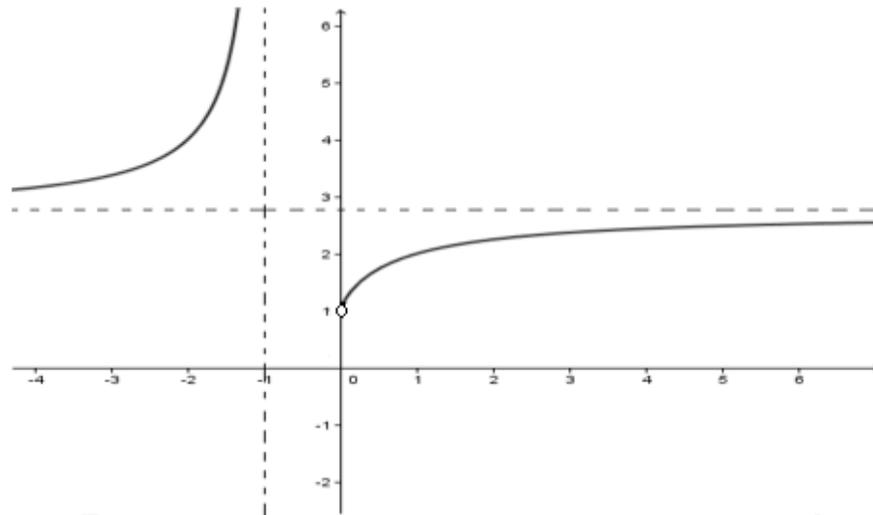
Então, pelo teorema do confronto, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Assim, temos que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

FIGURA 06 - FUNÇÃO EXPONENCIAL FUNDAMENTAL



(Fonte: Xavier&Barreto.p.236 com Geogebra)

Podemos observar pela figura 06 acima que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$

Considerando ainda os limites fundamentais, temos dois muito importantes:

Seja a função  $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ , definida para  $-1 < x \neq 0$ , temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

*Demonstração:* Fazendo  $x = \frac{1}{y}$ , obtemos  $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$  e notando que

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Para  $a > 0$ , vale a igualdade:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

*Demonstração:* Para  $a = 1$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \ln 1$$

Supondo  $0 < a \neq 1$  e fazendo  $a^x - 1 = w$ , temos:

$$a^x - 1 = w \Rightarrow a^x = 1 + w \Rightarrow \ln a^x = \ln(1 + w) \Rightarrow x \ln a = \ln(1 + w) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+w)}{\ln a}$$

$$\text{Notemos que } \frac{a^x - 1}{x} = (a^x - 1) \cdot \frac{1}{x} = w \cdot \frac{\ln a}{\ln(1+w)}$$

Notando que, se  $x$  tende a zero, então  $w$  também tende a zero, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{w \cdot \ln a}{\ln(1+w)}$$

$$= \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{w} \ln(1+w)} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+w)^{\frac{1}{w}}} = \frac{\ln a}{\ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+w)^{\frac{1}{w}}]} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

Como exemplos desses limites fundamentais, temos:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6 \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x} = 3 \ln 2 \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

Resolução:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$$

Fazendo  $\frac{2}{x} = \frac{1}{y}$ , temos  $x = 2y$  se  $x \rightarrow +\infty$  então  $y \rightarrow +\infty$ , assim podemos escrever que:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{3 \cdot 2y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{6y} = \left[ \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^6 = e^6$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x}$$

Multiplicando o numerador e denominador por 3, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (2^{3x} - 1)}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x}$$

Como o expoente  $3x$  é igual ao denominador da fração, temos que o limite é igual a:

$$3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} = 3 \cdot \ln 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

Fazendo  $2x = y$ , temos  $x = \frac{y}{2}$ , então para  $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ , logo:

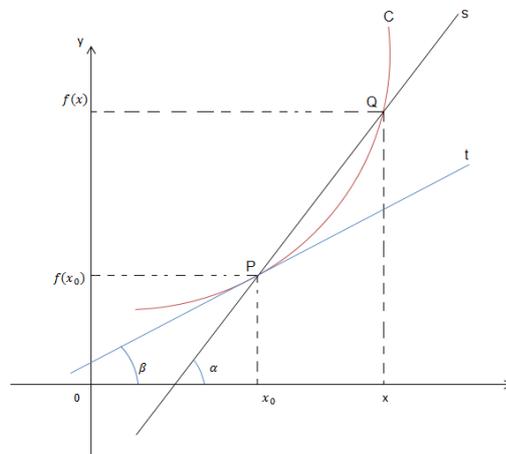
$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{\frac{y}{2}}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{2}{y}} = \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^2 = e^2$$

A derivada no Cálculo, representa a taxa de variação instantânea de uma função. Um exemplo típico é a função velocidade que representa a taxa de variação (derivada) da função espaço ou deslocamento. Do mesmo modo a função aceleração é a derivada da função velocidade ou a derivada segunda do deslocamento. O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, da determinação da taxa de crescimento de uma população, de crescimento econômico do país, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

### 2.2.1 Significado geométrico da derivada

Observe no gráfico que se  $\Delta x$  tende a 0, ou seja, se  $x$  tende  $x_0$ , o ponto  $Q$  se aproxima de  $P$  e a reta secante  $s$  tenderá à reta  $t$ , tangente à curva  $C$  no ponto  $P$ . Veja na figura 07,

