UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MICHEL SILVA MARQUES

A MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Uma Proposta de Ensino para o Desenvolvimento da Educação Financeira

São Luís - MA
2019

MICHEL SILVA MARQUES

A MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: Uma Proposta de Ensino Para o Desenvolvimento da Educação Financeira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos.

São Luís - MA

2019

Marques, Michel Silva.
A matemática financeira na educação básica: uma proposta de
ensino para o desenvolvimento da educação financeira / Michel Silva Marques.
- São Luís, 2019.
... f

Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadualdo Maranhão,
2019.

Orientador: Prof. Dr. Roberto dos Santos Batista.

1.Matemática financeira. 2.Letramento financeiro. 3.Educação básica. I.Título

.
CDU: 51:[336:37]

MICHEL SILVA MARQUES

A MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos.

Aprovada em: 19 de Dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Santos

Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos - UEMA

Orientador

Guilherme Luiz de Oliveira Neto

Prof. Msc. Guilherme Luiz de Oliveira Neto - IFPI

Prof. Dr. João Coelho Silva Filho - UEMA

São Luís - MA

2019

Dedico este trabalho à minha Família: meus pais, esposa e filhos por estarem presentes em toda essa árdua jornada, me apoiando em todos os meus passos e decisões

Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais, minha esposa, Thainana Marques e meus filhos, Isaac Marques e Sofia Marques.

Aos colegas do PROFMAT, Celso Berredo, Jálio, Washington, Felipe, Natanael Carvalho, Nathanael Barreto, Eric, Adriano, Giuliano, Anacleto e Carlindo Lisboa pelo apoio na pesquisa e companheirismo.

Às escolas que participaram da pesquisa e estão elencadas no anexo desse trabalho e Especial às professoras Alexandrina e Regina funcionária da Escola CINTRA.

Agradeço à coordenação local do PROFMAT-UEMA, prof Dr. João Coelho Filho e aos meus professores do curso do Mestrado, em especial a professora Celina e Lélia.

Agradeço ao meu orientador Prof. Roberto Batista que foi fundamental na realização deste trabalho.

Agradeço aos professores participantes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e esperado: Prof. Guilherme e prof. João Coelho.

"Juros compostos é a oitava maravilha do mundo.

Quem entende, ganha. Quem não entende, paga."

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho propõe apresentar a matemática financeira não de forma pontual, mas de forma transversal com temas mais usuais do ensino médio, como o estudo de funções e progressões que são insumos essenciais na modelagem matemática na área financeira. Neste trabalho, destaca-se a importância da Base Curricular Nacional Comum (BNCC) na orientação da educação financeira na educação básica, apresentando habilidades e competências para o desenvolvimento do aluno quanto do ensino da matemática financeira. Além disso, será exposto como a matemática contribui para o letramento financeira para a construção do cidadão mais consciente financeiramente e, para isso, foi elencado problemas de matemática financeira do ENEM com alternativas de soluções e uso de tecnologias digitais. Como forma de melhor fundamentar sobre a temática do trabalho foi desenvolvido uma pesquisa na qual participaram os alunos egressos e não-egressos do programa PROFMAT e alunos das escolas onde os alunos do PROFMAT atuam como professores e que auxiliam na pesquisa junto aos seus alunos com intuito de mapear o domínio da matemática financeira.

Palavras Chave: Matemática Financeira. Letramento Financeiro, Finanças.

ABSTRACT

One of the challenges of the basic education math teacher is to transmit financial knowledge with the aid of financial mathematics, transforming the classroom content into something experienced by the student on a daily basis. This paper proposes to present the financial mathematics not in a punctual way, but in a transversal way with the most common high school subjects, that is, to link, for example, with the study of the functions or progressions that are essential inputs in the mathematical modeling in the financial area, as suggested by the National Curriculum Base (BNCC). In addition to this proposal will be exposed how financial mathematics contributes to the financial literacy and the construction of the most financially conscious citizen, and for this, ENEM problems and other issues with alternative solutions and use of digital technologies were listed. In this learning process, financial mathematics is part of Financial Education, that is, it does not, by itself, train students with more assertive financial decision-making skills, but enables them to have a more critical view of the evolution of money over time and alternatives. about solving finance problems when it comes to financial management. To better understand how financial mathematics does is experienced by teacher and student, a survey has been conducted in several schools where teachers of the PROFMAT program teach to map student and teacher profiles in Financial Education and the measurement of financial math mastery

Keywords: Financial math; Financial literacy; finances

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

A matemática financeira tem como o propósito fundamental, a análise do valor do dinheiro no tempo por meio do estudo de duas variáveis: o tempo e taxa de juros. A sua aplicação deverá estar relacionada a situações cotidianas que tange aos cálculos financeiros, como comprar, vender, investir, antecipar ou não pagamento, escolher a taxa de juros, tipo parcelamentos e tantas outras aplicações que se mostram no nosso dia a dia e que pode nos auxiliar no interesse e compreensão das decisões financeiras. Podemos afirmar que ela está presente nas operações comerciais e em todas as operações financeiras e todos nós a utilizamos mesmo que de forma inconsciente. O conhecimento financeiro é imprescindível para uma boa gestão financeira dos recursos afim de evitar perdas financeiras como Bauer (2003) afirma:

> "(...) operações financeiras e a grande variedade de formas diferentes de efetuar aplicações e conseguir recursos, precisamos de muita agilidade e conhecimento financeiro para proporcionar ganhos e evitar gastos desnecessários, que comprometem a saúde financeira pessoal e empresarial, bem como conseguir o melhor resultado financeiro". (BAUER, 2003, p. 17)

De acordo com Ferreira (2014) a matemática financeira não é nenhuma técnica destinada somente ao cálculo dos juros simples e compostos, mas uma ciência que se ocupa em analisar os fenômenos econômico-financeiros à luz quantitativos ou mensuráveis com intuito de subsidiar uma análise no fornecimento de modelos e processos eficientes na solução de problemas relacionados à tomada de decisão pessoal, empresarial e governamental.

Segundo Sá (2009) na matemática financeira o fundamental dela é o estudo do valor do dinheiro no tempo e que tal conceito é negligenciado pela maioria das pessoas. E essa negligencia associada a falta de planejamento financeiro pode ocasionar risco e desequilíbrio financeiro. Sabe-se que hoje a educação financeira não pode estar dissociada do conhecimento da matemática financeira, pois a visão crítica de todo cenário do mercado financeiro, seja na posição de credor ou devedor passa pela compreensão da construção do custo do dinheiro no tempo, na capacidade de pagamento, na comparação de situações (pagar à vista ou a prazo), por exemplo. A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) sinaliza a importância da exploração do assunto de matemática financeira no ambiente escolar e ela definiu a educação financeira:

> "[...] é o processo pelo qual consumidores e investidores melhoram seu entendimento sobre os conceitos e os produtos financeiros e, através da informação, instrução e/ou conselhos objetivos, desenvolvam as habilidades e a confiança para conhecer melhor os riscos e as oportunidades financeiras, e assim tomarem decisões fundamentadas que contribuam para melhorar seu bem-estar financeiro". (OCDE, 2005, p.13).

Um dos desafios do professor de matemática da Educação Básica é transmitir o conhecimento financeiro com auxílio da matemática financeira, transformando o conteúdo de sala de aula em algo vivenciado pelo aluno no dia a dia, no entanto, o ambiente escolar não pode ser único responsável pela formação do aluno na educação financeira. Segundo Cerbasi (2015) os jovens devem participar na construção e no controle orçamentário doméstico, pois acredita-se que é uma forma eficiente de praticar a educação financeira e isto, estimula a adotarem decisões financeiras mais maduras. Dessa forma, a boa formação da educação financeira não deve ser uma responsabilidade total da escola, mas uma parceria escola e família para tornar o jovem um cidadão mais consciente sobre finanças.

E nesse contexto, Nasser (2010) comenta que a matemática financeira na grade do ensino médio garante o exercício pleno da cidadania, no que se refere a situações financeiras, aos jovens estudantes do ensino médio.

O presente trabalho gira em torno das questões norteadas com relação ao ensino da matemática financeira na educação básica, mostrando como se dá a construção do ensino de matemática financeira dentro da educação financeira. Diante desse quadro, tentamos responder algumas perguntas: As escolas têm atuado na capacitação dos alunos quanto a sua formação dentro de uma competência na área de finanças para tomada de decisões financeiras? O estudo está restrito ao uso das fórmulas nos cálculos de juros simples e compostos? Conhecer valores como taxa de juros, capital e montante é suficiente para interpretar situações em diversos contextos, sejam elas atividades cotidianas, ou questões socioeconômicas, mas gerais, divulgadas por diferentes meios? Para responder tais questionamento foi projetado no estudo de caso o mapeamento de alunos e professores, por meio de questionários, quanto ao ensino-aprendizagem da matemática financeira para o desenvolvimento da educação financeira pelo aluno. Mais especificamente, o objetivo deste trabalho é mostrar que o ensino da matemática financeira deve ser ensinado de forma transversal com os temas centrais do ensino médio como propõe a BNCC para a formação de um cidadão quanto ao letramento financeiro. E ele foi organizado com uma gradação que inicia com os conceitos fundamentais da matemática financeira, aspecto histórico, relação com vários assuntos da matemática básica, até o desfecho da pesquisa e análise dos resultados dos dados. De uma forma bem delineado resumiremos cada seção descrevendo seu teor essencial e objetivo dele.

Este trabalho esta dividido, além desta introdução que comenta sobre a conceituação e sua importância no desenvolvimento do letramento financeiro do aluno, em mais cinco capítulos.

No segundo capítulo, são apresentados os conceitos fundamentais da matemática financeira destacando as variáveis, tempo, juros, capital e valor futuro, para melhor compreensão da modelagem matemática a partir dos tipos de capitalizações - juros simples e compostos - e relatando de forma breve sobre o histórico dos juros.

No terceiro capítulo, apresentaremos a educação financeira na atualidade destacando pesquisas de instituições que objetivam promover a educação financeira, principalmente, na educação básica.

No quarto capítulo, será comentado sobre alguns temas ministrado no Ensino Médio, como estudo das funções e progressões no contexto da matemática financeira, sob a ótica da proposta do BNCC quanto ao ensino da matemática financeira.

No quinto capítulo, será apresentado uma prática pedagógica com aplicações de problemas de matemática financeira propondo alternativas de soluções contextualizadas e uso da calculadora financeira para melhor interpretação dos resultados.

No sexto capítulo, destacaremos o resultado de uma pesquisa aplicados aos professores que participaram do programa PROFMAT/UEMA e dos alunos do Ensino Médio de 20 escolas do Maranhão, onde esses professores lecionam. Nesta seção evidenciaremos a partir dos resultados sobre o conhecimento da matemática financeira do estudante do ensino médio e sua maturidade quanto ao conhecimento da educação financeira.

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1 Conceitos Fundamentais

A matemática financeira tem como objetivo central estudar o valor do dinheiro no tempo com perspectiva de analisar e estabelecer relações dos valores em datas distintas dentro de fluxo monetário, onde os valores apesar de iguais têm valores de poder de compra diferenciados.

Segundo Zentfraf (2002), sobre o valor do dinheiro no tempo:

> "... relaciona-se à ideia de que ao longo do tempo o valor do dinheiro muda, quer em função de sua desvalorização devido à inflação, quer em função da existência de alternativas de investimentos que possibilitarão o recebimento de alguma remuneração sobre a quantia envolvida".(ZENTRAF, 2002, p.02)

A matemática financeira para seu desenvolvimento depende de conhecimentos básico sobre matemática e finanças. No aspecto meramente matemático são construídos valores dentro do fluxo de caixa e com o auxílio do conhecimento de finanças, a matemática financeira torna-se ferramenta essencial na tomada de decisão financeira *ótima* que são aquelas que visam à maximização de riqueza dos investidores.

De acordo com Tosi (2009) sobre a matemática financeira:

> "A Matemática Financeira é o ramo da matemática que se ocupa do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo.Tem seu campo de atuação em atividades financeiras, como as de empréstimo, financiamento, aplicação e investimento, e seu principal objetivo é fornecer instrumentos matemáticos (fór-

> mulas, tabelas, gráficos, diagramas) que permitam a análise e a comparação dessas atividades e a tomada de decisão quanto a elas". (TOSSI, 2009, p.11)

Para que se possa entender como os valores são construídos ao longo do tempo matematicamente, faz-se necessário destacar conceitos básicos utilizados dentro da matemática financeira, para posterior construção das fórmulas matemáticas propriamente ditas.

Conceitos básicos de Matemática Financeira:

i. Juros;

ii. Taxa de juros;

iv. Capital;

v. Montante;

vi. Fluxo de Caixa.

2.2 Conceito de Juros

Os juros são propriamente ditos como a remuneração obtido ou pago do capital, uma espécie de aluguel, onde quem aluga é chamado de credor e quem remunera o capital é o tomador de crédito.

Dentro desse conceito Lima e Nishiyama afirmam que:

> "Pode-se definir o juro através da ótica do consumidor que decide realizar uma aplicação financeira.Para ele, o juro representa um "prêmio"pela postergação do consumo. Isto porque as pessoas preferem consumir no presente.Para adiarem seu consumo, isto é, para pouparem,exigem um prêmio, um benefício para desistirem de consumir no presente (LIMA e NISHIYAMA, 2007, p.07)

Os juros para o credor representa uma recompensa do sacrifício pelo não uso do dinheiro em um determinado período de tempo. E ele depende dos fatores: capital, taxa de juros, período de tempo e tipo de capitalização. Outra observação a ser feita dentro dessa ideia da remuneração do capital, é entender que mesma quantia recebida hoje ou no futuro não representam o mesmo valor, devido o valor de compra mudar na linha do tempo do fluxo de caixa. Segundo Assaf (2012), uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã.

2.3 Taxa de Juros

Taxa de juros é o coeficiente resultante da razão entre remuneração do capital e o capital em um determinado período e representado pela letra i (no inglês juros é chamado de interest). A taxa de juros sempre fará referência a uma unidade de período de tempo (mês, trimestre, semestre, ano, etc) e pode está expressada na forma unitária ou percentual, como por exemplo 0,20 ao ano ou 20% ao ano. A taxa percentual é a expressão mais usual no mercado financeiro e refere-se aos *centos* do capital, de forma que os juros é a representação para cada centésima parte do capital.

Para melhor entendimento da taxa percentual eis uma exemplificação:

Um capital de $R\$ \ 1.000,00$ aplicado a uma taxa de 5% ao mês rende juros ao final deste período:

Juro $= R\$ \ 1000,00 \times \frac{5}{100}$

Juro $= R\$ \ 10,00 \times 5 = R\$ \ 50,00$

O capital de $R\$ \ 1.000,00$ tem dez centos. Como cada um deles rende 5, a remuneração de todo o capital no período de um mês é de $R\$ \ 50,00 \, (5 \times 10)$.

A taxa unitária tem uma outra tradução, pois ela refere-se ao rendimento a cada unidade de capital. Temos 1.000 unidades de capital e a cada unidade o rendimento é de 0,05 (taxa unitária, $\frac{5}{100}$)), logo os juros serão o produto de $1000 \times 0,05 = 50$.

Diante disso, podemos relacionar a taxa percentual em unitária, bastando para isso, a divisão da notação em percentual por 100 (a Tabela 1, que apresenta 3 exemplos, faz relação entre taxa percentual e taxa unitária, relação essa de uso da fração decimal para determinação da taxa unitária).

Tabela 1: Taxa percentual × unitária

Taxa percentual	Taxa Unitária $\frac{i}{100}$
1,50 %	0,015
8%	0,08
25%	0,25

Fonte: O Autor

Vale destacar que em todas as fórmulas da matemática financeira os cálculos são normalmente efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros.

2.4 Capital

Capital é uma expressão usualmente utilizada dentro da matemática financeira para expressar o valor sem o acréscimo de juros, ele pode ser chamado de principal (P)[1] ou Capital inicial (C). Ele se caracteriza por não ter juros na sua composição. Identificar o capital dentro de um problema não é tão simples e requer do aluno uma boa interpretação, uma vez que o capital não é tão explicito no enunciado do problema. Por exemplo, o valor á vista é o capital, mas se houver entrada, o valor do capital será o valor á vista deduzido de entrada, que pode chamar de valor financiado.

[1]A letra "P"inicial da ideia de Principal, expressão muito usual que significa valor sem acessórios, ou seja, sem juros e taxa. Podemos alternar nesse trabalho entre a letra C que significa Capital ou P de Principal.

2.5 Montante

O Montante, expresso pelas letras M ou F[2], representa o valor futuro do capital a partir da taxa de juros dentro de um prazo determinado. Ele é dito como capital acumulado, sendo a soma do principal ou capital inicial no qual se adiciona os juros em determinado período. O seu resultado final dependerá do prazo, taxa de juros e do tipo de capitalização.

Vimos até o presente momento que a matemática financeira tem como objetivo estudar o valor do dinheiro no tempo a partir das variações dos movimentos monetários em tempos distintos. E para facilitar o entendimento desses movimentos monetários no tempo, a matemática financeira utiliza o do diagrama do fluxo de caixa para identificar as entradas e saídas de capital.

2.6 Fluxo de Caixa

Para estudar o valor do dinheiro no tempo a partir das variações dos movimentos monetários utiliza-se o diagrama do fluxo de caixa (Figura 1), onde se identifica a entrada e saída de capital no tempo.

Assaf (2012) sobre o uso do fluxo de caixa, afirma:

"O fluxo de caixa é de grande utilidade para as operações da matemática financeira, permitindo que se visualize no tempo o que ocorre com o capital".

Existem vários tipos de fluxo de caixa e na Figura 1 mostra um fluxo de caixa convencional, uma entrada e uma saída, onde a linha horizontal representa a escala de tempo, no seu início (data focal 0) encontra-se o capital inicial e o ponto final, o montante. Os sentidos das setas para cima e para baixo, registram a saída e entrada

[2] A letra "F"faz referência a ideia de Valor Futuro. Neste trabalho alternaremos entre a letra F e M que significa Montante.

Figura 1: Representação de um Fluxo de Caixa

Fonte: O Autor

de recursos, ou seja, setas para cima registram entrada de dinheiro no fluxo de caixa e para baixo saída de dinheiro na perspectiva do credor.

Zentigraf (2002) revela que o diagrama de fluxo de caixa tem grande importância em Finanças, pois a grande maioria dos problemas de matemática financeira tem sua resolução a partir de diagramas predefinidos e cabe ao analista a decomposição do diagrama original do problema em diagramas para os quais a solução esteja padronizada.

2.7 Tipos de Capitalização

Na matemática financeira os dois tipos de capitalização são chamados de: juros de capitalização simples e capitalização composta. Esses dois tipos se diferenciam pela formação dos juros na sua construção e incorporação ao capital de forma sucessivamente no decorrer do tempo.

Na metodologia de cálculo na capitalização simples, os juros de cada período são sempre calculados em função do capital inicial e comporta-se como uma progressão aritmética, crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Os juros simples, no mercado financeiro, tem aplicações práticas bastante limitadas. São raras as operações financeiras sob o regime de juros simples.

Na capitalização composta sua natureza é crescimento exponencial, chamada de "juros sobre juros", onde juros são calculados sempre em função do saldo existente no início de cada respectivo período. Essa modalidade de capitalização se baseia no modelo dos juros exponenciais.

De acordo com Ferreira (2014, p.26) ressalta as características básica da capitalização composta:

> (...) por "imposição inicial - poupador recebendo por períodos os rendimentos variáveis apenas sobre o capital inicial (P) -, o modelo não permite que o capital aplicado se agregue a nenhum rendimento surgido ao longo de qualquer período de capitalização para formar novos rendimentos. E, portanto, esse capital inicial junto aos rendimentos não "reproduz "o que se chama juros sobre juros". (FERREIRA, 2014, p. 26).

De acordo Nogueira (2008, p .18) os juros compostos, na área jurídica, é conhecido como "anatocismo":

"...a expressão antiga para designar juros sobre juros é anatocismo, e a expressão moderna para designar juro sobre juro é Juro Composto".

2.8 Breve histórico dos Juros

A matemática financeira é o ramo da aplicação da matemática com o propósito fundamental, analisar o valor do dinheiro no tempo por meio do estudo de duas variáveis: tempo e taxa de juros. Na Bíblia podemos ver registro do estudo fundamental da matemática financeira, no livro de Lucas 19.23 (Parábola das dez minas) na qual Jesus narra que um senhor delega a gestão de suas minas (equivale a $\frac{1}{2}$ quilo de prata) a dez servos, sendo que um deles apenas guardou e não gerou riqueza ao contrário dos outros, e então o Senhor deles falou: "Por que não puseste, pois, o meu dinheiro (mina) no banco para que eu, vindo, o exigisse juro?". Percebemos nesta passagem que o senhor deu dez minas a eles para que negociassem pelo período de sua ausência. Assim, verificamos que as dez minas deveriam ter outro valor durante este tempo de sua ausência, ou seja, nesta época era bem consciente a relação dinheiro e tempo. O dinheiro (assim como qualquer outra mercadoria), terá seu valor de acordo com a relação tempo versus taxa de juros. Lógico que o tempo e os juros poderão estar ou não explícitos numa negociação. Desta forma o estudo fundamental da matemática financeira é compreender como o dinheiro se comporta com o transcorrer do tempo.

Quando falamos de juro sempre associamos às operações de empréstimos e ele vem sempre discutido ao longo da história sobre uma polêmica desde a esfera religião até jurídica, no que tange sua forma de aplicação e valor a ser incorporado ao valor principal. E o sistema de empréstimo data desde a babilônia antiga com toda uma sofisticação de cálculo. Segundo FERGUSON(2009) na Babilônia Antiga todo credor esperava pagamento de juros que era um conceito construído muito provavelmente do crescimento natural de um rebanho de animais, e com crescimento a uma taxa que normalmente chegava a 20%.

Gonçalves[3] (2019) no seu artigo comenta sobre os juros na civilização babilônica:

[3]PITON-GONÇALVES Jean. A História da Matemática Comercial e Financeira. Disponível em: http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php. Acesso em: 22 out. 2019.

> "... Um dos primeiros indícios (juros) apareceu na já Babilônia no ano de 2000 a.c. [...] os juros eram pagos sob a forma de sementes ou de outras conveniência emprestadas.[...] já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.c., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobrada s pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comercio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos".

Sabe-se que existe relatos de juros no Código de Hamurabi na Babilônia, no Talmude, no Código de Justiniano, na Lei da XII tábuas em Roma, no regulamento do Banquete de France editado por Napoleão Bonaparte, no nosso código Civil Brasileiro de 1916 e na Bíblia, fontes essa que relatam sobre juros e em algum momento sua regulação.

O rei de Hamurabi que viveu entre os anos de 1728 -1686 a.C e foi fundador do primeiro império da Babilônia, exerceu considerável influencia sobre a legislação do Antigo Oriente ao criar o Código de Hamurabi, que estabelecia taxas diferente em empréstimos na comercialização de prata e grãos:

> "Se um mercador emprestou grão com juros: ele tomará por 1 GUR de grão... como juros. Se ele emprestou prata com juros: ele tomará por um ciclo de prata como juros de 1/6 de ciclos e seis grãos".

Segundo Baptista (2008) em referência ao juros do código de Hamurabi, afirma:

> "A preocupação do legislador é evitar a usura nos empréstimos. Alias, os textos babilônicos desta época nos mostram como era difícil extirpar o costume de emprestar com usura (...) e no empréstimos de prata, portanto, o limite máximo de juros permitido por lei era 20%".

De Acordo com Fergunson (2008) afirma que os exercícios matemáticos na época do reinado de Hammurabi os juros compostos poderiam ser usados no empréstimos de longo prazo e que o empréstimos deveria se fundamentar na credibilidade subjacente da promessa do devedor. Vale destacar que a ideia de credibilidade tem sua raiz na palavra crédito que tem sua origem em latim "credo"que significa "eu acredito". Uma curiosidade quanto aos tomadores de credito é que segundo o Código de Hammurabi os devedores eram anistiados de suas dividas após 3 anos, mas nem por isso os emprestadores (credores) eram desmotivados a emprestar. Algo parecido temos nos dias de hoje sobre dívidas não pagas com registro em órgão de restrição, onde após 5 anos o nome sai desses órgãos, mas a dívida, logico, permanecerá, pois não existe anistia da dívida.

Segundo Baptista(2009) na Grécia Antiga os juros variavam unicamente em função do mercado. E em Roma existia um limite no valor dos juros que segundo a LEI das XII Tábuas limitou primeiramente o valor a $8,3\%$ e posteriormente para 12% a.a.

O juro é resultante do tripé das variáveis (tempo, capital e taxa) e ele pode ser fruto de um crescimento linear, exponencial, ou uma combinação destes dois. A prática de considerar os juros foi utilizada durante a Antiguidade por vários povos. E na idade Média, o pensamento doutrinário da igreja cristã como instituição forte neste período onde foi coibida a cobrança de juros pela igreja católica, tendo por base principalmente no versículo do livro de Lucas no Novo Testamento Bíblico, 6.35 onde diz: ...emprestai, sem nada esperardes... Esta proibição fez com que se limitasse as atividades bancárias na sociedade medieval, visto que a igreja considerava imoral a cobrança de juros e com isso os cristãos se abstinham de exercer essas atividades, os judeus não lhes faziam qualquer restrição. Por isso, foram os primeiros a estabelecer casas bancarias, em vários países da Europa. A igreja não proibiu o comercio, apenas limitou a cobrança de juros nas transações comerciais. Mas o comercio das cidades europeias juntamente com o oriente fomentou o reaparecimento da moeda e as atividades bancárias que estão centradas em oferecer crédito em troca de juros.

