UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# ESTRADA ENVOLVENDO RODAS QUADRADAS

MANOEL HILARIO NETO

Maceió, Março de 2020

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
- PROFMAT - UFAL

MANOEL HILARIO NETO

# Estrada Envolvendo Rodas Quadradas

Maceió
2020

MANOEL HILARIO NETO

# Estrada Envolvendo Rodas Quadradas

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - UFAL do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa*
Co-orientador: *Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas*

Maceió
2020

.


**Catalogação na fonte**
**Universidade Federal de Alagoas**
**Biblioteca Central**
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

H641e Hilario Neto, Manoel.
Estrada envolvendo rodas quadradas / Manoel Hilario Neto. - 2020.
54 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Co-orientador: José Adonai PereiraSeixas.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 53-54.

1. Rodas quadradas. 2. Veículos - Fabricação. 3. GeoGebra (Programa de computador). 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Título.

CDU: 372.851

**Folha de Aprovação**

MANOEL HILÁRIO NETO

Estradas Envolvendo Rodas Quadradas

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 06 de março de 2020.

Isnaldo Isaac Barbosa

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (orientador)

Banca Examinadora:

Adonai P.S.

Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas – UFAL (coorientador)

Rinaldo V. da Silva

Profa. Dra. Rinaldo Vieira da Silva Junior – UFAL (Examinador Interno)

Kennerson Nascimento de Sousa Lima

Prof. Dr. Kennerson Nascimento de Sousa Lima – UFCG (Examinador Externo)

*A minha esposa Helen e filha Adele, aos meus professores em especial ao meu orientador Isnaldo Isaac, como também aos meus colegas de turma.*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela sua imensa graça e bondade concedida, pois sem sua misericórdia certamente não haveria chegado até aqui.

Aos meus pais, por todos os sacrifícios que fizeram por mim, sempre ajudando e incentivando para que eu possa seguir nesse caminho. A minha amada esposa Helen Leite Melo Hilario, que esteve ao meu lado, torcendo e ajudando nessa caminhada, abrindo mão dos momentos de lazer e companhia, mesmo assim esteve sempre me incentivando e apoiando. Também a minha filha Adele Leite Melo Hilario que mesmo sem entender dividiu comigo o seu precioso tempo de brincadeira e lazer pra que eu pudesse estudar.

Aos colegas de turma que ao longo do curso se manteveram firmes e unidos no mesmo propósito e grandemente contribuíram com meu conhecimento nas discussões abordas em sala e com isso fortaleceram meus conhecimentos.

Ao Professor Doutor Isnaldo Isaac pela sua amizade e apoio, por se mostrar mais que um orientador, ou seja uma pessoa excepcionalmente abnegada, pelos conselhos e pela paciência, mas acima de tudo pelo exemplo e referencial de pessoa e de profissional que tem sido.

Ao coorientador Professor doutor José Adonai pela grande contribuição na minha formação e por ter dado todo amparo e dedicação no meu trabalho sempre com grande disposição e vontade em repassar seus imensos conhecimentos.

*A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.*
—IMMANUEL KANT

# RESUMO

Nesta dissertação mostraremos que dada uma roda poligonal encontraremos uma estrada cuja formação é feita por ramos de catenária invertida. Com esse estudo das rodas formadas por polígonos regulares, vimos que não é possível fazer uma pista para triângulo equilátero, pois o ângulo formado entre as junções dos ramos de catenária é menor que 90º e assim a roda colide com a pista formada.

Faremos o processo de construção usando o GeoGebra, mostraremos como construir uma pista com ramos de catenárias invertidas, como também mostraremos o processo para construir um veículo formado com rodas em formato de polígono regular.

**Palavras-chave:**

Rodas quadradas. Pista pra rodas quadradas. Construindo pista pra rodas quadradas. Construindo veículo pra roda quadradas.

# ABSTRACT

In this dissertation we will show that given a polygonal wheel we will find a road for it, and this road is formed by branches of inverted catenary. With this study of the wheels formed by regular polygons we saw that it is not possible to make a track for an equilateral triangle, because the angle formed between the junctions of the catenary branches it is less than 90º, so the wheel collides with the formed track.

**Keywords:** Square wheels. Track for square wheels. Building track for square wheels. Building vehicles with square wheel.

# LISTA DE FIGURAS

# SUMÁRIO

# JUSTIFICATIVA QUANTO AO PROFMAT

Conforme descrito no regimento do Profmat, seu objetivo é "proporcionar uma formação aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência do Ensino Básico"tudo isso, objetivando uma maior qualificação do professor, logo, este trabalho propõe um aprofundamento no estudo da catenária, conteúdo visto pelo professor apenas na graduação, porém, aqui, apresentamos o mesmo, de forma adaptada à Educação Básica. Fazemos isso, através da apresentação prática da ideia da roda quadrada, dessa forma, reafirmamos o que já é do conhecimento do professor, e apontamos uma forma de que ele adapte e utilize na Educação Básica, como por exemplo fazendo um comparativo do gráfico de uma função quadrática com o gráfico das catenárias.

Indubitavelmente que a maioria dos professores não tem conhecimento de que é possível construir um veículo com rodas quadradas cujo movimento se dê suavemente, sem solavancos, também não tem conhecimento de que a estrada perfeita pra rodas quadradas é formada por ramos de catenárias invertidas. Possivelmente também não domine a utilização do GeoGebra para visualização e compreensão do projetos, ferramenta que proporciona que o ensino e a aprendizagem se tornem mais atraentes e instigadores.

Nosso objetivo é oferecer mais um caminho ao professor para que ele possa inserir na em seu leque de recusos para ensino a seus alunos, logo, apresentamos tanto a possibilidade de que o professor (de posse desse conhecimento a mais) apresente em sala de aula a hipótese de locomoção de um veículo com rodas quadradas, quanto a base matemática para isso, além de apresentarmos o recurso do Geogebra como ferramenta de projeto, cuja função, é agir como ponte entre a ideia matemática, e a concretização física e palpável do objeto de estudo.

Todo o conteúdo desse trabalho também pode ser oferecido para exposições e eventos matemáticos e dessa forma, o professor terá esse trabalho como ferramenta, para divulgar tanto para alunos que demonstram interesse e curiosidade pela matemática, como introduzindo os princípios aqui abordados para os alunos que possam estar desmotivados e desinteressados pela matéria, pois, muitos alunos se desinteressam pela matemática por ser apresentada de maneira unicamente subjetiva, sem conexão com temas de interesse do aluno, sem conexão com o cotidiano e sem concretização do objeto do estudo.

# INTRODUÇÃO

O professor do século XXI deve ensinar apenas aquilo que está nos livros? A Matemática acompanha o homem ao longo da história desde os tempos mais remotos, quando a humanidade já usava princípios Matemáticos mais intuitivos, porém com o passar dos anos a Matemática vem avançando em suas contribuições na humanidade, trazendo grandes benefícios à sociedade, contribuindo para transformação do mundo, e tudo isso se desenvolveu graças a uma busca constante por melhores condições de vida, de trabalho, busca por eficiência e agilidade nas comunicações, interesses econômicos e comerciais e aos interesses de domínio de diferentes povos, impulsionado os estudos bélicos.

Assim, hoje realmente vemos as facilidades que a Matemática trouxe na vida do homem e é graças a esses feitos adquiridos na Matemática, que várias outras ciências se desenvolveram, ou seja, a Matemática possibilita tal desenvolvimento. E pelo fato da Matemática ser tão ampla, e permear diversas áreas do conhecimento, graças a ela, é possível hoje explorar de forma profunda os mais variados temas.

Através das teorias Matemáticas é possível abstrair, generalizar situações do cotidiano, implementar lógica em programas computacionais, se aprofundando nos assuntos dos seus diferentes campos (como Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade), que se aplicam no desenvolvimento do estudo de áreas da Física e da Engenharia, entre outros.

Sendo assim, o professor moderno não deve ficar limitado aos temas da grade curricular, como vem descrito nos livros, módulos ou apostilas adotados pela escola, pois é preciso que o professor se posicione de maneira ativa na escolha dos conteúdos, execute um planejamento com base também nos interesses do aluno, e proponha conhecimentos instigantes que sejam capazes de fazer com que o aluno veja a matemática presente em diversas áreas da vida e do cotidiano. Pensado dessa forma é possível que o professor aborde um leque maior de opções a serem exploradas em sala de aula, visando mudar a percepção do aluno quanto à estigmatização construída a ao longo da história nacional.

É fundamental que o professor torne a matéria uma ferramenta aceitável e agradável ao aluno, e com isso não resta dúvidas de que pra se atingir esse objetivo o professor desse século tem que inovar, tendo em vista que são tão amplos os campos da Matemática, e como o aluno tem acesso a muitas tecnologias atrativas, o professor deve procurar vencer esses desafios para conseguir melhores resultados em sala de aula.

Então um dos caminhos para contribuir com o ensino da Matemática será levá-la para a prática trazendo para dentro de sala cada vez mais essas aplicações do cotidiano, pois sabemos que elas desenvolvem o campo do raciocínio lógico, fundamental para aprendizagem da Matemática em todos os seus campos.

Nesse trabalho abordaremos uma temática voltada ao professor, a fim de que ele possa implementar os conhecimentos aqui tratados, em sua prática educacional. O objetivo desta pesquisa é que os docentes possam ampliar seus conhecimentos de forma a trabalhar em sala também os conteúdos que ele estudou em sua graduação, pois é muito importante que o professor saiba lidar com assuntos além daqueles que são estudados na grade curricular da formação do ensino básico.

É importante que este profissional esteja atento às atualidades, para contribuir com conhecimentos instigadores e usar esses assuntos como um provocador motivacional Matemático.

Cabe salientar que esses assuntos precisam ser tratados com uma abordagem adequada ao nível de competência e conhecimento do aluno, ou seja, simplificando a parte Matemática avançada. Deve-se também buscar instigar no aluno o raciocínio lógico do problema proposto. O professor pode ter uma postura de facilitador na abordagem do tema, fazendo com que os alunos possam entender de forma intuitiva e ser capazes de reproduzir, podendo até mesmo criar modelos que funcionem na realidade, sendo assim, poderão por exemplo, apresentar ao público em eventos de ciência na sua própria escola.

**Figura 1** Veículo de rodas quadradas


Fonte: http://2.bp.blogspot.com. Autor desconhecido

Ao imaginarmos o professor a entrar em sala pedalando um bicicleta de rodas quadradas, certamente seria surpreendente aos alunos, que aceitariam essa novidade com alegria com certeza uma boa impressão causaria e a matéria ganharia um forte estímulo motivacional, esse impacto, seria uma energia para o ano letivo, trazendo melhores resultados no rendimento dos discentes. Uma atitude como essa torna o professor mais receptivo perante o aluno, deixando o caminho do conhecimento aberto para novas descobertas.

# 1. É POSSÍVEL CONSTRUIR UM VEÍCULO COM RODAS QUADRADAS?

Iniciaremos um breve relato sobre o surgimento da roda e sua importância no desenvolvimento da humanidade. A roda, de acordo com alguns pesquisadores [17], originou-se há cerca de 6000 anos. Este artefato contribuiu para o progresso na área dos transportes, das comunicações e do desenvolvimento de várias atividades humanas.

A ideia da roda teve início, possivelmente, através da prática de assírios e egípcios, de colocar-se troncos sob grandes pedras para facilitar seu transporte. Inicialmente a roda era feita de madeira inteira, com o passar do tempo foram sendo feitas aberturas que tornariam-se os raios. Na Mesopotâmia e na Pérsia essas rodas com raios eram protegidas com pregos na parte exterior para que não se desgastassem.

Os gregos e os romanos usavam as rodas estriadas para montagem dos guindastes. Também usavam a roda de água para transporte de água na agricultura. A roda também foi amplamente utilizada na fiação e tecelagem. O invento da roda possibilitou o transporte de cargas, desde o transporte das pedras usadas nas construções egípcias até o carrinho de mão inventado pelos chineses, como também os carros puxados por bois.

Tendo em vista que a ideia da roda é muito antiga e comumente utilizada no cotidiano, se perguntássemos as pessoas se iriam querer que construíssem seus carros com rodas quadradas, é improvável que aceitassem, certamente saberiam que seu carro teria muita dificuldade em se deslocar, e esse deslocamento não seria confortável. Porém, abordar esse tema em sala aos alunos é inovador, podendo ser divertido e instigante em ver o resultado prático, fazer os alunos pensarem em algo não trivial faz com que se abram novas possibilidades de conhecimentos, ao provocar essa curiosidade podemos ter melhores resultados nos assuntos curriculares.

## 1.1. Alguns trabalhos já realizados

Trabalhos com rodas quadradas já foram feitos e apresentados pelo mundo, alguns exemplares de pista ideal para andar com veículo de rodas quadradas, também já foram apresentados, um dos mais relevantes foi apresentado nos Estados Unidos em Nova York, no *National Museum of Mathematics*, o outro com as mesmas características foi apresentado aqui no Brasil no estado do Rio de Janeiro, feito pela *Firjan* e apresentado em vários lugares, como no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (*IMPA*).

Esses trabalhos apresentados em público, com apresentações em maquetes de pistas teste, onde o público poderia sentir a funcionalidade, trazem grande curiosidades para o visitante. Interessante para eles é perceber que ao andar em um veículo de rodas quadradas, a sensação é a mesma de um veículo com rodas circulares em um estrada plana.

**Figura 1.1** Pista circular para triciclo de rodas quadradas

Fonte: Internet. [12]

Essa imagem é do *Momath* ou Museu Nacional da Matemática, que foi inaugurado em dezembro de 2012. É um espaço aberto ao público para que possam interagir com a Matemática de maneira lúdica, vendo que é possível aprender Matemática brincando e de maneira divertida, utilizando a prática para transmitir conteúdos matemáticos. Esse tipo de abordagem certamente traz curiosidade ao visitante, ele quer saber o real motivo que faz esses mecanismos funcionarem, a quais fatos esses estudos estão relacionados, e certamente ele descobrirá fatos novos que levarão como ampliação do seu conhecimento de mundo.

Um outro trabalho semelhante a esse também pode ser encontrado aqui no Brasil, foi realizado pela arena da *Firjan (SESI)* Matemática e foi apresento no Rio de Janeiro, no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em 2017. Essas instituições tem contribuído imensamente com a evolução dos conhecimentos matemáticos e suas aplicações, promovendo mudanças nas práticas pedagógicas escolares, além disso, estão sempre promovendo eventos educacionais.

A Arena da *Firjan* (SESI) Matemática é outra instituição comprometida com o ensino, com afinco em divertir, colaborar, transformar, embelezar e desafiar. É essa a forma utilizada para melhorar a aprendizagem, transformando a curiosidade em conhecimento e desmistificando a Matemática, dessa forma, contribuem para que estudantes e familiares percebam a importância da Matemática na vida das pessoas.

**Figura 1.2** Triciclo de rodas quadradas

Triciclo de rodas quadradas foi uma das atrações da Arena SESI Matemática

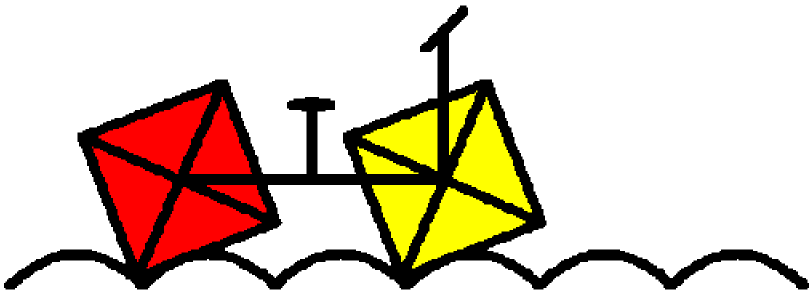
Fonte: [10]

Veja que nessa foto podemos observar a grande aceitação dos alunos em participarem da experiência de andar um veículo com roda não convencional. Vemos que essa novidade conquista muito mais a vontade de descobrir coisas novas, e isso é um bom momento pra trazer uma reflexão sobre importância da Matemática na ciência. Ainda que essa construção logo de imediato seja vista simplesmente pela parte da engenhosidade do veículo com rodas quadradas na pista, porém, o mais belo é saber que isso só é possível graças os questionamentos envolvidos no problema matemático, pois possibilita descobrir a real curva que torna o movimento harmonioso. Caso contrário, não haveria nada interessante em ter um veículo de rodas quadradas sem que ele funcionasse de forma ideal.

