



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT

Luiz Carlos Zamith Moreira

CÁLCULO VETORIAL E ELETROMAGNETISMO:
AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Florianópolis

2020

Luiz Carlos Zamith Moreira

CÁLCULO VETORIAL E ELETROMAGNETISMO: AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Celso Melchhiades Doria

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Moreira, Luiz Carlos Zamith
CALCULO VETORIAL E ELETROMAGNETISMO : AS EQUACOES DE
MAXWELL / Luiz Carlos Zamith Moreira ; orientador, Celso
Melchiades Doria, 2020.
89 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Vetor. 3. Cálculo. 4.
Eletromagnetismo. 5. Maxwell. I. Doria, Celso Melchiades.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Matemática. III. Título.

Luiz Carlos Zamith Moreira

CÁLCULO VETORIAL E ELETROMAGNETISMO: AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Wagner Figueiredo
UFSC

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
UFSC

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Prof. Dr. Celso Melchhiades Doria
Orientador

Florianópolis, 30 de Março 2020.

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram em todas as minhas singradas e são meus grandes exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao meu orientador, Prof. Celso Doria, pela dedicação como mestre e amigo. Sempre muito paciente, conselheiro e acessível, sua ajuda e orientação tornaram possível desenvolver este trabalho.

Aos meus colegas Ananda Burin e Leandro Garcia, companheiros de classe, dos almoços de sexta-feira e de estudos nas noites pré-prova. A parceria de vocês ao longo destes anos foi especial, e sem dúvida contribui para a conclusão deste trabalho.

Por último, à minha esposa Aline, que me incentivou e me apoiou muito nesta etapa decisiva em minha vida.

A teoria especial de Relatividade deve suas origens às Equações de Maxwell do campo eletromagnético

(Albert Einstein)

RESUMO

Inspirado na empolgante história do desenvolvimento da teoria eletromagnética, este trabalho traz os conhecimentos matemáticos necessários para se estudar as Equações de Maxwell. Dessa forma, nos capítulos iniciais são abordadas a teoria vetorial básica, com definição de vetores, espaços vetoriais, campos, e operações com vetores. Em seguida aprofunda-se o estudo em cálculo vetorial com as integrais de linha e superfície e em operadores vetoriais com as definições de gradiente, divergente e rotacional. Por fim são explorados os importantes Teoremas de Green, Gauss e Stokes, concluindo o trabalho com a apresentação das quatro equações de Maxwell.

Palavras-chave: Vetor, Cálculo, Eletromagnetismo, Maxwell

ABSTRACT

Inspired by the exciting history of the development of the electromagnetic theory, this work brings the necessary mathematical knowledge for the study of Maxwell's Equations. Thus, in the starting chapters, the basic vector theory is approached with definitions of vectors, vector spaces, fields and operations with vectors. Then, the study is deepened in vectorial calculus with line and surface integrals and in vectorial operators with the definitions of gradient, divergent and rotational. Finally, the important Green, Gauss and Stokes Theorems are explored, concluding the work with a presentation of the four Maxwell's Equations.

Keywords: Vector; Calculus; Eletromagnetism; Maxwell.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Linha do Tempo.....	26
Figura 2	Vetores Simétricos.....	30
Figura 3	Coordenadas Cartesianas.....	30
Figura 4	Soma de Vetores.....	31
Figura 5	Soma de vetores representada geometricamente.....	31
Figura 6	Decomposição de vetores em componentes.....	32
Figura 7	Multiplicação por escalar representada geometricamente.....	32
Figura 8	Decomposição de vetores em coordenadas.....	33
Figura 9	Interpretação geométrica do produto escalar.....	34
Figura 10	Produto escalar e a projeção de um vetor na direção do outro.....	35
Figura 11	Produto escalar e trabalho.....	36
Figura 12	Produto Vetorial.....	38
Figura 13	Produto vetorial e torque.....	39
Figura 14	Interpretação geométrica do produto vetorial.....	40
Figura 15	Isotérmicas: campo escalar.....	41
Figura 16	Campo vetorial.....	41
Figura 17	Integral de linha.....	43
Figura 18	Integral de linha de campo vetorial em três dimensões.....	44
Figura 19	Integral de superfície.....	47
Figura 20	Fluxo mangueira de água.....	49
Figura 21	Fluxo.....	50
Figura 22	Gradiente.....	53
Figura 23	Curva de nível.....	54

Figura 24	Divergente.....	56
Figura 25	Fluxos divergentes.....	57
Figura 26	Campo vetorial de velocidades de um fluido no plano xy	58
Figura 27	Rotacional.....	59
Figura 28	Região R imersa no campo vetorial \vec{V}	60
Figura 29	Rotacional de \vec{V} na direção x	60
Figura 30	Região R limitada pela curva C imersa em um campo vetorial \vec{F}	63
Figura 31	Teorema de Green.....	64
Figura 32	Divisão da região R em R_1 e R_2	65
Figura 33	Interpretação Geométrica do Teorema de Green.....	66
Figura 34	Teorema de Gauss.....	67
Figura 35	Divisão do volume da região R em R_1 e R_2	68
Figura 36	Interpretação geométrica do Teorema de Gauss.....	69
Figura 37	Teorema da Stokes.....	70
Figura 38	Interpretação Geométrica do Teorema da Stokes.....	71
Figura 39	Carga esférica positiva.....	74
Figura 40	Interpretação física da 1ª equação de Maxwell.....	75
Figura 41	Dipolo Magnético.....	77
Figura 42	Lei de Ampère.....	77
Figura 43	Lei de Faraday.....	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Resumo leis de eletromagnetismo inicial.....	80
Tabela 2	Resumo leis de eletromagnetismo: as 4 equações de Maxwell.....	82

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	HISTÓRIA - SOBRE OMBRO DE GIGANTES	23
3	VETORES	27
3.1	ESPAÇO VETORIAL	27
3.1.1	SUBESPAÇO VETORIAL	28
3.1.2	COMBINAÇÕES LINEARES	28
3.1.3	BASE	28
3.2	VETORES	29
3.2.1	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA OPERAÇÕES	29
3.3	OPERAÇÕES COM VETORES	30
3.3.1	SOMA	31
3.3.2	MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR	32
3.3.3	PROPRIEDADES DA SOMA E DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR	33
3.4	PRODUTO ESCALAR	33
3.4.1	PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR	34
3.4.2	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO ESCALAR	34
3.4.3	PRODUTO ESCALAR E TRABALHO	36
3.5	PRODUTO VETORIAL	37
3.5.1	PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL	38
3.5.2	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA	38
3.5.3	PRODUTO VETORIAL E TORQUE	39
3.6	GRANDEZAS FÍSICAS	40
3.6.1	GRANDEZA ESCALAR	40
3.6.2	CAMPO VETORIAL	41
4	INTEGRAIS DE GRANDEZAS VETORIAIS	43
4.1	INTEGRAL DE LINHA	43
4.1.1	INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL	43
4.2	CAMPO CONSERVATIVO	45
4.3	INTEGRAL DE SUPERFÍCIE	47
4.3.1	ÁREA DE SUPERFÍCIE	47
4.3.2	INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UMA FUNÇÃO	48
4.3.3	SUPERFÍCIES ORIENTADAS	48

4.3.4 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPOS VETORIAIS	48
4.3.5 FLUXO	49
5 OPERADORES VETORIAIS	51
5.1 NABLA	51
5.2 GRADIENTE	51
5.2.1 PROPRIEDADES DO GRADIENTE	52
5.2.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE.....	52
5.3 DIVERGENTE	55
5.3.1 PROPRIEDADES DO DIVERGENTE	55
5.3.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DIVERGENTE	55
5.4 ROTACIONAL	57
5.4.1 PROPRIEDADES DO ROTACIONAL	58
5.4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ROTACIONAL	58
5.5 LAPLACIANO	61
6 TEOREMAS	63
6.1 TEOREMA DE GREEN	63
6.1.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE GREEN	65
6.2 TEOREMA DE GAUSS	66
6.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE GAUSS	68
6.3 TEOREMA DE STOKES	70
6.3.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE STOKES	71
7 EQUAÇÕES DE MAXWELL	73
7.1 LEI DE GAUSS	73
7.1.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 1ª EQUAÇÃO DE MAXWELL ..	75
7.2 DIPOLO MAGNÉTICO	75
7.2.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 2ª EQUAÇÃO DE MAXWELL ..	76
7.3 LEI DE AMPÈRE	77
7.3.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA LEI DA AMPÈRE	78
7.4 LEI DE FARADAY	79
7.4.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 4ª EQUAÇÃO DE MAXWELL ..	80
7.5 A DESCOBERTA DA CORRENTE DE DESLOCAMENTO	80
7.5.1 A TERCEIRA EQUAÇÃO DE MAXWELL	82
7.6 AS QUATRO EQUAÇÕES DE MAXWELL	82
8 CONCLUSÃO	85
REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

A motivação deste trabalho foi montar uma fonte de consulta para estudantes de eletromagnetismo. Por experiência própria, quando estudando este conteúdo, percebi a necessidade do domínio das teorias matemáticas vetoriais que são essenciais para o estudo do eletromagnetismo. Essas teorias costumam ser apresentadas nas bibliografias dedicadas ao assunto, porém com abordagens que costumam ser muito superficiais e pouco intuitivas.

Em livros dedicados ao estudo do eletromagnetismo, é comum observar um capítulo ou um anexo sobre análise vetorial, onde são apresentados uma introdução ao cálculo vetorial e os operadores gradiente, divergente e rotacional. Estes são essenciais para o desenvolvimento do estudo para se chegar nas quatro equações de Maxwell, que são a base da teoria do eletromagnetismo. Porém, normalmente, não é explorada a ideia do que significa fisicamente cada um desses operadores, o que dificulta o entendimento da evolução da teoria durante o século XIX.

Olhando para a história da física clássica, percebe-se que são de imenso valor as importantes descobertas feitas ao longo do desenvolvimento científico do eletromagnetismo, que culminam nas equações de Maxwell. Estas equações conseguem unificar toda a teoria sobre eletricidade e magnetismo, descobrindo, por exemplo, a existência teórica de ondas eletromagnéticas. Algo que tornou possível o desenvolvimento de tecnologias usadas nas mais diversas aplicações no nosso mundo hoje.

É fácil perceber então que, para se chegar neste ponto, é preciso primeiro dominar algumas ferramentas matemáticas poderosas, como Cálculo Diferencial e Integral de funções vetoriais. A finalidade desta dissertação é justamente desenvolver de forma mais acessível estes conceitos. Para isso, num primeiro momento, este trabalho pretende apresentar, como um fator motivador ao estudo, o histórico do desenvolvimento do eletromagnetismo com as empolgantes conclusões que chegaram os grandes cientistas da época, como: Gauss, Ampère, Faraday e Maxwell.

Num segundo momento, faz-se necessário o embasamento teórico matemático inicial sobre vetores, apresentando definições formais e significados do que são vetores e espaços vetoriais. Em seguida, alonga-se o estudo de teoria vetorial com a definição do produto escalar, do produto vetorial e do que venha a ser um campo vetorial.

O quarto capítulo trata sobre integrais de grandezas vetoriais, utilizando as integrais de múltiplas variáveis para definir integrais de linha e de superfície. Já no capítulo cinco, serão apresentados os conceitos de gradiente, divergente e rotacional. Toda essa teoria matemática vem auxiliar no entendimento dos Teoremas de Gauss, de Green, e de

Stokes, apresentados no capítulo seis.

Após apresentar os conceitos e técnicas matemáticas necessárias, no último capítulo serão demonstradas as equações de Maxwell, que aglutinam em quatro elegantes equações todas as leis da teoria do eletromagnetismo: Lei de Gauss para a eletrostática; Lei de Gauss para a magnetostática; Lei de Ampère modificada; e Lei de Faraday.

Maior parte das grandezas que são estudadas na teoria eletromagnética é vetorial, por isso é essencial o domínio deste conteúdo. Como a principal dificuldade para o estudante principiante de eletromagnetismo é justamente a não familiarização com as ferramentas vetoriais, este trabalho pretende apresentar não só os conceitos com o devido rigor matemático, mas alicerçar a construção do conhecimento no significado físico de cada operador vetorial.

2 HISTÓRIA - SOBRE OMBRO DE GIGANTES

A história do eletromagnetismo começa com uma lenda popular de mais de 4000 anos que conta sobre um pastor da ilha de Creta chamado Magnes que descobre uma pedra com uma propriedade muito especial. Certo dia, enquanto ele pastorava suas ovelhas, se deparou com tal pedra que, de alguma forma, era capaz de atrair os pregos feitos de ferro de suas sandálias e a ponta de seu cajado, também feita de ferro. Em homenagem a este camponês, deu-se o nome de magnetita a esta pedra. Assim, batizou-se de magnetismo o fenômeno onde metais como o ferro dos assessorios de Magnes eram atraídos por uma força invisível gerada pela presença desta pedra especial.

Em paralelo, na Grécia antiga, o famoso filósofo Tales de Mileto percebeu que ao se atritar um pedaço polido de âmbar com um pedaço de pele de animal, podia-se atrair pequenos objetos leves e secos, como palha de milho e folhas secas. Como eram fenômenos bem semelhantes, acreditava-se inicialmente que se tratavam da mesma coisa.

Foi William Gilbert, médico e filósofo inglês, que começou a estudar as propriedades da magnetita (ou pedra imantada). Por volta de 1600, ele percebeu diferenças entre os dois fenômenos, atribuindo então ao fenômeno experimentado por Tales o nome de eletricidade, que vem do grego *electro*, que quer dizer âmbar.

Gilbert deve ser especialmente lembrado por ter sugerido, ainda em 1600, que a Terra se comportava como um ímã gigante, pois os chineses e europeus, já no século XII, aprenderam a usar a magnetita como instrumento de navegação e orientação, ao perceberem que ela, quando colocada em suspensão e estando livre para girar, sempre apontava para a mesma direção, dando origem aos primeiros protótipos da bússola.

No final do século XVIII uma importante descoberta foi feita por um cientista italiano chamado Luigi Galvani. Ele percebeu que a pata de uma rã se contraía quando as extremidades do músculo eram tocadas pelas extremidades de um arco de arame confeccionado com dois metais diferentes. A real importância desta descoberta só foi reconhecida e aperfeiçoada por um outro cientista italiano, Alessandro Volta. Este chegou a conclusão que os dois metais diferentes estavam produzindo uma força nas extremidades de arame, de tal forma que “algo” fluía pelo músculo da perna da rã, fazendo-a mexer. Aperfeiçoando a combinação dos metais do arame, produziu então a primeira pilha, e ao substituir o músculo da rã por um fio, Volta demonstrou que a “força” produzida pelas extremidades de sua pilha podia fazer partículas diminutas de matéria fluir pelo fio. Hoje sabemos que essas partículas são os elétrons, os mesmos que se manifestam ao se atritar o âmbar, e que o fluxo produzido é a corrente elétrica. Hoje damos o nome à tal “força” de força

eletromotriz.

Apesar desses fenômenos despertarem a curiosidade dos cientistas na época, os avanços possuíam apenas aspectos qualitativos e nenhum avanço quantitativo foi feito até que algum método de medida destes fenômenos fosse encontrado. No entanto já havia desconfianças, por existirem semelhanças entre a atração elétrica e a atração gravitacional, sendo ambas uma força “invisível”, que esta força de atração pudesse variar conforme o inverso do quadrado da distância. O desenvolvimento de um instrumento de medida coube a Charles-Augustin de Coulomb, em 1785, que aperfeiçoou a balança de torção usada por Henry Cavendish para medir a constante G da lei da gravitação universal. A balança de torção de Coulomb conseguia medir a força de atração e repulsão entre duas esferas eletricamente carregadas através do ângulo formado pelo fio que sustentava a haste com as esferas. Chegou-se à conclusão que a força elétrica realmente era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as esferas e diretamente proporcional ao produto das suas cargas. Chegando a expressão da lei que hoje leva seu nome.