FIGURA 07 - FUNÇÃO CONTINUA QUALQUER



(Fonte: Bucchi. Pag: 306)

Observe que a reta  $s$  é secante com o gráfico da curva  $C$  e seu coeficiente angular é:

$$tg \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sendo assim podemos escrever:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \beta$  uma vez que  $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \beta$  quando  $x \rightarrow x_0$ , daí conclui-se que:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \beta$$

### 2.2.2 Função derivada

Consideremos uma função  $y = f(x)$ , contínua e definida no intervalo  $A$ , e seja o intervalo  $A' \subset A$ , podemos dizer que, se  $y = f(x)$  é derivável para todo  $x \in A'$ , então  $y = f(x)$  é derivável em  $A'$ . A essa nova função chamamos simplesmente de derivada de  $f(x)$  e escrevemos  $f'(x)$  ou  $y'$ , para todo  $x \in A'$ . E que pode ser obtida da seguinte forma:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

desde que esse limite exista, e seja finito.

### 2.2.3 Derivadas de funções elementares

- Função Constante

Dada a função  $f(x) = b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , temos:

$$f(x) = b \Rightarrow f'(x) = 0$$

- Função afim

Dada a função  $f(x) = ax + b$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}$ , temos:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

- Função potência de expoente natural

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

*Demonstração:*  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

*Prova*

Para  $n = 1$ , temos:  $\frac{d}{dx} x = 1$

Supondo por hipótese que é verdadeiro para  $n = k$ , isto é,  $\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$ , devemos provar, que é verdadeiro para  $n = k + 1$ .

$$\frac{d}{dx} x^n = \left( \frac{d}{dx} x^k \cdot x \right) = \left( \frac{d}{dx} x^k \right) \cdot x + x^k \cdot \frac{d}{dx} x = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1) \cdot x^k$$

$$f(x) = x^4$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x^3 + 6x^2 \cdot \Delta x + 4x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$= 4x^3 + 0 + 0 + 0$$

$$= 4x^3$$

$$f(x) = x^{-4}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^4} - \frac{1}{x^4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4 - (x+\Delta x)^4}{x^4 \cdot (x+\Delta x)^4}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4(x + \Delta x)^4} \cdot \frac{x^4 - (x + \Delta x)^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4(x + \Delta x)^4} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (x + \Delta x)^4}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x^4 \cdot x^4} \cdot (-4x^3)$$

$$= -4x^{-5}$$

$$= -\frac{4}{x^5}$$

- Função seno

Dada a função  $f(x) = \text{sen } x$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} \\ &= \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x$$

$$\text{pois } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$\text{logo: } f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

- Função cosseno

Dada a função  $f(x) = \cos x$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \text{sen} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} \\ &= -\text{sen} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta x}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$f'(x) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta x}{2} \right)} = -\text{sen } x$$

$$\text{pois } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta x}{2} \right)} = 1$$

$$\text{logo: } f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$$

#### 2.2.4 Função exponencial

Analisando a função  $f(x) = a^x$ , com  $a \in \mathbb{R}$  onde  $0 < a \neq 1$ , podemos determinar a derivada  $f'(x)$  da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

logo:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

para função exponencial  $f(x) = e^x$ , temos  $f'(x) = e^x \cdot \log_e e = e^x \cdot 1 = e^x$

logo:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

### 2.2.5 Propriedades operatórias das derivadas

Resumindo as propriedades da derivada de uma forma simplificada, temos:

- Soma :  $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Diferença :  $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$
- Produto :  $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

*Demonstração:* Seja  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ , vamos mostrar que sua derivada  $f'(x)$  é dada por:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ , para isso vamos usar a definição de derivada, isto é:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tomemos a função  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  e vamos acrescentar a  $x$  o valor de  $\Delta x$  assim a função fica:

$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)$ , aplicando a definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

agora vamos somar e subtrair ao numerador dessa igualdade o valor  $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$  e teremos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

agrupando convenientemente, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x) \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$

aplicando as propriedades do limite, fica:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x}$$

aplicando novamente, teremos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

para  $\Delta x \rightarrow 0$ , fica:

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

No caso particular em que  $f(x) = k \cdot v(x)$ , isto é,  $u(x) = k$  (função constante) e  $v(x)$  é uma função derivável, a regra precedente leva ao seguinte resultado:

$$f(x) = k \cdot v(x) \implies f'(x) = k \cdot v'(x)$$

- Quociente :  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \implies f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

### 2.2.6 Função composta (Regra da Cadeia)

Vamos estabelecer a regra de derivação de uma função composta, conhecida como regra da cadeia.

Sejam  $u$  e  $v$  duas funções deriváveis e  $f = u \circ v$ ; temos

$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ , calculemos  $f'(x)$ .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0}$$

multiplicando o numerador e o denominador dessa igualdade por  $v(x) - v(x_0)$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right]$$

observamos que quando  $x \rightarrow x_0$ , temos que  $v(x) \rightarrow v(x_0)$ , uma vez que  $v$  é uma função contínua (pois é derivável). Aplicando a propriedade do limite do produto, temos:

$$\lim_{v(x) \rightarrow v(x_0)} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

assim temos:

$$f'(x_0) = \lim_{v(x) \rightarrow v(x_0)} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

logo, decorre que  $f'(x_0) = u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$ . Trocando  $x_0$  por  $x$ , obtemos a função derivada  $f'(x)$ .