Embora existissem doutrinas cristãs contra juros e empréstimos, não foi definitivamente exitosa visto que o renascimento comercial beneficiou o crescimento das atividade bancárias de acordo com o historiador Vicentino Cláudio:

> "Esse comercio (referindo-se ao as atividade comerciais entre as cidades europeias e as do oriente) possibilitou o retorno das transações financeiras, com o reaparecimento da moeda, o novo impulso à atividade creditícia e a entrada em circulação das letras de câmbio, realçando as atividades bancárias."(VICENTINO, 2002,p.141, grifo meu)".

Neste pensamento doutrinário da igreja católica que foi além das escrituras bíblicas e passou a ter apoio de pensadores na época da idade média que apoiaram esta instituição na qual era o elo entre os homens e Deus. Tais pensadores citavam para fundamentação de juros era injusto conforme Aristóteles defendia. De acordo com o relato de Guitton (1957 p.17) apud Nogueira [4](2008, p.45).

[4]Autor do livro Tabela Price: Mitos e Paradigmas

> "a reprovação da prática da usura pela igreja era resultante da continuidade do pensamento de Aristóteles. A idéia emanada pelo filósofo grego do "emprestar dinheiro, sem nada cobrar, pela amizade", foi substituída pelos canoístas pelo conceito do emprestar pela caridade, cuja base encontrava respaldo no novo testamento, especificamente em Lucas (VI, 34-35: Mutuum date nihil inde sperantes (emprestai sem nada esperardes)".

No antigo testamento época pré cristã o judeus já tinha uma preocupação com o juros que era permitido somente para pessoas foram da sua sociedade, ditos estrangeiros. Tal passagem encontra no livro de Deuteronômio 23:19-20:

> "não emprestarás com juros a teu irmão nem dinheiro, nem grão, nem outra coisa qualquer, mas somente ao estrangeiro. Ao teu irmão, porém, emprestarás aquilo de que ele precisar sem juro, para que o Senhor teu Deus te abençoe em todas as tuas obras na terra em que entrarás para a possuir".

Sobre a citação acima, podemos ainda discorrer que a cobrança de juros é uma pratica antiquíssima, não vinculada necessariamente ao dinheiro, podendo ser cobrada em cima de qualquer coisa, como por exemplo, grãos e outros produtos comercializáveis.

3 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

3.1 Educação Financeira na Atualidade

Atualmente se tem discutido sobre a necessidade da educação financeira estar presente na vida de todo cidadão, para que tenha um melhor planejamento financeiro. A Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil) que é uma organização da sociedade civil de interesse público vê a educação financeira como tema relevante para o desenvolvimento do país. Segundo ENEF[5] (2010), sobre a educação financeira:

> "O processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro"(Plano Diretor da Estratégia Nacional de Educação Financeira.

Nesse cenário, as instituições de promoção da educação financeira buscam difundir uma educação financeira e previdenciária como uso de tecnologias sociais e educacionais para que as pessoas tenham familiarização com os conceitos como poupar, planejar financeiramente, previdência de renda, ter uma melhor organização financeira

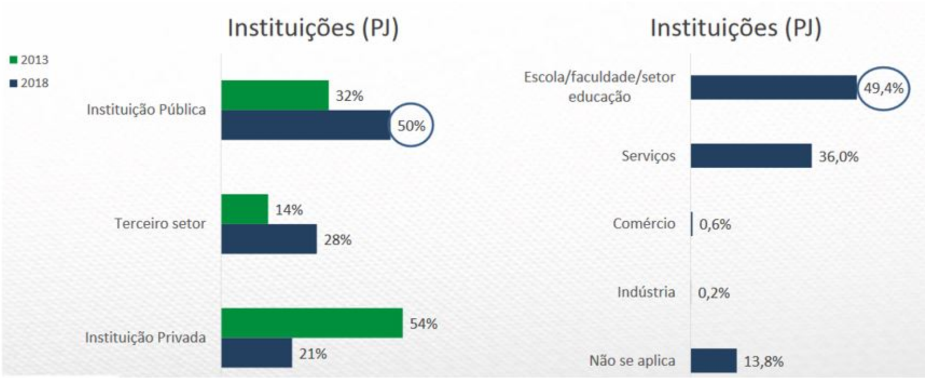
[5]Criada em 2010 pelo Governo Federal, a Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef) é voltada para dois tipos de públicos: Estudante da Educação Básica e os Adultos no que concerne ao ensino da Educação Financeira.

e um maior controle do dinheiro, consumo consciente para que se possa fortalecer a cidadania.

A ENEF tem papel hoje fundamental na formação cidadão quanto a educação financeira, pois de forma gratuita promove a educação financeira e previdenciária contribuindo assim no fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes de jovens e adultos.

O mapeamento de 2018 divulgado pela AEF - Brasil teve uma participação 1.383 iniciativas que promovem a educação financeira no país a partir de projetos e foi superior ao de 2013, o 1° mapeamento nacional onde foi identificado 803 ações entre escolas do ensino médio e universidades, públicas e privadas, associações, cooperativas e órgãos da iniciativa privada. Nesse mapeamento de 2018 as instituições publicas superaram em 2013 e com grande participação das escolas. Conforme Figura 2.

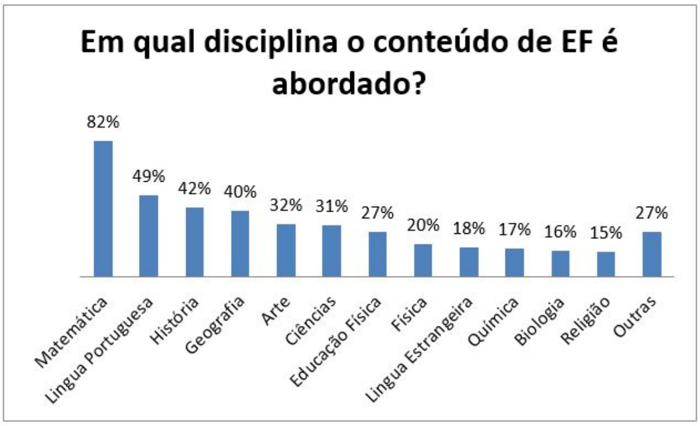
Figura 2: Projeto de Educação Financeira em Instituições Públicas/Privadas



Fonte: AEF-Brasil

Há de se destacar que a AEF - Brasil em 2018 divulgou um resultado sobre em qual disciplina a Educação Financeira é trabalhada e quem é a pessoal responsável por essa capacitação quanto ao letramento financeiro. E o resultado mostra que a disciplina Matemática tem um percentual bastante relevante sobre as outras disciplinas, na Figura 3, ou seja, evidencia nesse resultado que o professor de matemática geralmente é responsável pelo conteúdo de matemática financeira (ver Figura 3) e dentre os profissionais dentro da instituição de ensino o professor é o responsável maior, conforme Figura 4. Vale destacar que nesse estudo foi no universo das escolas, universidade e faculdades.

Figura 3: Educação Financeira nas disciplinas da educação básica



Fonte: AEF-Brasil

Figura 4: Agente responsável pela educação

Fonte: AEF-Brasil

O Banco Central do Brasil - BACEN, em 2015 em parceria com Serasa Experian e Ibope, efetuou uma pesquisa que teve como objetivo aferir o nível de educação e inclusão financeira da população, e em resumo destacamos 4 dimensões sobre os resultados: educação financeira, uso de produtos e serviços financeiros, decisões financeiras (atitudes), comportamento na área de finanças:

i. Educação Financeira: Nessa dimensão conhecimento na área financeira, num aspecto geral, o maior percentual de erros está concentrado em questões de matemática financeira, principalmente entre as mulheres.

ii. Uso de produtos e serviços financeiros: a pesquisa revelou que o cartão de crédito é o produto popular entre os entrevistados, seguido pelo carnê de lojas.

iii. Decisões financeiras (atitudes): Quanto à dimensão atitude as respostas em sua grande maioria indicam que as pessoas possuem uma atitude positiva frente às suas decisões financeiras

iv. Comportamento na área de finanças: os resultados indicam que a maioria não elabora orçamento familiar e não pesquisa as melhores taxas para contratação de serviços e produtos financeiros, além de não ter o hábito de poupar.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no ensino infantil e fundamental se propõe a educação financeira com disciplina transversal e que passará ser obrigatória a partir de 2020. Nessa metodologia a educação financeira deverá estar presente nas aulas de matemática, português, história e outras, no intuito de preparar os jovens para uma vida com mais consciência financeira sob a perspectiva econômico e financeira para melhor tomada de decisões.

De acordo com o resultado do PISA[6] em 2015 e cujo os dados foram disponibilizados pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o Brasil ficou em penúltimo no desempenho em competência financeira, onde 55% dos estudante brasileiros que participaram da pesquisa ficaram abaixo do mínimo exigido pela OCDE nessa competência.

[6]Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa)

Lusard e Mitchell (2014) destacam três conceitos que estão envolvidos nas decisões de poupança e investimento tomadas pelos consumidores. São eles:

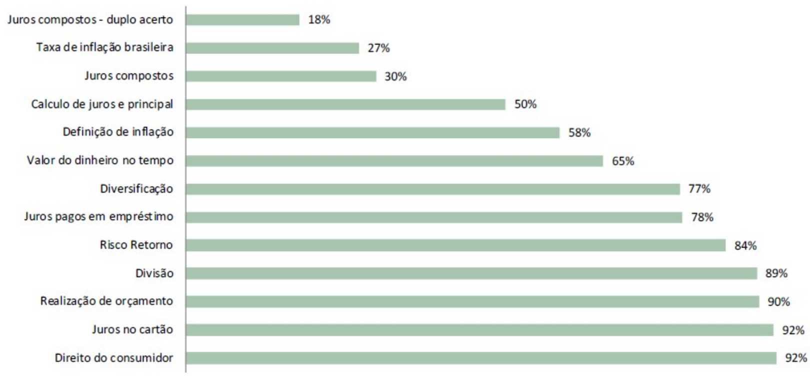
i. Conhecimento de matemática básica e capacidade de calcular taxa de juros simples e compostos;

ii. Entendimento de inflação;

iii. Entendimento de diversificação de risco.

Na pesquisa promovida pelo Bacen em 2015 constatou que as perguntas envolvendo matemática financeira teve maior quantidade de erros com relação aos perguntas que não envolvem habilidades em matemática financeira, conforme o Figura 5:

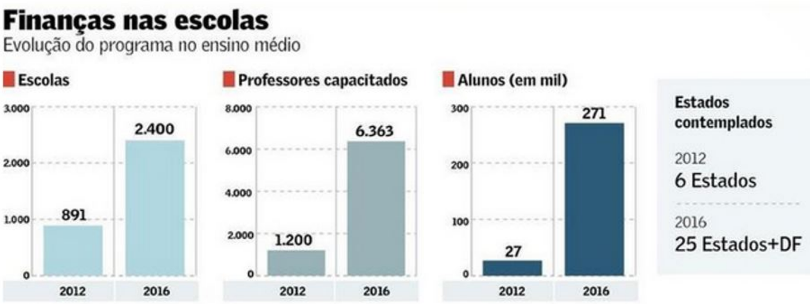
Figura 5: Pesquisa do BACEN para mensurar o domínio de matemática financeira e Educação Financeira



Fonte: Bacen

A AEF - Brasil divulgou sobre a evolução de programas de finanças nas escolas numa comparação de 2002 e 2016, onde verificamos que no universo escolar há uma tendência de evolução sobre desenvolvimento de estudos na área de finanças, tanto de professores quanto alunos, conforme Figura 6:

Figura 6: Finanças na Escola



Fonte: AEF-Brasil

4 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

4.1 A função afim no cálculo de juros simples

O assunto principal deste capítulo é o estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica dentro do ensino da matemática financeira, sem a pretensão de desenvolver propriedades, visto que o objetivo deste capítulo está em apresentar as funções mais usuais do ensino médio para uso nas resoluções de problemas de matemática financeira.

Iniciaremos evidenciando a relação da função afim na resolução de problemas de matemática financeira, mas destacaremos antes disso uma breve explanação sobre a função afim antes de relacioná-la seus elementos com a matemática financeira e posteriormente o mesmo com as outras funções (exponencial, quadrática e logarítmica).

A definição de função diz: "Dados dois conjunto A e B não vazios, uma função f de A em B ($f : A \longrightarrow B$) é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$". (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 41). Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente é chamado de "angular", pois ele denota numericamente a declividade da reta no plano cartesiano. No entanto vale destacar que a resolução de problemas da área financeira não cabe o elemento conceitual de ângulo, mesmo na interpretação de gráficos. O mais apropriado para o coeficiente a é denotá-lo como taxa de variação, expressão essa muito mais aplicável e válida no entendimento da situação-problema e veremos mais adiante que essa variação no estudo de juros simples representa o crescimento ou decrescimento do juros a cada período de tempo.

Lima (2012, p.106), afirma que:

> "... não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é taxa de variação (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta".

Ainda sobre a função afim, Lima (2012) afirma que, se $f(x) = ax+b$, diz-se que $y = ax + b$ é uma equação da reta. Se a reta r é o gráfico da função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é expresso por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2), são pontos distintos quaisquer de r, tem claramente o significado de taxa de crescimento de f.

A capitalização simples está relacionado com a proporcionalidade, onde se encaixa o estudo da função afim. No ensino médio não há necessidade de demonstrar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, apenas associar os elementos de construção da fórmula dos juros simples com a função afim.

Para utilizarmos a função afim é necessário que os elementos que compõe a função estejam bem internalizados pelo aluno no seu aprendizado e o uso da fórmula de juros simples como outra forma de estratégia na resolução do problema com objetivo de estabelecer uma correspondência entre os dois assuntos. Utilizaremos um exemplo simples para associar as duas temáticas (função afim com os juros simples).

Exemplo 1. *Admita um empréstimo de* $R\$\ 10.000,00$ *pelo prazo de 5 meses, pagando-*

se juros simples a razão de 10% *ao mês. Construa o saldo devedor a cada mês.*

Nesse problema ficar claro para o aluno o uso da capitalização simples, mas como saber se o modelo matemático que será adotado é uma função afim? Sabemos que nem todo problema de juros simples, o aluno o relaciona facilmente como uma função afim. Para melhor entendimento da questão e modelagem matemática do problema apresentado, será mostrado conforme a Tabela 2 a evolução dos valorem em função do tempo a partir da metodologia da capitalização simples e então veremos que a função afim é útil na resolução do problema.

Tabela 2: Juros simples na solução do exemplo

Período	Juros	Saldo devedor
0	-	$R\$$ 10.000
1	$R\$$ 500,00	$R\$$ 10.500,00
2	$R\$$ 500,00	$R\$$ 11.000,00
3	$R\$$ 500,00	$R\$$ 11.500,00
4	$R\$$ 500,00	$R\$$ 12.000,00
5	$R\$$ 500,00	$R\$$ 12.500,00

Fonte: O Autor

4.1.1 Resolução sob a perspectiva da fórmula de juros simples

Os dados desse problema na fórmula de juros simples:

$$M = C\,(1 + in)\,,$$

com $C = 10.000,00$; $i = 5\%$ a.m. ou $0,05$ a.m.; e $n = 5$ meses. Deve-se perceber que a unidade do tempo do prazo e da taxa devem estar na mesma unidade e no problema a taxa é mensal e prazo estudado é dado em mês.

$$M = 10.000\,(1 + 0,05 \times 5)\,;$$

$$M = 10.000 \times 1,25;$$

$$M = 12.500.$$

4.1.2 Resolução sob a perspectiva da função afim

Verifica-se que a Tabela 3 apresenta proporcionalidade do saldo devedor e o período. Adotando saldo devedor[7] como y e período como x, o crescimento unitário do período faz o saldo devedor aumentar em $R\$ \; 500,00$, isso traz o conceito de taxa de variação que remete ao coeficiente a e a partir deste coeficiente encontra-se o coeficiente b.

Tabela 3: juros simples - caso prático

Período x	Saldo devedor y	Pontos
0	$R\$ \; 10.000,00$	$(0; 10.000)$
1	$R\$ \; 10.000,00 + R\$ \; 500 =$ 10.500,00	$(1; 10.500,00)$
2	$R\$ \; 10.000,00 + 2 \times R\$ \; 500 =$ 11.0000,00	$(2; 11.0000,00)$
3	$R\$ \; 10.500,00 + 3 \times R\$ \; 500 =$ 11.500,00	$(3; 11.500,00)$
4	$R\$ \; 10.000,00 + 4 \times R\$ \; 500 =$ 12.000,00	$(4; 12.000,00)$
5	$R\$ \; 10.000,00 + 5 \times R\$ \; 500 =$12.500,00	$(5; 12.500,00)$

Fonte: O Autor

Na Tabela 3 pode-se calcular a taxa de variação coeficiente a escolhendo aleatoriamente dois pontos da tabela:

[7]Verificamos que a evolução do saldo devedor gera uma sequência de progressão Aritmética de razão 500

$$a = \frac{12.500 - 11.000}{5 - 2} = 500.$$

Logo, o coeficiente a tem valor 500, significando que a taxa de crescimento a cada período aumenta em 500, ou seja, tal valor expressa os juros a cada período unitário.

A partir da função afim $f(x) = ax + b$, e do conhecimento do valor de a, substituindo-se na função um ponto qualquer (x, y), chega-se no valor de b que na função é chamado de coeficiente linear. No entanto, vale ressaltar que o coeficiente linear representa o capital na data focal zero, logo $b = 10.000$, conforme se verifica na Tabela 3.

A modelagem da função afim associada ao problema, desta seção, fica da seguinte forma:

$$f(x) = 500x + 10.000,$$

nesta expressão verifica-se que a partir do valor fixo 10.000 a cada período unitário a função cresce 500 ($x \geq 0$, pois, a grandeza é o tempo e $f(x)$ é o montante a cada período).

Para calcular valor do saldo devedor (montante) no último período, basta substituir em x o valor 5, $f(5) = 500 \times 5 + 10.000 = 12.500$.

4.2 A função exponencial no cálculo do juros compostos

A função exponencial nesta seção será associada aos juros compostos, mas antes da sua definição apresentaremos algumas aplicações interessantes que poderiam ser utilizadas nas aulas introdutórias com intuito de despertar o interesse do aluno sobre o uso dessa função.

Segundo o autor Paiva:

> Várias situações do nosso cotidiano ou do universo científico, tais como juro em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo,etc., podem ser estudadascom o auxilio das funções exponenciais. (PAIVA, 2009, p.169.)

No texto de Crato (2009, p.13) ele relata sobre a história do tabuleiro do Xadrez Persa destacando função exponencial como solução do problema central da história que consistia em calcular o total de grãos, colocado 1 grão na primeira casa do xadrez e a partir dela duplicado a cada casa seguinte até chegar na 64^a casa. O resultado era o que o inventor queria do rei o total de grãos do tabuleiro. Sabe-se que o número de grão começa bem pequeno: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ... mas quando se chega na casa 64, o número se torna colossal, estratosférico. Na realidade o número é aproximadamente 18,5 quintilhões na última casa.

O cientista Sagan em seu livro cosmos que se o xadrez tivesse a dimensão 10×10 em vez de 8×8 e levando em consideração o grão em torno de 1 mm, o resultado seria a massa da terra e complementa ainda que as exponenciais aparecem em todo tipo de áreas importantes, familiares e não familiares- por exemplo, no juros compostos. Numa exemplificação apropriada a este trabalho Sagan apresenta o a seguinte situação do estudo da função exponencial associada aos juros simples:

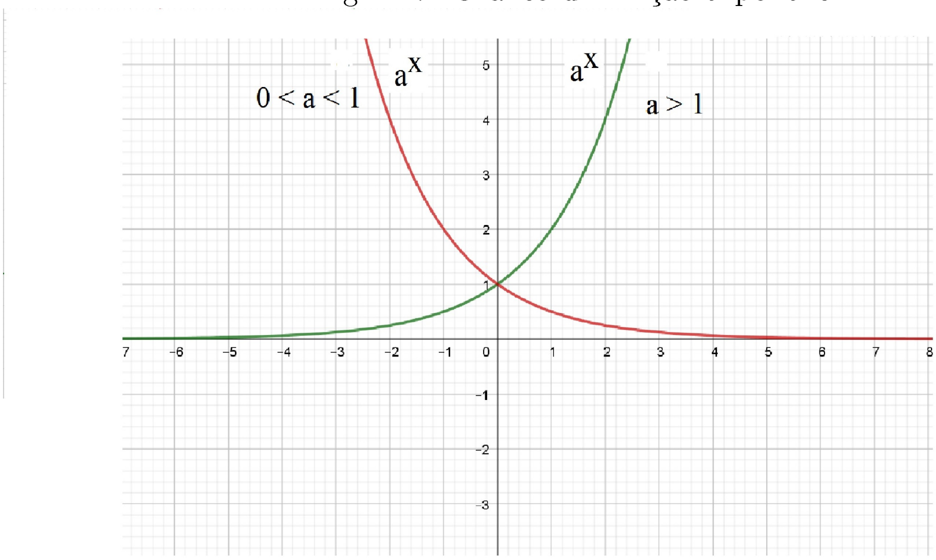
> "... um antepassado seu tivesse depositado dez dólares no banco para você há duzentos anos, (...) e o deposito acumulasse um juro anual constante de 5%, a essa altura o dinheiro valeria dez dólares $\times$ $(1,05)200$, isto é, $172.925,81$ dólares. (...). Se o antepassado tivesse conseguido uma taxa de 6%, você teria agora um milhão de dólares; a uma taxa de 7%, mais de $7,5$ milhões; e uma taxa extorsiva de 10%, a soma considerável de $1,9$ bilhão".(SAGAN, 1997, p.12)

4.2.1 A definição da função exponencial

Segundo Kazuhito (1991, p.133), uma função $f(x)$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada número x associa o número a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a. Quando $a > 1$, a função é crescente. Quando $0 < a < 1$, a função é decrescente. A Figura 8 o comportamento da função crescente, $f(x) = 2^x$ e a decrescente $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1° caso: A base é um número real maior que 1: 1 $a > 0$. FUNÇÃO CRESCENTE Gráfico $f(x) = 2^x$, com $x \in \mathbb{R}$;

Figura 7: Gráfico da função exponencial



Fonte: O Autor

2° caso: A base é um número real maior que e menor que um. FUNÇÃO DECRESCENTE. Gráfico $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, com $x \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que os juros compostos estão associados a uma função exponencial, onde teremos na sua fórmula uma potência associada ao tempo.

Para melhor exemplificação da construção dos juros compostos ao longo do tempo imagine uma aplicação financeira hoje de 100 reais a juros de 1% ao mês. No processo de capitalização composta recebe-se daqui a 1 mês o valor será de 101, isto porque o juro gerado foi de 1 real. Daqui a dois meses, o juros recebido será sobre os 101 reais, e não mais sobre os 100 reais, o que renderia 1,01 reais.

Matematicamente, expressamos a construção dos juros compostos da seguinte forma:

Se o investimento P em uma data inicial, a juros mensais iguais a i (que incide sobre o valor P), o valor corrigido é dado pela expressão no 1° período:

$$P + Pi = P\,(1 + i)\,.$$

No Segundo mês, os juros serão oriundos da taxa incidente sobre o valor i formado no final do primeiro mês. Tem-se no final do segundo mês, os mesmos $P\,(1 + i)$ obtidos do 1° mês mais os juros de $i[(P(1 + i)]$, totalizando

$$P(1 + i) + i[(P(1 + i)].$$

Essa última expressão reduz-se a:

$$P(1 + i)^2.$$

Assim, se queremos obter resultado em três meses, a expressão seria $P(1 + i)^3$, em quatro meses $P(1 + i)^4$, e assim por diante. Se considerarmos n períodos, teremos a seguinte função:

$$M(n) = P(1 + i)^n,$$

com $M(n)$ o valor futuro no período n.

Na prática essa função é apontada conforme a Tabela 4:

Tabela 4: Evolução do capital na capitalização composta

n (período)	Montante a cada período	Fórmula
0	$P(1+i)^0$	P
1	$P(1+i)^1$	$P(1+i)^1$
2	$P(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^2$
3	$P(1+i)(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^3$
4	$P(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^4$
5	$P(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)\cdots(1+i)$	$P(1+i)^n$

Fonte: O Autor

Destacamos que esta formulação descrita acima tem efeito somente para único valor de aplicação em n períodos.

Como vemos as funções exponenciais do tipo $f(x) = ba^x$ são facilmente associadas a construção desenvolvida acima. Temos um saldo que cresce de forma exponencial, adotando $b = P$, valor de aplicação, $a = (1+i)$, valor do fator de capitalização, $x = n$, o número de períodos, fica facilmente transformada na expressão matemática de juros compostos mais especifica e que normalmente se utiliza: $M = C(1+i)^n$, na realidade tem sua configuração como exponencial.

No nosso problema da aplicação financeira, pode-se continuar usando a expressão na sua forma mais convencional de função exponencial:

$$f(x) = 100 \times 1,01^x,$$

com $b = 100$, $a = 1,01$, $f(x)$ o valor do montante a cada período x. O significado do valor de a deverá ser evidenciado como valor que corrige a cada o saldo em 1%, ou seja, multiplicar o valor anterior por 1,01 é tornar o valor seguinte 101% do valor anterior.

