

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Bruno Amaro de Freitas

*Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o
auxílio do Origami*

Rio de Janeiro
2013

Bruno Amaro de Freitas

Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o auxílio do Origami

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Adriano Maurício de Almeida Côrtes

Doutor em Engenharia Civil - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

Freitas, Bruno

Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o auxílio
do Origami / Bruno Freitas - 2013

47.p

1.Matematica 2.Geometria Euclidiana 3. Origami. I.Título.

CDU 536.21

Bruno Amaro de Freitas

Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o auxílio do Origami

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 19 de julho de 2013

BANCA EXAMINADORA

Adriano Maurício de Almeida Côrtes

Doutor em Engenharia Civil - UFRJ

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Renata Alves Carvalho Crippa

Mestre em Matemática - UFRJ

Dedico esta obra a Deus e a minha família.

Resumo

Os problemas de duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo dado usando somente régua e compasso inspiraram e motivaram vários matemáticos da antiguidade até meados do século XIX.

Neste trabalho de conclusão de curso, utilizamos a arte milenar do Origami para resolver esses problemas clássicos da Geometria. Além disso, também é mostrado que o Origami nos permite resolver equações cúbicas de uma forma diferente das convencionais.

Abstract

The problems related to the cube's doubling and the trisection of a given angle by using only a ruler and a compass as tools have inspired and motivated many mathematicians since early ages until the middle of the nineteenth century.

In this final project, we have used the millennial art of origamis in order to solve typical problems of Geometry. Moreover, it is also highlighted that the origami provides us with different and unconventional ways of solving cubic equations.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por estar presente em cada passo em minha vida. Agradeço também a toda minha família querida, em especial minha esposa Amanda, que me apoiou e que compreendeu a minha ausência nestes dois últimos anos, principalmente no momento especial no qual passamos; meu filho Pietro; meus pais Iracema e Leonardo pelo amor e carinho de sempre e minha querida, adorável e carinhosa irmã Renata Kelly; hoje sou o que sou graças a vocês. Agradeço também a todos os professores do Mestrado por terem me instruído e colaborado de forma direta, ou indireta, para o meu crescimento pessoal e profissional. E, para finalizar, agradeço a todos os colegas de curso que me ajudaram em todos os momentos; me enriqueci muito nas sextas-feiras em que estivemos juntos.

Sumário

1	Introdução	6
2	O Origami e a Geometria	8
2.1	História do Origami	8
2.1.1	A Geometria no Origami	9
2.2	Os Axiomas de Huzita-Hatori	10
2.3	Tipos de dobradura	17
3	Resolvendo os problemas com o auxílio do Origami	19
3.1	A duplicação do cubo	19
3.2	A trisseção do ângulo	25
4	Equações Cúbicas, Origami e o Método de Lill	32
4.1	O Quadrado de Beloch	32
4.2	Duplicação do Cubo – Uma nova abordagem	35
4.3	Resoluções de Equações Cúbicas	37
4.4	Exemplos do Método de Lill	40
5	Considerações Finais	45
	Referências Bibliográficas	46

1 Introdução

Alvo de estudo dos matemáticos gregos e com grande importância no desenvolvimento da matemática, “Os três problemas clássicos de Geometria” despertaram interesse de vários matemáticos e amantes da Geometria. Eles são: os problemas da quadratura do círculo, da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. Várias foram as tentativas até o século XIX em resolver esses problemas usando régua não graduada e compasso, lembrando que estes são os únicos instrumentos utilizados por Euclides¹ em sua obra *Elementos*, sendo conhecidos portanto como instrumentos euclidianos.

O problema da **duplicação do cubo**, também conhecido como o problema deliano, consiste em construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de outro cubo dado. Já o problema da **trissecção do ângulo** consiste em dividir um ângulo dado qualquer em três partes iguais. Por último, o problema da **quadratura do círculo** consiste em construir um quadrado com área igual a de um círculo dado. Desses não iremos aprofundar o último.

A busca pela solução destes problemas somente com régua, que doravante assumiremos não graduada exceto dito o contrário, e compasso pelos gregos contribuiu e influenciou o estudo da Geometria, levando a descobertas, das quais destacamos as cônicas e várias curvas cúbicas, quadráticas e transcendentais. Como já dito, as tentativas de solução ocorreram até o século XIX, quando finalmente em 1837 o matemático francês Pierre Laurent Wantzel [1] provou a impossibilidade da solução somente com régua e compasso, os instrumentos euclidianos. É interessante destacar que o intervalo de tempo entre a concepção dos problemas e a prova da impossibilidade de solução ocorrida no século XIX foi maior que 2000 anos.

A busca pela solução destes problemas percorreu o mundo e muitos tentaram resolvê-los de formas diversas. Uma maneira de resolução sem os elementos de Euclides (régua sem graduação e compasso) é através do origami. Este tipo de resolução só foi possível com os axiomas de Huzita-Hatori [2] que possibilitaram uma ligação direta com

¹Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geométricos e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica.

a Geometria Euclidiana, que será tratado com maior clareza no capítulo 2.

Já no capítulo 3, iremos observar como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo foram resolvidos através da utilização do origami e constatando assim a importância dos axiomas de Huzita-Hatori.

Como consequência da solução da duplicação do cubo, foi encontrada uma forma de resolução de equações cúbicas com o auxílio do origami [3], no qual iremos nos aprofundar melhor no capítulo 4. Neste mesmo capítulo, iremos observar o trabalho da Matemática italiana Margherita Beloch Piazzolla, que apresenta uma forma diferente de duplicar o volume de um cubo e do Engenheiro austríaco Eduard Lill que apresenta uma forma de resolução de qualquer equação através de gráficos. Coincidentemente, ao resolver uma equação cúbica pelo Método de Lill, estaremos trabalhando com um caso particular do Quadrado de Beloch.

2 O Origami e a Geometria

2.1 História do Origami

Ao procurar o significado da palavra origami no dicionário encontra-se a seguinte definição: “*Origami: s.m. É uma arte japonesa de dobrar papel em forma decorativa.*” (Aurélio, 2011, p.550). Contudo, analisando a palavra origami etimologicamente, temos que a sua origem é japonesa e que ori tem como significado dobrar e kami significa papel, logo a palavra origami, em sua essência inicial, significa dobrar papel. Mais profundamente temos que origami é a arte de criar figuras diversas utilizando apenas papéis e dobraduras.

Não é possível afirmar com certeza a origem do origami; alguns afirmam que é originado da China, outros afirmam que o primeiro país que trabalhou com esta arte foi o Japão. Sabe-se, com clareza, que o papel foi inventado na China no século II e que logo esta invenção foi expandida para o mundo todo, como descreveu Lang [4] (tradução própria): “*A arte da fabricação do papel foi desenvolvida na China, e a partir disto viajou o resto do mundo. Monges Budistas levaram o papel para o Japão, no século VI D.C. e os primeiros origamis japoneses encontrados datam deste período*”.

Inicialmente, o origami era utilizado apenas em ocasiões cerimoniais, pois, apesar da difusão do papel em todo território japonês, o mesmo possuía um preço elevado, acarretando em preços elevados também do origami, fazendo assim com que muitas pessoas não pudessem desenvolver a técnica do origami, cabendo esta função apenas para pessoas especialista e que utilizavam técnicas bastante aprimoradas. Cogita-se que os primeiros origamis tenham sido objetos decorativos em cerimônias religiosas, pois a palavra kami possui dois significados distintos: papel e deus, apesar de existir dois ideogramas¹ diferentes.

Com o passar do tempo e o fácil acesso ao papel, resultou que a técnica do origami foi expandida para outros países e, sendo assim, a técnica foi sendo aperfeiçoada cada vez mais. Atualmente existem origamis; que a partir de agora serão denominados

¹É um símbolo gráfico utilizado para representar palavras. A escrita japonesa

também por modelos; de fácil confecção, com duas a três dobraduras, como também existem modelos que levam horas para serem feitos. Sobre estes feitos, Lang [5] (p. 3) afirma:

”A maioria dos milhares de modelos possui algo em comum: foram criados nos últimos 50 anos. Com isto pode dizer que o origami é uma arte nova e velha ao mesmo tempo. Até 5 anos atrás, todos os diferentes tipos de origamis poderiam ser catalogados em uma única folha de papel e nenhum com mais do que 30 etapas de dobraduras. Contudo, hoje em jornais, livros, podemos encontrar modelos com centenas de etapas e com uma grande quantidade de tempo gasto para sua confecção. ”

Muito do charme do origami é pelo fato de ser uma arte simples em sua matéria prima; necessita-se apenas de uma folha de papel, de preferência quadrada, no qual será transformada em um objeto utilizando-se apenas de dobraduras. Vale ressaltar que quando existe a necessidade de se cortar ou incluir algum outro pedaço de papel, para compor o modelo que será formado, a técnica utilizada denomina-se kirigami² .

Observando o quanto o origami é importante na cultura japonesa, temos a lenda milenar do pássaro Tsuru. Diz-se que ao confeccionar 1000 origamis do Tsuru com um pensamento voltado para aquilo que deseja, ele poderá se realizar. Baseado nisto, milhares de criança do Japão e do mundo todo, enviam Tsurus para o Parque da Paz de Hiroshima, no dia 06 de agosto, desejando a Paz Mundial.

2.1.1 A Geometria no Origami

Ao ser feita uma dobradura, podemos observar que a pessoa que a faz possui um conhecimento, implícito ou não, de vários elementos da geometria. Consequentemente, ao fazer uma análise mais profunda perante os modelos conseguimos extrair conceitos básicos relativos aos ângulos, planos, vértices, paralelismo, semelhança de figuras; focando-se apenas na geometria. Contudo também podemos perceber conceitos aritméticos de frações e até conceitos algébricos.

Logo, podemos notar que o trabalho com origami é de uma valia enorme, sendo ele muito enriquecedor e com argumentos suficientes para que possamos confirmar e demonstrar muitos teoremas da geometria. Com isto, a dobradura pode ser utilizada

²Kiri significa cortar e gami significa papel.

como um instrumento para a exploração das propriedades geométricas de figuras planas e também de figuras espaciais. Podemos notar isto nas palavras de Grazielle Rancan [6] (p.18): “*As atividades com dobraduras manuais possuem uma dinâmica que valoriza a descoberta, a conceituação, a construção manipulativa, a visualização e a representação geométrica.*”.

Um trabalho em sala de aula, com a utilização de origamis, torna-se mais atrativo para o aluno, por ser algo mais lúdico e no qual o mesmo já está acostumado a trabalhar, principalmente quando constrói um barquinho, um aviãozinho, um chapéu, tudo utilizando dobraduras. Esta técnica pode ser utilizada para que o aluno aprenda e compreenda conteúdos considerados de difíceis entendimentos e abstratos. De fato, Rêgo e Gaudêncio [7] já mencionavam isto: “*O origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio de observação do mundo, de objetos e formas que o cercam.*”.

2.2 Os Axiomas de Huzita-Hatori

Nesta seção iremos nos preocupar apenas em citar os axiomas de Huzita-Hatori, deixando para o leitor uma vasta referência bibliográfica para auxílio em caso de dúvidas. Os seis primeiros axiomas foram descritos por Humiaki Huzita [8], na década de 1970. Os cinco primeiros estabelecem uma relação direta da Geometria Euclidiana com os conceitos de dobradura do Origami, e o sexto já permite que façamos uma ação que não é possível com os elementos de Euclides; esse axioma, em especial, nos permite resolver os problemas clássicos da geometria sem régua graduada e compasso. Já no ano de 2002 Koshiro Hatori [8] apresentou uma dobragem que não se enquadrava em nenhuma das anteriores, fazendo assim o sétimo e último axioma.