Em 1820, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted fez uma grande descoberta. Ao utilizar a recém desenvolvida pilha de Volta para forçar corrente elétrica através de um fio durante uma de suas aulas na universidade de Copenhague, presenciou, por obra do acaso, que a agulha de uma bússola próxima se mexia conforme o circuito da pilha era fechado e aberto. Confirmando experimentalmente, pela primeira vez, uma relação direta entre eletricidade e magnetismo. Sua primeira intuição na verdade era de que efeitos magnéticos emanavam de um fio conduzindo corrente. Depois de intensos meses de estudos, publicou suas descobertas mostrando que corrente elétrica produz um campo magnético circular ao redor do fio condutor.

Seguindo as descobertas feitas por Oersted, o físico francês André Marie Ampère mostrou que dois fios paralelos conduzindo corrente exerciam atração ou repulsão mútua, semelhante à exercida por dois ímãs. Em seus experimentos, caso as correntes estivessem fluindo na mesma direção, os fios exerciam atração recíproca. Já se estivessem em sentidos opostos, repeliam-se mutuamente. A partir de seus resultados experimentais, Ampère se dedicou a demonstrar matematicamente suas conclusões, sendo coroado com a dedução de um princípio que hoje conhecemos como a Lei de Ampère. Desta forma, colocando seu nome em destaque entre os estudiosos desses novos fenômenos.

Oersted foi o primeiro a descobrir a importante relação entre os dois fenômenos, eletricidade e magnetismo, antes considerados independentes um do outro. Porém um elo ainda mais importante desta relação seria descoberto por dois outros cientistas que trabalhavam separadamente: Michael Faraday na Inglaterra e Joseph Henry em Nova York. Eles são os responsáveis pelo descobrimento do fenômeno chamado indução eletro-

magnética. A descrição básica deste fenômeno é que se uma espira condutora se move no interior de um campo magnético, o campo induz uma corrente elétrica pela espira. Em outras palavras, o campo magnético induz uma força eletromotriz no fio, o que gera corrente. A importância desta descoberta é que ela apresentou uma nova forma de se gerar eletricidade.

Apesar de Faraday ser um excelente físico experimental e ter contribuído com diversas outras experiências consideradas obras clássicas da ciência, não era um matemático talentoso e não conseguiu formular matematicamente suas importantes descobertas, tampouco pôde manipular matematicamente as fórmulas existentes a fim de chegar a novas conclusões. Mas para a sorte da humanidade, a Escócia brindou o mundo com uma das mentes mais brilhantes da história, James Clerk Maxwell.

Maxwell, que ainda jovem tornou-se um renomado matemático ao demonstrar matematicamente a natureza aglomerada dos anéis de Saturno, se sentia intrigado pelos fatos físicos sobre fenômenos invisíveis e misteriosos como correntes elétricas, campos magnéticos e indução eletromagnética, de tal modo que se dedicou a reduzir os fatos já conhecidos a equações matemáticas. Dessa forma, não só formulou a lei de Faraday, mas também formulou todas as leis que já existiam sobre o assunto, concentrando toda a teoria em apenas quatro equações matemáticas.

Sua primeira maior contribuição foi a descoberta da corrente de deslocamento, que em seguida proporcionou a demonstração de sua segunda maior contribuição: a existência de ondas eletromagnéticas. Maxwell mostrou que essas ondas tinham velocidade idêntica à da luz, que já era conhecida por meio de experimentos anteriores. Ele então concluiu que a própria luz deveria ser uma onda eletromagnética.

Heinrich Hertz finalmente demonstrou experimentalmente, em 1887, que as ondas eletromagnéticas de fato existiam e se comportavam exatamente como Maxwell havia proposto. Infelizmente Maxwell não estava mais vivo para testemunhar a concretização de suas conclusões, tendo falecido em 1879. Anos depois da demonstração experimental de Hertz, Guglielmo Marconi transmitiu pela primeira vez, em 1901, ondas de rádio do Reino Unido ao Canadá, dando início assim a era moderna das comunicações sem fio.

Figura 1: Linha do Tempo

1740-1760	1760-1780	1780-1800	1800-1820	1820-1840	1840-1860	1860-1880	1880-1900	1900-1920	1920-1940	1940-1960
							Albert Einstein			
						Heirich Hertz				
				JAMES CLERK MAXWELL						
		Joseph Henry								
		Michael Faraday								
		Carl Friedrich Gauss								
		Hans Christian Oersted								
		Andre Marie Ampère								
Alessandro Volta										
1740-1760	1760-1780	1780-1800	1800-1820	1820-1840	1840-1860	1860-1880	1880-1900	1900-1920	1920-1940	1940-1960

Fonte: Próprio Autor

3 VETORES

Neste capítulo serão abordados a definição de espaços vetoriais e um pouco de teoria de álgebra linear. Em seguida será apresentado o conceito de vetor por meio de sua interpretação geométrica além de suas operações. Serão definidos ainda os produtos escalar e vetorial. O capítulo encerra com a definição de campos vetoriais.

3.1 ESPAÇO VETORIAL

Dizemos que um conjunto $\mathbb{V} \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} se, e somente se:

1. Existe uma operação denominada adição $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$ em \mathbb{V} , com as seguintes propriedades:
 - a. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$, (propriedade comutativa)
 - b. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, (propriedade associativa)
 - c. Existe em \mathbb{V} um elemento neutro para essa operação de adição, simbolizado por 0 , tal que: $\vec{u} + 0 = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathbb{V}$
 - d. Para todo elemento \vec{u} de \mathbb{V} existe o oposto, simbolizado $-\vec{u}$, tal que: $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

2. Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ em \mathbb{V} , operação denominada multiplicação por um escalar, que significa que para cada par (α, \vec{u}) com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{V}$, está associado um único elemento $\alpha\vec{u}$. Para essa multiplicação tem-se as seguintes propriedades ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$):
 - a. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
 - b. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
 - c. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
 - d. $1\vec{u} = \vec{u}$

Notemos que a partir desta definição podemos concluir que o próprio \mathbb{R} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . E da mesma forma podemos citar outros exemplos de espaços vetoriais, como o conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , o conjunto dos polinômios de grau $\leq n$, $P_n(\mathbb{R})$, entre outros. O conjunto dos vetores da geometria, definidos por segmentos de reta orientados, é também um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Dessa

forma, os elementos de um espaço vetorial qualquer são chamados de vetores, sendo o elemento neutro da adição chamado vetor nulo. Neste trabalho limitaremos o estudo a espaços vetoriais finitamente gerados, em especial o \mathbb{R}^3 .

3.1.1 SUBESPAÇO VETORIAL

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Um subespaço de vetorial de \mathbb{V} (ou apenas subespaço de \mathbb{V}) é um subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, tal que:

- a) $0 \in \mathbb{W}$;
- b) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{W}, \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{W}$;
- c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \vec{u} \in \mathbb{W}, \alpha \vec{u} \in \mathbb{W}$.

3.1.2 COMBINAÇÕES LINEARES

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Seja $S = (\vec{u}_1), (\vec{u}_2), \dots, (\vec{u}_n) \subset \mathbb{V}$. Seja $[S]$ um subconjunto de \mathbb{V} construído a partir de S :

$$[S] = \alpha_1(\vec{u}_1) + \alpha_2(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_n(\vec{u}_n) | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Observe que $[S]$ é um subespaço de \mathbb{V} :

- a) $0 = 0(\vec{u}_1) + 0(\vec{u}_2) + \dots + 0(\vec{u}_n)$, então $0 \in [S]$; e
- b) Se $\vec{v} = \alpha_1(\vec{u}_1) + \alpha_2(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_n(\vec{u}_n)$ e $\vec{w} = \beta_1(\vec{u}_1) + \beta_2(\vec{u}_2) + \dots + \beta_n(\vec{u}_n)$ pertencem a $[S]$, então $\vec{v} + \vec{w} \in [S]$. Pois $\vec{v} + \vec{w} = (\alpha_1 + \beta_1)(\vec{u}_1) + \dots + (\alpha_n + \beta_n)(\vec{u}_n)$
- c) Se $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = \alpha_1(\vec{u}_1) + \dots + \alpha_n(\vec{u}_n)$ pertence a $[S]$, então $\gamma \vec{v} \in [S]$.

Diz-se então que cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de S . Ou ainda que os vetores $(\vec{u}_1), (\vec{u}_2), \dots, (\vec{u}_n)$ geram $[S]$, ou formam um sistema gerador de $[S]$.

3.1.3 BASE

Antes de definir o que venha a ser uma base de um espaço vetorial, precisamos definir o que venha a ser um espaço linearmente independente (LI). Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Seja $S = (\vec{u}_1), (\vec{u}_2), \dots, (\vec{u}_n) \subset \mathbb{V}$, S é dito LI se, e somente se, a igualdade $\alpha_1(\vec{u}_1) + \alpha_2(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_n(\vec{u}_n) = 0$ for possível apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Base de \mathbb{V} é um subconjunto seu, tal que todos os elementos de \mathbb{V} sejam combinação linear dos elementos da base. Porém, para o subconjunto S ser considerado uma base de \mathbb{V} , é preciso que S seja LI e que todos os elementos de \mathbb{V} sejam combinações lineares de S , ou seja, $\mathbb{V} = [S]$.

Seja $B = (\vec{b}_1), \dots, (\vec{b}_n)$ uma base do espaço vetorial \mathbb{V} . Então $B \subset \mathbb{V}$, B é LI, e $\mathbb{V} = \alpha_1(\vec{b}_1) + \dots + \alpha_n(\vec{b}_n) | \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. A dimensão de um espaço corresponde ao número de vetores existente em uma base, ou seja, existem apenas três vetores em qualquer base do espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

3.2 VETORES

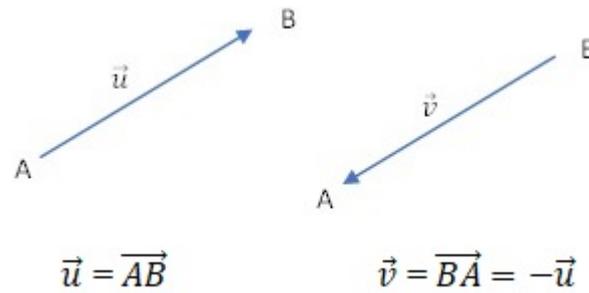
Um vetor é definido formalmente como sendo um elemento de um espaço vetorial. Este trabalho se aterá apenas aos vetores geométricos pois são estes os que desempenham importante papel na física, em especial no eletromagnetismo. Vetores geométricos, que serão chamados apenas de vetores, são segmentos de reta orientados, que possuem módulo, direção e sentido.

3.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA OPERAÇÕES

Vetores desempenham importante papel na física. Grandezas físicas que são munidas das características de intensidade, direção e sentido são representadas matematicamente por vetores, como velocidade, aceleração, e força.

Geometricamente, definimos um vetor com uma seta (um segmento de reta orientado) que une dois pontos no espaço. O comprimento da seta representa o módulo do vetor e a seta apontando na direção e sentido do vetor. Por exemplo o vetor \vec{u} a seguir pode representar o vetor deslocamento de uma partícula que se movimenta do ponto A até o ponto B . Já o vetor \vec{v} pode representar um deslocamento semelhante, porém no sentido contrário.

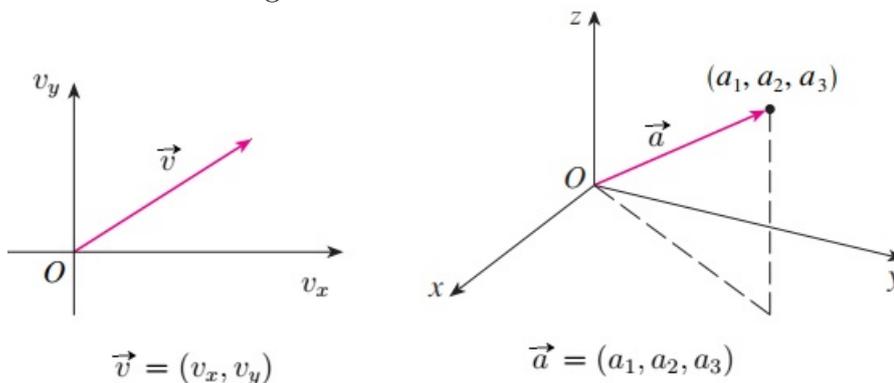
Figura 2: Vetores Simétricos



Fonte: Próprio Autor(2020)

Para se trabalhar algebricamente com vetores, fixamos uma base do espaço vetorial, o que corresponde a fixarmos um sistema de coordenadas. No sistema de coordenadas no \mathbb{R}^n , ao fixarmos a base canônica $B = (\vec{e}_1), (\vec{e}_2), \dots, (\vec{e}_n)$ onde $(\vec{e}_1) = (1, 0, \dots, 0)$, $(\vec{e}_2) = (0, 1, \dots, 0), \dots, (\vec{e}_n) = (0, 0, \dots, 1)$ o vetor \vec{u} é a combinação linear $\vec{u} = \vec{u}_1(\vec{e}_1) + \vec{u}_2(\vec{e}_2) + \dots + \vec{u}_n(\vec{e}_n)$, representado pela n-upla ordenada $\vec{u}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$, onde $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ são denominadas as coordenadas de \vec{u} . Para o nosso mundo físico é natural trabalharmos com o sistema de coordenadas cartesianas \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Exemplos:

Figura 3: Coordenadas Cartesianas



Fonte: Stewart (2013)

O módulo de um vetor qualquer $\vec{u}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ é dado por $|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{u}_1)^2 + (\vec{u}_2)^2 + \dots + (\vec{u}_n)^2}$, que é um número real, ou seja, um escalar.

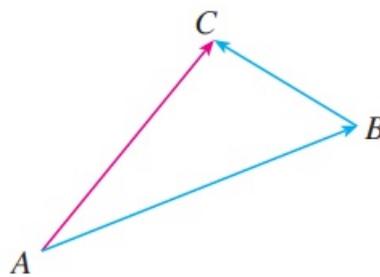
3.3 OPERAÇÕES COM VETORES

Vejamos o significado geométrico para as operações com vetores.

3.3.1 SOMA

Suponha que uma partícula se mova do ponto A para o B , assim, seu vetor deslocamento é \overrightarrow{AB} . Em seguida, a partícula muda de direção e move-se a partir de B para C , com vetor de deslocamento \overrightarrow{BC} . O efeito combinado desses deslocamentos é que a partícula se moveu de A para C . O vetor deslocamento resultante \overrightarrow{AC} é chamado de soma de \overrightarrow{AB} com \overrightarrow{BC} e escrevemos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Figura 4: Soma de Vetores



Fonte: Stewart (2013)

Fixada a base canônica $B = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ em $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, sejam dois vetores $\vec{u}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ e $\vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$.

- Geometricamente sua soma $\vec{u} + \vec{v}$ é dada por:

Figura 5: Soma de vetores representada geometricamente



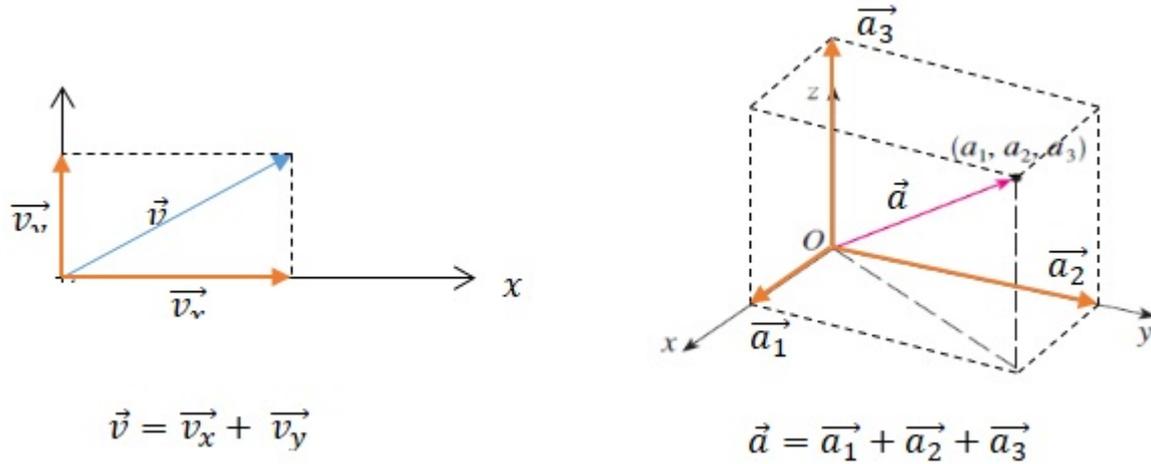
Fonte: Stewart (2013)

- Algebricamente, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ é dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \dots, \vec{u}_n + \vec{v}_n) = \vec{v} + \vec{u}$$

Observe como um vetor qualquer pode ser representado como a soma de seus vetores componentes, conforme figura a seguir.