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

## 2.2.7 Derivação Implícita

Suponhamos que nos deem uma função  $y = f(x)$  em que o valor da função  $y = f(x)$  não está isolado ou não podemos isolar. Nesse caso como obter o valor de  $y'$  que é a função derivada de  $y$ , vamos mostrar que é possível obter  $y'$  usando a regra da cadeia e que esse processo é chamado de derivação implícita.

exemplos:

Em cada caso a seguir, admita que a equação dada representa pelo menos uma função  $y = f(x)$  e obtenha  $y'$ .

I.  $y^4 - y = x^3$

II.  $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$

Resolução:

I. Derivemos ambos os membros em relação a  $x$ , aplicando a regra da cadeia, temos:

$$4y^3 \cdot y' - y' = 3x^2$$

colocando  $y'$  em evidência, obtemos:

$$(4y^3 - 1) \cdot y' = 3x^2, \text{ donde, } y' = \frac{3x^2}{4y^3 - 1}$$

II. Aplicando novamente a regra da cadeia e derivando ambos os membros, temos:

$$y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' - 6x = y + xy'$$

agrupando convenientemente, teremos:

$$x \cdot 3y^2 \cdot y' - xy' = y + 6x - y^3$$

colocando  $y'$  em evidência, obtemos:

$$y'(3xy^2 - x) = y + 6x - y^3, \text{ donde,}$$

$$y' = \frac{y + 6x - y^3}{3xy^2 - x}$$

### 2.2.8 Função Inversa

Seja a função  $y = f(x)$  bijetora e derivável em  $I$  tal que  $f'(x) \neq 0$  para  $x \in I$ . Provemos que a função inversa  $x = f^{-1}(y)$  é derivável em  $f(I)$  e que  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ , sendo  $y = f(x)$ .

Como  $f$  é bijetora e derivável, decorre que  $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta y \neq 0$ ; portanto, podemos escrever:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

sendo  $f$  derivável e portanto contínua, se  $\Delta x \rightarrow 0$ , então  $\Delta y \rightarrow 0$ . Assim, temos:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

logo:

$$x = f^{-1}(y) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

### 2.2.9 Função Logarítmica

Analisando a função  $f(x) = \log_a x$ , onde  $x > 0$  e  $0 < a \neq 1$ , determina-se a derivada  $f'(x)$  da seguinte forma:

Sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Já vimos que:

$$x = a^y \Rightarrow x' = a^y \cdot \ln a$$

substituindo o valor de  $x = a^y$ , vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

logo:

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

no caso particular em que  $a = e$ , temos:

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

### 2.2.10 Função Potência de expoente real

Considerando a função  $f(x) = x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$  e  $n \in \mathbb{R}$ , a derivada  $f'(x)$  pode ser determinada do seguinte modo:

$$f(x) = x^n$$

sendo  $f(x) > 0$  para todo  $x$  real positivo, podemos escrever:

$$\ln f(x) = \ln x^n$$

do estudo dos logaritmos, vem:

$$\ln f(x) = n \cdot \ln x$$

derivando os dois membros da igualdade, isto é, aplicando derivação implícita, temos:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = n \cdot \frac{1}{x} \text{ e, sendo } f(x) = x^n:$$

$$\frac{f'(x)}{x^n} = \frac{n}{x} \Rightarrow f'(x) = n \cdot \frac{x^n}{x} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}, x \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } n \in \mathbb{R}$$

exemplo:

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

*Prova:* Aplicando logaritmo a ambos os membros, temos:

$\ln f(x) = \ln x^{\sqrt{2}} \Rightarrow \ln f(x) = \sqrt{2} \cdot \ln x$ , derivando em ambos os membros a igualdade, teremos:

$$f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$f'(x) = \sqrt{2} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{x}$ , substituindo  $f(x)$  por  $x^{\sqrt{2}}$ , temos:

$$f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}} \cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

*PROVA PELA DEFINIÇÃO DE DERIVADAS*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\sqrt{2}} - 1 \right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\sqrt{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\sqrt{2}} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\sqrt{2}} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

Para  $\Delta x$  suficientemente pequeno temos que  $\left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \frac{\Delta x}{x}$

substituindo essa igualdade, teremos:

$$= x^{\sqrt{2}-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{2} \frac{\Delta x}{x} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

### 2.2.11 Variação das funções

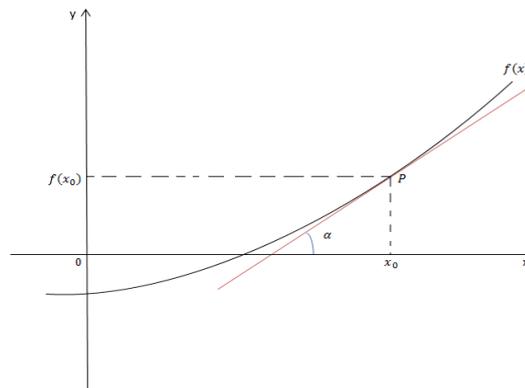
- Função crescente e decrescente

Considerando a função  $y = f(x)$  contínua e derivável num intervalo  $A$ , e um ponto genérico  $P(x_0; f(x_0))$  do seu gráfico,  $x_0 \in A$  e lembrando que o valor da derivada nesse ponto é dado pelo coeficiente angular da reta  $t$ , tangente à curva que representa essa função, no ponto de abscissa  $x_0$ , temos:

1º caso:

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$        $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0 \Leftrightarrow f(x)$  é crescente em  $A$ . Veja a figura 08 :

FIGURA 08 - FUNÇÃO CRESCENTE

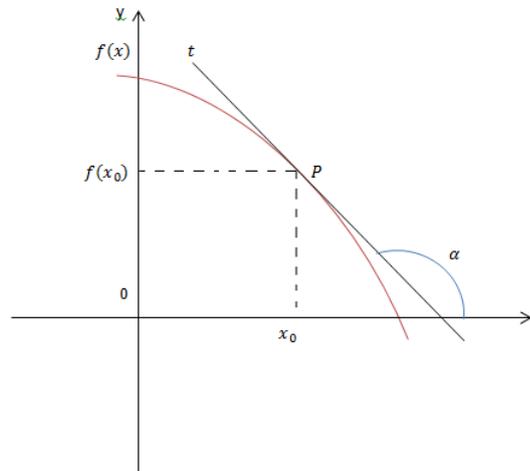


(Fonte: Bucchi.p:309)

2º caso:

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$   $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0 \Leftrightarrow f(x)$  é decrescente em  $A$ . Veja figura 09 :

FIGURA 09 - FUNÇÃO DECRESCENTE



(Fonte: Bucchi.p:310)

- Extremos de uma função

Considerando as funções representadas nos gráficos da figura 10, temos que a reta  $t$ , tangente a esses gráficos no ponto de abscissa  $x_0$ , é paralela ao eixo  $x$ , portanto:

1º caso:  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$     2º caso:  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$

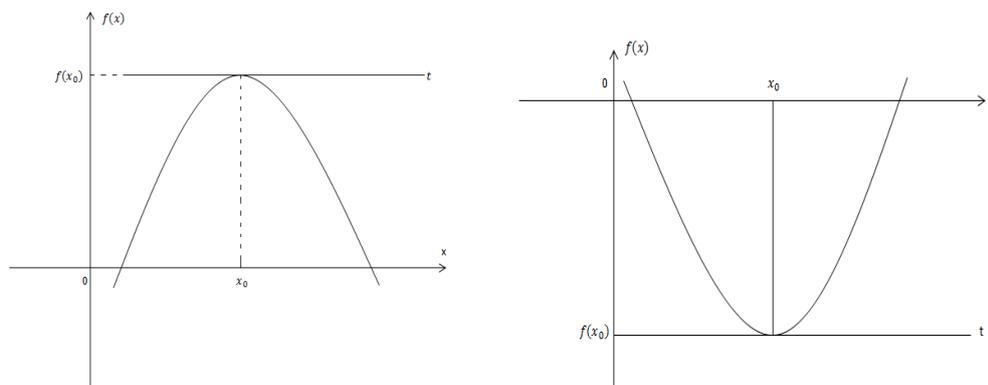
No caso de ponto de máximo relativo, temos, resumidamente:

se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$ , então  $x_0$  é o ponto de máximo relativo da função  $f(x)$ .

No caso de ponto de mínimo relativo, temos, resumidamente:

se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ , então  $x_0$  é o ponto de mínimo relativo da função  $f(x)$ .

FIGURA 10 - FUNÇÕES DE 2º GRAU



(Fonte: Xavier&amp;Barreto.p.267 com Geogebra)

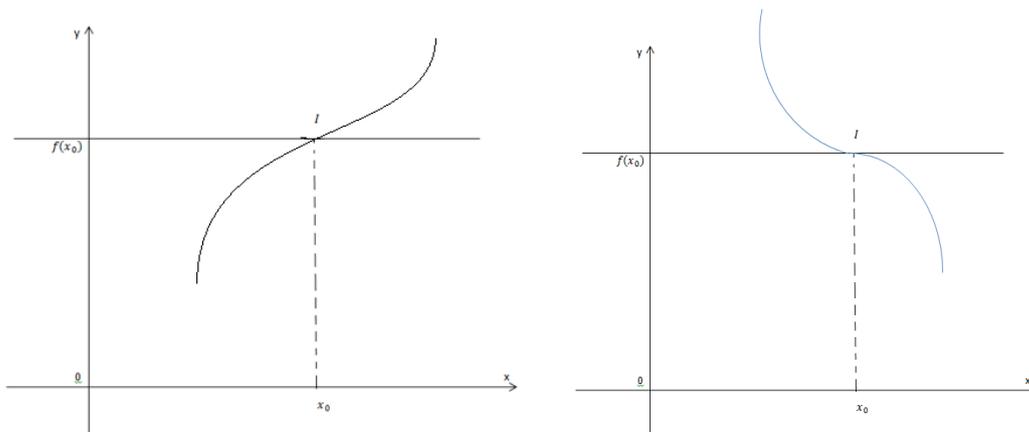
- Ponto de inflexão horizontal

Seja  $f(x)$  uma função derivável em um intervalo  $J$  e  $x_0$  um valor desse intervalo.