Os axiomas abaixo, assim como as figuras, foram retirados na íntegra de [8], sofrendo apenas a tradução livre para o Português utilizado em nosso país. Eis os axiomas:

Axioma 1 (A1): Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há apenas uma dobra que passa pelos dois pontos (figura 2.1).

Este axioma equivale ao axioma da Geometria Euclidiana que afirma que dado dois pontos existe uma única reta passando por eles.

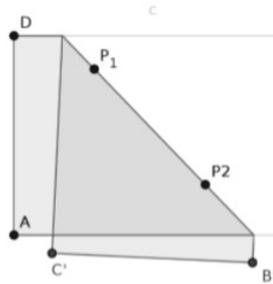


Figura 2.1: Axioma 1

Axioma 2 (A2): Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há apenas uma dobra que os torna coincidentes (figura 2.2).

Este axioma pode ser identificado como a construção da reta mediatriz de um segmento.

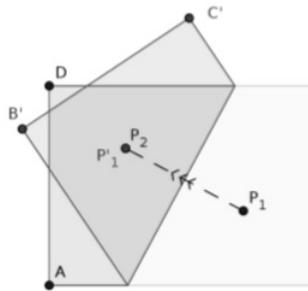


Figura 2.2: Axioma 2

Axioma 3 (A3): Dadas duas retas, r_1 e r_2 , há apenas uma dobra que as torna coincidentes (figura 2.3).

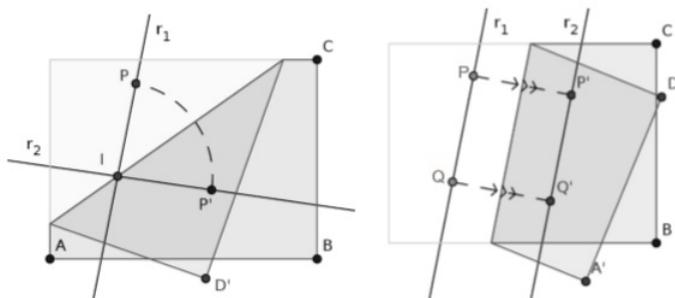


Figura 2.3: Axioma 3

Este axioma pode ser identificado como a construção da reta bissetriz entre dois segmentos. Bissetriz é o lugar geométrico que equidistam de duas retas dadas.

Axioma 4 (A4): Dados um ponto P e uma reta r , há apenas uma dobra perpendicular a r que passa por P (figura 2.4). Este axioma pode ser identificado como a construção da reta perpendicular em relação a um segmento.

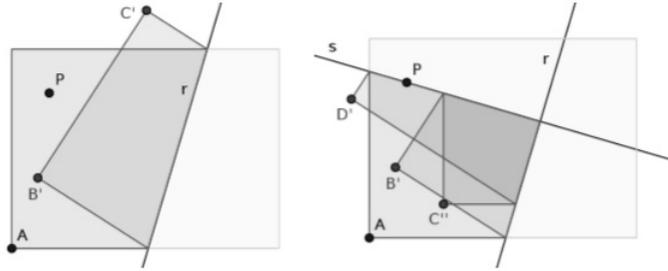


Figura 2.4: Axioma 4

Axioma 5 (A5): Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e uma reta, r_1 , se a distância de P_1 e P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a r_1 , há apenas uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e que passa por P_2 (figura 2.5).

Este axioma faz uma relação direta com a Geometria Euclidiana pois se refere a interseção de uma reta com uma circunferência de centro P_2 e raio $\overline{P_1P_2}$

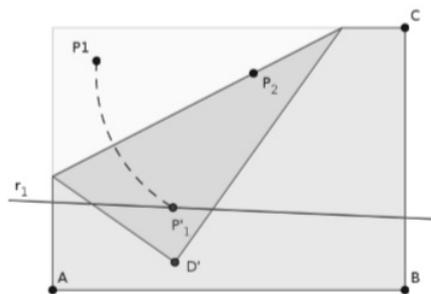


Figura 2.5: Axioma 5

Axioma 6 (A6): Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e duas retas, r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há apenas uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2 (figura 2.6).

Este axioma é equivalente a encontrar uma reta tangente a duas parábolas distintas.

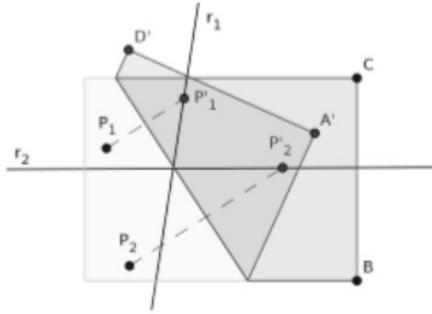


Figura 2.6: Axioma 6

Por este axioma ser de uma importância fundamental para este trabalho, será feita uma construção para que possamos compreender de uma forma mais lúdica a correspondência que ele possui com a Geometria Euclidiana. Vamos observar:

Primeiramente, o axioma trata de dois pontos e duas retas, ambos distintos. A explicação a seguir será feita apenas para uma reta e um ponto, depois, ao fazermos a conclusão, expandiremos o que foi explicado para a necessidade do axioma.

Em uma folha de papel, foi marcado o ponto P_1 em um local arbitrário. A base da folha de papel, sendo considerando o menor lado da folha como base, foi dividida em 20 pontos, separados por espaços equidistantes. A base será considerada a minha reta r_1 (figura 2.7).

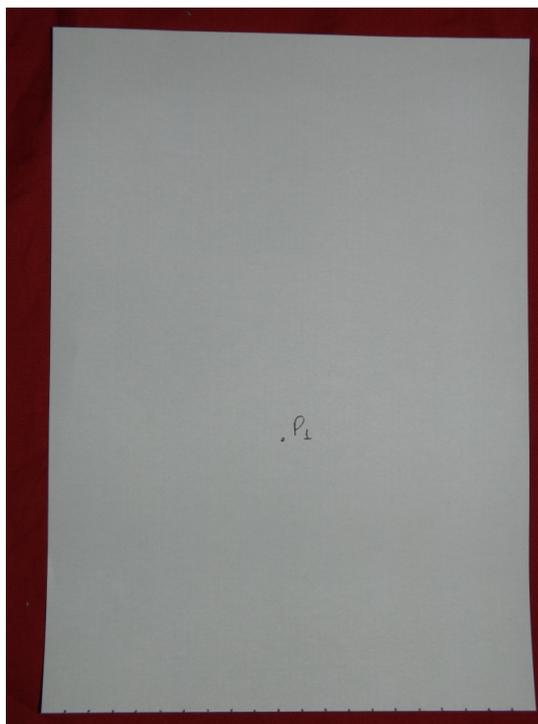


Figura 2.7: Axioma 6 - Construção

O axioma afirma que devemos levar o ponto a uma reta. Como não temos um ponto fixo da reta r_1 para levarmos o ponto P_1 , levaremos o ponto a cada um dos 20 pontos no qual a reta r_1 foi dividida. A cada dobra que é feita, marcamos o local do vinco com caneta preta, para que possa ficar mais ressaltado e assim observarmos com clareza o que acontece. Nas figuras a seguir, serão mostradas algumas destas dobras (figuras 2.8 até 2.15).