Figura 6: Decomposição de vetores em componentes

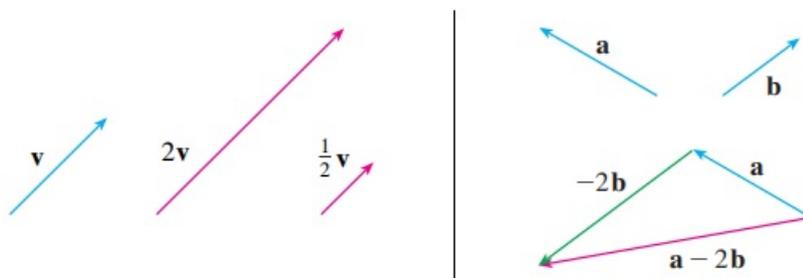


Fonte: Stewart (2013)

3.3.2 MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

A multiplicação por um escalar altera apenas a magnitude do vetor, que passa a ficar multiplicada por este número, e dependendo do sinal do escalar, inverte também o sentido do vetor. Algebricamente temos que $\alpha \vec{u} = (\alpha \vec{u}_1, \alpha \vec{u}_2, \dots, \alpha \vec{u}_n)$, sendo um vetor $\vec{u}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, por exemplo, temos o vetor $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$, que possui a mesma direção e sentido de \vec{v} , porém o dobro do comprimento. Observe que: $\vec{u} - \vec{u} = \vec{u} + (-1 \cdot \vec{u}) = \vec{u} + (-\vec{u}) = 0$. Geometricamente, temos os seguintes exemplos:

Figura 7: Multiplicação por escalar representada geometricamente

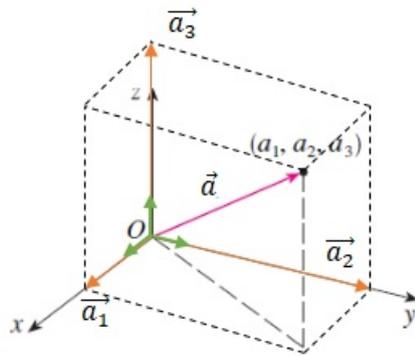


Fonte: Stewart (2013)

Observe como um vetor qualquer é o produto entre seu módulo e o vetor unitário

na mesma direção e sentido (denominado versor). A partir de agora, utilizaremos a base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^3, B = i, j, k$, onde $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, e $k = (0, 0, 1)$, são os vetores unitários nas direções x, y, z , respectivamente. Temos então:

Figura 8: Decomposição de vetores em coordenadas



$$\vec{a}_1 = |\vec{a}_1|i, \text{ projeção de } \vec{a} \text{ em } x$$

$$\vec{a}_2 = |\vec{a}_2|j, \text{ projeção de } \vec{a} \text{ em } y$$

$$\vec{a}_3 = |\vec{a}_3|k, \text{ projeção de } \vec{a} \text{ em } z$$

$$\text{Então: } \vec{a} = |\vec{a}_1|i + |\vec{a}_2|j + |\vec{a}_3|k$$

Fonte: Stewart (2013)

3.3.3 PROPRIEDADES DA SOMA E DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam \vec{u}, \vec{v} , e \vec{w} vetores no \mathbb{V}^n , e a e b escalares:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

c) $\vec{u} + 0 = \vec{u}$

d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

e) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

f) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

g) $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u}) = b(a\vec{u})$

h) $1\vec{u} = \vec{u}$

3.4 PRODUTO ESCALAR

É uma aplicação $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, tal que, fixada a base canônica $B = (\vec{e}_1), \dots, (\vec{e}_n)$, para cada par de vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, tais que $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,

associa-se um número real, resultado da soma $u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$, simbolizado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ou ainda $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (neste trabalho adotaremos a notação $\vec{u} \cdot \vec{v}$).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (i \in \mathbb{N})$$

O resultado é um número real, ou seja, um escalar, motivo pelo qual o nome deste produto é escalar (também conhecido como produto interno).

3.4.1 PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

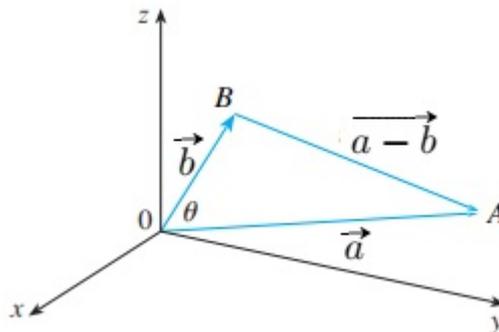
Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores e α um escalar:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- d) $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$
- e) $0 \cdot \vec{u} = 0$

3.4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO ESCALAR

Considere, no espaço vetorial \mathbb{R}^3 , os vetores genéricos \vec{a} e \vec{b} , conforme a seguir:

Figura 9: Interpretação geométrica do produto escalar



Fonte: Stewart (2013)

Pela Lei dos Cossenos, temos que:

$$|(\vec{a} - \vec{b})|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta, \text{ mas sabemos que}$$

$$|\overrightarrow{a-b}|^2 = (\overrightarrow{a-b}) \cdot (\overrightarrow{a-b}) = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$|\overrightarrow{a-b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2, \text{ logo temos que:}$$

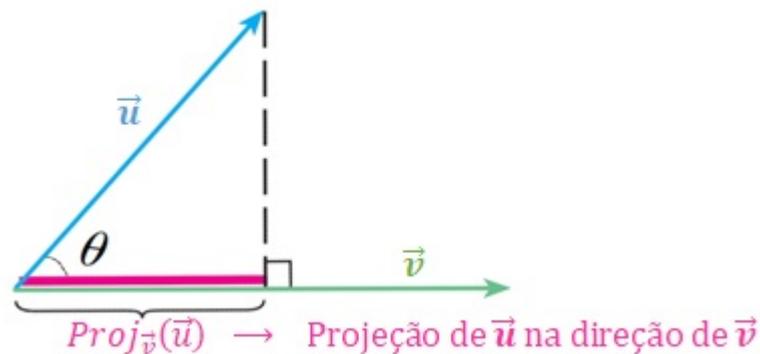
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

Concluindo que:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta}$$

A partir dessa fórmula é imediata a conclusão de que $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Outra interpretação importante do produto escalar é que ele é o produto do módulo de um dos vetores com o módulo da projeção do outro vetor na mesma direção daquele, conforme figura a seguir:

Figura 10: Produto escalar e a projeção de um vetor na direção do outro



Fonte: Stewart (2013)

Chamando de $Proj_{\vec{v}}(\vec{u})$ o vetor projeção de \vec{u} na direção de \vec{v} , é fácil concluir que $Proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \cos \theta$ onde $|Proj_{\vec{v}}(\vec{u})| = |\vec{u}| \cdot \cos \theta$, e que o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é igual ao produto escalar $Proj_{\vec{v}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$. Ou seja, o produto escalar equivale ao produto do módulo de um vetor com o módulo da projeção do outro vetor na sua direção.

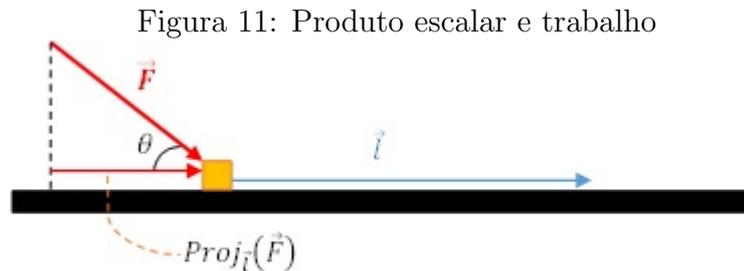
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \cos \theta = Proj_{\vec{v}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$Proj_v(\vec{u}) = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Esta interpretação geométrica é importante para os casos da física em que muitas vezes só interessa a componente de um vetor (força, por exemplo) na mesma direção de um outro vetor (deslocamento, por exemplo), como é o caso da grandeza física Trabalho, que veremos a seguir.

3.4.3 PRODUTO ESCALAR E TRABALHO

Imagine dois vetores no espaço vetorial \mathbb{R}^2 : \vec{F} (força constante aplicada a uma partícula) e \vec{l} (vetor deslocamento desta partícula em um plano), como na figura a seguir.



Fonte: Próprio Autor (2020)

O produto escalar determina o produto entre o módulo do vetor \vec{l} e o módulo do vetor $Proj_{\vec{l}}(\vec{F})$ (projeção do vetor \vec{F} na direção de \vec{l}), ou seja, $\vec{F} \cos \theta$. De acordo com a dinâmica da física clássica newtoniana, quando \vec{F} for um vetor constante, o produto escalar fornece então o Trabalho (W) realizado pela força \vec{F} para deslocar a partícula de uma distância $d = |\vec{l}|$ na direção e sentido de \vec{l} . Lembrando que W é uma medida escalar (no caso, uma medida de energia).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} = |\vec{F}| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \theta$$

Como já sabemos, também é possível determinar o trabalho de uma força constante \vec{F} sabendo as coordenadas de cada um dos vetores. Sejam $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ e $\vec{l}(l_x, l_y, l_z)$, então

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} = F_x l_x + F_y l_y + F_z l_z$$

Demonstração. Escrevendo \vec{F} e \vec{l} em forma de equações cartesianas no \mathbb{R}^3 , utilizando os versores i, j, k (que são os vetores unitários nas direções x, y, z , respectivamente, ou ainda a base canônica de espaço vetorial \mathbb{R}^3) temos: $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$ e $\vec{l} = l_x i + l_y j + l_z k$. Então:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{l} &= (F_x i + F_y j + F_z k) \cdot (l_x i + l_y j + l_z k) = \\ &= F_x l_x i \cdot i + F_x l_y i \cdot j + F_x l_z i \cdot k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+F_y.l_x.j.i + F_y.l_y.j.j + F_y.l_z.j.k + \\
&+F_z.l_x.k.i + F_z.l_y.k.j + F_z.l_z.k.k
\end{aligned}$$

Onde é fácil ver que $i.i = j.j = k.k = 1.1. \cos(0) = 1$ E que $i.j = i.k = j.k = 1.1. \cos \frac{\pi}{2} = 0$ Resultando em $\vec{F} \cdot \vec{l} = F_x l_x + F_y l_y + F_z l_z$

□

Concluimos então que dado uma força \vec{F} , somente a componente dessa força na direção do deslocamento, $\vec{F} \cos \theta$, realiza trabalho.

3.5 PRODUTO VETORIAL

É uma aplicação $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, tal que, fixada a base canônica $B = i, j, k$, para cada par de vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, associa-se o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, tal que $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$. A motivação para criação desta operação foi justamente descobrir um terceiro vetor que fosse, simultaneamente, perpendicular aos dois vetores originais. Sejam dois vetores linearmente independentes $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 . Buscamos agora um terceiro vetor \vec{w} , também em \mathbb{R}^3 , de coordenadas (w_1, w_2, w_3) , que seja ao mesmo tempo perpendicular tanto a \vec{u} quanto \vec{v} . Já sabemos que se dois vetores são perpendiculares, seu produto escalar é zero. Logo, para que \vec{w} seja tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$, suas coordenadas devem ser soluções do sistema:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \end{cases}$$

Que admite como solução $w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$, e $w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. O que significa que o vetor procurado, perpendicular a ambos \vec{u} e \vec{v} , é o $\vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$. Este vetor \vec{w} representa o resultado da operação que chamamos de produto vetorial cujo símbolo é $\vec{u} \times \vec{v}$. Uma forma operacional para calcular o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é escrevê-la em forma simbólica de determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

De forma que $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k$. Ou seja, o resultado de um produto vetorial é um vetor. Um vetor fica fisicamente determinado

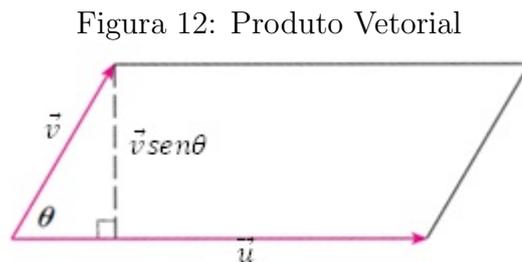
se estão definidos seu módulo, direção e sentido. Já sabemos o módulo, sabemos também que a direção é perpendicular aos outros dois vetores. O sentido é conhecido pela regra da mão direita, onde os dedos da mão giram de \vec{u} para \vec{v} , o polegar aponta no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$. A partir da fórmula deduzida a cima, é fácil perceber que se dois vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos ($\theta = 0$), ou seja, linearmente dependentes, então $\vec{u} \times \vec{v} = 0$.

3.5.1 PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores e seja α um escalar:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

3.5.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



Fonte: Stewart (2013)

Seja θ o ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} ($0 \leq \theta \leq \pi$), então $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$.

Demonstração. Demonstração:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_2v_3)^2 - 2u_2v_3u_3v_2 + (-u_3v_2)^2 + (u_3v_1)^2 - 2u_3v_1u_1v_3 + (-u_1v_3)^2 + (u_1v_2)^2 - 2u_1v_2u_2v_1 + (-u_2v_1)^2 = \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - \cos^2 \theta) \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2 \theta \\
|\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta
\end{aligned}$$

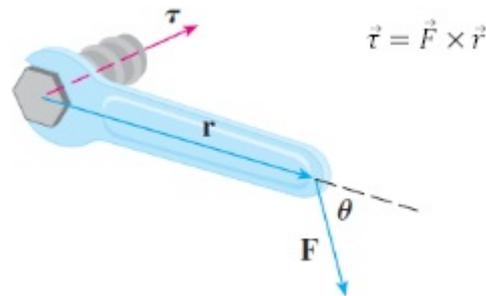
□

O módulo do produto vetorial entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é a área do paralelogramo determinado por \vec{u} e \vec{v} .

3.5.3 PRODUTO VETORIAL E TORQUE

O produto vetorial aparece muito na física. Por exemplo uma força constante \vec{F} atuando sobre um corpo rígido num ponto de vetor posição \vec{r} , como na figura a seguir que mostra um parafuso sendo apertado aplicando uma força a uma chave de boca - o parafuso irá girar no sentido horário. O torque (τ) mede a tendência de um corpo girar em torno de um ponto (origem).

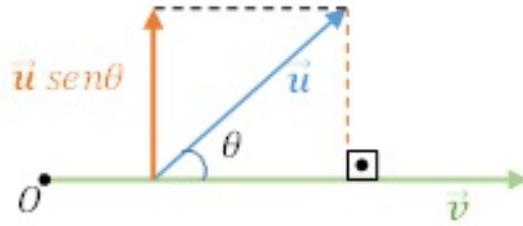
Figura 13: Produto vetorial e torque



Fonte: Stewart (2013)

De forma análoga ao produto escalar, o produto vetorial também é o produto do módulo de um vetor com a projeção do outro. Porém esta projeção agora é na direção perpendicular ao outro vetor. Observe a seguir como o vetor \vec{u} tende a girar no sentido anti-horário em torno do ponto O , por meio de sua componente $\vec{u} \sin \theta$ (perpendicular à \vec{v}).

Figura 14: Interpretação geométrica do produto vetorial



Fonte: Próprio Autor(2020)

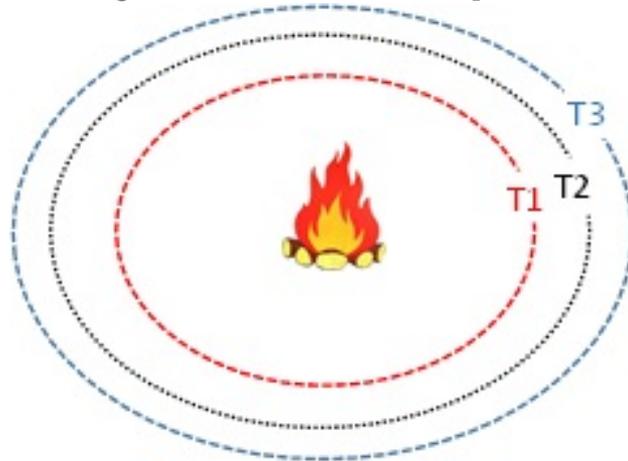
3.6 GRANDEZAS FÍSICAS

As definições contidas neste item são essenciais para o estudo do eletromagnetismo pois este depende do entendimento do comportamento dos campos elétricos e magnéticos.

