UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Divisibilidade no Ensino Fundamental: uma proposta de abordagem usando questões da OBMEP

Jefson Glowascki da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Março de 2020.

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JEFSON GLOWASCKI DA SILVA

DIVISIBILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM USANDO QUESTÕES DA OBMEP

Maceió – AL
2020

JEFSON GLOWASCKI DA SILVA

DIVISIBILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM USANDO QUESTÕES DA OBMEP

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador (a): Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos

Maceió – AL
2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586d Silva, Jefson Glowascki da.
Divisibilidade no ensino fundamental : uma proposta de abordagem usando questões da OBMEP / Jefson Glowascki da Silva. - 2020.
90 f. : il.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 64-69.
Apêndices: f. 70-90.

1. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. 2. Divisibilidade. 3. Teoria dos números. 4.Sequência didática. I. Título.

CDU: 372.851.271.2

Folha de Aprovação

JEFSON GLOWASCKI DA SILVA

Divisibilidade no Ensino Fundamental: uma proposta de abordagem usando questões da OBMEP

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 25 de março de 2020.

Viviane Oliveira

____

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL (orientadora)

Banca Examinadora:

Gregório Manoel da Silva Neto

____

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto – UFAL (Examinador Interno)

Márcio Silva Santos

____

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB (Examinador Externo)

Dedico esse trabalho a Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo ao nosso Senhor Deus, por estar comigo em todos os momentos me dando a força necessária para continuar e nunca desistir.

Aos meus pais Marilene Geci Glowascki da Silva e José Pedro da Silva (em memória) pela educação e ensinamentos proporcionados. Por não terem deixado me faltar nada, se esforçando ao máximo para que tivéssemos o pão de cada dia à mesa.

À minha esposa Daniela Souza de Freitas e minhas filhas Tarcila Laís Freitas Glowascki e Andréia Beatriz Freitas Glowascki, por serem, não só em minha vida, como durante o curso, minha base e a razão de sempre persistir em meus objetivos e de concluí-los.

Aos amigos de turma, especial Claudio Tomé, Humberto, Herivelton e Sara, que no transcorrer das aulas foram essenciais e importantes para chegar até aqui.

Agradeço a minha orientadora, Viviane de Oliveira Santos, pela paciência, dedicação e ensinamentos que auxiliaram na realização desse trabalho.

Agradeço por fim aos professores do Profmat-Ufal pela contribuição em minha formação durante o curso.

“Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja,

que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

"Se não consegues entender que o céu deve estar dentro de ti,

é inútil buscá-lo acima das nuvens e ao lado das estrelas”.

Charles Chaplim

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma abordagem do conteúdo de divisibilidade no Ensino Fundamental focando na resolução de problemas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) Nível 1, com principal objetivo de mostrar ser possível que um número maior de alunos tenha contato com questões de tal tipo, podendo estimular e promover uma melhoria na qualidade da Educação Básica. Inicialmente é feita uma abordagem sobre Olimpíadas Matemáticas no Brasil. Em seguida, aborda-se alguns conceitos e propriedades elementares da Teoria dos Números e discuti-se sobre o Ensino Tradicional e Ensino Inovador, alicerçados nas ideias de alguns autores. Por fim, é apresentada uma proposta de sequência didática, a qual foi o alvo principal de nossa pesquisa.

Palavras-chave: OBMEP. Divisibilidade. Teoria dos Números. Questões. Sequência didática.

ABSTRACT

This paper presents an approach to the content of divisibility in Elementary Education focusing on problem solving in the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP) Level 1, with the main objective of showing that it is possible that a larger number of students have contact with questions of such type, being able to stimulate and promote an improvement in the quality of Basic Education. Initially an approach is made about Mathematical Olympics in Brazil. Then, some basic concepts and properties of Number Theory are approached and traditional and innovative teaching are discussed, based on the ideas of some authors. Finally, a didactic sequence proposal is presented, which was the main target of our research.

Keywords: OBMEP. Divisibility. Number Theory. Questions. Following teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCN – Diretizes Curiculares Nacionais

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

Q1 – Questionário 1

Q2 – Questionário 2

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, buscou-se fazer uma abordagem do conteúdo de divisibilidade no Ensino Fundamental, fazendo uso de uma proposta focada na resolução de problemas da OBMEP (Nível 1), tendo como objetivo principal aumentar o número de alunos em contato com questões de tal tipo, podendo com isso estimular e promover uma melhoria na qualidade da Educação Básica.

A pesquisa está dividida em quatro partes, com introdução e considerações finais. Na primeira parte, intitulada como Olimpíadas de Matemática no Brasil, foi feita uma análise explicativa e histórica sobre o tema. Ele foi subdividido em O que é uma Olimpíada de Matemática? (apresentando uma definição), em História da Olimpíada de Matemática no Brasil (mostrando de modo resumido como iniciou a história da Olímpiada Brasileira de Matemática) e em História da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) (mostrando como surgiu a OBMEP e como está atualmente).

Na segunda parte, com o título de Conceitos Elementares da Teoria dos Números, são abordadas definições e propriedades elementares referentes à relação de divisibilidade no conjunto dos números inteiros, oferecendo uma base teórica de nossa pesquisa para que o leitor possa utilizá-lo se for necessário.

Na terceira parte, com título de Ensino Tradicional e Ensino Inovador, é feita uma análise teórica sobre os dois métodos de ensino, oferecendo assim um suporte para o capítulo seguinte. Foi utilizado para essa análise, ideias e pensamentos de alguns autores como: Mizukami (1986), Freire (1979), Franco (1991), Rodrigues, Moura e Testa (2011), Leão (1999) e Wagner (2009).

Na quarta parte foi feita a aplicação da Proposta de Sequência Didática, alvo principal de nossa pesquisa. Nela foi feita uma atividade em que no primeiro momento aplicou-se um questionário, chamado de Q1, sendo utilizado para uma análise prévia quanto a aprendizagem do conteúdo de múltiplos e divisores visto no sexto ano do Ensino Fundamental. No desenvolvimento da atividade, foi feita a preparação das duas turmas analisadas (7° ano A e B da Escola José Gomes Lima, situada no município de Água Branca - AL), sendo que na turma A foi usado o método de ensino inovador, com uso de computador (Portal do Saber da OBMEP) e do Smartphone (aplicativos de celular que envolvem o conteúdo), e na turma B foi usado o método de ensino tradicional, fazendo uso de quadro e caderno. Em seguida, foi aplicado o segundo questionário, na etapa Pós Teste, sendo também dispostos os resultados quanto ao número de acertos por aluno e por questão em cada turma.

Por fim, temos as considerações finais acerca deste trabalho, mostrando a partir das análises feitas na Proposta de Sequência Didática, qual método adotado foi o mais efetivo de acordo como objetivo adotado.

2 OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

2.1 O que é uma Olimpíada de Matemática?

As Olimpíadas de Matemática podem ser definidas como uma competição equivalente às esportivas e, assim como toda competição, tem sua preparação específica, na qual os atletas são os alunos e seus técnicos são os professores. Essa preparação dos atletas consiste na solução de problemas de Matemática individual ou em grupo. Eles treinam com o objetivo de desenvolver a habilidade lógica, criatividade e sociabilidade, bem como desenvolver bons métodos de pensamento e de trabalho.

2.2 História da Olimpíada Matemática no Brasil

No Brasil, segundo o Portal do Ministério da Educação e Cultura (2005), a primeira olimpíada de matemática realizada no Brasil foi a Olimpíada Paulista de Matemática, realizada em 1977 pela Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Dois anos mais tarde surgiu a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A OBM, em conjunto com as Olimpíadas Regionais de Matemática, envolve anualmente a participação de cerca de 200 mil estudantes no Brasil, segundo site da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM (2015). Esse envolvimento da OBM com as Olimpíadas Regionais de Matemática tem como objetivo selecionar os alunos que vão representar o Brasil nas diversas Olimpíadas Internacionais (Internacional, IberoAmericano etc.) que são disputadas. A OBM teve vários formatos ao longo dos anos. De 1979 até 1989, de acordo com o site da OBM (2019), era disputada em uma única fase (uma prova contendo cinco ou seis questões discursivas) e não era separada por níveis, fazendo com que seus premiados fossem todos do Ensino Médio (na época chamava-se de segundo grau). Em 1990, a OBM passou a ser realizada em duas fases (uma primeira fase em 20 ou 25 questões discursivas) e em dois níveis: OBM Sênior (alunos do Ensino Médio) e OBM Jr. (alunos do Ensino Fundamental, menos alunos da 5ª série).

A partir do ano de 1998, houve outras alterações no formato da Olimpíada Brasileira de Matemática, e esta ficou bastante diferente da que vinha sendo praticada nos últimos anos. Isto porque passou a atingir os alunos desde a 5ª série do Ensino Fundamental. Em 1999 a prova do nível 2 passou a ser realizadas em dois dias na fase final e em 2001 é criado o nível universitário com duas fases (OBM, 2019). Ainda de acordo com o site da OBM (2019), “a OBM se integra a OBMEP realizando apenas a fase única para os níveis 1, 2 e 3, mantendo o nível universitário realizado em duas fases”.

Segundo a Revista Eureka (1998),

> A OBM era principalmente um instrumento para detectar talentos e desenvolvê-los, mas agora tem também por objetivo promover em âmbito nacional a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, com o desenvolvimento conjunto de alunos e professores. A Olimpíada Brasileira de Matemática, desde 1998, deixou de ser apenas uma competição para ser um novo método de auxílio ao ensino no Brasil.

2.3 História da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Segundo o site da OBMEP (2019), a primeira OBMEP foi lançada oficialmente no dia 19 de maio de 2005, em Brasília, pelo presidente da República e os ministros da Ciência e Tecnologia e da Educação. Essa 1ª competição mobilizou escolas públicas de todo o país, pois 10,5 milhões de jovens inscreveram-se. Ainda segundo o mesmo site, observa-se através dos números de inscritos que esse evento é um dos maiores do gênero no mundo, superando em número de inscrição da Olimpíada de Matemática realizada nos Estados Unidos, que reúne em média 6 milhões de alunos a cada ano. A OBMEP é uma competição de iniciativa inédita porque é direcionada especificamente às escolas públicas de todo o país, sendo também atualmente para as escolas privadas.

> A Olimpíada de Matemática é um canal de inclusão social, uma vez que propicia o descobrimento de talentos, inclusive entre os mais carentes, gente que nunca teve uma oportunidade, e que agora passam a dispor dos meios mínimos para avançar numa carreira com melhores perspectivas (Cf. Jornal C&T, 2005, p. 4)

A OBMEP, de acordo com seu portal, tem servido como grande incentivo ao estudo da Matemática e também para uma maior reflexão sobre a educação pública em nosso país, além de propiciar a aproximação entre universidades públicas, institutos de pesquisa e sociedades científicas com as escolas públicas, bem como o envolvimento das Secretarias Estaduais e Municipais de Educação e de Ciência e Tecnologia, cujo apoio vem sendo fundamental para o sucesso do projeto. Os estudantes que participam deste evento vêm tanto dos grandes quanto dos pequenos centros, de zonas rurais, de comunidades indígenas, comunidades remanescentes de quilombolas e assentamentos. Também participam deficientes visuais, auditivos e motores. A OBMEP é promovida pelo governo federal, por meio dos Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e do Ministério da Educação (MEC), e realizada pelo Instituto de Matemática Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Este trabalho tem com um dos seus objetivos valorizar os estudantes e os professores, assim como suas escolas, suas cidades e seus estados.

Desde o início do projeto das olimpíadas, é possível notar uma participação expressiva do número de alunos a cada ano de competição, assim como seus resultados segundo o próprio portal da OBMEP. Como citado, a primeira Olimpíada de Matemática teve uma participação considerável, mostraremos então como vem se desenvolvendo essa competição desde a sua primeira edição, de 2005 até 2008.

De acordo com a OBMEP em números (2019), na 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, realizada 2005, inscreveram-se 10,5 milhões de alunos, superando a meta prevista que era de 5 milhões, alcançando 31 mil escolas de 5 mil municípios. Já a 2ª, em 2006, contou com mais de 14 milhões de estudantes em todo o país, representando um aumento de quase 35% em relação ao ano de 2005. Nesta edição, todos os estados brasileiros participaram, com mais de 32 mil escolas.

Em 2007, a 3ª OBMEP contou com 17.271.849 inscritos, representando um aumento de 22% em relação a 2006. Esta edição contou com a participação voluntária de 120 mil professores de matemática e de outras disciplinas em todo o País. Eles são os responsáveis pela aplicação e correção das provas da primeira fase da competição, e classificam para segunda fase apenas 5% dos alunos participantes. Na 4ª edição em 2008, foram inscritos 18.317.729 alunos, o que significa a participação de 10% da população brasileira. Esse número de inscritos representa um milhão a mais de participantes na olimpíada, em relação ao ano de 2007.

Na 4ª OBMEP, 40 mil escolas fizeram a inscrição (contra 38,5 mil escolas em 2007), o que significa a participação de 72% das escolas públicas do Brasil e adesão de 98,7% dos municípios brasileiros. Destaca-se dentre os estados participantes, o estado do Mato Grosso do Sul, onde 100% das escolas participaram do processo. A Olimpíada tem-se expandido. Desde 2005 ela tem alcançado cada vez mais participantes, chegando em 2012, a quase 20 milhões de alunos inscritos, representando cerca de 86% das escolas públicas entre as que oferecem os anos finais do ensino fundamental ou ensino médio no país. Em 2018 e 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada.

A Olimpíada acontecia sempre no mês de agosto, sendo realizada atualmente no mês de maio (primeira fase) e em agosto a segunda fase. É dividida em três níveis e duas etapas. A primeira parte deste evento é uma avaliação com questões de múltipla escolha para todos os participantes. Já a segunda etapa consiste na aplicação de uma prova discursiva para os aprovados na primeira. Os organizadores deste evento acreditam que a Matemática – assim como o esporte – não é apenas uma habilidade ou conhecimento técnico, e sim, que ela pode ser uma atividade integrada, de inclusão social, e uma oportunidade de desenvolvimento pessoal a que deve ter acesso o maior número de crianças e jovens (IMPA, 2019).

Dentre os muitos conteúdos que as questões da OBMEP abordam, o de divisibilidade é um dos principais. Seus conceitos são muito explorados em diversas questões dentro de todos os níveis da prova. Na sequência deste trabalho teremos a explanação de conceitos referentes a este conteúdo, bem como suas respectivas demonstrações.

3 CONCEITOS ELEMENTARES DA TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo serão abordadas definições e propriedades elementares referentes à relação de divisibilidade no conjunto dos números inteiros. Serão abordados também resultados básicos versando sobre máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e números primos. As demonstrações a seguir podem ser consultadas em Hefez (2014) e Vieira (2015). Esses conteúdos foram escolhidos porque aparecem nas questões da OBMEP utilizadas nesse trabalho e irão servir de suporte para que professores possam trabalhar com as mesmas em sala de aula.

3.1 Divisibilidade

Dados dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$, diremos que b divide a, escrevendo $b \mid a$ quando existir c tal que $a = bc$. Neste caso, diremos também que a **divisível** por b, que b é **divisor** de a ou ainda que a é um **múltiplo** de b.

Assim,

$$b \mid a \iff a = bc \text{ para algum } c \in \mathbb{Z}.$$

Caso b não divida a, indicaremos por $b \nmid a$. Por exemplo: $4|16$, $-7|28$ e $5 \nmid 13$.

Para um número inteiro a, indicaremos seu conjunto de divisores por D_a, e para $a \neq 0$, denotaremos seu conjunto de múltiplos positivos por M_a, ou seja,

$$D_a = \{n \in N : n \mid a\} \; e \; M_a = \{n \in N : a \mid n\}$$

É claro que $D_a = D_{-a} \; e \; M_a = M_{-a}$.

Teorema 3.1 *Quaisquer que sejam os números $a, b, c \; e \; d \in \mathbb{Z}$, temos*

$i)$ $a|a$.

$ii)$ Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

$iii)$ Se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.

$iv)$ Se $a|b \; e \; a|c$, então $a|(b + c) \; e \; a|(b - c)$.

$v)$ Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(mb + nc)$ $\forall \, m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. $i)$ Note que podemos escrever $a \cdot 1 = a$, logo, $a|a$.

$ii)$ Se $a|b$ e $b|c$, então existem $q_1 \; e \; q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = aq_1$ e $c = bq_2$. Substituindo o valor de b em c obtemos $c = a(q_1 q_2)$, ou seja, $a|c$.

$iii)$ Temos que $b = aq_1$ e $d = cq_2$. Multiplicando membro a membro, obtemos $bd = ac(q_1q_2)$, isto é, $ac|bd$.

$iv)$ Temos que $b = aq_1$ e $c = aq_2$. Assim, dados inteiros m e n temos $mb = amq_1$ e $nc = naq_2$, somando membro a membro obtemos $mb + nc = a(mq_1 + nq_2)$ e, portanto $a|(mb + nc)$.

■

3.2 Divisão Euclidiana

Axioma 3.1. (Princípio da Boa Ordenação – PBO) *Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então ele possui um menor elemento.* Como todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, então para o conjunto dos números naturais, o PBO se reduz à afirmação: todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Proposição 3.1. (Propriedade Arquimediana) *Se a e b são números naturais, então existe um número natural n tal que $na \geq b$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que a afirmação não seja verdadeira, assim para todo natural n, $na < b$. Logo, o conjunto

$$S = \{b - na : n \in \mathbb{N}\}$$

é formado apenas por números naturais. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui elemento mínimo, digamos $m = min(S)$. Como $m \in S$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = b - n_0a$. Por outro lado, o elemento $m_1 = b - (n_0 + 1)a$ pertence a S, pois S contém todos os elementos dessa forma. Além disso,

$$m_1 = b - (n_0 + 1)a = b - n_0a - a = m - a < m,$$

pois $a > 0$. Assim, $m_1 \in S$ e $m_1 < m$, o que contraria o fato de m ser o menor elemento de S.

■

Teorema 3.2. *Dados a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r, com\ 0 \leq r < |b|$$

Demonstração. Seja o conjunto

$$S = \{x = a - by;\ y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Existência:

Pela propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponhamos então que $r = a - bq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in N \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1)b$, com $s < r$.

Unicidade:

Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in Z, 0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$.

■

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão de 41 por 7 e o resto da divisão de -1243 e -4.

Solução: Como $41 = 7.5 + 6$ e $6 < 7$, então $q = 5 \; e \; r = 6$.

Para -1243 e -4, efetuamos a divisão natural de 1243 por 4. Posteriormente manipulamos a expressão de forma conveniente. Assim, como $1243 = 4.310 + 3$, então

$$\begin{aligned} -1243 &= 310 \cdot (-4) - 3 = 310 \cdot (-4) - 3 - 4 + 4 \\ &= (-4) \cdot (310 + 1) + 1 \\ &= (-4) \cdot 311 + 1, \end{aligned}$$

onde $q = 311$ e $r = 1$

3.3 Sistemas de Numeração

Desde os tempos antigos, sabe-se que a forma de representar números surgiu como um modo de contagem de animais ou de quaisquer bens. Para isso, é muito comum o uso de símbolos para designar quantidades, os quais eram inscritos em paus, tábuas, pedras etc (BOYER, 1991).