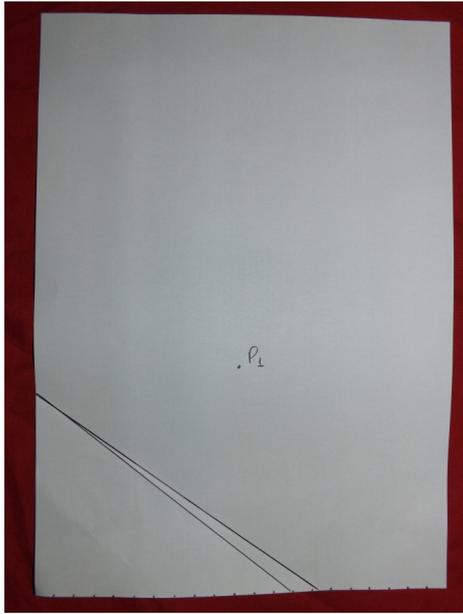


Figura 2.8: Axioma 6 - Construção

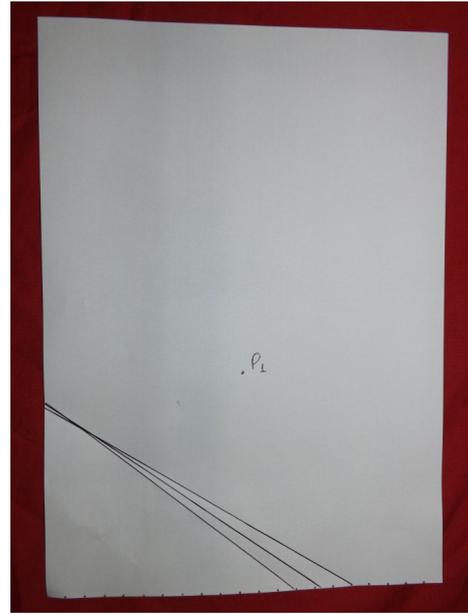


Figura 2.9: Axioma 6 - Construção

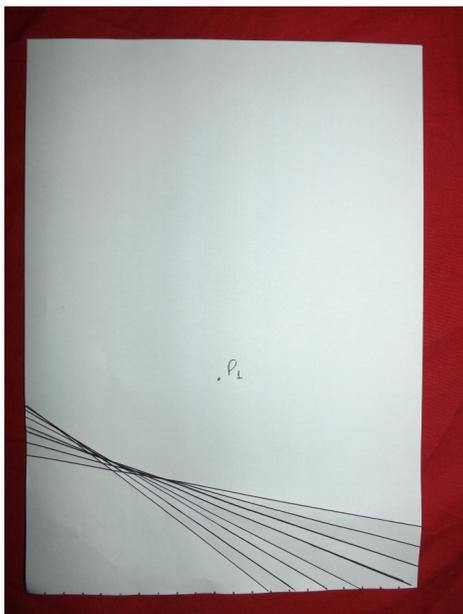


Figura 2.10: Axioma 6 - Construção

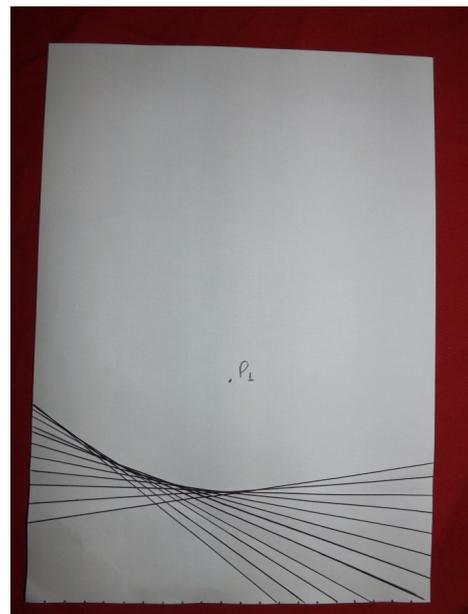


Figura 2.11: Axioma 6 - Construção

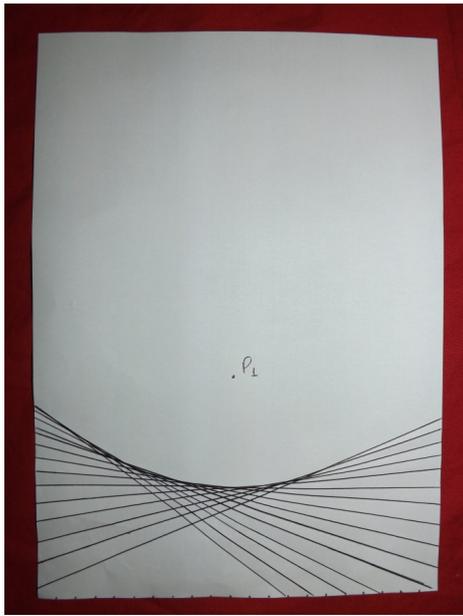


Figura 2.12: Axioma 6 - Construção

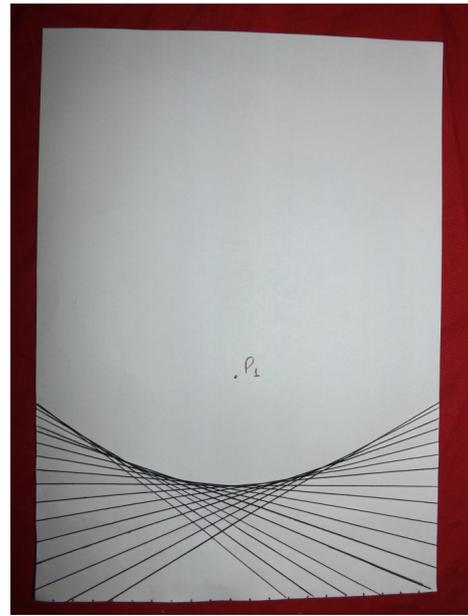


Figura 2.13: Axioma 6 - Construção

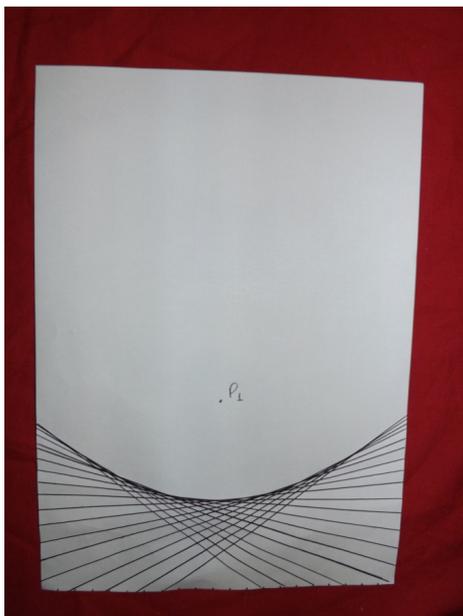


Figura 2.14: Axioma 6 - Construção

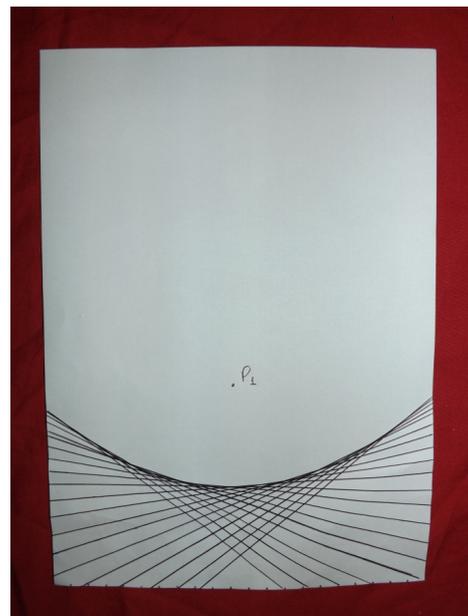


Figura 2.15: Axioma 6 - Construção

Ao observar a figura 2.15 podemos notar que as dobras oriundas do encontro do ponto P_1 com a reta r_1 formaram, visualmente, o contorno de uma parábola, ou seja, as dobras são tangentes a uma parábola. Para provar que realmente é uma parábola, devemos lembrar que a parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz). Neste caso consideremos o ponto P_1 como o foco e a reta r_1 como reta diretriz.

Na figura 2.16 foi refeita uma dobra qualquer. Com a folha dobrada foi marcada a distância do ponto P_1 (foco) até a dobra, que fica exatamente tangente a suposta parábola. Ao desdobrar a folha (figura 2.17), podemos constatar que a distância, por construção, é exatamente igual a distância do ponto marcado sobre a tangente até a reta r_1 (reta diretriz). Com isto, podemos concluir que todas as dobras originam uma parábola e que estas dobras são tangentes as parábolas.

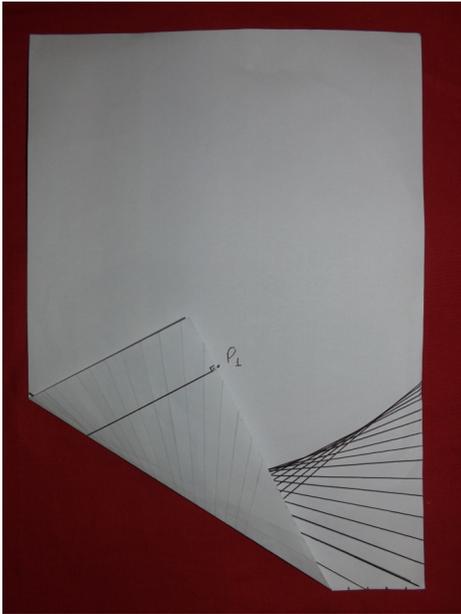


Figura 2.16: Axioma 6 - Construção

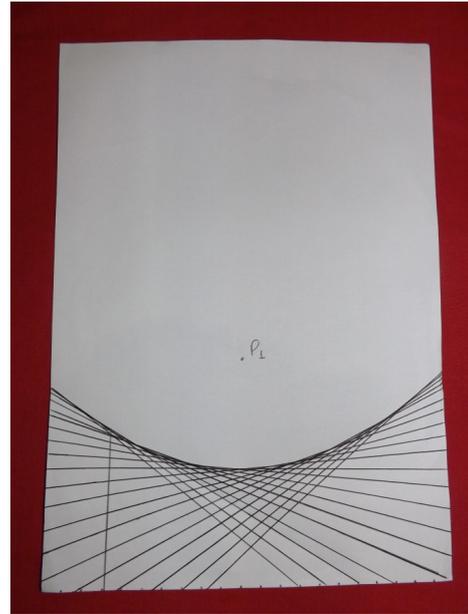


Figura 2.17: Axioma 6 - Construção

Por fim, ao incidir um ponto sobre uma reta temos que a dobra originada é tangente a uma parábola. Por hora, se temos dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2 , ao fazermos dobras que incidam P_1 em r_1 e P_2 em r_2 , teremos retas tangentes as parábolas relativas ao conjunto de ponto e reta. Como devemos achar uma dobra que satisfaça, ao mesmo tempo, P_1 em r_1 e P_2 em r_2 , acharemos uma reta que será tangente a parábola de P_1 em r_1 , uma reta que também será tangente a parábola de P_2 em r_2 . Como a dobra é simultânea, a reta será a mesma, satisfazendo assim ambas as parábolas e confirmando o que afirma o axioma.

Axioma 7 (A7): Dado um ponto, P , e duas retas, r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas, há apenas uma dobra que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2 (figura 2.18).

Este axioma é equivalente a resolver equações do primeiro grau.

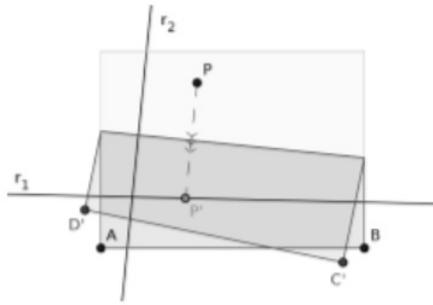


Figura 2.18: Axioma 7

2.3 Tipos de dobradura

Antes de descrevermos as soluções para os problemas clássicos mencionados acima através da dobradura de papel, é interessante observar que ao manusear uma folha de papel para fazer um origami, podemos efetuar alguns tipos específicos de dobras no papel. Nosso objetivo será apresentar os únicos tipos de dobraduras que serão úteis para as demonstrações. Estes tipos são:

- **Dobrar e vincar:** Neste tipo de dobradura nós iremos dobrar a folha e pressionar com certa força na dobra para que o papel fique marcado ao desdobrar. Em nossas figuras esta dobra será representada, primeiramente, por linhas pontilhadas (figura 2.19) que se transformarão em linhas contínuas (figura 2.20) no passo seguinte da dobradura.



Figura 2.19: Vincar



Figura 2.20: Vincar

- **Dobrar em vale:** Para efetuar esta ação, sempre iremos dobrar o papel na direção da seta indicada contando que esta sempre indique a dobra no sentido interno da folha (figura 2.21). Neste tipo de dobradura, o vinco sempre fica “dentro” do papel e o mesmo não é desdobrado.

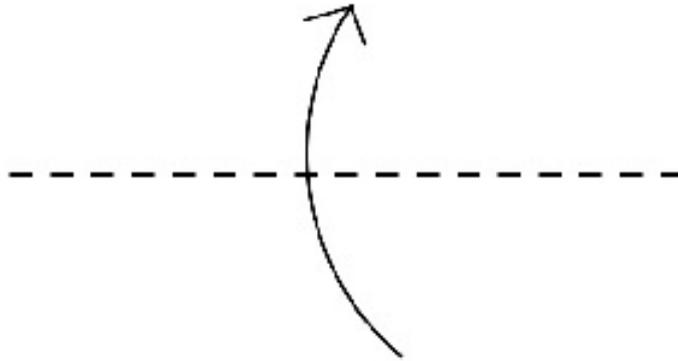


Figura 2.21: Vale

3 Resolvendo os problemas com o auxílio do Origami

Como já foi observado, além de possuir várias utilidades no dia a dia, o origami pode auxiliar no aprendizado e em um melhor entendimento de conteúdos da matemática, em especial na geometria.

Nesta seção iremos utilizar alguns dos conceitos que adquirimos sobre a arte do origami para nos auxiliar na resolução de dois problemas clássicos da Geometria: a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

3.1 A duplicação do cubo

Usando apenas conceitos do origami, o matemático Peter Messer, conseguiu demonstrar, em 1986, um dos problemas clássicos da geometria: a duplicação do cubo [9]. Podemos considerar que não foi apenas um grande resultado obtido por ele a resolução deste problema; podemos e devemos mencionar que ao resolver este problema, implicitamente acaba-se resolvendo equações cúbicas com o auxílio do origami.

Também iremos observar no Capítulo 4 deste trabalho, uma outra possibilidade de duplicação do cubo, através do Quadrado de Beloch.

Vale lembrar que este problema se tornou clássico, pois por muito tempo tentaram resolvê-lo com régua, sem graduação, e de compasso. Há algum tempo foi comprovado por Wantzel [1] que não é possível resolvê-lo desta maneira, tendo em vista que o mesmo acaba sendo reduzido em uma equação cúbica.

Abaixo descreveremos os passos da dobradura que solucionam o problema da duplicação do cubo usando Origami, em seguida, procederemos a prova.

Construção

Passo 1:

Sejam A, B, C e D os vértices de uma folha de papel quadrada. Primeiramente,

deve-se fazer uma pequena dobra na folha, de tal forma que o ponto E, originado desta dobra, seja o ponto médio do lado DC da folha (figura 3.1). Nota-se que não há necessidade de que a dobra seja continua até o outro lado do papel.

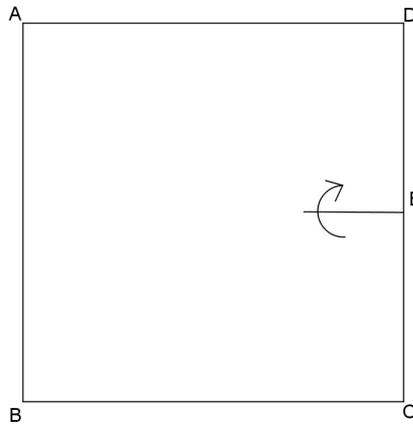


Figura 3.1: Duplicação - Passo 1

Passo 2:

Agora iremos fazer duas dobras no papel de tal forma que o vértice D irá encontrar com o vértice B e outra dobra no qual o vértice C irá para o interior da folha, de tal forma que a dobra formada contenha o vértice B e o ponto E, criado anteriormente (figura 3.2). O encontro entre estas dobras será um ponto de extrema importância para o prosseguimento da demonstração.