3.6.1 GRANDEZA ESCALAR

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$. Uma grandeza escalar em \mathbb{R} é uma função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em P um número real $f(x, y, z)$. Dada esta mesma função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, invertível, e um número real C , define-se como superfície de nível, simbolizada por $S^C = f^{-1}(C)$. No caso de pressão, as S^C são as isobáricas, já no caso de temperatura, S^C define as isotérmicas e em se tratando de potencias, as equipotenciais. Vejamos a seguir a interpretação física dessas definições. Na física, pressão é uma grandeza escalar, pois sua informação é meramente numérica, não carregando informação sobre direção de atuação nem sentido, apenas magnitude. Atribuindo-se assim o valor $p(x, y, z)$ a magnitude da pressão em determinado ponto (x, y, z) do espaço. A atmosfera terrestre é um espaço de grandeza escalar pressão (algumas literaturas chamam este espaço de campo escalar de pressão), onde diferentes alturas em relação ao nível do mar possuem diferentes valores de pressão atmosférica. Uma isobárica é uma região deste campo que possui a mesma pressão em todos os seus pontos. É fácil perceber que a grandeza física temperatura também é escalar. Logo, uma isotérmica seria uma região do espaço onde todas as temperaturas teriam a mesma magnitude, conforme o exemplo da figura a seguir, que mostra as isotérmicas do campo de temperatura formada por uma fonte de calor (a fogueira).

Figura 15: Isotérmicas: campo escalar

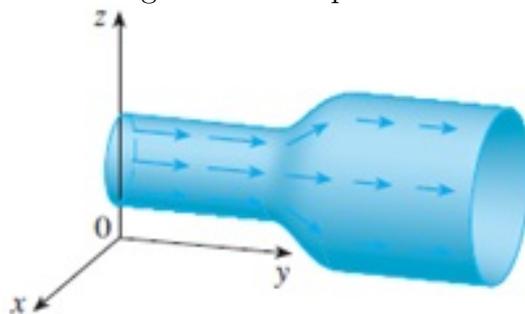


Fonte: Próprio Autor (2020)

3.6.2 CAMPO VETORIAL

Seja D um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um campo vetorial é uma função vetorial $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, que associa a cada ponto (x, y, z) em D um vetor tridimensional $F \rightarrow (x, y, z)$. Em um campo vetorial, os pontos do espaço estão associados a grandezas que carregam informação não apenas de magnitude, mas também de direção e sentido. O caso de um campo vetorial de velocidade, ilustrado na figura a seguir, mostra a velocidade de escoamento dentro de um cano e associa um vetor velocidade a cada ponto deste espaço (região interna do cano).

Figura 16: Campo vetorial



Fonte: Stewart (2013)

O estudo do eletromagnetismo é, em grande parte, baseado no estudo de campos vetoriais elétricos e magnéticos. Campos vetoriais que variam com o tempo são ditos

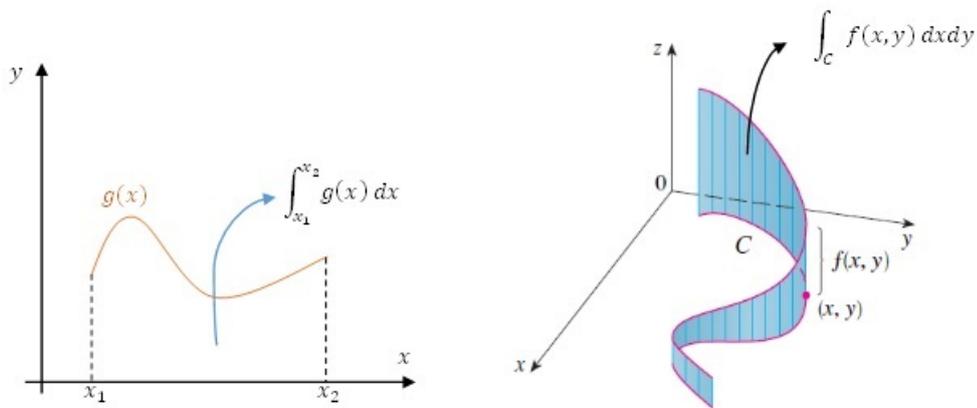
dinâmicos e ocorrem em alguns casos no estudo do eletromagnetismo. Um campo vetorial é dito constante se para qualquer ponto do espaço estiver associado o mesmo vetor. No próximo capítulo serão estudadas propriedades de um campo vetorial conservativo.

4 INTEGRAIS DE GRANDEZAS VETORIAIS

4.1 INTEGRAL DE LINHA

Semelhante a integral unidimensional, onde uma função $g(x)$ é integrada ao longo do intervalo $[x_1, x_2]$ pertencente ao domínio de $g(x)$, a integral de linha é calculada ao longo de uma curva, pertencente ao domínio da função a ser integrada.

Figura 17: Integral de linha



Fonte: Stewart (2013)

4.1.1 INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL

O trabalho realizado por uma força constante \vec{F} para mover uma partícula ao longo de uma linha reta do ponto A até B , é $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Uma motivação para definirmos a Integral de Linha é supormos que o movimento da partícula não seja mais ao longo de uma linha reta, mas sim ao longo de uma curva C no espaço, e que a força não é mais constante, e sim que o vetor força exercida sobre a partícula em cada ponto (x, y, z) desse espaço seja dada por $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$. Parametrizando a curva C , temos $x = f(t), y = g(t), z = h(t), \forall t \in [a, b]$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ e $C \subset U$ uma curva suave com equação vetorial $\vec{r}(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ (isto é, r' é contínua em $[a, b]$ e $r'(t) \neq 0$, ou seja, $f(t), g(t), h(t)$ têm derivadas $f'(t), g'(t), h'(t)$ contínuas no intervalo $[a, b]$). Além disso, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de força definido por $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + P(x, y, z)k$, onde M , N , e P são contínuas em U .

O trabalho realizado pelo campo de força \vec{F} para mover uma partícula ao longo da curva C do ponto $(f(a), g(a), h(a))$ até o ponto $(f(b), g(b), h(b))$ é: $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$.

Decompondo os vetores força \vec{F} e deslocamento \vec{r} nas direções x , y e z :

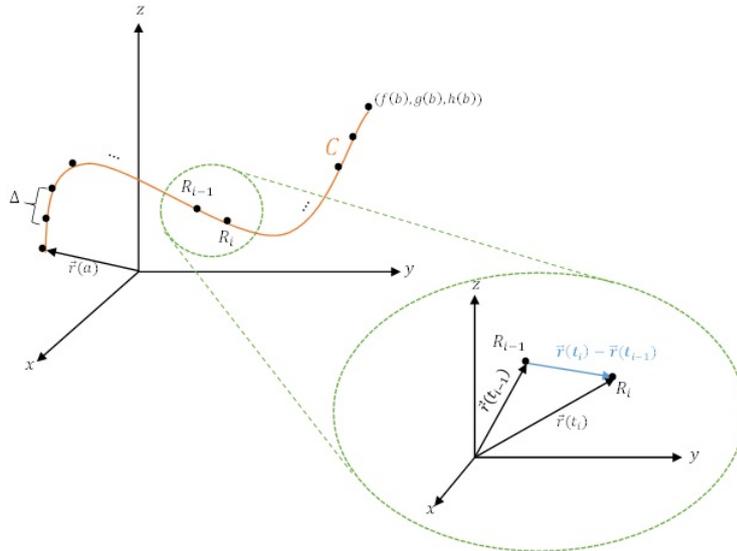
$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F}_x \cdot \vec{r}_x + \vec{F}_y \cdot \vec{r}_y + \vec{F}_z \cdot \vec{r}_z$$

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$: $a \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq b$

Seja um ponto genérico $R_i(x_i, y_i, z_i) = (f(t_i), g(t_i), h(t_i))$ em C .

Para determinar o trabalho, aproximaremos a curva ao somatório de vários segmentos de reta $\overline{R_{i-1}R_i} = \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})$. Temos que $\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = [f(t_i) - f(t_{i-1})]i + [g(t_i) - g(t_{i-1})]j + [h(t_i) - h(t_{i-1})]k$

Figura 18: Integral de linha de campo vetorial em três dimensões



Fonte: Próprio Autor (2020)

O Teorema do Valor Médio garante que se uma função $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que γ' é contínua, então existe um ponto $s \in (c, d)$ tal que $\gamma(d) - \gamma(c) = \gamma'(s)(d - c)$.

Como $f'(t), g'(t), h'(t)$ são contínuas em $[a, b]$, segue do teorema do valor médio que existem um $c_i^f, c_i^g, c_i^h \in (a, b)$ de modo que:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i^f)(t_i - t_{i-1}) = f'(c_i^f)\Delta_i t$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(c_i^g)(t_i - t_{i-1}) = g'(c_i^g)\Delta_i t$$

$$h(t_i) - h(t_{i-1}) = h'(c_i^h)(t_i - t_{i-1}) = h'(c_i^h)\Delta_i t$$

Então uma aproximação do trabalho ao longo de C para mover uma partícula do

ponto R_{i-1} até o ponto R_i é:

$$\Delta_i W = M(f(t), g(t), h(t))(f(t_i) - f(t_{i-1})) + N(f(t), g(t), h(t))(g(t_i) - g(t_{i-1})) + P(f(t), g(t), h(t))(h(t_i) - h(t_{i-1}))$$

Fazendo $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, temos :

$$\Delta_i W = M(f(t), g(t), h(t))f'(c_i^f)\Delta_i t + N(f(t), g(t), h(t))g'(c_i^g)\Delta_i t + P(f(t), g(t), h(t))h'(c_i^h)\Delta_i t$$

Então uma aproximação do trabalho para mover uma partícula por todo o caminho da curva C é:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i W = \sum_{i=1}^n M(f(t), g(t), h(t))f'(c_i^f)\Delta_i t + N(f(t), g(t), h(t))g'(c_i^g)\Delta_i t + P(f(t), g(t), h(t))h'(c_i^h)\Delta_i t$$

Que é uma soma de Riemann. Fazendo o limite dessa soma quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, quando a partição $\Delta \rightarrow 0$, temos:

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t)]dt + \int_a^b [N(f(t), g(t), h(t))g'(t)]dt + \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t))h'(t)]dt$$

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) + P(f(t), g(t), h(t))h'(t)]dt$$

Ou utilizando a notação vetorial (produto vetorial):

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t)), N(f(t), g(t), h(t)), P(f(t), g(t), h(t)) \cdot (f'(t), g'(t), h'(t))]dt$$

$$\boxed{\int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt}$$

Ou ainda

$$\boxed{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

4.2 CAMPO CONSERVATIVO

Seja D um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ é conservativo se, para qualquer curva contínua fechada C , tendo como equação vetorial $\vec{r}(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ ($\forall t \in [a, b]$), onde $\vec{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, a integral de linha sobre C se anula, isto é:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = 0$$

Neste caso, é fácil perceber que para quaisquer pontos $p, q \in D$, e sendo C uma curva contínua, tal que $\vec{r}(a) = p$ e $\vec{r}(b) = q$, a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe da curva C . Ou seja, pouco importa o “caminho percorrido” da integral de linha, o resultado depende apenas dos pontos inicial e final. Logo, é equivalente afirmar que um campo vetorial é conservativo se, e somente se, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ independe do caminho percorrido em D para ir de um ponto $p = \vec{r}(a)$ a um ponto $p = \vec{r}(b)$.

Chamando de circulação a integral de linha ao longo de uma curva contínua fechada, adotando o símbolo \oint_C , dizemos que o campo vetorial \vec{F} é conservativo se, e somente se, a circulação é nula em todos os pontos do espaço. Ou seja, o campo vetorial \vec{F} é conservativo se, e somente se, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Campos conservativos recebem este nome pois neles a energia total é conservada. Por exemplo, se o movimento de uma partícula é causado por um campo de forças conservativo \vec{F} , a energia potencial da partícula em um ponto no espaço será definida como sendo uma função E . O trabalho (W) realizado para deslocar uma partícula do ponto A ao ponto B ao longo de qualquer trajetória neste campo, uma curva contínua C por exemplo, é $W = E(A) - E(B)$. Ou seja, o trabalho independe do caminho percorrido, importando apenas os pontos inicial e final. Mais precisamente, o trabalho realizado é igual a diferença de energia potencial da partícula em A e B .

Porém, consequência da segunda lei de Newton, este mesmo trabalho pode ser calculado através da variação da energia cinética (K) em cada ponto, ou seja, $W = K(B) - K(A)$, mais uma vez verificamos que o trabalho só depende dos pontos inicial e final. Igualando as duas equações temos:

$$E(A) - E(B) = K(B) - K(A)$$

$$E(A) + K(A) = E(B) + K(B)$$

Esta igualdade estabelece que a soma das energias potencial e cinética nos pontos inicial A e final B são iguais. Como A e B podem ser quaisquer pontos sobre a curva C , a soma das energias é constante ao longo de C . Isto é, a energia total da partícula permanece a mesma durante todo o movimento. Por isso o nome campo conservativo, pois a energia é conservada. Este é um dos grandes princípios da física, sendo chamado da lei da conservação da energia.

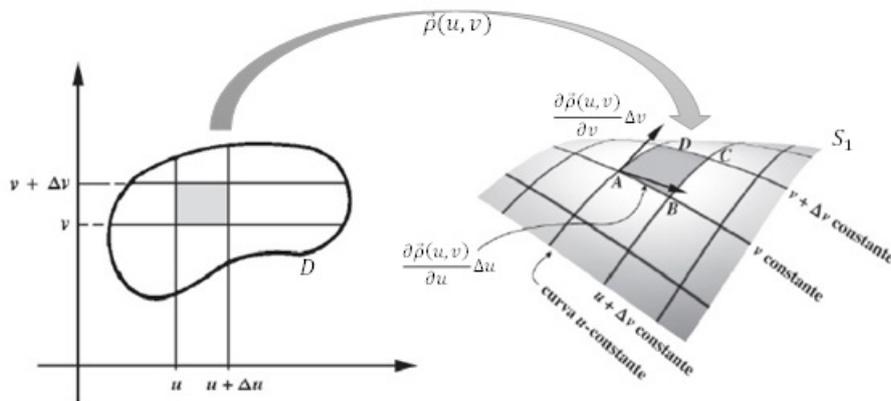
4.3 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

4.3.1 ÁREA DE SUPERFÍCIE

Seja D uma região fechada em \mathbb{R}^2 . Seja a superfície S_1 definida por uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é parametrizada por $\vec{\rho}(u, v)$, sendo $\vec{\rho} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\rho}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ com $u, v \in \mathbb{R}$. O parâmetro $\vec{\rho}(u, v)$ “transforma” os retângulos de lados Δu e Δv em D na superfície $ABCD$ contida na imagem de S_1 , de acordo com a figura a seguir.

Os vetores $\frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \Delta u$ e $\frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \Delta v$ são tangentes à superfície, e a área do paralelogramo formado por eles é $\left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$. Este paralelogramo é tangente à superfície no ponto A , e sua área é uma aproximação para a área da superfície $ABCD$. Observe que o vetor $\vec{n} = \left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right|$ é normal tanto a este paralelogramo quanto à superfície no ponto A .