Quando um número natural é formado pelos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, dizemos que ele é escrito na *representação decimal.* Por exemplo, o número $a = 284301$ está na representação decimal, o qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$a = 2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1$$

Teoricamente, entretanto, poderíamos escolher uma base de numeração arbitrária, como demonstraremos a seguir:

Teorema 3.3. *Dados $a, b \in N$, com $b > 1$, existem únicos números naturais $r_0, r_1, \ldots, r_n$ tais que $0 \leq r_i \leq b - 1, 0 \leq i \leq n$, e satisfazendo*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

A representação acima é dita representação de a na base b e usaremos a notação

$$a = (r_n c_{n-1} \ldots r_1 r_0)_b,$$

para fazer referência a esta.

Demonstração. Apliquemos sucessivamente a divisão euclidiana como segue:

$$\begin{array}{ll} a = bq_0 + r_0, & r_0 < b, \\ q_0 = bq_1 + r_1, & r_1 < b, \\ q_1 = bq_2 + r_2, & r_2 < b, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ q_{j-1} = bq_j + r_j\,, & r_j < b, \end{array}$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{j-1}$, para algum $j = n$ deveremos ter que $q_{n-1} < b$. Logo, $q_j = 0$ para todo $j \geq n$, assim como $r_j = 0$ para todo $j \geq n + 1$. Das igualdades acima, para $1 \leq j \leq n$, tem-se

$$\begin{array}{c} a = bq_0 + r_0, \\ bq_0 = b^2 q_1 + br_1, \\ b^2 q_1 = b^3 q_2 + b^2 r_2, (*) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b^{n-1} q_{n-2} = b^n q_n + b^{n-1} r_{n-1} \\ b^n q_{n-1} = b^{n+1} 0 + b^n r_n. \end{array}$$

Efetuando a soma de todas as igualdades em $(*)$ obtemos

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

A unicidade dos números r_i vem da unicidade dos restos na divisão euclidiana.

■

3.4 Alguns Critérios de Divisibilidade

Definiremos a seguir alguns critérios de divisibilidade, onde teremos por base a representação decimal de um número natural dado, isto é: Todo número natural a se escreve na base decimal da forma

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0 \qquad (2.2)$$

Divisibilidade por 2

Demonstração. Como $r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b$ é uma soma na qual todas as parcelas são múltiplos de 2, segue de (2.2) que

$$2|a \Leftrightarrow 2|r_0 \Leftrightarrow r_0 \text{ é par,}$$

ou seja, 2 divide a se, e somente se, $r_0 = 0, 2, 4, 6$ e 8.

■

Assim um número inteiro é divisível por 2 se, e somente se, o último dígito for par.

Exemplo: $a = 565896$ é divisível por 2, já $b = 7784567$ não é.

Divisibilidade por 5 e 10

Demonstração. Como $r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b$ é uma soma na qual todas as parcelas são múltiplos de 5 e de 10, segue de (2.2) que

$$5|a \Leftrightarrow 5|r_0 \Leftrightarrow r_0 = 0 \text{ ou } r_0 = 5,$$

e

$$10|a \Leftrightarrow 10|r_0 \Leftrightarrow r_0 = 0.$$

■

Logo, um número é divisível por 5 se, e somente se, o último for 0 ou 5. Um número é divisível por 10 se, e somente se, o último dígito for 0.

Exemplo: $a = 673690$ e $b = 57695$ são divisíveis por 5, mas $c = 8856$ não é. $a = 3350$ é divisível por 10, porém $b = 34345$ não é divisível por 10.

Divisibilidade por 3 e 9

Demonstração. Os critérios por 3 e por 9 são os mesmos. Inicialmente mostremos

$$9|(10^n - 1), \text{ qualquer que seja } n \geq 0 \qquad (2.3)$$

Como $9|(10^0 - 1) = 0$, então o resultado é válido para $n = 0$. Supondo $10^n - 1 = 9k$, ou seja, $10^n = 9k + 1$, então

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 = 10^n \cdot 10 - 1 &= (9k + 1) \cdot 10 - 1 \\ &= 90k + 9 \\ &= 9(10k + 1), \end{aligned}$$

isto é, $9|(10^{n+1} - 1)$. Portanto, $9|(10^n - 1)$, para todo $n \geq 0$.

Agora, considerando $a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0$, temos

$$a - (r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0) = r_n(10^n - 1) + \ldots + r_1(10 - 1)$$

De acordo com (2.3), os termos à direita da última igualdade são sempre divisíveis por 9. Logo

$$a - (r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0) = 9k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se 9 divide a, então 9 divide $r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0$ (soma dos dígitos de a). Reciprocamente, se 9 divide $r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0$, então 9 divide a. De acordo com (2.3), também temos que

$$a - (r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0) = 3k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se 3 divide a, então 3 divide $r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0$ (soma dos dígitos de a). Reciprocamente, se 3 divide $r_n + r_{n-1} + \ldots + r_1 + r_0$, então 3 divide a.

■

Portanto, um número é divisível por 3 ou por 9 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por 3 ou por 9, respectivamente.

Exemplo: $a = 144$ e 34116 são divisíveis por 3, pois

$$1 + 4 + 4 = 9 \text{ e } 3 + 4 + 1 + 1 + 6 = 15$$

E o número $c = 1235$ não é divisível por 3, pois $1 + 2 + 3 + 5 = 11$. Do mesmo modo $a = 3402$ e 1809 são divisíveis por 9 e $c = 3241$ não é.

3.5 Máximo Divisor Comum

Definição 3.1. *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O máximo divisor comum (mdc) entre a e b é o número d que satisfaz as seguintes condições:*

$i)$ d é um divisor comum de a e b, isto é, $d|a$ e $d|b$;

$ii)$ Se c é um divisor comum de a e b, isto é, $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Assim, denotamos o mdc entre a e b por $d = mdc(a,b)$ ou $d = (a,b)$. Se $(a,b) = 1$, então dizemos que a e b são primos entre si ou relativamente primos.

Exemplo: Temos que os divisores de 18 são $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$ e os divisores de 12 são $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$. Assim o $mdc(12,18) = mdc(18,12) = 6$. Por outro lado, os divisores de 4 são $D_4 = \{1,2,4\}$ e os divisores de 15 são $D_{15} = \{1,3,5\ 15\}$, logo o $mdc(4,15) = 1$, assim os números 4 e 15 são primos entre si.

Observação: Dado um número inteiro b não nulo, temos:

$mdc(0,b) = |b|$;

$mdc(1,b) = 1$;

$mdc(b,b) = |b|$.

Teorema 3.4 *(Teorema de Bachet-Bézout). Se d é o máximo divisor comum de a e b, então existem números inteiros x_0 e y_0 tais que $d = (a,b) = ax_0 + by_0$.*

Demonstração.

Dados inteiros a e b, com $b \neq 0$. Considere o conjunto $I(a,b) = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$. É claro que existe em $I(a,\ b)$ um inteiro positivo. De fato, $|b| \in I(a,\ b)$. Seja $d = ax_0 + by_0$ o menor inteiro positivo em $I(a,\ b)$.

Afirmação. d divide todo inteiro $n \in I(a,\ b)$.

Dado $n = ax_1 + by_1 \in I(a,\ b)$, sejam $q,\ r \in \mathbb{Z}$ tais que $n = qd + r$ com $0 \leq r < d$. Temos então $n - qd = a(x_1 - qx_0) + b(y_1 - qy_0) = r \in I(a,\ b)$, de modo que, como d é o menor inteiro positivo em $I(a,\ b)$, obrigatoriamente $r = 0$.

Agora, como $a,\ b \in I(a,\ b)$ (basta escolher $(x,\ y) = (1,\ 0)$ e $(x,\ y) = (0,\ 1)$, respectivamente), temos que d divide a e b. Logo, $d \leq mdc(a,\ b)$.

Por outro lado, $mdc(a,\ b)$ divide a e b, de modo que $mdc(a,\ b)$ divide d. Portanto, $mdc(a,\ b) \leq d$ e, consequentemente, $mdc(a,\ b) = d$.

$\blacksquare$

Exemplo:

$$mdc(18,4) = 2 = 1 \cdot 18 + (-4) \cdot 4 = (-1) \cdot 18 + 5 \cdot 4$$

3.6 Algoritmo de Euclides

Apesar de conhecermos propriedades teóricas do máximo divisor comum entre dois inteiros, para encontrar seu respectivo mdc não é uma tarefa das mais fáceis, para isso utilizaremos de um método descoberto por Euclides, chamado de Algoritmo de Euclides (BOYER, 1991).

Lema 3.1 (Lema de Euclides). *Se $a = bq + r$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.*

Demonstração: Basta mostrar que $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$, pois sendo estes conjuntos iguais seus máximos também os serão. Se $d \in D_a \cap D_b$, então $d|a$ e $d|b$, mas como $r = a - qb$, segue que $d|r$ e, por isso, $d \in D_b \cap D_r$. Por outro lado, se $d \in D_b \cap D_r$, então $d|b$ e $d|r$, de modo que $d|bq + r = a$, isto é, $d \in D_a \cap D_b$. Logo $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$ e, portanto, $mdc\ (a,b) = mdc(b,r)$.

■

Exemplo: Como $56 = 4.7 + 28$, então $mdc(56,4) = mdc(4,28) = 4$ e $mdc(56,7) = mdc(7,28) = 7$.

Como podemos observar, o resultado do Lema de Euclides é válido mesmo que r não seja o resto da divisão de a por b. No entanto, para o **Algoritmo de Euclides**, vamos assim considerar de modo a estabelecer uma sequência de restos estritamente decrescente de inteiros não negativos.

Consideremos os inteiros a e b, com $a > b > 0$. Logo, pela Divisão Euclidiana, obtemos o seguinte:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Pelo **Lema 3.1**, temos que $mdc(a,b) = mdc(b,r_1)$. Assim vamos considerar dois casos:

a) Se $r_1 = 0$, teremos:

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc(b,0) = b.$$

b) Se $r_1 \neq 0$, em tal caso, iremos efetuar a divisão de b por r_1, daí segue que:

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Mais uma vez teremos que analisar duas possibilidades:

c) Se $r_2 = 0$, teremos:

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc(r_1,r_2) = mdc(r_1,0) = r_1$$

d) Se $r_2 \neq 0$, em tal caso, iremos efetuar a divisão de r_1 por r_2, daí segue que:

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Mais uma vez procedendo como antes,

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc\ (r_1,r_2) = mdc(r_2,r_3),$$

e assim sucessivamente.

Continuamos com o procedimento até obtermos um resto nulo, pois caso isso não ocorra, teríamos uma sequência infinita de números naturais $b > r_1 > r_2 > \cdots > 0$. Assim, para algum índice n, temos que $r_n \neq 0$ e $r_{n+1} = 0$, o que implica que:

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = \cdots = mdc(r_n,r_{n-1}) = mdc(r_n,0) = r_n.$$

Portanto, o último resto não nulo r_n é o mdc de a e b.

Podemos sintetizar o Algoritmo de Euclides através do seguinte procedimento prático: Efetuamos a divisão de a e b, com $a > b$, em seguida efetuamos a divisão de b pelo primeiro resto obtido (r_1), posteriormente dividimos r_1 pelo próximo resto (r_2) e assim sucessivamente até encontrarmos um resto nulo. Daí o último resto não nulo será o $mdc(a,b)$.

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Exemplo: Calcule o mdc de 372 e 162:

Pelo algoritmo de Euclides temos:

$372 = 162 \cdot 2 + 48$

$162 = 48 \cdot 3 + 18$

$48 = 18 \cdot 2 + 12$

$18 = 12 \cdot 1 + 6$

$12 = 6 \cdot 2 + 0$

Assim, o $mdc(372,162) = 6$

Pelo processo prático teremos:

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	**6**
48	18	12	6	0	

Assim, o $mdc(372, 162) = 6$.

3.7 Mínimo Múltiplo Comum

Definição 3.2. *Dados inteiros a e b diferentes de zero. Diremos que o número* $m \in \mathbb{N}$ *é um mínimo múltiplo comum* (mmc) *entre* a *e* b*, se m satisfaz as seguintes condições:*

$i)$ m é um múltiplo de a e b, isto é, $a|m$ e $b|m$;

$ii)$ Se c é um múltiplo comum de a e b, isto é, $a|c$ e $b|c$, então $m|c$.

Assim denotamos o mmc entre a e b por $m = mmc[a, b]$ ou $m = [a, b]$.

Exemplos:

Por exemplo, 12 é um múltiplo comum de 2 e 3, mas não é um mmc desses números. O 6 é um mmc de 2 e 3.

Teorema 3.5. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$, com $d = mdc(a, b)$ *e* $m = mmc[a, b]$, *então*

$$m = \frac{ab}{d}$$

Demonstração. Consideremos $m_1 = \frac{ab}{d}$ e provemos que $m_1 = m$. Como $d|a$ e $d|b$, então $a = d\lambda_1$ e $b = d\lambda_2$, com λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{N}$. Assim,

$$m_1 = \frac{ab}{d} = \frac{\lambda_1 db}{d} = \lambda_1 b \Rightarrow b|m_1$$

Da mesma forma, prova-se que $a|m_1$. Tomemos agora m_2 o outro múltiplo comum de a e b, isto é, $m_1 = a\alpha_1$ e $m_2 = b\alpha_2$, com α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{N}$. Pela identidade de Bachet-Bézout (teorema 3.4), existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Logo

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m_2 d}{m_1 d} = \frac{axm_2 + bym_1}{ab}$$

$$= \frac{ab\alpha_2 x + ab\alpha_1 y}{ab}$$

$$= \alpha_2 x + \alpha_1 y \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $m_1|m_2$. Isso mostra que $m_1 = m = \frac{ab}{d}$.

Exemplo: Determine o $mmc[1028, 304]$.

Solução:

Pelo Algoritmo de Euclides, temos que $mdc(1028, 304) = 4$, logo pelo teorema anterior temos:

$$mmc[1028, 304] = \frac{1028 \cdot 304}{4} = 78128$$

3.8 Números primos e compostos

Definição 3.3. *Um número $p \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ é chamado* ***primo*** *quando seus únicos divisores positivos são 1 e $|p|$. Caso contrário, dizemos que p é* ***composto.***

Exemplo: Os números $3, -5$ e 13, são primos.

Exemplo: O número 20 é composto pois $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Note que o número 1 não é nem primo e nem composto (isto se deve à uma condição especial de ser o elemento neutro da multiplicação) e que 2 e -2 são os únicos primos pares.

Teorema 3.6. *Se $a > 1$, então existe um primo p tal que $p|a$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$W = \{a \in \mathbb{N} : a > 1 \; e \; p \nmid a, \forall \, p \; primo\}$$

Desejamos mostrar que $W = \emptyset$. Se $W \neq \emptyset$, então pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $d \in W$, com $d = min(W)$. Como $d|d$, então d não pode ser primo. Por isso,

$$d = bc, \text{ com } 1 < b, c < d.$$

Desse modo, $b \notin W$, pois $d = min(W)$. Por conseguinte, sendo $b > 1$, deve existir um primo tal que $p|b$. Como $b|d$, então $p|d$, isto é, $d \notin W$, o que é impossível. Esta contradição mostra que existe um primo p, com $p|a$.

■

Teorema 3.7 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural* $a > 1$ *pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de primos. Especificamente,*

$$a = p_1p_2p_3 \cdots p_n$$

em que $p_1, p_2, \cdots, p_n$ são primos.

Demonstração. Há duas coisas a serem demonstradas: a primeira é a existência dos primos, e a segunda é a unicidade da fatoração.

Existência:

Tomemos o conjunto

$$M = \{a \in \mathbb{N} : a > 1 \; e \; a \neq p_1p_2 \cdots p_n\}$$

para primos $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Se mostrarmos que $M = \emptyset$, então a existência dos números primos está provada. Por absurdo, se $M \neq \emptyset$, então pelo Princípio da Boa Ordenação, M possui um menor elemento m. É claro que m não pode ser primo e, por isso, é composto. Assim, podemos escrevê-lo na forma

$$m = b \cdot c, \text{ com } 1 < b, c < m.$$

Como $b < c$ e $c < m$, então $b \notin M$ e $c \notin M$, pois $m = min(M)$. Assim, sendo $b > 1$ e $c > 1$, segue que estes números são primos ou são produtos de primos. Logo, $m = b \cdot c$ é um produto de primos, o que é uma contradição. Desse modo, $M = \emptyset$.

Unicidade: Suponhamos que

$$a = p_1p_2 \cdots p_n = q_1q_2 \cdots q_m$$

sendo $p_1, p_2, \cdots, p_n$, $q_1, q_2, \cdots, q_m$ todos primos.

Logo $p_1 | q_1q_2 \cdots q_m$ e, assim, temos que $p_1 = q_j$ para algum $j = 1, \cdots, m$ pois $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$, digamos que $p_1 = q_1$. Pela lei do cancelamento, temos que

$$p_2 \cdots p_n = q_2 \cdots q_m.$$

da mesma forma, temos $p_2 = q_j$ para algum $j = 2, \cdots, m$. Assumindo $p_2 = q_2$, obtemos

$$p_3 \cdots p_n = q_3 \cdots q_m.$$

Continuando este processo, e assumindo que $n > m$, temos

$$1 = p_{m+1} \cdots p_n ,$$

o que é impossível. Similarmente, se $n < m$, então

$$1 = p_{m+1} \cdots p_n,$$

que também é uma impossibilidade. Portanto, $m = n$ e $q_i = p_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Observação: Um processo prático utilizado para decompor um número em fatores primos é o seguinte:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Teorema 3.8. (Euclides) *O conjunto P dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que P é um conjunto finito, e sejam $p_1, p_2, \cdots, p_n$ todos os primos. Consideremos $a \in \mathbb{N}$ dado pelo produto dos p_i's somado ao número 1, isto é,

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Como $a > 1$, então pelo teorema 2.6, existe um primo p que divide a, ou seja, $a = pk$. Como por hipótese $p_1, p_2, \cdots, p_n$ são os únicos primos, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \cdots, n$, digamos que $p = p_1$. Assim,

$$pk = pp_2 \cdots p_n + 1,$$

isto é, $p|1$, o que é uma contradição. Assim, P é infinito.

4 ENSINO TRADICIONAL E ENSINO INOVADOR

Nesta parte do trabalho faremos uma análise sobre dois métodos de ensino existentes em nossa realidade educacional, o chamado ensino tradicional e o ensino inovador.