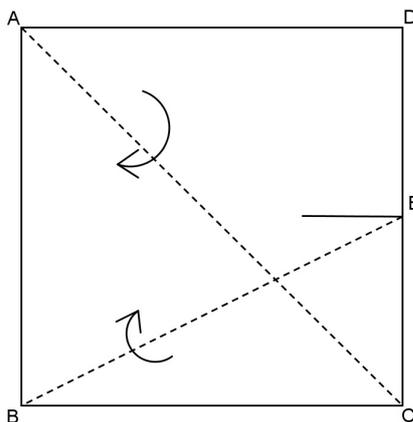


Figura 3.2: Duplicação - Passo 2

Passo 3:

Neste momento iremos dobrar a folha de tal forma que o lado do papel que contém os vértices A e D fique sobre o ponto de encontro das dobras anteriores. Após isto, dobraremos o outro lado do papel, o que contém os vértices B e C, de tal maneira

esses vértices fiquem situados exatamente sobre a dobra feita anteriormente pelos vértices A e D (figura 3.3).

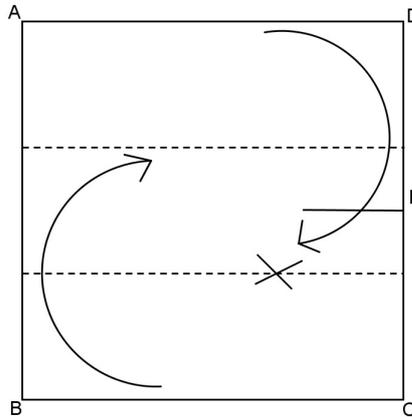


Figura 3.3: Duplicação - Passo 3

Passo 4:

Observando a dobra que se localiza acima do ponto E, iremos denominar como F o ponto que se situa sobre o lado que contém os vértices A e B, e como G o ponto que se situa sobre o lado que contém os vértices C e D. De forma análoga, iremos denominar como H o ponto que se situa sobre o lado que contém os vértices A e B, e como I o ponto que se situa sobre o lado que contém os vértices C e D, relativo a dobra localizada abaixo do ponto E.

Faremos uma dobra, neste momento, de tal forma que o vértice C fique situado sobre o lado da folha que possui os vértices A e B e, simultaneamente, o ponto I fique sobre a dobra que contém os pontos F e G (figura 3.4).

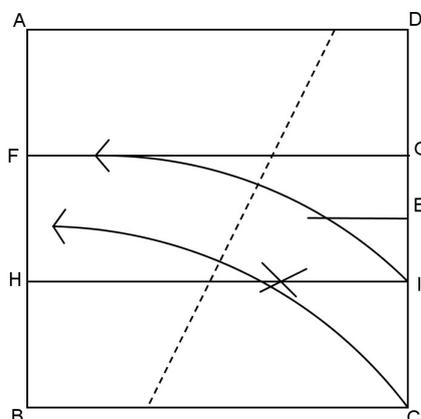


Figura 3.4: Duplicação - Passo 4

Ao fazer isto, temos que o vértice C divide o lado que contém os vértices A

e B em dois. A seguir, baseado nesta afirmativa, iremos mostrar algebricamente que a distância entre o vértice A e o vértice C será exatamente o valor que deverá ser multiplicado pelo lado do cubo para que o mesmo tenha seu volume dobrado (figura 3.5).

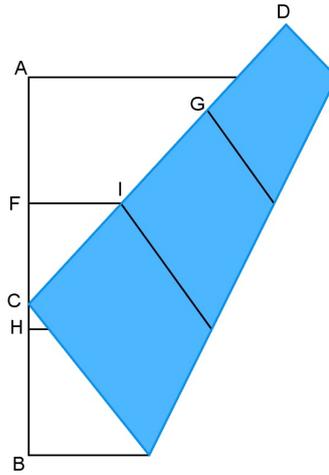


Figura 3.5: Duplicação - Passo 4

Observando cada etapa da construção, podemos notar que do passo 1 ao passo 3 foram utilizadas adaptações diretas da geometria plana para o origami. Até neste ponto, seria possível fazer todas as etapas utilizando os elementos de Euclides. O que impossibilita o resto da construção com os elementos de Euclides é o passo 4. Nele utilizamos o axioma **A6** de Huzita-Hatori:

Logo, podemos observar que utilizando apenas dobraduras, pautados nos axiomas de Huzita-Hatori, podemos descobrir um valor que multiplicado pelo lado do cubo irá fazê-lo dobrar de volume, como gostaríamos de encontrar.

Apesar de baseado em axiomas, muitas pessoas não conseguem acreditar na demonstração feita somente por dobradura. Por este motivo, além da construção por dobraduras já mencionada, será feita uma demonstração [10], através da Geometria Analítica, para ratificar a construção feita acima.

Demonstração:

Primeiramente, devemos desenhar um quadrado de lado s colocando o vértice B exatamente sobre a origem dos eixos ortogonais. Ao segmento \overline{BE} , que liga a origem ao ponto médio do lado \overline{DC} podemos afirmar que a sua equação da reta é $y = \frac{t}{2}$ (tendo em vista que a reta suporte do segmento \overline{BE} corta o eixo das ordenadas no ponto 0, seu coeficiente linear também será 0 e para encontrar o coeficiente angular basta fazer

$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{s}{2} - 0}{s - 0} = \frac{1}{2}$) e a diagonal \overline{AC} tem como equação $y = s - t$ (mais uma vez, a reta suporte do segmento \overline{AC} corta o eixo das ordenadas no ponto s logo seu coeficiente linear será s e seu coeficiente angular será $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_2} = \frac{0 - s}{s - 0} = -1$) (figura 3.6). Logo, para encontrar o ponto de encontro destes segmentos, basta igualar ambas as equações da reta. Sendo assim:

$$\frac{t}{2} = s - t \quad \therefore \quad \frac{3t}{2} = s \quad \therefore \quad t = \frac{2s}{3}$$

Com isto, notamos que o encontro entre os segmentos ocorrem a $\frac{2}{3}$ de \overline{AD} e, conseqüentemente, a $\frac{1}{3}$ de \overline{BC} . Logo, podemos concluir que nosso quadrado foi dividido em 3 partes iguais, já que por este ponto de encontro passa uma paralela a base, que foi denominado \overline{HI} , e refletindo esse segmento pelo ponto médio obtivemos \overline{FG} , que dista $\frac{1}{3}$ de \overline{AD} (figura 3.4).

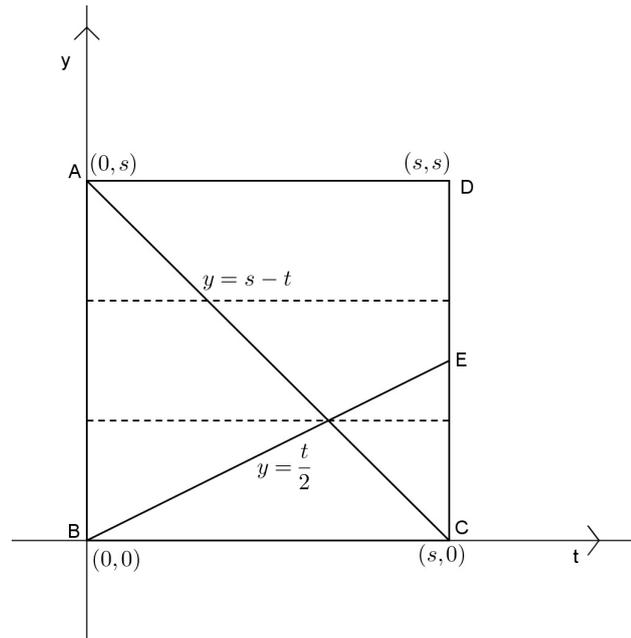


Figura 3.6: Demonstração 01

Vamos supor que a distância de C a B, na figura 3.7, meça 1 unidade de comprimento e que de A a C meça x unidades de comprimento. Também iremos supor que a distância de \overline{BJ} seja d unidades de comprimentos e, conseqüentemente, a distância de \overline{JC} mede $x + 1 - d$. Como visto anteriormente, o quadrado foi dividido em 3 partes iguais, logo \overline{CI} mede $\frac{x + 1}{3}$. Para descobriremos o quanto vale \overline{FC} , notamos que $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC}$, logo:

$$x = \frac{x+1}{3} + \overline{FC} \quad \therefore \quad \overline{FC} = \frac{2x-1}{3}$$

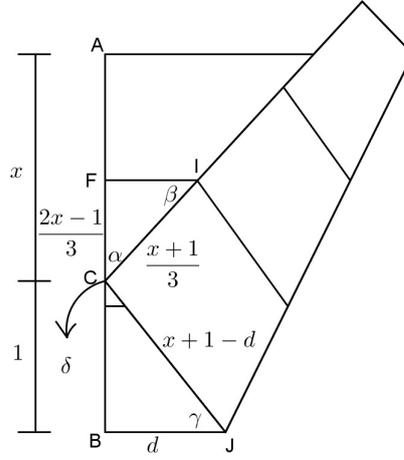


Figura 3.7: Demonstração 02

Observando o triângulo BCJ , notamos que o mesmo é retângulo de \overline{CJ} . Aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo, temos:

$$\begin{aligned} (x+1-d)^2 &= d^2 + 1 \\ x^2 + 2x + 1 - 2dx - 2d + d^2 &= d^2 + 1 \\ d(2x+2) &= x^2 + 2x \\ d &= \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \end{aligned}$$

Sejam $\angle BCJ = \delta$, $\angle BJC = \gamma$, $\angle FCI = \alpha$ e $\angle CFI = \beta$. Podemos afirmar que α e δ são complementares, já que o ângulo C é reto. Com isso temos que $\alpha = \gamma$, pois δ e γ também são complementares e temos que $\delta = \beta$ já que α e β também são complementares. Logo os triângulos FCI e BJC são semelhantes.

Como são semelhantes, então a razão entre dois lados correspondentes são iguais. Com isto, faremos a seguinte razão de semelhança: $\frac{\overline{BJ}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CI}}$ Logo:

$$\frac{d}{x+1-d} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}}$$

Substituindo o valor já encontrado de d na razão acima, teremos:

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{x+1-\frac{x^2+2x}{2x+2}} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Manipulando algebricamente, iremos obter:

$$\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2} = \frac{2x-1}{x+1}$$

Por fim, fazendo o produto dos meios pelo dos extremos, teremos:

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x = 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2x + 4x - 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

$$x^3 = 2$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

Como queríamos descobrir, \overline{AC} mede $x = \sqrt[3]{2}$, o que faz com que, qualquer valor que se atribua a aresta de um cubo, ao ser multiplicado por este valor, irá fazer com que o volume deste cubo dobre.

3.2 A trissecção do ângulo

A trissecção do ângulo é mais um dos clássicos problemas da geometria Euclidiana. Como já dito, por muito tempo tentaram resolver este problema, sem êxito, utilizando apenas régua não graduada e compasso, porém como tal problema é equivalente a resolução de uma equação cúbica, sabemos pelo trabalho de Wantzel [1] que tal solução não é possível. Contudo, esse problema pode ser resolvido usando-se dobraduras de papel (Origami), ou mais formalmente os axiomas de Huzita-Hatori. A seguir, veremos uma das mais belas e convincentes demonstrações que foi feita por Hisashi Abe [11] e foi publicada no Japão no início da década de 80.