Figura 19: Integral de superfície



Fonte: Guidorizzi (2001)

Tomando Δu e Δv suficientemente pequenos, du e dv respectivamente, de modo que a área da nova superfície $ABCD$ seja igual à área do paralelogramo tangente $\left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right| du dv = dS$. A área total (S) da superfície S_1 será a soma de todas estas áreas infinitesimais tomando todos os retângulos de lados du e dv existentes na região D :

$$S = \int_{S_1} \int dS \iint_D \left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right| du dv = \iint_D |\vec{n}| du dv$$

4.3.2 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UMA FUNÇÃO

Seja D uma região fechada em \mathbb{R}^2 . Seja uma superfície S_1 definida por uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e parametrizada por $\vec{\rho}(u, v)$ sendo $\vec{\rho} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\rho}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ com $u, v \in \mathbb{R}$. Define-se a integral de superfície de f na superfície S_1 :

$$\int_{S_1} \int f(x, y, z) dS = \int_D \int f(\vec{\rho}(u, v)) dS = \int_D \int f(\vec{\rho}(u, v)) \vec{n} dudv$$

4.3.3 SUPERFÍCIES ORIENTADAS

Para definir integral de superfície de campos vetoriais é preciso definir superfície orientada para poder descartar superfícies não orientadas, como a faixa de Möbius. Uma superfície é dita orientável se é possível escolher um vetor normal em cada um de seus pontos, separando-a em lados (dentro e fora, ou acima e abaixo), de modo que este vetor varie continuamente sobre a superfície. Se uma superfície orientada suave é dada em sua forma parametrizada pela equação vetorial $\sigma(u, v)$, então ela está automaticamente

associada à orientação do vetor normal unitário $\frac{\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v}{|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v|} = \frac{\frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial v} \right|}$.

Nesta dissertação trabalharemos apenas com superfícies orientáveis. Como convenção, será adotada o sentido positivo como sendo de dentro pra fora (ou de baixo para cima, ou da esquerda para direita). No exemplo da Figura 19 a superfície é orientável e seu vetor normal $\vec{n} = \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial v}$.

4.3.4 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPOS VETORIAIS

Seja D uma região fechada em \mathbb{R}^2 , e seja uma superfície S_1 em \mathbb{R}^3 parametrizada por $\vec{\rho}(u, v)$, sendo $\vec{\rho} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\rho}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Seja ainda um campo vetorial $\vec{F} : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Define-se como integral de superfície de um campo vetorial \vec{F} :

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \frac{dS}{|\vec{n}|} = \iint_D \vec{F}(\vec{\rho}(u, v)) \cdot \vec{n} \frac{\left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right| dudv}{\left| \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right|}$$

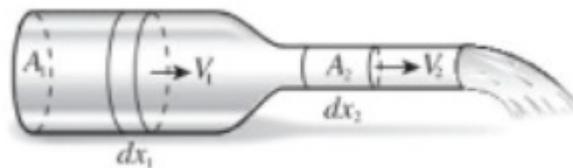
$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{\rho}(u, v)) \cdot \vec{n} du dv = \iint_D \vec{F}(\vec{\rho}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\rho}(u, v)}{\partial v} \right) du dv$$

4.3.5 FLUXO

Da mesma forma que a integral de linha está intimamente associada a ideia física de trabalho, a integral de superfície está relacionada com a ideia de fluxo.

Fluxo, ou vazão, nada mais é que a razão entre o volume (v) de algo que está fluindo (ou vazando) e o tempo (t), ou seja, a taxa de variação de volume com relação ao tempo. Note que o fluxo também pode ser expresso pelo produto entre a velocidade (V) de escoamento e a área (A) da seção por onde escoar este volume, como mostra o exemplo a seguir: um líquido escoando da esquerda para direita através de um encanamento que sofre um estreitamento no final. Sabemos que o volume de líquido que passa na região mais larga (1) é igual ao da região mais estreita (2), considerando aqui que não há perdas e que o fluido é incompressível. Assim concluímos que a velocidade de escoamento em 2 tem que ser maior que a velocidade de escoamento em 1 e é o que sabemos que realmente acontece quando estreitamos o bico de uma mangueira de jardim por exemplo, a velocidade da água aumenta.

Figura 20: Fluxo mangueira de água



Fonte: Quevedo (2010)

$$dv = A_1 dx_1 = A_2 dx_2 = A_1 V_1 dt = A_2 V_2 dt$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = \frac{dv}{dt}$$

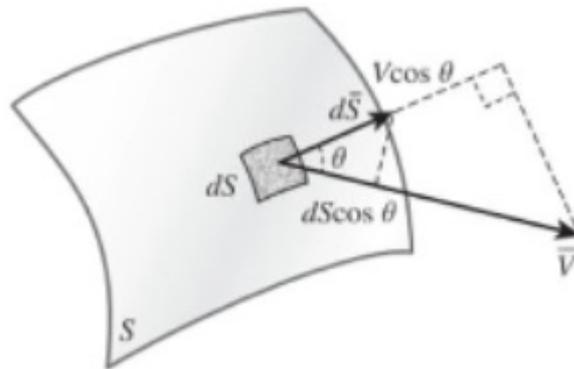
Neste exemplo, nas regiões 1 e 2, a taxa da variação de volume com relação ao tempo é igual ao produto entre velocidade e área, pois a área se mantém constante quando se considera uma variação em x , por exemplo ao variar dx_1 na direção x a área se manteve A_1 . Mas e quando as áreas não forem constantes, como por exemplo na região entre 1 e

2. Como calcular o fluxo através de uma determinada área?

Para saber o fluxo que atravessa determinada superfície, é preciso dividir esta superfície em infinitos pedaços elementares de área. Dessa forma, entendemos o fluxo através de uma determinada superfície como sendo o somatório dos produtos entre os vetores velocidade de escoamento através de uma determinada área elementar e a própria área elementar da superfície por onde escoar, ao longo de toda a superfície considerada. Essa analogia nos remete à integral de superfície.

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$, e $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de velocidade $\vec{V}(x, y, z)$, o fluxo de velocidade que flui através de uma superfície S considerada é:

Figura 21: Fluxo



Fonte: Quevedo (2010)

$$d\vec{S} = dS \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$Fluxo = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) \frac{dS}{|\vec{n}|} = \iint_S V \cos \theta dS$$

5 OPERADORES VETORIAIS

Neste capítulo definiremos os operadores Gradiente, Divergente e Rotacional que desempenham importante papel nos principais Teoremas do Cálculo Vetorial. Em seguida, serão apresentadas as interpretações geométricas e físicas de cada operador. Antes, porém, será apresentado o operador diferencial “nabla”.

5.1 NABLA

Nabla, simbolizado por ∇ , é um operador diferencial cuja definição é apresentada a seguir:

Seja $b = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ uma base ortonormal de R^n .

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} e_i$$

Sua expressão de definição apresenta um espaço em branco no numerador da fração dentro do somatório. Este espaço será preenchido com a função a ser derivada em cada caso, conforme será visto mais à frente. Trabalhando apenas em R^3 , como é o caso para o estudo de eletromagnetismo, definimos ∇ como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Vejamos a seguir como este operador será útil no estudo de Gradiente, Divergente e Rotacional.

5.2 GRADIENTE

O gradiente de uma função f , cujo símbolo é ∇f (ou *grad f*), é um vetor definido da seguinte forma:

Seja $U \subset R^n$ e $b = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ uma base de R^n e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer, o operador Gradiente é operador ∇ definido por:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

Ou no caso específico de uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, temos:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

5.2.1 PROPRIEDADES DO GRADIENTE

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in U$:

$$\text{a) } \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$$

$$\text{b) } \nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

5.2.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE

Gradiente é um vetor que determina a direção, a partir de um ponto, na qual uma função varia mais. Está intimamente ligado à ideia de derivada direcional, que é a taxa de variação, em relação à distância, de uma função, medida em determinada direção a partir de um determinado ponto.

Seja uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ então a derivada direcional de f na direção de um vetor \vec{v} qualquer, de coordenadas (a, b, c) , é:

$$D_{\vec{v}}f = \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial y}b + \frac{\partial f}{\partial z}c = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$$D_{\vec{v}}f = |\nabla f| |\vec{v}| \cos \theta$$

Logo, na direção do vetor unitário $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, temos que $-|\nabla f| \leq D_{\vec{u}}f \leq |\nabla f|$.

É fácil verificar então, que quando o vetor unitário escolhido for na mesma direção e sentido do vetor gradiente, a derivada direcional será o próprio vetor gradiente. Ou seja, quando o ângulo θ entre o gradiente e o vetor unitário for zero, isso nos dará a derivada direcional máxima.

Dessa forma, o vetor gradiente não só determina a direção de maior crescimento de uma função, como também determina qual é esta taxa de variação máxima - seu módulo.

Vamos agora provar que a direção do vetor gradiente é sempre perpendicular à tangente a qualquer curva contida numa superfície de nível.

Suponha então que esta curva contida na superfície de nível definida pela função $f(x, y, z) = k$, seja definida pela equação paramétrica $\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Como $\vec{r}(t)$ está contida em $f(x, y, z) = k$, então $f(x(t), y(t), z(t)) = k$. Derivando esta equação em função de t , temos, pela Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

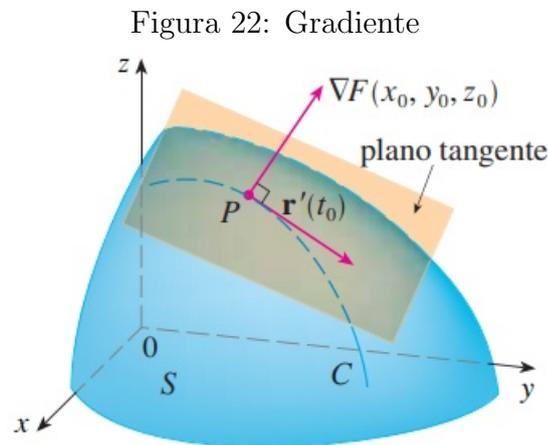
Reescrevendo a expressão em notação de produto escalar, temos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

Sabe-se que $\vec{r}'(t)$ é sempre tangente a curva $\vec{r}(t)$ em qualquer ponto dela. E como o produto escalar entre o vetor gradiente e o vetor $\vec{r}'(t)$ é zero, pode-se concluir que eles são perpendiculares. Logo, o vetor gradiente é sempre perpendicular à tangente a qualquer curva contida numa superfície de nível. \square

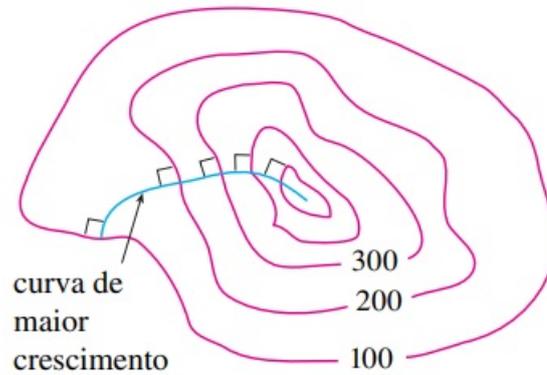
Logo, o vetor normal ao plano tangente à uma superfície S , definida por $f(x, y, z)$ passando por $P(x_0, y_0, z_0)$, é o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, como na figura a seguir.



Fonte: Stewart (2013)

Se considerarmos um mapa topográfico de uma elevação e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y) , então a curva de aclive máximo pode ser desenhada como na figura a seguir, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno.

Figura 23: Curva de nível



Fonte: Stewart (2013)

Vamos agora demonstrar como que o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial conservativo:

Seja D um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Seja um campo vetorial $\vec{V}(x, y, z) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ e uma curva contínua C qualquer, tendo com equação vetorial $\vec{r}(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ ($\forall t \in [a, b]$), onde $\vec{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, sabe-se que a integral de linha ao longo da curva C é:

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{V}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Suponha agora que este campo vetorial $\vec{V}(x, y, z)$ seja na verdade o campo gradiente de uma função escalar $v(x, y, z)$.

$$\int_C \nabla v \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla v(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$\int_C \nabla v \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} v(\vec{r}(t)) dt = v(\vec{r}(b)) - v(\vec{r}(a))$$

O que mostra que a integral de linha de um campo gradiente é independente do caminho, provando que é um campo conservativo.

Daí a importância do gradiente para o eletromagnetismo: determinar se um campo vetorial é conservativo. Um campo vetorial será conservativo se este for o gradiente de um campo escalar. Cabe aqui ressaltar que nem todo campo conservativo é o gradiente de uma função, mas todo gradiente de uma função é um campo vetorial conservativo.

5.3 DIVERGENTE

O divergente de uma função vetorial \vec{V} , que tem como símbolo $\nabla \cdot \vec{V}$ (ou $\text{div } \vec{V}$), é um escalar definido da seguinte forma:

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ e $b = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ uma base de \mathbb{R}^n e $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n v_i e_i, \quad v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

o operador Divergente de \vec{V} é definido por:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} e_i$$

No caso específico em \mathbb{R}^3 , temos:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}_z}{\partial z}}$$

5.3.1 PROPRIEDADES DO DIVERGENTE

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $g, \vec{F}, \vec{V} \in U$:

- a) $\nabla \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{V}) = \alpha (\nabla \cdot \vec{F}) + \beta (\nabla \cdot \vec{V})$
- b) $\nabla \cdot (g \vec{V}) = (\nabla g) \cdot \vec{V} + g \cdot (\nabla \cdot \vec{V})$

5.3.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DIVERGENTE

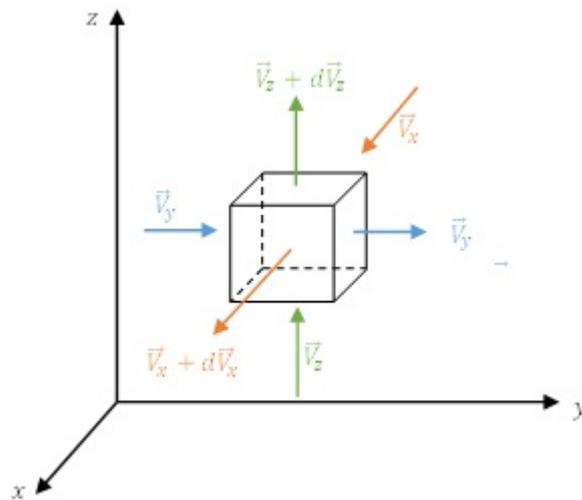
A ideia de divergente está intimamente ligada ao conceito de fluxo que vimos no capítulo anterior, na medida que indica os pontos no espaço onde existe fluxo “nascendo” (ou divergindo). Geometricamente, divergente de um campo vetorial é a razão entre o saldo de fluxo de campo (diferença entre o fluxo que “entra” e que “sai”) em uma determinada superfície fechada e o volume desta superfície fechada. Porém o divergente é uma informação local (pontual) e dessa forma é necessário considerar volumes elementares. Divergente é então uma densidade volumétrica elementar de saldo de fluxo.

De forma a ilustrar o parágrafo anterior, consideremos o caso de cargas elétricas. Sabe-se que cargas positivas emanam campo elétrico, e cargas negativas atraem campo elétrico. Logo, em um ponto do espaço onde houver carga elétrica positiva, o divergente será positivo, pois o fluxo de campo elétrico estará divergindo da carga, ou seja, o campo

está “nascendo” naquele ponto. Imagine uma pequena esfera (de volume elementar) envolvendo esta carga positiva. O saldo de fluxo de campo elétrico que atravessa a superfície desta esfera é positivo, pois todas as linhas de campo estão “saindo” dela. Por outro lado, se a carga for negativa, o divergente também o será, pois o campo está convergindo para aquele ponto, ou seja, as linhas de campo estão “entrando” na esfera. Semelhante a uma carga elétrica negativa é o caso de um ponto no espaço que contenha massa: o divergente será negativo pois todo o fluxo de campo gravitacional estará convergindo para este ponto.

Vejam agora um exemplo intuitivo desta interpretação geométrica. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ e $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial que atravessa o volume elementar $dxdydz$. O esquema a seguir apresenta o vetor $\vec{V}(x, y, z)$ decomposto nas direções que são de interesse para calcularmos o divergente através da superfície fechada, ou seja, em componentes que são ortogonais às faces do volume elementar do cubo (ou ainda, as componentes alinhadas com o vetor normal a área de cada face - que aponta perpendicularmente para fora da superfície fechada). Suponha que exista saldo de fluxo nessa região, pois se não houvesse o divergente seria nulo.