Em matemática financeira a função exponencial pode ser utilizada no cálculo da capitalização continua que se configura em tempos bastante reduzidos (processo em intervalo tempo infinitesimal e em função disso o reajuste do valor da capitalização de forma mais frequente). Assaf (2012) descreve a capitalização contínua da seguinte forma:

> "... os juros são capitalizados por cada período, com frequência cada vez maior, como anual, semestral, trimestral, mensal, diária etc. (...) ainda prever uma forma de capitalização infinitamente grande, que ocorre a cada instante infinitesimal".(ASSAF, 2012, p.31)

Ele ainda descreve que para o cálculo da capitalização contínua se utiliza a seguinte função:

$$M(n) = Ce^{in},$$

Onde:

i) M(n) o valor futuro no tempo n;

ii) C o valor inicial;

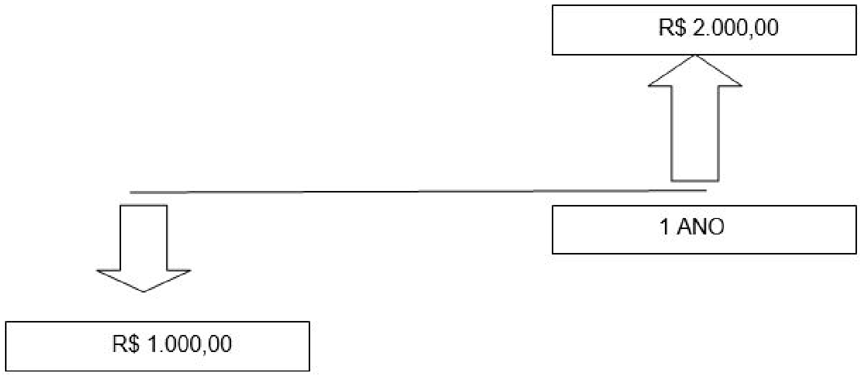
iii) e é a constante ($e = 2,7182818...$);

iv) i é a taxa de juro periódica, conhecida por taxa instantânea.

Para compreendermos melhor sobre uso dessa função exponencial na aplicação da capitalização contínua, vamos expor o seguinte problema:

Uma pessoa fará um investimento de $R\$ \ 1.000,00$ no banco para auferir 100% de juros em um ano, conforme as Figuras 9 e 10, ou seja, o montante alcançado neste período será de $R\$ \ 2.000,00$.

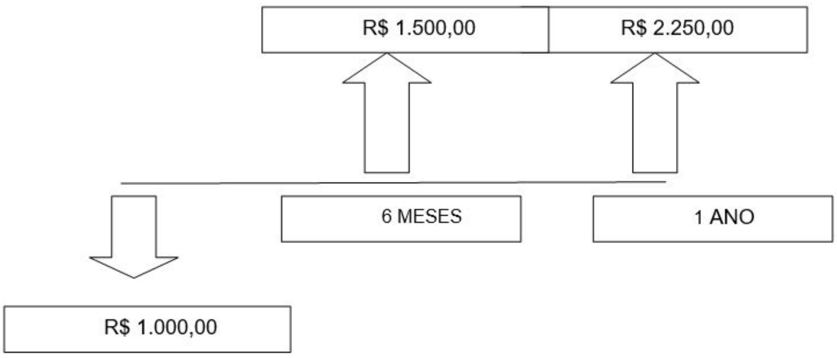
Figura 8: Fluxo de Caixa (capitalização em único período)



Fonte: O Autor

Agora imagine que a pessoa aplique por 6 meses e reaplique novamente por 6 meses, ou seja, duas capitalizações no período de 1 ano (taxa unitária semestral será de $\frac{1}{2}$). Assim no fim de 6 meses, ela obterá $R\$$ $1.500,00$, e reaplicando esse valor por mais seis meses obterá $R\$$ 2.250, conforme Figura 9. No entanto, pode-se fazer de forma direta para obtenção do resultado $R\$$ $1500+\frac{1}{2}$ ($R\$$ 1500)$=$ $R\$$ 2500.

Figura 9: Fluxo de Caixa (capitalização em dois períodos)

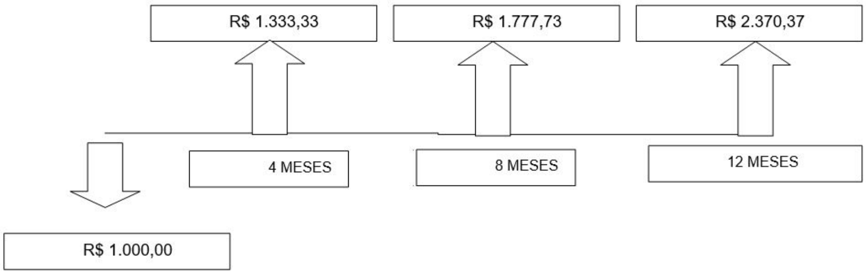


Fonte: O Autor

Se prosseguirmos com 3 capitalizações (taxa unitária quadrimestral será de $\frac{1}{3}$) no período de um ano, obtém-se $R\$$ $2.370,37$, conforme Figura 10.

Em resumo, deixar aplicado de forma direta no período de 1 ano aufere-se $R\$$

Figura 10: Fluxo de caixa (capitalização em três períodos)



Fonte: O Autor

$2.000,00$, quanto mais capitalizações mais juros. Se no ano houver 4 capitalizações, renovação de 3 em 3 meses, será menor que 4 capitalizações e assim por diante, conforme Tabela 5:

Tabela 5: Capitalização Continua

$n°$ de capitalizações em 1 anos	Fator de Capitalização	Valor do Montante a partir da aplicação de $R\$1.000$, a uma taxa de $100\%a.a.$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$	1000×2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$	$1.000 \times 2,25 = 2.250,00$
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,37037037$	$1.000 \times 2,37037037 = 2.370,37$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2,44140625$	$1.000 \times 2,44140625 = 2.441,40$
$\vdots$	$\vdots$	$1.000 \times 2,44140625 = 2.441,41$
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714567482$	$1.000 \times 2,714567482 = 2.714,57$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	2,71828182....

Fonte: O Autor

Uma curiosidade é que se pudéssemos capitalizar em intervalos de segundos dentro de um período de 1 ano o fator acumulado seria $2,71828182...$, e ainda, se pudéssemos construir intervalos ainda menores para capitalização, por exemplo, segundos, ou pela milionésima ou bilionésima para de um segundo, que conceitualmente seria a taxa infinitesimal[8], que é a base da capitalização contínua. Nesse processo o valor da capitalização acumulada se aproximaria do número e base do logaritmos natu-rais. Paenza comenta sobre esse processo de fragmentação do tempo e afirma que embora se note que o dinheiro se torna cada vez maior quando se aumenta o número de capitalizações, ele não aumenta indiscriminadamente.

> "o interessante é que esses números, embora cresçam a cada vez que os juros são recebidos com mais frequência, não o fazem de forma arbitraria nem descontrolada. Ao contrário: tem limite, estão limitados. E a cota superior é que se conhece como numero e (que é a base dos logaritmos naturais, o que não importa nesse contexto). Não apenas é uma conta superior, mas também é número do qual a sequência que geramos se aproxima cada vez mais, conforme modificamos os prazos de reaplicação". (PAENZA, 2009, p.81)

A citação acima fundamenta toda a construção da Tabela 5, onde embora se aumente muito o número de capitalização, o dinheiro não aumentará de forma indiscriminada, mantendo-se dentro do limite.

[8] No livro de Assaf Neto, Retorno de Investimento, cita que as taxa infinitesimais são muito utilizadas no EUA nas operações de mercado, enquanto que no Brasil sua utilização é reduzida, com exceção nos cálculos atuariais.

4.3 Estudo das progressões na matemática financeira

Vimos que a Matemática Financeira é uma aplicação de conceitos de Matemática com o propósito de estudar o comportamento do dinheiro no tempo. Para entendermos como o valor do dinheiro varia com o transcorrer do tempo é necessário o estudo das progressões aritméticas e geométricas. A primeira está relacionada aos juros simples e a segundo aos juros compostos

As progressões têm registros antigos, principalmente na região da Mesopotâmia onde surgiram diversas tabletas babilônicas com problemas interessantes. Os museus de Paris, Berlim e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábuas. Os babilônicos tinham conhecimento sobres as progressões, visto que existe um registro numa tábua de Louvre, datada por volta de 300 a.C. onde o arqueólogo Otto Neugebauer que trabalha para interpretar as tabuas da região Mesopotâmica encontrou dois problemas de progressões geométricas numa tabula do Louvre datado por volta de 300.a.C. Os problemas são os seguintes: um apresenta a igualdade e o outro que $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)55\right] = 385$.

Segundo Eves (2007, p.58) os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia desde o século XIX, onde já desenterraram mais de 50 mil tabulas de argila. Deste total 400 foram identificadas como estritamente matemáticas. Cerca de metade são tabuas matemáticas que envolvem operações de multiplicação, divisão (usando o inverso multiplicativo) e exponenciações que eram usadas juntamente com a interpolação, para resolução de problemas de juros compostos.

Podemos encontrar também evidências de problemas teóricos a respeito de progressões aritméticas e geométricas em papiros do Egito. Sabemos que esta civilização soube erguer grandes construções sem a ajuda de maquinas e que durou por mais de 3.000 anos. Uma cultura que conseguiu tais proezas tinha de possuir amplos conhecimentos de matemática (álgebra e geometria). O bom funcionamento da economia de qualquer país se fundamentava em uma ciência matemática desenvolvida de forma empírica. A descoberta de diversos papiros, mostrou que a civilização egípcia dominava duas das quatros operações aritméticas básicas (somar e subtrair). Em um papiro encontrado pelo arqueólogo Kahun datada de 1950 a.C. apresenta o seguinte problema:

"Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1 está para $\frac{3}{4}$".

Tal problema mostra um domínio de álgebra associado a geometria. Para resolução deste problema hoje é necessário conhecimento de exponenciação, proporção, equação quadrática. As noções de matemática patentes nos papiros baseiam-se em conhecimento adquiridos de forma empírica. O tratado mais importante que chegou até aos nossos dias encontra-se no Papiro de Rhind, atualmente no Museu Britânico. Data de, aproximadamente, 1.650 a.C, embora o seu conteúdo tenha sido copiado pelo escriba Ahmose de um texto mais antigo. Contém 85 exercícios de álgebra nos quais aparecem frações com numerador 1e, especialmente, com numerador 2. Também há noções de geometria relativas ao cálculo de superfície. Este papiro é uma fonte primária rica sobre a matemática no Egito antigo, mostrando que sabiam calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética. O problema abaixo foi retirado do papiro de Rhind:

> "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".

Neste papiro também registra-se uma progressão geométrica cuja sequencia são frações $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$. Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus. A resolução deste era por meio da multiplicação usando o fator comum que é 64.

As aplicações das progressões na matemática financeira na educação básica estão associadas particularmente aos juros simples e compostos. No entanto elas se aplicam nos sistemas de amortização, como veremos nas seções posteriores. Os sistemas mais usuais do mercado financeiro: Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Prestação Constante (Price[9]). Esses sistemas normalmente são utilizados no financiamento imobiliário e ou empréstimos pessoais de longo prazo, como cita (Assaf Neto, 2008).

Os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimo e financiamento[10] de longo prazo[11], envolvendo desembolsos periódicos do principal e encargos financeiros. (Assaf Neto, 2012, p.205).

E Assaf Neto ainda complementa: Para cada sistema de amortização é construída uma planilha financeira, a qual relaciona, dentro de uma certa padronização, os diversos fluxos de pagamento e recebimentos

Nesses sistemas temos os elementos de construção:

i. Saldo devedor: representa o valor do principal após o pagamento da amortização em determinado momento da dívida.

ii. Amortização: é o pagamento de principal efetuado no período sem considerar encargos financeiros.

iii. Encargos financeiros: representa os juros da operação.

[9]Referenciando o autor Richard Price que publicou o livro: Observations on Reversionary Payments. Este livro tem aplicação dos juros compostos em sistemas de pagamentos parcelados. (Nogueira, 2008. P.17)

[10]A diferença entre empréstimo e financiamento, o primeiro não tem destinação especifica enquanto que o segundo tem destinação especifica tendo que apresenta comprovação física e financeira da aplicação do recurso ao credor.

[11]Operações acima de doze meses, na visão contábil

Nesse contexto dos sistemas de amortização as progressões são usadas para construção das planilhas financeira. As progressões aritméticas na construção da planilha do sistema de amortização constante (SAC) e as progressões geométricas na construção do sistema de prestação constante (Price).

4.3.1 Progressão Aritmética e Juros simples

A progressão aritmética é um tipo de sequência numérica, pois é um conjunto de elementos que obedece a uma determinada ordem, onde cada elemento a partir do segundo é igual à soma anterior com uma constante que chamamos de razão que representaremos pela letra r.

Morgado[12](2013) define progressão aritmética da seguinte forma:

> "é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representado pela letra r".

Desta forma teremos de maneira geral uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_r)$, onde $a_n = a_{n-1} + r$ para $n \in \mathbb{N} \setminus n \geq 2$.

Exemplo 2. *A sequência dos números pares* $(2, 4, 6, 8, ...)$.

Consequência da definição:

a) A diferença entre dois termos consecutivos $(a_n - a_{n-1})$ é uma constante r, chamada de razão da PA. Assim,

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-j}.$$

b) O termo sucessor é a soma do anterior imediato mais a razão r, ou seja,

[12] Coleção Profmat: Matemática Discreta

$$a_2 = a_1 + r \Longrightarrow a_2 - a_1 = r.$$

c) Se temos uma sequência de $P.A.$ os termos consecutivos a_p, a_q, a_t, então:

$$a_p - a_p = a_t - a_q \Longrightarrow 2a_q = a_t + a_p \Longrightarrow a_q = \frac{a_t + a_p}{2},$$

ou seja, um termo qualquer, a partir do segundo, é a média aritmética dos termos que lhe são equidistantes.

4.3.2 Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética.

Numa progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ de razão r, partindo do 1° termo a_1, para avançarmos ao termo seguinte a_2 basta somar ao termo a razão r. Desta forma basta somarmos r a qualquer termo para obtemos o termo seguinte. Assim: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, mas como $a_2 = a_1 + r$, temos $a_3 = a_1 + 2r$, ou seja, para determinarmos o terceiro termo basta somar ao primeiro $2r$. O quarto termo é dado por $a_4 = a_3 + r$, mas como $a_3 = a_1 + 2r$, temos $a_4 = a_1 + 3r$. Assim, para determinarmos o quarto termo bastar somar ao primeiro $3r$. O quinto termo é dado da forma $a_5 = a_4 + r$, mas como $a_4 = a_1 + 3r$, ou seja, para determinarmos o quinto termo bastar somar ao primeiro a expressão $4r$ ou $(5 - 1)r$.

Um termo geral a_n de uma P.A será dado pela equação $a_n = a_1 + (n - 1)\, r$, ou seja, passar do primeiro termo a_1 para o termo a_n avançamos $(n - 1)$ termos. Desta forma basta somar $(n - 1)$ vezes a razão da P.A ao primeiro termo a_1.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r,$$

para $n \in \mathbb{N} \setminus n \geq 2$.

Os juros simples são regidos pela capitalização que descreve a formação dos juros de forma sucessiva, onde só o capital inicial rende juros, ou seja, não são incorporados ao capital acumulado para render juros.

O autor Ricardo Feijó[13](2008, p.20) afirma:

> ..."os juros formados em cada ponto relevante do tempo não são capitalizados. Não ocorre remuneração sobre os juros que se formam no período. Não existem juros sobre o saldo do juros acumulados. Os Juros só incidem sobre o capital inicial".

Desta forma o regime de capitalização simples (juros simples) comporta-se como uma progressão aritmética (P.A), crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo.

Imagine o seguinte fluxo de caixa abaixo, onde temos n períodos e cada período representa o saldo em função do capital e juros, onde a cada período acrescenta-se os juros do período de forma que $j_1 = j_2 = j_3 = \cdots = j_n = J$, pois esta é a característica dos juros simples, o juro acrescentado ao capital a cada período é o mesmo.

A Figura 11 demonstra a evolução do montante na regência do regime dos juros simples a cada período, e percebe-se que o saldo a cada período aumenta a uma constante J, ou seja, cada período aumenta J e consequentemente no período n qualquer, o capital será acrescido de nJ, conforme demonstrado na Tabela 6.

Vamos nomear cada período a_n, onde n representa o número do período. Na Tabela 6, temos um total de n períodos distribuídos da seguinte forma e de forma generalizada temos:

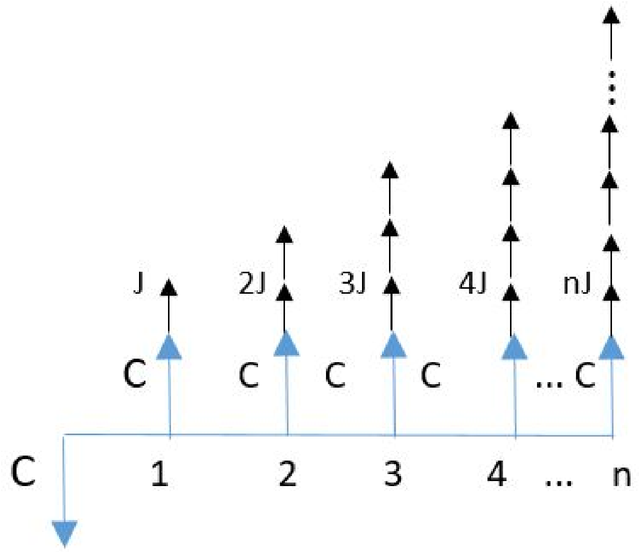
$a_0 = C$

$a_1 = a_0 + j_1 = C + j_1$

$a_2 = a_1 + j_2 = C + j_1 + j_2$

[13]Autor do livro Matemática Financeira com Conceitos Eletrônicos e Cálculo Diferencial.

Figura 11: Evolução dos juros simples no fluxo de caixa



Fonte: O Autor

$a_3 = a_2 + j_3 = C + j_1 + j_2 + j_3$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + j_n = C + j_1 + j_2 + j_3 + \cdots + j_n$

$a_n = C + nj$, pois, $j_1 = j_2 = j_3 = \cdots = j_n = J$.

Tabela 6: Tabela de Montante de acordo com o saldo devedor

Período n	Montante
0	C
1	$C + J$
2	$C + J + J$
3	$C + J + J + J = C + 3J$
...	...
n	$C + nJ$

Fonte: O Autor

Outra forma de se chegar ao valor do saldo devedor do período n é fazendo a seguinte soma:

$a_0 = C$

$a_1 = a_0 + j_1$

$a_2 = a_1 + j_2$

$a_3 = a_2 + j_3$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + j_n$

$a_n = C + j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + \cdots + j_n$, como $j_1 = j_2 = j_3 = \cdots = j = Ci$

Esta equação reduz-se a:

$a_n = C + nCi$, equivalente a $M = C(1 + in)$, dado que a_n é o montante do período n.

Diante do exposto pode-se utilizar o termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

apenas fazendo uma adaptação, pois em matemática financeira, o aluno deve atentar que na linha do tempo partimos normalmente da data focal "zero", onde se localiza o capital ou valor presente. Para facilitar o uso da do termo geral devera apenas associar o ponto de partida a_0

$a_n = a_0 + (n-1)r$, onde;

$a_n =$ montante, montante dado pela letra M.

$a_0 =$ capital, capital dato pela letra C.

$r =$ juro de cada período, juros dado pela letra J.

Fazendo o ajuste obtemos:

$M = C + nJ$, como juros de cada período é $J = Ci$.

$M = C + Cin$;

$M = C(1 + in).$

Exemplo 3. *Admita um empréstimo de* $R\$ \ 10.000,00$ *pelo prazo de 4 anos, pagando-se juros simples à razão de* 10% *a.a.*

Tabela 7: Amortização de um dívida de $R\$ \ 10.000$ em 4 anos

Ano	Saldo no inicio de cada mês	Juros apurados para cada mês	Saldo devedor ao final de cada mês
Início do 1º mês	-	-	$R\$ \ 10.000,00$
Fim do 1º mês	$R\$ \ 10.000,00$	$R\$ \ 1.000,00$	$R\$ \ 11.000,00$
Fim do 2º mês	$R\$ \ 11.000,00$	$R\$ \ 1.000,00$	$R\$ \ 12.000,00$
Fim do 3º mês	$R\$ \ 12.000,00$	$R\$ \ 1.000,00$	$R\$ \ 13.000,00$
Fim do 4º mês	$R\$ \ 13.000,00$	$R\$ \ 1.000,00$	$R\$ \ 14.000,00$

Fonte: O Autor

Neste exemplo poderemos destacar alguns pontos:

1. Os juros de cada ano são iguais, visto que taxa de 10% incide exclusivamente sobre o capital inicial de $R\$ \ 10.000,00$.

2. O crescimento dos juros no tempo é linear. Cresce $R\$ \ 1.000,00/$ano. Tendo desta forma um comportamento de progressão aritmética.

3. Devido ao juro variar linearmente com no tempo, o cálculo do total do capital é feito simplesmente pela multiplicação do valor do juro anual pelo tempo de duração da dívida, isto é, $R\$ \ 1.000,000 \times 4$ anos $= R\$ \ 4.000,00$.

4. Os juros, caso não pago ao final de cada ano, não ocasionará remuneração sobre o juros que se formam no período. Desta forma o juro do último ano, no nosso

exemplo, não interferirá no cálculo do último ano, visto que a remuneração é sempre sobre o valor inicial que é de $R\$ \ 10.000,00$.

Fórmula dos Juros e do Montante no regime dos Juros Simples.[14]

Utilizando o termo geral da PA na solução do exemplo 3 anterior o regime adotado para o cálculo dos Juros foi o de capitalização simples. Neste regime o juro gerado em cada período é constante.

Consideremos um capital (C), aplicado a juros simples (regime de capitalização simples) à taxa i por determinado período n (tempo). O juro agregado a cada período é Ci, conforme a Tabela 8 que mostra a construção algébrica dos juros acumulado em n períodos.

Tabela 8: Demonstração algébrica do juros acumulando em n períodos

Período n	Juros
1	$J = Ci$
2	$J = Ci + Ci = (Ci) \times 2$
3	$J = Ci + Ci + Ci = (Ci) \times 3$
...	...
n	$J = Ci + Ci + \cdots + Ci = (Ci) \times n$

Fonte: O Autor

Nota-se ainda na Tabela 8 que a generalização em n períodos dos juros é dado pela fórmula:

[14]Poucas operações financeiras utilizam a capitalização simples para geração de juros no mercado financeiro. As operações de juros simples são:as operações de Desconto Simples, Cheque Especial(quando não existe atraso no pagamento de juros), hot money e operações de ACC (antecipação de contrato de câmbio).

$$J = Cin,$$

onde:

i) J: valor dos juros expressos em unidade monetárias;

ii) C: capital é o valor em dinheiro representativo de determinado momento;

iii)i: taxa de juros, expressa em sua forma unitária;

iv) n: número de períodos que o capital será reajustado.

A fórmula do Montante é imediata: Montante em um determinado período da soma de um capital aplicado a uma determinada taxa periódica de juros pro determinado tempo. Em outras palavras, o montante é constituído do capital mais o valor acumulado dos juros, isto é:

$M = C + J$, como $J = Cin$, fazemos a substituição, logo:

$M = C + Cin$;

$M = C\left(1 + in\right).$

Considerando o exemplo 1 para o cálculo do montante da dívida, teremos: $M = C\left(1 + in\right)$, onde $C = R\$\ 10.000,00$; $i = 10\%$ a.a; $n = 4$ anos. Destaca-se que tanto a taxa e o tempo estão na mesma unidade. Sabe-se que inúmeras outras operações prazo e taxa não são coincidentes. Desta forma, é necessário que o prazo da taxa e prazo de capitalização (unidade de tempo que o capital será corrigido) devam está na mesma de tempo. Ou transforma-se o prazo especifico da taxa para o de capitalização ou o inverso, o tempo da capitalização conforme a unidade de tempo da taxa de juros.

Neste caso especifico do nosso exemplo prático temos:

$$M = 10.000 \times \left(1 + 0,10 \times 4\right);$$

$$M = 14.000,00.$$

A progressão aritmética está associada aos juros simples, mas também poderá ser utilizada na resolução de problemas que envolvam o sistema de amortização constante, denotado pela abreviação de SAC. Como o próprio nome indica o sistema tem como fundamental apresentar as amortizações constantes (iguais) a cada período por todo o prazo da operação. Nesse sistema de amortização percebemos aplicação imediata da progressão aritmética. Há uma necessidade de entender os elementos que compõem o sistema que são: saldo devedor, amortização, juros e prestação.

Formularemos o seguinte problema para entendermos como a progressão aritmética se aplica no sistema SAC.