A abordagem tradicional do ensino parte do pressuposto de que a inteligência é uma faculdade que torna o homem capaz de armazenar informações, das mais simples às mais complexas. Desse modo, na escola tradicional, o conhecimento humano possui caráter cumulativo, que deve ser adquirido pelo indivíduo pela transmissão dos conhecimentos a serem realizados nas instituições escolares (MIZUKAMI, 1986).

Consequentemente, o aluno não é considerado sujeito pensante e sim sujeito passivo, acumulador de conhecimento. Para poder ser manipulado pela minoria da sociedade, ao mesmo tempo que lhe é oferecido educação, lhe é retirado o direito de criar, de inovar e de realizar algo além do que lhe está sendo ensinado, pois muitas vezes o que importa é memorizar os resultados e não entender os processos.

Nesse sentido, Mizukami (1986) também afirma que o indivíduo tem o papel de passividade no processo de aprendizagem além de considerado sujeito irrelevante na elaboração e aquisição de conhecimento. Segundo Mizukami (1986, p. 11), ao indivíduo que está adquirindo conhecimento compete memorizar definições, enunciados de leis, sínteses e resumos que lhe são oferecidos no processo de educação formal a partir de um esquema atomístico.

Grando e Macedo (2017, p. 5) falam que,

> Na escola antiga o professor se configura como o detentor do conhecimento, com grande autoridade em sala de aula, onde pode aplicar castigos dos mais variados. Seus ensinamentos eram inquestionáveis, os alunos praticavam a repetição de decoreba de modelos já existentes.

Freire (1979, p. 20) comenta que “O professor ainda é um ser superior que ensina a ignorantes. Isto forma a consciência bancária. O educando recebe passivamente os conhecimentos, tornando-se depósito do educador. Educa-se para arquivar o que se deposita”.

No mesmo sentido, Franco (1991) critica o modelo de ensino. Por muito tempo se pensou que saber “de cor” era o mesmo que conhecer algo. No entanto, com as novas pesquisas psicopedagógicos atuais, sabe-se que o fato de decorar não significa compreender aquilo que tentamos aprender. Ao se observar as relações de aprendizagem, é notável que a verdadeira aprendizagem é aquela que consegue gerar conhecimento e desenvolvimento. Dessa forma, a relação que se estabelece entre professor e alunos, quando o primeiro expõe e os segundos anotam e decoram, não propicia a aprendizagem, ao contrário, dificulta ou impossibilita que ela ocorra.

Rodrigues, Moura e Testa (2011) advertem que além do "como ensinar", faz-se necessário, também, abordar a questão daquilo que se deve ensinar. Surge então a temática do conteúdo. No enfoque tradicional, o conteúdo já vem estabelecido de forma prévia pelo programa da escola, sem que se questione a sua natureza e o seu sentido.

Leão (1999) complementa ao dizer que a escola tradicional foi marco para a sociedade servindo de modelo para dizer o que foi realizado antes e posterior na história educacional. O autor também afirma que não existe atualmente um modelo puro, que os modelos novos que vieram foram mudados ou aperfeiçoados do modelo tradicional.

Em contraposição ao que foi discutido anteriormente e se apoiando no que diz Leão (1999), mesmo atualmente não existindo um modelo puro ou mesmo que os novos modelos tenham vindo do modelo tradicional, a necessidade de se inovar no ensino torna-se imediato. Novas metodologias de ensino, novas tecnologias (como o uso do smarthphone) são ferramentas que podem gerar bons resultados quanto ao ensino e aprendizagem.

Ao abordar as novas metodologias, podemos destacar a metodologia ativa, que diferente da tradicional tem como foco a relação de aprendizado, e a ênfase nesta relação, trazendo o aluno como agente, não apenas como ouvinte ou passivo do processo. Isso faz com que haja uma maior interação e consequentemente que o processo de ensino e de aprendizagem se torne mais dinâmico.

Souza, Iglesias e Filho (2014, p. 285), destacam que

> Entre as principais características, os métodos inovadores de ensino-aprendizagem mostram claramente o movimento de migração do ensinar para o aprender, o desvio do foco do docente para o aluno, que assume a corresponsabilidade pelo seu aprendizado.

Os autores destacam algumas comparações importantes entre a metodologia ativa e a tradicional de ensino-aprendizagem. A metodologia ativa permite a construção de estratégias que podem demonstrar como se faz, ou seja, que buscam não apenas demonstrar habilidades, repetições, mas sim a prática em busca da excelência. Outro fator importante é o papel do professor, que é de interação e não de transmissão apenas. Além disso neste modelo, o papel do aluno deixa de ser apenas passivo, absorvendo informações, e passa a ser ativo, sendo responsável pelo seu próprio ensino.

Quando se expõe sobre tecnologias associadas ao ensino, lembramos logo do uso da internet que de certo modo acelerou a inovação e a trasmissão de conteúdos. Leão (1999) explica que de 1990 até o início de 2000 podíamos escolher entre estar conectados ou não. Após isso, ela se tornou uma necessidade, se transformou em um espaço adicional de comunicação, informação e interação, gerando uma revolução nos diferentes ambientes existentes.

Nesse contexto de inovação, é de suma importância que o professor esteja inserido também. Ou seja, os docentes devem estar aptos e preparados para o mundo digital, ele tem que estar familiarizado com a tecnologia.

Rodrigues, Moura e Testa (2011) remete para o conjunto de técnicas e teorias, que apontam o aperfeiçoamento dos docentes em conjunto com discentes, utilizando-se de ferramentas tecnológicas em um processo de experimentação, no qual professores e alunos possam aprender, diversificando a prática pedagógica, promovendo a efetiva interação dentro do contexto escolar e com objetivo de melhorar a utilização das novas tecnologias digitais no processo ensino e aprendizagem.

Ainda sobre inclusão no mundo digital, a escola também deve se inserir nessa realidade, estando ela apta para isso. Laboratórios de informática onde os computadores funcionem, acesso à internet, é o mínimo que se exige para que a escola esteja realmente inclusa no século XXI.

Wagner (2009) aponta para a inegável necessidade das Tecnologias de Informação e Comunicação fazerem parte da rotina das escolas e os professores saberem utilizar de forma mais avançadas os computadores e a internet para auxiliarem em suas matérias. Bonilla (2015) e Silva (2006) reiteram o defendido por Wagner (2009) dizendo que não basta simplesmente oferecer computadores às pessoas de baixa renda pois a infraestrutura tecnológica é apenas um fator no processo de inclusão digital.

5 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Sabemos que a matemática é aquela disciplina em que o aluno tem mais dificuldade. Juntando-se à essa realidade, vem resultados em provas externas como a OBMEP, avaliação esta que traz questões na qual a interpretação e o raciocínio, além da aprendizagem dos assuntos, são de grande relevância e primordiais para a sua resolução. A OBMEP tem alguns objetivos (IMPA, 2019) a serem destacados, a saber

- Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica;
- Contribuir para a integração das escolas públicas como as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Sendo assim, foi elaborada uma Proposta de Atividade na forma de sequência didática (apresentada a seguir) com o propósito principal de aumentar o número de alunos em contato com questões da OBMEP, podendo assim estimular e promover uma melhoria na qualidade da Educação Básica.

A seguir abordaremos o conceito do que vem a ser sequência didática, fundamentado pela ideia de alguns autores, sendo este o conceito usado como base teórica para o objeto de destaque nesta obra.

5.1 METODOLOGIA: Sequência didática

5.1.1 Definição

Ausubel (1982) afirma que a aprendizagem significativa ocorre somente quando o aluno é capaz de perceber que os conhecimentos escolares são úteis para sua vida fora da escola. Por isso, os professores precisam estar sempre atentos e refletirem sobre como ajudar os alunos a compreenderem a importância dos saberes escolares e a maneira de aplicá-los na vida em sociedade.

Para proporcionar a aprendizagem significativa, uma das estratégias é a sequência didática. Dolz e Schneuwly (2004) defendem que as sequências didáticas são instrumentos que podem nortear os professores na condução das aulas e no planejamento das intervenções. Além disso, os autores entendem que a sequência de atividades deve permitir a transformação gradual das capacidades iniciais dos alunos. As atividades podem ser concebidas com base no que os alunos já sabem e, a cada etapa, aumentar o grau de dificuldade, ampliando a capacidade desses estudantes.

Sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

Para que haja uma sequência didática “é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento” (PERETTI; COSTA, 2013, p. 6).

Segundo a Revista Nova Escola (2009),

> Um dos pioneiros em pesquisas sobre como os alunos aprendem matemática, o francês Guy Brousseau[1] desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, que se baseia no princípio de que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação, entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas.

Peretti e Costa (2013, p. 6) falam que, ao se iniciar a sequência didática,

> É necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão. Aos poucos, faz-se necessário aumentar a complexidade dos desafios e orientações permitindo um aprofundamento do tema proposto.

Zabala (1998) defende que ao pensar na configuração das sequências didáticas, este é um dos caminhos mais acertados para melhorar a prática educativa. Sendo assim, os conteúdos trabalhados devem contribuir para a formação de cidadãos conscientes, informados e agentes de transformação da sociedade em que vivem.

Alguns professores planejam suas aulas levando apenas em conta, aquilo que o aluno traz de conhecimento. Porém, corre o risco de não colher bons resultados, pois ao valorizar apenas o conhecimento que os alunos trazem fica-se apenas na superficialidade. Como diz Peretti e Costa (2013), é necessário também propor investigações sobre resultados encontrados nos cálculos e maneiras de resolvê-los, como poderiam ter sido desenvolvidos de uma maneira mais prática, construindo regras básicas para uma melhor compreensão.

---

[1] Guy Brousseau (Taza, 4 de Fevereiro de 1933) é um educador matemático francês. Em 2003 recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das situações didáticas.

Através de uma sequência didática com foco também em atividades investigativas, a construção do conhecimento pode acontecer de modo a possibilitar a experimentação, generalização, abstração e formação de significados (LINS; GIMENEZ, 2001)

5.2 Proposta da atividade

A atividade proposta, na forma de sequência didática, teve início com a aplicação de um questionário, chamado de questionário 1 (Q1) (APÊNDICE A) na etapa de Pré-teste, sendo possível verificar o nível dos alunos das duas turmas envolvidas na pesquisa, 7° ano A e B, com relação ao conhecimento deles sobre o conteúdo divisibilidade nas séries anteriores.

Na etapa Desenvolvimento da Atividade, foi feita uma preparação das turmas (por um período pré-definido) para a aplicação de um outro questionário, chamado de questionário 2 (Q2) (APÊNDICE B). Cada turma teve o mesmo período para se preparar para o segundo questionário, porém foram usadas metodologias de ensino diferentes. O sétimo ano A com uma metodologia inovadora e o sétimo ano B com a metodologia tradicional, quadro e caderno apenas.

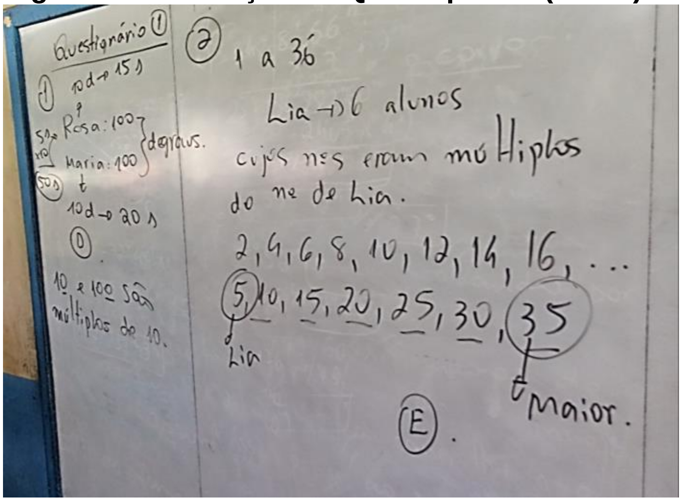
Ao final da sequência, tivemos a etapa Pós-teste, tendo os resultados dos questionários dispostos em tabelas e gráficos para uma comparação, inicialmente de nível de turmas com relação a conhecimentos prévios que possuem sobre divisibilidade, e ao final uma análise do resultado do segundo questionário, fazendo uma verificação sobre a efetividade sobre as metodologias adotadas por turma.

5.3 Pré-teste

Inicialmente, foi aplicado para as turmas de 7º ano A e B da Escola Municipal José Gomes Lima, localizada no município de Água Branca - AL, um questionário contendo 6 questões, intitulado questionário 1 (Q1), com questões nível 1 da OBMEP envolvendo divisibilidade, levando-se em conta o conhecimento prévio adquirido por eles durante o sexto ano no assunto de múltiplos e divisores.

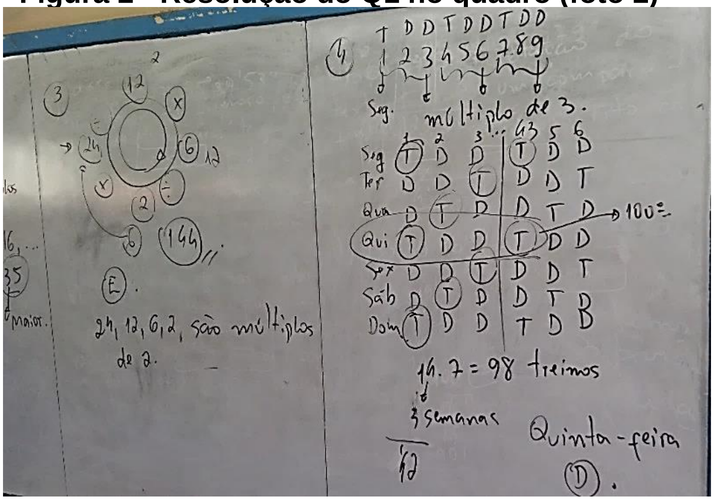
Também foram apresentadas aos alunos das duas turmas, 7° ano A e B, as soluções das questões desse primeiro questionário em sala de aula. Seguem as fotos a seguir:

Figura 1 - Resolução do Q1 no quadro (foto 1)



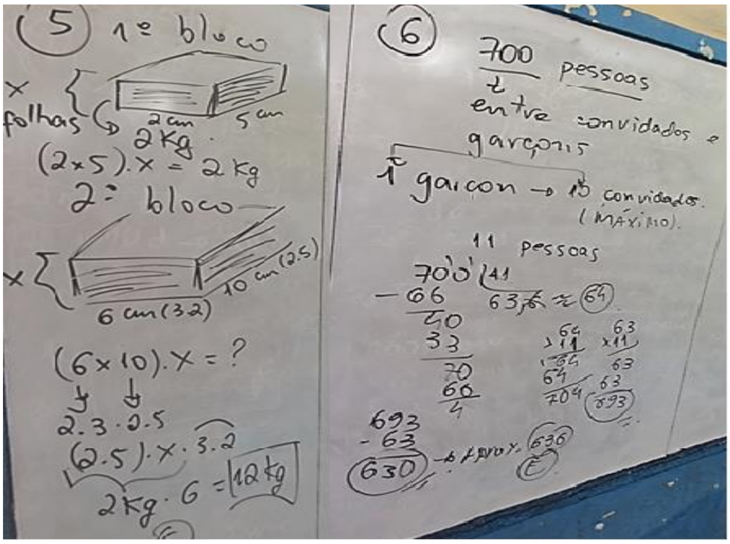
Fonte: Próprio autor (2019)

Figura 2 - Resolução do Q1 no quadro (foto 2)



Fonte: Próprio autor (2019)

Figura 3 - Resolução do Q1 no quadro (foto 3)



Fonte: Próprio autor (2019)

Temos, a seguir, o resultado do questionário 1 disposto em tabelas por turma, onde temos o número de acertos por aluno (indo de zero a seis acertos):

Tabela 1 - Acertos do 7° A no Q1

7° A – Questionário 1		
Acertos	**Quantidade**	**Percentual (%)**
0 acerto	3	6,66
1 acerto	7	15,55
2 acertos	26	57,77
3 acertos	6	13,33
4 acertos	3	6,66
5 acertos	0	0
6 acertos	0	0
TOTAL	45	100

Fonte: Próprio autor (2019)

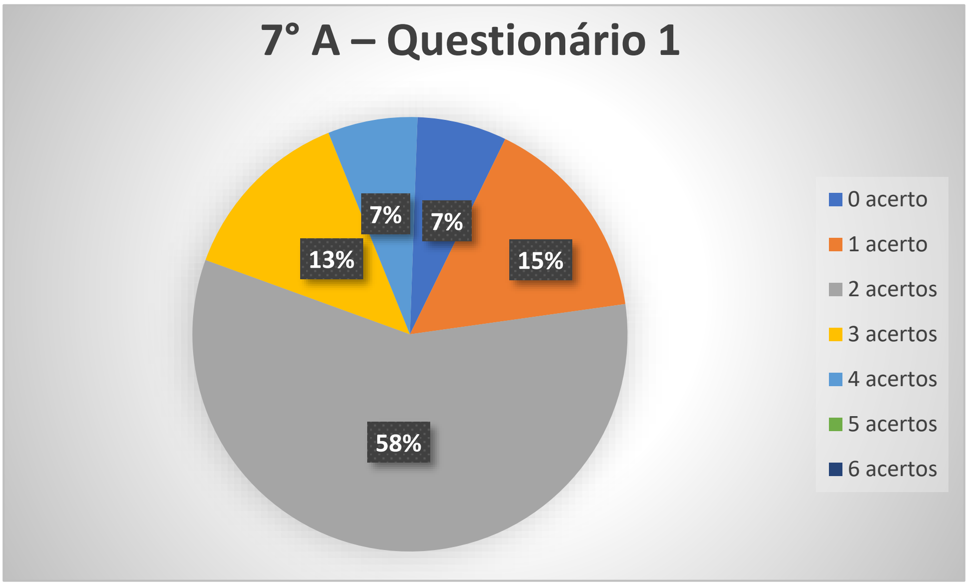
Tabela 2 - Acertos do 7° B no Q1

7° B – Questionário 1		
Acertos	**Quantidade**	**Percentual (%)**
0 acerto	8	19,51
1 acerto	13	31,7
2 acertos	10	24,39
3 acertos	8	19,51
4 acertos	0	0
5 acertos	2	4,87
6 acertos	0	0
TOTAL	41	100

Fonte: Próprio autor (2019)

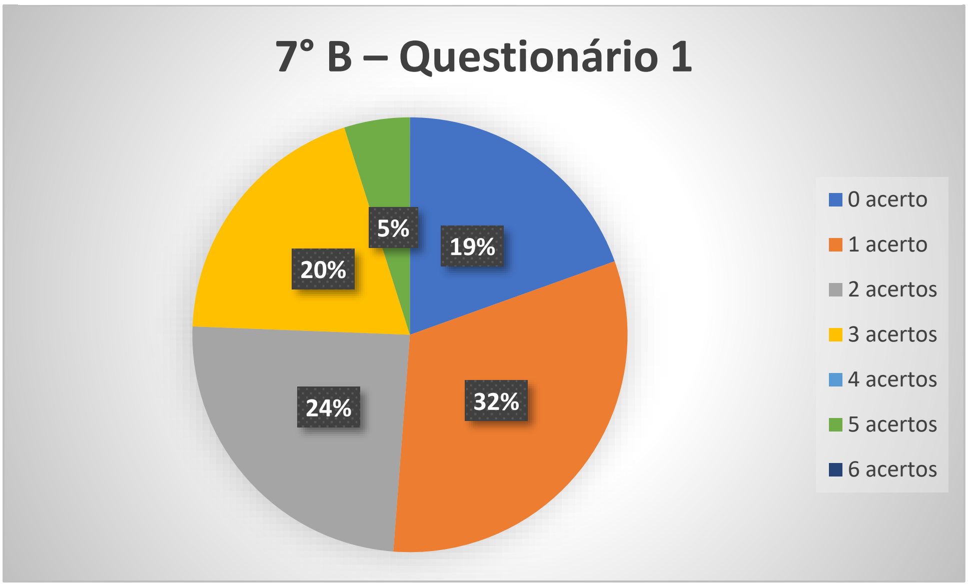
Graficamente temos os resultados assim apresentados:

Gráfico 1 - Acertos do 7° A no Q1



Fonte: Próprio autor (2019)

Gráfico 2 - Acertos do 7° B no Q1



Fonte: Próprio autor (2019)

Fazendo uma análise inicial, levando em consideração o número de acertos no questionário 1, ou seja, observando primeiro as duas tabelas e os dois gráficos, podemos perceber que: o sétimo ano A teve um total de 45 alunos (100%) que participaram deste questionário, onde destes: 6,66% (3 alunos) tiveram 0 acerto, 15,55% (7 alunos) tiveram 1 acerto, 57,77% (26 alunos) tiveram 2 acertos, 13,33% (6 alunos) tiveram 3 acertos e 6,66% (3 alunos) tiveram 4 acertos, sendo de 0% o percentual de alunos que obtiveram 5 e 6 acertos; o sétimo ano B teve um total de 41 alunos (100%) que participaram deste questionário inicial, de onde destes: 19,51% (8 alunos) tiveram 0 acerto, 31,7% (13 alunos) tiveram 1 acerto, 24,39% (10 alunos) tiveram dois acertos, 19,51% (8 alunos) tiveram 3 acertos, 4,87% (2 alunos) tiveram 5 acertos, sendo de 0% o percentual de alunos que obtiveram 4 e 6 acertos.