Dizemos que um ponto  $I(x_0, f(x_0))$  corresponde a um **ponto de inflexão horizontal**, se tivermos:

- $f'(x_0) = 0$
- $f'(x)$  com sinal positivo (ou negativo) imediatamente à esquerda e imediatamente a direita de  $x_0$ .

FIGURA 11 - FUNÇÃO CONTÍNUA



(Fonte: Bucchi.p:313)

### 2.2.12 Aplicações das Derivadas

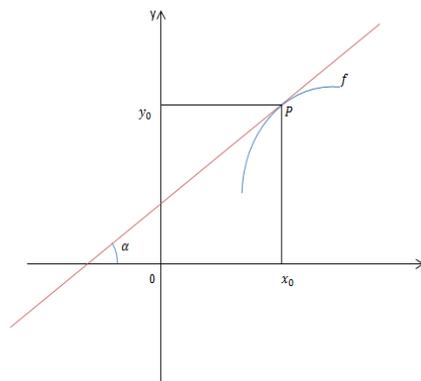
- Equação da reta tangente a uma curva

A existência de  $f'(x_0)$  significa que o gráfico de  $f$  admite uma reta tangente à curva no ponto  $(x_0; y_0)$ , de coeficiente angular  $f'(x_0)$ .

Assim, a equação dessa reta tangente é dada por:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

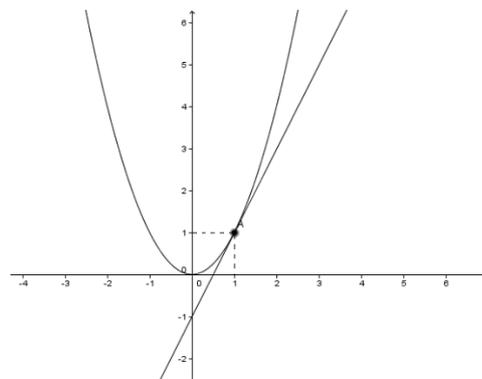
- FIGURA 12 - FUNÇÃO CONTINUA NO PONTO P



(Fonte: Bucchi.p:306)

Como exemplo temos, em Bucchi (p.307). Encontrar a equação da reta tangente à parábola  $f(x) = x^2$  no ponto A (1,1), utilizou-se o gráfico da figura 13:

FIGURA 13 - FUNÇÃO DE 2º GRAU



(Fonte: Bucchi.p:307 com Geogebra)

temos:  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 1$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 2$$

então, vem:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

Portanto,  $2x - y - 1 = 0$  é a equação da reta tangente à parábola  $f(x) = x^2$  no ponto P(1,1).

### 2.2.13 A derivada e a cinemática

A palavra Cinemática é derivada do grego (*κίνημα*, movimento) é o ramo da física que se ocupa da descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com a análise de suas causas (Dinâmica).

Interpretando a derivada do ponto de vista da cinemática, que estuda o movimento dos corpos. Veremos que a velocidade e a aceleração de um corpo podem ser determinadas através das derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, quando conhecemos a função horária do movimento do corpo.

Bucchi (p.308) exemplifica da seguinte forma:

Ubatuba, litoral norte de São Paulo, distante 228 km da capital. Supondo que alguém fosse a umas das praias dessa cidade, partindo da capital paulista, e levasse 3 horas para chegar lá, qual teria sido a velocidade média do veículo nesse percurso?

A cinemática mostra da seguinte forma:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{228}{3} \Rightarrow v_m = 76 \text{ km/h}$$

Entretanto, isso não significa que o carro fez todo percurso com essa mesma velocidade, pode ter variado para mais ou menos.

Usando o raciocínio de tempo podemos ainda calcular o intervalo de tempo  $\Delta t$ , tendendo a zero até chegarmos a uma velocidade denominada velocidade instantânea ( $v$ ). A velocidade  $v$  é o limite da velocidade média, quando  $\Delta t$  tende a zero. Ou seja:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m \quad \text{ou} \quad V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ao utilizarmos o conceito de derivada, em cada instante  $t_0$ , a velocidade do carro é igual à derivada de  $S$ , isto é:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Para a aceleração instantânea  $\alpha$ , temos  $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , ou seja:

$$\alpha(t_0) = v'(t_0)$$

#### 2.2.14 Problemas sobre máximos e mínimos

O ponto de máximo e o ponto de mínimo de uma função podem ser atribuídos a várias situações presentes em outras ciências, como na Física (movimento uniformemente variado, lançamento de projéteis), na Biologia (na análise do processo de fotossíntese), na Administração (Estabelecendo pontos de nivelamento, lucros e prejuízos) entre outras. Nos trabalhos de Pierre de Fermat, ele inventou uma maneira na qual se podia determinar tanto máximos como mínimos, esse processo dizia, de acordo com Eves (2011, p.429)

Se  $f(x)$  tem um máximo ou um mínimo comum em  $x$  e se  $e$  é muito pequeno, então os valores de  $f(x - e)$  é quase igual ao de  $f(x)$ . Portanto, pode-se experimentar fazer  $f(x - e) = f(x)$  e para tornar essa igualdade correta, impor que  $e$  assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de  $x$  para os quais  $f(x)$  assume um máximo ou um mínimo.