Construção

Passo 1:

Sejam A, B, C e D os vértices de uma folha de papel quadrada. Seja P uma marcação qualquer sobre o lado que contém os vértices A e D do papel. Dobra-se o vértice A desta folha de forma que exista um segmento que una o ponto P ao vértice B. Logo, consideremos que o ângulo θ , menor do que 90° , seja o ângulo $\angle PBC$ (figura 3.8).

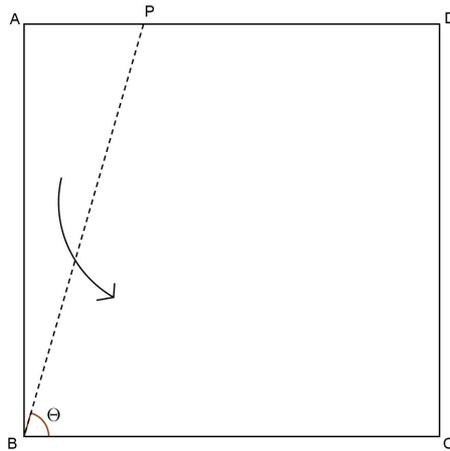


Figura 3.8: Trissecção - Passo 1

Passo 2:

Faça uma dobra no papel de forma que o vértice A fique sobre \overline{AB} e que o vértice D fique sob o lado \overline{CD} , devendo tomar o cuidado para que a dobra fique paralela ao lado \overline{BC} . Após fazer a dobra, desdobre o papel, e considere o novo segmento, paralelo ao lado \overline{BC} , o qual denominaremos de \overline{EF} (figura 3.9)

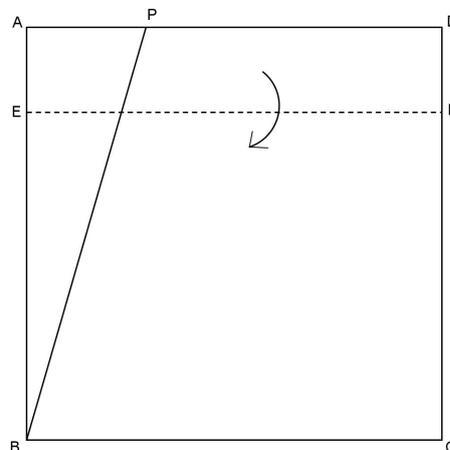


Figura 3.9: Figura Trissecção - Passo 2

Passo 3:

Agora iremos demarcar os pontos médios existentes entre os segmentos \overline{EB} e \overline{FC} . Para isto, teremos que dobrar o papel de forma que o vértice B encontre com o ponto E e o vértice C encontre com o ponto F. Denominamos \overline{GH} o segmento formado pelo encontro dos pontos médios de \overline{EB} e \overline{FC} (figura 3.10).

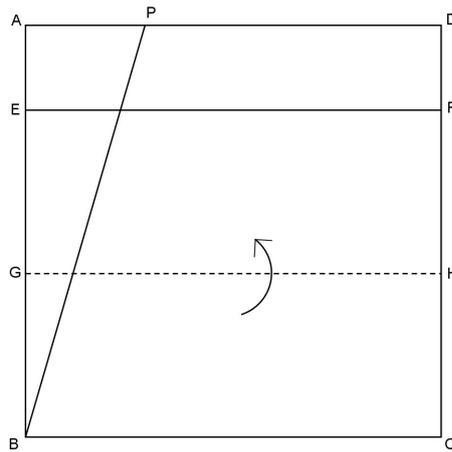


Figura 3.10: Trissecção - Passo 3

Passo 4:

Utilizando o axioma **A6** de Huzita Hatori, podemos fazer uma dobra de tal forma que o vértice B fique sobre o segmento \overline{GH} e o ponto E sobre o \overline{PB} (figura 3.11).

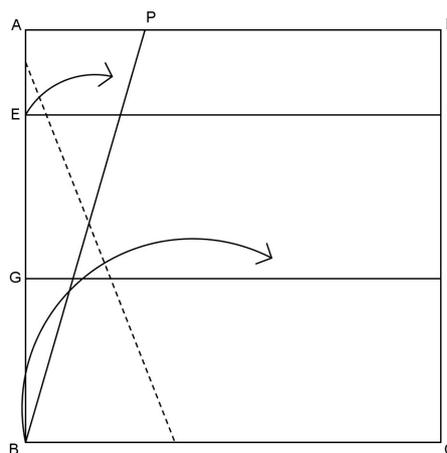


Figura 3.11: Trissecção - Passo 4

Passo 5:

Após a dobradura feita acima, não desdobre o papel. Será feito outra dobra-

dura que passe pelo ponto G e que seja paralelo a base do triângulo criado. Devemos ter uma atenção maior com esta dobra, pois no local que a mesma encontra com o lado \overline{AD} teremos o ponto J (figura 3.12).

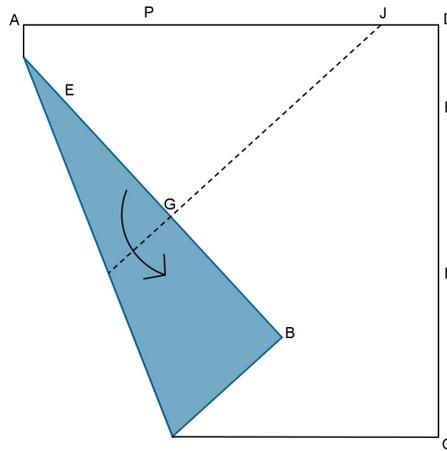


Figura 3.12: Trissecção - Passo 5

Passo 6:

Terminado este processo, desdobre a folha completamente, fazendo com que a mesma fique totalmente aberta (figura 3.13).

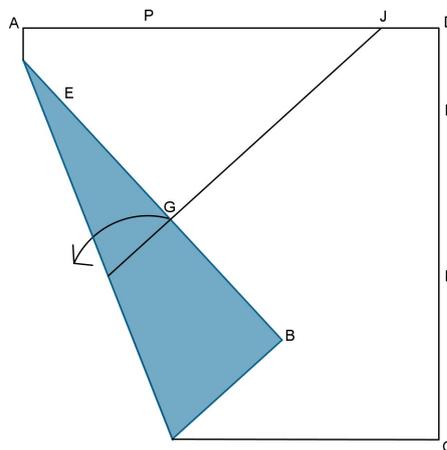


Figura 3.13: Trissecção - Passo 6

Passo 7:

Com a folha aberta, aproveite o vinco deixado pela dobra que originou o ponto J e a reforce, fazendo com que a mesma encontre o vértice B. Aproveite e faça outra dobra da forma que o lado do quadrado BC fique sobre \overline{BJ} (figura 3.14).

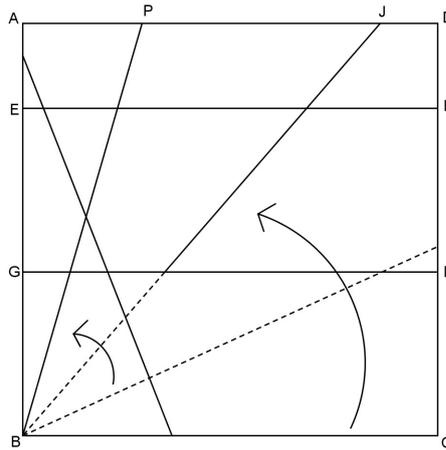


Figura 3.14: Trissecção - Passo 7

Passo 8:

O ponto de encontro da última dobra feita com o lado CD denominamos como ponto K. Ao término, observamos que o ângulo $\angle PBC$ foi dividido em outros três ângulos: $\angle PBJ$, $\angle JBK$ e $\angle KBC$ (figura 3.15).

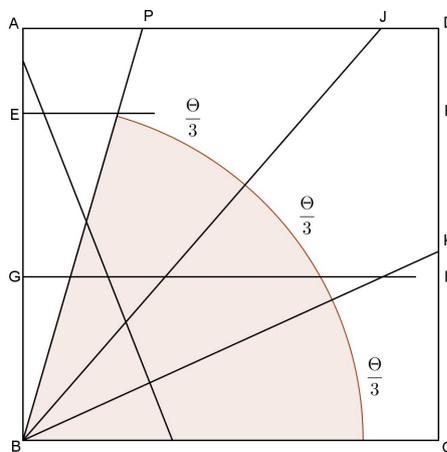


Figura 3.15: Trissecção - Passo 8

Considerando que todas as dobraduras foram feitas pautadas nos axiomas de Huzita-Hatori, concluímos que o ângulo foi dividido em outros três ângulos iguais, logo foi construído a trissecção do ângulo através do origami.

Não pode ser desconsiderado o fato de que foi escolhido um ângulo agudo, porém a mesma demonstração pode ser feita, para um ângulo obtuso, como afirmam Furuya e Cavacami [11] (p. 20): “Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar apenas no ângulo excedente a 90° e somá-lo à trissecção do restante.”

Como já feito na seção anterior, iremos fazer a demonstração [12] através da Geometria Euclidiana. Vale a pena ressaltar que a prova através do origami é uma demonstração concreta e válida da trisseção do ângulo, tendo em vista que os axiomas de Huzita-Hatori possuem correspondentes diretos na Geometria Euclidiana, como feito na seção 2 do capítulo 2.

Demonstração:

Primeiramente, vamos observar e analisar a figura 3.16.

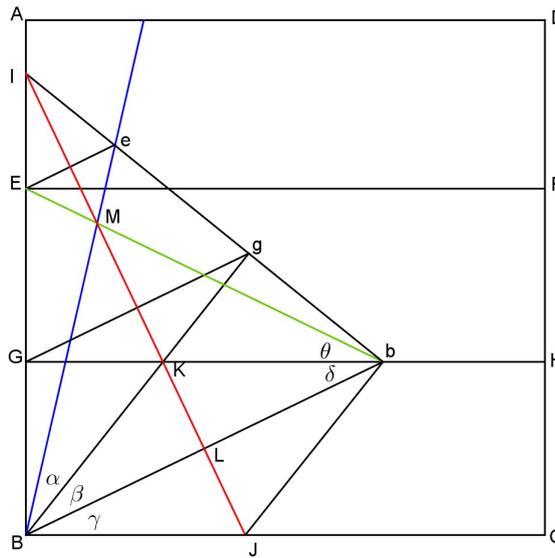


Figura 3.16: Demonstração

Definimos os pontos e , g e b como as projeções dos pontos E , G e B , respectivamente, após a dobradura feita na figura 3.12.

Como \overline{GH} é paralelo a \overline{BC} temos que $\gamma = \delta$ pois são alternos internos.

Vamos observar agora o triângulo IJb . Este triângulo é originado pela dobradura já mencionada. Logo este triângulo é congruente ao triângulo IJB , com isto temos que $\overline{IB} = \overline{Ib}$.

Observando agora os triângulos IBL e IbL temos que eles são congruentes, pois $\overline{IB} = \overline{Ib}$, \overline{IL} pertence a ambos os triângulos e L é o ponto médio de \overline{Bb} . Como os triângulos são congruentes e $\angle ILB$ e $\angle ILb$ são suplementares, logo cada um destes ângulos é reto, com isto $\angle ILB = \angle ILb = 90^\circ$.

Vamos observar agora os triângulos KLB e KLb . Podemos notar que \overline{KL} pertence a ambos os triângulos. Como visto acima, $\angle KLB = \angle KLb = 90^\circ$ e como L é o

ponto médio de \overline{Bb} , os triângulos são congruentes pelo caso Lado - Ângulo - Lado. Com isto, temos que $\beta = \delta$.

Neste momento, deveremos observar os seguintes triângulos: EGb e BGb . Por construção, sabemos que G é o ponto médio de \overline{EB} , logo temos que $\overline{EG} = \overline{GB}$. Como \overline{GH} é paralelo a \overline{BC} e \overline{BC} é perpendicular a \overline{AB} , conseqüentemente \overline{GH} é perpendicular a \overline{AB} , logo $\angle EGb = \angle Bgb = 90^\circ$. Também temos que o segmento \overline{Gb} pertence a ambos os triângulos e portanto podemos concluir que os triângulos são congruentes pelo caso Lado - Ângulo - Lado. Com isto, temos que $\theta = \delta$.