Comparativamente, vemos que o nível das duas turmas equipara-se, pois mesmo o sétimo A tendo vantagem no número de alunos com 2 acertos, o sétimo ano B leva vantagem no número de alunos com 1, 3 e 5 acertos, percentualmente falando.

Temos na tabela a seguir o número de acertos por questão em cada turma (indo da questão 1 até a questão 6):

Tabela 3 - Acertos por questão no Q1 do 7° A

7° A – Acertos por questão (Q1)	QUANTIDADE	PERCENTUAL COM RELAÇÃO AO TOTAL DE ALUNOS (%)
Questão 1	23	51,11
Questão 2	5	**11,11**
Questão 3	32	**71,11**
Questão 4	14	31,11
Questão 5	9	20
Questão 6	6	13,33

Fonte: Próprio autor (2019)

Podemos perceber que na turma do sétimo ano A com relação ao número total de alunos no Q1 (45 alunos), tivemos 11,11% (5 acertos) na questão 2. Enquanto na questão 3 tivemos 71,11% (32 acertos).

A questão 2 do Q1, cujo enunciado é: (OBMEP 2007, Questão 8) Uma turma tem 36 alunos e cada um deles tem um número de 1 a 36 na lista de chamada. Ontem, a professora chamou Lia ao quadro negro e mais os outros seis alunos cujos números eram múltiplos do número de Lia. Qual foi o maior número chamado?

(A) 14

(B) 20

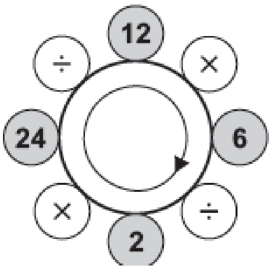
(C) 25

(D) 32

(E) 35

Observamos que como solução deste problema stamos procurando um número natutal que tenha exatamente sete múltiplos menores ou iguais a 36. É fácilver que apenas o 5 satisfaz essa condição; ele tem exatamente 7 múltiplos menores do que 36, que são 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35, sendo o 35 a resposta procurada por ser o maior número da listagem.

A questão 3 do Q1, que tem como enunciado: (OBMEP 2009, Questão 3) Partindo do número 2 na figura e fazendo as quatro contas no sentido da flecha o resultado é 12, porque $2 \times 24 = 48$, $48 \div 12 = 4$, $4 \times 6 = 24$ e $24 \div 2 = 12$. Se fizermos a mesma coisa partindo do maior número que aparece na figura, qual será o resultado?



(A) 18

(B) 32

(C) 64

(D) 72

(E) 144

O problema acima citado tem uma solução simples, onde deve-se realizar multiplicações e divisões no sentido da flecha para se ter a resposta. Basta fazer, no caso como temos que iniciar pelo maior número, $24 \div 12 = 2$, $2 \times 6 = 12$, $12 \div 2 = 6$ e $6 \times 24 = 144$, sendo 144 a resposta pedida.

Observando os conteúdos tratados em cada questão e o resultado percentual observado na tabela, vemos que os alunos da turma A tiveram mais dificuldade em encontrar múltiplos de um número, do que realizar operações básicas de multiplicação e divisão.

A tabela seguinte mostra o resultado do Q1 com relação a quantidade de acertos em cada questão:

Tabela 4 - Acertos por questão no Q1 do 7° B

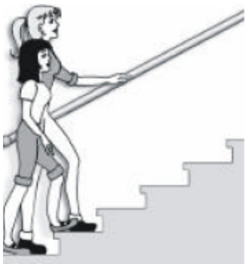
7° B – Acertos por questão (Q1)	QUANTIDADE	PERCENTUAL COM RELAÇÃO AO TOTAL DE ALUNOS (%)
Questão 1	14	**34,14**
Questão 2	9	**21,95**
Questão 3	14	**34,14**
Questão 4	11	26,82
Questão 5	9	**21,95**
Questão 6	10	24,39

Fonte: Próprio autor (2019)

Podemos observar mediante os resultados acima apresentados na tabela, que a turma do sétimo ano B no Q1, do quantitativo total de alunos (41 alunos), a turma obteve 34,14% (14 acertos) na questão 1, 21,95% (9 acertos) na questão 2, na questão 3 também 21,95% e 21,95% na questão 5.

Anteriormente, vimos que nas questões 2 e 3, temos respectivamente os conteúdos de múltiplos e multiplicação e divisão abordados em tais questões.

Na questão 1, cujo enunciado é: (OBMEP 2005, Questão 16) Rosa e Maria começaram a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?



(A) meio minuto
(B) 40 segundos
(C) 45 segundos
(D) 50 segundos
(E) 1 minuto

A solução deste problema é encontrada, realizando inicialmente divisões e multiplicações: Rosa $\rightarrow 100 \div 10 = 10 \times 15\, segundos = 150\, segundos$ para subir a escada, Maria $\rightarrow 100 \div 10 = 10 \times 20\, segundos = 200\, ssegundos$ para subir a escada.

Para a obtenção da resposta é só fazer a subtração $200\ segundos - 150\ segundos = 50\ segundos$.

A questão 5 do Q1 tem como enunciado: (OBMEP 2009, Questão 5) Um bloco de folhas retangulares de papel pesa 2 kg. Outro bloco do mesmo papel tem o mesmo número de folhas que o primeiro, mas suas folhas têm o dobro do comprimento e o triplo da largura. Qual é o peso do segundo bloco?

(A) 4 kg

(B) 6 kg

(C) 8 kg

(D) 10 kg

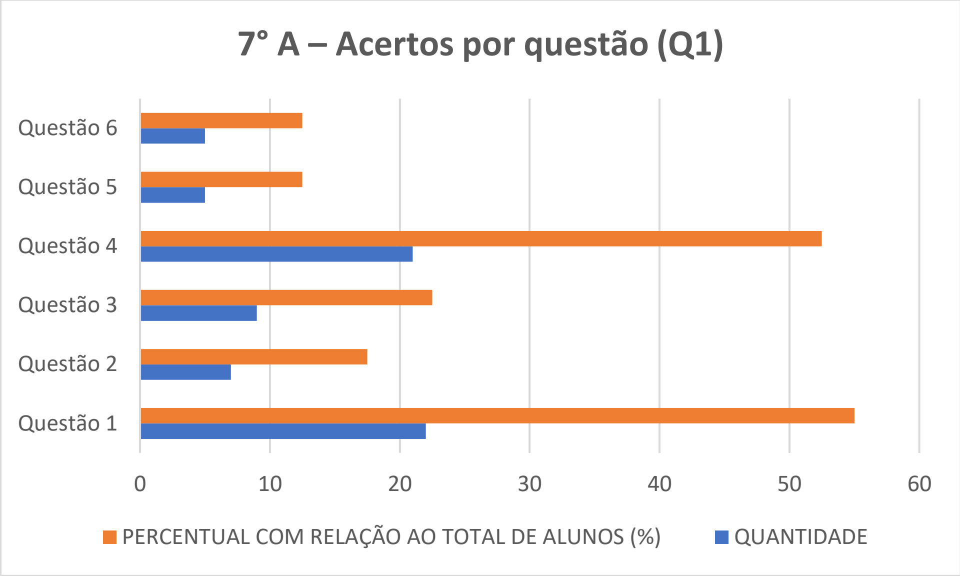
(E) 12 kg

A solução dessa questão se obtém observando inicialmente como esquematizar a relação dimensões de cada folha, quantidade de folhas e peso do bloco. Chamando de x a largura e y o comprimento de cada folha e n a quantidade de folhas, temos assim esquema desejado: $x \times y \times n = 2\ kg$. Porém se mantermos a mesma quantidade n de folhas e $2 \times y(comprimento)$ e $3 \times x(largura)$, obtemos novo esquema: $2 \times y \times 3 \times x \times n = 2 \times 3 \times x \times y \times n$, mas vimos que $x \times y \times n = 2\ kg$, logo temos que $2 \times 3 \times x \times y \times n = 6 \times 2\ kg = 12\ kg$ que vem a ser a resposta procurada.

Observando os percentuais de acertos alcançados por questão e os assuntos abordados que a turma B, teve melhor desempenho em questões que tiveram como conteúdo a resolução de multiplicações e divisões (questões 1 e 3) e pior desempenho em questões que trataram de múltiplos e com multiplicação de suas dimensões (multiplicações sucessivas) de figuras geométricas.

Graficamente, temos representadas as duas tabelas anteriormente apresentadas. Inicialmente o gráfico com o resultado do Q1 do 7° A, onde nele temos o número de acertos por cada questão e o percentual com relação ao número de alunos por turma no Q1:

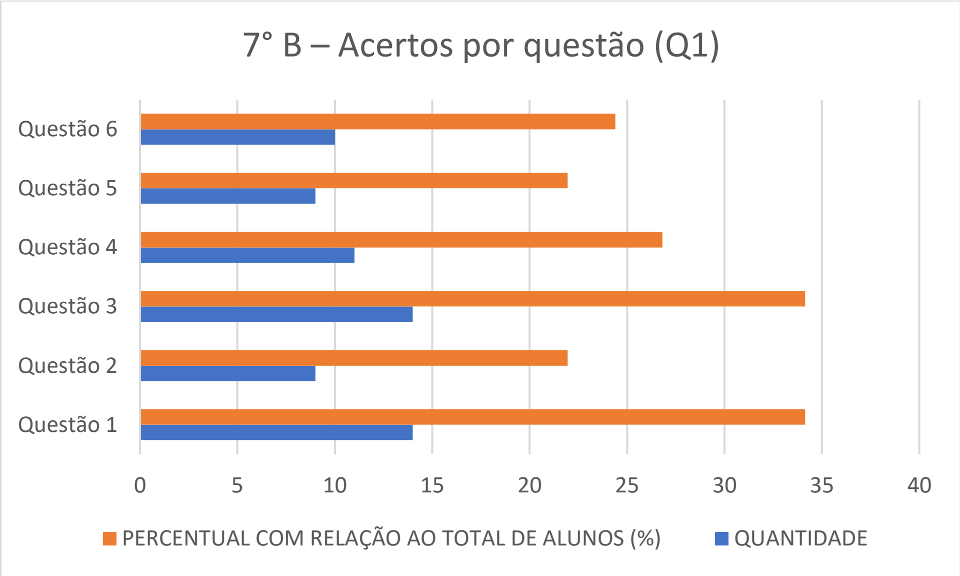
Gráfico 3 - Acertos por questão no Q1 do 7° A



Fonte: Próprio autor (2019)

Na sequência temos o gráfico do 7° B no Q1, trazendo também o número de acertos por questão:

Gráfico 4 - Acertos por questão no Q1 do 7° B



Fonte: Próprio autor (2019)

Nas duas tabelas e dois gráficos anteriores, temos os resultados dos números de acertos por questão. De maneira mais detalhada percebemos os resultados, em termos percentuais, que o número de acertos por questão equiparam-se. Vemos que, por exemplo, nas questões 1 e 4, as duas turmas tiveram resultados muito próximos.

Apesar de a turma do sétimo B ter, em termos percentuais nas questões 2, 3, 5 e 6, melhores resultados que a turma do sétimo B, não mostra que uma turma está com melhor nível que a outra.

5.4 Desenvolvimento da atividade

Após aplicado o questionário inicial, no qual se levou em conta o conhecimento prévio dos alunos, foi feita uma preparação deles por um período de 15 a 21 dias de duração com as duas turmas. Uma das turmas, o **sétimo ano B**, foi preparado com os métodos convencionais, aulas expositivas, tendo como recursos quadro e livro didático. Os alunos fizeram uma preparação revisando o assunto de múltiplos e divisores, que contempla divisibilidade, resolvendo questões de simulados previamente preparados, tendo como enfoque principal questões OBMEP nível 1.

Na primeira semana de preparação foi feita uma revisão do conteúdo de múltiplos e divisores, usando quadro e caderno. Ao final das explicações, foi passada uma atividade com questões sobre o conteúdo, com questões básicas que está disponível no APÊNDICE C. Nas duas semanas seguintes, antes da aplicação do Q2, foram feitos mais dois simulados usando questões da OBMEP Nível 1 que envolvem divisibilidade, questões estas que estão disponíveis no APÊNDICE E.

Cada questão que foi passada, tanto na primeira atividade, assim como nos dois simulados, foi devidamente corrigida e explicada, tomando-se cuidado sempre em tirar a dúvida acerca de cada conteúdo abordado. Sobre o conteúdo abordado, na primeira atividade, apresentamos um pouco de cada parte do conteúdo de múltiplos e divisores: o que é múltiplo e divisor, o que é número primo e composto, como identificar um número primo grande, a decomposição em fatores primos, o mmc e o mdc. Nos simulados, por se tratar diretamente das questões OBMEP, de maneira geral foi trabalhado o conteúdo de divisibilidade.

No simulado 1 foram usadas as questões da OBMEP: 15 de 2005, 11 de 2006, 14 de 2007, 7 de 2008, 20 de 2009 e 14 de 2011. No simulado 2 foram usadas as questões da OBMEP: 9 de 2012, 14 de 2012, 6 de 2013, 12 de 2013, 13 de 2014 e 7 de 2015. Ressaltando que tais questões estão no APÊNDICE E deste trabalho.

A outra turma, **o sétimo ano A**, foi preparada usando metodologias diferenciadas, fugindo totalmente das convencionais, o chamado ensino padrão alicerçado na prática do ensino quadro e caderno. A esta turma foi apresentado e usado o Portal do Saber da OBMEP, portal este que traz ferramentas como: videoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, aplicativos, testes e material teórico, objetivando uma aprendizagem mais significativa.

Além disso, durante o preparo foi recorrido também ao aparelho celular, os chamados smatphones, para o uso de aplicativos de matemática que trouxeram simulados da OBMEP (que é o caso do Ecuca), que ensinaram operações matemáticas de forma divertida (é o caso do Mathgame), que mostraram critérios de divisibilidade (como o Critérios de Divisibilidade) e que trabalharam também com o assunto múltiplos e divisores (que é o caso do aplicativo Múltiplos e Divisores). Lembrando que todos os aplicativos estão disponíveis na Google Play e de forma gratuita e além disso os alunos que não possuíam tal ferramenta puderam estudar com um colega que tinha acesso ou em sala de aula foi demonstrada as funcionalidades dos aplicativos acima citados pelo computador usando o datashow. Todas as funcionalidades descritas acima para a turma do sétimo ano A, Portal do Saber da OBMEP e aplicativos para celular, foram usadas de maneira didática, visando a aprendizagem do conteúdo múltiplos e divisores, sendo também aplicadas atividades para testar a aprendizagem.

Na primeira semana foi feita com a turma A também uma revisão do conteúdo de múltiplos e divisores, usando para isso o Portal do saber da OBMEP, onde na está disponível uma gama de ferramentas para se aprender o conteúdo. Lá os alunos tiveram à sua disposição videoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, aplicativos e testes, podendo fazer uso quando e onde quiser, bastando estarem conectados à internet e terem o aparelho celular.

O Portal do Saber da OBMEP

O Portal do saber da OBMEP é o local de preparação do aluno que faz as provas de tal olimpíada, oferecendo material de ensino de matemática gratuito e online, desde o sexto ano do fundamental até o terceiro ano do ensino médio (IMPA, 2019).