Exemplo 4. *Um empréstimo de* $R\$ \ 10.000,00$ *deva ser pago no prazo de 10 meses, começando no mês seguinte após a contratação do empréstimo que será regido pela taxa mensal de* 5% *ao mês. A planilha construída na metodologia do SAC.*

Figura 12: Tabela SAC

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE - SAC				
Períodos (mensais)	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	R$ 10.000,00	R$ -	R$ -	R$ -
1	R$ 9.000,00	R$ 1.000,00	R$ 500,00	R$ 1.500,00
2	R$ 8.000,00	R$ 1.000,00	R$ 450,00	R$ 1.450,00
3	R$ 7.000,00	R$ 1.000,00	R$ 400,00	R$ 1.400,00
4	R$ 6.000,00	R$ 1.000,00	R$ 350,00	R$ 1.350,00
5	R$ 5.000,00	R$ 1.000,00	R$ 300,00	R$ 1.300,00
6	R$ 4.000,00	R$ 1.000,00	R$ 250,00	R$ 1.250,00
7	R$ 3.000,00	R$ 1.000,00	R$ 200,00	R$ 1.200,00
8	R$ 2.000,00	R$ 1.000,00	R$ 150,00	R$ 1.150,00
9	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00	R$ 100,00	R$ 1.100,00
10	R$ -	R$ 1.000,00	R$ 50,00	R$ 1.050,00
TOTAL		R$ 10.000,00	R$ 2.750,00	R$ 12.750,00

Fonte: O Autor

Notamos na Figura 12 que o comportamento das prestações periódica e juros sucessivos do SAC são decrescentes em progressão aritmética. A prestação é a soma do valor amortizado[15] (constante) com juros[16] no período, onde a razão da sequência das prestações e juros seguem o mesmo valor ($r = -50$), em virtude do saldo devedor diminuir a cada período em função do valor amortizado $R\$ \ 1.000,00$.

Notadamente na Figura 12 as prestações e juros decrescem no mesmo valor a cada período, e forma uma sequência de P.A. Assim, podemos determinar o valor de qualquer prestação/juros, conhecendo o valor de decrescimento, a partir da fórmula do termo geral da progressão aritmética.

4.4 Progressão geométrica e juros compostos

É uma sequência de números não-nulos na qual, a partir do segundo, qualquer deles é resultado da multiplicação do termo imediatamente anterior por uma constante.

Numa progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão, usualmente denotada pela letra q e do primeiro termo a_1 através de uma fórmula matemática. Assim, consideraremos uma P.G. cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão seja q: $(a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...)$, onde aplicando a definição temos:

$a_2 = a_1 q = a_1 q^1$;

$a_3 = a_2 q = (a_1 q)\, q = a_1 q^2$;

$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)\, q = a_1 q^3$;

$a_5 = a_4 q = (a_1 q^3)\, q = a_1 q^4$.

Notemos que qualquer termo da P.G. é igual ao produto do primeiro do primeiro termo a_1 por uma potência de q e que os expoentes de q formam uma P.A $(1, 2, 3, 4, ...)$,

[15]Amortização é o valor a ser abatido no saldo devedor, no SAC é calculado como sendo o valor do empréstimo

[16]Juros é calculado sobre o saldo devedor do período anterior.

cujo enésimo termo é $n-1$, e assim, concluímos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, essa identidade é chamada fórmula do termo geral da P.G.

Exemplo 5. *Supondo que um investidor aplique o valor de* $R\$ \ 25.000,00$ *em uma previdência privada que faça seu dinheiro valorizar a cada ano que passa, um percentual de* 5% *em relação ao ano anterior, Construa uma tabela para evidenciar a evolução do valor da aplicação a cada ano até o* 6° *ano.*

Tabela 9: Tabela de Juros até o sexto ano de aplicação

ANO	VALOR DA APLICAÇÃO
0	$R\$ \ 50.000,00$
1	$R\$ \ 52.500,00$
2	$R\$ \ 55.125,00$
3	$R\$ \ 57.881,25$
4	$R\$ \ 60.775,31$
5	$R\$ \ 63.814,08$
6	$R\$ \ 67.004,78$

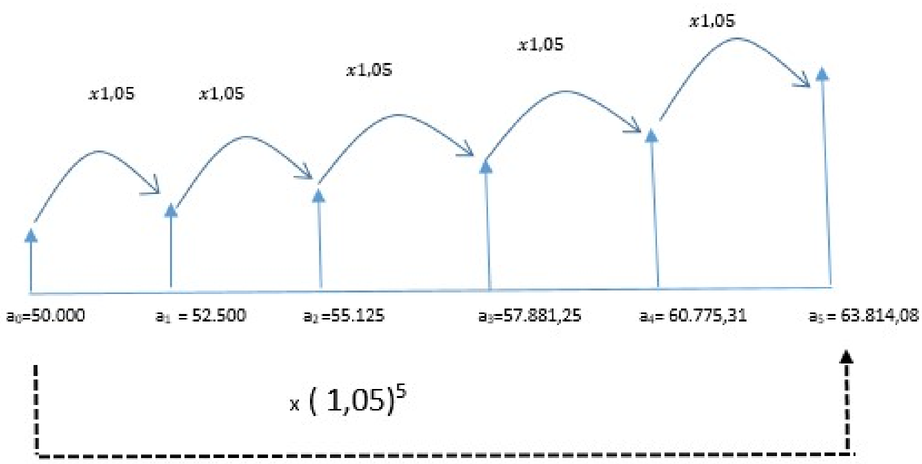
Fonte: O Autor

Nesta atividade fica evidenciado que existe um padrão no crescimento. A sequência dos valores na coluna "Montante"os valores estão disposto numa sequência de progressão geométrica, onde o valor de cada ano a partir do 2° ano é resultante do anterior multiplicado por $1,05$ que representa a razão da sequência.

Dispondo os valores na figura seguinte, facilita o entendimento da construção do valor ao longo do tempo:

Nota-se que a evolução da aplicação conforme a Figura 13 o valor seguinte representa 5% superior ao valor anterior, ou seja, ele é 105% (1,05) do valor anterior.

Figura 13: Valores em progressão geométrica em um fluxo de caixa



Fonte: O Autor

Devido isto, o valor seguinte é resultante da multiplicação do anterior pelo fator 1,05 que de forma interpretativa significa dentro dessa dinâmica que a cada $R\$\ 1,00$ aplicado no período de 1 ano o valor cresce $R\$\ 0,05$. Outra observação interessante nessa construção é que podemos a partir do valor aplicado - capital inicial - chegar em qualquer ano apenas multiplicado pelo fator 1,05 quantas vezes for o período desejado, por exemplo, sair do ano inicial e chegar no ano 6° a operação resumi-se da seguinte forma:

$50.000 \times (1,05)^6 = 67.004,78.$

Em resumo a construção a cada ano fica dessa forma:

Ano inicial $a_0 = 50.000,00$;

Primeiro ano $a_1 = R\$\ 50.000,00\ \times 1,05$;

Segundo ano $a_2 = R\$\ 50.000,00 \times 1,05 \times 1,05 = 50.000 \times (1,05)^2$;

Terceiro ano $a_3 = (50.000 \times 1,05^2) \times 1,05 = R\$\ 50.000,00 \times (1,05)^3$;

$\vdots$

n-ésimo ano $a_n = R\$\ 50.000,00 \times 1,05^{n-1}$, pois $a_n = a_1 q^{n-1}$, onde $a_1 = R\$$

$50.000,00$; $q = 1,05$. Temos: $a_n = a_1 q^{n-1}$;

Por exemplo o valor do imóvel no 6º ano será de $R\$ \ 67.004,78$.

Sobre os juros compostos, ASSAF (2012) comenta:

> "No regime composto há uma capitalização dos juros, também entendida por juros sobre juros; os juros são periodicamente incorporados ao saldo devedor anterior e passam, assim, a gerar juros. Quanto maior for o número de períodos de incidência dos juros, maior será a diferença em relação à capitalização simples".

Então o juro no regime de capitalização composta é gerado em cada período (montante do início do período multiplicado pela taxa) se agrega ao montante do início do período e esta soma é projetada para o período seguinte para render mais juro. Com isso percebemos que no sistema de juros compostos a velocidade de crescimento do valor do dinheiro no tempo é bem mais acelerada com relação aos juros simples.

A progressão geométrica está associada aos juros compostos e ao sistema de prestação constante, chamado pela abreviação de SPC[17]. Como o próprio nome indica o sistema tem como característica fundamental apresentar as prestações constantes (iguais) a cada período por todo o prazo da operação. Nesse sistema de amortização percebemos aplicação imediata da progressão geométrica. Em matemática financeira está associado ao assunto series uniformes, que configuram-se em pagamento os valores mantem-se constantes.

Assaf (2012, p.211), comenta sobre o sistema SPC:

[17]Sistema de Prestação Constante, e também conhecido como sistema Price.

> Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, são decrescentes, e as parcelas de amortização assumem valores crescentes. Em outras palavras, no SPC os juros decrescem e as amortizações crescem ao longo do tempo. A soma dessas duas parcelas permanece sempre igual ao valor das prestações.

Com intuito de compreendermos melhor esse sistema formularemos o seguinte problema e apresentaremos sua planilha financeira nos mesmos moldes do que fizemos no problema anterior com o SAC. E após isso compararemos os dois sistemas.

Exemplo 6. *Um empréstimo de R\$ 10.000,00 deva ser pago no prazo de 10 meses, começando no mês seguinte após a contratação do empréstimo que será regido pela taxa mensal de 5% ao mês. A planilha construída na metodologia do SPC.*

Tabela 10: Sistema de prestação constante

Sistema de prestação constante				
Períodos	Saldo devedor R\$	Amortização R\$	Juros R\$	Prestação R\$
0	R\$ 10.000,00	R\$	R\$	R\$
1	R\$ 9.204,95	R\$ 795,05	R\$ 500,00	R\$ 1.295,05
2	R\$ 8.370,16	R\$ 384,80	R\$ 460,25	R\$ 1.295,05
3	R\$ 7.439,62	R\$ 876,54	R\$ 418,51	R\$ 1.295,05
4	R\$ 6.573,62	R\$ 920,36	R\$ 374,68	R\$ 1.295,05
5	R\$ 5.606,87	R\$ 966,38	R\$ 328,66	R\$ 1.295,05
6	R\$ 4.592,17	R\$ 1.014,70	R\$ 280,34	R\$ 1.295,05
7	R\$ 3.526,73	R\$ 1.065,44	R\$ 229,61	R\$ 1.295,05
8	R\$ 2.408,02	R\$ 1.118,71	R\$ 176,34	R\$ 1.295,05
9	R\$ 1.233,38	R\$ 1.174,64	R\$ 120,40	R\$ 1.295,05
10	R\$ 0,00	R\$ 1.233,38	R\$ 61,67	R\$ 1.295,05
TOTAL		R\$ 10.000,00	R\$ 2950,46	R\$ 12.950,46

Fonte: O Autor

Notamos na Tabela 10 que o comportamento das amortizações é crescente em progressão geométrica de razão $(1,05)$, mas se fizermos a sequência de baixo para cima

$(1.233,38; 1,174,64; 1.118,71...)$ teremos $\frac{1}{1,05}$ como a razão. Logo se a taxa i vai gerar uma razão $\frac{1}{1+i}$ ou $(1+i)$ dependendo do sentido da sequência.

Nesse sistema primeiro se determina a prestação pela fórmula[18] e curiosamente está fórmula provém da formula da soma dos termo de uma progressão finita [19].

Demonstração do cálculo de prestação no sistema Price SPC. Nesse sistema as prestações são constantes. Sendo P_i a prestação do período i, temos:

$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$ (Prestação Constante).

As outras variáveis são:

i) C é o Valor a vista (Capital);

ii) n é o Prazo (número de prestações);

iii) i é a Taxa de juros.

Se projetarmos todas as prestações e o capital para a data focal n, tem-se a seguinte expressão.

$$P_1(1+i)^{n-1} + P_2(1+i)^{n-2} + \cdots + P_n(1+i)^0 = C(1+i)^n,$$

Colocando-se P em evidência, $P\left[(1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right] = C(1+i)^n$. A expressão acima é verdadeira pela equivalência de fluxo de capital entre prestação e valor á vista. Como $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$, tem-se:

$$P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \cdots + P(1+i)^0 = C(1+i)^n,$$

A expressão que está entre os colchetes forma uma P.G de razão $(1+i)$, logo,

[18] Uso dessa fórmula está descrita na questão do ENEM de 2017 na questão 145 que está resolvida no capítulo 5 deste trabalho.

[19] $S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$, onde S_n é a soma dos termos finitos, a_1 é o primeiro termo, q a razão e n o número de termos da sequencia da PG.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

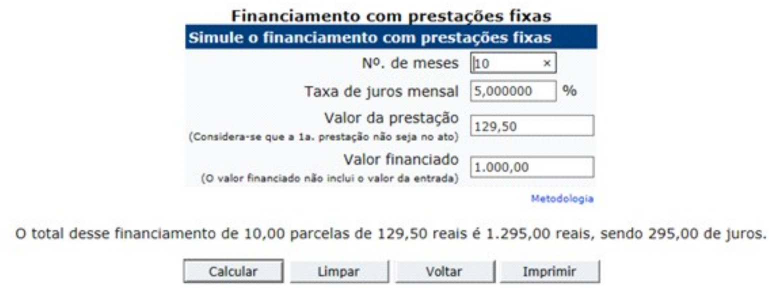
$$P\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right] = C\,(1+i)^n$$

$$P\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = C\,(1+i)^n$$

$$P = \frac{C(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}.$$

O Banco Central disponibiliza para o cidadão uma calculadora financeira[20], conforme Figura 14, para cálculo do valor da prestação no sistema de prestações constantes (SPC). Utilizamos a calculadora para determinar o valor da prestação no sistema SPC. Nessa calculadora existe a possibilidade de calcular o montante nos juros compostos.

Figura 14: Calculadora financeira do Banco Central

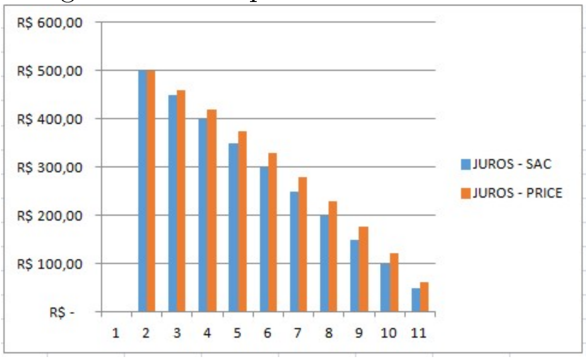


Fonte: Bacen

Comparando os dois sistemas no problema proposto percebemos um acúmulo maior nos juros nos Sistema de Prestação Constante. Ambos os sistemas começam com o mesmo valor de juros, no entanto no sistema SAC acumulará juros menor que o sistema SPC no fim do período, desde que os sistemas tenham a mesma taxa de juros,

[20]https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/calcularFinanciamentoPrestacoesFixas.do

Figura 15: Comparando o SAC x SPC



Fonte: O Autor

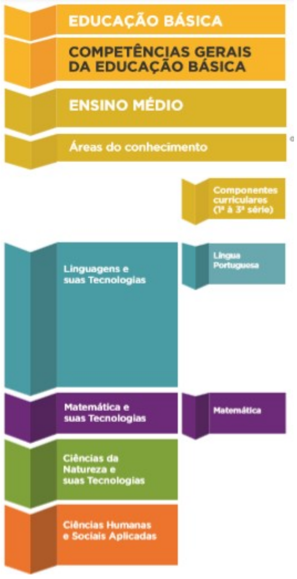
mesmo prazo e valor de financiamento/empréstimos iguais. Na Figura 15 verificamos que os juros de cada período pelo SPC é superior, ao do SAC, com exceção do 1° período.

4.5 A BNCC e ensino da matemática financeira no ensino médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que regulamenta o ensino das redes pública e privada no que concerne o que é essencial na aprendizagem nas etapas educacionais - educação infantil, ensino fundamental e ensino médio - com intuito de promover igualdade no sistema educacional. Há de se destacar que a BNCC não propõe currículo único, visto que se esta fosse a proposta tiraria a autonomia e regionalização das escolas. Também devemos lembrar que a BNCC é um documento estruturado a partir de competências e habilidades, dentro das áreas de conhecimento, conforme Figura 16.

Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2017 p.7).

Figura 16: BNCC - Áreas de conhecimento



Fonte: BNCC

A BNCC define competência como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". (BRASIL, 2017)[21]

O estudo da matemática financeira na Educação Básica é uma ferramenta na construção de um cidadão mais consciente financeiramente. Mas especificamente na etapa do Ensino Médio, segundo a BNCC deverá estar vinculado a vários temas, não sendo ministrada de forma pontual. Na fase do ensino médio a BNCC ainda propõe

[21]BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular BNCC - Ensino Fundamental. Brasília, 2017. Disponívelem:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-EI-EF-110518-versaofinal-site.pdf> Acesso em: 21 mar. 2019

que a construção na da área financeira deve ser integrada a matemática, mas aplicada a uma realidade em diferentes contextos com finalidade de preparar os estudantes de acordo com a exigências de mercado. E nesse processo de aprendizagem se propõe o uso de tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas.

> ..."a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadora e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional".

A proposta da BNCC para o ensino médio na área financeira é ampliar o letramento matemático construído no ensino fundamental, mas com aquisição por parte do aluno de novos conhecimentos com o intuito da promoção de no processo de aprendizagem mais elaborados de reflexão e abstração que o estudante não seja somente capaz resolver problemas, mas de formulá-los em diversos contextos e dentro de situações do dia a dia do aluno, pois o mercado de trabalho exigirá uma matemática com visão mais integradora da realidade

> "... para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades proposta para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreende a realidade...". (BRASIL, 2017, p.531)".

De acordo com a BNCC as COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências

da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Essas competências elencadas acima de acordo com a BNCC não tem ordem preestabelecida e que as habilidades são associadas a cada competência, não exclusivamente uma, e são apresentadas sem indicação de seriação.

O professor Moretto[22] descreve habilidades da seguinte forma:

[22]https://www.somospar.com.br/competencias-e-habilidades

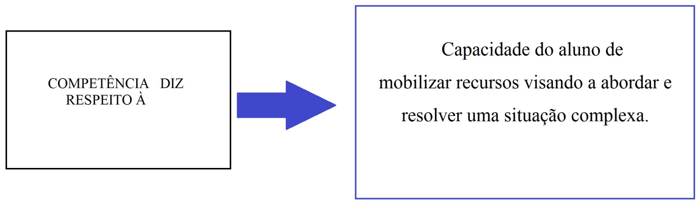
> "As habilidades estão associadas ao saber fazer: ação física ou mental que indica a capacidade adquirida. Assim, identificar variáveis, compreender fenômenos, relacionar informações, analisar situações-problema, sintetizar, julgar, correlacionar e manipular são exemplos de habilidades".

E quanto as competências ele define:

> "(...)competências são um conjunto de habilidades harmonicamente desenvolvidas e que caracterizam por exemplo uma função/profissão específica: ser arquiteto, médico ou professor de química. As habilidades devem ser desenvolvidas na busca das competências".

Na BNCC para cada competência especifica da área da Matemática e suas Tecnologia no Ensino Médio estão em articulação como as competências gerais da Educação Básica e com a matemática do Ensino Fundamental, de sorte que possa garantir as competências especificas e as habilidades associadas a cada uma delas. Sabe-se que na BNCC para área da Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio foram elencadas 5 competências especificas e para cada uma delas um rol de habilidades que apresentaremos abaixo na forma de Tabela. No entanto focaremos as habilidades que as mais condiz com o letramento matemático para Educação Financeira.

Figura 17: Conceito de Competência



Fonte: O Autor

As competências dizem respeito a capacidade de resolver problemas do dia a dia com os recursos disponíveis, conforme Figura 17, e complementando sobre elas a Tabela 11 ilustra as quatro competências especificadas que pressupõe habilidades de forma genérica a:

i. Interpretar e compreender da realidade;

ii. Identificar aspectos consensuais ou não na discussão de tantos problemas;

iii. Construir modelos matemáticos para resolução e formulação de problemas;

iv. Resolver problemas em vários contextos socioambientais e da vida cotidiana;

v. Buscar contra exemplos para validação as conjecturas com base em investigação.

Dentre as habilidades descritas em cada competência visualizamos aquelas voltada a formação do cidadão com letramento em matemática financeira. Lendo cada habilidade fica evidente que a proposta da BNCC é torna a matemática financeira não pontual, e sim trabalhada em vários temas em todas as series do Ensino Médio. Notamos isso com Habilidade EM13MAT302, EM13MAT303 e EM13MAT304 vinculadas a competência especifica 3, onde se propõe associar a função exponencial e função logarítmica dentro do contexto da matemática financeira, além destacar crescimento linear e exponencial as duas formas capitalização, juros simples e compostos respectivamente. E nesse processo de ensino não pode estar dissociada do uso de gráficos e analise de planilhas.

Em sala de aula o professor pode usar as planilhas eletrônicas para construção da forma de pagamento no Sistema de Amortização Constante, muito usado no financiamento imobiliário, onde os alunos podem facilmente perceber aplicações, por exemplo, das progressões aritméticas na construção de cada prestação numa sequência decrescente.

Tabela 11: Competências × habilidades (matemática do ensino médio)

COMPETENCIAS ESPECIFICAS	HABILIDADES
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação), para uma analisar crítica da realidade.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT304)/ (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais/ funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: O Autor

4.5.1 Uma proposta de transversalidade da matemática financeira nos conteúdos de matemática do ensino médio

Com base na proposta da BNCC, podemos sugerir temas da matemática do ensino médio com a matemática financeira, como tratamos até aqui, principalmente com a função afim e exponencial. A Tabela 11 mostra uma construção a partir da proposta de transversalidade da BNCC e das possibilidade de aplicações da matemática no ensino médio no desenvolvimento do conhecimento na área financeira.

As Tabelas a seguir (Tabelas 12 e 13) mostram que a vinculação dos assuntos de funções e progressões podem ser utilizadas no ensino da matemática financeira, como propõe a BNCC, e para cada assunto da matemática associamos com a matemática financeira e elencando os objetivos principais para essa associação. A proposta deverá estar no momento da construção do plano de ensino, onde o professor poderá utilizar a resolução de problemas sem usar as formulas da matemática financeira, mas pode em algum momento fazer um paralelo, por exemplo, termo geral da progressão aritmética com a evolução dos juros simples ou associar o coeficiente angular da função afim com a taxa de juros a cada período. Seguindo a proposta das tabelas citadas, o professor tornará a matemática interligada como vários temas e a torna não pontual, especifica de uma determinada serie.

Tabela 12: Proposta de estudo da matemática financeira utilizando funções

Funções		
Função	Matemática financeira	Objetivos na associação do estudo das funções na matemática financeira.
Função Afim	Juros simples Sistema SAC	- associar a função afim à fórmula de juros simples. - mostrar o comportamento linear dos juros simples. - evidenciar os coeficientes da função afim com significados de capital e taxa de variação.
Função Exponencial	Juros compostos, Taxas equivalentes e Capitalização continua.	- associar os componentes da função exponencial com a fórmula de juros compostos.
Função Logarítmica	Juros compostos	-utilizar as propriedades dos logaritmos na determinação dos prazos no juro composto.

Fonte: O Autor

Tabela 13: Proposta de estudo da matemática financeira utilizando progressões

Progressões		
Progressões	Matemática financeira	Objetivos na associação do estudo das progressões na matemática financeira.
Progressão Aritmética	Juros simples Sistema de Amortização Constante (SAC)	- mostrar que a sequência da evolução do saldo dos juros simples a cada período configura-se em uma progressão aritmética. - Utilizar o termo geral da PA na construção das prestações do sistema SAC.
Progressão Geométrica	Juros Compostos Sistema de Prestação Constante - Price	- construir a sequência da evolução do saldo devedor dos juros compostos às progressões Geométricas. - Entender a construção da tabela prestações pelo sistema Price com base no termo geral da PG.

Fonte: O Autor

5 ENEM - PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

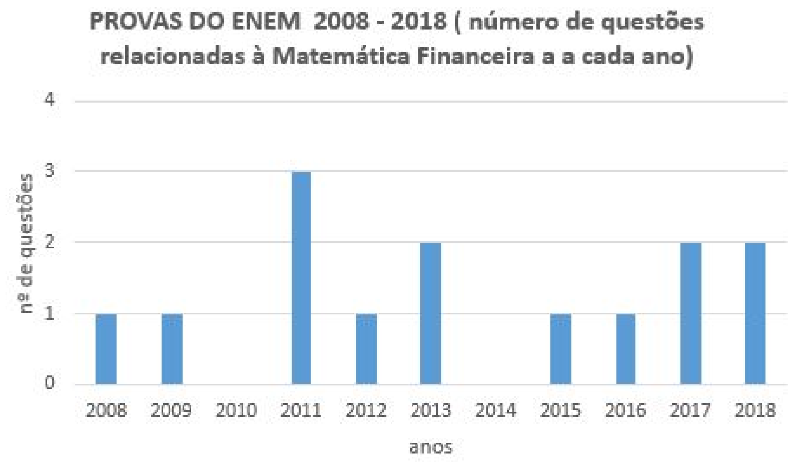
Este capítulo tem como objetivo apresentar situações problemas na área de matemática financeira com soluções com uso/sem de fórmulas da matemática financeira e disponibilizando em algumas soluções uso de tecnologia, mas sempre buscando a transversalidade dos tópicos essenciais ensinados no ensino médio para que o aluno construa uma visão mais crítica para tomada de decisões financeiras mais consciente. A pretensão deste capítulo é apresentar possibilidades de cálculos que agreguem uma visão mais crítica financeiramente para tomada de decisões. Não se tem no entanto, a pretensão de que a solução sejam as mais apropriadas, apenas mostrar que tópicos do ensino médio quando bem internalizados e associados com área financeira em diversos contextos auxiliam o discente numa maior ampliação de possibilidade de solução das questões.