Por fim, vamos observar os triângulos MLB e MLb . Análogo aos casos anteriores, temos que segmento \overline{ML} pertence a ambos os triângulos, temos que $\angle MLB = \angle MLb = 90^\circ$ e que L é o ponto médio de \overline{Bb} . Com isto temos que os triângulos são congruentes pelo caso Lado - Ângulo - Lado. Portanto, $\alpha + \beta = \theta + \delta$. Porém, como temos que $\beta = \theta = \delta$, podemos concluir que $\alpha = \delta$.

Concluindo, temos pela transitividade que os ângulos α , β e γ são todos iguais a δ e portanto, são todos iguais entre si. Conseqüentemente, temos que $\angle eBJ$ foi dividido em três partes iguais.

4 Equações Cúbicas, Origami e o Método de Lill

Durante as aulas de Matemática ministradas em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, após os conteúdos de equações quadráticas e equações biquadradas serem ensinados, costuma-se ouvir uma pergunta com bastante frequência: “E as equações cúbicas?”. Fato é, que apesar da existência da fórmula de Tartaglia para resolução de tais equações, elas pouco aparecem no ensino básico. A solução de equações cúbicas geralmente se dá pela fatoração, ou seja, ou a equação já aparece na forma fatorada, ou uma raiz é encontrada por “inspeção visual”, e o aluno promove a fatoração. Além disso, o método de Tartaglia é eminentemente algébrico, e diferentemente da abordagem mais gráfica que geralmente é feita entre os zeros do gráfico de uma função quadrática e as soluções da equação correspondente, no caso de uma equação cúbica sua identificação com uma função cúbica, ou equivalentemente, um polinômio do terceiro grau é em muitos casos negligenciada, pois como sabemos uma apresentação mais apropriada do gráfico de uma função cúbica carece de conceitos que vão além dos currículos do ensino básico. Nesse sentido, acreditamos que o Origami, possa ser uma boa opção para introduzir a solução de equações cúbicas no ensino básico, porém não é a única.

A seguir, veremos um método gráfico para achar as raízes reais de uma equações cúbica com coeficientes reais, que nesse caso sabemos existir pelo menos uma, conhecido como Método de Lill, nome este dado em homenagem ao engenheiro austríaco Eduard Lill. Além disso, veremos como tal método está intimamente relacionado com dobraduras de papel [3].

4.1 O Quadrado de Beloch

Como já percebemos, o Origami se tornou, com o passar do tempo, uma fonte muito boa de técnicas para a solução de problemas geométricos, a exemplo dos dois problemas clássicos vistos nas seções anteriores. Segundo resgatado por Thomas Hull [3], um dos primeiros matemáticos a perceber a capacidade do Origami em resolver equações

de grau maior que 2 foi a italiana Margherita Beloch Piazzolla. Um de seus trabalhos foi denominado o Quadrado de Beloch e permite que se encontre a solução da equação $x^3 - 2 = 0$, isto é, construir $\sqrt[3]{2}$.

O Quadrado de Beloch, segundo encontramos em [3] é definido por: “*Sejam dois pontos, A e B , e duas linhas, r e s , no plano é possível construir um quadrado $WXYZ$, com dois vértices adjacentes, X e Y , sobre r e s , respectivamente, os lados WX e YZ , ou suas extensões, passando por A e B , respectivamente.*” Ilustremos essa construção.

Passo 1:

Em um pedaço de papel quadrado, marque dois pontos distintos, A e B . Após isto, faça uma dobra no papel de tal forma que tenhamos um ponto A' , este sendo o local onde o ponto A ficou após a dobra. Consideremos a dobra como a reta r (figura 4.1). Faça de forma análoga com o ponto B originando assim a reta s e o ponto B' . Ao segmento paralelo a reta r que contém A' , denominamos de reta r' e ao segmento paralelo a reta s que contém B' , denominamos de reta s' (figura 4.1).

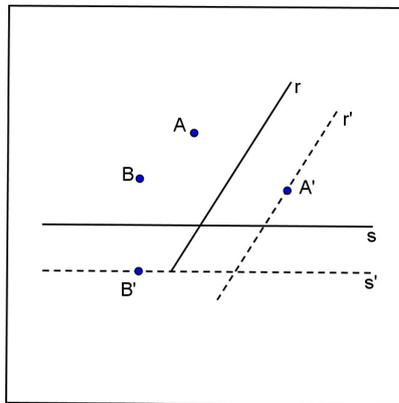


Figura 4.1: Beloch - Passo 1

Passo 2:

Utilizando o axioma **A6** de Huzita-Hatori, dobramos o papel de tal forma em que os pontos A e B encontrem, simultaneamente e respectivamente, as retas r' e s' . A estes novos pontos, denominamos A'' e B'' . (figura 4.2)

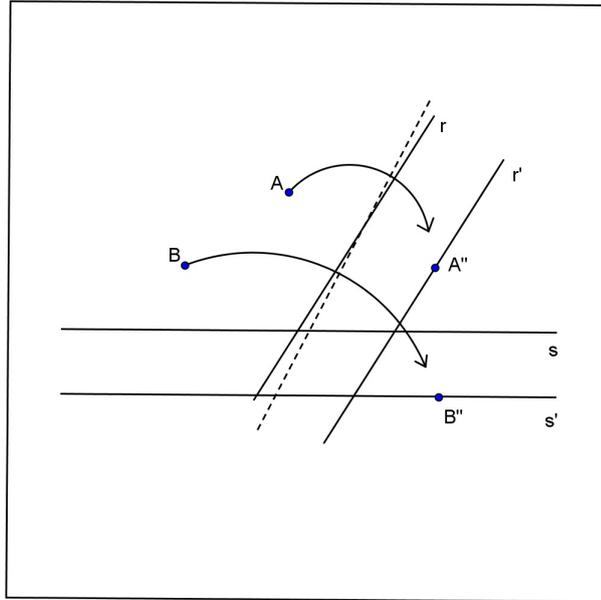


Figura 4.2: Beloch - Passo 2

Passo 3:

Ao dobrarmos o papel, percebemos que foi feito um vinco (na figura 4.2 está representado pela linha pontilhada.). Este vinco é exatamente a mediatriz de $\overline{AA''}$ e $\overline{BB''}$. Denominemos X e Y o ponto de encontro desta mediatriz com as retas r e s, respectivamente. Com isto temos que \overline{XY} é um dos lados do Quadrado de Beloch e que sendo \overline{AX} e \overline{BY} , ambos perpendiculares a \overline{XY} , podemos concluir que estes ou estão em lados opostos ou sobre as extensões do lado do Quadrado de Beloch. (figura 4.3)

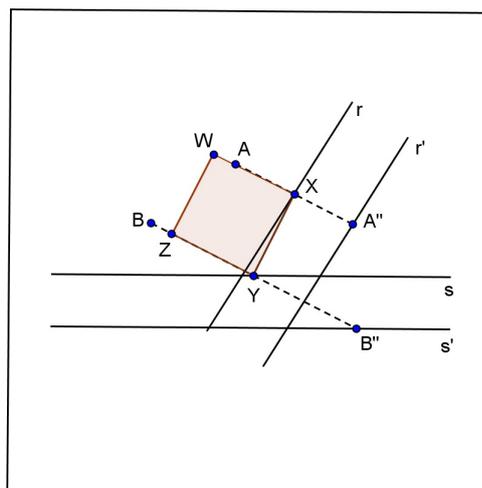


Figura 4.3: Beloch - Passo 3

4.2 Duplicação do Cubo – Uma nova abordagem

Agora iremos utilizar o quadrado de Beloch para encontrar o valor de $\sqrt[3]{2}$. Lembrando que encontrar este valor consiste, em outras palavras, conseguir dobrar o volume de um cubo. Logo este método também é uma forma de resolver o problema da duplicação do cubo. Ao contrário da solução usando somente dobraduras, vista anteriormente, a solução a seguir utiliza desde o início os eixos coordenados em sua argumentação. Mostraremos como construir $\sqrt[3]{2}$ com o auxílio do Quadrado de Beloch.

Passo 1:

Em uma folha de papel quadriculada, seja o eixo de coordenadas usual, onde o eixo das abscissas será a reta s e o eixo das ordenadas será a reta r do Quadrado de Beloch. Suponha que o ponto A esteja localizado em $(-1, 0)$, o ponto B localizado em $(0, -2)$, e que a reta r' seja $x = 1$ e que a reta s' seja $y = 2$. (figura 4.4)

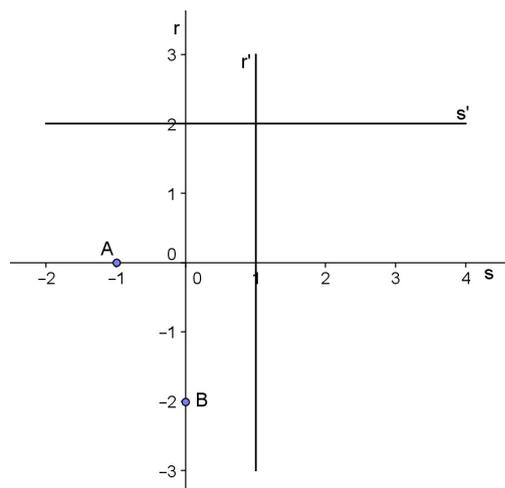


Figura 4.4: Duplicação do Cubo - Passo 1

Passo 2:

Dobre o papel de tal forma que o ponto A fique sobre a reta r' e o ponto B fique sobre a reta s' , simultaneamente. Esta dobra fará um vinco de tal forma que o seu encontro com a reta r será o ponto X e o encontro do vinco com a reta s será o ponto Y. Ao fazer este processo construímos o Quadrado de Beloch. (figura 4.5)

Ao observar a figura 4.5, podemos notar que os triângulos retângulos AOX, XOY e BOY são semelhantes, pois \overline{XY} é perpendicular aos segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$; com isto os ângulos AOX, XOY e BOY são retos, e como $\angle OXA$ e $\angle OXY$ são complementares temos que os ângulos OAX e OXY são congruos e, diretamente, $\angle OXA$ e $\angle OYX$ também

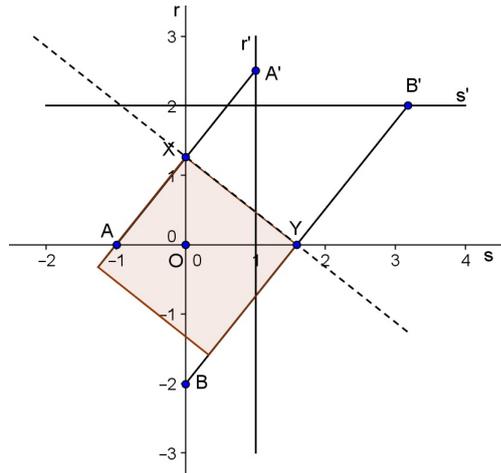


Figura 4.5: Duplicação do Cubo - Passo 2

são congruos. Analisando os triângulos OXY e OYB podemos concluir o mesmo, já que $\angle OYX$ e $\angle OYB$ são complementares. Logo $\angle OXY$ e $\angle OYB$ são congruos, de mesma forma que $\angle OYX$ e $\angle OBY$.