Nesse modelo, o mais importante, é a bela curva da catenária, e pensando assim temos que esses fatos trazem uma boa oportunidade para abordar os temas Matemáticos existentes nessa exposição. Ao falarmos desses assuntos assim é muito mais agradável ao ouvinte pois ele tem o real contato, de forma surpreendente com a exposição prática, isso é essencial pra desmistificar a Matemática, que tanto afasta estudantes.

Assuntos abordados assim trazem resultados animadores pois o comprometimento com a situação é bem maior e essas circunstâncias tem que ser aproveitadas para que se possa despertar o interesse e a curiosidade no aluno, instigando-o a "colocar a mão na massa"e ver que ele também é capaz de recriar, através dos conhecimentos a que foram expostos.

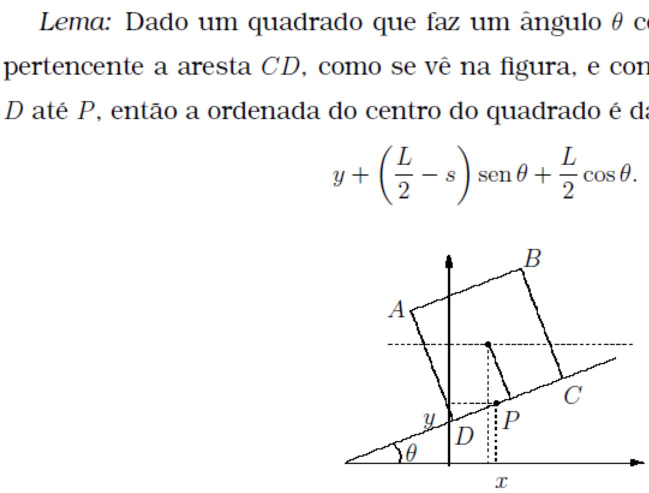
**Figura 1.3** Representação bicicleta de rodas quadradas



Fonte:[15]

O trabalho de Trabalho de Conclusão de Curso - CURVAS FAMOSAS E SUAS APLICAÇÕES (Curso Matemática- Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL), da (Prof. Maria Dayane Dalysse dos Santos) sob a orientação do (Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas), também abordou o tema, mostrando a curva ideal para a roda quadrada. Foi abordado o problema trazendo uma solução mais analítica, onde o objetivo inicial é encontrar o ponto que determina o centro da roda.

**Figura 1.4** Corte do trabalho



*Lema:* Dado um quadrado que faz um ângulo $\theta$ com o eixo-$x$ e um ponto $P$ pertencente a aresta $CD$, como se vê na figura, e conhecendo-se a distância de $D$ até $P$, então a ordenada do centro do quadrado é dada por

$$y + \left(\frac{L}{2} - s\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{L}{2}\cos\theta.$$



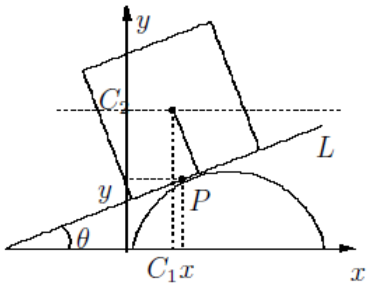
[h]

Fonte:[15]

.

Esse lema, pode ser mostrado usando os três triângulos envolvidos na figura, pois esses triângulos conservam ângulos congruentes. E nesse caminho, obteremos o resultado. Então com esse lema podemos fazer a relação do caminho percorrido da roda sobre a curva, chamado de *S* e o lado do quadrado *L*.

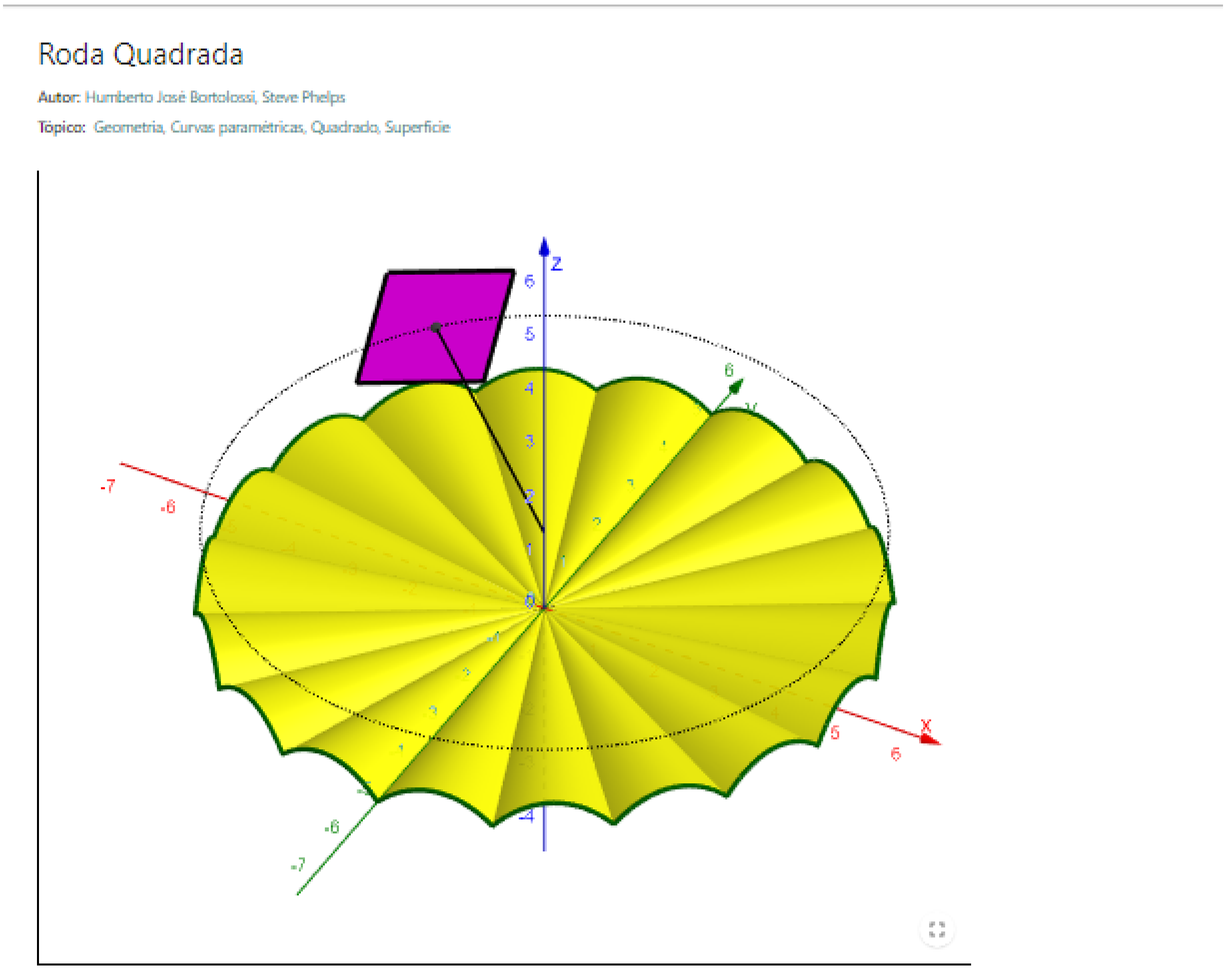
**Figura 1.5** Corte do trabalho




Fonte:[15].

Nesse caso o fato mais importante é que o lado do quadrado mora sempre na $y'$ ou seja, $\tan(\theta) = y'$. O fato do lado do quadrado ser sempre tangente à curva, é que possibilita trabalhar com a derivada da função, é nesse sentido que seu trabalho se desenvolve.

**Figura 1.6** Projeto da pista circular no formato de catenária invertida




Fonte:[14]

O professor (José Humberto Bortalossi), Professor Associado I Doutor em Matemática (PUC-Rio, 1999) cujas linhas de pesquisa são: Otimização, Informática no Ensino da Matemática, tem uma grade contribuição nesse assunto, pois disponibilizou um arquivo salvo no GeoGebra, que pode ser acessado por qualquer professor, e de posse do programa pode fazer a busca no campo de pesquisa na aba de abrir novos documentos no GeoGebra. Com esse arquivo o professor não precisa mais de descobrir a roda, visto que isso já foi feito pelo professor José Humberto, ao docente basta explorar o arquivo, usando a opção editar, pois assim ele tanto pode usar pra exibir aos seus alunos como também pode entender todo processo de construção, que naturalmente acrescentará muito mais ganhos a sua vida profissional, e terá um maior domínio no uso do GeoGebra, podendo dessa forma, melhorar as aulas expositivas com exemplificações visuais.

## 1.2. Resultados preliminares

Usaremos conhecimentos adquiridos pelo professor de Matemática na graduação, entendemos que esses conhecimentos são comuns às grades curriculares na formação de professores, por isso não redefiniremos em nosso trabalho tais conteúdos, pois os assuntos de Cálculo 1 e 2, Álgebra e Análise Real básica na reta, são requisitos comuns na área da Matemática, no entanto deixaremos as referências para que o leitor os revise conforme for necessário a seu entendimento.

Nesse trabalho mostraremos primeiramente as condições necessárias para que uma roda gire sem solavancos, ou seja, suavemente, sem trepidações. Sabe-se que no caso da roda circular em uma estrada plana todo movimento é realizado sem solavancos, em contrapartida, mostraremos que dada uma roda quadrada, encontraremos uma função Matemática que descreve o caminho ideal para a mesma, que no caso é uma catenária. Logo em seguida concluiremos que a estrada é composta por ramos da catenária, e identificaremos o intervalo dessa função cosseno hiperbólico. Faremos repetidas colagens da parte do intervalo, de forma periódica pra compor o caminho mínimo a ser percorrido pela roda, logo em seguida daremos uma sugestão pra que o professor junto com seus alunos possa colocar em prática, construindo uma pista para colocar um veículo de duas rodas pra funcionar.

# 2. O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUE REPRESENTA UMA ESTRADA PERFEITA PARA UMA RODA DADA.

Caso você se depare em uma circunstância que você tem que andar em uma bicicleta de rodas quadradas, qual seria sua atitude? Logicamente que você não pode trocar as rodas, então pra facilitar esforço no pedal, a única coisa que lhe resta pensar é na pista que se amolde para que a roda gire melhor, sem que a roda escorregue.

Pra uma motivação na solução aproximada do problema é interessante pensar em uma curva na qual o contato da roda se mantenha com um único ponto de contato com a pista, sem que hajam pulos de pontos pra a rotação da roda, ou seja, um dos critérios é que que a roda não tenha mais de um ponto de contato com a pista pra mesmo instante. Um outro fato importante é que pra que o movimento seja suave o centro da roda deve se manter em uma reta para cada ponto de contato com a pista.

A equação da forma da catenária é dada pela função hiperbólica e a sua equivalente exponencial. A catenária é obtida por uma família de curvas descrita de forma semelhante a uma corda presa às suas extremidades, seu contorno é adquirido sob o efeito da gravidade ao longo da corda [16]. A equação da catenária é dada pelas funções hiperbólicas.

Essa curva teve seus estudos realizados por Galileu Galilei, sendo que ele propôs que essa curva formada por fios suspensos seria uma parábola, entretanto, Huygens ainda muito jovem, mostrou em 1646 que a conjectura era falsa e em 1690, Jakob Bernoulli retomou o problema. Finalmente a solução do problema foi publicada em 1691 por Leibniz, Huygens e o próprio Bernoulli.

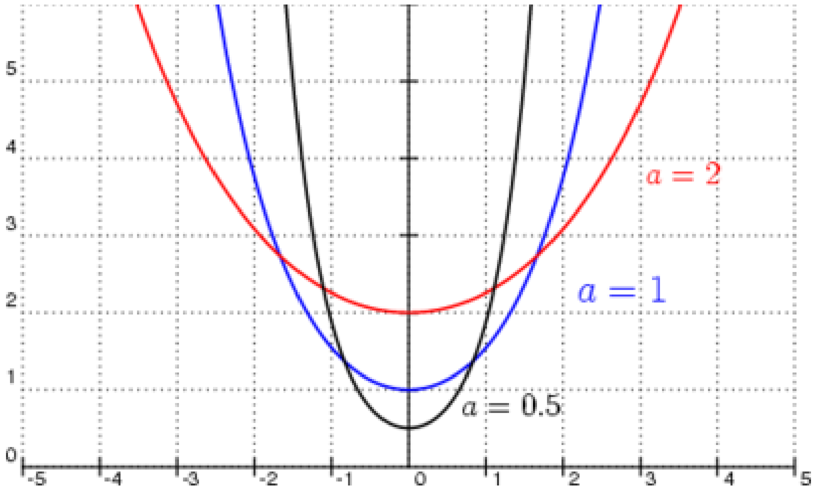
Tendo em vista que a curva Catenária trata-se da curvatura moldada a objeto flexível preso pelas extremidades, sob o efeito da força da gravidade, é possível encontrar seu uso e propriedades, sendo utilizados em áreas da engenharia e arquitetura.

Suas semelhanças com a parábola, fizeram com que Galileu Galilei tivesse errado na solução do problema, isso nos mostra que não foi tão fácil a descoberta da Catenária,[16]. Pelo fato do aluno da educação básica ter contato com a função do segundo grau e vendo que essa função tem semelhança com a função hiperbólica então existe a necessidade desses alunos terem contato com essas funções haja vista que é provável que o aluno consiga ter a noção de distinguir através de um mero gráfico sem informações concretas, se é ou não uma catenária, ou uma função do segundo grau.

Assim a Catenária tem sua representação gráfica dada seguinte forma:

Para
$$a\cosh\frac{x}{a}.$$
temos o gráfico abaixo,

**Figura 2.1** Abertura da cavidade da catenária

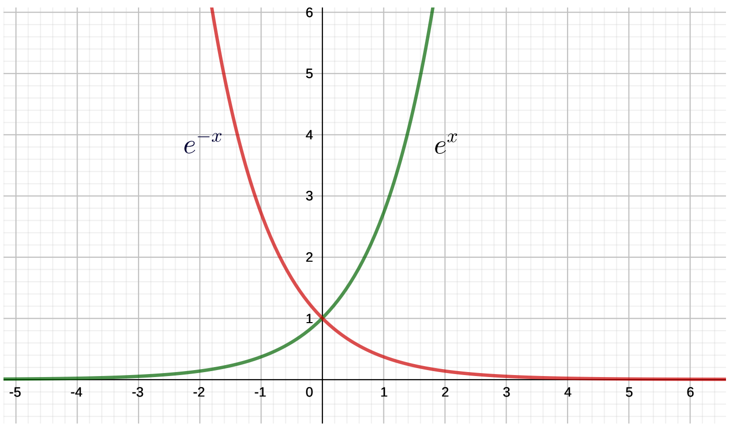



Fonte: [16].

$$a \cosh \frac{x}{a}.$$

Observe que à mediada que o valor de $a$ aumenta, a cavidade da Catenária vai se abrindo de modo contrário. Quando $a$ diminui, vemos que ela vai se fechando. Como podemos ver na representação gráfica, há uma grade semelhança visual com o gráfico de uma função de segundo grau, assim vemos que não é tão absurdo conjecturar que a curva é uma parábola, pois essa foi a suposição errada dada por Galileu Galilei. Apesar da semelhança visual que podemos observar, entretanto, são na realidade completamente diferentes: uma é de forma quadrada e a outra uma combinação exponencial.