A respeito disso Dante (2003, p.9) escreve da seguinte forma:

> "Para resolver problemas é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas. Assim, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados coma o total compreensão de todos os significados associados a eles".

Historicamente nos últimos 10 anos o ENEM sempre apresenta uma questão de matemática financeira, com exceção dos anos 2010 e 2014, e nos dois últimos anos teve 2 questões para cada prova, conforme figura 20. Normalmente as provas exploram problemas relacionados a juros compostos com destaque ao uso dos fatores de capitalização na construção do valor do dinheiro no tempo, e sempre numa contextualização aplicável no dia a dia do cidadão.

Figura 18: Numero de questões do ENEM (2008-2018)



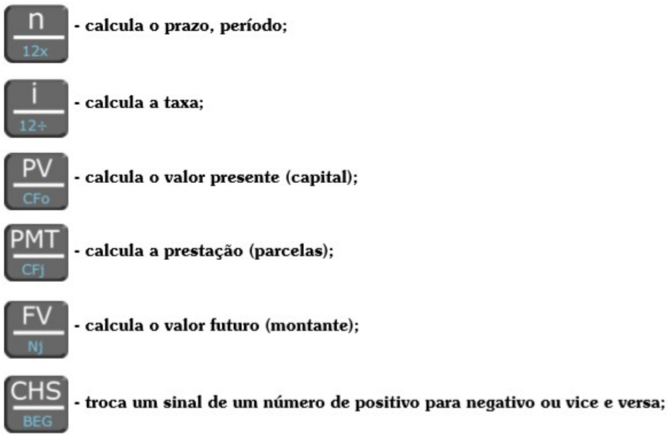
Fonte: O Autor

A cada situação problema será apresentado possibilidades de soluções nas questões do ENEM, no intuito não somente de resolvê-las, mas contextualizá-la no dia a dia para um aprimoramento no letramento financeiro do aluno, pois oferecerá uma maior compreensão e interpretação do resultado, alcançando assim uma visão muito ampla da solução do problema, além de fornecer uso, como o uso HP-12C, com a proposta de utilizar tecnologia digital como uma opção de solução para instigá-lo mais ainda na busca do conhecimento na área financeira, atendendo assim a proposta pela BNCC que define muito bem as habilidades e competência, e na medida do possível o uso de tecnologias digitais para melhor aprendizado do aluno.

Nas atividades abaixo pode-se usar a calculadora HP 12-C, para calcular qualquer uma das variáveis da fórmula dos juros compostos e cálculo de prestações.

Abaixo um resumo das teclas financeiras da calculadora HP 12C.

Figura 19: Teclas financeiras da HP 12C

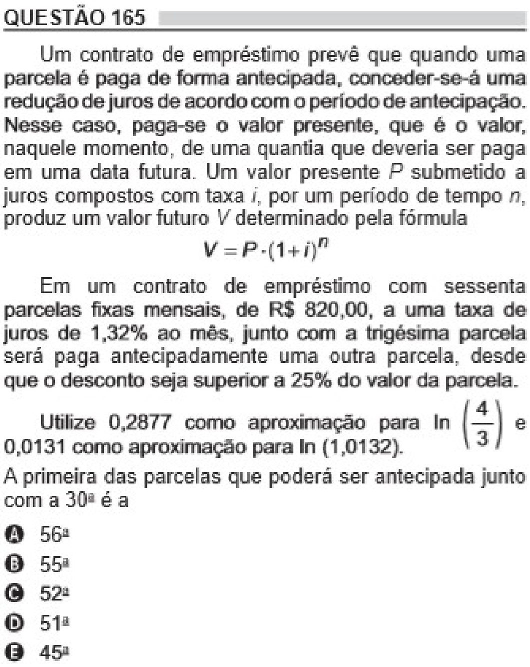


Fonte: O Autor

5.1 Situações problemas de matemática financeira

Exemplo 7. *Situação problema 1*

Figura 20: Questão 165, ENEM (2018)



QUESTÃO 165

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

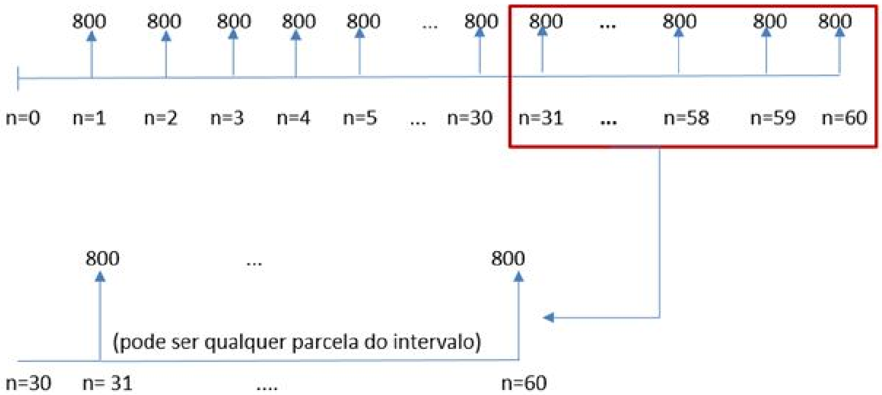
Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

- **A** 56ª
- **B** 55ª
- **C** 52ª
- **D** 51ª
- **E** 45ª

Fonte: ENEM (2018)

Figura 21: Fluxo de caixa (questão 165)



Fonte: O Autor

A parcela a ser antecipada está no intervalo que vai da parcela 31^a até a parcela 60^a: O enunciado destaca que juntamente com a 30^a parcela será paga uma parcela antecipada, desde que ela tenha um desconto superior a 25%, ou seja, a parcela antecipada deverá representa valor inferior a 75% de $R\$ \ 820,00 \left(P \leq \frac{3}{4}\right)$ de 820. No entanto em matemática financeira antecipar a juros compostos é dividir pelo fator de capitalização $(1+n)^n$ e aplicando as informações da fórmula de juros compostos no enunciado temos:

$V = P(1+i)^n$, o valor futuro (V) refere-se ao valor da prestação que será antecipada.

$$820 = P\,(1+i)^n$$

$$P = \frac{820}{(1+1,32\%)^n}$$

$$P = \frac{820}{(1,0132)^n}$$

Mas sabemos que esse P valor da parcela antecipada tem que ser: $P \leq \frac{3}{4}$ de 820 e juntamente com a expressão o valor de P, teremos a seguinte inequação:

$$\frac{820}{(1,0132)^n} \leq \frac{3}{4} \times 820 \Rightarrow \frac{820}{(1,0132)^n} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq (1,0132)^n \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{3}\right) \leq \ln\left(1,0132\right)^n$$

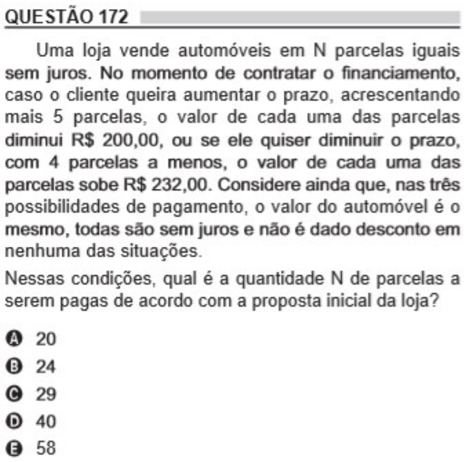
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{4}{3}\right) \leq n.\ln\left(1,0132\right) \Rightarrow 0,2877 \leq n.0,0131$$

$$\Rightarrow n \geq 21,9618$$

Portanto, a primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30^a parcela está a 22 posições a frente, logo a parcela será de número 52 $(30+22)$.

Exemplo 8. *Situação problema 2*

Figura 22: Questão 172, ENEM (2018)



QUESTÃO 172

Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- A 20
- B 24
- C 29
- D 40
- E 58

Fonte: ENEM (2018)

A questão acrescenta uma ideia bastante intuitiva sobre valor da prestação e números de parcelas. Quando existe um aumento no número de parcelas o valor da parcela diminui, pois existe uma maior diluição do valor ao longo do tempo, mas isso deve ser levando em consideração antes da resolução para mostrar que apesar do valor diminuir ao passo que aumenta o número de parcelas aumenta, os juros acumulados se tornam maior. Normalmente se negocia o valor da parcela de acordo com a capacidade de pagamento, no entanto deve perceber que o aumento vai gerar um maior volume de pagamentos apesar da diminuição do valor da parcela. Às vezes as pessoas não percebem que o valor das prestações gera um montante que representa o dobro ou triplo do valor do bem adquirido e nesse contexto está implícita a seguinte expressão: "Pague por dois produtos e leve somente 1". Isso deve estar bem claro na aquisição de qualquer bem. Esse contexto deverá ser bem delineado e de acordo com a pesquisa de campo desse trabalho - será apresentado na próxima seção - ficou bastante evidente que a maioria do professores que participaram da pesquisa sinalizam optar por negociar primeiramente valor da taxa de juros ao invés da quantidade de parcelas.

Seja N o número de parcelas e p o valor de cada parcela, podemos montar o seguinte sistema:

N.p (I)

(N+5)(p-200) (II)

(N-4)(p+23) (III)

De (I) e (II), temos:

$$N.p = N.p - 200 + 5p - 1000$$

$$p = 40N + 200 \quad \text{(IV)}$$

De (I) e (III), temos:

$$N.p = N.p + 232N - 4p - 4 \times 232$$

$$p = 58N - 232 \quad \text{(V)}$$

De (IV) e (V), temos:

$$N = 232 = 40N + 200 \; 18N = 432 \Rightarrow N = 24$$

Portanto, $N = 24$

Exemplo 9. *Situação problema 3*

Figura 23: Questão 144, ENEM (2017)

QUESTÃO 144

Um empréstimo foi feito à taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

A) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$

B) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}\right]$

C) $P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$

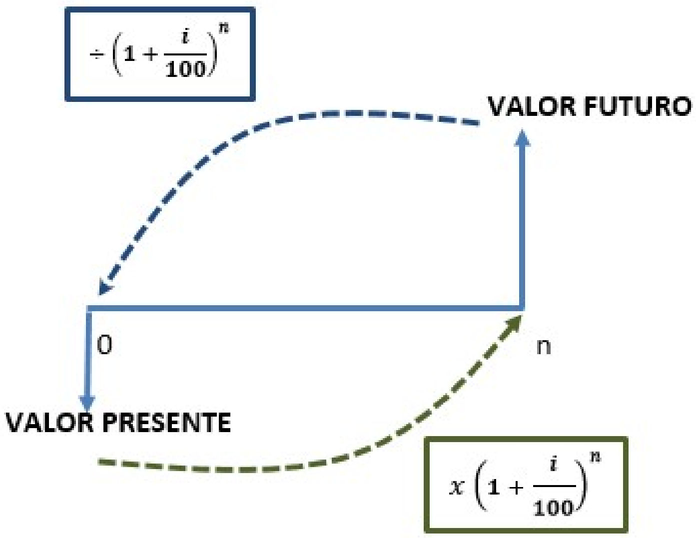
D) $P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{2i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{3i}{100})}\right]$

E) $P\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^3}\right]$

Fonte: ENEM (2017)

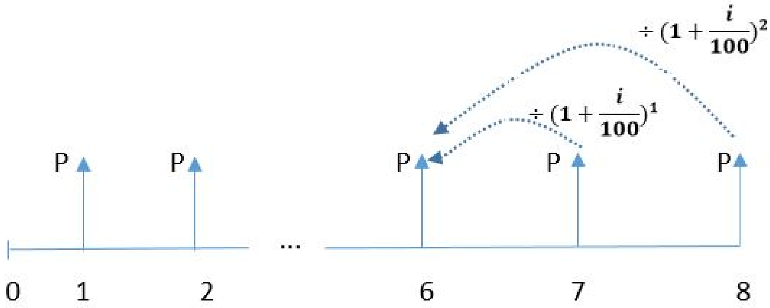
A questão apresentada releva a essência da matemática financeira que é o estudo do valor do dinheiro no tempo, que consiste em deslocar o valor para o futuro ou para o presente a partir do fator de capitalização ou descapitalização. A exigência dessa questão para o aluno o aluno é avaliar sua percepção quanto ao deslocamento de valores ao longo de um fluxo de caixa com uso de o fator de capitalização que quando multiplicado desloca o valor para o futuro e dividido transfere para uma data presente dentro do fluxo de caixa. Nessa questão em especial será deslocado duas parcelas para a data focal da parcela seis e consequentemente teremos dois fatores de capitalização com períodos diferente, onde as taxas nas alternativas do enunciado estão divididas por 100, mostrando a sua forma unitária. Resumindo, o deslocamento será das parcelas futuras 7^a e 8^a parcela para data presente da parcela 6^a conforme Figura 25. Sabemos que a fórmula de juros compostos relaciona o valor futuro e o valor presente, conforme a Figura 24.

Figura 24: Relação do valor presente e futuro através do fator de capitalização e descapitalização



Fonte: O Autor

Figura 25: Fluxo de Caixa da questão 144, ENEM (2017)



Fonte: O Autor

No momento que se pagar a 6^a parcela se antecipará as duas parcelas seguintes (7^a e 8^a) parcela, e teremos o valor a ser pago para quitar dado pela soma dos valores da 6^a parcela P com o valor da 7^a parcela deslocando-a um período a juros compostos $\left(\frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^1}\right)$ e o valor da 8^a parcela descontando 2 meses a taxa de juros compostos $\left(\frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right)$. Somando todas a 3 parcelas, temos:

$$\left[P + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^1} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

$$P\left(1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^1} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right).$$

Logo a alternativa a é a correta.

Exemplo 10. *Situação problema 4*

Figura 26: Questão 145, ENEM (2017)

QUESTÃO 145

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

A) 12.
B) 14.
C) 15.
D) 16.
E) 17.

Fonte: ENEM (2017)

Veja que a questão apresenta uma fórmula de cálculo da prestação. No entanto, não descreve os significados dos valores nela contidos o significado dos valores nela contido, onde tem-se o valor de $R\$$ 5.000 que representa o valor do empréstimo, e o valor 1,013 e 0,013 não referenciados no problemas, representam respectivamente: o fator de capitalização e a taxa unitária do empréstimo. Na realidade a fórmula descrita acima provem da seguinte fórmula:

$$P = \frac{C\,(1+i)^n\,i}{(1+i)^n - 1};$$

Com:

P: Prestação.

C: Valor Presente (empréstimo/financiamento)

i: taxa

n: quantidade de parcelas

Condição de resolução do problema é que a prestação seja no máximo $R\$ \, 400,00$ logo:

$$P \leq 400$$

$$P = \frac{500 \times 1,013^n \times 0,013}{(1,013)^n - 1} \leq 400$$

$$65 \times 1,013^n \leq 400 \times 1,013^n - 400$$

$$400 \leq 400 \times 1,013^n - 65 \times 1,013^n$$

$$400 \leq 335 \times 1,013^n$$

$$\log(400) \leq \log(335 \times 1,013^n)$$

$$(2,602) \leq 2,525 + 0,05n$$

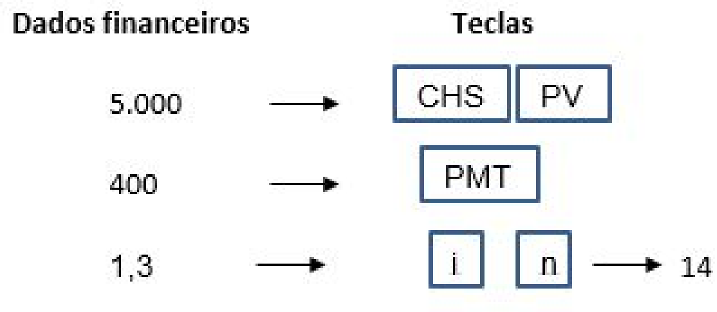
$$n \geq 15,9$$

Assim, o número menor de parcelas é dado por 16.

Percebam que a solução primou pelo conhecimento das propriedades de logaritmo na inequação. Apesar da questão tratar de uma fórmula que determina prestações dentro do sistema Price, o autor da questão apenas queria obter do aluno se conhece as propriedades de logaritmo. No entanto, essa questão em sala de aula na sua solução deverá estar associada com a fórmula de prestações utilizada no Sistema de Prestações Constantes, conhecida como sistema Price, e o professor deverá sinalizar que tal fórmula é construída a partir da fórmula da soma de termos finitos de uma progressão geométrica. Para instigar melhor o aluno quanto ao aprendizado poderá o professor utilizar alguns recursos tecnológicos com a calculadora HP 12C, Excel e a calculador financeira do Bacen.

Resolução na Calculadora Financeira HP -12C (Figura 28)

Figura 27: Comando na HP-12C na solução da questão 145

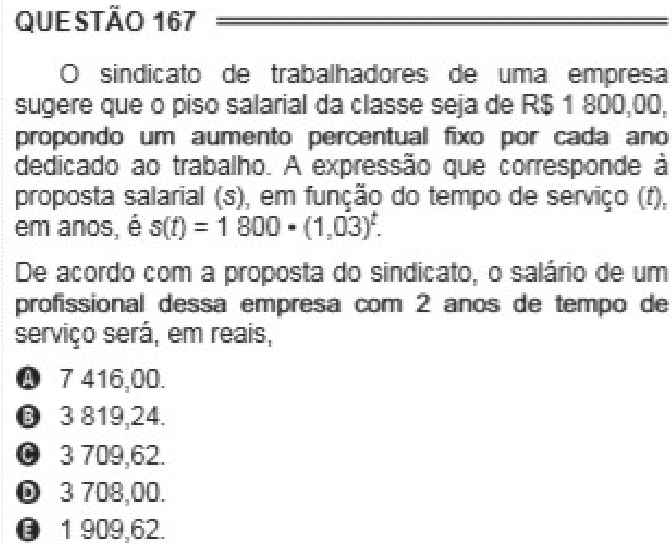


Fonte: O Autor

Há de se destacar que os resultados apresentados na solução do exercício da Figura 26, as respostas foram diferentes, pois na solução ENEM utilizou-se até a casa dos milésimos e na calculadora não teve limitação de uso de casas decimais, sendo o valor mais preciso.

Exemplo 11. *Situação problema 5*

Figura 28: Questão 167, ENEM (2015)



QUESTÃO 167

O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

A 7 416,00.
B 3 819,24.
C 3 709,62.
D 3 708,00.
E 1 909,62.

Fonte: ENEM (2015)

Nessa questão a função descrita no problema é para cálculo do ajuste do salário ao longo do tempo. O interessante é perceber que esta é uma função exponencial e quando associada aos juros compostos: $M(t) = C(1+i)^t$, onde $M(t)$ é o montante em função do tempo t, e i a taxa unitária. Com essa associação fica claro que a o fator de correção ou capitalização é dado por $1,03$ onde deduzindo assim que a taxa de ajuste anual é de 3% ao ano. Nessa situação substitui-se o valor de $t = 2$. Vejamos:

Solução:

$S(2) = 1.800(1,03)^2 = 1.800 \times 1,0609 = 1.909,2$

O professor nessa solução pode amplificar alguns significados na solução, por exemplo, o fator acumulado na solução foi de $1,0609$ fica, gerando uma aumento salarial de $6,09\%$ no período. E acrescentaria que todo reajuste salarial deverá ser comparado com a inflação acumulada no mesmo período para se avaliar se houve ganho ou perda salarial, pois se a inflação no período for menor que o ajuste acumulado que na questão foi de $6,09\%$, então o trabalhador terá ganho real, pois suplantou o ajuste suplantou o valor acumulado da inflação no período.

Outra solução seria de aplicar a metodologia de "reajuste sobre reajuste".

Primeiro reajusto (ano 1) $= 1.800 + 0,03 \times 1.800 = 1.854,00$

Segundo reajuste (ano 2) $= 1.854 + 0,03 \times 1.854 = 1.963,20$

Usando aplicativo - HP 12 C

1.800 CHS PV

$3 \to i$

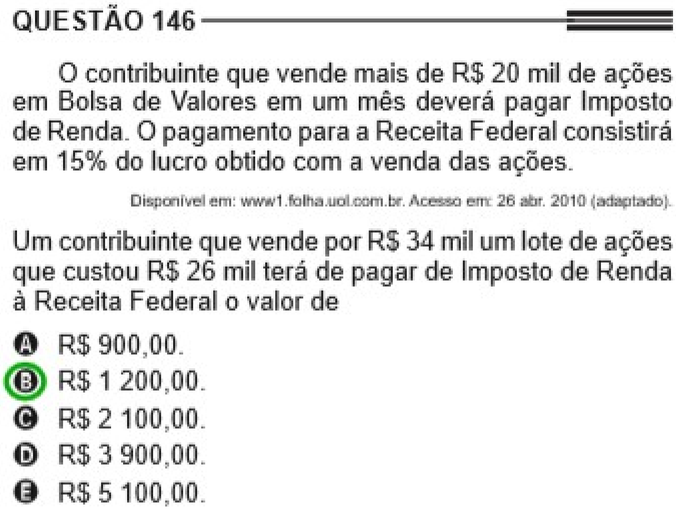
$2 \to n$

FV

O valor de $FV = 1.963,20$, representa o salário reajustado do período de dois anos.

Exemplo 12. *Situação problema 6*

Figura 29: Questão 146, ENEM (2013)



QUESTÃO 146

O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A R$ 900,00.
B R$ 1 200,00.
C R$ 2 100,00.
D R$ 3 900,00.
E R$ 5 100,00.

Fonte: ENEM (2013)

Solução: Essa questão envolve operação de porcentagem (alíquota do imposto de renda: 15%) somente sobre a rentabilidade do investimento. Poderá ocorrer a falta de entendimento da questão pelo aluno quanto a incidência do percentual de 15%. Errará se recair o percentual no valor de compra da ação ou de venda. Em sala de aula o professor poderá explorar um pouco sobre o que representa esse imposto de renda que o próprio nome já sugere, não é algo imposto e sobre a renda (por exemplo: salário e lucros de algumas aplicações financeiras[23]), e sempre recairá sobre o lucro que no caso no problema é $R\$ \ 8.000,00$, logo o valor do imposto de renda é $R\$ \ 1.200$ (15% de $R\$ \ 8.000,00$).

Exemplo 13. *Situação problema 7*

Figura 30: Questão 151, ENEM (2013)

QUESTÃO 151

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

A 15,00.
B 14,00.
C 10,00.
D 5,00.
E 4,00.

Fonte: ENEM (2013)

O problema explora uso de porcentagem sobre o valor, no caso, de $R\$ \ 50,00$. Temos duas porcentagem uma de 20% que representa a redução sobre o preço original

[23]A poupança, aplicação mais popular, não tem incidência de imposto de renda nos rendimentos

e nesse caso o aluno pode multiplicar o preço original por 0,80 (80%) que é o percentual que o valor fica após a redução do preço.

Valor após a redução do preço: $R\$ \ 50,00 \times 0,80 = R\$ \ 40,00$.

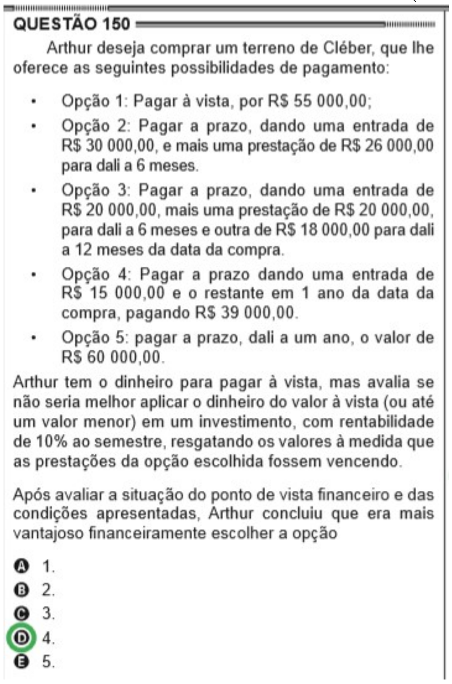
Uma vez calculado a redução do preço, o cliente que tem cartão fidelidade tem um desconto de 10% sobre o valor de compra. E nesse caso o percentual incidirá sobre o valor de $R\$ \ 40,00$: Valor de desconto: $R\$ \ 40,00 \times 0,10 = R\$ \ 4,00$.

Esse cálculo poderá ser reduzido só utilizando os fatores de correção de valor: Valor de desconto (D): $50 \times 0,80 \times 0,10 = 4$. Existe uma outra contextualização nas operações de desconto que são antecipações de recebíveis. A operação de desconto mais comum de mercado é o desconto comercial simples (valor nominal), ou seja, antecipação de recebíveis. A mais comum no mercado é o desconto comercial simples. Neste problema a operação não configura-se como antecipação de recebíveis é apenas um desconto de 10% sobre o valor nominal (preço reduzido).