Desta forma, podemos concluir pela semelhança de triângulos que:

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OY}}$$

Como o ponto $A = (-1, 0)$ e o ponto $B = (0, -2)$, temos que $\overline{AO} = 1$ e $\overline{OB} = 2$. Logo, temos:

$$\overline{OX} = \frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} = \frac{2}{\overline{OY}}$$

Manipulando aritmeticamente estas igualdades, temos:

$$\begin{aligned} \overline{OX} &= \frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} \\ \overline{OX} \times \overline{OX} &= \overline{OX} \times \frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} \\ \overline{OX}^2 \times \overline{OX} &= \overline{OX} \times \frac{\overline{OY}}{\overline{OX}} \times \frac{2}{\overline{OY}} \\ \overline{OX}^3 &= 2 \\ \overline{OX} &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Com isto concluímos que a distância de \overline{OX} é exatamente igual a raiz cúbica de 2, valor que queríamos encontrar.

Beloch demonstrou desta forma como encontrar a raiz cúbica de 2. Podemos observar pelo raciocínio acima que se o ponto B for localizado em $(0, -k)$ o resultado obtido será $\overline{OX} = \sqrt[3]{k}$.

4.3 Resoluções de Equações Cúbicas

Para concluir e encontrar uma das raízes de uma equação cúbica, iremos, primeiramente, estudar um método gráfico antigo de resoluções destas equações, denominado como o método de Lill.

Suponha que a função polinomial $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ com coeficientes reais tenha pelo menos uma raiz real. O método de Lill sugere que encontremos esta raiz geometricamente, utilizando basicamente os coeficientes da função $f(x)$.

Para executar o método de Lill, deveremos sempre “partir” da origem dos eixos ortogonais (ponto O) seguindo algumas regras básicas:

- Escolher se primeiramente iremos nos deslocar em relação ao eixo x ou ao eixo y . Este trabalho sempre terá o movimento inicial em relação ao eixo x .
- Deslocar um valor equivalente ao coeficiente a_n .
- Após este deslocamento, fazer um movimento de rotação de 90° em sentido anti-horário.
- Deslocar um valor equivalente ao coeficiente a_{n-1} .
- Após este deslocamento, fazer um movimento de rotação de 90° em sentido anti-horário.
- Repetir este processo até deslocar-se um valor equivalente ao coeficiente a_0 . Este local será considerado o ponto T .

Caso algum coeficiente seja zero, não haverá deslocamento, porém deve existir a rotação de 90° e caso algum coeficiente seja negativo deve-se fazer o trajeto normalmente até o termino no coeficiente a_0 . Após isto, observar todos os coeficientes negativos e refleti-los em relação ao ponto de origem daquele segmento, obtendo assim uma reflexão da figura quando o coeficiente for negativo. Observe as figuras 4.6 e 4.7:

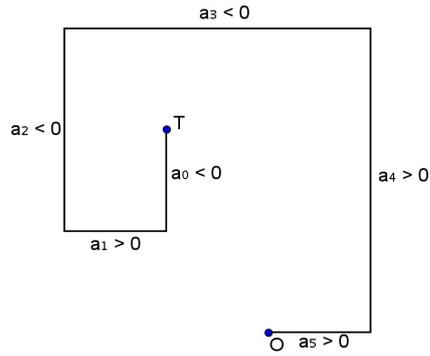


Figura 4.6: Trajeto com todos os coeficientes positivos

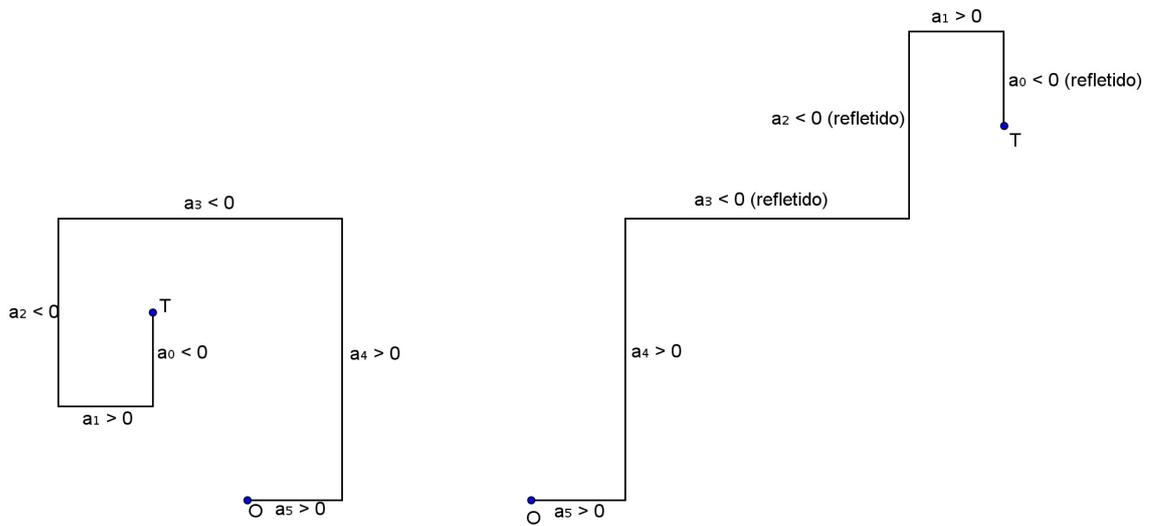


Figura 4.7: Trajeto com alguns coeficientes negativos

Após descrever este trajeto, iremos traçar segmentos, partindo do ponto O , que sempre encontre outro coeficiente, tomando cuidado para que sempre este segmento seja ricocheteado com um ângulo reto, até encontrar o ponto T . Observe a figura 4.8.

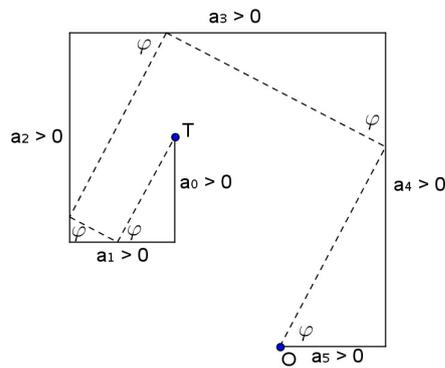


Figura 4.8: Perpendiculares

Podemos observar que com este segmento formamos vários triângulos retângulos; estes todos semelhantes já que obrigatoriamente o ângulo para ricochetear o segmento é reto. Logo, um ângulo pertencente a um triângulo teria que ser complementar com o ângulo pertencente ao outro triângulo, fato que deve existir entre os ângulos internos dos triângulos retângulos.

Caso o trajeto possua coeficientes negativos, o desenvolvimento será o mesmo podendo no máximo ter que prolongar o coeficiente de tal forma que forme um ângulo reto no momento do ricocheteio.

Agora iremos fazer a demonstração do Método de Lill. Com efeito, afirmamos que $x = -tg(x)$ é raiz de $f(x)$ (**afirmativa 01**), onde φ é o ângulo formado pelas perpendiculares traçadas e pelos segmentos formados pelos coeficientes (figura 4.8).

Esta demonstração irá considerar apenas os coeficientes positivos e foi retirada, em sua íntegra, de [3]. Como já observado, o segmento criado é a hipotenusa de triângulos retângulos semelhantes. Denominaremos como y_n o cateto oposto ao ângulo φ , relativo ao triângulo que é formado pelo coeficiente a_n . Baseado nisto, podemos afirmar que:

$$y_n = (\tan \varphi)a_n, \text{ pela } \mathbf{afirmativa 01}, \text{ podemos substituir, ficando então } y_n = -xa_n$$

$$y_{n-1} = (\tan \varphi)(a_{n-1} - (-xa_n)) = -x(a_{n-1} + xa_n)$$

$$y_{n-2} = (\tan \varphi)(a_{n-2} - (-x(a_{n-1} + xa_n))) = -x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))$$

Fazendo de forma recorrente, teremos:

$$y_1 = -x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))\dots))$$

Caso tenhamos $y_1 = a_0$, ao substituirmos na expressão acima e, após arrumá-la teremos exatamente $f(x) = 0$. Caso não exista nenhum valor de φ para conseguirmos “chegar” no ponto T , ricocheteando os segmentos, podemos concluir que $f(x)$ não possuirá raízes reais.

Mas será que existe alguma relação entre o Quadrado de Beloch e o Método de Lill? A resposta segundo encontramos em [3] é afirmativa. Para isto basta substituirmos, no método de Lill o ponto O pelo ponto A , do Quadrado de Beloch e, de forma análoga, o ponto T pelo ponto B . Ainda temos que o segmento que contém o coeficiente a_1 será a reta r e o segmento que contém o coeficiente a_2 será a reta s . Ou seja, ambas construções são essencialmente as mesmas. Segundo Thomas C. Hull, temos então que: *Portanto, este tipo de dobra pode ser utilizado para executar o método de Lill no caso cúbico e com isto*

resolver caso gerais de polinômios de grau 3. (Hull, 2011, p. 312, minha tradução)(figura 4.9).

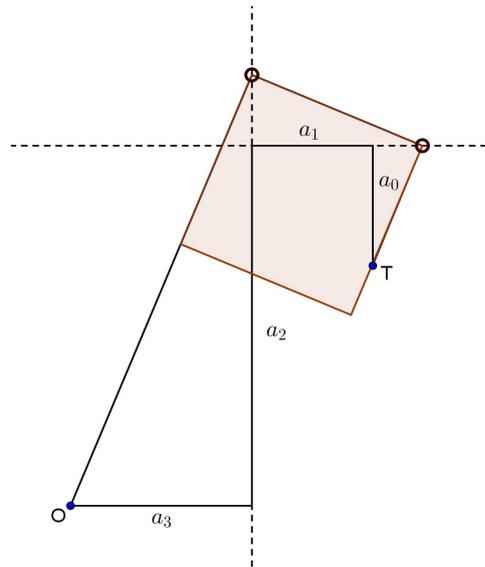


Figura 4.9: Quadrado de Beloch e Método de Lill

4.4 Exemplos do Método de Lill

Por muitas vezes ficamos ansiosos para comprovar alguma nova descoberta através de exemplos numéricos. Para muitas pessoas, em especial os alunos, uma explicação matemática só fica completa após a apresentação de alguns exemplos. E neste momento faremos isto. Apesar do trabalho ter sido direcionado para resoluções de equações cúbicas, primeiramente exemplificarei algumas equações quadráticas para, por fim, exemplificarmos as equações cúbicas.

Exemplo 1:

Quais as raízes da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$? Primeiramente, faremos o trajeto dos coeficientes da equação (figura 4.10):

Após, com a utilização de um software de Geometria Dinâmica (neste caso, o GeoGebra), traçaremos um segmento qualquer com origem em O e sua outra extremidade sobre o segmento originado pelo coeficiente a_1 . Deste encontro temos o ponto E (figura 4.11).

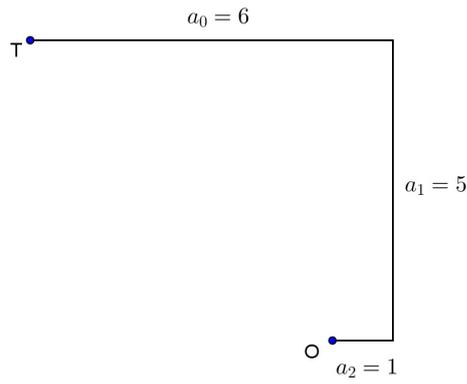


Figura 4.10: Trajeto - Exemplo 01

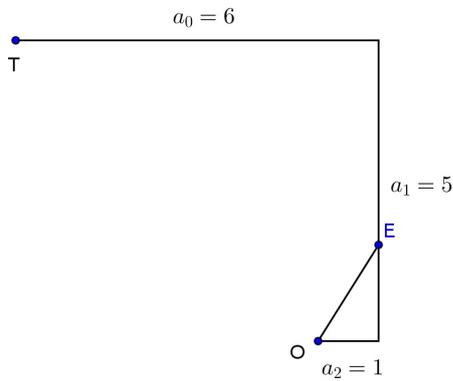


Figura 4.11: Perpendicular 01 - Exemplo 01

Pelo ponto E , iremos traçar uma perpendicular em relação a \overline{OE} e iremos analisar o encontro desta com o segmento originado pelo coeficiente a_0 . Neste momento, utilizando a facilidade proporcionada pelo Software, iremos movimentar o ponto E , verticalmente, de tal forma que a reta perpendicular traçada sobre ele encontre o ponto T (figura 4.12).