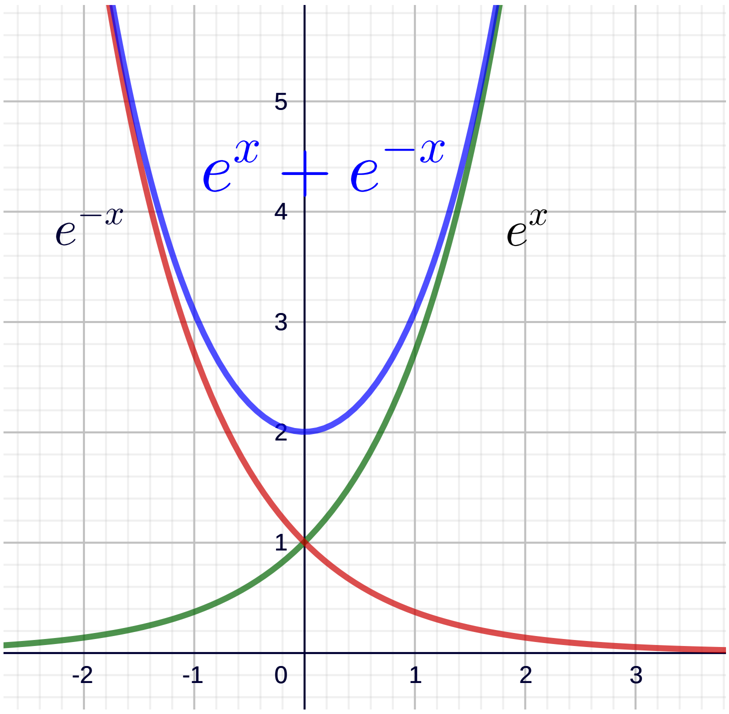
**Figura 2.2** Gráfico das funções $e^x$ e $e^{-x}$




Fonte: Do autor.

As funções hiperbólicas são aquelas que encontramos com combinações das funções $e^x$ e $e^{-x}$. Os alunos do Ensino Médio já têm contato em sua grade curricular com as funções exponenciais. Então temos a forma da função $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Assim, o professor pode mostrar que a mais simples das combinações tem sua função hiperbólica de modo que seu gráfico é dado na forma que vem espremido dentro dos gráficos da função $e^{-e}$ e da função $e^x$ . Tornando-as suas assíntotas, como podemos ver no gráfico abaixo:

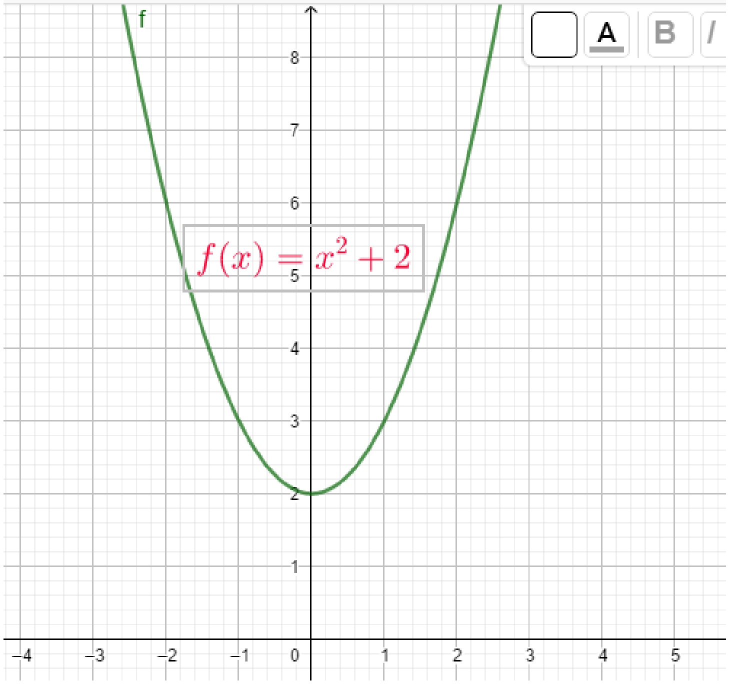
**Figura 2.3** A catenária com assíntotas das exponenciais




Fonte: Do autor

Vendo essa breve explicação dessas curvas hiperbólicas, podemos fazer uma correlação gráfica com as funções do segundo grau em termos de sua representação gráfica pois podemos ver aparência aproximada entre elas, pois vejamos;

**Figura 2.4** Gráfico da função do 2° grau.




Fonte: Do autor

visto a grande semelhança das figuras 2.3 e 2.4, talvez tenha sido por esse motivo que Galileu Galilei conjecturou erroneamente as curvas hiperbólicas.

Como não é nosso objetivo desenvolver o conhecimento na matemática avançada, sugerimos os caros leitores que, caso sintam necessidade, consultem tais conteúdos através dos títulos sugeridos nas referências bibliográficas, conteúdos esses, que são elementos abordados na graduação, e tomados como pressuposto básico para desenvolvimento do presente trabalho. Para melhor compreensão das funções hiperbólicas, sugerimos, vide [7], assim como pra entender o desenvolvimento dos cálculos que serão apresentados aqui, utilizados com o objetivo de encontrar a curva perfeita, ou seja, aquela que descreve o caminho exato e desejado pra o veículo de rodas quadradas se locomover. Alem disso, também abordaremos outros temas vistos na graduação, tais como derivada, integral, equações diferenciais, equação paramétrica, comprimento de arco entre outros, todos esses assuntos da disciplina de Cálculo, também para mais detalhes podem ser acessados, vide,[7]. Para maior aprofundamentos das curvas planas e EDO, sugerimos vide, [1] e [3] como também [2].

Neste capítulo vamos mostrar que dada uma roda quadrada, existe uma estrada, e ela é formada por uma colagem do gráfico para um intervalo de uma função $F$ de classe $C^1$ por partes. Queremos que ela se comporte da mesma forma que uma roda formada por uma circunferência - sem que o centro da roda se mova e sem ocorrer solavancos.

## 2.1. A relação entre a estrada e a roda

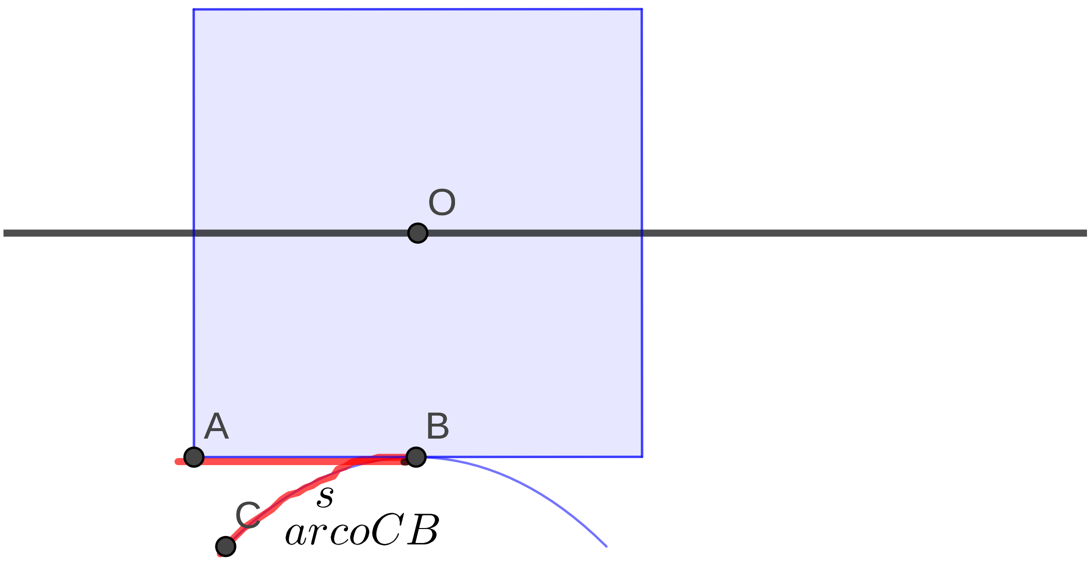
É natural querermos que a roda se comporte do mesmo modo que uma roda circular se movimenta em uma estrada plana, faremos aqui de forma análoga aos artigos científicos português e americano, [8] e [9], então

$I_0$- A roda mantém-se em um único ponto de contato para cada instante $t$ do tempo que ela gira sobre a estrada.

$I_1$- O comprimento de arco no bordo da roda que ela percorre ao logo do tempo sobre a estrada é igual ao caminho descrito sobre a estrada.

$I_2$- O centro da roda se desloca horizontalmente em uma reta $y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

**Figura 2.5** A aresta é igual ao caminho andado no gráfico

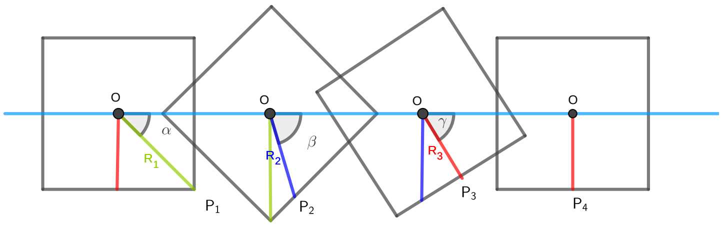



Fonte: Do autor

Ao caminhar a roda do ponto A ao ponto B sobre a curva sem que ela escorregue, a distância $\overline{AB}$ é igual ao comprimento de arco $CB$ que é $S$. Queremos uma função $F$ que seja derivável, tal que a estrada seja o gráfico de $F$, queremos especialmente que essa função $F$, $F: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, seja $F(t) < 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Contudo é importante salientar que $F$ por si só não constrói toda a curva. Da função $F$ podemos deduzir o real formato da pista, pois tomaremos uma família da função $F$, do seguinte modo: $F(x+nb)$, $n \in \mathbb{N}$ e $b$ é o comprimento do intervalo da função para o gráfico de $F$ no primeiro lado.

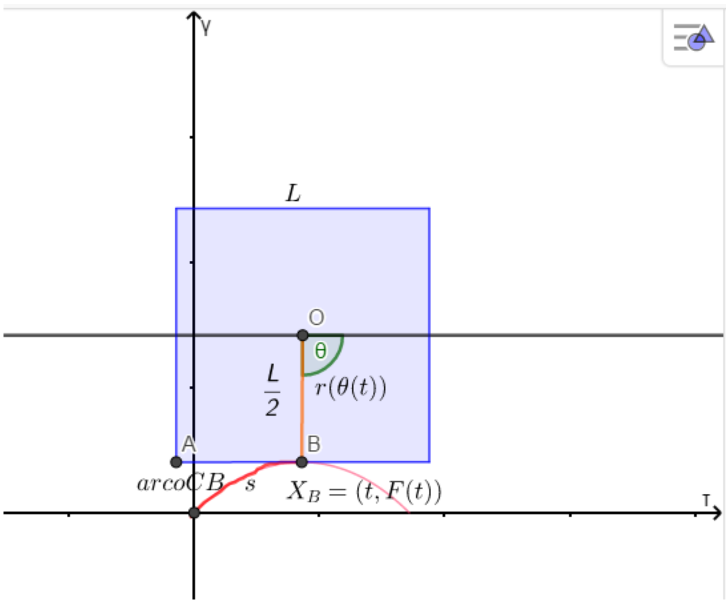
**Figura 2.6** Roda girando com centro fixo em uma reta horizontal




Fote: Do autor

Note que à medida que a roda gira, temos ângulos $\alpha_i$ formados pelos vetores $\overrightarrow{OP_i}$ no sentido do eixo positivo da reta horizontal que o centro da roda translada, e pra cada $P_i$ temos um novo ângulo $\alpha_i$ formado pelo $\overrightarrow{OP_i}$. Chamaremos de raio a norma do vetor $\overrightarrow{OP_i}$. Vemos que seu tamanho muda em função do ângulo $\alpha$ . Chamaremos de $r(\theta)$ a função raio onde $r(\theta) > 0$.

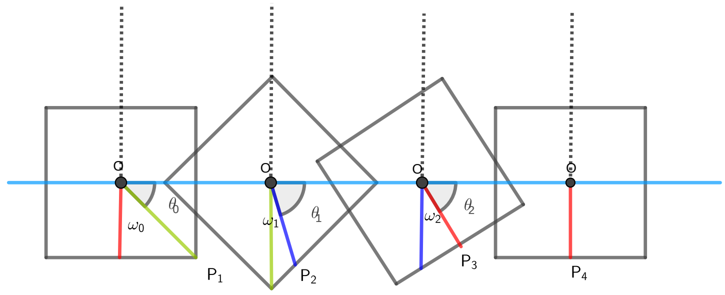
**Figura 2.7** Relação entre profundidade da roda e a estrada




Fonte: Do autor

Desse modo o rolamento da roda é descrito por uma função de $t \longrightarrow \theta(t)$ que mede a variação angular entre $F(0)$ e $F(t)$. Veja que a roda faz dois tipos de movimento, um de translação sobre o eixo dos $t$'s e outro de rotação. A rotação é o giro sobre si mesma em relação ao centro. Olhando pela figura 2.1 vemos que o ângulo que faz a rotação é o complementar de $\theta$, chamaremos o ângulo de rotação da roda de $\omega$. Logicamente podemos expor o ponto $X_p$ em coordenadas polares de tal forma, $X_p = (t, F(t)) = (\theta(t), -r(\theta(t)))$, onde temos a seguinte conclusão:

**Figura 2.8** Comportamento do raio da roda envolvendo o ângulo de rotação e a translação da roda no eixo X




Fonte: Do Autor

$$F(t) = -r(\theta(t)), \tag{2.1}$$

pois $r$ é sempre positivo. Derivando a equação (2.1) temos:

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{2.2}$$

Tomemos o seguinte:

1. No instante $(t = 0)$ O vetor $\overrightarrow{OP_0}$ faz um ângulo de $-\dfrac{\pi}{2}$ com o eixo positivo do $t$. Assim $\theta(0) = -\dfrac{\pi}{2}$
2. E $\theta(t) = -\omega(t) - \dfrac{\pi}{2}$
3. Para cada $t$, o comprimento do arco na curva $S$ entre $\theta(0)$ e $\theta(t)$ é igual à distância percorrida na estrada entre $F(0)$ e $F(t)$.