Exemplo 14. *Situação problema 8*

Solução: Essa questão tem a proposta de avaliar se aluno consegue organizar cada opção em um fluxo de caixa, inserido a entrada, valor à vista e parcelas. A entrada tem efeito de diminuir o valor à vista no fluxo de caixa e valor residual, valor restante após entrada, irá forma as parcelas a partir de uma taxa de juros. As cinco opções deverão ser comparadas com um fluxo de caixa na aplicação financeira que rende 10%, e essa comparação só será mais exata se soubermos a taxa implícita de cada fluxo de caixa em cada opção. Pois se nas opções de pagamento a prazo a taxa for superior a taxa de aplicação, vantajoso será não aplicar, uma vez que minha rentabilidade não será superior aos juros das opções a prazo. Dentre todas as alternativas (Figura 32, 33, 34 e 35), a opção 4 é a única que não gera juros, pelo contrário existe uma bonificação de $R\$ \ 1.000,00$, uma vez que ele dá uma entrada de $R\$ \ 15.000$ e após 12 meses paga

Figura 31: Questão 150, ENEM (2012)



QUESTÃO 150

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

Fonte: ENEM (2012)

$R\$$ 39.000, 00 totalizando $R\$$ 54.000, 00, sendo que o valor à vista é de $R\$$ 55.000, 00.

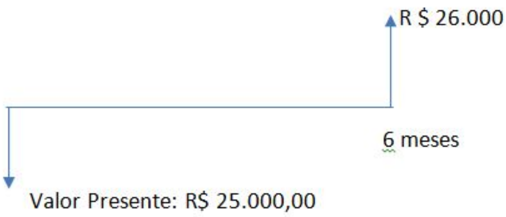
Veja em resumo os fluxos de caixa e os juros em cada um deles:

Opção 1:

Pagamento à vista.

Opção 2:

Figura 32: Fluxo de caixa (opção 2) - questão 150



Fonte: O Autor

À vista: $R\$ \ 55.000$

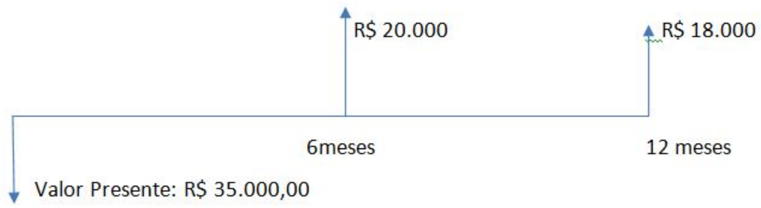
(-)Entrada: $R\$ \ 30.000$

(=)Valor Presente: $R\$ \ 25.000,00$

Juros da opção 2: $R\$ \ 1.000,00$

Opção 3:

Figura 33: Fluxo de caixa (opção 3) - questão 150



Fonte: O Autor

À vista: $R\$ \ 55.000,00$

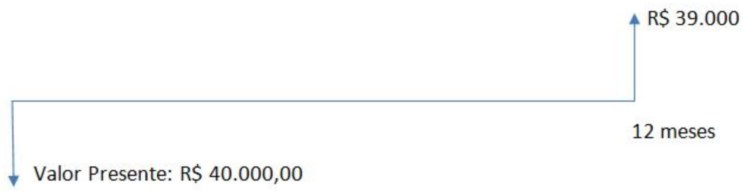
(-)Entrada: $R\$ \ 20.000,00$

(=)Valor Presente: $R\$ \ 35.000,00$

Juros da opção 3: $R\$ \ 3.000,00$

Opção 4:

Figura 34: Fluxo de Caixa (opção 4) - questão 150



Fonte: O Autor

À vista: $R\$ \ 55.000,00$

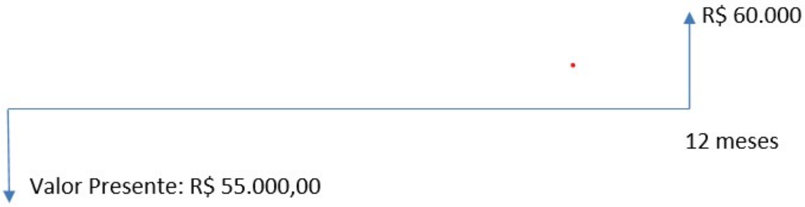
(-)Entrada: $R\$ \ 15.000,00$

(=) Valor Presente: $R\$ \ 40.000,00$

Juros da opção 4: não tem juros (bonificação de $R\$ \ 1.000,00$)

Opção 5:

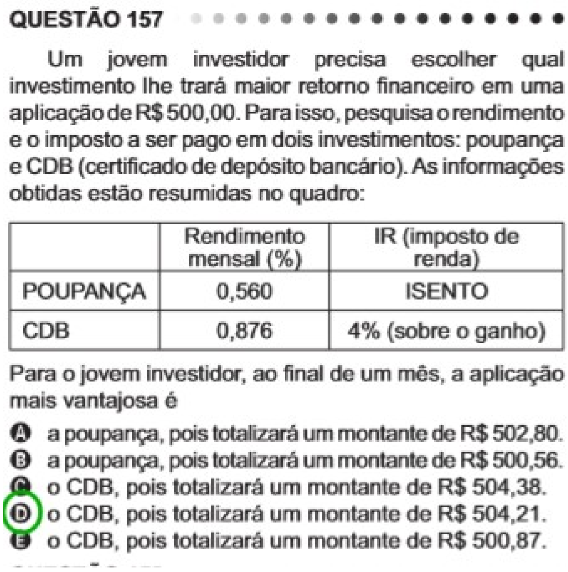
Figura 35: Fluxo de Caixa (opção 5)



Juros da Opção 5: $R\$ \ 5.000,00$

Exemplo 15. *Situação problema 9*

Figura 36: Questão 157, ENEM (2011)



QUESTÃO 157

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

Fonte: ENEM (2011)

A solução da questão (Figura 36) passa pela simulação das duas situações de aplicações financeira[24] com uso da fórmula de juros compostos, mas se o aluno utilizar

[24] As aplicações financeiras do mercado são regidas pela capitalização composta.

a formula de juros simples chegará no mesmo resultado, pois o período do problema é unitário (1 mês).

Poupança:

Valor Presente: $R\$ \ 500,00$

Taxa de juros: $0,560\%$ ao mês

Período: 1 mês

Utilizando a taxa de juros compostos

$F = P(1+i)^1 \rightarrow F = 500(1+0,0056)^1 = 500(1,0056) = 502,80$

Certificado de Deposito Bancário (CDB):

Valor Presente: $R\$ \ 500,00$

Taxa de juros: $0,876\%$ ao mês

Taxa do imposto de renda: 4%

Período: 1 mês

Utilizando a taxa de juros compostos

$F = P(1+i)^1$

$F = 500(1+0,00876)^1 = 500(1,00876) = 504,38$

No entanto a taxa de imposto incidirá somente sobre o ganho que é de $R\$ \ 4,38$, logo o imposto será de:

Imposto de Renda: $R\$ \ 4,38 \times 0,04 = 0,1752$

Rendimento Liquido[25] da aplicação do CDB após a dedução do imposto de renda: $R\$ \ 504,38 - R\$ \ 0,1752 = R\$ \ 504,2048$, logo o valor recebido pelo investidor caso aplique no CDB é superior ao da poupança.

Essa questão poderia ser respondida utilizando os fatores de correção do capital

[25] O rendimento liquido tem como memória de cálculo: Rendimento mensal x (1 - alíquota de imposto de renda), no caso do problema a taxa de rendimento do CDB que é de $0,876\%$ a.m. o investidor receberá somente 96% dessa taxa, uma vez que 4% será tributação de imposto de renda.

Tabela 14: Comparação da poupança $\times$ CDB

APLICAÇÕES	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)	Rendimento liquido
POUPANÇA	$0,560\%$	ISENTO	$0,5600\%$
CDB	$0,876\%$	4%	$0,8409\%$

Fonte: O Autor

A partir da Tabela 14 a taxa do rendimento líquido será multiplicada pelo valor da aplicação o que vai gerar o lucro líquido já deduzido o imposto de renda:

Lucro Líquido: $R\$\ 500,00 \times 0,8409\% = R\$\ 4,2045$

Valor Total: $R\$\ 500 + R\$\ 4,2045 = 504,2045$ (alternativa d da questão)

Exemplo 16. *Situação Problema 10*

Figura 37: Questão 162, ENEM (2011)

QUESTÃO 162

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

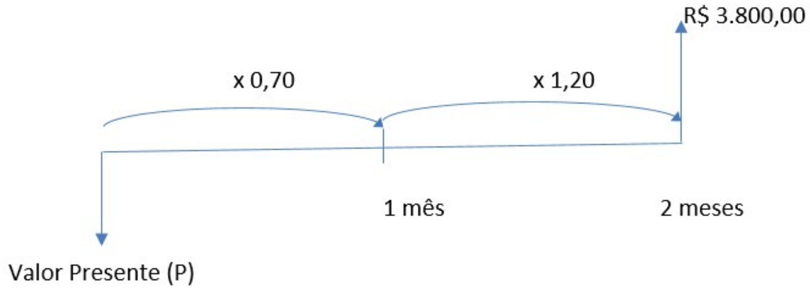
A R$ 4 222,22.
B R$ 4 523,80.
C R$ 5 000,00.
D R$ 13 300,00.
E R$ 17 100,00.

Fonte: ENEM (2011)

Para entender a solução da questão (figura 39) vamos utilizar os fatores que determinam os valores a partir das taxas do enunciado que determina os valores da linha do tempo, ver figura 40.

$P = 3.800 \div (1,20 \times 0,70) = 4.523,81$

Figura 38: Fluxo de caixa da questão 162, ENEM (2011)



Fonte: ENEM (2011)

Essa questão explora bastante a ideia de fator de correção de capital. No primeiro período o valor aplicada perde 30%, ou seja, o valor corrigido será 70% do valor principal e no mês seguinte o valor aumenta em 20%, corrigindo o valor em 120% (fator de 1,20). No sentido valor presente para o valor futuro os fatores serão multiplicados e no sentido inverso que os fatores serão divididos. O interessante nessa questão é o aluno perceber que o valor futuro ficou inferior ao valor presente, pois se multiplicarmos apenas os fatores $(0,70 \times 1,20 = 0,84)$ perceberemos que o valor resultante é de 84% do valor presente. O Professor poderia nesse caso explorar a ideia que perder 30% no primeiro mês e ganhar 20% no mês seguinte não resulta numa perda de 10% em todo o período. Como podemos constatar o valor futuro foi de 84% do valor presente resultando numa perda de 16% e não 10%, pois a capitalização no problema é composta.

Exemplo 17. *Situação Problema 11*

Figura 39: Questão 178, ENEM (2011)

QUESTÃO 178

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

A. escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
B. escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
C. escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
D. escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
E. escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Fonte: ENEM (2011)

Solução:

Para facilitar a análise da questão agregaremos informações da Tabela 15 no intuito de analisar cada alternativa da questão da figura 41.

Agora analisaremos cada alternativa.

i. Alternativa *a* e *b*: não estão corretas em virtude de os resultados anuais não serem proporcionais nos investimentos A e C pela natureza da capitalização dos investimentos que é composta conforme Tabela no enunciado. Por exemplo, o investimento O investimento A que rende 3% ao mês terá acumulado conforme Tabela 15 um percentual de $42,6\%$ no ano.

Tabela 15: Fator de capitalização nos períodos estudados da questão 178

n	$1,03^n$	Fator de capitalização (correção monetária) com taxa de $3\%(1+3\%)^n = 1,03^n$
3	1,093	O fator representa no período de 3 meses um aumento de aproximadamente $9,3\%$ no trimestre $1,093-1=0,093$ ou $9,3\%$
6	1,194	O fator representa no período de 6 meses um aumento de aproximadamente $19,4\%$ no semestre $1,194-1=0,193$ ou $19,3\%$
9	1,305	O fator representa no período de 9 meses um aumento de aproximadamente $30,5\%1,305-1=0,305$ ou $30,5\%$
12	1,426	O fator representa no período de 12 meses um aumento de aproximadamente $42,6\%$ no ano $1,426-1=0,426$ ou $42,6\%$

Fonte: O Autor

ii. Alternativa c: Nessa alternativa fica visível que o investimento A é maior que o investimento B, pois A rende 42% ao ano e B rende 36% ao ano. O investimento C rende a cada semestre 18%, logo no ano renderá $39,24\%$ $(1,182 = 1,18\times1,18 = 1,3924)$ ou seja, $39,24\%$, assim o investimento A supera o investimento B. Então, a alternativa c está correta.

iii. Alternativas d e e: não estão corretas, pois pelo comentário na alternativa c o investimento de A supera os dois outros investimentos.

Há de se ressaltar que o problema em nenhum momento comenta sobre o juro composto, mas pela tabela do enunciado ele apresenta o fator de capitalização composta e assim de forma implícita categoriza a questão no contexto do juro composto.

Exemplo 18. *Situação problema 12*

Figura 40: Questão 162, ENEM (2009)

Questão 177

João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

A renegociar suas dívidas com o banco.
B pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
C recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
D pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
E pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

Fonte: ENEM (2009)

Solução: A questão evidencia a tomada de decisão a partir 4 possibilidades de pagamento das dívidas. Em resumo dessas possibilidade elencamos as alternativas conforme a Figura 41:

Figura 41: Tabela de soluções da questão 177, ENEM (2011)

DÍVIDA	Situação Atual	Alternativas de Renegociação			
		Liquidação	Reescalonamento único	Empréstimo de R$ 1.800 do amigo João	Empréstimo de R$300 do amigo João
Cheque Especial	12 x R$ 150 = R$1.800	10 x 150 = R$ 1.500	18 X 125	1800 x 1,25	300 x 1,25 + 12 x 150
Cartão de Crédito	5 x R$ 80=400	400 X 75% = R$ 300			
TOTAL	R$ 2.200	R$ 1.800	R$ 2.250	R$ 2.250	R$ 2.175

Fonte: ENEM (2011)

Com base na figura 41 descreveremos as quatro opções:

i. Liquidação: redução em 2 parcelas para liquidar o cheque especial e desconto de 25% para liquidar o cartão de credito (ter um desconto de 25% significar pagar 75% do saldo devedor);

ii. Reescalonamento Único: essa alternativa unifica todas a dividas e projeta 18 parcelas de 125 que gera um montante de $R\$$ 2.250;

iii. Empréstimo do amigo João no valor de $R\$$ 1.800: pegar o dinheiro de João para quitação das dívidas elevará o seu custo em 25%, ou seja, multiplicar pelo fator 1,25 é determinar um montante com custo de 25%. Nessa situação ele poderá pegar o valor de $R\$$ $1.800,00$ mais que em 18 meses fica valor igual ao que foi proposto no Reescalonamento único ($R\$$ 2.250), sem vantagem;

iv. Empréstimo do amigo João no valor de $R\$$ 300: esse valor seria para liquidar somente o cartão de credito, proposta do Banco ($R\$$ 400 com desconto de 25%). Em 18 meses o $R\$$ 300 se transformaria em $R\$$ $375,00$ que somado valor do cheque especial ($12 \times 125 = R\$$ 1.800) totalizaria $R\$$ 2.175.

A questão buscar construir cenários de alternativas para o João e comparar essas alternativas com o custo do dinheiro. Poderia existir outras possibilidades e se fazer conjecturas, mas a questão restringe muito bem as alternativas de decisão financeira. Todas as alternativas deverão ser comparadas a situação atual. Logico que liquidar a dívida seria a melhor alternativa, no entanto a questão não oferta essa possibilidade nas alternativas e deixa claro que João não tem recursos próprio para liquidação. Assim tomar empréstimo do amigo José somente para liquidação do cartão de credito e manter o prazo do cheque especial vai totalizar $R\$$ $2.175,00$ valor menor que a situação atual, reescalonamento único e empréstimo de $R\$$ $1.800,00$ do amigo José. Diante disso a alternativa da questão é a letra e.

Exemplo 19. *Situação problema 13*

Figura 42: Questão 33, ENEM (2008)

Questão 33

A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções	(-) Descontos
Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

A) M(x) = 500 + 0,4x.
B) M(x) = 500 + 10x.
C) M(x) = 510 + 0,4x.
D) M(x) = 510 + 40x.
E) M(x) = 500 + 10,4x.

Fonte: ENEM (2008)

A questão apresenta um boleto bancário algo muito comum no dia a dia das pessoas. Nele vem expresso várias informações, o valor do boleto até o vencimento e instruções de pagamento para quem atrasa o boleto: multa e juros de atraso. Há de se destacar que a multa é um valor fixo que não varia com o tempo, representa o valor que será acrescido pelo simples fato de atrasar o pagamento, e o juros de atraso, mas conhecido como juros de mora é corrigida pelo tempo, quanto maior o tempo mais juros de mora se pagará. A proposta da questão é avaliar a modelagem matemática e as alternativas são funções afim. Se o valor do boleto no atraso tem dois valores fixos - Principal ($R\$$ $500,00$) e a Multa ($R\$$ $10,00$) - esses valores não são corrigido pelo tempo (variável x), somete o valor de $R\$$ $0,40$ será corrido pelo tempo. Assim teremos como resultado do montante (Principal + Multa + juros de atraso):

$M(x) = 500 + 10 + 0,40x$

$M(x) = 510 + 0,40x$

O professor poderá utilizar essa questão como aplicação da função afim e evidenciar o elementos de composição da função. Mostrar que a taxa de variação (coeficiente angular) é a multa de 0,40 que cresce diariamente e o valore fixo $R\$ \ 510,00$ ($R\$ \ 500 + R\$ \ 10,00$) o coeficiente linear e destacar ainda o domínio dessa função $D = x \in \mathbb{N}$, em virtude do números serem inteiros e positivos.

Outra forma de solução da questão:

Se M é o símbolo que representa a mensalidade a ser paga, temo que o que segue abaixo:

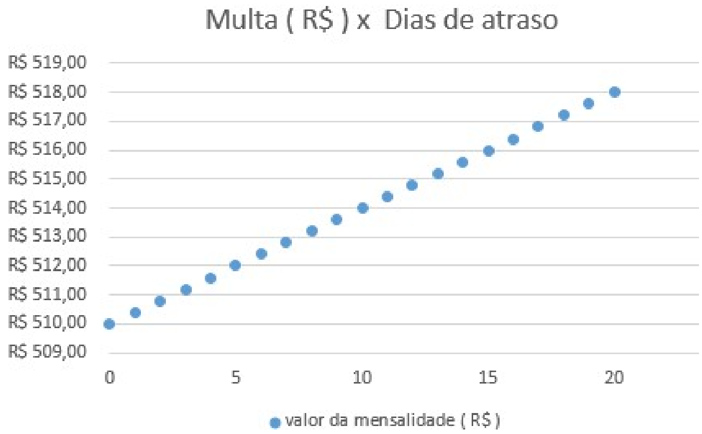
i. 1 dia de atraso: $M(1) = 500 + 10 + 0,40 \times 1 = 510 + 0,40 \times 1 = 510,40$

ii. 2 dias de atraso: $M(2) = 500 + 10 + 0,40 \times 2 = 510 + 0,40 \times 2 = 510,80$

iii. x dias de atraso: $M(x) = 500 + 10 + 0,40x$

Verificamos que a mensalidade M (em $R\$$) varia linearmente com a quantidade x (dias em atraso) no pagamento, conforme representado na figura 43.

Figura 43: Dias de atraso do pagamento e mensalidade



Fonte: O Autor

Tomemos, por exemplo, os pontos $P_1 = (x_1; M_1) = (0; 510)$ e $(x_2; M_2) = (5; 512)$ da reta da figura 43. Com esse pontos, podemos calcular a taxa de variação ou coeficiente angular "a"da função afim:

Conhecendo a função afim: $f(x) = ax + b$, onde "a"coeficiente angular $(0,4)$ e b o valor fixo ($R\$\ 500 + R\$\ 10 = R\$\ 510$)

$M(x) = ax + b$

$M(x) = 0,4x + 510$

6 RESULTADO E ANÁLISE DA PESQUISA

Este capítulo apresenta os resultados da pesquisa feita aos professores do PROFMAT/UEMA e seus alunos do ensino médio.

6.1 Metodologia Utilizada

A natureza dessa pesquisa foi quantitativa a partir de um questionário de campo onde os objetos de estudo numa abordagem descritiva, pois destaca as características de um determinado público e suas relações entre variáveis em questão. De acordo com Gil (2002), uma das características mais fortes da pesquisa descritiva é a utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados.

Sobre as ferramentas para a coleta de dados, o estudo fez uso de pesquisa bibliográfica e questionário. Para Vergara (2000), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já formado, composto, principalmente, de livros e artigos científicos e é fundamental para o levantamento de dados básicos sobre os aspectos ligados à temática do presente trabalho e a bibliográfica se baseou fundamentalmente nas contribuições de vários autores.

O questionário foi aplicado tanto para os alunos quanto para os professores (vide apêndice) de forma anônima e sem a presença do pesquisador. As questões foram objetivas, de modo suscito e sem ambiguidade com perguntas e alternativas lacônicas. De acordo com Marconi e Lakatos (1996, p.88) sobre o questionário ele é como "uma cadeia ordenada de perguntas, respondidas sem a presença do pesquisador". Tal ferramenta permite padronizar as questões, o que possibilita uma interpretação mais uniforme de quem a responde facilitando a reunião e comparação das respostas, além de certificar o anonimato do interrogado.

A pesquisa teve a participação de 30 professores do programa PROFMAT/UEMA que lecionam no ensino médio e responderam um questionário online de 15 questões pelo google forms. Esses mesmos professores que participaram da pesquisa promoveram aplicação de um outro questionário, somente para alunos do ensino médio, com 25 questões pela plataforma do google forms, o que totalizou 234 alunos que responderam ao questionário e desse total apenas 7 não concordaram em participar.

6.2 Resultado e análise da pesquisa

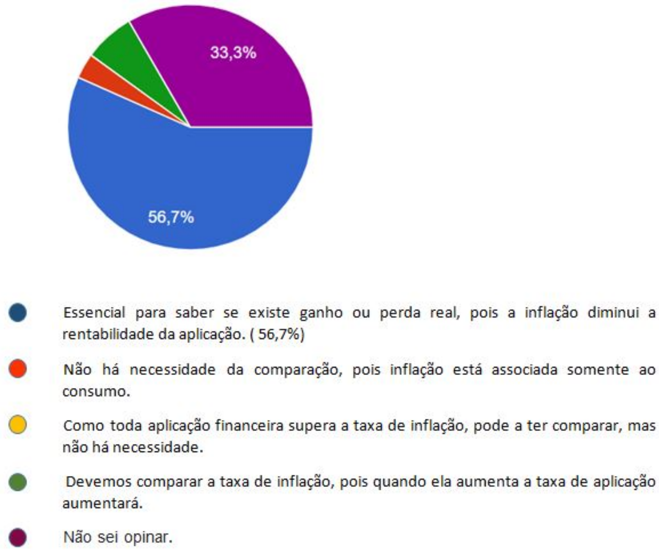
A pesquisa centrou-se em perguntas objetivas para professores e alunos, e para cada pergunta foi gerado um gráfico pela plataforma google forms, no total, foram gerados 40 gráficos e destes, 15 foram escolhidos para direcionar uma analise mais objetiva quanto ao que se intenciona neste trabalho, que é entender as necessidade de alunos e professores quanto ao ensino-aprendizagem para formação de um cidadão com letramento financeiro e que passa por conhecer a maturidade do aluno em matemática financeira no contexto da temática educação financeira e do professor quanto a forma de ensinar e a sua necessidade para melhor desenvolver o trabalho de matemática financeira mais próxima do que orienta a BNCC no âmbito das competências e habilidades, e por outro lado, inserido todos os gráficos, corria-se o risco de avolumar muitos dados e assim tornar cansativo a analise da pesquisa. Os dados completos da pesquisa estão ao final deste trabalho em anexo para quem quiser fazer uma leitura completa de todos os resultados.

Diante disso, apresentaremos os gráficos mais relevantes e comentaremos os seus resultados tanto de professores e alunos, e em algum momento, comparando os gráficos que tem complementaridade entre professores e alunos. Começamos com a ideia de analise da taxa inflacionária (entender ela é uma habilidade vinculada à 1º competência da matemática do ensino médio). As Figuras 44 e 45 relatam sobre o efeito inflacionário na taxa de qualquer aplicação financeira para verificar se aluno e professor conhecem o efeito inflacionário quanto ao ganho real, uma vez que a taxa de qualquer aplicação financeira a taxa inflacionaria diminuiu seu ganho. Constatou-se que a maioria dos professores, quase (57%), sabem que deve ser considerada para efeito do ganho real, enquanto que a maioria dos alunos não sabe opinar, (45, 8%) sobre esse efeito,veja a Figura 44.