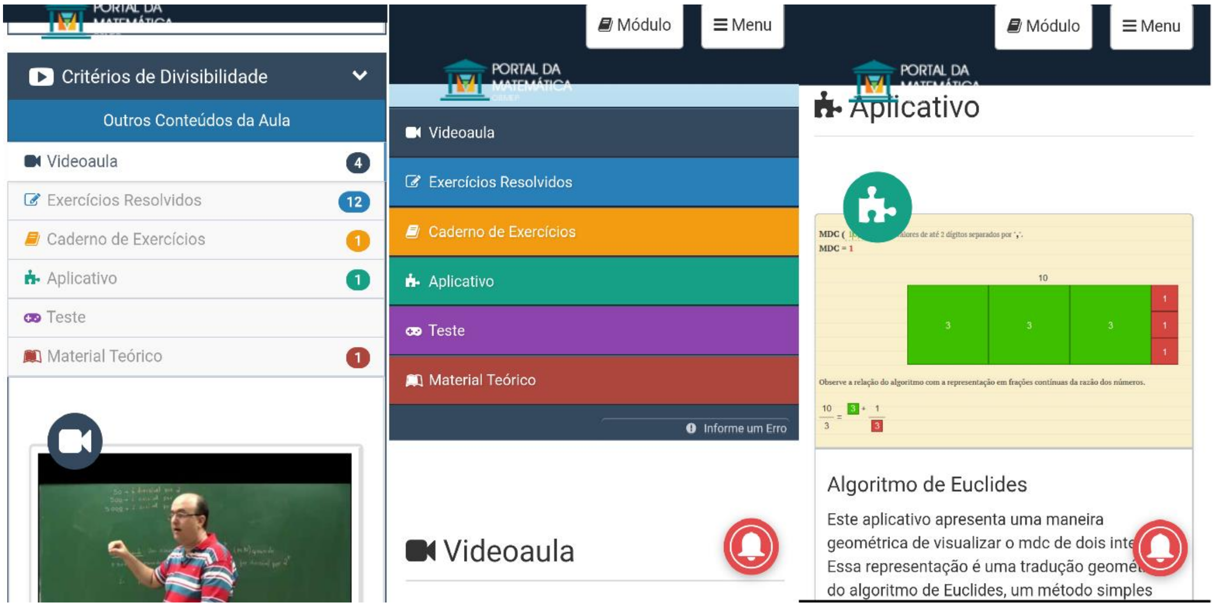
O portal dispõe de vídeoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico, interativo e testes dependendo do assunto. Para acesso do mesmo, basta realizar um simples cadastro, onde só será necessário colocar o nome do usuário, cadastrar e-mail e senha.

De acordo com a OBMEP (2019), com relação as ferramentas disponibilizadas no portal, temos de forma mais detalhada:

- ✓ O Módulo pode ser definido como um conjunto de materiais de um determinado assunto, estes assuntos são determinados pelo conteúdo curricular das escolas brasileiras, sempre podendo haver diferenças com o de sua escola. Cada um dos anos do Portal é dividido em diversos Módulos. Alguns Módulos possuem pré-requisitos, que podem ser outros Módulos do Portal ou um conhecimento específico prévio. Em sua descrição, pode se obter maiores detalhes do assunto abordado;
- ✓ As Aulas são subdivisões do Módulo, compostas por diversos conteúdos relacionados aos tópicos para facilitar e direcionar o aprendizado. Os conteúdos encontram-se no menu lateral direito;
- ✓ O Portal dispõe de diversos conteúdos para complementar seu aprendizado. Estes conteúdos podem ser acessados na divisão das aulas ou no menu lateral esquerdo do Módulo.

A seguir será apresentada em imagem as funcionalidades do portal.

Figura 4 - Portal da OBMEP



Fonte: Próprio autor (2019)

Na segunda semana foi inserido o uso dos aplicativos para smartphone, inicialmente o Mathgame e o Ecuca (que serão demonstrados a seguir). O aplicativo Mathgame foi usado para exercitar as operações básica multiplicação e divisão. Já o Ecuca, para a resolução de simulados com questões da OBMEP, porém o aluno só pôde resolver questões nível 1 e que envolveram divisibilidade (mesmas questões disponíveis no APÊNDICE E).

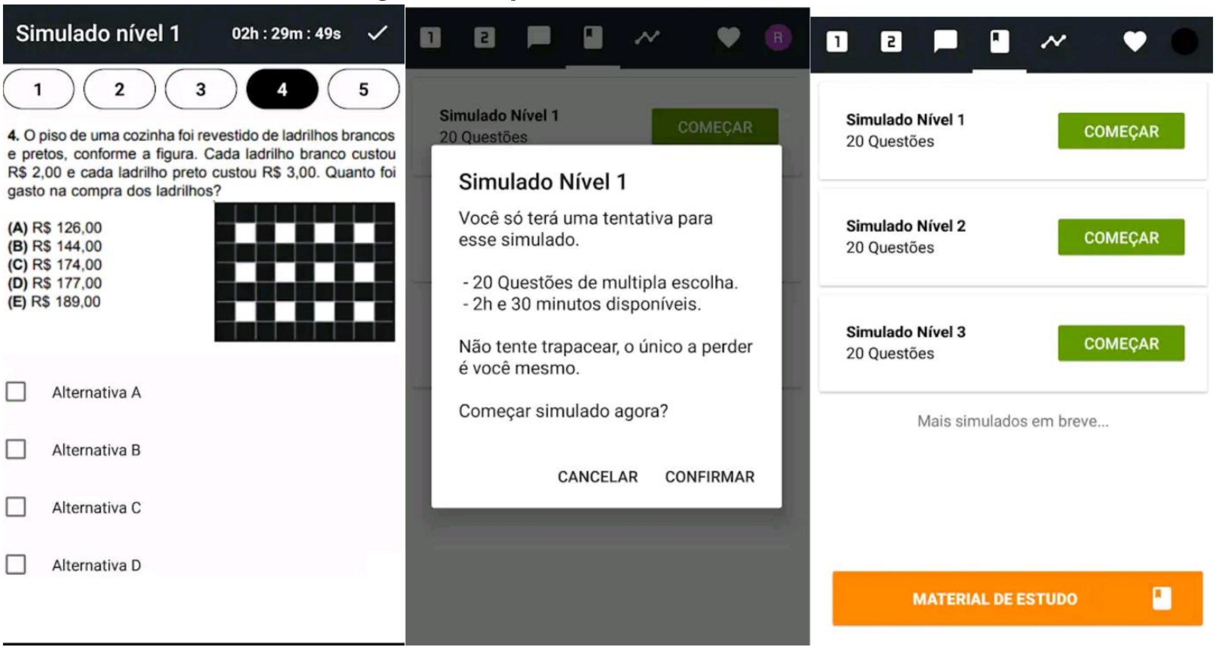
Ecuca

Este é um aplicativo desenvolvido especialmente para facilitar a preparação de alunos que irão fazer a OBMEP, além claro daqueles que desejem também aprender e se divertir resolvendo questões. As funcionalidades deste aplicativo são: simulados, material de estudo, contagem regressiva, chat e ranking (GOOGLE PLAY, 2019).

Para se ter esse aplicativo, basta ir a Google Play do seu smatphone e baixar, sendo este um aplicativo gratuito e necessita apenas do cadastro de seu e-mail para usá-lo.

Segue imagem a seguir do aplicativo:

Figura 5 - Aplicativo Ecuca



Fonte: Próprio autor (2019)

Observação: Tal aplicativo estava disponível na plataforma Android até o final do ano de 2019, sendo retirado pelo autor no ano de 2020 por algum motivo, sendo talvez o autoral, pois fazia uso de questões da OBMEP.

Mathgame

Este é um jogo e um guia que inclui os métodos matemáticos mais eficazes de aritmética mental. Esta é a ginástica para o cérebro realizar plenamente o seu potencial, onde você vai testar sua mente, habilidade e velocidade na luta contra o tempo. Neste aplicativo você encontra: Truques matemáticos, lições e exercícios e jogos matemáticos. (GOOGLE PLAY, 2019)

Segundo a Google Play (2019), este jogo apresenta de maneira mais detalhada:

✓ Truques matemáticos:

- adição (mais);
- subtração (menos);
- multiplicação;
- Divisão (Desigualdade);
- exponenciação (quadrado, cubo);
- potência de dois (número);
- elevar ao quadrado números terminados em 5;
- multiplicação complexa;
- raiz quadrada (root);
- percentagem (calculadora de porcentagem);

e muitos outros.

✓ Lições e exercícios:

- tabela de multiplicação, mesa de quadrados;
- matemática para crianças (educação, formação);
- teste de matemática (problemas matemáticos);
- solução de equações e inequações (equação).

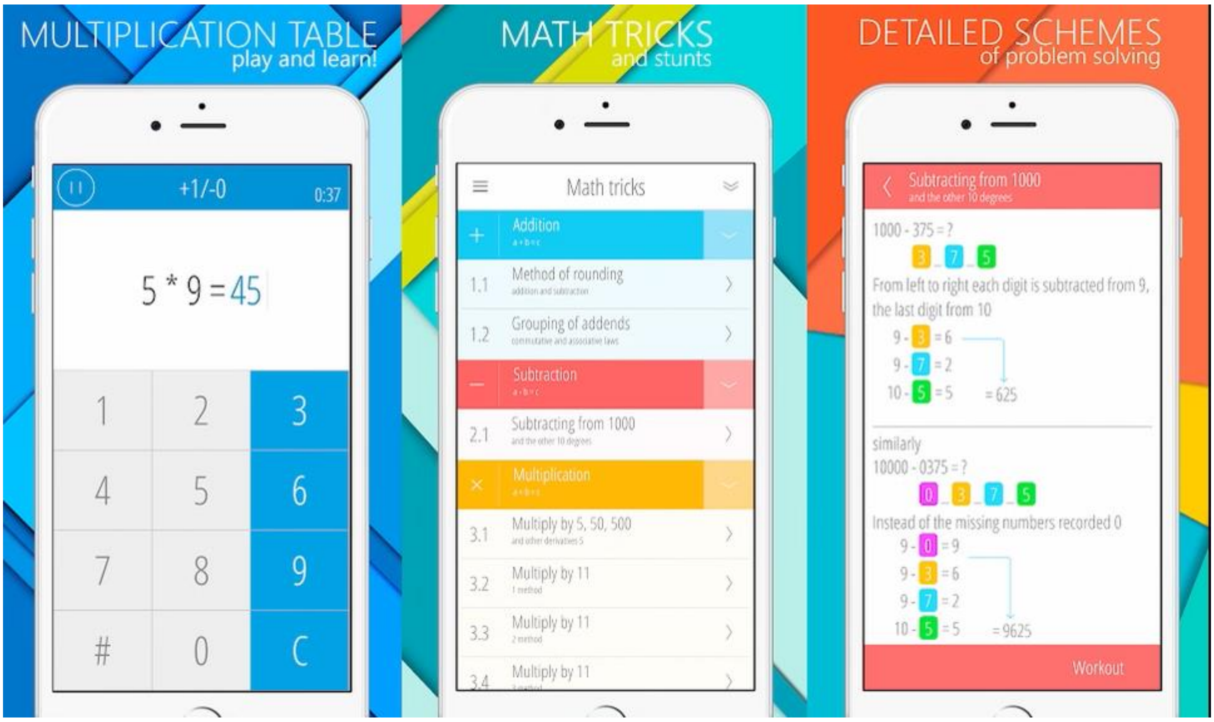
✓ Jogos de matemática:

- 2 modos, 16 tipos diferentes de tarefas matemáticas;
- progressão dificuldade adaptativa;
- sistema de classificação de avaliação, gráficos dos resultados;
- novas lições e exercícios em cada atualização;
- traduzido para 7 Idiomas.

Par ter acesso a este aplicativo, basta ir a Google Play do celular com sistema que seja compatível, e sem necessitar cadastro jogá-lo.

A seguir temos imagem deste aplicativo:

Figura 6 - Aplicativo Mathgame



Fonte: Próprio autor (2019)

Na terceira e última semana antes da aplicação do Q2, foi a vez do uso dos dois últimos aplicativos usados, o Critérios de Divisibilidade e o Múltiplos e Divisores. Com estes dois aplicativos, os alunos puderam aprender múltiplos e divisores de forma prática e divertida, pois tratam-se de jogos de fácil compreensão do jogador, Em paralelo ao uso dos jogos acima citados, foi aplicado um simulado com as mesmas questões dos simulados do sétimo ano B (questões da OBMEP: 15 de 2005, 11 de 2006, 14 de 2007, 7 de 2008, 20 de 2009, 14 de 2011, 9 de 2012, 14 de 2012, 6 de 2013, 12 de 2013, 13 de 2014 e 7 de 2015).

Critérios de Divisibilidade

Com este aplicativo você vai poder rever e praticar critérios de divisibilidade de uma forma simples, porém bem divertida. Com ele poderá estimular seu cérebro, melhorando suas capacidades matemáticas, atenção e concentração. Poderá relembrar que um critério de divisibilidade permite verificar se um número é divisível por outro número, sem efetuar essa divisão. Neste jogo você responde a diversas perguntas sobre vários critérios de divisibilidade, de forma simples e rápida (GOOGLE PLAY, 2019).

De acordo com a Google Play (2019), com este aplicativo o aluno poderá recordar que, por exemplo:

- ✓ Um número natural é divisível por outro número natural (ou é múltiplo doutro número natural) sempre que seja igual a zero o resto da divisão do primeiro pelo segundo (divisão exata);
- ✓ Um critério de divisibilidade por um dado número natural (2, 3, 4, 5, 6,…) permite verificar se um número é divisível pelo número dado, sem efetuar essa divisão;
- ✓ Um critério de divisibilidade por um dado número natural (2, 3, 4, 5, 6,…) é uma propriedade ou um conjunto de propriedades que permite reconhecer os números naturais que são divisíveis pelo número dado (ou seja, permite reconhecer os múltiplos do número dado).

Para ter acesso a este bom jogo, basta dirigir-se ao Google Play de seu smartphone e baixá-lo sem custos e cadastro.

A seguir temos imagem do referido jogo:

Figura 7 - Jogo Critérios de Divisibilidade

Fonte: Próprio autor (2019)

Múltiplos e Divisores

Este é um jogo matemático simples, divertido e educativo, fantástico para se praticar os múltiplos e divisores. Estimula o cérebro, melhorando as capacidades matemáticas, a atenção e a concentração. O objetivo deste jogo é eliminar todos os números existentes no quadro. Em cada passo, basta clicar nos números que respeitem a condição dada (por exemplo, múltiplos de 3 ou divisores de 200) (Google Play, 2019).

Este jogo se apresenta como uma espécie de trilha matemática, com 80 níveis, onde cada nível mescla em perguntar entre uma gama de números (um total de 36 números), quais são os múltiplos ou divisores do número em questão. Por exemplo, no nível 30 pede-se para eliminar todos os divisores de 50, enquanto no nível 1 para eliminar todos os múltiplos de 2 entre os 36 disponíveis.

Para fazer uso deste jogo, basta aquele que tiver interesse, abrir o Google Play de seu celular android ou ios e o baixar sem custos e sem cadastro.

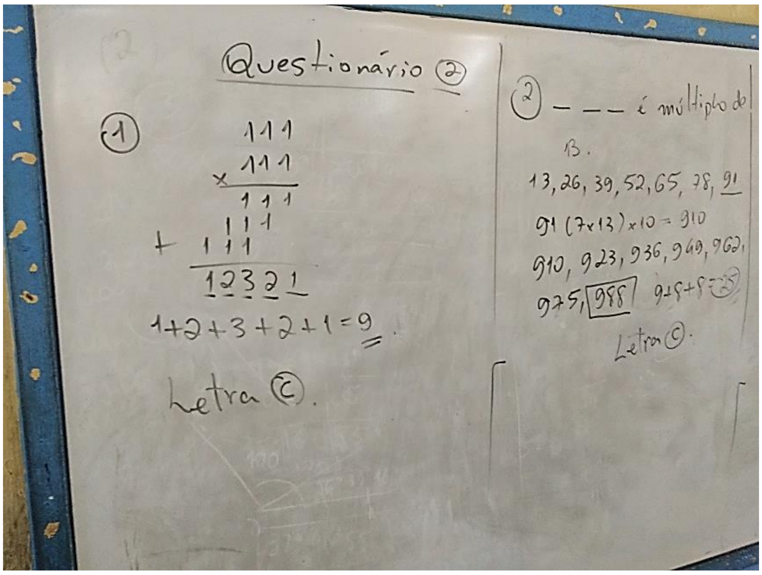
A seguir temos imagem deste jogo:

Figura 8 - Jogo Múltiplos e Divisores

Fonte: Próprio autor (2019)

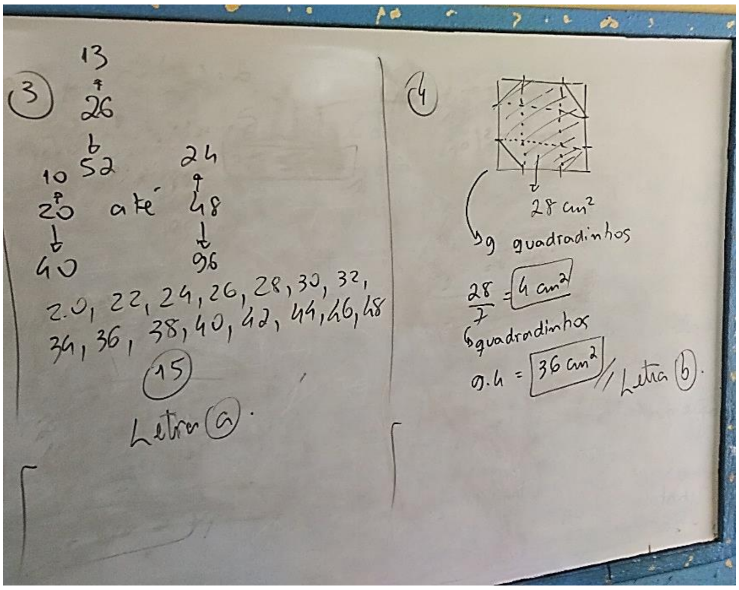
Após essa preparação para as duas turmas, foi aplicado um segundo questionário, também com questões OBMEP nível 1, com as mesmas questões para ambas as turmas. A seguir temos as soluções do segundo questionário (APÊNDICE B), que foi respondido também em sala após o período de preparação:

Figura 9 - Resolução do Q2 em sala (foto 1)



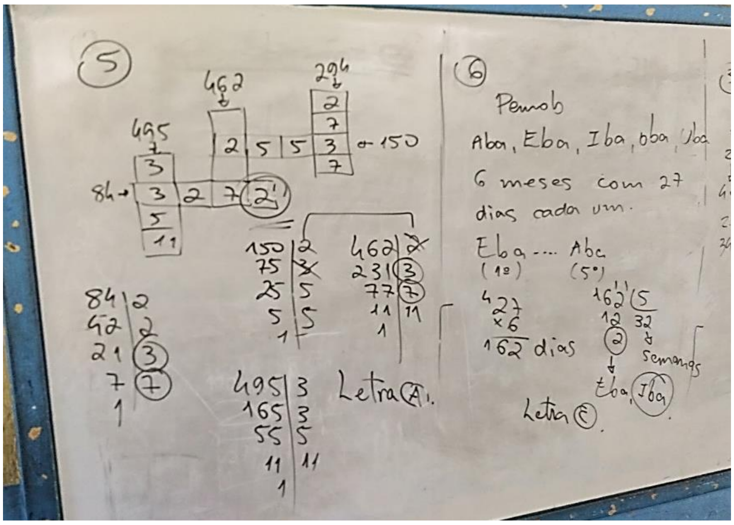
Fonte: Próprio autor (2019)

Figura 10 - Resolução do Q2 em sala (foto 2)



Fonte: Próprio autor (2019)

Figura 11 - Resolução do Q2 em sala (foto 3)



Fonte: Próprio autor (2019)

5.5 Pós teste

Nesta etapa, chamada de Pós Teste, iremos analisar os resultados do questionário 2. O questionário 2 foi aplicado após uma preparação das duas turmas durante um período pré-estabelecido, onde para cada turma foi aplicada uma metodologia diferente, como explicado na etapa Desenvolvimento da Atividade.