E esse item 3 podemos expor matematicamente da seguinte forma:

$$S = \int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\theta(t)} \sqrt{[r(\theta(t))]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta. \tag{2.3}$$

Por um lado calculamos o comprimento do arco $S$ pela função $F$ de 0 a $t$, e por outro lado, o mesmo comprimento $S$ sendo calculado pelas coordenadas polares de $-\frac{\pi}{2}$ a $\theta(t)$. Fazendo a derivada em função de $t$ em ambos os lados temos:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2} = \sqrt{[r(\theta(t))]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{d\theta}{dt}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros temos:

$$1+\left(\frac{dF}{dt}\right)^2=[r(\,\theta(t))]2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Pela equação 2.2, elevando ao quadrado e depois substituindo nessa equação abaixo, temos:

$$1+\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = [r(\theta(t))]^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{2.4}$$

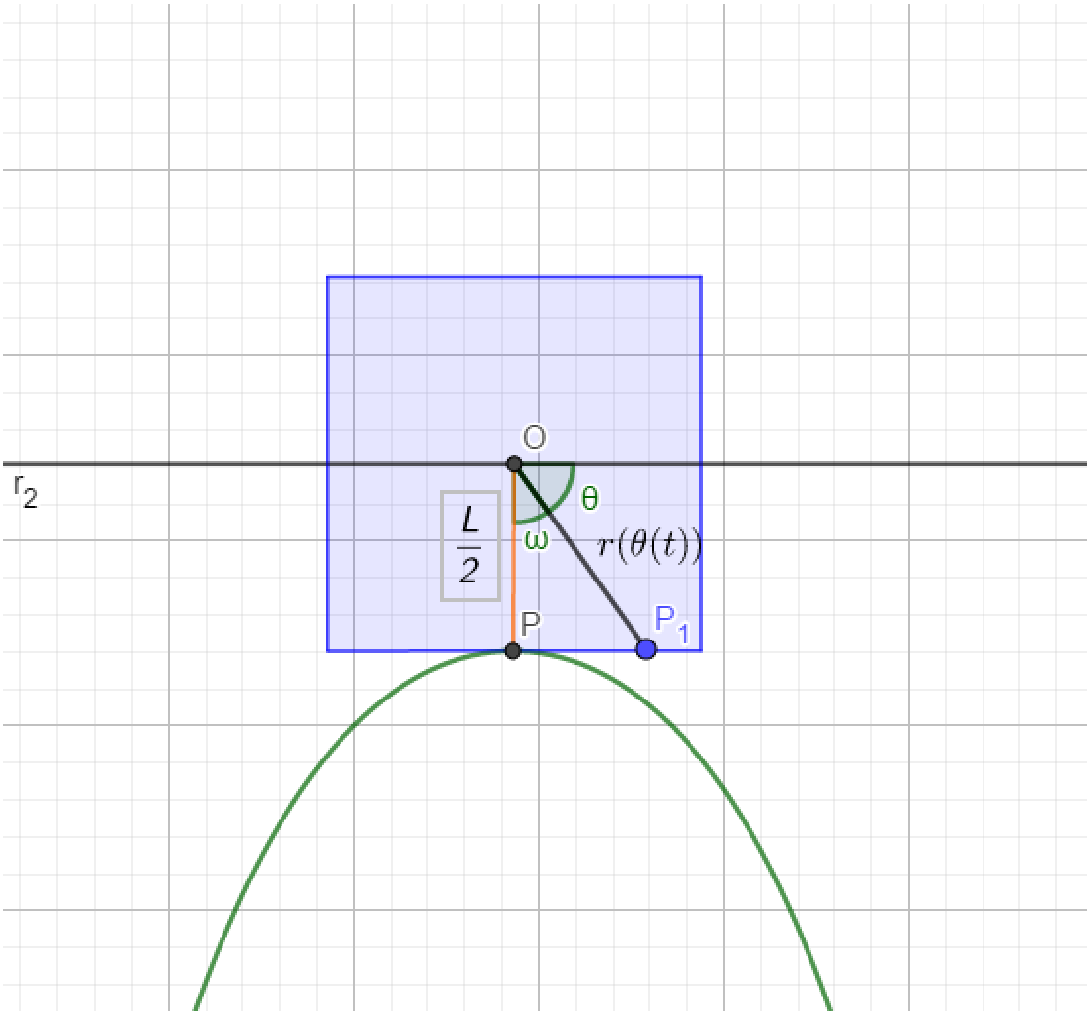
$$1+\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = [r(\theta(t))]^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 \tag{2.5}$$

Portanto temos uma relação:

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\frac{1}{r(\theta)} \tag{2.6}$$

Desse modo se olharmos como funciona a função raio do quadrado quando ele rotaciona, temos:

**Figura 2.9** Relação do raio da roda com o ângulo




Fonte: Do autor

Note que $P_1$ pode estar em uma das extremidades do quadrado, tornando $\omega \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, e olhando a relação do raio $r$ e o lado do quadrado, temos:

$$\cos(\omega) = \frac{\frac{L}{2}}{r(\theta(t))}$$

como $\omega(t) = -\frac{\pi}{2} - \theta(t)$ que de fato $r > 0$ assim $\theta(t) \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ sendo

$$\cos(\omega(t)) = \cos\left(\theta(t) - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(\theta(t))$$

logo substituindo na equação,

$$\cos(\omega) = \frac{\frac{L}{2}}{r(\theta(t))}$$

temos

$$r(\theta(t)) = -\frac{L}{2\operatorname{sen}(\theta(t))}$$

e pela equação 2.6 temos $\theta'(t) = \frac{1}{r(\theta(t))}$, então

$$\theta'(t) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,(\theta(t))}{L}. \tag{2.7}$$

Resolvendo essa equação diferenciável,(EDO), vide [3], temos

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,(\theta(t))}{L}$$

$$\Longrightarrow dt = -\frac{L}{2\,\mathrm{sen}(\theta)}d\theta$$

e integrando agora em função de $t$, teremos:

$$t = \frac{L}{2}\int_0^t -\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta$$

$$= -\frac{L}{2}\ln\left(\mathrm{cotg}(\theta) + \csc(\theta)\right) + C$$

$$= -\frac{L}{2}\ln\left(\frac{1+\cos(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\right) + C \tag{2.8}$$

Note também que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$$

como $\theta \in \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ então $\tan(\theta) < 0$ assim tomamos

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$$

com a devida racionalização temos:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\left(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\right)\left(\frac{\sqrt{1+\cos(\theta)}}{\sqrt{1+\cos(\theta)}}\right)$$

assim,

$$-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

substituindo na equação 2.1 temos,

$$t = -\frac{L}{2}\ln\left(-\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right) + C$$

$$\Longrightarrow -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{-\frac{2}{L}t+c}$$

portanto

$$\theta(t) = -2\arctan(e^{-\frac{2}{L}t+C}) \tag{2.9}$$

Pela condição 1 da figura 2.1, onde $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$, então

$$\theta(0) = -\frac{\pi}{2} = -2\arctan(e^{-0+C})$$

$\Longrightarrow C = 0$. onde para $t \in \left[\theta^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \theta^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$, onde pela fórmula, 2.2, que é,

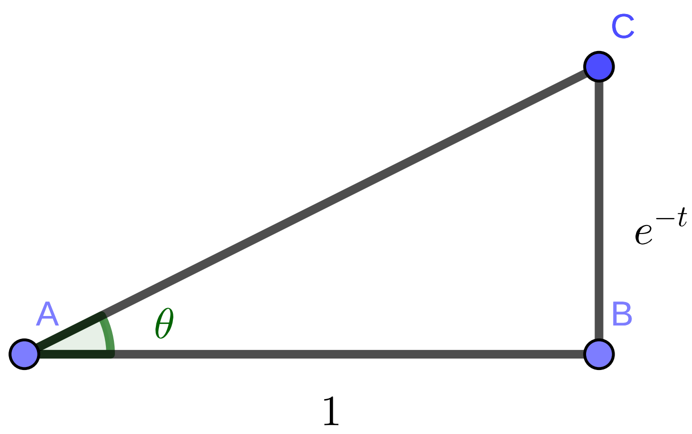
$$F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{L}{2\,\text{sen}(2\arctan(e^{-\frac{2}{L}t}))}$$

e para melhor compreensão usaremos $L$ igual a 2. Pela equação do arco duplo do seno, temos:

$$F(t) = -\frac{1}{2\,\text{sen}(\arctan(e^{-t}))\cos(\arctan(e^{-t}))}$$

Tomando um triângulo retângulo $ABC$ com ângulo reto no ponto B, com os seguintes catetos e o ângulo $\theta$ dado, fica fácil de ver as relações inversas, note pela figura:

**Figura 2.10** Triângulo retângulo em B




Fonte: Do próprio autor

Calculado o valor da hipotenusa do triângulo, saberemos os valores do $\text{sen}(\theta)$ como também o $cos(\theta)$. E com essas substituições, teremos:

$$F(t) = -\frac{1}{2\,\text{sen}(\arctan(e^{-t})\cos(\arctan(e^{-t}))}$$
$$F(t) = -\frac{1}{\frac{2e^{-t}}{\sqrt{1+e^{-2t}}}\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2t}}}}$$
$$F(t) = -\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$$
$$F(t) = -\cosh(t)$$

Caso não fosse admitido um valor igual a 2 para $L$ teríamos encontrados a equação da seguinte forma:

$$F(x) = \frac{L}{2}\cosh\frac{-2}{L}x$$

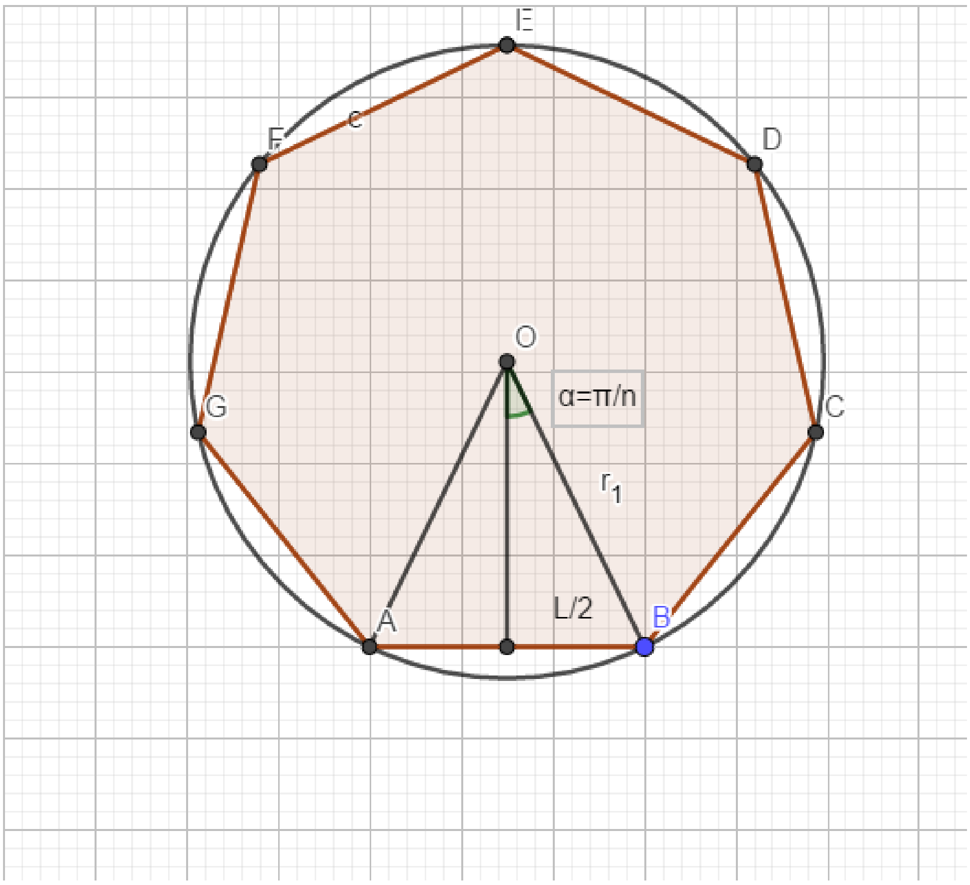
Portanto encontramos que, pra uma roda quadrada de lado $L$, a pista ideal para que a roda gire suavemente, é formada por cortes do gráfico da catenária invertida, da função cosseno hiperbólico.

Se esse argumento for estendido para rodas poligonais regulares, sendo tomado polígonos regulares com qualquer números $n \in \mathbb{N}$ de lados. Assumindo um valor de lado $L$, como o ângulo central do polígono é $(\pi/n)$, então da catenária invertida de equação

$$F(t) = -\frac{L}{2\tan(\pi/n)}\cosh(-\frac{2\tan(\pi/n)}{L}x),$$

temos a regra geral para formar as pitas desejadas, veja que o fato do $\tan(\pi/n)$ aparecer é em virtude ao ângulo central do polígono regular, pois estamos adotando para qualquer quantidade $n \in \mathbb{N}$ de lados, note na figura abaixo, considere esse heptágono uma polígono qualquer regular.

**Figura 2.11** Ângulo central de um polígono regular qualquer




Fonte:Do autor

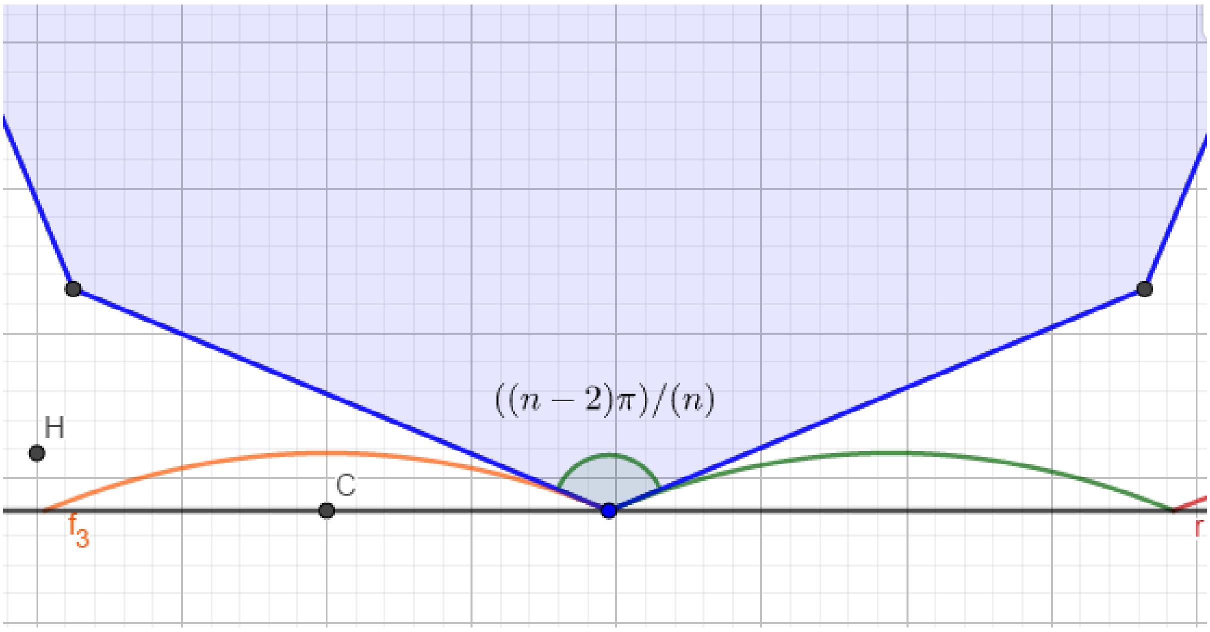
Que dessa figura podemos tirar os valores do raio e da apótema. No triângulo $AOB$ podemos determinar sua altura, que é o valor da apótema do polígono, através da tangente tal como,

$$H = \frac{L}{2\tan(\frac{\pi}{n})}$$

Asim o raio da função polar fica,

$$r(\theta) = -\frac{L}{2\tan(\frac{\pi}{n})(\text{sen}(\theta))}$$

**Figura 2.12** Ângulo de encaixe da roda na junção dos ramos da pista

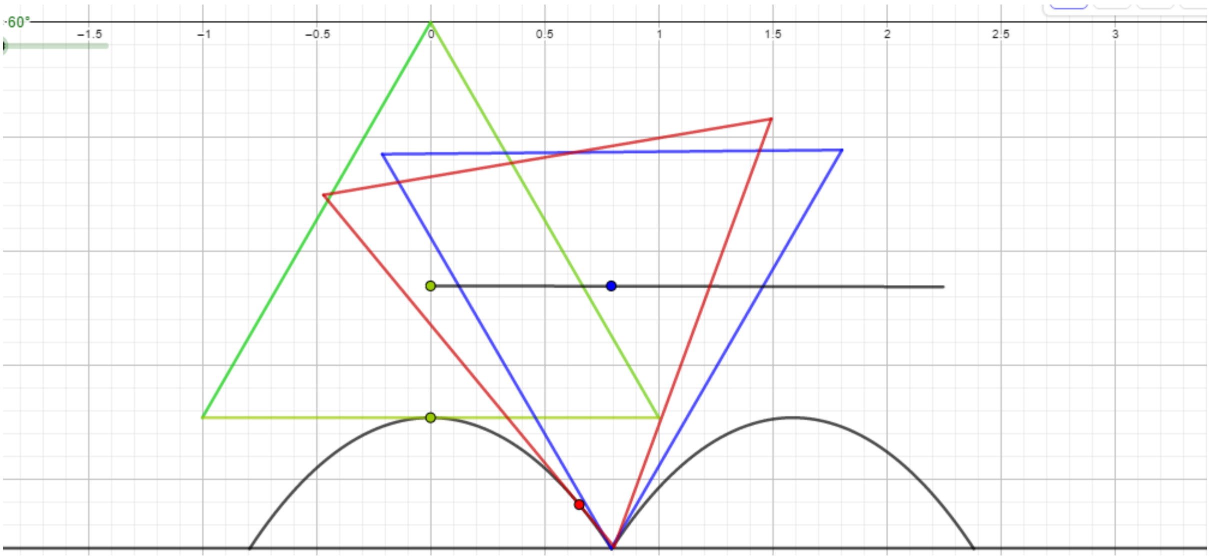



Fonte: Do autor

O ângulo $\frac{(n-2)\pi}{n}$ é justamente a abertura do bico formado pela união das curvas, que de fato também é o ângulo interno do polígono. Nesses bicos formados entre as curvas temos a junção perfeita da roda com a pista, estando completamente encaixados ao ângulo interno do polígono regular.