Figura 44: Gráfico da questão 19 -Sobre comparar taxa inflacionária × taxa de aplicação financeira (alunos)

Fonte: O Autor

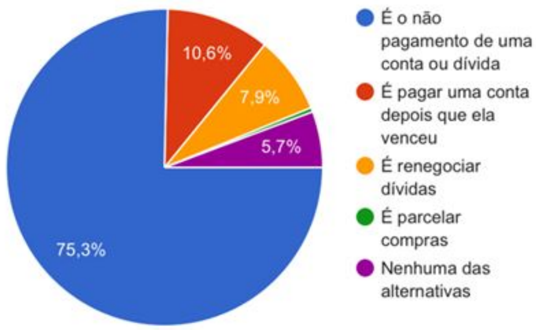
Figura 45: Gráfico de setores da questão 11 - taxa de aplicação × taxa inflacionária (professores)



Fonte: O Autor

A Figura 46 mostra o conhecimento sobre o conceito de inadimplência e a maioria dos alunos, $75,3\%$ dos que responderam à pesquisa, conhecem o conceito correto o que ajuda interpretar melhor os problemas que contextualizam a ideia de inadimplência que apesar de muito usual no dia a dia, mostrou que quase $\frac{1}{4}$ dos alunos da pesquisa não souberam conceituar corretamente

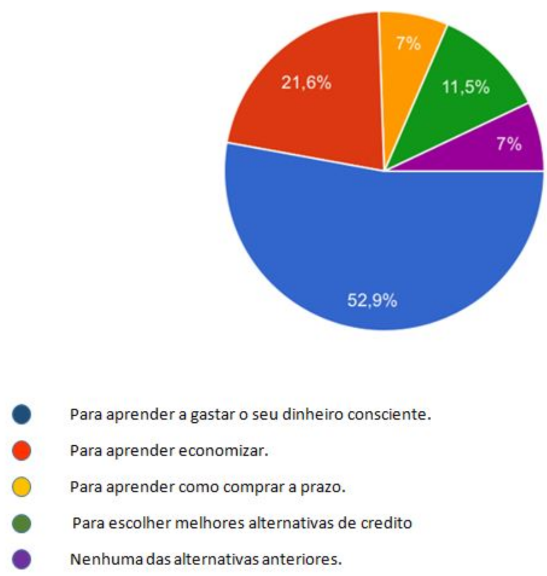
Figura 46: Gráfico da questão 17 - o que é inadimplência (alunos)



Fonte: O Autor

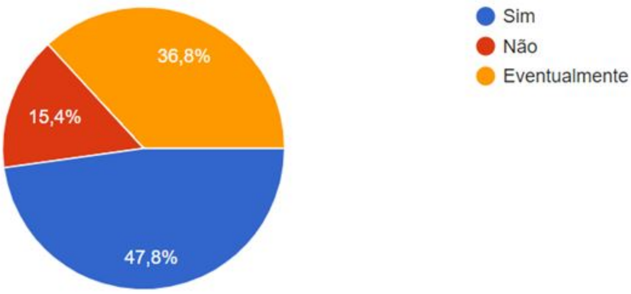
As duas Figuras 47 e 48 apresentam Grafico que se completa, sendo o primeiro destacando o objetivo de uma boa educação financeira e o segundo o perfil do aluno no que tange ser consumista ou poupador. No primeiro gráfico fica evidente que o consumo tem que ser consciente e economizar são os objetivos de uma boa educação e que os alunos na sua maioria, de acordo com os resultados do gráfico da questão 15, mantém controle financeiro. E nesse contexto de acordo com a pesquisa quase 80% dos alunos afirmam receber alguma renda dos seus pais (ver anexo - Resultado do questionário dos alunos na questão 12).

Figura 47: Gráfico de setores da questão 14 - Para que serve uma boa educação financeira(alunos)



Fonte: O Autor

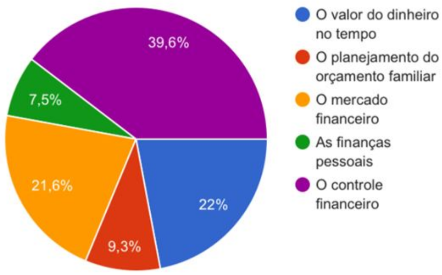
Figura 48: Gráfico de setores da questão 15 - Controle financeiro sobre renda (alunos)



Fonte: O Autor

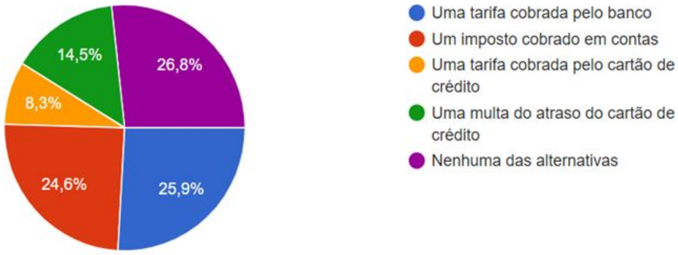
Ao longo desse trabalho destacamos os elementos básicos da matemática financeira, dentre eles, o juro, com sua natureza de valorização do dinheiro no tempo e que a essência da matemática financeira está em justamente estudar o valor do dinheiro no tempo em fluxo de caixa. Na pesquisa procurou-se saber se o aluno sabe sobre o objeto de estudo da matemática financeira e a maioria pontuou que ela é para o controle financeiro Figura 49, na realidade uma parcela de 22% alunos destacaram o verdadeiro objetivo da matemática financeira e complementado esses dados a maioria dos alunos disse que juros é algum tipo de tarifa, conforme Figura 50, ou seja quase 63% erraram o conceito de juros.

Figura 49: Gráfico de setores da questão 04 - A matemática financeira tem como objetivo estudar (alunos)



Fonte: O Autor

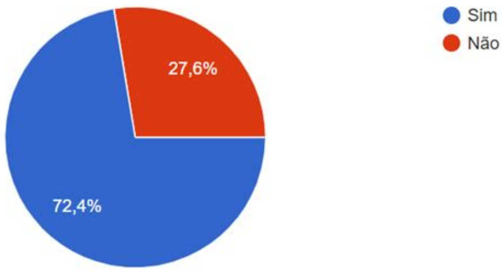
Figura 50: Gráfico de setores da questão 05 - O que são juros?(alunos)



Fonte: O Autor

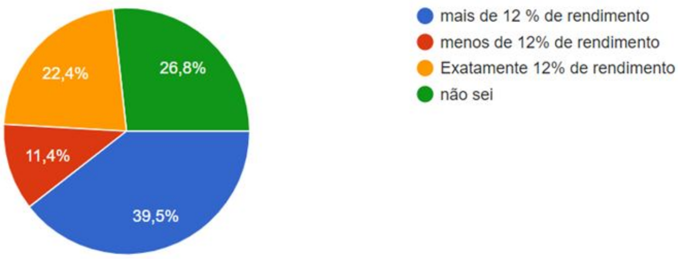
A Figura 51 apresenta o gráfico da questão 07, sobre diferenciação entre juros simples e compostos, e a questão 21 (Figura 52), caso prático de juros compostos, abaixo mostram um contraponto, uma vez que quase 72% dos alunos na pesquisa afirmam saber diferenciar juros simples de juros compostos, no entanto, quando argumentados sobre um caso prático sobre de juros compostos quase 60% não conseguiram acertar a questão. Isso mostra que responder se sabe a diferenciação entre tipos de juros não garante conhecer a metodologia de cálculo de juros simples e compostos.

Figura 51: Gráfico de setores da questão 07 - Sabe diferenciar juros simples de juros compostos?(alunos)



Fonte: O Autor

Figura 52: Gráfico de setores da questão 21 - educação financeira na grade curricular da educação básica (alunos)



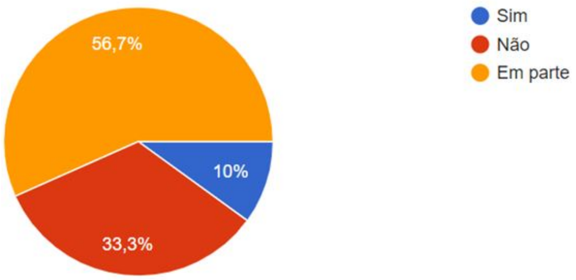
Fonte: O Autor

O resultado do Gráfico da (Figura 53), quase 38% deles, apoiam que educação financeira não seja algo restrito apenas nas aulas de matemática e sim interligadas a outras áreas de conhecimento, e praticamente no mesmo percentual querem a educação financeira sob a tutela de um professor de matemática e dentro da disciplina de matemática geral ou financeira. E como ressaltado na BNCC configura-se que a educação financeira seja interligada a outras áreas de conhecimento. E quanto a BNCC um dado muito relevante é que apenas 10% conhece as habilidade e competências da BNCC no ensino da matemática financeira, conforme Gráfico 55.

Figura 53: Gráfico de setores da questão 8 - juros compostos, caso prático (alunos)

Fonte: O Autor

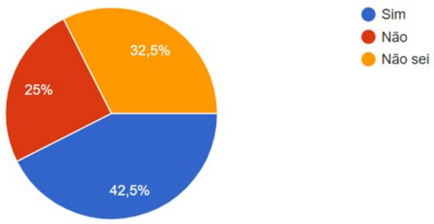
Figura 54: Gráfico de setores da questão 09 - BNCC e a matemática financeira (professores)



Fonte: O Autor

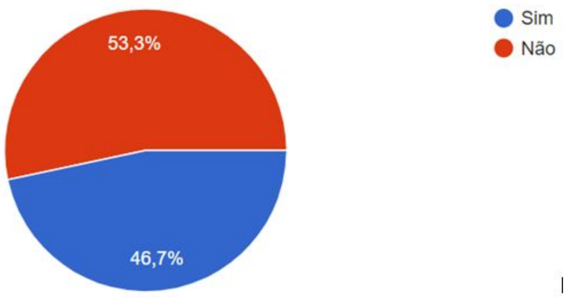
A proposta desse trabalho no ensino da matemática financeira no ensino médio é seguir o que propõe a BNCC no ensino não pontual da matemática financeira interligando-a a vários assuntos de matemática, como a funções e progressões. Diante dessa proposta foi questionado aos alunos e professores sobre associação desses ao estudo da matemática financeira. E como se vê nas Figuras 55 e 56 onde os resultados foram bastante próximos, professores em torno de 47% fazem essa associação, e alunos afirmam em torno de 43% que tiveram algum aprendizado dentro dessa dinâmica de ensino da matemática financeira. E complementando verificamos os professores associam mais uso da funções exponenciais e progressão geometria ao estudo dos juros compostos, como se vê na Figura 57.

Figura 55: Gráfico de setores da questão 09 - Estudo da funções/progressões no ensino da matemática financeira (alunos)



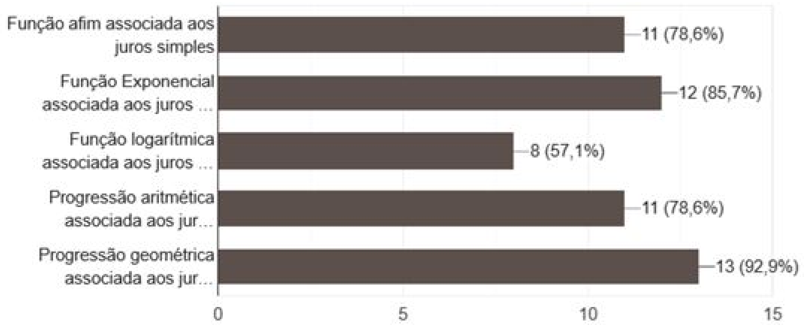
Fonte: O Autor

Figura 56: Gráfico de setores da questão 07 - Estudo da funções/progressões no ensino da matemática financeira (professores)



Fonte: O Autor

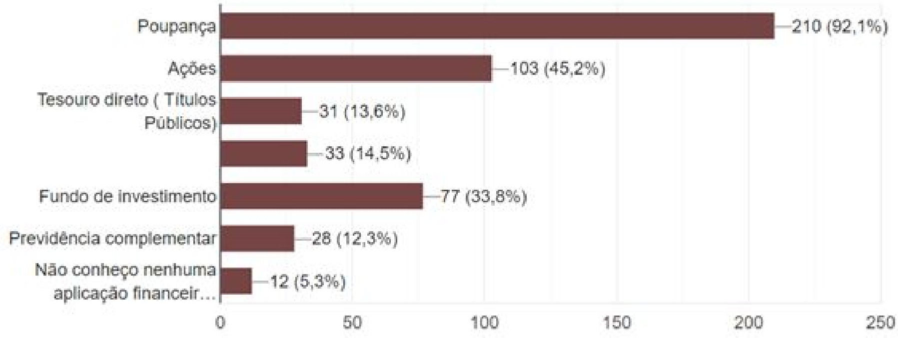
Figura 57: Gráfico de setores da questão 08 - Associação dos temas do estudo funções/progressões ao ensino da matemática financeira (professores)



Fonte: O Autor

A pesquisa tentou mapear o comportamento de consumo e, conhecimento de produtos de aplicação financeira pelos alunos. Ele se declaram em sua maioria como consumista mais que poupadores (Figura 59) e tem conhecimento limitado sobre o portfólio de produtos de aplicações financeiras, conhecendo. A maioria deles, como a maioria da população brasileira tem conhecimento da poupança, aplicação financeira mais tradicional e popular, como verificamos na Figura 58.

Figura 58: Gráfico de setores da questão 16 - Associação dos temas do estudo funções/progressões ao ensino da matemática financeira (Alunos)



Fonte: O Autor

Figura 59: Gráfico de setores da questão 23 - consumista $\times$ poupador (alunos)

Fonte: O Autor

Algo muito destacável nessa pesquisa foi que apesar da maioria dos professores (70%) conhecer os dois sistemas - SAC e Price - e suas metodologias de cálculos (Figura 60), os alunos em sua maioria ($64,9\%$) não conhecem os sistemas (Figura 61). Nesses dois resultados verificamos que professores apesar de conhecedores dos sistemas não aplicam em sala de aula, conforme se verifica na Figura 62. Há de se destacar que no programa do PROFMAT os sistemas de amortização (SAC e Price) não são contemplados na grade de assuntos na disciplina matemática discreta, onde está inserida a matemática financeira.

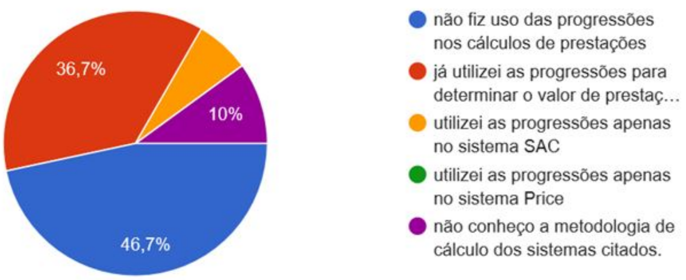
Figura 60: Gráfico de setores da questão 14 - sistemas de amortização (professores)

Fonte: O Autor

Figura 61: Gráfico de setores da questão 25 - sistemas de amortização (alunos)

Fonte: O Autor

Figura 62: Gráfico de setores da questão 15 - sistemas de amortização aplicações em sala de aula (professores)



Fonte: O Autor

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos trabalhos foram desenvolvidos pelos alunos do programa PROFMAT dentro da temática matemática financeira com registro de 136 dissertações, o que tem demonstrado o grande interesse dos professores em discorrer sobre o tema. E na maioria dos trabalhos sobre essa temática, a proposta é sobre a capacitação do aluno quanto ao letramento financeiro. Este trabalho evidenciou necessidade do aluno do ensino médio desenvolva o letramento financeiro em todas as séries, e a pesquisa procurou mapear o domínio da matemática financeira e conhecimento básico na educação financeira tanto de professores do programa PROFMAT/UEMA quanto de seus alunos. O desafio dos docentes quanto ao ensino da matemática financeira, já ressaltado neste trabalho, é capacitá-los não somente com o propósito de manipulação de formulas financeira, como muita vezes propõe o ENEM, mas agregar uma maturidade financeira ao aluno que tem conhecimento do orçamento familiar doméstico e onde maioria deles, recebe algum tipo de renda dos seus pais, como constatado na pesquisa, e nesse contexto a tomada de decisão faz parte do dia a dia do aluno.

Diante disso, a pesquisa teve como objeto central mapear o letramento financeiro dos alunos e verificar se a proposta de transversalidade proposta pela BNCC é algo já vivenciado pelos professores e percebidos pelos alunos. Nesse ponto sobre a BNCC, a pesquisa apresentou que $67,5\%$ dos professores não conhecem as competências e habilidades associadas ao ensino da matemática financeira.

Vimos que a pesquisa foi construída a partir de dois questionários, um para os professores e outro para os alunos com intuito que em algum momento da análise da pesquisa pudéssemos fazer comparações. Uma das comparações mais destacáveis é se a matemática financeira era associada aos temas mais usuais do ensino médio, como estudo da funções e progressões. E o resultado foi muito próximo, menos da metade dos professores, $46,7\%$, fazem associações da matemática financeira com outros temas do ensino médio e $42,5\%$ dos alunos afirmaram que vivenciam essas associações. O estudo da função exponencial e progressão geométrica foram os assuntos mais utilizados na aplicação da matemática financeira no ensino médio. Os percentuais apresentados demonstram uma proximidade no resultado entre professores e alunos, mas mostra que há uma necessidade de mais aplicações da matemática financeira dentro do estudo das funções e progressões. Aqui podemos abrir um parêntese e destacar que na BNCC fica bastante evidente trabalhar a matemática financeira nos assuntos de funções - afim, quadrática, exponencial e logarítmica -, mas ela não evidencia de forma clara a matemática financeira associada ao estudo das progressões, que como sabemos são base na conceituação de juros simples/compostos, e construção das metodologias de cálculo dos sistemas de amortização.

Ainda sobre a comparação entre os dois públicos da pesquisa - professores e alunos -, quanto ao uso das progressões como aplicação na matemática financeira utilizando os sistemas de amortização, os resultados mostram que 70% dos professores conhecem os sistemas, mas não mantém esse mesmo percentual quanto questionados sobre a metodologia de cálculo dos sistemas SAC e Price, somente $36,7\%$ fizeram uso de aplicações em sala de aula. E isso repercuti sobre o resultado, onde os alunos afirmam não conhecer os sistemas de amortização. E tais sistemas não foram explorados de forma específica em toda história do ENEM, entretanto, no ano de 2017 teve uma questão que apresentou a fórmula do sistema Price (ver exemplo 10), mas somente para avaliar uso dos logaritmos na determinação do prazo.

Outro dado relevante e importante neste trabalho foi sobre o uso de tecnologia, no processo de ensino aprendizagem, e que atualmente se demanda muito por ela, pois reforça o aprendizado do aluno, e nesse cenário de uso maciço de tecnologias digitais o professor deverá estar cada vez mais capacitado. A BNCC (BRASIL, 2018, p.274) propõe o uso de calculadoras, planilhas eletrônicas, aplicativos financeiros no auxílio do ensino aprendizagem para o letramento financeiro. Na pesquisa com os professores, foi levantado quais os recursos tecnológicos mais utilizados em sala de aula para ensino da matemática financeira, colocando a calculadora comum com 50%, seguido da calculadora financeira $33,3\%$ e uso do Excel 20%. Esses três recursos foram os mais usados e somente $6,7\%$ fizeram uso de aplicativos com finalidade financeira. Isso mostra uma realidade sobre uma necessidade de capacitação dos professores quanto ao uso de tecnologia digitais. Outro ponto para capacitação está na área financeira, pois pesquisa apresentou que 70% dos professores afirmaram não ter nenhuma capacitação sobre educação financeira na sua formação de docente.

Um dado relevante nessa pesquisa foi o mapeamento quanto ao domínio da matemática financeira pelo aluno, e nisso destacamos 04 resultados: sobre o conceito básico de juros, diferenciação de juros simples e compostos, construção dos juros compostos ao longo do tempo e influência da inflação sobre os rendimentos financeiros. No conceito de juros a maioria afirmou que juros é uma tarifa, mas 70% deles sabem diferenciar juros simples de compostos. No entanto, em teste prático de construção de juros compostos a maioria errou $60,4\%$ quanto foi perguntado: "Numa aplicação financeira que rende 1% ao mês sob o regime de juros compostos no fim de 1 ano você terá?". Nessa pergunta $39,50\%$ acertaram e sobre o efeito inflacionário apenas 11% acertaram o questionamento. Vale lembrar que os questionamentos técnicos de matemática financeira era apenas para estimar, não exigia dos alunos a exatidão no resultado. Nesse ponto podemos confirmar que o resultado obtido foi similar sobre a pesquisa do Bacen (2015) onde evidenciou que a maioria das pessoas teve maior quantidade de erros com relação as questões que envolviam matemática financeira (ver figura 6).

Finalmente podemos destacar a necessidade da matemática financeira como componente essencial dentro de uma educação financeira que entrará como tema obrigatório no currículo dos alunos da educação básica em 2020, de uma maneira transversal, "conversando"com outras disciplinas, não somente a matemática, como determina a BNCC, e na pesquisa da AEF - Brasil em 2018 que mostrou uma centralização do ensino da educação financeira na disciplina de matemática e que o alunos da pesquisa não concordaram com a centralização. Nesse aspecto de interligar com outras disciplinas quase, 39% dos alunos sinalizaram apoiar essa dinâmica.

Diante de toda pesquisa percebemos que é de interesse dos alunos ter a educação financeira incorporada à grade curricular do ensino médio. Também é visível a necessidade de capacitação dos professores nessa área financeira de forma mais especifica e destacando necessidade de mudança na forma de ensinar a matemática financeira como propõe a BNCC com exercícios mais próximos da realidade do aluno e com mais transversalidade. Tudo isso deve passar por uma nova reformulação dos livros didáticos, programas mais específicos e treinamento na área financeira para professores, transformando a educação financeira em um projeto interdisciplinar e diferentemente do que ficou evidenciado na pesquisa da AEF (2018) que o ensino da educação financeira não fique centralizada na disciplina de matemática, mas que ela seja descentralizada para várias outras áreas de conhecimento.

Referências

[1] Paenza, Adrián. **Matemática, cadê você? sobre números, personagens, problemas e curiosidades**, tradução de Maria Alzira Brum Lemos - Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2009.

[2] DANTE, LUIZ ROBERTO. **Matemática. Contexto e Aplicações?** Manual do Professor. Vol. II. São Paulo: Ática, 2003

[3] Faro, Cloves de. **Fundamentos de Matemática Financeira** São Paulo; Saraiva 2006

[4] Ferrira, Roberto G. **Matemática Financeira Aplicada: mercado de Capitais, Analise de Investimentos, Finanças Pessoais e Tesouro Direto.** São Paulo, Editora Atlas. 2007.

[5] Lezze, Gelson **Fundamentos de Matemática Elementar.** 6 ed. vol.11 Saraiva 2005. São Paulo.

[6] PINHEIRO, Carlos Alberto Orge. **Matemática Financeira sem o uso de calculadoras financeiras.** 2.ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

[7] BRUNI, Adriano; FAMÁ, Rubens. **A Matemática das Finanças com Aplicações na HP-12 C e Excel.** 1 ed. v. 1. São Paulo, Atlas: 2003

[8] SILVA, Amarildo Melchiades da; POWELL , Arthur Belford. **Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica.** Anais do XI ENEM - XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013

[9] GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4 ed. -São Paulo: Atlas, 2002

[10] Sá. de Pereira Ilydio. **Duas vezes 100 é igual a 200? Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 70 p. 13-16, 3º quadrimestre. 2009

[11] BAUER, Udilbert Reinoldo. **Matemática Financeira Fundamental.** São Paulo: Editora Atlas, 2003

[12] CERBASI, Gustavo. **Como organizar sua vida financeira.** Rio de Janeiro: Sextante, 2015

[13] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 140 p. v. 2, 2006.

[14] PILÃO, Nivaldo Elias. **Matematica financeira e engenharia econômica: a teoria e a prática da analise de projetos de investimentos.** São Paulo: Cenage learning, 2012

[15] Nogueira, José Jorge Meschiatti. **Tabela price: mitos e paradigmas.** Campinas, SP: Milennium Editora, 2008

[16] VERGARA, S. C. **Projetos e relatórios de pesquisa em administração.** 3.ed. Rio de Janeiro: Atlas, 2000.

[17] PITON-GONÇALVES, Jean. **A História da Matemática Comercial e Financeira.** Disponível em: http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php. Acesso em: 22 out. 2019.

[18] Lima, Roberto Arruda de Souza e Nishiyama, Adolfo Mamoru. **Contratos bancários: aspectos jurídicos e técnicos da matemática financeira para advogados.** São Paulo: Atlas, 2007

[19] MARCONI, M.A;LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração e interpolação de dados.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996

[20] ASSAF Neto, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações.** 12.ed. São Paulo: Atlas, 2012.

[21] CLÁUDIO , Vicentino. **Historia Geral.** 8º ed. São Paulo: Scipione, 2002

.

A Anexos A

Tabela 16: Rol de escola onde lecionam os professores do PROFMAT que participaram da pesquisa.