Figura 24: Divergente



Fonte: Próprio Autor (2020)

Calculando separadamente o saldo de fluxo entre as faces paralelas da superfície fechada de volume elementar $dv = dxdydz$ temos:

O saldo de fluxo entre as superfícies de área $dydz$ é: $-\vec{V}_x dydz + (\vec{V}_x + d\vec{V}_x) dydz = d\vec{V}_x dydz$

O saldo de fluxo entre as superfícies de área $dxdz$ é: $d\vec{V}_y dxdz$

O saldo de fluxo entre as superfícies de área $dxdy$ é: $d\vec{V}_z dxdy$

Conclui-se que o saldo de fluxo total que atravessa todas as faces da superfície fechada de volume elementar $dx dy dz$ é: $d\vec{V}_x dy dz + d\vec{V}_y dx dz + d\vec{V}_z dx dy$

$$\begin{aligned} \text{Saldo de Fluxo} &= \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \vec{V}_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \vec{V}_z}{\partial z} dz dx dy \\ &= \left(\frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

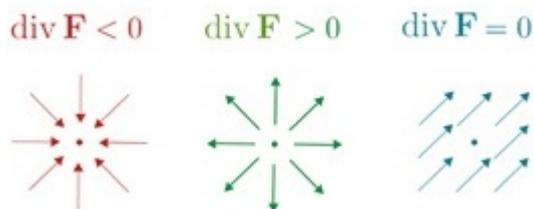
$$\text{Saldo de Fluxo} = \left(\frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}_z}{\partial z} \right) dv$$

Como o divergente é a densidade volumétrica de fluxo, temos agora a expressão cartesiana para o divergente de um campo vetorial \vec{V} :

$$\boxed{\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\text{saldo de fluxo}}{dv} = \left(\frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}_z}{\partial z} \right)}$$

Outra conclusão importante é que o divergente é negativo se o fluxo “entrando” é maior que o “saindo”. Em contrapartida o divergente é positivo se o fluxo “saindo” é maior que o “entrando”. Logicamente será zero se todo fluxo que “entra” também “sai”.

Figura 25: Fluxos divergentes



Fonte: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/divergence-and-curl-articles/a/divergence> (Acessado em 17 de junho de 2019)

5.4 ROTACIONAL

O rotacional de uma função vetorial \vec{V} , que tem como símbolo $\nabla \times \vec{V}$ (ou $\text{rot } \vec{V}$), é um vetor definido da seguinte forma:

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ e $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{V} = \vec{V}_x i + \vec{V}_y j + \vec{V}_z k$ o operador Rotacional de \vec{V} é definido por:

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) k$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

5.4.1 PROPRIEDADES DO ROTACIONAL

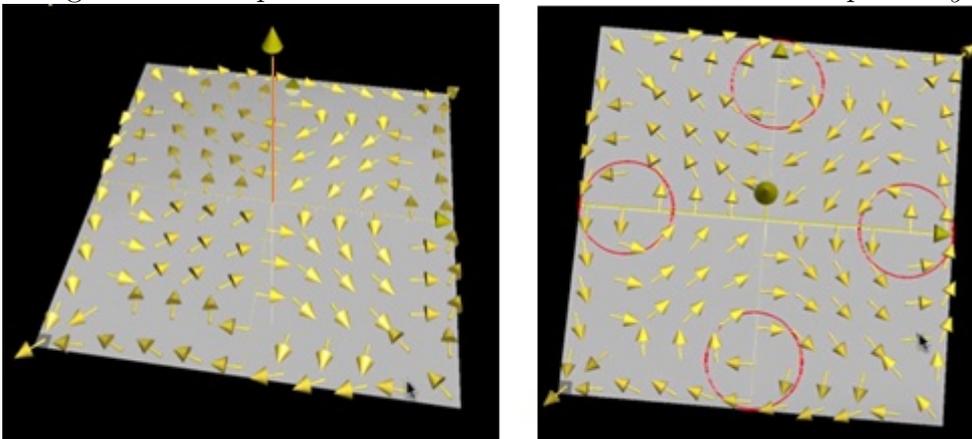
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $g, \vec{F}, \vec{V} \in U$:

- $\nabla \times (\alpha \vec{F} + \beta \vec{V}) = \alpha(\nabla \times \vec{F}) + \beta(\nabla \times \vec{V})$
- $\nabla \times (g \cdot \vec{V}) = (\nabla g) \times \vec{V} + g(\nabla \times \vec{V})$
- $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{V}) = [\nabla \vec{V} + \nabla \cdot \vec{V}] \vec{F} + [\nabla \vec{F} + \nabla \cdot \vec{F}] \vec{V}$
- $\nabla \times (\nabla \vec{V}) = 0 \quad \forall \vec{V}$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad \forall \vec{V}$

5.4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ROTACIONAL

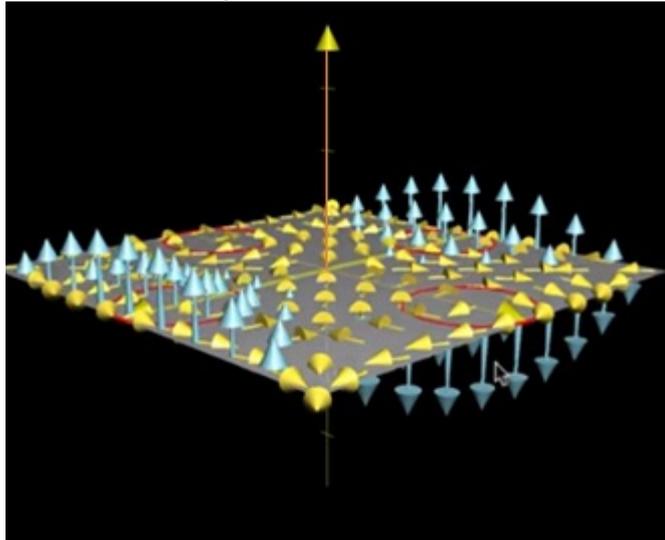
Suponha um campo vetorial de velocidades de um fluido no plano xy , descrito como $\vec{V}(x, y) = P(y)i + Q(x)j$. Observe que se fez questão de que na direção x o vetor velocidade varie em função de y , e que na direção y o vetor velocidade varie em função de x . De tal forma que a representação do campo vetorial seja conforme representado na figura a seguir:

Figura 26: Campo vetorial de velocidades de um fluido no plano xy



De acordo com a regra da mão direita, podemos representar essas rotações através de vetores, representados em azul na figura a seguir:

Figura 27: Rotacional



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=2IyEWh-X8k> (Acessado em 20 de abril de 2019)

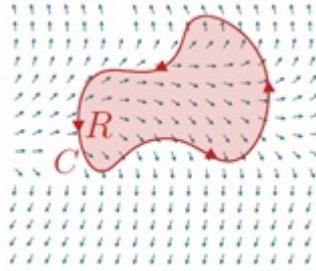
Cada vetor desse é dito o rotacional da função $\vec{V}(x, y)$ em determinado ponto (x, y) . Esses vetores indicam a intensidade de rotação (seu módulo) e o sentido de rotação (através da regra da mão direita) em torno de cada ponto do plano xy .

O rotacional é uma medida de circulação (integral de linha ao longo de uma curva contínua fechada) elementar de um campo vetorial em torno de um ponto. É um vetor, com origem neste ponto, ortogonal à área onde está a circulação elementar. Seu módulo é a densidade de circulação (em relação à área elementar), ou seja:

$$|\text{rot}\vec{V}| = \frac{\text{circulao elementar}}{|d\vec{S}|}$$

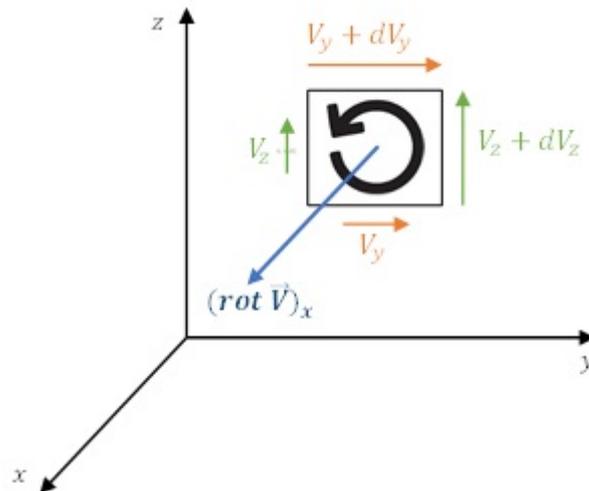
$$|\text{rot}\vec{V}| = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|S|} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Onde S é a área da região R imersa no campo vetorial \vec{V} a seguir:

Figura 28: Região R imersa no campo vetorial \vec{V} 

Fonte: Stewart (2013)

Vejamos agora um exemplo intuitivo desta interpretação geométrica. Como se trata de um vetor, podemos calculá-lo separadamente em suas componentes x, y, z . Calculemos então o rotacional em torno de um ponto, por partes, analisando separadamente os três planos: yz que fornecerá o $(\text{rot}\vec{V})_x$, xz que fornecerá o $(\text{rot}\vec{V})_y$ e xy que fornecerá o $(\text{rot}\vec{V})_z$. Note que o rotacional em duas dimensões é mesmo que a circulação, ou seja, a integral de linha. Iniciando pelo plano yz , temos o esquema a seguir, admitindo aqui que as componentes sofram variação $\left(dV_y = \frac{\partial V_y}{\partial z} dz \text{ e } dV_z = \frac{\partial V_z}{\partial y} dy\right)$:

Figura 29: Rotacional de \vec{V} na direção x 

Fonte: Próprio Autor (2020)

$$\text{Circulação elementar} = V_y dy + (V_z + dV_z) dz - (V_y + dV_y) dy - V_z dz$$

$$\text{Circulação elementar} = dV_z dz - dV_y dy = \frac{\partial V_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial V_y}{\partial z} dz dy$$

$$\text{Circulação elementar} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy dz; \text{ dividindo pela área elementar:}$$

$$(\text{rot}\vec{V})_x = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$$

Fazendo o processo análogo para os outros dois planos temos que:

$$(\text{rot}\vec{V})_y = \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \text{ e } (\text{rot}\vec{V})_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

O que nos dá a expressão cartesiana do rotacional:

$$\boxed{\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) k}$$

5.5 LAPLACIANO

O operador laplaciano de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo símbolo pode ser Δ ou ∇^2 , é definido por:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

No \mathbb{R}^3 temos:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} k$$

Encerramos então o capítulo com duas propriedades fundamentais em \mathbb{R}^3 :

a) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) k$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) k = 0 \quad \square$$

b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \cdot \left(\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) k \right) =$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)}{\partial z} =$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} = 0 \quad \square$$

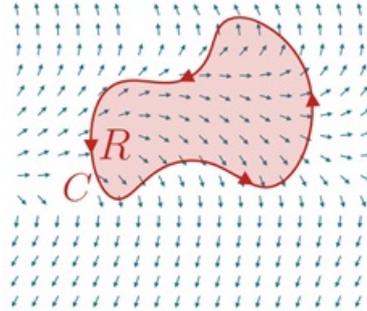
6 TEOREMAS

Neste capítulo apresentaremos os três principais teoremas de cálculo vetorial que são extremamente úteis na teoria do eletromagnetismo: Teorema de Green, Teorema de Gauss e o Teorema de Stokes.

6.1 TEOREMA DE GREEN

Seja $R \in \mathbb{R}^2$, uma região no plano xy , cuja fronteira é delimitada pela curva contínua fechada C , conforme a figura a seguir. Suponha esta região imersa em um campo vetorial $\vec{F}(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$, com $P, Q : R \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com derivadas também contínuas.

Figura 30: Região R limitada pela curva C imersa em um campo vetorial \vec{F}



Fonte: Stewart (2013)

O Teorema de Green afirma que a integral de linha ao longo da fronteira de R (ou seja, ao longo da curva C) é igual a integral dupla do rotacional de $\vec{F}(x, y)$ em R .

$$\iint_R \nabla \times (\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ou ainda:

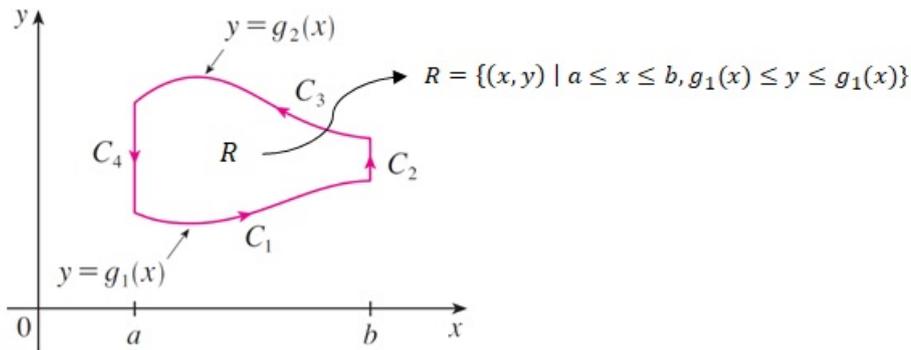
$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

Demonstração. O teorema estará demonstrado se provarmos que:

$$\oint_C P dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dS \quad e \quad \oint_C Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dS$$

Demonstrando a primeira igualdade assumindo que a região R seja como a da figura a seguir, onde $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são contínuas:

Figura 31: Teorema de Green



Fonte: Stewart (2013)

O lado direito da equação fica:

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dS = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

Analisando agora o lado esquerdo, vamos decompor a curva C em C_1, C_2, C_3, C_4 , conforme a Figura 31, e tomando x como parâmetro podemos escrever:

$$C_1 = \begin{cases} x = x \\ y = g_1(x) \end{cases} \quad e \quad C_3 = \begin{cases} x = x \\ y = g_2(x) \end{cases}$$

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Como x é constante ao longo de C_2 e C_4 , $dx = 0$, portanto

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = \int_{C_4} P(x, y) dx = 0$$

Temos então que

$$\oint_C P dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx$$

$$\oint_C P dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

□

Provando assim que o lado esquerdo é igual ao direito. A segunda igualdade é

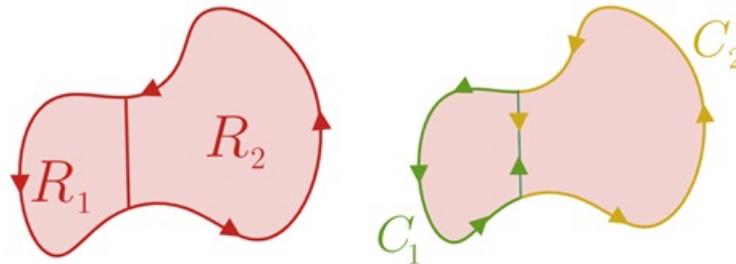
demonstrada de maneira análoga.

6.1.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE GREEN

É um teorema cuja aplicação é apenas para o \mathbb{R}^2 . A integral de linha $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ soma todos os produtos escalares entre \vec{F} e $d\vec{r}$ ao longo de toda a curva C . A utilidade do teorema é justamente trazer a ideia de rotação do campo \vec{F} para dentro da região R considerada.

Suponha a divisão da região R em duas sub-regiões R_1 e R_2 de forma que as fronteiras dessas sub-regiões sejam C_1 e C_2 por meio de um corte vertical, conforme a seguir:

Figura 32: Divisão da região R em R_1 e R_2



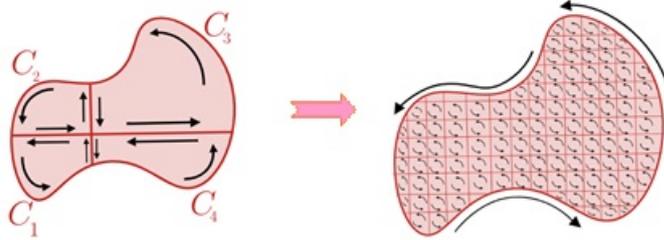
Fonte: Stewart (2013)

Ao somar as duas integrais de linha ao redor dessas duas regiões teremos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, pois as integrais de linha ao longo do corte vertical se anularão, tendo em vista que para o trecho vertical considerado, \vec{F} e $d\vec{r}$ são os mesmos tanto para C_1 quanto para C_2 , mudando apenas o sentido de $d\vec{r}$, logo uma integral de linha será o oposto da outra neste trecho.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dividindo em mais pedaços e repetindo este processo indefinidamente concluímos que as integrais de linhas ao longo de todas as divisões feitas no interior da região R se anularão, restando apenas as integrais de linha na fronteira da região R .