*EXEMPLOS:*

- Dividir o número 30 em duas partes de modo que o seu produto seja máximo.

*RESOLUÇÃO*

Sejam  $x$  e  $z$  cada uma das partes do número 30. Então:

$$x + z = 30 \Rightarrow z = 30 - x$$

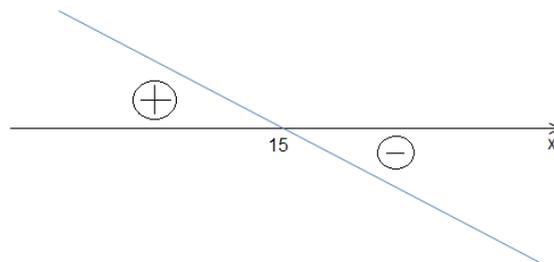
chamando de  $y$  o produto dessas duas partes, vem:

$$y = x.z \Rightarrow y = x(30 - x) \Rightarrow 30x - x^2$$

derivando essa última função, obtemos  $y' = -2x + 30$ .

Fazendo  $y' = 0$ , vem :  $-2x + 30 = 0 \Rightarrow x = 15$ . Veja a figura 14.

FIGURA 14 - FUNÇÃO DO 1º GRAU



(Fonte: Bucchi.p:315)

a abscissa  $x = 15$  é um ponto máximo. Daí:

$$z = 30 - 15 \Rightarrow z = 15$$

portanto, o produto máximo para  $x = 15$  e  $z = 15$ .

- Entre os retângulos de área igual a  $64 \text{ m}^2$ , qual é o que tem perímetro mínimo?

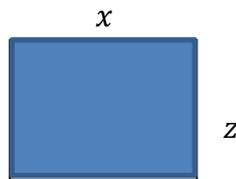
*RESOLUÇÃO*

Seja  $y$  o perímetro do retângulo procurado. Então:  $y = 2x + 2z$  \*

a área é dada por  $x \cdot z = 64$ . Daí:  $z = \frac{64}{x}$  \*\*

substituindo \*\* em \*, obtemos:

$$y = 2x + 2z \Rightarrow y = 2x + 2 \cdot \frac{64}{x} \Rightarrow y = 2x + \frac{128}{x}$$



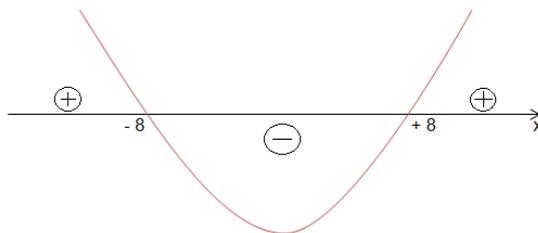
Fazendo  $y' = 0$ , temos:

$$2 - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{128}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ \text{ou} \\ x = 8 \end{cases}$$

observe que o valor  $x = -8$  não serve como solução por se tratar de comprimento de um segmento.

Visualizando graficamente na figura 15, vem:

FIGURA 15 - FUNÇÃO DE 2º GRAU



(Fonte: Bucchi.p:315)

como  $x_{\text{mín}} = 8$ , então, de  $xz = 64$  obtemos  $z = 8$

Portanto, o retângulo de perímetro mínimo é um quadrado cujos os lados medem 8m.

2.2.14.1 APRESENTAREMOS ALGUNS PROBLEMAS QUE PODEM SER APLICADOS A NÍVEL DE ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A DERIVADA.

- 1- Cortando-se um pequeno quadrado de cada canto de uma cartolina de 10 cm de lado, deseja-se construir com a cartolina restante, dobrada convenientemente, uma caixa de volume máximo. Determine esse volume.
- 2- A função horária de um corpo lançado verticalmente para cima é dada por  $h = 8t - 5t^2$ , sendo  $h$  a altura, medida em metros, em  $t$  o tempo medido em segundos. Determine altura máxima atingida pelo corpo.
- 3- A equação horária do movimento de um ponto material é dada por:  
 $S = 5t^2 - 3t + 2$ , no SI. Determine a velocidade e a aceleração desse ponto material no instante  $t = 4s$ .
- 4- Divida um segmento de 10 cm de comprimento em duas partes, de modo que a soma dos quadrados dos comprimentos seja mínima.
- 5- Um arame de 36 cm de comprimento deve ser cortado em dois pedaços, um dos quais será torcido de modo a formar um quadrado e o outro, a formar um triângulo equilátero. De que modo deverá ser cortado para que a soma das áreas das regiões limitadas pelas figuras obtidas seja mínima?
- 6- Se  $x$  e  $y$  são reais tais que:  $3x + 4y = 12$ , determine o valor mínimo de  $z = x^2 + y^2$ .
- 7- Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais deve ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?
- 8- A parábola de equação  $y = -2x^2 + bx + c$  passa pelo ponto  $(1,0)$  e seu vértice é o ponto de coordenadas  $(3,v)$ . Determine  $v$ .
- 9- Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.
- 10- Dentre todos os números reais  $x$  e  $z$  tais que  $2x + z = 8$ , determine aqueles cujo produto é máximo.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa consistiu em mostrar de forma clara e precisa a importância da aplicabilidade do Cálculo diferencial para o desenvolvimento das ciências e para o avanço da matemática, principalmente quando os assuntos são abordados para os alunos do Ensino Médio. Visto que, esses são os maiores prejudicados ao iniciarem uma faculdade que necessitem de conhecimentos matemáticos na área de Cálculo.