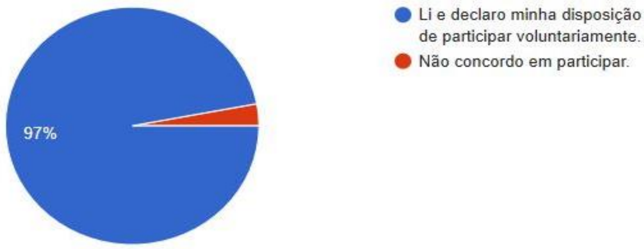
	Escola	Setor
1	Centro Integrado do Rio Anil - CINTRA	Pública
2	IFMA de Santa Inês	Pública
3	C.E. Nina Rodrigues	Pública
4	Escola Ágape	privada
5	C.E. Prof. Luis Aranha	Pública
6	C.E. Estado do Pará	Pública
7	Colégio Madre Savina	Privada
8	Colégio CEV	Privada
9	Colégio Procampus	Privada
10	Colégio INEC	Privada
11	IEMA-UP Pindaré	Pública
12	C. E. Deborah Correia Lima	Pública
13	C.E. Cândido Mendes	Pública
14	IFMA de Rosário	Pública
15	IFMA do Maracanã	Pública
16	Barjonas Lobão	Pública
17	C. E. Neusa de Carvalho Bastos	Pública
18	Escola Dom Bosco	Pública
19	IFMA do Monte Castelo	Pública
20	C. E. Jansen Veloso	Pública

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

235 respostas

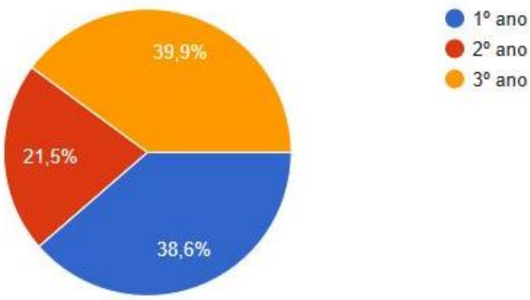
Marque uma opção abaixo antes de continuar

235 respostas



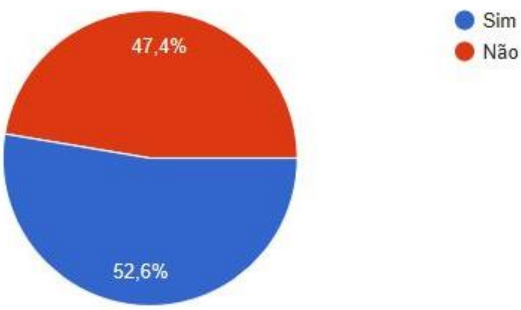
1) Qual série do ensino médio você está cursando:

228 respostas



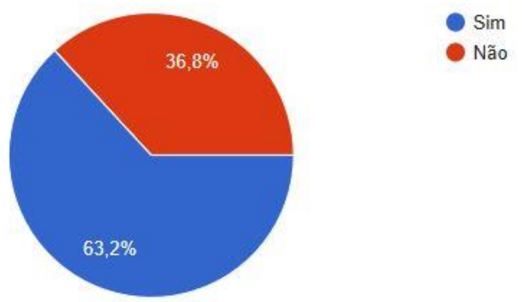
2) Você estudou matemática financeira no Ensino Fundamental?

228 respostas



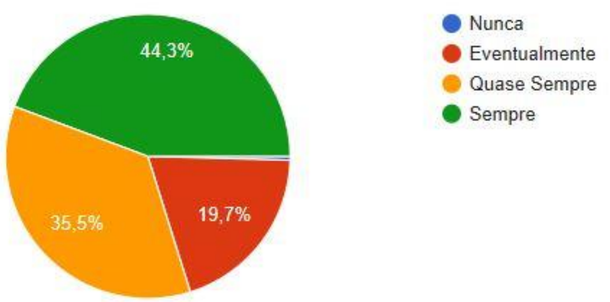
3) Neste ano você já teve alguma aula de matemática financeira?

228 respostas



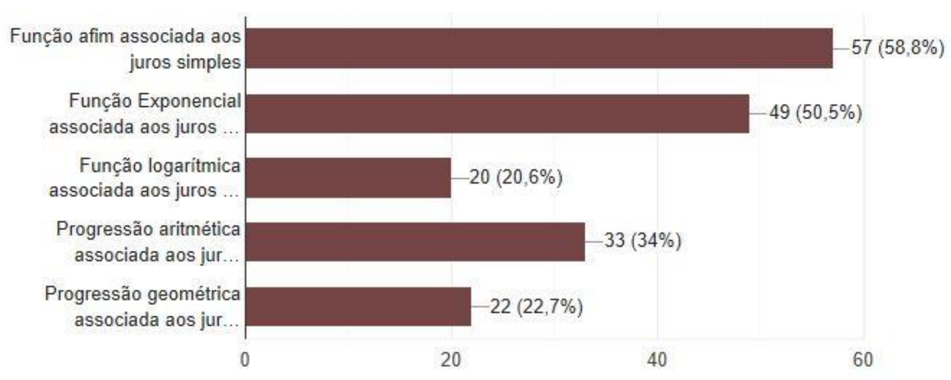
6) Você acredita que o estudo da Matemática financeira ajuda no planejamento financeiro e tomada de decisão financeira mais assertiva?

228 respostas



10) Caso sim na resposta anterior, marque em quais relações:

97 respostas

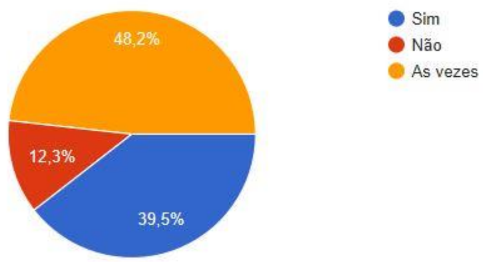


12) Você recebe um algum tipo recurso financeiro dos seus pais?

228 respostas

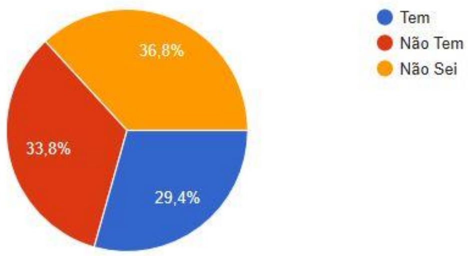
11) Seus pais o deixa ciente do orçamento familiar?

228 respostas



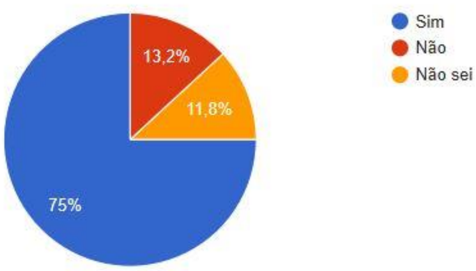
13) Sua família possui algum tipo de aplicação financeira:

228 respostas



18) Atualmente, na sua família possui compras realizadas de forma parcelada? (Crediário, crédito rotativo, cheque pré-datado cartão de crédito, etc)

228 respostas

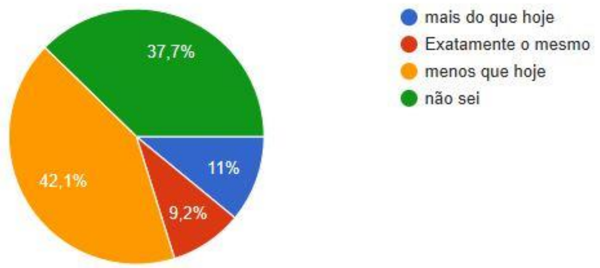


22) Uma dívida não paga na data correta duplicou após 1 mês de seu vencimento, pode-se afirmar que:

223 respostas

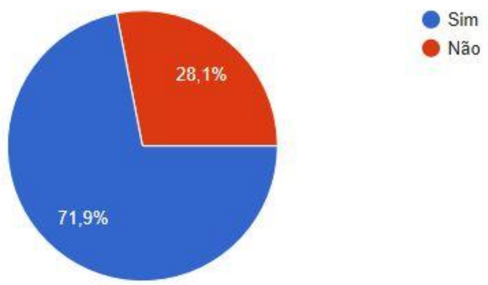
20) Imagine que a taxa de juros em sua conta poupança foi de 2% ao ano e a inflação 3% ao ano. Após 1 ano, quanto você poderia comprar com o dinheiro nesta conta?

228 respostas



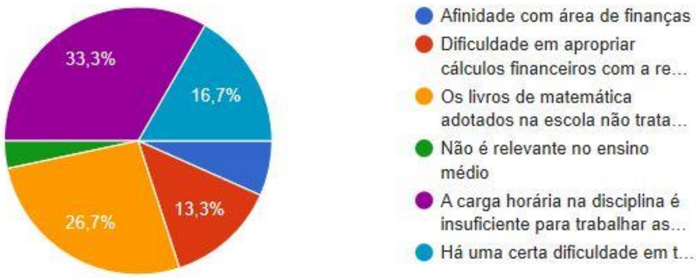
24) Em uma nova compra parcelada você contabiliza todas as outras parcelas existentes para estimar se o valor total das prestações cabe no orçamento familiar?

228 respostas



1) Qual a principal dificuldade de trabalhar Matemática financeira dentro da Educação Financeira ?

30 respostas



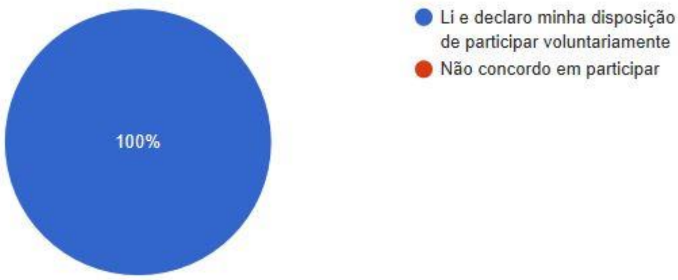
QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

30 respostas

Publicar análise

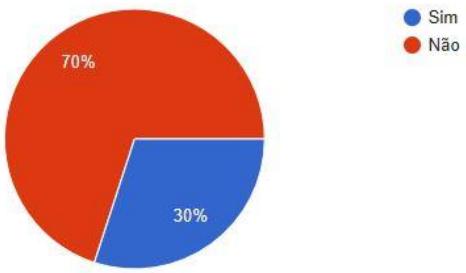
Diante desse esclarecimentos, assinale uma das duas alternativas a seguir:

30 respostas



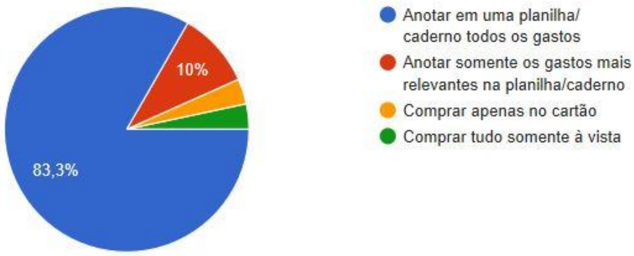
2) Você já recebeu alguma capacitação sobre Educação Financeira?

30 respostas



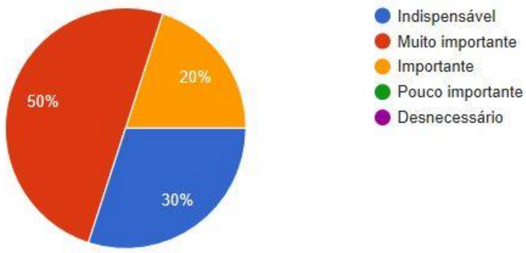
4) Qual a melhor forma de organizar gastos?

30 respostas



3) Marque o grau de importância você atribui a Educação Financeira no ensino Fundamental e Médio?

30 respostas

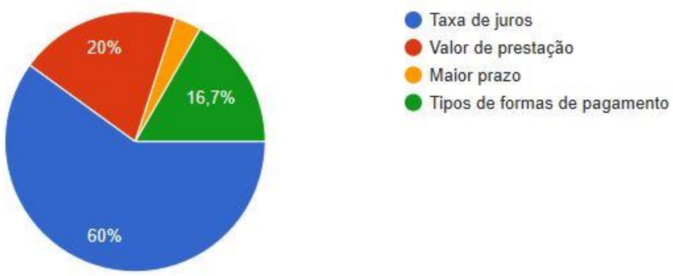


5) Numa compra a prazo, você utilizaria a matemática financeira para tomada de decisão?

30 respostas

6) Numa compra a prazo você negociaria, principalmente?

30 respostas

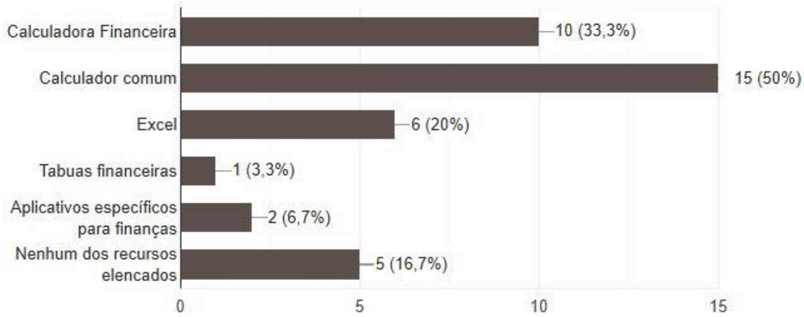


12) A matemática financeira está inserida no seu plano de ensino anual?

30 respostas

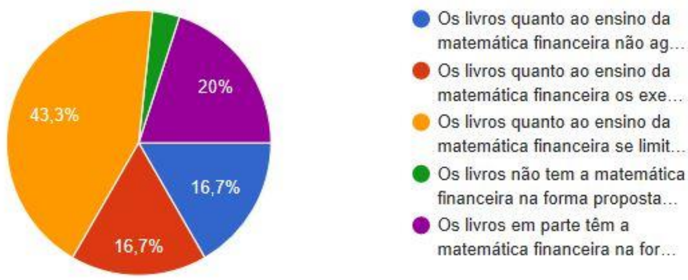
10) Em sala de aula quais os recursos mais utilizados por você no ensino da matemática financeira ?

30 respostas



13) A temática matemática financeira nos livros do ensino médio adotado em sua escola, você considera que:

30 respostas



QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Prezado aluno, você está sendo convidado para participar de uma pesquisa acadêmica que é parte da conclusão do curso de mestrado em Matemática e que tem como objetivo mapear sobre como a matemática financeira auxilia no letramento financeiro para tomada de decisão do estudante do Ensino Médio. Peço sua colaboração para responder a este questionário. As perguntas aqui realizadas possuem apenas a finalidade de coletar dados para compor o estudo de caso e você é livre para recusar-se a participar.

Diante desse esclarecimento, assinale uma das duas alternativas a seguir:

*Obrigatório

1. Marque uma opção abaixo antes de continuar *

Marcar apenas uma oval.

- Li e declaro minha disposição de participar voluntariamente.
- Não concordo em participar. *Pare de preencher este formulário.*

Questionário

2. 1) Qual série do ensino médio você está cursando: *

Marcar apenas uma oval.

- 1º ano
- 2º ano
- 3º ano

3. 2) Você estudou matemática financeira no Ensino Fundamental? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

4. 3) Neste ano você já teve alguma aula de matemática financeira? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. 4) A Matemática financeira tem como estudar: *

Marcar apenas uma oval.

- O valor do dinheiro no tempo
- O planejamento do orçamento
- familiar O mercado financeiro
- As finanças pessoais
- O controle financeiro

6.5)O que são juros em termos de valores monetários? *

Marcar apenas uma oval.

- Uma tarifa cobrada pelo banco
- Um imposto cobrado em contas
- Uma tarifa cobrada pelo cartão de crédito
- Uma multa do atraso do cartão de crédito
- Nenhuma das alternativas

7.6) Você acredita que o estudo da Matemática financeira ajuda no planejamento financeiro e tomada de decisão financeira mais assertiva? *

Marcar apenas uma oval.

- Nunca
- Eventualmente
- Quase Sempre
- Sempre

8.7) Você sabe diferenciar juros simples dos juros compostos? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

9.8) Você defende que a educação financeira deve ser incorporada na grade curricular no ensino fundamental e Médio? *

Marcar apenas uma oval.

- sim , no ensino fundamental/ médio e interligada com outras disciplinas
- somente no ensino médio, pois nessa fase o aluno tem mais maturidade na área financeira
- sim , no ensino fundamental/ médio e exclusividade dentro da matematica
- sim , no ensino fundamental/ médio e exclusividade dentro da matematica financeira
- não, deve ser feito um projeto a parte para não sobrecarregar o ensino normal

10.9) No seu aprendizado em sala de aula o estudo das funções e das progressões foram associadas ao estudo da matemática financeira? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim *Ir para a pergunta 11.*
- Não *Ir para a pergunta 12.*
- Não sei *Ir para a pergunta 12.*

11.10) Caso sim na resposta anterior, marque em quais relações: *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Função afim associada aos juros simples
- [ ] Função Exponencial associada aos juros compostos
- [ ] Função logarítmica associada aos juros compostos
- [ ] Progressão aritmética associada aos juros simples
- [ ] Progressão geométrica associada aos juros compostos

12.11) Seus pais o deixa ciente do orçamento familiar? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- As vezes

13.12) Você recebe um algum tipo recurso financeiro dos seus pais? *

Marcar apenas uma oval.

- Não recebo
- Recebo dinheiro eventualmente Sempre
- recebo
- Recebo valor fixo mensalmente (mesada)

14.13) Sua família possui algum tipo de aplicação financeira: *

Marcar apenas uma oval.

- Tem
- Não Tem
- Não Sei

15.14) Para que serve uma boa Educação Financeira? *

Marcar apenas uma oval.

- Para aprender a gastar o seu dinheiro consciente
- Para aprender economizar
- Para aprender como comprar a prazo
- Para escolher melhores alternativas de credito
- Nenhuma das alternativas anteriores

16.15) Em tendo recurso financeiro você costuma manter um controle sobre os seus gastos mensais? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Eventualmente

17.16) Qual aplicações financeiras você conhece: *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Poupança
- [ ] Ações
- [ ] Tesouro direto (Títulos Públicos)
- [ ] Certificado de Depósito Bancário -
- [ ] CDB Fundo de investimento
- [ ] Previdência complementar
- [ ] Não conheço nenhuma aplicação financeira elencada

18. **17) O que é inadimplência?** *

Marcar apenas uma oval.

- É o não pagamento de uma conta ou dívida
- É pagar uma conta depois que ela venceu
- É renegociar dívidas
- É parcelar compras
- Nenhuma das alternativas

19. **18) Atualmente, na sua família possui compras realizadas de forma parcelada? (Crediário, crédito rotativo, cheque pré-datado cartão de crédito, etc)** *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Não sei

20. **19) Sobre comparar a taxa de uma aplicação financeira com a taxa inflacionária:** *

Marcar apenas uma oval.

- Essencial para saber se existe ganho ou perda real, pois a inflação diminui a rentabilidade da aplicação
- Não há necessidade da comparação, pois inflação está associada somente ao consumo
- Como toda aplicação financeira supera a taxa de inflação, pode a ter comparar, mas não há necessidade
- Devemos comparar a taxa de inflação, pois quando ela aumenta a taxa de aplicação aumentará.
- Não sei opinar

21. **20) Imagine que a taxa de juros em sua conta poupança foi de 2% ao ano e a inflação 3% ao ano. Após 1 ano, quanto você poderia comprar com o dinheiro nesta conta?** *

Marcar apenas uma oval.

- mais do que hoje
- Exatamente o mesmo
- menos que hoje
- não sei

22. **21) Numa aplicação financeira que rende 1% ao mês sob o regime de juros compostos no fim de 1 ano você terá:** *

Marcar apenas uma oval.

- mais de 12 % de rendimento
- menos de 12% de rendimento
- Exatamente 12% de rendimento
- não sei

19. 22) Uma dívida não paga na data correta duplicou após 1 mês de seu vencimento, pode-se afirmar que:
Marcar apenas uma oval.

- o aumento foi 100% após o vencimento
- o aumento foi de 200% após o vencimento
- não tem como calcular, pois falta o valor da divida
- não tem como calcular, pois falta o valor da dívida e taxa de juros

20. 23) Você se considera: *
Marcar apenas uma oval.

- mais poupador que consumista mais
- consumista que poupador
- não consigo avaliar se sou poupador ou consumista

21. 24) Em uma nova compra parcelada você contabiliza todas as outras parcelas existentes para estimar se o valor total das prestações cabe no orçamento familiar? *
Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

22. 25) No cálculo de prestação existem dois tipos sistemas mais utilizados : sistema Price (sistema de prestação constante) e SAC (sistema de amortização constante). A respeito desse dois sistemas: *
Marcar apenas uma oval.

- não conheço os sistema
- já ouvi falar deles, mas não sei a metodologia de cálculo deles
- conheço somente o sistema SAC
- conheço somente o sistema Price
- conheço os dois sistemas e as metodologias de cálculo.

QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Prezado PROFESSOR, você está sendo convidado para participar de uma pesquisa acadêmica que é parte da conclusão do curso de mestrado em Matemática e que tem como objetivo mapear sobre como a matemática financeira auxilia no letramento financeiro para tomada de decisão do estudante do Ensino Médio. Peço sua colaboração para responder a este questionário. As perguntas aqui realizadas possuem apenas a finalidade de coletar dados para compor o estudo de caso e você é livre para recusar-se a participar.
Diante desse esclarecimento, assinale uma das duas alternativas a seguir:

*Obrigatório

1. **Diante desse esclarecimentos, assinale uma das duas alternativas a seguir: ***
   Marcar apenas uma oval.

   - Li e declaro minha disposição de participar voluntariamente *Ir para a pergunta 2.*
   - Não concordo em participar *Pare de preencher este formulário.*

2. **1) Qual a principal dificuldade de trabalhar Matemática financeira dentro da Educação Financeira ? ***
   Marcar apenas uma oval.

   - Afinidade com área de finanças
   - Dificuldade em apropriar cálculos financeiros com a realidade de vida dos alunos
   - Os livros de matemática adotados na escola não tratam sobre o tema
   - Não é relevante no ensino médio
   - A carga horária na disciplina é insuficiente para trabalhar assuntos da área financeira
   - Há uma certa dificuldade em trabalhar sobre o tema, pois o professores precisam de capacitação na área financeira

3. **2) Você já recebeu alguma capacitação sobre Educação Financeira? ***
   Marcar apenas uma oval.

   - Sim
   - Não

4. **3) Marque o grau de importância você atribui a Educação Financeira no ensino Fundamental e Médio? ***
   Marcar apenas uma oval.

   - Indispensável
   - Muito importante
   - Importante
   - Pouco importante
   - Desnecessários

5.4) Qual a melhor forma de organizar gastos? *

Marcar apenas uma oval.

- Anotar em uma planilha/caderno todos os gastos
- Anotar somente os gastos mais relevantes na
- planilha/caderno Comprar apenas no cartão
- Comprar tudo somente à vista

6.5) Numa compra a prazo, você utilizaria a matemática financeira para tomada de decisão? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

7.6) Numa compra a prazo você negociaria, principalmente? *

Marcar apenas uma oval.

- Taxa de juros
- Valor de prestação
- Maior prazo
- Tipos de formas de pagamento

8.7) No seu aprendizado em sala de aula o estudo das funções e das progressões foram associadas ao estudo da matemática financeira? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim *Ir para a pergunta 9.*
- Não *Ir para a pergunta 10.*

9.8) Caso sim na resposta anterior, marque em quais relações: *

Marque todas que se aplicam.

- Função afim associada aos juros simples
- Função Exponencial associada aos juros
- compostos Função logarítmica associada aos
- juros compostos Progressão aritmética
- associada aos juros simples Progressão

geométrica associada aos juros compostos

10.9) Você conhece as competências e habilidades no BNCC associadas ao ensino da matemática financeira? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Em parte

11. 10) Em sala de aula quais os recursos mais utilizados por você no ensino da matemática financeira ? *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Calculadora Financeira
- [ ] Calculador comum
- [ ] Excel
- [ ] Tabuas financeiras
- [ ] Aplicativos específicos para finanças
- [ ] Nenhum dos recursos elencados

12. 11) Sobre comparar a taxa de uma aplicação financeira com a taxa inflacionária: *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Essencial para saber se existe ganho ou perda real, pois a inflação diminui a rentabilidade da aplicação
- ( ) Não há necessidade da comparação, pois inflação está associada somente ao consumo
- ( ) Como toda aplicação financeira supera a taxa de inflação, pode a ter comparar, mas não há necessidade
- ( ) Devemos comparar a taxa de inflação, pois quando ela aumenta a taxa de aplicação aumentará.
- ( ) Não sei opinar

13. 12) A matemática financeira está inserida no seu plano de ensino anual?

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Não está evidenciada no meu plano de ensino - não há exigência do estudo na minha instituição de ensino – e não ensino matemática financeira.
- ( ) Não está evidenciada no meu plano de ensino - não há exigência do estudo na minha instituição de ensino – , mas a uso nas aplicações em vários temas da matemática.
- ( ) Está inserida no meu plano de ensino e sempre faço aplicações nos diversos temas da matemática.

14. 13) A temática matemática financeira nos livros do ensino médio adotado em sua escola, você considera que: *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) Os livros quanto ao ensino da matemática financeira não agregar letramento financeiro ao aluno
- ( ) Os livros quanto ao ensino da matemática financeira os exercícios não refletem a realidade do dia a dia do aluno
- ( ) Os livros quanto ao ensino da matemática financeira se limitam apenas ao usos das formulas de juros simples e compostos.
- ( ) Os livros não tem a matemática financeira na forma proposta pela BNCC quanto a transversalidade nos demais assuntos de matemática como, função afim/quadrática, exponencial/logarítmica e progressões

Os livros em parte têm a matemática financeira na forma proposta pela BNCC quanto a transversalidade nos demais assuntos de matemática como, função afim/quadrática, exponencial/logarítmica e progressões.

15. 14) No calculo de prestação existem dois tipos sistemas mais utilizados que é o sistema PRICE (sistema de prestação constante) e SAC (sistema de amortização constante). A respeito desse dois sistemas: *

Marcar apenas uma oval.

- não conheço os sistemas
- já ouvi falar deles, mas não sei a metodologia de cálculo dos
- sistemas conheço somente o sistema SAC
- conheço somente o sistema Price
- conheço os dois sistemas e as metodologias de cálculo.

16. 15) Uso das progressões é bem utilizado para descrever o cálculo das prestações nos sistemas : Price(sistema de prestação constante) e SAC (sistema de amortização constante). Você já fez aplicações das progressões na matemática financeira para determinação da prestações em suas aulas? *

Marcar apenas uma oval.

- não fiz uso das progressões nos cálculos de prestações
- já utilizei as progressões para determinar o valor de prestações nos dois
- sistemas utilizei as progressões apenas no sistema SAC
- utilizei as progressões apenas no sistema Price
- não conheço a metodologia de cálculo dos sistemas citados.