Em especial pra o caso, quando n = 3, não temos uma pista favorável com a Catenária visto que este ângulo é menor que $\pi/2$ e isso impede que a roda triangular encaixe no encontro do outro ramo da curva na estrada, uma vez que o vértice do triângulo colide no outro ramo, antes mesmo do vértice entrar no bico da curva, e isso faz com que tenham mais de um ponto de contato da roda com a estrada pra um mesmo tempo dado. Veja:

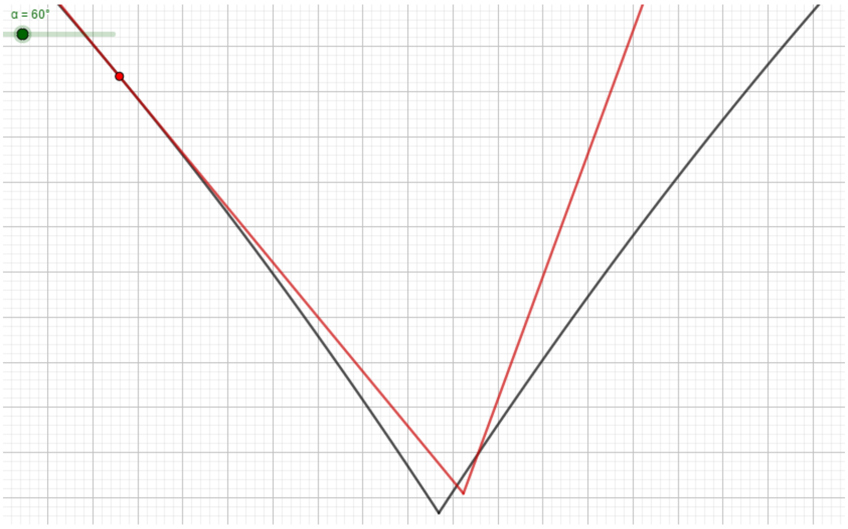
**Figura 2.13** Roda no formato de triângulo equilátero. Impossibilidade




Fonte:Do autor

a grosso modo não é possível visualizar o triângulo vermelho tocando com o seu bico no outro ramo da pista, mas com recurso de ampliar a figura vemos claramente que o triângulo não pode se encaixar na junção.

**Figura 2.14** Colisão do lado do triângulo com seu vértice no outro ramo de pista

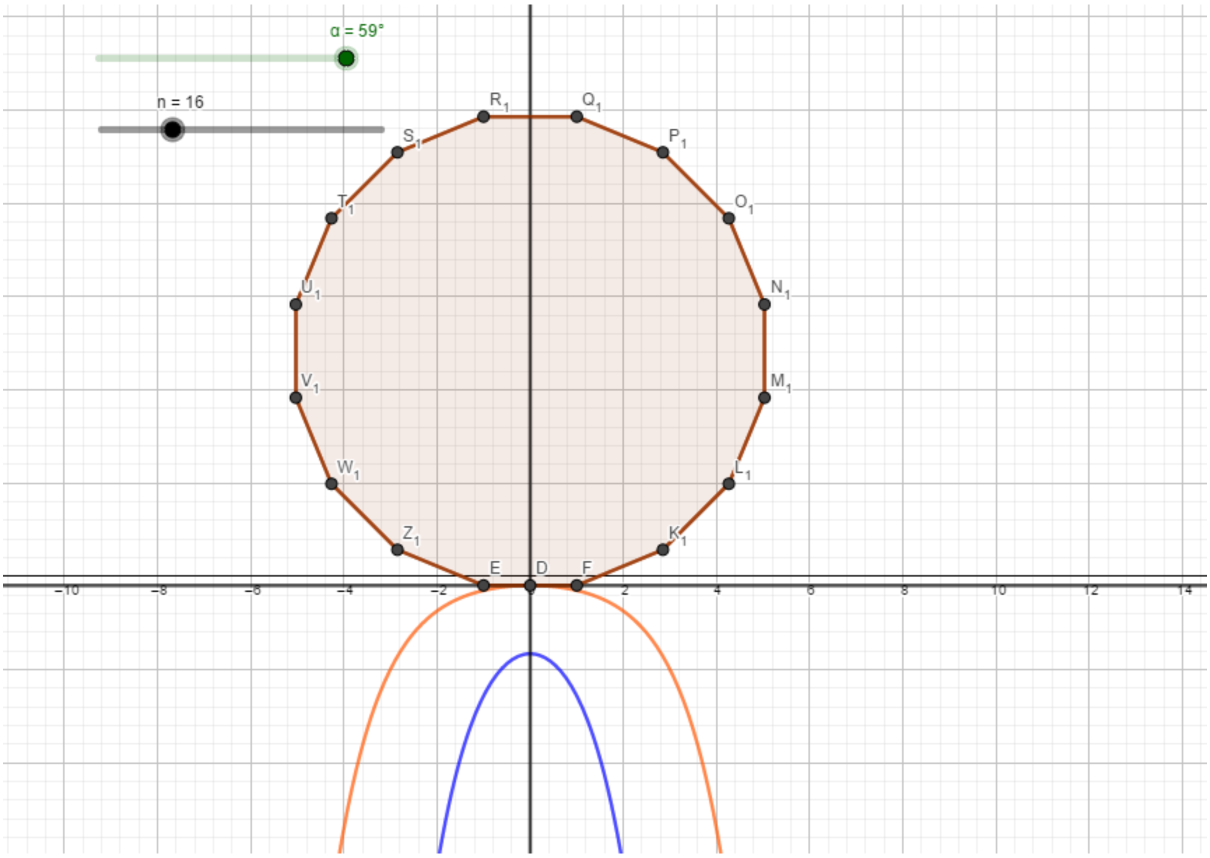



Fonte:Do autor

Assim podemos perceber claramente que no caso do triângulo, seu bico tem um duplo contato com a curva, impedindo que ele complete todo o contorno da curva nesse intervalo.

Já em outros polígonos com maior número de lados o ângulo de encaixe é maior que $\frac{\pi}{2}$, não possibilitando o contato com o outro ramo da pista devido a abertura ser bem maior. Uma das observações que podemos concluir é que à medida que aumentamos o número de lados do polígono, a curvatura vai ficando cada vez mais suave, e isso também permite concluir que assim como o polígono se aproxima cada vez mais de uma circunferência temos também que ocorre o mesmo na Catenária, ou seja, ela se aproxima de um seguimento retilíneo, no intervalo próximo do ponto mínimo, veja o exemplo pra $n = 16$:

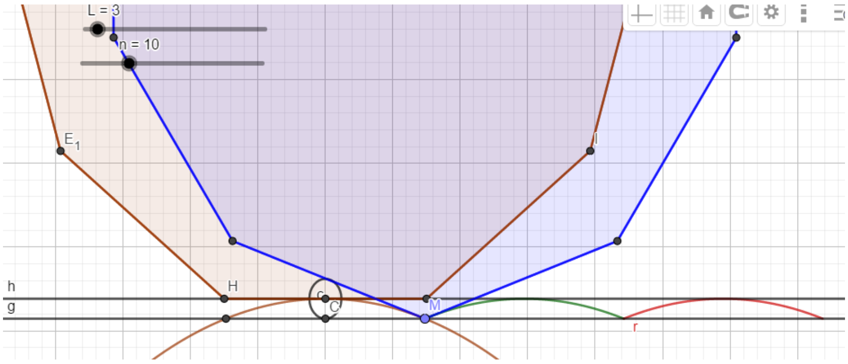
**Figura 2.15** Um polígono regular para um número grande de lados




Fonte: Do autor

Iremos mostrar matematicamente que de fato no intervalo a catenária tende a uma reta.

**Figura 2.16** Achatamento da função




Fonte: Do autor

Note que na figura acima temos duas retas, uma reta $h$ que passa no centro de um círculo e outra reta $g$ que tangencia o mesmo círculo, note que esse círculo $C$ é obtido pela diferença do raio maior e raio menor da roda. Como aqui estamos usado um polígono regular qualquer, então essa diferença é dada por:

$$\frac{L(1-cos((180)/(n)))}{2sen((180)/(n))}$$

Note que essa relação podemos ver como uma sequência,([6],p. 100). então faremos o $n$ tender ao infinito caso esse limite seja zero, então de fato nesse intervalo a função cosseno hiperbólico tende a uma reta. Veja bem:

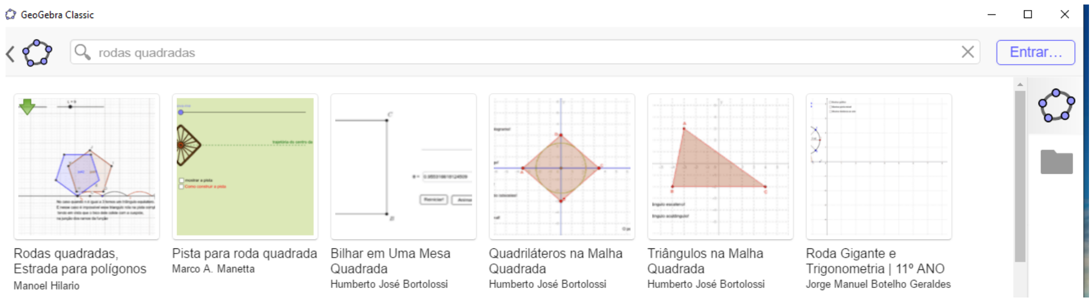
$$\lim_{n\to\infty}\frac{L(1-cos((180)/(n)))}{2sen((180)/(n))}$$

Como esse limite é indeterminado usaremos L'Hôpital e com isso vemos que de fato esse limite vai a zero como supúnhamos.

## 2.2. Produto Educacional

Caso o professor tenha interesse pode ter acesso à programação deixada no GeoGebra como produto educacional, lá ele pode acessar esse arquivo e ver o passo a passo da construção pra todo polígono regular de tamanho qualquer, que pode ser visualizado tanto fazendo a pesquisa no GeoGebra (Rodas quadradas, Estrada para polígonos), como também pode acessar pelo endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/classic/takrz874>. Com a pesquisa no comando de pequisa do próprio GeoGebra, com a seguintes palavras, **rodas quadrada ou estradas para polígonos**, aparecerão outros trabalhos semelhantes como mostra a figura abaixo, vejamos:

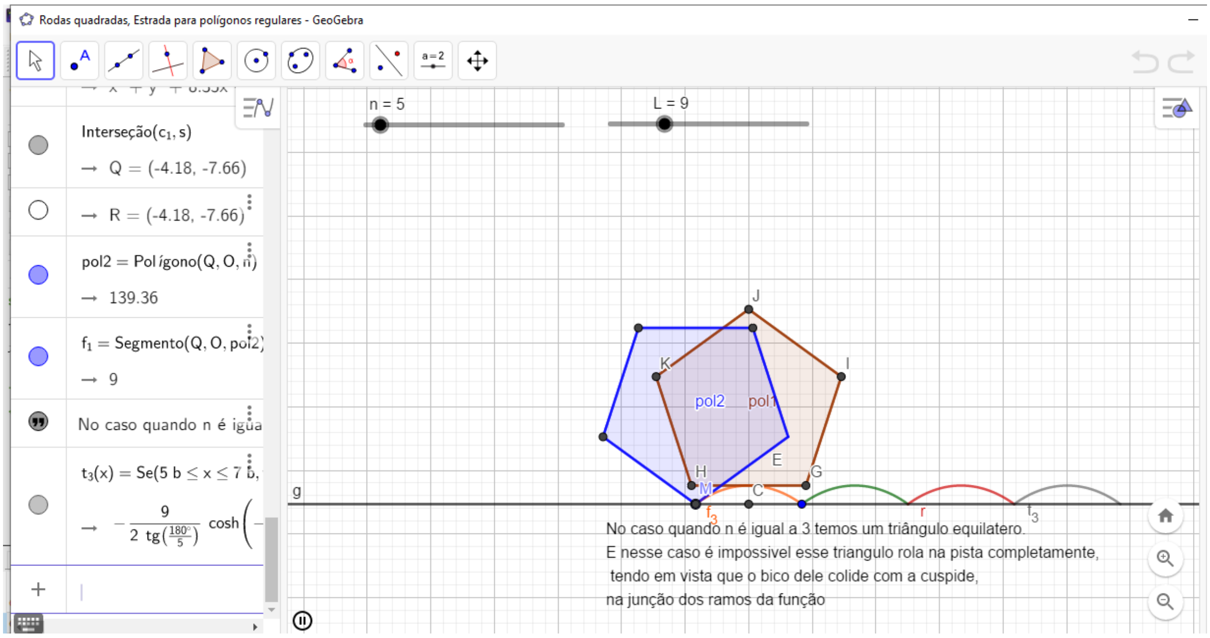
**Figura 2.17** Pesquisa




Fonte: Do autor.

Veja que ao fazer a consulta também é possível encontrar outros trabalhos como o do professor Humberto José Bortolossi, [14]. Com essa pesquisa o leitor pode ter acesso ao código fonte da programação e ver os passos de construção, entendendo todo processo construtivo, por outro lado pode usá-lo pra fazer a exposição aos alunos com objetivo de melhorar a compreensão do entendimento do movimento da roda para uma pista não plana.

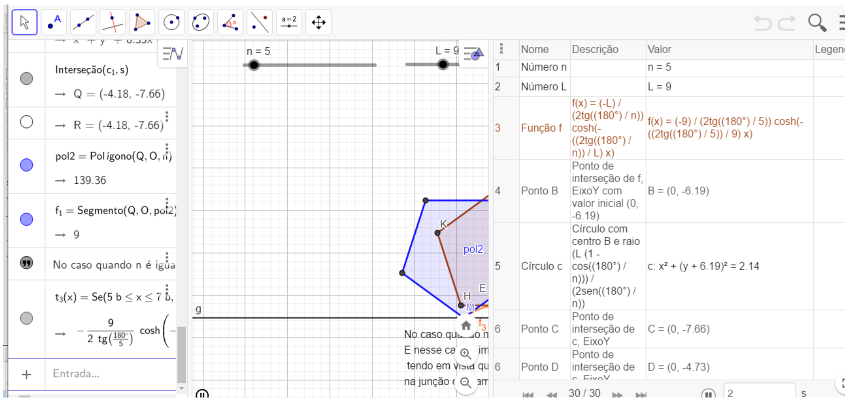
**Figura 2.18** Modelo para uma roda poligonal regular.




Fonte: Do autor.