Destacamos como se deu o processo histórico, que constituiu o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral ao longo dos anos e a presença nas escolas básicas do Brasil. Essa construção histórica nos mostrou que o avanço da educação matemática seria uma estratégia de abordagem usada na construção do conhecimento do ser humano sobre a história do Cálculo.

Através da pesquisa podemos observar que o assunto era abordado apenas nas escolas militares e em Institutos Federais, nas regiões do Brasil que têm maior poder econômico, enquanto que nas regiões menos desenvolvidas o mesmo não era abordado, pois este conteúdo encontra-se no final dos livros didáticos, e a maioria dos professores não consegue chegar ao mesmo. Isso se deve ao fato de que a quantidade de aula vem sendo reduzida a cada ano. Por isso o conteúdo é visto de maneira superficial em sala de aula. Sugerimos para nossa região que seja devolvidas as aulas que foram tiradas ou que sejam implantado mais um ano letivo para o ensino médio, ou seja, ter um quarto ano. Só assim o aluno teria o melhor desenvolvimento sobre as noções de limites e derivadas. Constatamos ainda que existem preocupações por parte de alguns estudiosos com os altos índices de reprovação na disciplina e tentam propor algumas alternativas metodológicas para abordagem do tema. A nossa intenção não é mudar os currículos com tudo isso e sim refletir sobre algumas ideias de apoio ao ensino do cálculo de uma forma que venha nos trazer retorno quando esses alunos ingressarem em uma Universidade e que necessitem de tais saberes.

## REFERÊNCIAS

- ANTAR NETO, Aref. Noções de Matemática. Vol. 8. Fortaleza: Editora Vestseller. 2011.
- AVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.
- BARBOSA, M. A. **O Insucesso no Ensino Aprendizagem na Disciplina de Cálculo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.
- BARDI, Jason Sócrates. **A guerra do cálculo**; tradução de Aluizio Pestana da Costa. 2º Ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2010.
- BOULOS, P. **Pré- Cálculo**. São Paulo: Makron Books, 1999.
- BUCCHI, Paulo. Curso prático de Matemática. Livro do Professor. 1 ed. Ed. Moderna, 2005.
- EVES, Howard. Introdução à história da matemática; tradução Hygino H. Domingues. 5º Ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio da Língua Portuguesa dicionário**. 7 ed. Curitiba: ed. Positivo.2008.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática elementar. Vol 8. São Paulo: Saraiva. 2005.
- MINAYO, M. C. de S. (Org) Pesquisa social: teoria, método e criatividade. 22 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2003.
- MOAR, Eli. **E**: A história de um número. Tradução de calife. Rio de Janeiro.
- REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. São Paulo, 2003. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, USP.
- SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula**/ Cláudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho. 2 ed. Renov. – São Paulo: FTD, 2005. (Coleção matemática aula por aula)

## APÊNDICE

Apresentaremos as soluções de todos os problemas propostos:

1° - *Resolução*

Ao suprimir os pequenos quadrados dos cantos, as dimensões da caixa serão:

$$x, (10 - 2x) \text{ e } (10 - 2x)$$

logo, seu volume é dado por:

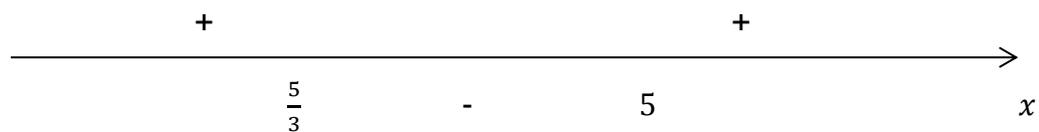
$$\begin{aligned} V(x) &= (10 - 2x)^2 \cdot x \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x) &= 4x^3 - 40x^2 + 100x \end{aligned}$$

para determinar o volume máximo, devemos derivar a função  $v(x)$ :

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100$$

fazendo  $V'(x) = 0$ , vem:

$$12x^2 - 80x + 100 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases}$$



Sendo  $x_{m\acute{a}x} = \frac{5}{3}$ , vamos substituí-lo em  $V(x)$  para determinar o volume máximo, assim:  $V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x \Rightarrow V_{m\acute{a}x} = \left(10 - 2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{m\acute{a}x} = \left(10 - \frac{10}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow V_{m\acute{a}x} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{400}{9} \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow V_{m\acute{a}x} = 74,07$$

portanto, o volume máximo da caixa é 74,07 cm<sup>3</sup>.

### 2° - Resolução

Derivando a função horária do corpo, temos:

$$h'(t) = 8 - 10t$$

para determinarmos a altura máxima, devemos fazer,  $h'(t) = 0$

$8 - 10t = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{5}s$ . Substituindo esse valor na função horária de  $h$ , temos:

$$h_{\text{máx}} = 8 \cdot \frac{4}{5} - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{32}{5} - 5 \cdot \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$h_{\text{máx}} = \frac{16}{5} = 3,2$$

portanto a altura máxima é  $h = 3,2m$ .