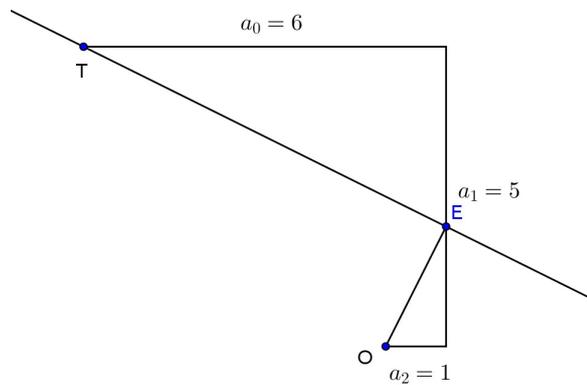


Figura 4.12: Perpendicular 02 - Exemplo 01

Mais uma vez utilizando o Software de Geometria Dinâmica, encontraremos o ângulo formado por \overline{OE} e o segmento originado pelo coeficiente a_2 (figura 4.13).

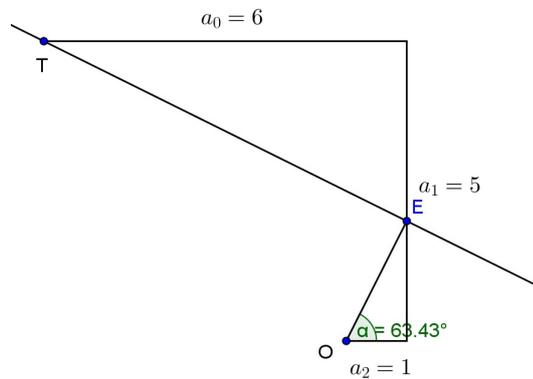


Figura 4.13: Ângulo 01 - Exemplo 01

Como já dito, uma das raízes da equação será dada por $x = -\tan \alpha$. Utilizando o Geogebra, foi digitado em seu campo de entrada de dados o comando: $f = -tg(\alpha)$ e obtivemos, na janela a esquerda, o valor desta operação: $f = -2$ (figura 4.14).

Como a equação é do 2º grau, podemos ter uma segunda raiz. Para verificarmos a existência desta segunda raiz, devemos tentar encontrar outra perpendicular, diferente da primeira, que encontre o ponto T . De forma análoga ao passo a passo acima, temos a solução direta na figura 4.15.

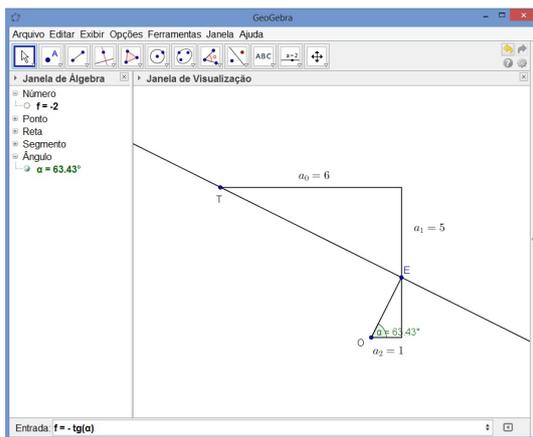


Figura 4.14: 1ª Raiz - Exemplo 01

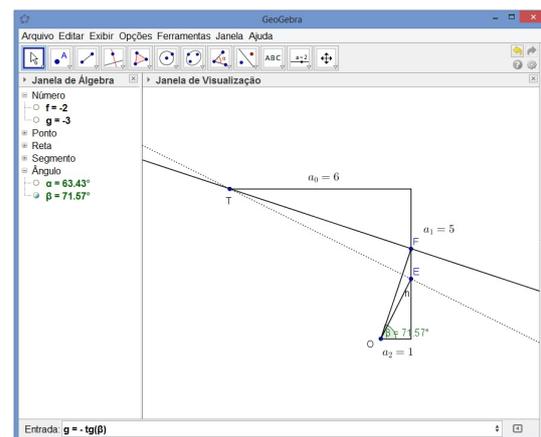


Figura 4.15: 2ª Raiz - Exemplo 01

Logo, podemos notar que $x_1 = f = -2$ e $x_2 = g = -3$ são raízes desta equação. Para confirmar isto, podemos apenas aplicar estes valores em $x^2 + 5x + 6 = 0$ e verificarmos que o resultado será zero.

Vejam os:

$$x^2 + 5x + 6 \text{ para } x_1 = -2$$

$$(-2)^2 + 5(-2) + 6$$

$$4 - 10 + 6 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 \text{ para } x_2 = -3$$

$$(-3)^2 + 5(-3) + 6$$

$$9 - 15 + 6 = 0$$

Com isto, comprovamos que os valores são realmente raízes da equação.

Exemplo 2:

Quais as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$?

A resolução deste exemplo segue rigorosamente os mesmos passos do exemplo anterior, diferenciando apenas no que se trata da construção das perpendiculares. Como estamos trabalhando com uma equação cúbica, teremos um trajeto formado pelos 4 coeficientes da equação, logo precisaremos traçar duas perpendiculares para que esta encontre o ponto T. Logo, ao traçar a primeira perpendicular, como foi traçada no exemplo anterior, teremos um ponto de encontro desta com o segmento formado pelo coeficiente a_1 . Por este ponto traçaremos outra perpendicular. Após isto, ficaremos manipulando, com o Geogebra, o ponto de encontro do segmento criando a partir de O com o segmento formado pelo coeficiente a_2 , até a segunda perpendicular encontrar com o ponto T . Após isto procedemos, novamente, como no exemplo anterior.

Com isto, temos as seguintes soluções para esta equação cúbica (figuras 4.16, 4.17 e 4.18):

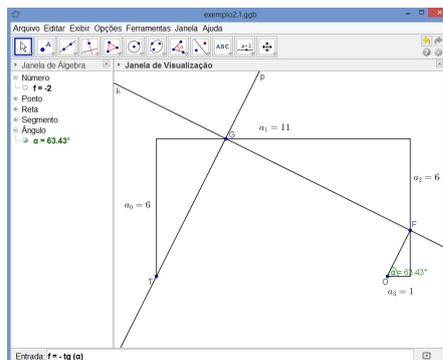


Figura 4.16: 1ª Raiz - Exemplo 02

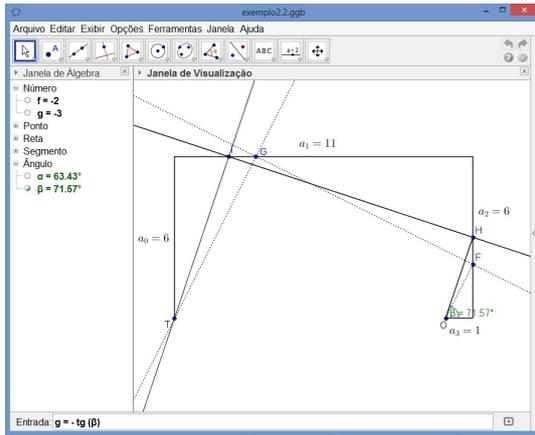


Figura 4.17: 2ª Raiz - Exemplo 02

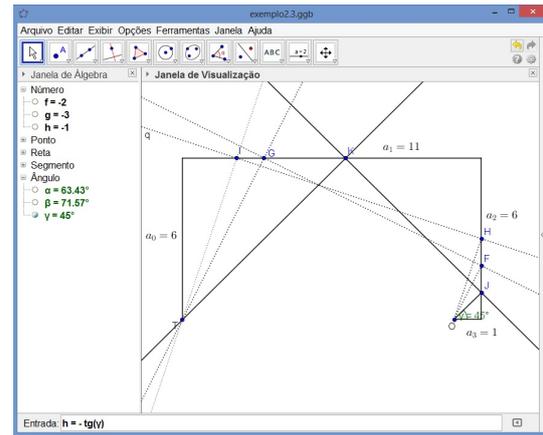


Figura 4.18: 3ª Raiz - Exemplo 02

Logo, podemos notar que $x_1 = f = -2$, $x_2 = g = -3$ e $x_3 = h = -1$ são raízes desta equação. Como fizemos no exemplo anterior, novamente vamos comprovar algebricamente que estes são as raízes da equação cúbica.

Vejamos:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \text{ para } x_1 = -2$$

$$(-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6$$

$$-8 + 24 - 22 + 6 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \text{ para } x_2 = -3$$

$$(-3)^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6$$

$$-27 + 54 - 33 + 6 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \text{ para } x_3 = -1$$

$$(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$$

$$-1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

Com isto comprovamos algebricamente que estes valores encontrados pelo método de Lill são as raízes desta equação cúbica.

5 Considerações Finais

Ao realizar este trabalho, pude relacionar diretamente a Matemática com a Arte, aqui representada pelo Origami. Enxerguei um vínculo existente entre a dobradura, como uma representação geométrica de objetos e situações e a matemática, por muitos, considerada como externa ao ser humano. Com isto pude notar que mesmo sendo processos completamente distintos podem estar diretamente ligados.

Através de minha pesquisa, pude estabelecer uma ligação biunívoca entre as construções geométricas, tanto as que utilizavam réguas não graduadas e o compasso quanto aquelas que são impossíveis fazer com tais objetos, e as dobraduras. Ao relacionar, diretamente, os axiomas de Huzita-Hatori com os elementos da Geometria Euclidiana, notei que o processo de construção do origami possui uma ligação direta com os conceitos geométricos, algo que fica implícito para muitos e que, se utilizado com sabedoria, pode fazer com que muitos alunos comecem a compreender e se interessar cada vez mais por este ramo da matemática que é a geometria.

Referências Bibliográficas

- [1] Pierre WANTZEL. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec règle et compas*. Journal de Mathématiques, 1837.
- [2] Roger ALPERIN; Robert LANG. *One, Two, and Multi-Fold Origami Axioms*. <http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf>, 2006.
- [3] Thomas C. HULL. *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill*. The Mathematical Association Of America, Monthly 118, 2011.
- [4] Robert LANG. *The Compleat Book of Origami*. New York: Dover Publications, Inc., 1988.
- [5] Robert LANG. *Origami Design Secrets*. New York: Taylor e Francis Group, LLC, 2012.
- [6] Grazielle RANCAN. *Origami e Tecnologia: Investigando possibilidades para ensinar Geometria no Ensino Fundamental*. Porto Alegre - PUC/RS, 2011.
- [7] R. G. do RÊGO; R. M. RÊGO; S. J. GAUDÊNCIO. *A Geometria do Origami*. João Pessoa - PA, 2003.
- [8] Liliana MONTEIRO. *Origami: História de uma Geometria Axiomática*. Lisboa - Portugal, 2008.
- [9] Laszlo BARDOS. *CutOutFoldUp*. <http://www.cutoutfoldup.com/409-double-a-cube.php>, 2012.
- [10] Liz NEWTON. *Power of Origami*. <http://plus.maths.org/content/os/issue53/features/newton/cube>, 2011.
- [11] Yolanda K. S. FURUYA; Eduardo CAVACAMI. *Explorando Geometria com Origami*. www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf, 2009.
- [12] Liz NEWTON. *Power of Origami*. <http://plus.maths.org/content/os/issue53/features/newton/angle>, 2011.