O programa dá a possibilidade do professor entender perfeitamente a construção pois ele oferece os caminhos indicativos desde o primeiro comando fazendo tudo individualmente, vejamos:

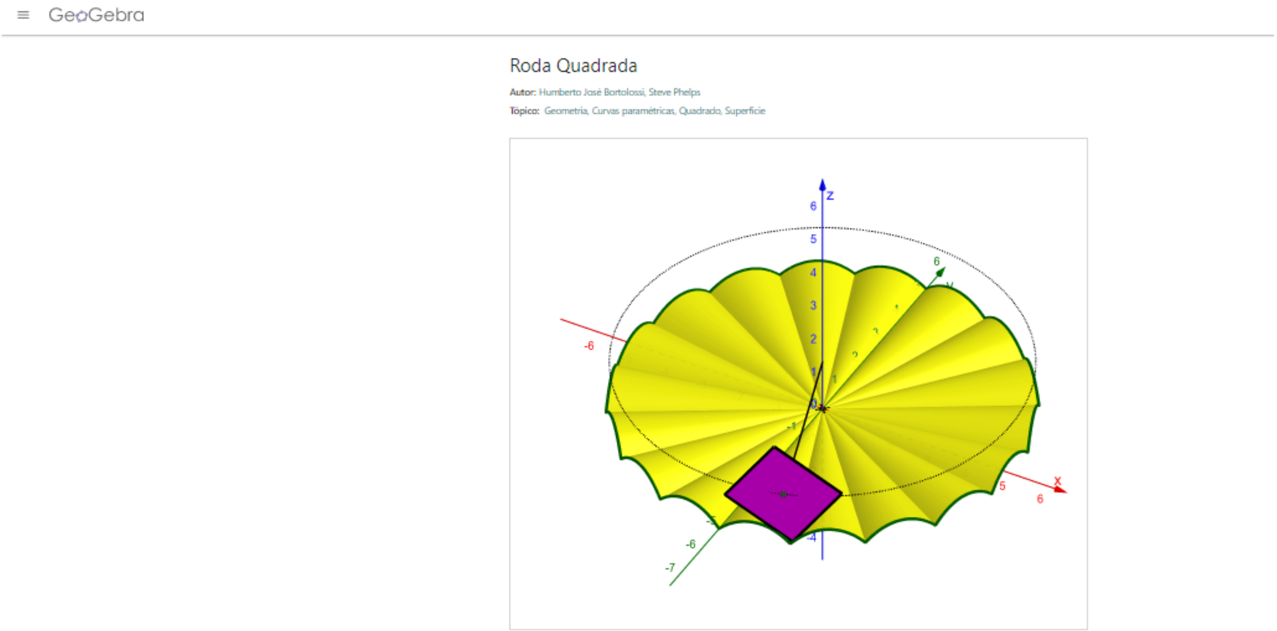
**Figura 2.19** Comandos de construção




Fonte: Do autor.

Nesse processo usamos trinta (30) passos para elaboração da pista e a sua animação. Fazendo o mesmo tipo de pesquisa no GeoGebra encontraremos o Trabalho do professor (Humberto José Bortolossi) que faz todo procedimento pra uma roda quadrada, em um ambiente circular.

**Figura 2.20** Pista circular




Fonte: [14].

Esse projeto ja foi mencionado na seção de trabalhos já realizados, onde mostramos os trabalhos desenvolvidos na áreas de pistas não ortodoxias no Brasil e no mundo.

# 3. ENTENDENDO A CONSTRUÇÃO E O PASSO A PASSO DESENVOLVIDO

Na parte de construção da figura, que é o caminho a ser percorrido pela roda quadrada, pode ser trabalhado com os alunos muitos tópicos da geometria plana, que o professor adequará a cada nível de aprendizagem. Pode-se aprofundar e expandir todo o assunto relacionado às retas, e aqui serão amplamente utilizadas as situações entre as retas paralelas e perpendiculares, também pode ser aproveitador mostrar as situações de intercessões entre retas e curvas, atentando para as possibilidades do conjunto intercessão de não ser apenas um conjunto unitário, além disso, também pode ser abordado o tema de simetria.

Dentre outros assuntos usados na Geometria Plana que estão listados na base curricular, o professor enfatizará o conceito da construção de círculo e mostrar a propriedade fundamental do círculo, que é manter a distância constante entre o ponto do centro e o ponto da borda, ou seja, o comprimento do raio, para facilitar a compreensão quando for usado tal recurso.

Podendo também lapidar nos conceitos de funções, gráfico de funções, ponto no plano cartesiano. Como pode-se observar, temos muitas possibilidades de assuntos voltados ao conhecimento básico.

Em suas aulas o professor pode desenvolver a construção de gráfico fazendo uso do GeoGebra que é sem duvida um facilitador visual na aprendizagem.

## 3.1. Como Atacar o Problema da Construção Da Pista (Caminho)

Para resolver o problema da construção iniciaremos supondo a situação resolvida, pois isso nos dará informações visuais do nosso conhecimento matemático e que podemos abstrair da figura, já que temos uma hipótese inicial e chegamos ao resultado da função ser $\cosh(x)$.

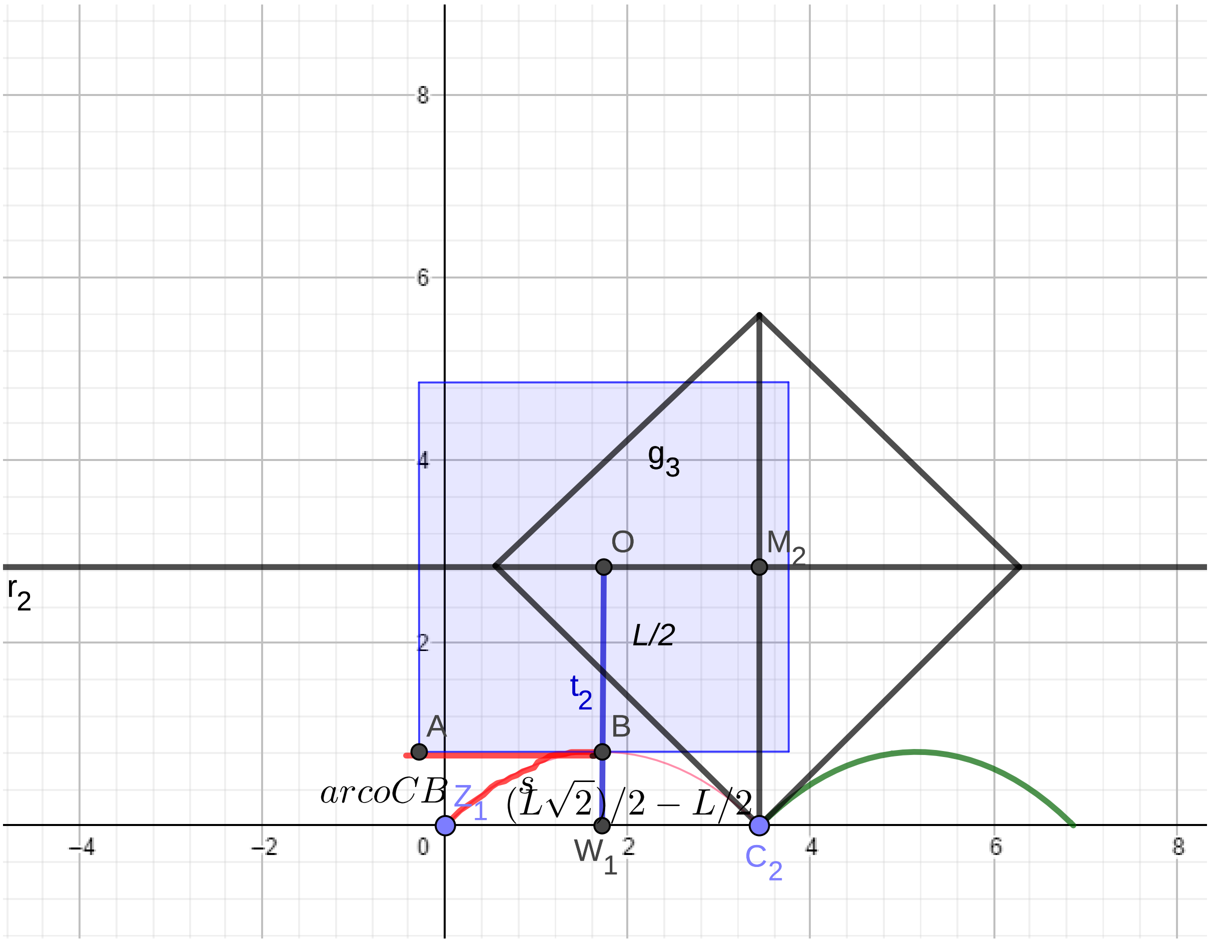
Inicialmente, por hipótese fizemos o cálculo para um lado do quadrado, sendo assim, aceitaremos que só é possível a primeira função rolar apenas um ramo do caminho, e nessas condições encontramos a função

$$F(x) = \frac{L}{2}\cosh\frac{-L}{2}x$$

que tende a menos infinito quando $x$ tende a infinito, logo nosso objetivo é saber exatamente o intervalo tal que o comprimento do arco da função seja igual ao tamanho do lado desse quadrado, esse lado está sendo denotado $L$, também temos a informação que a função cosseno hiperbólico tem simetria em relação ao ponto mínimo, e no nosso caso a função $F$ terá ponto máximo pois aqui ela é invertida. Sabemos também que a função $\cosh(x)$ é par, essas hipóteses são valiosas pra serem usadas supondo o problema ja resolvido.

Por construção iniciaremos com a roda fazendo contato no ponto médio de seu lado, justamente no ponto máximo da função $F$. Partindo da visualização do problema, definiremos nossa estratégia de atacar a situação já montada, veja bem:

**Figura 3.1** Relação da profundidade da pista com a roda.




Fonte: Do autor

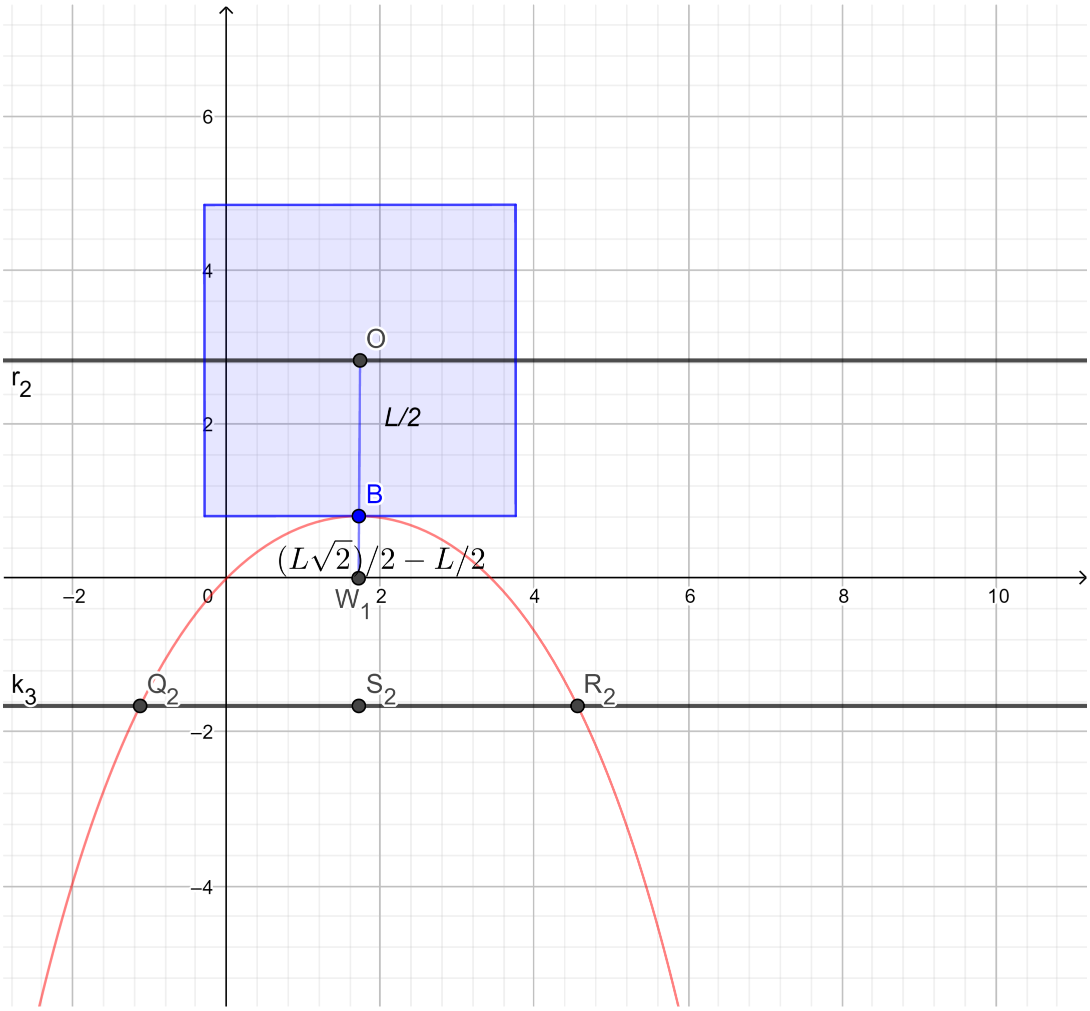
Então, pela construção queremos que a roda gire do ponto $B$ ao ponto $C_2$. Como o centro da roda está na reta horizontal $r_2$, no ponto $O$, e seu ponto de contato com a curva é no ponto $B$, tendo a roda completado meia volta, o seu centro se encontra no ponto $M_2$, lembrando que o centro da roda não sai da reta $r_2$, e nesse ponto do centro a roda tem um novo ponto de contato com a curva, sendo no ponto $C_2$. Vendo isso, note que na primeira situação, a distância $OB$ é $L/2$ e no outro caso temos $M_2C_2$ igual $\frac{L}{2}\sqrt{2}$.

Com essa informações podemos encontrar a distância entre o valor máximo e o valor mínimo da função, no intervalo que é do nosso interesse, observando que a função caminho sempre atingirá valor minimo em uma das extremidades da roda e como também atingirá valor máximo sempre no ponto médio dos seus lados. Faremos uso da diferença desses valores que pode ser visto como:

$$BW_1 = \frac{L}{2}\sqrt{2} - \frac{L}{2}$$

.

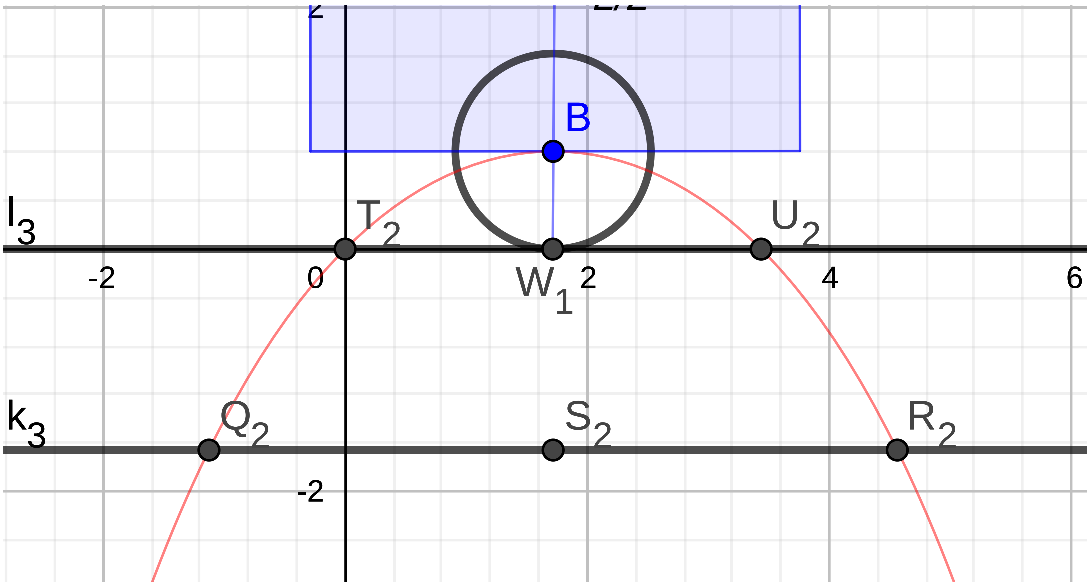
**Figura 3.2** Valor máximo e mínimo da função.