Temos a seguir os resultados pós preparação e aplicação do segundo questionário (Q2) dispostos em tabelas e gráficos:

Tabela 5 - Acertos no Q2 do 7° A

7° A – Questionário 2		
Acertos	**Quantidade**	**Percentual (%)**
0 acerto	3	7,14
1 acerto	8	19,04
2 acertos	4	9,52
3 acertos	4	9,52
4 acertos	4	9,52
5 acertos	19	45,23
6 acertos	0	0
TOTAL	42	100

Fonte: Próprio autor (2019)

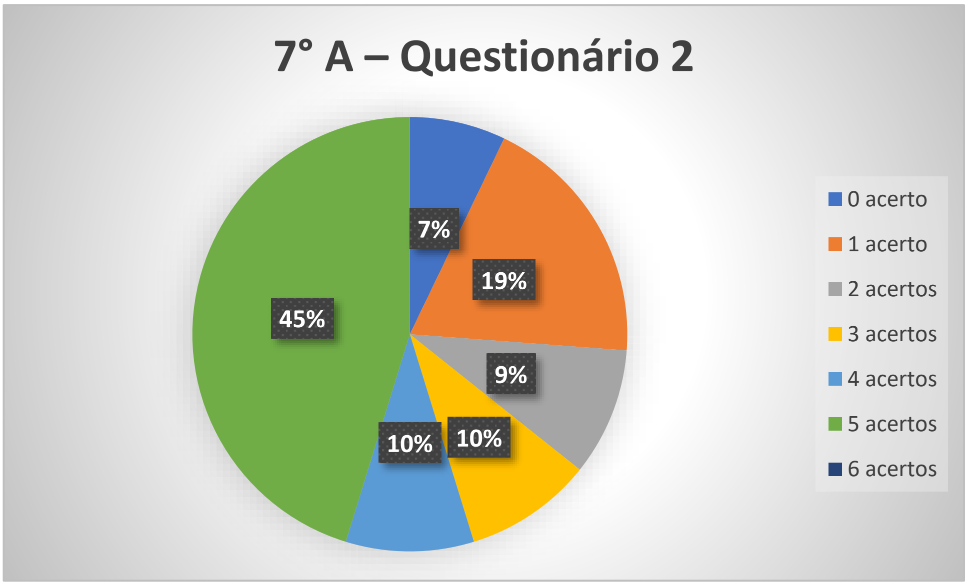
Tabela 6 - Acertos no Q2 do 7° B

7° B – Questionário 2		
Acertos	**Quantidade**	**Percentual (%)**
0 acerto	1	2,5
1 acerto	17	42,5
2 acertos	14	35
3 acertos	8	20
4 acertos	0	0
5 acertos	0	0
6 acertos	0	0
TOTAL	40	100

Fonte: Próprio autor (2019)

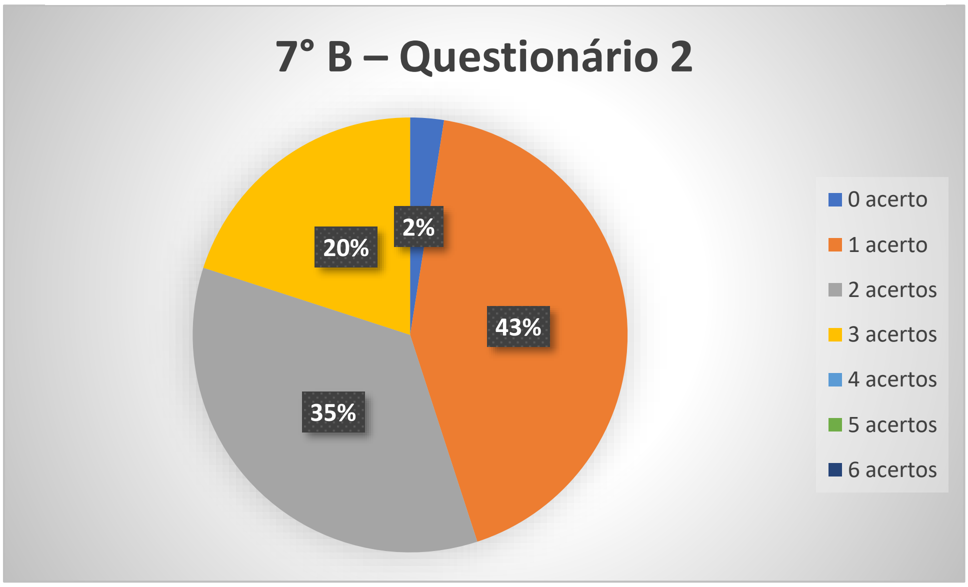
Graficamente, temos esses resultados:

Gráfico 5 - Acertos do 7° A no Q2



Fonte: Próprio autor (2019)

Gráfico 6 - Acertos do 7° B no Q2



Fonte: Próprio autor (2019)

Temos nessas duas tabelas e dois gráficos, anteriormente apresentados, o resultado das duas turmas no segundo questionário, após a preparação por um período que foi previamente determinado, sendo cada turma sendo preparada como determinado na etapa Desenvolvimento da Atividade. Analisando os resultados agora apresentados, temos que: o sétimo ano A teve um total de 42 alunos (100%) que participaram deste questionário, onde destes 7,14% (3 alunos) tiveram 0 acerto, 19,04% (8 alunos) tiveram 1 acerto, 9,52% (4 alunos) tiveram 2 acertos, 9,52% (4 alunos) tiveram 3 acertos, 9,52% (4 alunos) tiveram 4 acertos e 45,23% (19 alunos) tiveram 5 acertos, sendo de 0% o percentual de alunos que tiveram 6 acertos; o sétimo ano B teve um total de 40 alunos (100%) que fizeram participação deste segundo questionário, de onde deste total, 2,5% (1 aluno) teve 0 acerto, 42,5% (17 alunos) tiveram 1 acerto, 35% (14 alunos) tiveram 2 acertos e 20% (8 alunos) tiveram 3 acertos, sendo de 0% o percentual de alunos que tiveram 4, 5 e 6 acertos.

Lembrando que no resultado do questionário 1, analisamos e percebemos que as duas turmas basicamente encontravam-se no mesmo nível quanto a aprendizagem do conteúdo de divisibilidade em séries anteriores. Não que isso corresponda que as duas turmas tiveram uma aprendizagem significativa do conteúdo quando visto nas séries passadas. Fazendo o comparativo entre os resultados do questionário 1 e 2 para o sétimo ano A, vemos um avanço da turma, pois no questionário 1, 57,77% do total obtiveram 2 acertos, enquanto no questionário 2, 45,23% obtiveram 5 acertos. Já o sétimo ano B avançou somente nas quantidades de 1, 2 e 3 acertos, pois no questionário 1, 31,7% tiveram 1 acerto, 24,39% tiveram dois acertos, 19,51% tiveram 3 acertos, e no questionário 2, 42,5% tiveram 1 acerto, 35% tiveram 2 acertos e 20% tiveram 3 acertos. Temos que observar que este avanço é significativo, mostrando assim que o método adotado na turma B tem funcionalidade, porém o prazo para se ter um resultado totalmente eficaz pode demandar um tempo maior.

Como o sétimo ano A foi preparado para o segundo questionário com a chamada metodologia diferenciada e o sétimo ano B com a metodologia tradicional, vemos que houve uma maior efetividade na metodologia adotada no sétimo ano A, a turma obteve um avanço de maneira mais rápida, já na metodologia adotada no sétimo B, houve um avanço significativo, mas necessitando de um tempo maior pra mostrar uma eficácia maior. Isso significa que, a metodologia diferenciada foi mais útil e eficaz do que a chamada metodologia tradicional, mostrando resultados satisfatórios em menor tempo do que a outra metodologia.

Sendo assim, de acordo com Mizukami (1986), a abordagem tradicional do processo de ensino e aprendizagem não se fundamenta em teorias empiricamente validadas, mas sim numa prática educativa e na sua transmissão através dos anos. No ensino tradicional é o professor que domina os conteúdos logicamente organizados e estruturados para serem transmitidos aos alunos. A ênfase do ensino tradicional, portanto, está na transmissão dos conhecimentos (SAVIANI, 1991). Ou seja, nesse método de ensino a aprendizagem acontece de forma mecânica, não demonstrando os resultados de maneira tão rápida como é a metodologia diferenciada, como mostrado anteriormente.

O que percebemos é que, há necessidade de os docentes buscarem novos caminhos e novas metodologias de ensino que foquem no protagonismo dos estudantes, favoreçam a motivação e promovam a autonomia destes. Assim, atitudes como oportunizar a escuta aos estudantes, valorizar suas opiniões, exercitar a empatia, responder aos questionamentos, encorajá-los, dentre outras, são favorecedoras da motivação (BERBEL, 2011) e da criação de um ambiente favorável à aprendizagem.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais de Educação para o Ensino Fundamental:

> Art. 28 A utilização qualificada das tecnologias e conteúdos das mídias como recurso aliado ao desenvolvimento do currículo contribui para o importante papel que tem a escola como ambiente de inclusão digital e de utilização crítica das tecnologias da informação e comunicação, requerendo o aporte dos sistemas de ensino no que se refere à: I – provisão de recursos midiáticos atualizados e em número suficiente para o atendimento aos alunos; II – adequada formação do professor e demais profissionais da escola. (BRASIL, 2013, p. 136).

Acerca disso, Leopoldo (2004, p.13) diz: “As novas tecnologias surgem com a necessidade de especializações dos saberes, um novo modelo surge na educação, com ela pode-se desenvolver um conjunto de atividades com interesses didático-pedagógica”.

Temos na sequência, duas tabelas com o resultado do Q2 das duas turmas já citadas, com relação a quantidade de acertos por questão e percentual com relação ao total de alunos por turma.

Tabela 7 - Acertos por questão no Q2 do 7° A

7° A – Acertos por questão (Q2)	**QUANTIDADE**	**PERCENTUAL COM RELAÇÃO AO TOTAL DE ALUNOS (%)**
Questão 1	31	**73,8**
Questão 2	25	59,52
Questão 3	23	54,76
Questão 4	31	**73,8**
Questão 5	24	57,14
Questão 6	5	**11,9**

Fonte: Próprio autor (2019)

Observamos que no Q2 na turma do sétimo ano A em relação ao número total de alunos (42 alunos), a questão 1 e a questão 4 tiveram maior percentual, 73,8% (31 acertos) e a questão 6 o menor, 11,9% (5 acertos).

A questão 1 do Q2 tem como enunciado: (OBMEP 2014, Questão 1) Stephani multiplicou 111 por 111 e somou os algarismos do resultado. Qual é o valor dessa soma?

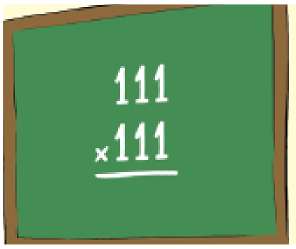
(A) 5

(B) 6

(C) 9

(D) 11

(E) 12



Para se encontrar a solução desta questão basta como pedido no enunciado, resolver a multiplicação $111 \times 111 = 12321$ e somar os algarismos deste resultado, logo $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$, que vem a ser a resposta procurada.

A questão 4 do Q2 tem o seguinte enunciado: (OBMEP 2018, Questão 5) A área da figura destacada em rosa é 28 cm^2, seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?

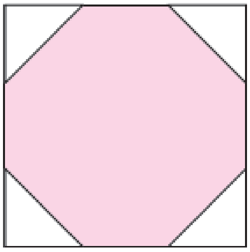
(A) 34 cm^2

(B) 36 cm^2

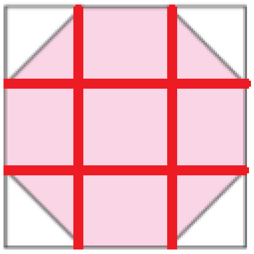
(C) 38 cm^2

(D) 40 cm^2

(E) 42 cm^2



Para se encontrar uma solução de maneira mais rápida, basta observar que podemos dividir o quadrado da figura acima da seguinte forma:



Obtemos após essa divisão 9 quadradinhos de área igual. Sabendo que a área em rosa tem 28 cm^2 e que ela também pode ser dividida em 7 quadradinhos, podemos fazer $28\,\mathrm{cm}^2 \div 7 = 4\ \mathrm{cm}^2$. Logo, a resposta é encontrada fazendo $4\ \mathrm{cm}^2 \times 9 = 36\,\mathrm{cm}^2$.

A questão 6 do Q2 tem como enunciado: (OBMEP 2019, Questão 10) No planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

(A) Aba

(B) Eba

(C) Iba

(D) Oba

(E) Uba

Para a resolução dessa questão, basta fazer inicialmente a multiplicação $6\ meses \times 27\ dias = 162\ dias$. Como cada semana tem 5 dias no planeta Pemob, temos agora que dividir esses 162 dias que cada ano possui, logo $162 \div 5 = 32\ semanas$ e deixando como resto dois dias. Mas em certo ano o primeiro dia foi Eba, sendo assim como sobraram dois dias, temos na sequência Eba e Iba, sendo Iba a resposta desejada.

Podemos observar que as questões de maiores percentuais (questões 1 e 4), tem como assunto abordado multiplicações e divisão e na questão de menor percentual (questão 6), como conteúdo multiplicação e divisão com resto. Os alunos mostraram domínio das operações de multiplicação e divisão, porém na questão 6 não atentaram para a relação que o resto da divisão de 162 por 35 tinha com a semana que, de acordo com o problema, começaria pelo dia Eba, levando assim ao erro da mesma por uma grande parte da turma.

Tabela 8 - Acertos por questão no Q2 do 7° B

7° B – Acertos por questão (Q2)	**QUANTIDADE**	**PERCENTUAL COM RELAÇÃO AO TOTAL DE ALUNOS (%)**
Questão 1	22	**55**
Questão 2	7	17,5
Questão 3	9	22,5
Questão 4	21	**52,5**
Questão 5	5	**12,5**
Questão 6	5	**12,5**

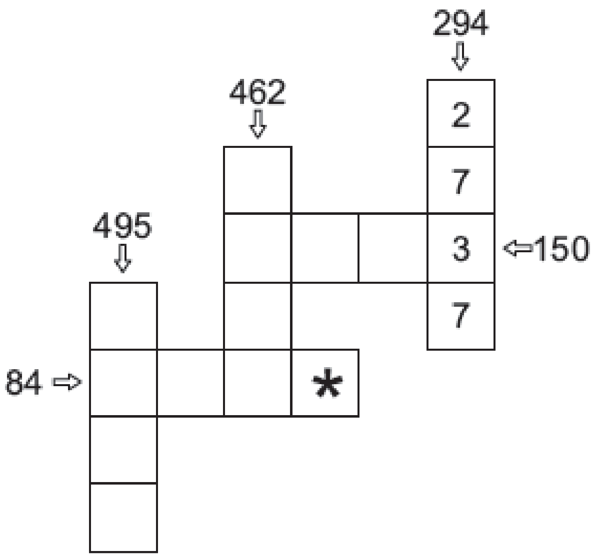
Fonte: Próprio autor (2019)

Vemos que no Q2 a turma B apresentou maior percentual nas questões 1 e 4, tendo como percentuais 55% (22 acertos) e 52,5% (21 acertos) do total de alunos (40 alunos), enquanto nas questões 5 e 6, percebemos igualmente o menor percentual, de 12,5% (5 acertos).

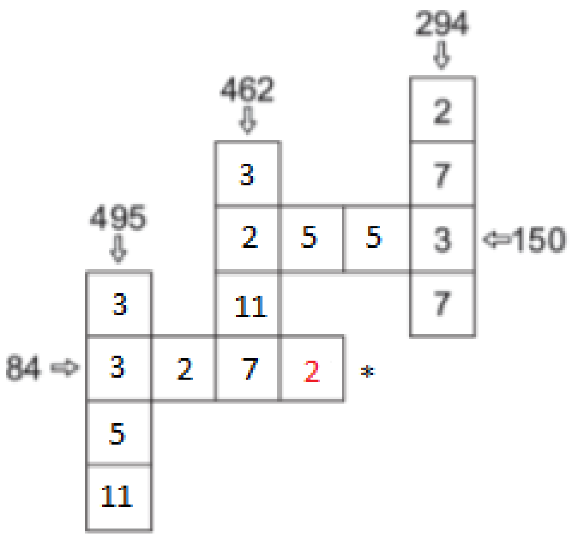
Como já observado na tabela anterior, as questões 1 e 4 abordam o conteúdo de multiplicação e divisão, enquanto a questão 6 aborda multiplicação e divisão com resto.

Já a questão 5 do Q2, cujo enunciado é: (OBMEP 2019, Questão 7) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com $*$?

(A) 2
(B) 3
(C) 5
(D) 7
(E) 11



Para se encontrar a solução dessa questão que vem a ser o valor do $*$, temos que observar que cada casa dessa cruzadinha é preenchida com números primos que vem da decomposição em fatores primos dos números em questão. Como o exemplo dado, $294 = 2 \times 7 \times 3 \times 7$, sendo assim temos: $150 = 3 \times 5 \times 2 \times 5$, $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$, $495 = 3 \times 5 \times 3 \times 11$ e $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Fazendo o preenchimento da cruzadinha com as devidas decomposições temos:

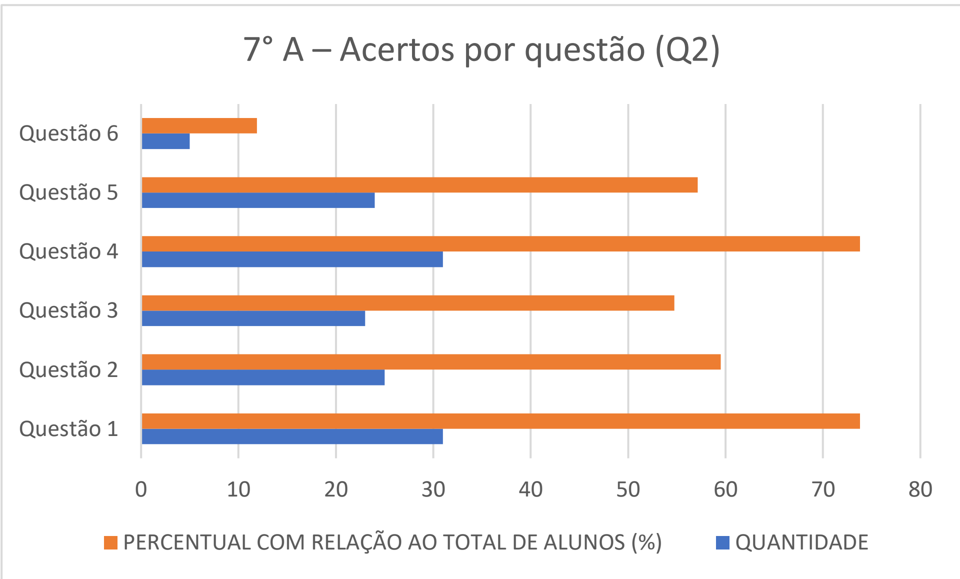


Logo, temos que o valor de $* = 2$.

