

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL**  
PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTU SENSU*  
Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT  
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

**A MOBILIZAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL  
COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE  
PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO**

Diego de Oliveira Cosim  
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: Oyran Silva Rayzaro

DOURADOS - 2020

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL**  
PRÓ REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTU SENSU*  
Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT  
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

**A MOBILIZAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL  
COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE  
PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO**

Diego de Oliveira Cosim

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática/PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

DOURADOS - 2020

C868m Cosim, Diego de Oliveira

A mobilização da geometria fractal como ferramenta para o estudo de probabilidade no ensino médio/ Diego de Oliveira Cosim. – Nova Andradina, MS: UEMS, 2020.

71p.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2020.  
Orientador: Prof. Dr. Oyrán Silva Rayzaro.

1. Fractais regulares 2. Dimensão fractal 3. Geometria fractal I. Rayzaro, Oyrán Silva II. Título

CDD 23. ed. – 372.76



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**DIEGO DE OLIVEIRA COSIM**

***A MOBILIZAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO  
DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO***

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

**Aprovado em: 28/03/2020.**

**BANCA EXAMINADORA:**

*Oyran Silva Rayzaro*

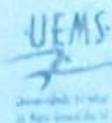
Prof. Dr. Oyran Silva Rayzaro (UEMS)  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

*Oyran Silva Rayzaro*

Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo (UEMS)  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
(participação realizada à distância por videoconferência)

*Oyran Silva Rayzaro*

Prof.ª Dr.ª Ana Cláudia Machado Mendonça (UFGD)  
Universidade Federal da Grande Dourados  
(participação realizada à distância por videoconferência)



**Ata de Defesa de Dissertação**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional**

Aos vinte e oito dias do mês de março do ano de dois mil e vinte, às quinze horas, na Unidade Universitária de Nova Andradina, da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "A MOBILIZAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO" de autoria do aluno: **DIEGO DE OLIVEIRA COSIM**, CPF 024.800.271-63, sob a orientação de **OYRAN SILVA RAYZARO** do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: **OYRAN SILVA RAYZARO** (Presidente), **SONNER ARFUX DE FIGUEIREDO** (participação à distância por videoconferência) e **ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA CHAGAS** (participação à distância por videoconferência) (UFGD). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

Aprovação

Aprovação com revisão

Reprovação

**EXAMINADOR**

**ASSINATURA**

Dr. OYRAN SILVA RAYZARO

*Oyran Silva Rayzaro*

Dr. SONNER ARFUX DE FIGUEIREDO (participação à distância por videoconferência)

*Oyran Silva Rayzaro*

Dr. ANA CLÁUDIA MACHADO MENDONÇA CHAGAS (participação à distância por videoconferência) (UFGD)

*Oyran Silva Rayzaro*

**OBSERVAÇÕES:**

*Devido ao Covid-19, todos os membros da Banca participaram da defesa de mestrado do Diego por videoconferência*

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:

*Oyran Silva Rayzaro*  
Presidente da Banca Examinadora

*Diego de Oliveira Cosim*  
Aluno

Deus sempre direcionou minha vida e fez coisas incríveis por mim. Por isso, dedico esse trabalho a Ele. As minhas filhas Ana Laura e Maria Fernanda que compreenderam os momentos de ausências. Também dedico a minha esposa Aline Paião dos Santos que contribui com a realização desse sonho e a minha mãe Maria Aparecida Francisco de Oliveira e todos os familiares, irmã, padrasto, que todos os dias me deram forças para superar as dificuldades e persistir no sonho de fazer este mestrado. Obrigado por fazerem o possível e impossível por mim, com todo amor do mundo.

# Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus por ter me mantido na trilha certa durante este projeto de pesquisa com saúde e forças para chegar até o final. Sou grato aos meus pais e irmã por sempre me incentivarem e acreditarem que eu seria capaz de superar os obstáculos que a vida me apresentou. À minha querida esposa Aline Paião dos Santos pelo seu amor incondicional e por compreender minha dedicação, me apoiando e muitas vezes até auxiliando. Ao meu professor orientador Profº Dr. Oyran Silva Rayzaro pelas valiosas contribuições, dedicação e paciência durante o processo. Seus conhecimentos fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho. A todos os meus amigos que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos, sempre com o espírito colaborativo. Também quero agradecer à Universidade e o seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.

Arthur Schopenhauer

# Resumo

O presente trabalho apresenta alguns conteúdos acerca da Geometria Fractal, particularmente alguns dos principais fractais regulares e seus conceitos. Isso porque o objetivo desta pesquisa foi investigar de que modo as ideias relacionadas à geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio. Para tanto, a pesquisa foi desenvolvida em duas fases: pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo. Nesse sentido, primeiramente considerou-se necessário apresentar conceito e aplicação da geometria fractal. Num segundo momento, buscou-se descrever as características de alguns tipos de fractais regulares, os quais: Conjunto de Cantor; Fractais de Sierpinski (triângulo e tapete); Floco de Neve de Koch; Esponja de Menger. Dando sequência ao estudo bibliográfico, buscou-se identificar as peculiaridades da dimensão fractal. Finalizado o estudo bibliográfico, passou-se à pesquisa de campo. Nesse sentido, foram aplicadas atividades de geometria fractal em uma turma de 23 alunos do 3º ano do Ensino Médio para que estes calculassem a probabilidade geométrica. Dando continuidade, foram analisadas estratégias de resolução de questões de probabilidade as quais poderiam ser respondidas a partir do raciocínio da geometria fractal. A escolha do tema se justifica pelo fato de que a geometria fractal tem despertado interesse nos contextos acadêmico e científico e vem sendo utilizada em diversos campos da ciência e da tecnologia. Isso porque a geometria fractal apresenta aplicações úteis em áreas como física, arquitetura e medicina e, por essa razão, achou-se necessário apresentar este conteúdo para estudantes do Ensino Médio. Com este trabalho, espera-se que haja a inclusão nas salas de aula deste conteúdo como forma de facilitar o entendimento e despertar o interesse dos alunos para o conteúdo.

Palavras-chave: Geometria Fractal. Fractais regulares. Dimensão. Probabilidade.

# Abstract

The present work presents some contents about Fractal Geometry, particularly some of the main regular fractals and their concepts. This is because the objective of this research was to investigate how ideas related to fractal geometry can be mobilized for the study of probabilities in high school. Therefore, the research was developed in two phases: bibliographic research and field research. In this sense, it was first considered necessary to present the concept and application of fractal geometry. In a second step, we sought to describe the characteristics of some types of regular fractals, which: Conjunto de Cantor; Sierpinski fractals (triangle and carpet); Koch's Snowflake; Menger sponge. Following the bibliographic study, we sought to identify the peculiarities of the fractal dimension. After the bibliographic study was completed, field research was carried out. In this sense, fractal geometry activities were applied to a class of 23 students from the 3rd year of high school so that they could calculate the geometric probability. Continuing, probability question resolution strategies were analyzed which could be answered based on the reasoning of fractal geometry. The choice of the theme is justified by the fact that fractal geometry has aroused interest in the academic and scientific contexts and has been used in several fields of science and technology. This is because fractal geometry has useful applications in areas such as physics, architecture and medicine and, for this reason, it was found necessary to present this content to high school students. With this work, it is expected that there will be the inclusion of this content in the classrooms as a way to facilitate understanding and awaken students' interest in the content.

Keywords: Fractal geometry. Regular fractals. Dimension. Probability.