Fonte: Do autor

Em seguida trace uma reta horizontal intersectando a curva, e que certamente encontrará dois pontos, nesse caso pegue o ponto médio desses dois pontos, tendo em vista as hipóteses de simetria da função, sabemos que seu ponto de máximo fica na mesma reta paralela ao eixo$y$ e passando pelo ponto médio encontrado que o ponto na figura é $S_2$. Ou de outra forma passe uma reta perpendicular à reta horizontal $k_3$, no ponto médio $S_2$ encontrado, com essa reta teremos uma nova interseção com $f(x)$, essa interseção de fato é o ponto máximo, representado por $B$. Nosso objetivo agora é achar o ponto $W_1$.

**Figura 3.3** Intervalo da função




Fonte: Do autor

Para encontrar o ponto $W_1$ faremos um círculo de centro $B$ e raio $\frac{L}{2}\sqrt{2}-\frac{L}{2}$, com esse círculo temos uma outra situação a ser analisada que é a interseção dele com a reta paralela ou eixo $y$ passado pom $B$. Esse ponto de interseção chamaremos de $W_1$, por esse ponto $W_1$ passaremos uma reta perpendicular à reta paralela sendo ela na figura a reta $I_3$. Novamente dessa construção temos um novo caso de interseções entre a função e a reta $I_3$, dela encontramos o ponto $T_2$ e $U_2$. Esses pontos são fundamentais pra achar o intervalo, porque esse intervalo é o período do deslocamento da função para cada lado rolado.

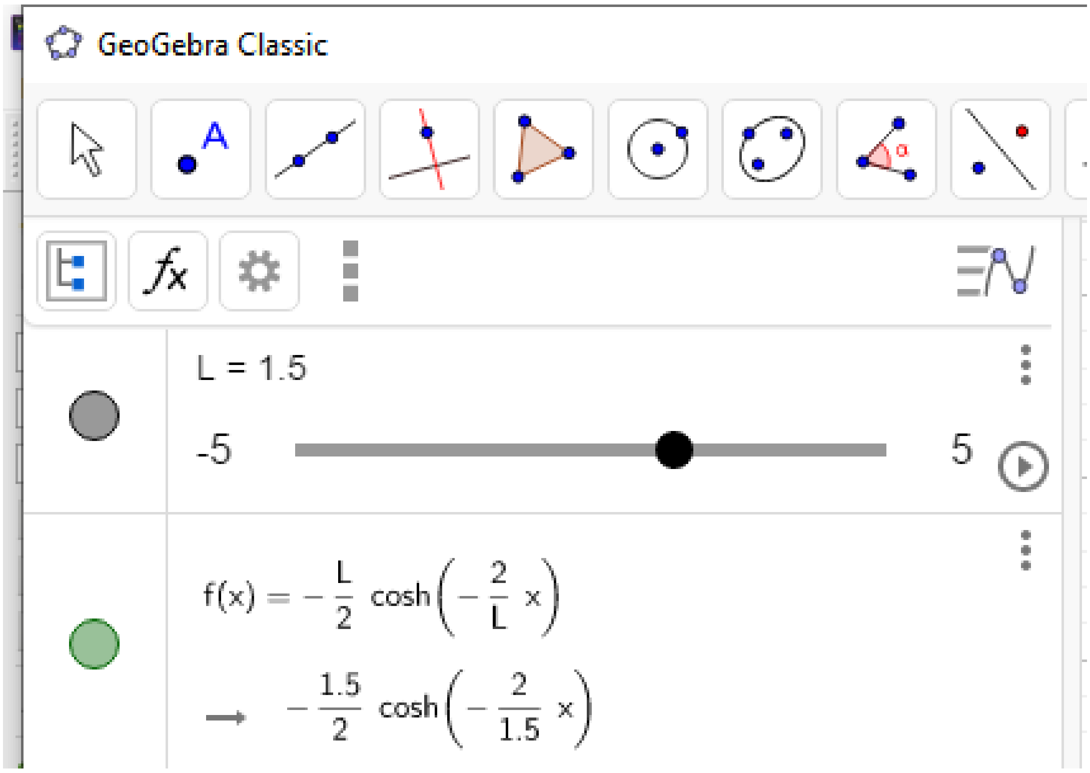
Basta replicar esse intervalo na mesma proporção a cado novo ramo da função, com isso teremos o caminho desejado. Continuando calcularemos essa distância de $d(\overline{T_2U_2})$. Chame essa distância de uma constante, para facilitar no uso do GeoGebra.

## 3.2. Construindo com GeoGebra

A partir do entendimento do comportamento da função para a construção do projeto, podemos através do GeoGebra facilitar todo esse processo, tendo em vista as facilidades de comandos existentes nele. Dessa forma faremos de maneira mais simples toda a elaboração do projeto. Utilizaremos todos aqueles conhecimentos escolhidos pelo professor, tanto aqueles tomados como ponto de partida, quanto os objetivos de aprendizagem, conforme os critérios adotados a fim de expandir os conhecimentos de seus alunos. Seguem as figuras passo a passo.

1 Atribua um controle deslizante e denomine como $L$, limite esse comando a uma valor positivo desejado. Construa o gráfico da função $F$ no campo dos reais. E esses comandos realizados aparecem na ordem nas figuras a seguir:

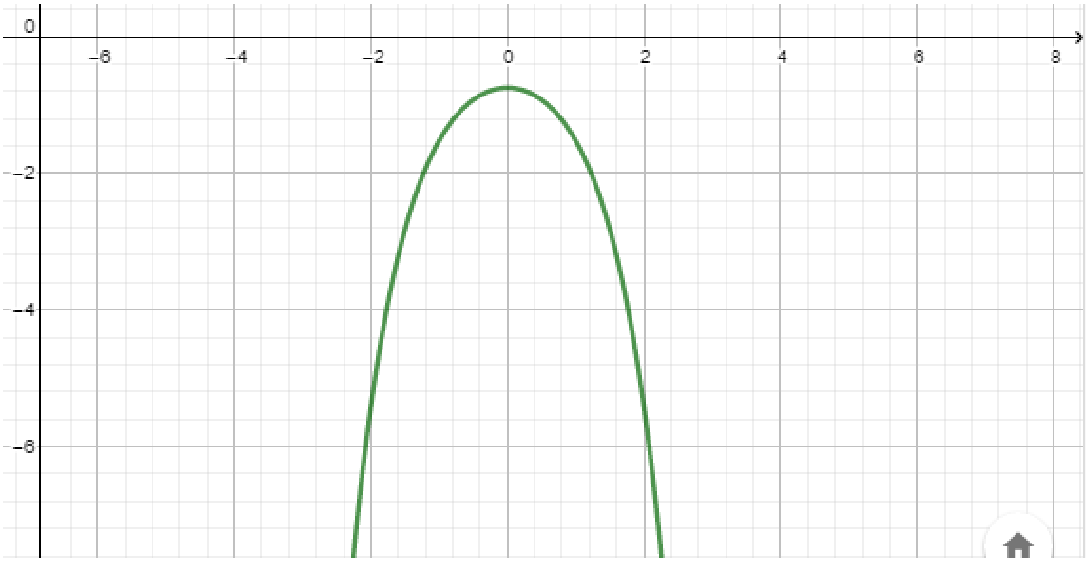
**Figura 3.4** Controles deslizantes




Fonte: Do autor

Usaremos controles deslizantes para que caso queira aumentar o número de lados das rodas seja possível apenas aumentando os valores no controle deslizante.

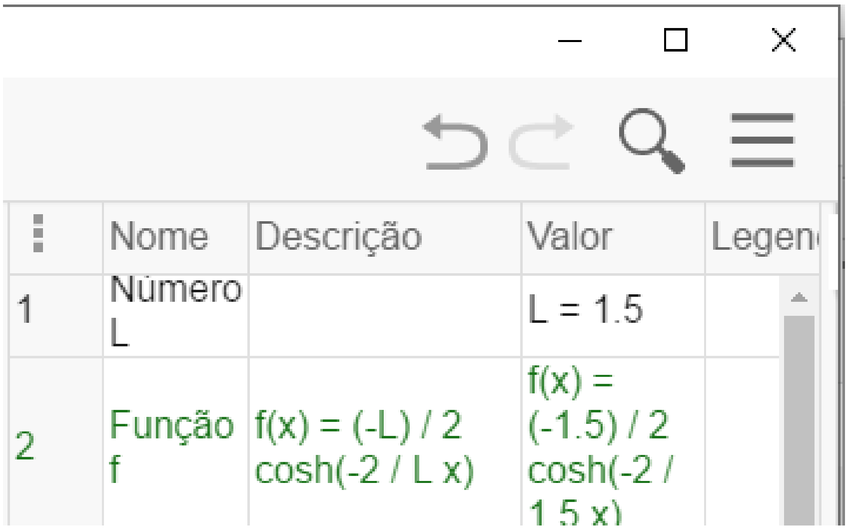
**Figura 3.5** Gráfico da função




Fonte: Do autor

No caso quando digitamos a função no comando do GeoGebra temos um gráfico pra toda os Reais. Sendo que nesse formato não interessa pra construção, pois a roda não é de tamanho infinito.

**Figura 3.6** Forma da função digitada

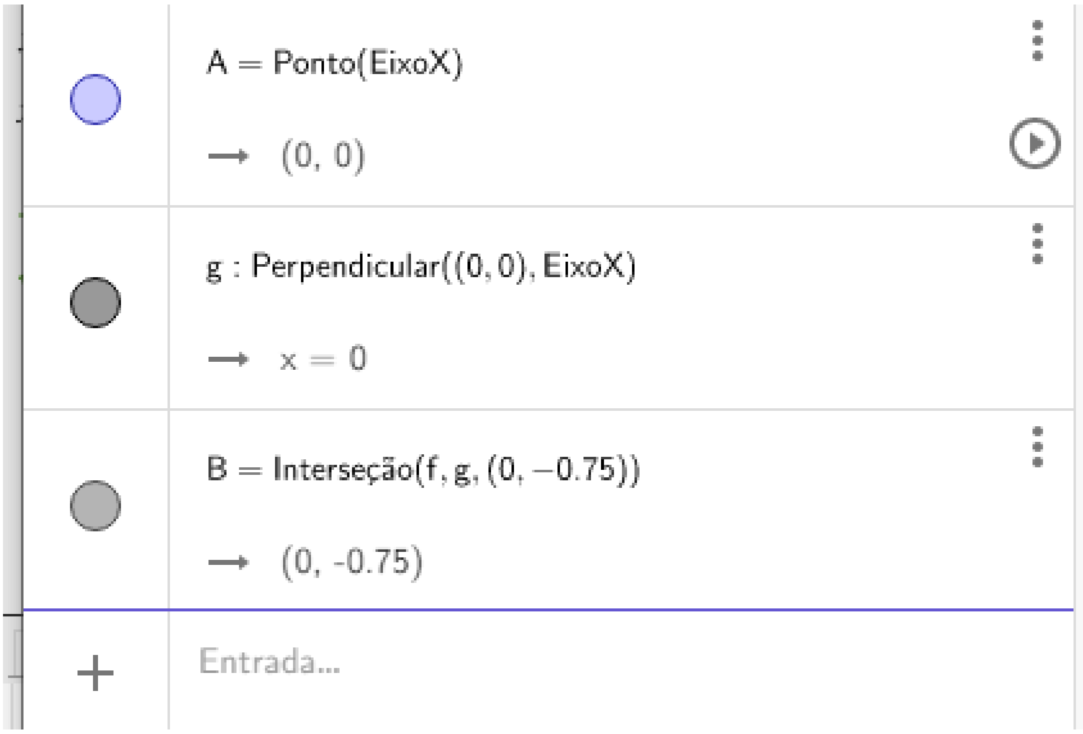



Fonte: Do autor

Para cada valor atribuído a $L$ temos uma forma diferente pra função $f$.

2 Tomando o ponto $A$ que é origem do plano cartesiano, nele destacaremos uma reta vertical ao eixo $Y$, com isso teremos o ponto $B$ que é o ponto de interseção entre $F$ e a reta $g$.

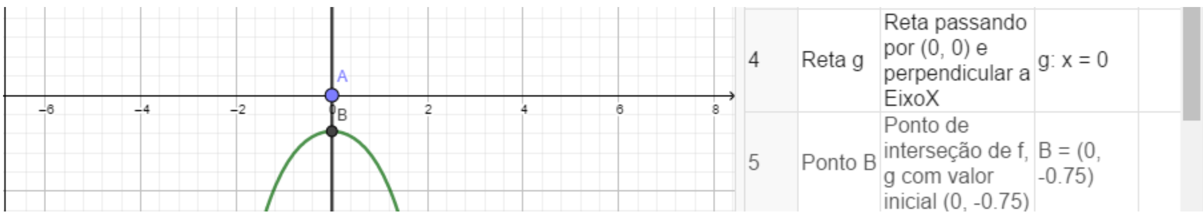
**Figura 3.7** Comandos para achar o ponto máximo




Fonte: Do autor

Com esses comandos podemos achar o ponto máximo da função e com ele sabemos que exite uma simetria da função com o eixo $y$, pois isso é importante por que a roda estar inicialmente no ponto médio de seu lado que é corresponde justamente com o ponto máximo da função.

**Figura 3.8** Ponto máximo

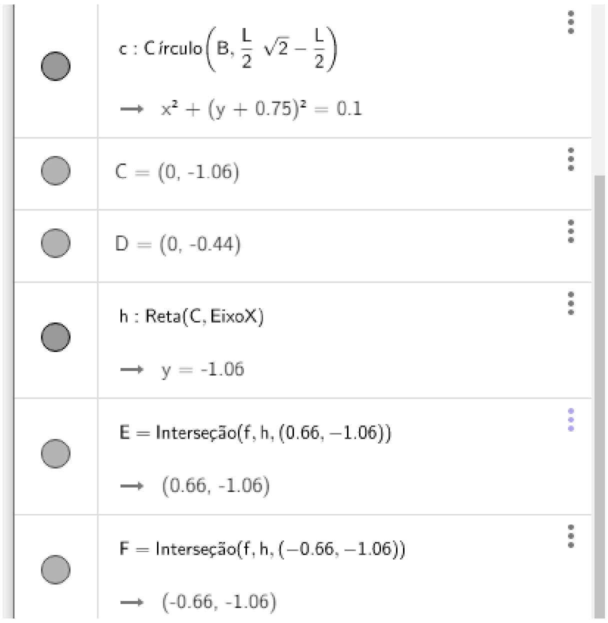



Fonte: Do autor

Representação gráfica do ponto máximo.

3 No ponto $B$ faremos o círculo de centro em $B$ e raio $\frac{L}{2}\sqrt{2}-\frac{L}{2}$, note que esse círculo terá duas interseções com o eixo$Y$, pegaremos o ponto de baixo, representado pela lera $C$. Nesse ponto $C$ passaremos uma reta perpendicular ao eixo$Y$, sendo assim teremos dois novos pontos de interseção dessa reta com a função $F$.