Podemos observar que com os resultados e com os conteúdos abordados, que a turma B obteve melhor desempenho em questões que envolvem multiplicações e divisões, e um menor desempenho na questão envolvendo decomposição em fatores primos. Da mesma forma que a turma A, a turma B também mostrou bom rendimento quanto às operações de multiplicação e divisão, porém não observando na questão 6 a relação do resto da divisão de 162 por 35 com os dias da semana que começariam por Eba.

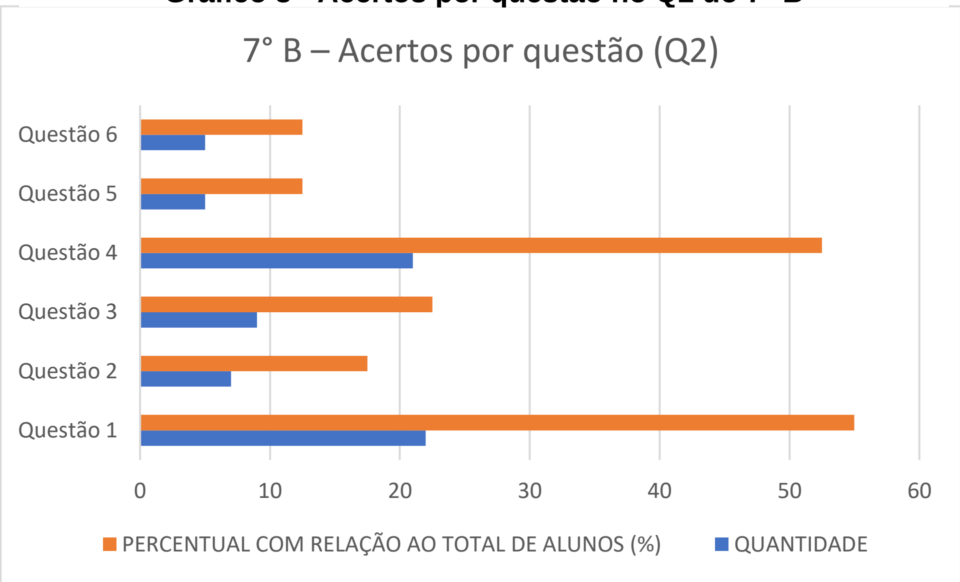
Graficamente, estão apresentados os resultados apresentados nas duas tabelas anteriores:

Gráfico 7 - Acertos por questão no Q2 do 7° A



Fonte: Próprio autor (2019)

Gráfico 8 - Acertos por questão no Q2 do 7° B



Fonte: Próprio autor (2019)

Analisando também os resultados das duas turmas quanto ao número de acertos por questão, vemos que no geral a turma do sétimo ano A apresentou um melhor desempenho, mas a turma do sétimo B também mostrou avanço. Isso mostra que a metodologia inovadora tem maior eficácia em um menor tempo quando comparada a metodologia tradicional, que tem resultados satisfatórios, mas demandando para isso um maior tempo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal mostrar que é possível que um maior número de alunos tenha contato com questões da OBMEP, estimulando e incentivando para uma melhoria na qualidade da Educação Básica. Isso pode contribuir para que os mesmos tornem-se participativos e interessados nas aulas, facilitando sua aprendizagem e encorajando-os a serem curiosos, assumindo um papel ativo na aprendizagem e também colaborando para o despertar deles quanto ao gosto pela matemática, colaborando para o ensino-aprendizagem, construção do espírito crítico e tomada de decisões quanto a resolução de questões da OBMEP Nível 1 envolvendo divisibilidade.

Para atingir o objetivo acima descrito, vimos na quarta parte deste trabalho, que foi aplicado um questionário inicial para dois sétimos anos (A e B) da Escola José Gomes Lima, localizada no município de Água Branca - AL, onde se pretendia fazer um diagnóstico quanto a aprendizagem do conteúdo múltiplos e divisores. Na sequência foi feita uma preparação por um período de 15 a 21 dias com as duas turmas, sendo na turma A usada uma metodologia diferenciada, focada no uso de novas tecnologias, mais precisamente uso de sites e aplicativos e na turma B, a metodologia convencional, o chamado ensino tradicional (quadro e caderno). Por fim na etapa Pós Teste, realizada com o propósito de verificar, mediante o uso de um segundo questionário, o resultado da preparação feita com as duas turmas e segundo analisar os resultados obtidos com uso de tabelas e gráficos.

Pudemos observar e verificar que, após a análise feita das tabelas e gráficos, com os resultados lá expostos que o uso da metodologia diferenciada, com uso de novas tecnologias em comparação ao método que se usa no cotidiano escolar (ensino tradicional), mostrou ter melhores resultados. Na resolução de questões Nível 1 da OBMEP, os alunos conseguiram em sua grande maioria mais acertos, em comparação ao questionário inicial e também na comparação turma com turma. Isso mostra a necessidade gritante do uso de novas tecnologias asscociadas ao ensino, pois percebe-se a efetividade na prática de resultados positivos, mostrando assim que o objetivo proposto inicialmente foi atingido com sucesso.

REFERÊNCIAS

APLICATIVO CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=air.AppCriteriosv2&hl=pt_BR>. Acesso em: 13 set. 2019.

APLICATIVO MATHGAME. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=org.nixgame.mathematics&hl=pt_BR>. Acesso em: 01 set. 2019.

APLICATIVO MÚLTIPLOS E DIVISORES. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=air.multiplesDivisores&hl=pt_BR>. Acesso em: 15 set. 2019.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes. 1982.

BERBEL, N. **As metodologias ativas e a promoção da autonomia dos estudantes. Semina: Ciências Sociais e Humanas**. Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, jan./jun. 2011.

BONILLA, M. H. S. **Educação e inclusão digital**. 2015. Disponível em: <http://www.twiki.ufba.br/twiki/pub/GEC/RepositorioProducoes/artigo_bonilla__mesa_inclusao_digital.pdf>. Acesso em: 15 out. 2019.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1991.

BRASIL. **Diretrizes da Educação Básica**. Brasília. 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file> Acesso em: 20 nov. 2019.

DIAS, R**. Competição Mobiliza Escolas Públicas de Todo o País Desponta como de Novos Talentos**. Jornal Ciência & Tecnologia. Ano 2, n. 6. maio/junho, Brasília, 2005.

DOLZ, J. e SCHNEUWLY, B. **Gêneros e progressão em expressão oral e escrita. Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In: Gêneros Orais e escritos na escola**. Campinas (SP): Mercado de Letras. 2004.

FRANCO, S. R. F. **O Construtivismo e a Educação**. Porto Velho: GAP, 1991.

FREIRE, P. **Educação e Mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra. 1979.

GRANDO, J.; MACEDO, M. de. **Adaptação: o contraste entre o ensino tradicional e a interferência da era digital no processo de ensino**. Uniedu, Santa Catarina: 2017. Disponível em: <http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2017/02/Jaison-Grando.pdf>. Acesso em: 12 set. 2019.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

IMPA. **Regulamento da OBMEP**. Rio de Janeiro, RJ: Ministério da Educação – MEC. 2019. Disponível em: <http:// http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 18 fev. 2019.

LEÃO, D. M. M. **Paradigmas Contemporâneos de Educação: Escola Tradicional e Escola Construtivista**. FACED – UFC: nº 107, p. 187-206, julho/1999. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/cp/n107/n107a08.pdf>. Acessado em: 10 nov. 2019.

LEOPOLDO, L. P. **Novas Tecnologias na Educação: Reflexões sobre a prática. Formação docente e novas tecnologias**. Maceió: Edufal, 2002.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2001.

MEC. **Portal MEC: Olimpíada de Matemática realiza primeira etapa hoje**. 2005 Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/3894-sp-72381753>. Acesso em: 25 mar. 2019.

MIZUKAMI, M. da G. N. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986. Disponível em: <http://nead.uesc.br/arquivos/Biologia/mod4bloco4/ep4/ABORDAGENSDOPROCESSO.pdf > Acesso em: 03 abr. 2019.

OBM. **Histórico**. 2019. Disponível em: < https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>. Acesso em: 12 out. 2019.

OBMEP. **Histórico**. 2019. Disponível em: <https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>. Acesso em: 16 mai. 2019.

OLIVEIRA, K.; CORCHO A. J. (2010). **Iniciação à Matemática**. PROFMAT.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. **Sequência didática na matemática**. **Revista de Educação do Ideau**. Rio de Janeiro, vol.8, n.17, p. 6, 2013.

PORTAL DO SABER DA OBMEP. Disponível em: < https://portaldosaber.obmep.org.br/>. Acesso em: 14 set. 2019.

PROVA DA OBMEP 2005 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1KH0HaBdExd2b5KZ9DXjKmpr7prPRL1wf/view>. Acesso em: 12 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2006 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1EQUxhAC39lUfnFl1bfgwigv1rSoGXdyV/view>. Acesso em: 15 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2007 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1hQJ5lJ9UPx2KvjvTKtl2MRO4E0pO8jXs/view>. Acesso em: 16 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2008 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1-n85hyZwloC3mYaGdwCnANNn9XwVVY8u/view>. Acesso em: 17 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2009 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1U1cej_UzczDgwTy40ANHj9f_7Rwl-bFW/view>. Acesso em: 18 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2010 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1vDFxJNHbxptTbpybhewBYCsyhA8Xvs85/view>. Acesso em: 19 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2011 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1KsCrVE9cN1Mo64kHHDGzU0PWvPydSjLq/view>. Acesso em: 20 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2012 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1AxzfVbDtFxQq0xBBrr4Yye8Z8HxuEB0m/view>. Acesso em: 21 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2013 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1e_8Nt4P6fzdr7k-UmqxGarLFe1eFv3zN/view>. Acesso em: 22 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2014 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1SK-1rqx7M6MZ6wWSROJZtYSpqyFUlogV/view>. Acesso em: 22 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2015 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/188rcPvCr4oKQOY4PSnBP5AUeT5ZU6myY/view>. Acesso em: 23 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2016 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1eKRYzPZX2ZYQLpa-uB32IAmCLiucv-o_/view>. Acesso em: 24 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2017 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em:

<https://drive.google.com/file/d/1FLmHogjZxSMKA9HrQBHgPh7mUVGaeMVb/view>. Acesso em: 24 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2018 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/13TGb_47jzpdG0aCggZa2gRqEICfHztAY/view>. Acesso em: 25 ago. 2019.

PROVA DA OBMEP 2019 NÍVEL 1 PRIMEIRA FASE. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acesso em: 25 ago. 2019.

REVISTA EUREKA. Número 1, 1998. Disponível em: < https://www.obm.org.br/revista-eureka/>. Acesso em: 12 set. 2019.

REVISTA NOVA ESCOLA. **Sequência Didática**. 2009. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2664/guy-brousseau-referencia-na-didatica-da-matematica> Acesso em: 12 out. 2019.

RODRIGUES, L. P.; MOURA, L. S.; TESTA, E. **Tradicional e o Moderno Quanto a Didática no Ensino Superior**. Revista Científica do ITPAC, Araguaína, v.4, n.3, Pub.5, Julho 2011. Disponível em: <http://www.itpac.br/arquivos/Revista/43/5.pdf> Acesso em: 02 fev. 2019.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. 24. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SBM. **Primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática acontece no sábado (15)**. 2015. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/noticias/primeira-fase-da-olimpiada-brasileira-de-matematica-acontece-no-sabado-15>. Acesso em: 11 ago. 2019.

SILVA, J. M. **A utilização de laboratórios de informática nas aulas de matemática nas escolas públicas de ensino médio de Taguatinga-DF**. 2006. Disponível em:<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/JanainaMartinsdaSilva.pdf> Acessado em 10 set. 2019.

SOUZA, C. S., IGLESIAS, A. G., FILHO, A. P. **Estratégias inovadoras para métodos de ensino tradicionais - Aspectos gerais**. Ribeirão Preto, v. 47, n. 3, p. 284-292, jun. 2014. Disponível em: <http://revista.fmrp.usp.br/2014/vol47n3/6_Estrategias-inovadoras-para-metodos-de-ensinotradicionais-aspectos-gerais.pdf> Acessado em 18 de março de 2019.

VIEIRA, V. L. **Um curso básico em teoria dos números**. Campina Grande: EDUEPB, São Paulo: LIVRARIA DA FÍSICA, 2015.

WAGNER, F. R. **Habilidade e inclusão digital: o papel das escolas**. 2009. Disponível em: <http://www.cgi.br/publicacoes/artigos/artigo64.htm> Acesso em: 12 nov. 2019.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A

Questionário 1

1) (OBMEP 2005, Questão 16) Rosa e Maria começaram a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

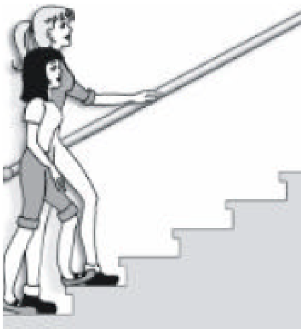
(A) meio minuto

(B) 40 segundos

(C) 45 segundos

(D) 50 segundos

(E) 1 minuto



2) (OBMEP 2007, Questão 8) Uma turma tem 36 alunos e cada um deles tem um número de 1 a 36 na lista de chamada. Ontem, a professora chamou Lia ao quadro negro e mais os outros seis alunos cujos números eram múltiplos do número de Lia. Qual foi o maior número chamado?

(A) 14

(B) 20

(C) 25

(D) 32

(E) 35

3) (OBMEP 2009, Questão 3) Partindo do número 2 na figura e fazendo as quatro contas no sentido da flecha o resultado é 12, porque $2 \times 24 = 48$, $48 \div 12 = 4$, $4 \times 6 = 24$ e $24 \div 2 = 12$. Se fizermos a mesma coisa partindo do maior número que aparece na figura, qual será o resultado?

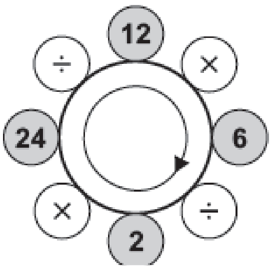
(A) 18

(B) 32

(C) 64

(D) 72

(E) 144



4) (OBMEP 2010, Questão 13) Paula iniciou um programa de ginástica no qual os dias de treino são separados por dois dias de descanso. Se o primeiro treino foi em uma segunda-feira, em qual dia cairá o centésimo treino?

(A) domingo

(B) segunda-feira

(C) terça-feira

(D) quinta-feira

(E) sexta-feira

5) (OBMEP 2009, Questão 5) Um bloco de folhas retangulares de papel pesa 2 kg. Outro bloco do mesmo papel tem o mesmo número de folhas que o primeiro,mas suas folhas têm o dobro do comprimento e o triplo da largura. Qual é o peso do segundo bloco?

(A) 4 kg

(B) 6 kg

(C) 8 kg

(D) 10 kg

(E) 12 kg

6) (OBMEP 2011, Questão 18) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo 10 convidados e todo convidado deve ser atendido por um garçon. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidados para uma festa nesse salão?

(A) 584

(B) 612

(C) 624

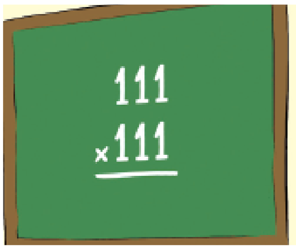
(D) 636

(E) 646

APÊNDICE B

<u>Questionário 2</u>

1) (OBMEP 2014, Questão 1) Stephani multiplicou 111 por 111 e somou os algarismos do resulato. Qual é o valor dessa soma?



(A) 5

(B) 6

(C) 9

(D) 11

(E) 12

2) (OBMEP 2016, Questão 5) Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual é a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

(A) 23

(B) 24

(C) 25

(D) 26

(E) 27

3) (OBMEP 2016, Questão 8) A metade e o dobro do número 26 são números naturais de dois algarismos. Quantos são os números naturais que possuem essas mesmas propriedades?

(A) 15

(B) 18

(C) 20

(D) 22

(E) 25

4) (OBMEP 2018, Questão 5) A área da figura destacada em rosa é 28 cm^2, seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?

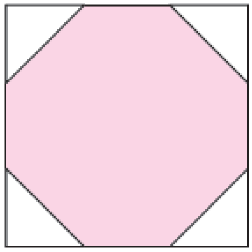
(A) 34 cm^2

(B) 36 cm^2

(C) 38 cm^2

(D) 40 cm^2

(E) 42 cm^2



5) (OBMEP 2019, Questão 7) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com $*$?

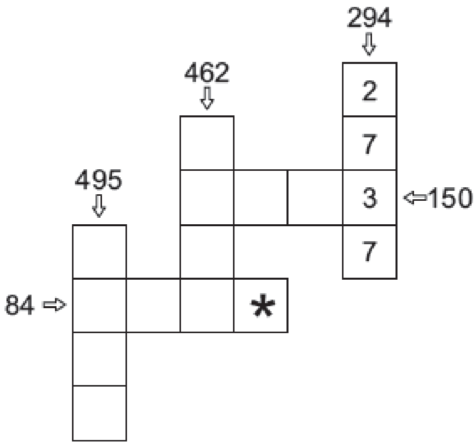
(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 11



6) (OBMEP 2019, Questão 10) No planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

(A) Aba

(B) Eba

(C) Iba

(D) Oba

(E) Uba

APÊNDICE C

<u>Exercícios (7° ano B)</u>

1) O ano bissexto possui 366 dias e sempre é múltiplo de 4. O ano de 2012 foi o último bissexto. Porém, há casos especiais de anos que, apesar de múltiplos de 4, não são bissextos: são aqueles que também são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400. O ano de 1900 foi o último caso especial. A soma dos algarismos do próximo ano que será um caso especial é:

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

2) Num país, a eleição para presidente ocorre a cada 5 anos e para prefeito, a cada 4 anos. Se em 2012 houve coincidência das eleições para esses cargos, qual o próximo ano em que elas voltarão a coincidir?