Figura 33: Interpretação Geométrica do Teorema de Green



Fonte: Stewart (2013)

Como vimos no capítulo anterior, a integral de linha de uma dessas áreas elementares na qual a região R foi dividida é chamada de circulação, e equivale ao rotacional em duas dimensões do campo \vec{F} . Então, somando todos esses infinitos rotacionais no interior da região R , é equivalente a integral de linha ao longo do limite C da região R :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

6.2 TEOREMA DE GAUSS

Seja $R \subset \mathbb{R}^3$, uma região sólida no espaço, cuja fronteira é delimitada pela superfície S . Suponha esta região imersa em um campo vetorial $\vec{V}(x, y, z) = F(x, y, z)\mathbf{i} + G(x, y, z)\mathbf{j} + H(x, y, z)\mathbf{k}$, com $F, G, H : R \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com derivadas também contínuas em uma região aberta que contenha R . O Teorema de Gauss, também conhecido com o Teorema da Divergência, diz que a integral de superfície ao longo da fronteira do volume R (ou seja, ao longo da superfície S) é igual a integral tripla do divergente de $\vec{V}(x, y, z)$ em R .

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \nabla \cdot \vec{V} \, dv$$

Ou seja, o Teorema de Gauss afirma que o fluxo de campo \vec{V} pela fronteira S de R é igual a integral tripla da divergência de \vec{V} em R .

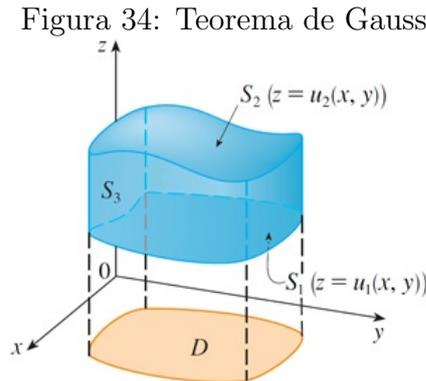
$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_S F\mathbf{i} \cdot d\vec{S} + \iint_S G\mathbf{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S H\mathbf{k} \cdot d\vec{S} \\ \iint_S \nabla \cdot \vec{V} \, dv &= \iint_S \frac{\partial F}{\partial x} \, dv + \iint_S \frac{\partial G}{\partial y} \, dv + \iint_S \frac{\partial H}{\partial z} \, dv \end{aligned}$$

Semelhante à demonstração anterior, o Teorema de Gauss estará demonstrado se provarmos que:

$$\begin{aligned} \iint_S F\mathbf{i} \cdot d\vec{S} &= \iiint_R \frac{\partial F}{\partial x} \, dv ; \\ \iint_S G\mathbf{j} \cdot d\vec{S} &= \iiint_R \frac{\partial G}{\partial y} \, dv ; \text{ e} \end{aligned}$$

$$\iint_S Hk \cdot d\vec{S} = \iiint_R \frac{\partial H}{\partial z} dv$$

Para demonstrar esta última igualdade, suponhamos que a R seja uma região como a figura a seguir, $R = (x, y, z) | (x, y) \in D, p_1(x, y) \leq z \leq p_2(x, y)$, onde $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ são suaves e D é a projeção de R sobre o plano onde xy .



Fonte: Stewart (2013)

O lado direito da equação fica:

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{\partial H}{\partial z} dv &= \iint_D \int_{p_1(x,y)}^{p_2(x,y)} \left[\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dA \\ \iiint_R \frac{\partial H}{\partial z} dv &= \iint_D [H(x, y, p_2(x, y)) - H(x, y, p_1(x, y))] dA \end{aligned}$$

Para o lado esquerdo da equação precisamos observar que a fronteira S é constituída por três partes: a superfície inferior S_1 , a superior S_2 , e a vertical S_3 .

$$\iint_S Hk \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} Hk \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} Hk \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} Hk \cdot d\vec{S}_3$$

Mas como S_3 é vertical, seu vetor normal é perpendicular a k , logo $\iint_{S_3} Hk \cdot d\vec{S}_3 = 0$, então:

$$\iint_S Hk \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} Hk \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} Hk \cdot d\vec{S}_2$$

Mas como a equação de S_1 é $z = p_1(x, y)$ e S_2 é $z = p_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, temos

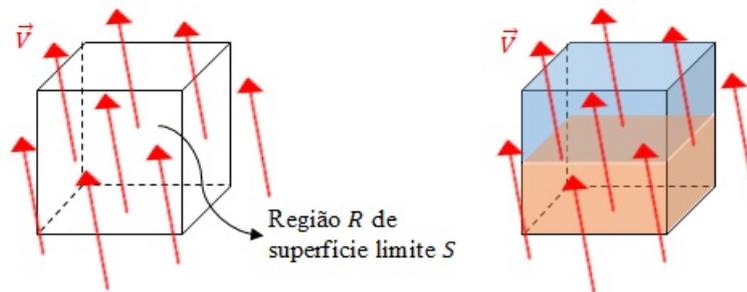
$$\begin{aligned} \iint_{S_1} Hk \cdot d\vec{S}_1 &= - \iint_D H(x, y, p_1(x, y)) dA \\ \iint_{S_2} Hk \cdot d\vec{S}_2 &= \iint_D H(x, y, p_2(x, y)) dA \\ \iint_S Hk \cdot d\vec{S} &= \iint_D [H(x, y, p_2(x, y)) - H(x, y, p_1(x, y))] dA \end{aligned}$$

Provando assim que o lado esquerdo e direito são iguais. As outras duas igualdades são provadas de maneira análoga.

6.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE GAUSS

Retomando a interpretação do Teorema de Green em duas dimensões, onde, a circulação ao redor de uma região é igual à soma dos rotacionais interiores, podemos fazer uma analogia com o Teorema de Gauss, apenas substituindo a ideia de rotacional por divergente e analisando em três dimensões. Somar todas as divergências dos volumes elementares interiores à região sólida, é equivalente a calcular o fluxo total que atravessa a superfície limite desta região. Isso porque os pequenos fluxos interiores vão se anular, uma vez que na superfície limite entre dois volumes adjacentes, o fluxo de campo que está “saindo” de um volume é igual ao que está “entrando” no outro. Cabe lembrar que divergente nada mais é que a densidade volumétrica de fluxo.

Figura 35: Divisão do volume da região R em R_1 e R_2

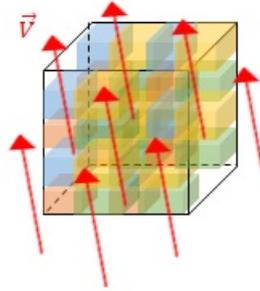


$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Fonte: Próprio Autor (2020)

Observe que o saldo de fluxo através da superfície em comum entre os dois volumes é nulo, pois todo o fluxo que entra (divergente negativo) é o mesmo que sai (divergente positivo). Isso mostra que o fluxo total é a soma dos fluxos. Ao continuar dividindo indefinidamente a região sólida até infinitos volumes elementares, podemos facilmente calcular o fluxo de cada ponto associado a um volume elementar destes (ou seja, fluxo elementar) fazendo o produto entre o divergente no ponto e o volume elementar.

Figura 36: Interpretação geométrica do Teorema de Gauss



$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\text{fluxo elementar}}{dv} \Rightarrow \text{fluxo elementar} = \nabla \cdot \vec{V} dv$$

Fonte: Próprio Autor (2020)

Então o fluxo total será a soma de todos os fluxos elementares, ou seja $\iint_S \nabla \cdot \vec{V} dv$

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \nabla \cdot \vec{V} dv$$

O lado esquerdo da equação é uma integral de superfície, e indica que serão somados todos os fluxos de campo vetorial que nascem (divergem) no volume R delimitado pela superfície fechada S . Cabe ressaltar aqui que serão tomados todos os fluxos através de todas as faces dos volumes elementares da região do espaço limitada pela superfície fechada (conforme Figura 36). O fluxo ao nascer em ponto que o divergente seja diferente de zero, atravessará todos os elementos de volume que se encontram em seu caminho até finalmente atravessar o limite (a “casca”) da superfície que delimita a região. Perceba que este fluxo ao sair pela face de um volume elementar (fluxo positivo), simultaneamente também está penetrando na face do volume elementar adjacente (fluxo negativo), o que faz com que naquela fronteira não exista fluxo. Como consequência todos esses fluxos intermediários irão se anular, restando apenas o fluxo que atravessa a face do elemento de volume que coincide com o limite exterior da superfície fechada, também chamado de casca. Dessa forma concluímos que somar todos os fluxos que nascem em uma região R , resume-se a somar apenas aqueles fluxos que atingem a superfície limite S desse volume, uma vez que todos os fluxos intermediários se cancelarão.

Já o lado direito da equação é uma integral de volume, e significa que serão somados os produtos do divergente do campo vetorial de cada ponto no interior do volume (delimitado pela superfície fechada) com o volume elementar associado neste ponto - ou seja, serão somados todos os fluxos elementares, resultando no fluxo total do volume considerado.

6.3 TEOREMA DE STOKES

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta, cuja fronteira é a curva C fechada suave. Suponha esta superfície imersa em um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ com $P, Q, R : S \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e com derivadas parciais também contínuas, então o Teorema de Stokes garante que:

$$\iint_S \nabla \times (\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

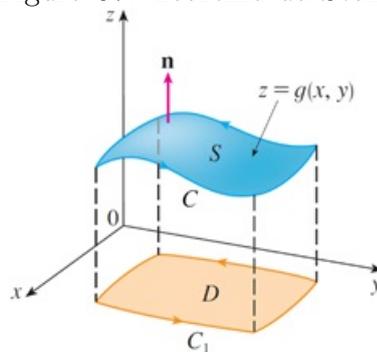
Ou ainda:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \right] = \oint_C P dx + Q dy + R dz$$

O Teorema de Stokes afirma que a integral de linha de um campo vetorial \vec{F} ao longo da fronteira C de uma superfície S equivale a integral de superfície da rotação de \vec{F} sobre S .

Demonstração. Considerando a superfície S como a da figura a seguir:

Figura 37: Teorema da Stokes



Fonte: Stewart (2013)

Temos $z = g(x, y)$ com $(x, y) \in D$, onde D é a projeção no plano xy da superfície S , com fronteira C_1 correspondente a projeção de C no plano x, y . Seja g contínua com derivadas parciais de segunda ordem também contínuas. O Teorema estará demonstrado se provarmos que:

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ \oint_C Q dy &= \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \end{aligned}$$

$$\oint_C R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

Tomando o lado esquerdo da primeira igualdade, pelo Teorema de Green temos:

$$\oint_C P(x, y, z) dx = \oint_{C_1} P(x, y, g(x, y)) dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

Já no lado direito temos que, como visto no capítulo 5:

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

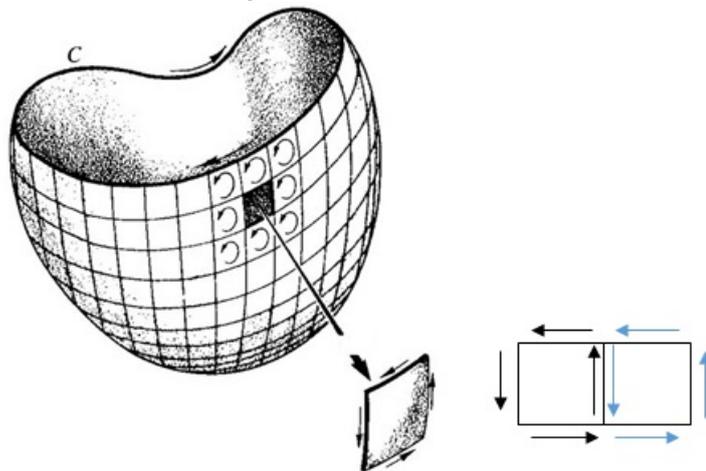
O que prova a primeira igualdade. De maneira análoga são provadas as outras duas igualdades.

□

6.3.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE STOKES

De imediato é fácil perceber que este teorema é a extensão na terceira dimensão do Teorema de Green. O que podemos concluir do Teorema de Stokes é que calcular o fluxo do rotacional de um campo vetorial que “flui” através de uma superfície equivale a calcular a integral de linha desse campo ao longo da fronteira que limita esta superfície.

Figura 38: Interpretação Geométrica do Teorema da Stokes



Fonte:

<https://slideplayer.com.br/slide/1595567/5/images/3/Rotacional+e+Diverg%C3%A7%C3%A3o+em+uma+superf%C3%ADcie+curva.jpg>
(Acessado em 15 de julho de 2019)

O raciocínio é semelhante ao utilizado para o Teorema de Green, onde as integrais de linha ao redor de todas as áreas elementares $d\vec{S}$ ao longo de toda a superfície S se

anularão mutuamente nas fronteiras em comum, restando apenas a circulação ao longo da curva fechada C que limita a superfície, ou seja $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Utilizando a definição de rotacional como sendo a densidade de circulação elementar (em relação a área da superfície) temos que $(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} =$ circulação elementar. Em termos integrais temos que o somatório da circulação elementar é igual a integral de $(\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ ao longo de toda a superfície S , que nada mais é que o fluxo de $(\nabla \times \vec{F})$ que atravessa a superfície S . E como vimos antes que o somatório da circulação elementar é $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, temos:

$$\boxed{\iint_S \nabla \times (\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

7 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Neste capítulo apresentaremos as quatro equações de Maxwell que sintetizam toda a teoria do eletromagnetismo e são carregadas das propriedades que foram estudadas ao longo deste trabalho. Será mostrada a principal contribuição de Maxwell ao completar a lei de Ampère, introduzindo o conceito de corrente de deslocamento.

7.1 LEI DE GAUSS

A primeira equação de Maxwell está intimamente ligada a descoberta feita por Charles-Augustin de Coulomb, publicada em 1785, onde cargas elétricas interagem entre si, atraindo-se ou repelindo-se mutuamente, através de uma força diretamente proporcional a intensidade das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, de maneira semelhante a massas que se atraem na lei da gravitação.

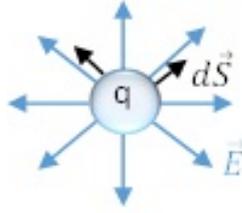
$$\text{Lei de Coulomb} \Rightarrow \left| \vec{F} \right| \propto \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow \left| \vec{F} \right| = k_0 \frac{|q_1| |q_2|}{r^2}.$$

Onde k_0 é a constante eletrostática no vácuo ($k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$), sendo ϵ_0 a constante de permissividade). Pela lei de Coulomb podemos descobrir o campo elétrico \vec{E} gerado por uma carga q_1 . Basta colocar uma carga de prova positiva q_2 no espaço, distando r de q_1 e verificar a intensidade da força, que se for de repulsão quer dizer que o campo diverge de q_1 (q_1 positiva), ou se for de atração quer dizer que o campo converge para q_1 (q_1 é negativa). O campo elétrico \vec{E} terá a mesma direção e sentido de \vec{F} .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} \Rightarrow \left| \vec{E} \right| = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Suponha um campo elétrico \vec{E} gerado por uma pequena carga esférica estacionária positiva de valor q e raio r no vácuo.

Figura 39: Carga esférica positiva



Fonte: Próprio Autor (2020)

Aplicando o Teorema de Gauss, temos:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} dv \Rightarrow \Phi E = \text{fluxo } \vec{E} = (\nabla \cdot \vec{E}) \text{volume}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\Phi E}{\text{volume}}$$

$$\phi E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cos 0 = \iint_S |\vec{E}| dS = |\vec{E}| 4\pi r^2$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{|\vec{E}| 4\pi r^2}{\text{volume}} = \frac{|q|}{4\pi \epsilon_0 r^2 4\pi r^2} = \frac{q/\text{volume}}{\epsilon_0}$$

Chamando de ρ a densidade volumétrica de carga na partícula considerada, temos que $\rho = q/\text{volume}$, e então

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Esta é a primeira equação de Maxwell em sua forma diferencial, que relaciona o divergente do campo elétrico com a densidade volumétrica de carga. Apesar da forma diferencial ser mais elegante, é comum as equações de Maxwell aparecerem na sua forma integral também. A primeira equação de Maxwell em sua forma integral nada mais é que a aplicação direta do Teorema de Gauss, e por isso também é conhecida como Lei de Gauss. Afirma que a integral de superfície ao longo da casca esférica é igual ao valor total da carga no volume da esfera considerada dividido pela permissividade elétrica do meio (ϵ_0).