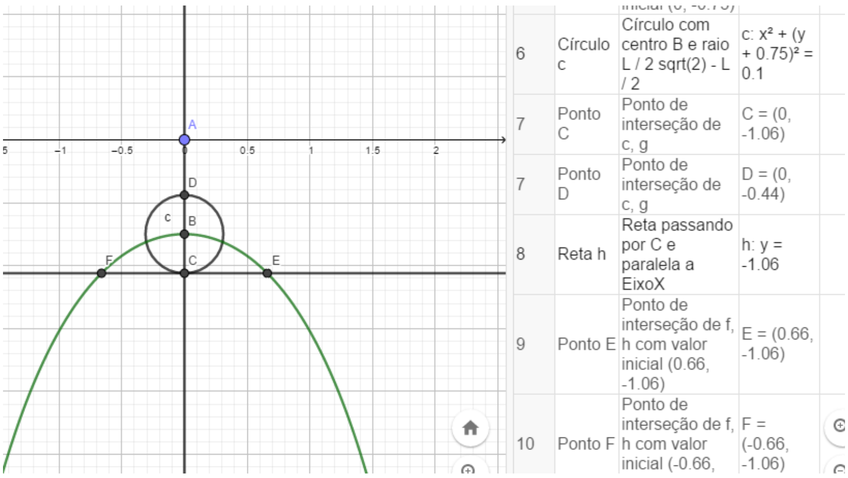
**Figura 3.9** Comandos para achar o intervalo




Fonte: Do autor

Usaremos esses comandos para achar o intervalo exato onde a roda inicia e termina seu movimento, para cada lado da roda que ela gira.

**Figura 3.10** Pontos do intervalo de início e fim do primeiro movimento



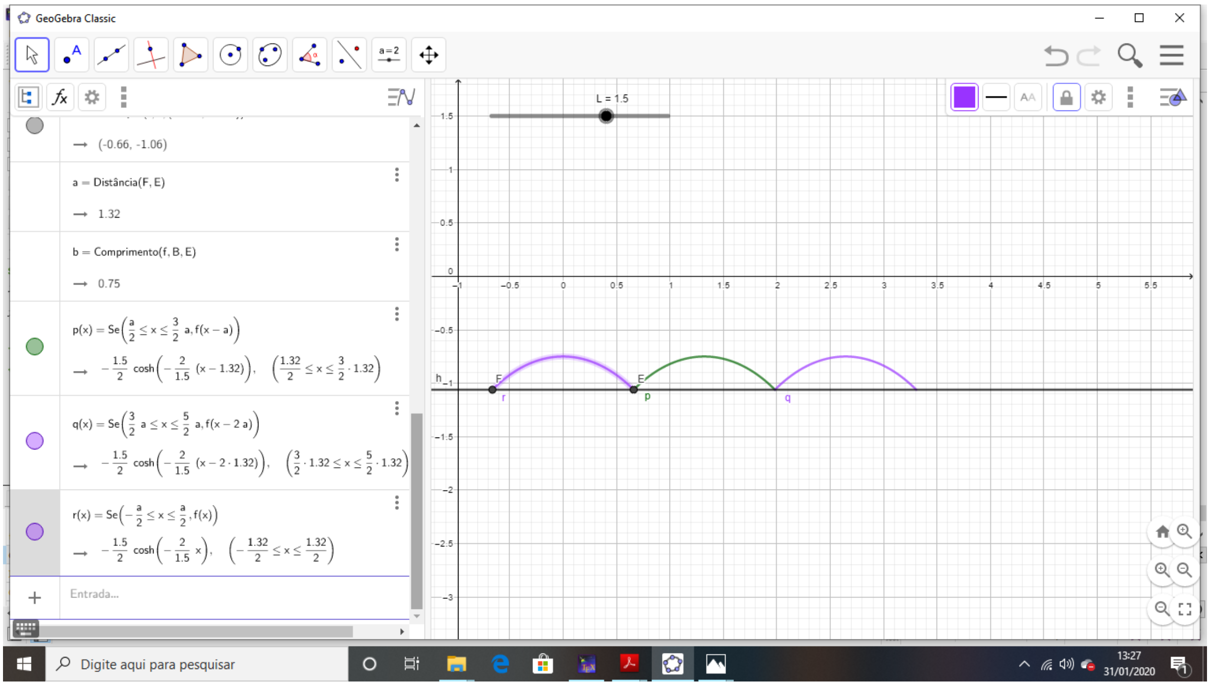

Fonte: Do autor

Quando forem usados os comandos na ordem indicada, apareceram os pontos de interseção que serão usados para encontrar o intervalo desejado, que logo após será usado nos comandos futuros, esse processo de fundamental importância é para calcular a distância $\overline{FE}$ que pode ser calculada também pelo dobro da distância $\overline{CE}$, pois o ponto $C$ é mediano.

4 Primeiramente encontraremos a distância $\overline{FE}$ e chamaremos essa distância de $a$, e pra mostrar que o comprimento da função $F$ do ponto $B$ ao ponto $E$ de fato é igual à metade do lado do quadrado, colocaremos um comando, que está representado na figura pela letra $b$.

Em seguida desmarcaremos a opção "exibir objeto"da função $F$, como também dos outros comandos nos quais não haja mais interesse de exibi-los. E por fim usaremos o comando "se"quantas vezes forem necessárias, sempre ajustando os intervalos desejados.

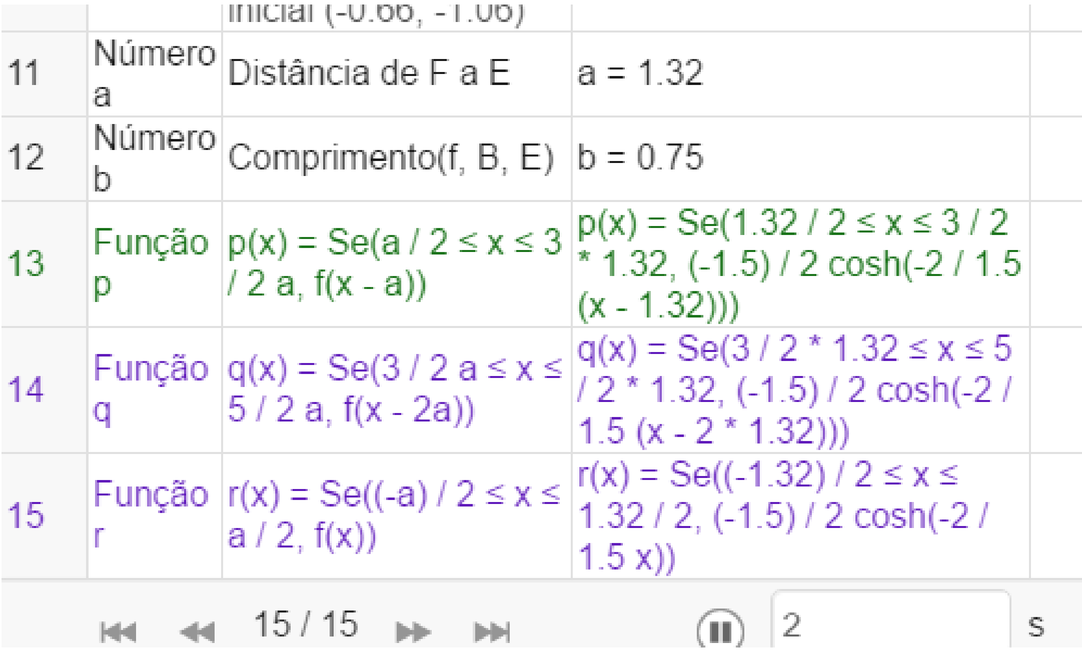
**Figura 3.11** Construção da Pista




Fonte: Do autor

Já que sabemos o intervalo e calculamos o seu comprimento, agora usaremos o comado "se"do GeoGebra para montar o tamanho da pista desejada. Note que fazemos a função dar um salto do tamanho do intervalo inicial, onde cada salto tem uma nova função que tem um intervalo deslocado no mesmo tamanho, e repetiremos sempre com o mesmo argumento, fazer a função saltar.

**Figura 3.12** Comandos da construção



| | | | |
|---|---|---|---|
| | | inicial (-0.66, -1.06) | |
| 11 | Número a | Distância de F a E | a = 1.32 |
| 12 | Número b | Comprimento(f, B, E) | b = 0.75 |
| 13 | Função p | p(x) = Se(a / 2 ≤ x ≤ 3 / 2 a, f(x - a)) | p(x) = Se(1.32 / 2 ≤ x ≤ 3 / 2 * 1.32, (-1.5) / 2 cosh(-2 / 1.5 (x - 1.32))) |
| 14 | Função q | q(x) = Se(3 / 2 a ≤ x ≤ 5 / 2 a, f(x - 2a)) | q(x) = Se(3 / 2 * 1.32 ≤ x ≤ 5 / 2 * 1.32, (-1.5) / 2 cosh(-2 / 1.5 (x - 2 * 1.32))) |
| 15 | Função r | r(x) = Se((-a) / 2 ≤ x ≤ a / 2, f(x)) | r(x) = Se((-1.32) / 2 ≤ x ≤ 1.32 / 2, (-1.5) / 2 cosh(-2 / 1.5 x)) |

15 / 15 2 s

Fonte: Do autor

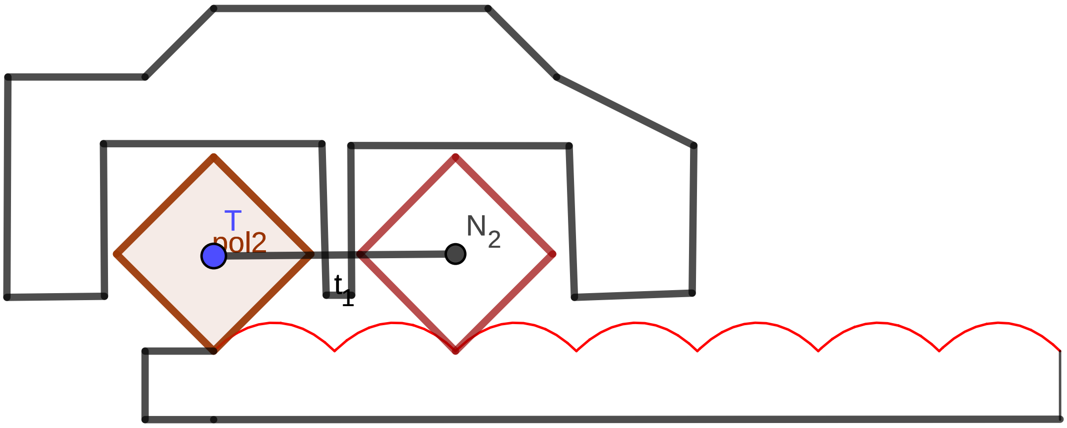
Seguindo esses passos chegaremos à construção do caminho ideal para cada roda quadrada dada.

Essas informações podem ser bem esclarecidas ao aluno, a ponto de que ele possa reproduzir, e a depender do ano escolar dele, é possível que o aluno venha a produzir seu próprio gráfico conforme a escolha do tamanho pra sua roda.

No projeto do carro, os pontos mais importantes que o leitor tem que ficar atento são: o tamanho da roda e a distância entre uma roda e a outra. Deve-se atentar para o fato de que para o tamanho da roda escolhida você tem uma catenária específica. Além disso, a distância entre uma roda e outra tem que casar perfeitamente com os bicos da função.

Deve-se também levar em conta que uma roda não pode tocar na outra enquanto gira e deve-se manter um período de no mínimo $2a$ entre a roda da frente e a roda traseira, e $a = \overline{FE}$ que tem que ser igual a $\overline{TN_2}$.

**Figura 3.13** Projeto do carro.




Fonte: Do autor

Por fim, para que o projeto seja funcional, temos que analisar pela figura os seguintes fatos: Primeiramente, as rodas têm que ser colocadas a uma distância de três vales, ou seja, a distância entre os centros da roda terão que estar a uma distância de $2a$, além disso, devemos construir o comando de repetição da função pelo menos pra $n = 8$, que possibilita mais de uma volta completa da roda.

Fazendo esse projeto no GeoGebra, há algumas possibilidades para construir o modelo. Uma das formas que indicaremos é procurar uma gráfica que corte a laser, e o outro é fazer impressão 3D, pois esses procedimentos têm praticidade e a exatidão necessárias para o corte da função.

**Figura 3.14**

Na figura a cima fizemos a construção a partir da impressão do GeoGebra, colando essa impressão na madeira e realizando o corte com uma maquina de cera, fazendo o acabamento final com lixas de madeiras.

# 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos oportunidades de inovação na prática de ensino da matemática. Apresentamos formas de utilizar a matemática de maneira mais concreta, fazendo uma ponte entre a teoria e a prática. Apresentamos também um leque de conteúdos didáticos que podem ser trapalhados e explorados através das questões aqui levantadas, além da possibilidade de inovação, abordando novos temas do conhecimento matemático, com a possibilidade de adaptação (simplificando ou aprofundando) ao nível de ensino que o professor deseja propor.

Aqui apresentamos um veículo com rodas quadradas e descobrimos a curva para o movimento do veiculo - a catenária. Essa descoberta foi importante pra entender que essa curva é ajustável a todas as rodas no formato poligonal regular. Notamos que as Funções Hiperbólicas têm uma relação muito forte de semelhança com os gráficos das Funções Quadráticas, com isso temos uma oportunidade de mostrar essa semelhança entre o gráfico de uma parábola e o gráfico de uma catenária.

Observamos que o Programa GeoGebra pode ser usado como animador gráfico para demonstrar os efeitos realísticos de um veículo de rodas quadradas se movendo em uma superfície de ramos de catenária. É, portanto, um instrumento valioso a ser explorado no ensino da Matemática. Alem disso demonstrou ser um facilitador pra desenvolver o projeto pois com ele é possível criar o gráfico das funções. Através das impressões de seus gráficos podemos construir a pista desejada, com base nos objetivos traçados. Tudo isso possibilita que os alunos tenham uma experiência inovadora proporcionada pelo contato com a realidade matemática.

Complementando tudo isso deixamos uma animação acessível gravada no banco de dados do GeoGebra, de forma aberta a ser consultada pelos interessados em desenvolver trabalhos que possam mostrar pistas pra rodas não circulares.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] SEIXAS, J. Adonai Pereira. Exercícios de Geometria Diferencial, 1988.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria Equações Diferenciais Aplicadas, Rio de Janeiro: Impa, 1997. Aplicadas, Rio de Janeiro: Impa, 1997.

[3] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. Geometria Diferencial das Curvas Planas.

[4] Iório Jr., Rafael José & Iório Valéria Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. IMPA, 1988.

[5] BORTOLOSSI, Humberto José, Cálculo diferencial a várias variáveis Ed. PUC-Rio, 2002.

[6] LIMA, Elon Lages, Curso de análise - Volume 1. Rio de Janeiro; Impa, 2004.

[7] STEWART, Jemes, Cálculo, v.1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

[8] Roads end Wheels (Leon Hall; Stan Wagon) Mathematics Magazine, vol 65, No. 5.(Dec., 1992), pp, 283-301.

[9] Estradas para rodas exóticas (MARIA CARVALHO). Departamento de Matemática da Universidade do Porto , e ( ANA OLIVEIRA). Associação Atrator Matemática Interativa. Boletim da SPM 65, Outubro 2011, pp. 1-17.

[10] <https://www.firjan.com.br/sesimatematica/arena-sesi-matematica>. Acesso em: 02 de novembro de 2019.

[11] <https://en.wikipedia.org/wiki/National_Museum_of_Mathematics>. Acesso em: 05 de novembro de 2019.

[12] <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2012/12/Museu-de-Matematica-de-Manhattan.html>. Acesso em: 02 de Setembro de 2019.

[13] <https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2011/05/27/acredite-esta-bike-anda-e-nao-vibra/ >. Acesso em: 02 de Setembro de 2019.

[14] BORTOLOSSI, Humberto José, Disponível em <https://www.geogebra.org/m/ptxevdgg>. Acesso em: 02 de Setembro de 2019.

[15] SANTOS, Maria Dayane Dalysse dos. Trabalho de conclusão de curso; CURVAS FAMOSAS E SUAS APLICAÇÕES: Ufal, Alagoas, 2009.

[16] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Catenária>. Acesso em: 02 de Setembro de 2019

[17] <https://www.portalsaofrancisco.com.br/curiosidades/roda-curiosidades>. Acesso em: 05 de Setembro de 2019