R- ____

3) Um carteiro tem várias correspondências para entregar numa rua numerada de 1 a 30. Para as casas pares ele entregará as contas de gás e para as casas terminadas em 0 ou 5 ele entregará as contas de luz.

a) Quantas casas receberão contas de luz? ________________
b) Quantas casas receberão contas de gás? _________________
c) Quantas casas receberão as duas contas? _________________
d) Quantas casas receberão só contas de luz? _______________
e) Quantas casas receberão só contas de gás? _______________
f) Quantas casas não receberão contas nem de luz, nem de gás? _____________

4) Quantos números de 3 a 26 não são múltiplos de 2? _____________

5) Qual o maior múltiplo de 7 entre 100 e 1000? ___________________

6) Escreva 3 múltiplos de 3 e 5 ao mesmo tempo entre 100 e 200. _______________

7) Coloque V (verdadeiro) ou F (falso) para cada afirmação abaixo:

(   ) a decomposição em fatores primos de 300 é 2 x 2 x 3 x 5 x 5.
(   ) a decomposição em fatores primos de 100 é 2 x 2 x 2 x 5.
(   ) a decomposição em fatores primos de 38 é 2 x 2 x 7.
(   ) a decomposição em fatores primos de 56 é 2 x 2 x 2 x 7.
(   ) a decomposição em fatores primos de 350 é 2 x 3 x 3 x 5 x 7.

8) Coloque V (verdadeiro) ou F (falso);

(   ) Todo número natural é múltiplo de 1.
(   ) Todo número natural é múltiplo de zero.
(   ) O número zero é múltiplo de todos os números.
(   ) O conjunto dos múltiplos de 3 é o conjunto dos números ímpares.
(   ) Todo número primo é ímpar.
(   ) Alguns números primos são ímpares.
(   ) 1 é primo e ímpar.
(   ) Todo número múltiplo de 4 é múltiplo de 2.
(   ) Todo múltiplo de 2 e 5 tem como algarismos das unidades o 0.

9) Escreva os números que se pede abaixo:

a) Um número de 3 algarismos múltiplo de 5: _________________
b) Um número de 5 algarismos diferentes múltiplo de 4: __________

APÊNDICE D

CARTA DE AUTORIZAÇÃO

Eu, Maria de Fátima de Souza Amaral_, Diretora da Escola José Gomes Lima, tenho ciência e autorizo a realização da pesquisa intitulada Divisibilidade no Ensino Fundamental: uma proposta de abordagem usando questões da OBMEP sob responsabilidade do pesquisador Jefson Glowascki da Silva na Escola José Gomes Lima. Para isto, serão disponibilizados ao pesquisador o espaço da escola e o uso do nome da escola no trabalho escrito.

Água Branca AL,16/10/2019.

Maria de Fátima de Souza Amaral

(nome completo do responsável e cargo ocupado no local onde a pesquisa será realizada)

Maria de Fátima Souza Amaral
Diretora Geral
Portaria: 088 - 16/10/2019

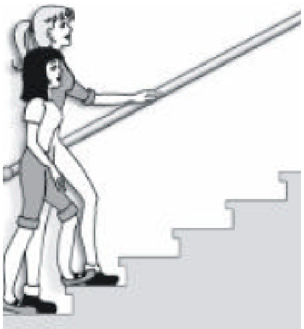
APÊNDICE E

Banco de questões OBMEP Nível 1 (Divisibilidade)

2005

16) Rosa e Maria começaram a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

(A) meio minuto
(B) 40 segundos
(C) 45 segundos
(D) 50 segundos
(E) 1 minuto



18. Caio e Sueli começaram, separadamente, a guardar moedas de R$ de 1,00 em janeiro de 2004. Todo mês Caio guardava 20 moedas e Sueli guardava 30 moedas. Em julho de 2004 e nos meses seguintes, Caio não guardou mais moedas, enquanto Sueli continuou a guardar 30 por mês. No final de que mês Sueli tinha exatamente o triplo do número de moedas que Caio guardou

(A) agosto
(B) setembro
(C) outubro
(D) novembro
(E) dezembro

2006

11) Cada um dos símbolos $\square$ e Δ representa um único algarismo. Se a multiplicação indicada ao lado está correta, então o valor de $\square$ x Δ é

$$\begin{array}{ccc} \square & 2 & \square \\ \times & & \square \\ \hline \Delta & 6 & \Delta \end{array}$$

(A) 12

(B) 15

(C) 27

(D) 39

(E) 45

2007

8) Uma turma tem 36 alunos e cada um deles tem um número de 1 a 36 na lista de chamada. Ontem, a professora chamou Lia ao quadro negro e mais os outros seis alunos cujos números eram múltiplos do número de Lia. Qual foi o maior número chamado?

(A) 14

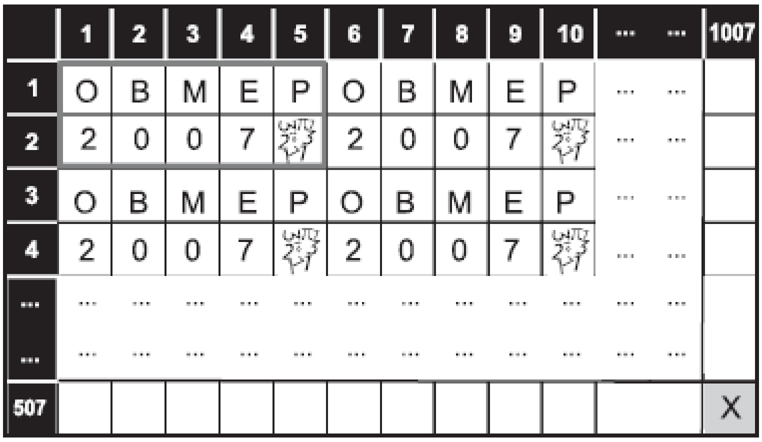
(B) 20

(C) 25

(D) 32

(E) 35

14) O professor Samuel preencheu uma tabela com 507 linhas e 1007 colunas de acordo com o padrão indicado a seguir:



Como ele preencheu a casa indicada com o X?

(A) com o número 2

(B) com a letra B

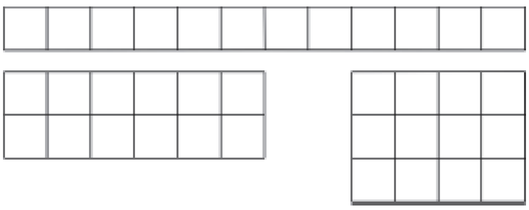
(C) com a letra M

(D) com o número 7

(E) com o símbolo 

2008

7) A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais



Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?

(A) 3

(B) 4

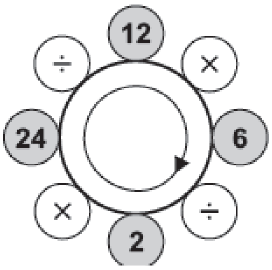
(C) 5

(D) 6

(E) 7

2009

3) Partindo do número 2 na figura e fazendo as quatro contas no sentido da flecha o resultado é 12, porque $2 \times 24 = 48$, $48 \div 12 = 4$, $4 \times 6 = 24$ e $24 \div 2 = 12$. Se fizermos a mesma coisa partindo do maior número que aparece na figura, qual será o resultado?



(A) 18
(B) 32
(C) 64
(D) 72
(E) 144

5) Um bloco de folhas retangulares de papel pesa 2 kg. Outro bloco do mesmo papel tem o mesmo número de folhas que o primeiro,mas suas folhas têm o dobro do comprimento e o triplo da largura. Qual é o peso do segundo bloco?

(A) 4 kg
(B) 6 kg
(C) 8 kg
(D) 10 kg
(E) 12 kg

20) Um torneio de futebol com 57 times será disputado com as seguintes regras:

- Nenhum jogo de futebol pode terminar empatado.
- O time que perder duas partidas será eliminado.
- O torneio termina quando sobrar apenas um time, que será o campeão.

Se o time campeão perder uma vez, quantas partidas serão disputadas no torneio?

(A) 56
(B) 57
(C) 58
(D) 112
(E) 113

2010

13) Paula iniciou um programa de ginástica no qual os dias de treino são separados por dois dias de descanso. Se o primeiro treino foi em uma segunda-feira, em qual dia cairá o centésimo treino?

(A) domingo

(B) segunda-feira

(C) terça-feira

(D) quinta-feira

(E) sexta-feira

2011

14) Quatro times disputaram um torneio de futebol em que cada um jogou uma vez contra cada um dos outros. Se uma partida terminasse empatada, cada time ganhava um ponto; caso contrário, o vencedor ganhava três pontos e o perdedor, zero. A tabela mostra a pontuação final do torneio. Quantos foram os empates?

Time	Pontos
Cruzínthians	5
Flameiras	3
Nauritiba	3
Greminense	2

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

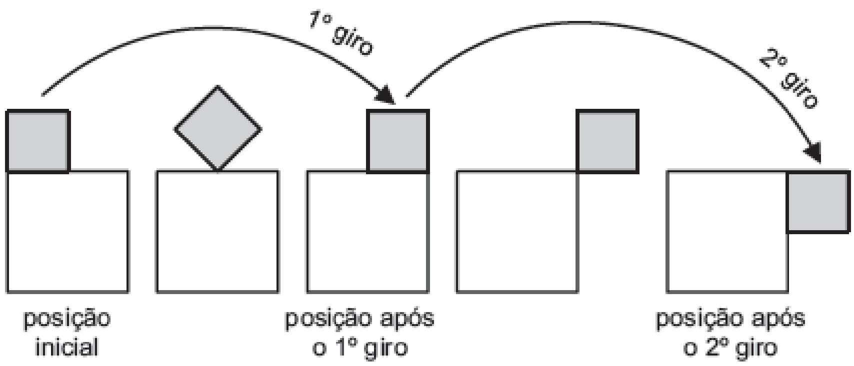
(E) 6

18) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo 10 convidados e todo convidado deve ser atendido por um garçon. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidados para uma festa nesse salão?

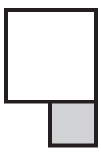
(A) 584
(B) 612
(C) 624
(D) 636
(E) 646

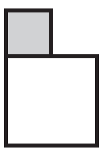
2012

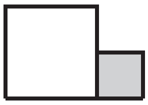
9) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que u, de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

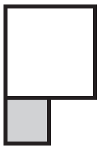


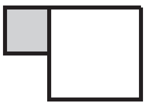
Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012° giro?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

14) Juliana cortou uma tira de papel de 4 cm por 12 cm e a dobrou de modo indicado na figura, obtendo assim um quadrado. Em seguida, ela cortou o quadrado diagonalmente, como mostra a figura. Com os pedaços obtidos, ela montou dois novos quadrados. Qual é a diferença entre as áreas desses quadrados?

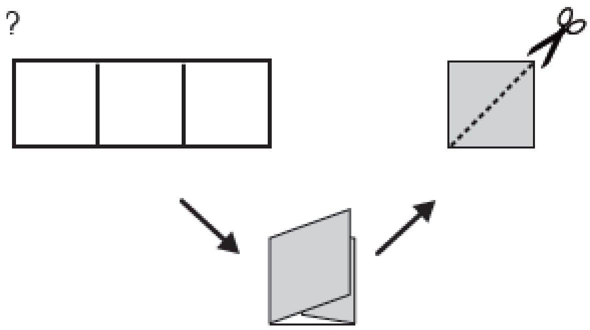
(A) 9 cm^2

(B) 12 cm^2

(C) 16 cm^2

(D) 18 cm^2

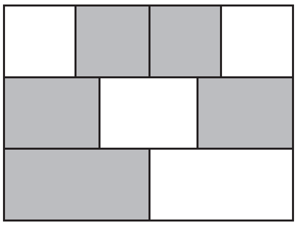
(E) 32 cm^2



2013

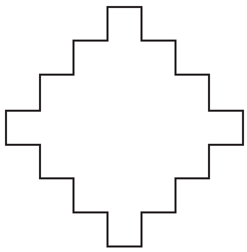
6) A figura representa um retângulo de área 36 cm^2, dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três partes e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?

(A) 18 cm^2
(B) 20 cm^2
(C) 22 cm^2
(D) 24 cm^2
(E) 26 cm^2



9) A figura representa um polígono em que todos os lados são horizontais ou verticais e têm o mesmo comprimento. O perímetro desse polígono é 56 cm. Qual é sua área?

(A) 25 cm^2
(B) 50 cm^2
(C) 75 cm^2
(D) 100 cm^2
(E) 125 cm^2



12) Qual é o algarismo das dezenas da soma

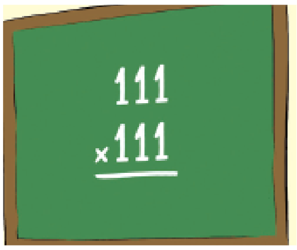
$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \underbrace{7777}_{\text{quatro setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{setenta e seis setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}}\,?$$

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

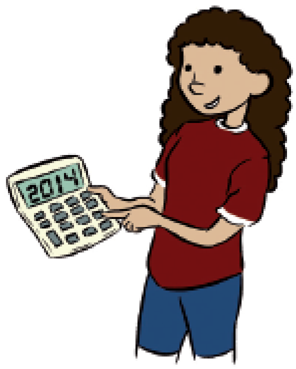
2014

1) Stephani multiplicou 111 por 111 e somou os algarismos do resulato. Qual é o valor dessa soma?

(A) 5
(B) 6
(C) 9
(D) 11
(E) 12



8) Ana Maria apertou as teclas 1 9 × 1 0 6 = de sua calculadora e o resultado 2014 apareceu no visor. Em seguida, ela limpou o visor e fez aparecer novamente 2014 com uma multiplicação de dois números naturais, mas dessa vez, apertando seis teclas em vez de sete. Nesta segunda multiplicação, qual foi o maior algarismo cuja tecla ela apertou?



(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

13) O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos algarismos, escritos em ordem inversa, é 2944. Qual é a soma dos dois números multiplicados?

(A) 99

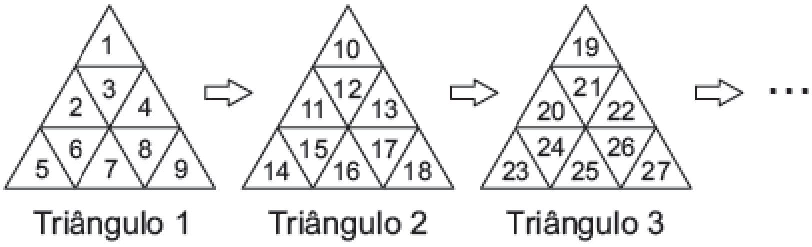
(B) 110

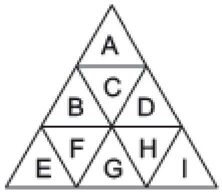
(C) 121

(D) 143

(E) 154

15) Guilherme começa a escrever os números naturais em figuras triangulares de acordo com o padrão abaixo:





Nomeando as casas de cada um desses triângulos com as letras A, B, C, D, E, F, G, H e I, como na figura ao lado, ele pode codificar cada número natural por meio do número do triângulo e da letra da casa em que ele aparece.

Por exemplo, o número 5 é codificado 1E, pois aparece na casa E do Triângulo 1. Já o número 26 é codificado por 3H, pois aparece na casa H do Triângulo 3. Como Guilherme codifica o número 2014?

(A) 222E

(B) 222G

(C) 223H

(D) 224E

(E) 224G

2015

6) Qual é o algarismo das unidades do número

$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 - 2015$?

(A) 0
(B) 1
(C) 5
(D) 6
(E) 8

7) O número 4 580 254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?

(A) 4580249
(B) 4580248
(C) 4580247
(D) 4780246
(E) 4780245

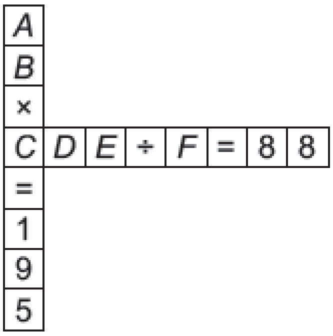
15) As contas $AB \times C = 195$ e $CDE \div F = 88$ estão corretas sendo A, B, C, D, E e F algarismos diferentes. O número AB é formado pelos algarismos A e B, e o número CDE é formado pelos algarismos C, D e E. Qual é o algarismo representado pela letra F?

(A) 1
(B) 2

(C) 4

(D) 6

(E) 8



2016

5) Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual é a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

(A) 23

(B) 24

(C) 25

(D) 26

(E) 27

8) A metade e o dobro do número 26 são números naturais de dois algarismos. Quantos são os números naturais que possuem essas mesmas propriedades?

(A) 15

(B) 18

(C) 20

(D) 22

(E) 25

2017

14) Mônica e seu namorado foram assistir a uma peça de teatro. O auditório era organizado em fileiras paralelas ao palco, todas com o mesmo número de cadeiras dispostas lado a lado. Eles sentaram um ao lado do outro nos dois últimos lugares vagos. Mônica percebeu que havia, no total, 14 pessoas nas fileiras à sua frente e 21 pessoas nas fileiras atrás da sua. Quantas cadeiras havia no auditório?

(A) 37

(B) 38

(C) 40

(D) 42

(E) 49

19) Em uma competição as partidas têm duração de 60 minutos, e cada time tem sempre 5 jogadores em campo. Em determinada partida, um time inscreveu 8 atletas e foram feitas várias substituições de modo que cada um deles jogou a mesma quantidade de tempo. Quanto tempo cada um deles jogou nessa partida?

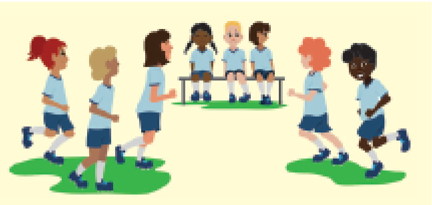
(A) 27 minutos e 30 segundos

(B) 30 minutos

(C) 37 minutos e 30 segundos

(D) 40 minutos

(E) 42 minutos e 30 segundos



2018

5) A área da figura destacada em rosa é 28 cm^2, seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?

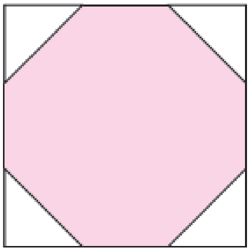
(A) 34 cm^2

(B) 36 cm^2

(C) 38 cm^2

(D) 40 cm^2

(E) 42 cm^2



6) Silvia e Renato vão fazer 60 biscoitos cada um. Eles começam a fazer os biscoitos ao mesmo tempo. A cada minuto Silvia faz 5 biscoitos, enquanto Renato faz 3. Quantos biscoitos Renato ainda deverá fazer depois que Silvia terminar sua tarefa?

(A) 12

(B) 16

(C) 18

(D) 20

(E) 24

2019

7) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com $*$?

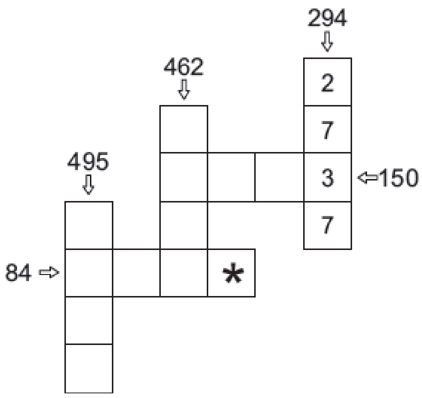
(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 11



10) No planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

(A) Aba

(B) Eba

(C) Iba

(D) Oba

(E) Uba