### 3° - Resolução

Derivando a função horária do movimento teremos a função da velocidade.  $V(t)$

$$S' = v(t) = 10t - 3$$

substituindo o valor de  $t = 4s$ , temos:

$$V = 10 \cdot 4 - 3 \Rightarrow v = 40 - 3 = 37m/s$$

derivando a função  $v(t)$ , teremos a função da aceleração.

$$A(t) = v'(t) = 10m/s^2 \text{ Aceleração é constante}$$

portanto a velocidade é  $37m/s$  e a aceleração é  $10m/s^2$

### 4° - Resolução

Chamando uma das partes de  $x$ , a outra será  $10 - x$ , assim a função da soma dos quadrados é:

$$S = x^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow S = 2x^2 - 20x + 100$$

derivando a função  $s$ , temos:

$$S' = 4x - 20 \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 4x - 20 = 0 \Rightarrow x = 5$$

portanto, os comprimentos devem medir 5cm cada.

### 5° - Resolução

Chamando um pedaço do arame de  $x$ , o outro será  $36 - x$ , sendo assim, temos:

Formando com o pedaço de arame de comprimento  $x$  o triângulo equilátero, temos que cada lado do triângulo mede  $\frac{x}{3}$ , conseqüentemente o lado do quadrado será  $\frac{36-x}{4}$ . Portanto a sua função da soma das áreas será:

$$S = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{(36-x)^2}{16} \Rightarrow S' = \frac{x\sqrt{3}}{18} + \frac{2 \cdot (36-x)}{16} \cdot (-1)$$

$$S' = \frac{x\sqrt{3}}{18} + \frac{x-36}{8} = 0 \Rightarrow 4x\sqrt{3} + 9x - 324 = 0$$

$$x = \frac{324}{4\sqrt{3}+9}$$

assim o outro pedaço será:

$$\frac{144\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$$

portanto os dois pedaços de arame devem medir:

$$\frac{324}{4\sqrt{3}+9} \text{ cm e } \frac{144\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \text{ cm}$$

### 6° - Resolução

Isolando o valor de  $y$  na equação, temos:  $y = \frac{12-3x}{4}$ , substituindo em  $Z$ , temos:

$$Z = x^2 + \left(\frac{12-3x}{4}\right)^2$$

$$Z' = 2x + 2 \cdot \left(\frac{12-3x}{4}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) \Rightarrow Z' = 2x - \frac{3 \cdot (12-3x)}{8}$$

igualando a função derivada a zero, temos:

$$16x - 36 + 9x = 0 \Rightarrow 25x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{25} \Rightarrow x = 1,44$$

substituindo esse valor na função de  $y$ , temos:

$$y = \frac{12 - 3 \cdot \frac{36}{25}}{4} \Rightarrow y = \frac{192}{100} \Rightarrow y = 1,92$$

portanto o valor mínimo de  $z$ , será:  $Z = 5,76$

7° - *Resolução*

Chamando a largura de  $x$  e o comprimento de  $80 - 2x$ , a função da área será:

$$S = (80 - 2x) \cdot x \Rightarrow S = -2x^2 + 80x$$

derivando a função  $S$ , temos:

$$S' = -4x + 80 = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{4} \Rightarrow x = 20$$

portanto as medidas devem ser 20m de largura por 40m de comprimento.

8° - *Resolução*

Derivando a função  $y$ , temos:

$$Y' = -4x + b \Rightarrow Y' = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{4}$$

como esse valor é o vértice da parábola, temos:

$$\frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$$

substituindo o valor  $x = 1$  e  $y = 0$  função, temos:

$$0 = -2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + C \Rightarrow C = -10$$

substituindo o vértice na função, temos:

$$V = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 10 \Rightarrow V = 8$$

9° - *Resolução*

A área do retângulo é dada por:  $S = y \cdot (4 - 2x)$ .

Tomando a proporção entre a altura do retângulo, a altura do triângulo equilátero,  $x$  a largura do triângulo retângulo formado dentro do triângulo equilátero, e a metade do lado do mesmo, temos:

$$\frac{y}{h} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{y}{\frac{4\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = x \cdot \sqrt{3}$$

substituindo esse valor, na expressão da área, temos:

$$S = x\sqrt{3} \cdot (4 - 2x) \Rightarrow S = -2\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow S' = -4\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1$$

logo,  $y = \sqrt{3}$ , portanto o retângulo deve ter  $2\text{cm}$  de comprimento e  $\sqrt{3}\text{cm}$  de largura.

### 10° - Resolução

Isolando o valor de  $z$  na igualdade, temos:

$$Z = 8 - 2x$$

a expressão do produto, entre  $x$  e  $z$  é:

$$P = x \cdot z$$

substituindo o valor de  $z$ , temos:

$$P = x \cdot (8 - 2x) \Rightarrow P = -2x^2 + 8x \Rightarrow P' = -4x + 8 \Rightarrow -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

logo:

$$Z = 8 - 2 \cdot 2 \Rightarrow Z = 4$$

portanto os números são, 2 e 4.