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} dv = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} dv = \frac{q}{V\epsilon_0} V$$

$$\boxed{\Phi E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Generalizando esta lei, o volume limitado pela superfície S (casca ou superfície gaussiana) pode ser qualquer volume, o que pode facilitar o cálculo de certas configurações ao se escolher uma superfície gaussiana onde o campo elétrico seja constante.

7.1.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 1ª EQUAÇÃO DE MAXWELL

Na prática, o que a primeira equação nos diz é que as linhas de campo elétrico divergem onde há cargas elétricas positivas e convergem onde há cargas elétricas negativas. Dessa forma, concluímos que cargas elétricas positivas são fonte de fluxo de campo elétrico. E que em pontos onde não há carga (ou onde há cargas que se anulam), o divergente é nulo.

Figura 40: Interpretação física da 1ª equação de Maxwell



Fonte: Halliday (2012)

7.2 DIPOLO MAGNÉTICO

A segunda equação de Maxwell é também conhecida como a lei de Gauss para o magnetismo. Ou seja, é a mesma aplicação do Teorema de Gauss do item anterior, porém agora para o campo magnético.

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{B} dv$$

Onde $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi B$ (fluxo magnético). Como a força magnética entre ímãs obedece a uma lei semelhante à de Coulomb e da gravitação, sendo proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os polos, nos faz deduzir que, de forma análoga

ao caso eletrostático, no caso magnetostático teremos: (k uma constante equivalente a permissividade elétrica do meio)

$$|\vec{B}| = \frac{qm}{k4\pi r^2}$$

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| 4\pi r^2 = \frac{qm}{k}$$

Onde q_m refere-se a carga magnética total no interior da superfície gaussiana. Porém como se sabe, não existem cargas magnéticas isoladas. Não é possível isolar polos magnéticos da mesma forma como se isolam cargas elétricas. A única fonte de campo magnético é a corrente elétrica ou um imã, e, portanto, não existem monopolos magnéticos, existindo apenas os ditos dipolos magnéticos. Dessa forma, a quantidade q_m de qualquer campo magnético é sempre zero pois o polo norte sempre “anulará” o polo sul assim como a carga elétrica positiva anula a negativa.

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{qm}{k} = 0$$

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{B} dv$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\Phi_B}{\text{volume}} = 0$$

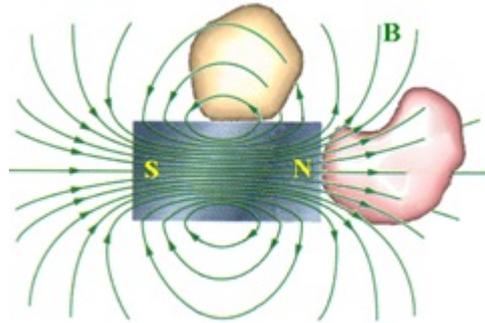
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

Sendo esta a segunda equação de Maxwell, que afirma que não existe divergente de campo magnético em lugar algum do espaço.

7.2.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 2ª EQUAÇÃO DE MAXWELL

Vimos na seção anterior que as linhas de campo elétrico sempre nascem ou terminam nas cargas elétricas. Com não existem cargas magnéticas, as linhas de campo magnético não podem começar ou terminar em lugar nenhum. Dessa maneira, sempre formam circuitos fechados como mostra a figura. Com isto, notamos que o número de linhas de campo que entram na superfície S é igual ao número das que saem, implicando que o fluxo total de linhas de campo magnético em qualquer superfície gaussiana é nulo.

Figura 41: Dipolo Magnético

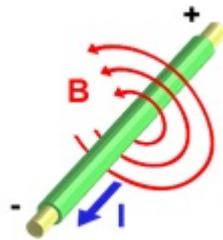


Fonte: <http://ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/LeiGauss-B/LeiGauss-B.html>
(Acessado em 25 de agosto de 2019)

7.3 LEI DE AMPÈRE

A terceira equação de Maxwell está intimamente ligada a lei de Ampère, que foi quem primeiro conseguiu demonstrar matematicamente a relação entre corrente elétrica fluindo e a geração de um campo magnético. Ele verificou que carga elétrica em movimento gera um campo magnético ao seu redor. Além disso, verificou que, no caso de um fio retilíneo longo, transportando corrente elétrica, as linhas de campo magnético são círculos em planos perpendiculares ao fio, onde a orientação dessas linhas pode ser obtida pela regra da mão direita (com o polegar no sentido da corrente).

Figura 42: Lei de Ampère



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Campo_magn%C3%A9tico
(Acessado em 30 de agosto de 2019)

Então a lei de Ampère diz que a circulação de campo magnético é proporcional a corrente presente em um fio. A curva C pode ser uma curva arbitrária fechada que envolva fio condutor de corrente. Esta curva recebe o nome de *amperiana*, em analogia à superfície gaussiana na lei de Gauss.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \Rightarrow \text{Lei de Ampère}$$

Onde μ_0 é a permeabilidade magnética do meio, com μ_0 sendo o meio vácuo.

Introduzindo J como sendo densidade de corrente elétrica em relação a uma determinada área, podemos usar o Teorema de Stokes de forma que esta lei também pode ser escrita da seguinte forma (onde S é a área da região formada pela curva amperiana C):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S J dS$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J$$

Naturalmente esta lei de Ampère escrita na forma diferencial seria a terceira equação de Maxwell, porém é aqui que entra a genialidade deste matemático. Motivado pelo paradoxo do capacitor, um problema físico que na época os estudiosos não sabiam explicar. O paradoxo consiste no seguinte: como se sabe, verificando a lei de Ampère em um circuito com capacitor, a lei se aplica facilmente a qualquer parte deste circuito onde a corrente elétrica percorre o fio condutor, percebendo-se um campo magnético ao redor do fio. Porém, o mesmo campo magnético é percebido se a curva amperiana estiver passando exatamente ao redor do elemento isolante do capacitor, onde é fisicamente impossível existir corrente elétrica. Nenhum cientista da época sabia explicar o motivo.

Este paradoxo motivou os estudos de Maxwell que acabou resolvendo o problema criando a *corrente de deslocamento* num pensamento simétrico à Lei de Faraday, que veremos na próxima seção.

7.3.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA LEI DA AMPÈRE

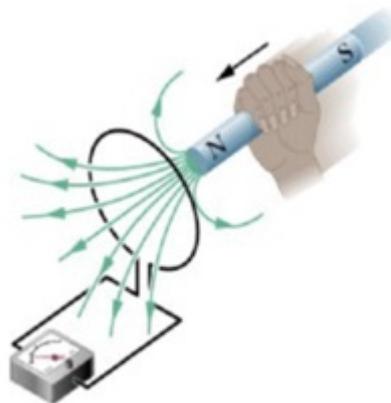
A lei de Ampère propõe que campo magnético circula ao redor de corrente elétrica. Ou em outras palavras, um campo magnético é induzido se existe fluxo de carga elétrica, ou seja, corrente elétrica. Esta ideia esta por trás dos primeiros motores elétricos, pois se era possível criar um campo magnético através de corrente, era também possível fazer alguma peça imantada se mover, girando como Orested fez com a bússola.

7.4 LEI DE FARADAY

Se a propriedade descrita pela lei de Ampère, onde corrente elétrica gera campo magnético, já foi surpreendente, a descoberta da recíproca, feita através das observações de Faraday, foi ainda mais. Michael Faraday observou que um campo magnético também pode gerar um campo elétrico.

O experimento ilustrado na figura foi um dos realizados por Faraday, que concluiu que ao variar a quantidade de campo magnético que atravessa a espira uma força eletromotriz é induzida, gerando corrente elétrica na mesma.

Figura 43: Lei de Faraday



Fonte: Halliday (2012)

Inicialmente Faraday imaginou que um campo magnético constante poderia gerar corrente elétrica, mas, obviamente, seu experimento neste sentido não deu certo. Percebeu depois que o que geraria corrente elétrica e, conseqüentemente, campo elétrico, era a variação de campo magnético. Ficou estabelecida então a Lei de Faraday: A força eletromotriz induzida (fem = circulação de campo elétrico) em uma espira é igual a taxa de variação com o tempo do fluxo de campo magnético que atravessa a espira, ou seja, ao fluxo do campo magnético variante. Observou-se que a fem se opõe a variação do fluxo, portanto a lei é escrita da seguinte forma:

$$fem = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Esta é a lei de Faraday, ou a quarta equação de Maxwell em sua forma integral. Aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

E esta forma diferencial da quarta equação de Maxwell.

7.4.1 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA 4ª EQUAÇÃO DE MAXWELL

A quarta equação de Maxwell propõe que campo elétrico circula ao redor da variação no tempo de campo magnético. Esta ideia está por trás da concepção dos geradores de eletricidade, uma vez que agora é possível utilizar energia mecânica, digamos proveniente de uma queda d'água, para fazer um ímã se mover dentro de uma espira, induzindo assim uma corrente elétrica.

7.5 A DESCOBERTA DA CORRENTE DE DESLOCAMENTO

Até este momento Maxwell tinha as seguintes equações:

Tabela 1: Resumo leis de eletromagnetismo inicial

	Forma diferencial	Forma Integral	Significado
1	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Cargas elétricas geram fluxo de campo elétrico
2	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{q_m}{k} = 0$	Não existem cargas magnéticas
3	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S J d\vec{S}$	Campo magnético circula em torno de corrente elétrica
4	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S B d\vec{S}$	Campo elétrico circula em torno da variação de fluxo de campo magnético

Quando Maxwell começou a estudar o eletromagnetismo, a segunda equação na verdade ainda não existia, mas motivado pela simetria que ele percebeu que havia entre eletricidade e magnetismo, decidiu aplicar a Lei de Gauss para campos magnéticos, e deduziu que o fluxo de campo magnético deveria ser zero pela inexistência na natureza de cargas (monopolos) magnéticas. Motivado pelo paradoxo do capacitor descrito na seção 7.3 deste capítulo e principalmente pela simetria matemática, Maxwell percebeu que as

duas últimas equações não estavam completas. A terceira equação, a Lei de Ampère, afirma que fluxo de densidade de corrente elétrica gera campo magnético. Então, por simetria, faria sentido acrescentar na quarta equação o termo “fluxo de densidade de corrente magnética” gerando campo elétrico. Porém, pela segunda equação, não existe carga magnética, logo, não existe “corrente magnética”, e por consequência, o termo “fluxo de densidade de corrente magnética”, seria igual a zero, confirmando que a quarta equação na verdade está completa.

Utilizando raciocínio análogo, a quarta equação - Lei de Faraday, afirma que a variação de fluxo de campo magnético gera campo elétrico. Então, por simetria, faria sentido acrescentar na terceira equação o termo “variação do fluxo de densidade de campo elétrico” gerando campo magnético. Então completando a terceira equação ficaria, com D sendo a densidade de campo elétrico com relação a determinada área, o seguinte:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S J_s \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Este novo termo $\left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right)$ que foi adicionado à lei de Ampère foi chamado por Maxwell de *Corrente de Deslocamento*, pois realmente tem unidade de medida de corrente elétrica (Ampere, no sistema MKS). Essa nova corrente conseguia explicar o paradoxo do capacitor. Na verdade, ela não resolvia apenas o problema do paradoxo, mas consagrou-se como a contribuição que faltava para unificar definitivamente as duas teorias que nasceram disjuntas, mas que agora estavam perfeitamente explicadas através de quatro equações.

Vamos então adicionar o novo termo na forma diferencial da lei de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 J) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$0 = \nabla \cdot (\mu_0 J) + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$, então:

$$\boxed{\mu_0 \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Que fisicamente diz que em uma região no espaço onde exista uma fonte (divergente positivo) de corrente, lá também existirá uma queda de densidade volumétrica de carga. O que faz todo o sentido tendo em vista que corrente é um fluxo de cargas elétricas.

7.5.1 A TERCEIRA EQUAÇÃO DE MAXWELL

Podemos agora destacar a terceira equação de Maxwell em sua forma integral e diferencial:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S J d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Sua interpretação física completa a da lei de Ampère, afirmando que campo magnético circula ao redor de corrente elétrica e de fluxo de densidade de campo elétrico variante com o tempo.

7.6 AS QUATRO EQUAÇÕES DE MAXWELL

A tabela a seguir apresenta as quatro equações de Maxwell em suas formas diferencial e integral, além do significado físico associado a cada uma delas.

Tabela 2: Resumo leis de eletromagnetismo: as 4 equações de Maxwell

Forma diferencial	Forma Integral	Significado
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Cargas elétricas geram fluxo de campo elétrico
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{q_m}{k}$	Não existem cargas magnéticas
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S J d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	Campo magnético circula em torno de corrente elétrica e de variação de fluxo de densidade de campo elétrico
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	Campo elétrico circula em torno da variação de fluxo de campo magnético

Não bastando a satisfação de montar um quebra cabeça de mais de mil anos de história que resume todo o eletromagnetismo em quatro elegantes equações, a descoberta da corrente e a teoria por trás das equações o levou a descobrir algo ainda mais fascinante: a existência de ondas eletromagnéticas - um marco importante para o desenvolvimento tecnológico e científico da humanidade - consagrando de uma vez por todas o nome deste

grande matemático na história.

8 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como principal motivação a elaboração de uma fonte de consulta de análise vetorial para o estudante principiante de eletromagnetismo. Entendendo como uma das suas principais dificuldades o domínio necessário das ferramentas matemáticas vetoriais, este trabalho propôs não apenas uma abordagem puramente matemática, rigorosa nas demonstrações formais, mas também se preocupou em revestir os conceitos com suas respectivas interpretações geométricas e físicas, buscando assim ser um complemento mais intuitivo das literaturas dedicadas ao assunto.

Nesse sentido, essa dissertação abordou toda teoria vetorial, iniciando com as definições mais básicas de vetor e espaços vetoriais, passando por campos vetoriais e os produtos escalar e vetorial, e culminando nas integrais de grandezas vetoriais: integral de linha e integral de superfície. Apresentou ainda os operadores vetoriais diferenciais gradiente, divergente, e rotacional, introduzindo ainda os operadores nabla e laplaciano como facilitadores. O ponto alto do trabalho concentrou na apresentação dos teoremas de Green, Gauss, e Stokes, que foram essenciais para as demonstrações das equações de Maxwell.

O embasamento histórico inicial e os fatos históricos apresentados ao longo do texto, tiveram o objetivo não só de ambientar o leitor na linha do tempo do desenvolvimento dessa ciência, mas principalmente, de despertar a curiosidade e o interesse sobre como, e principalmente o porquê, certas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas.

A teoria do eletromagnetismo, resumida nas quatro equações Maxwell, consagrou este matemático como uma das mentes mais brilhantes da história de nossa humanidade. Isso por que seus estudos possibilitaram a descoberta, por ele mesmo, das ondas eletromagnéticas, que possibilitaram o desenvolvimento de avançadas tecnologias utilizadas pela nossa sociedade nas mais diversas aplicações do mundo moderno.

REFERÊNCIAS

- CALLIOLI, C. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual: [s.n.], 1987.
- DORIA, C. M. *Cálculo Avançado*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda: [s.n.], 2017.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC: [s.n.], 2001.
- HALLIDAY, D. *Fundamentos de Física*. Rio de Janeiro: LTC: [s.n.], 2012.
- LEITHOLD, L. *Cálculo Avançado*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda: [s.n.], 1994.
- QUEVEDO CARLOS PERES; QUEVEDO-LODI, C. *Ondas Eletromagnéticas*. São Paulo: Pearson: [s.n.], 2010.
- ROCHA, M. A. *Aplicações da Análise Vetorial ao Eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: UFRJ: [s.n.], 1977.
- STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning: [s.n.], 2013.