# Lista de Figuras

1.1	Fractais encontrados na natureza . . . . .	12
2.1	Conjunto de Cantor . . . . .	20
2.2	Funções $E(x)$ e $D(X)$ . . . . .	23
2.3	Construção do triângulo de Sierpinski . . . . .	25
2.4	Construção do tapete de Sierpinski . . . . .	28
2.5	Etapa 0 . . . . .	30
2.6	Etapa 1 . . . . .	31
2.7	Etapa 2 . . . . .	32
2.8	Etapa 3 . . . . .	33
2.9	Combinações . . . . .	35
2.10	Exemplo . . . . .	36
2.11	Curva de Koch . . . . .	38
2.12	Construção do Floco de Neve de Koch . . . . .	39
2.13	Ampliação da curva de Koch . . . . .	39
2.14	Superfície Removida da Esponja de Menger . . . . .	43
2.15	Esponja de Menger . . . . .	43
3.1	Divisões da reta, do quadrado e do cubo . . . . .	51
3.2	Box-Couting . . . . .	54
5.1	Atividades em sala 1 . . . . .	63
5.2	Atividades em sala 2 . . . . .	63
5.3	Atividades em sala 3 . . . . .	64
5.4	Atividades em sala 4 . . . . .	64

# Lista de Tabelas

2.1	Conjunto de Cantor . . . . .	21
2.2	Triângulo de Sierpinski . . . . .	27
3.1	Dimensão Conjunto de Cantor . . . . .	48
3.2	Dimensão Curva de Koch . . . . .	49
3.3	Dimensão Triângulo de Sierpinski . . . . .	50
3.4	Ilustração da relação entre a dimensão e quantidade de peças para três tipos de objetos. . . . .	51
3.5	Ilustração do fator de ampliação para retornar a figura inicial. . . . .	51
3.6	Dimensão de Fractais Regulares . . . . .	53
3.7	Dimensão Tapete de Sierpinski . . . . .	55
3.8	Esponja de Menger . . . . .	55

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FRACTAIS REGULARES</b>	<b>19</b>
2.1	Conjunto de Cantor . . . . .	19
2.2	Fractais de Sierpinski . . . . .	24
2.2.1	Triângulos de Sierpinski . . . . .	24
2.2.2	Tapete de Sierpinski . . . . .	27
2.3	O Floco de Neve de Koch . . . . .	36
2.4	Esponja de Menger . . . . .	42
<b>3</b>	<b>DIMENSÃO FRACTAL</b>	<b>46</b>
3.1	Dimensão de Hausdorff . . . . .	46
3.1.1	Conjunto de Cantor . . . . .	48
3.1.2	Curvas de Koch . . . . .	49
3.1.3	Triângulo de Sierpinski . . . . .	49
3.2	Fator de Ampliação . . . . .	50
3.3	Método Box-Couting . . . . .	53
3.3.1	Tapete de Sierpinski . . . . .	55
3.3.2	Esponja de Menger . . . . .	55
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>ANALISE DOS DADOS COLETADOS E RESULTADOS</b>	<b>61</b>
5.1	ANALISE DOS DADOS COLETADOS . . . . .	61
5.2	RESULTADOS . . . . .	62
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>66</b>
	Referências bibliográficas	67

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Durante muitos séculos, a Matemática se valeu da geometria euclidiana para solucionar padrões matemáticos naturais. Todavia, essa geometria não se mostrava suficiente para representar estruturas não regulares, como as nuvens, árvores e outras formas presentes na natureza. Razão pela qual, teve origem a Geometria Fractal. Na figura 1.1, é possível observar alguns tipos de fractais encontrados na natureza.

Figura 1.1: Fractais encontrados na natureza



Fonte: Brito da Silva, 2016

A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais, as econômico-sociais e a tecnologia. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais <sup>1</sup> e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar os estudos de fenômenos naturais.

Embora seja bem conhecida no contexto da matemática, a geometria fractal é desconhecida para a maioria das pessoas e, na Educação Básica, sequer se ouve falar. A etimologia dessa expressão tem duas vertentes: geometria e fractal. Com relação à primeira, pode-se dizer que “A palavra geometria é composta de duas terminologias de origem

---

<sup>1</sup>Objetos não tradicionais neste caso consideremos os fractais regulares.

gregas: geos (terra) e metron (medida). Esta nomenclatura deve sua origem à necessidade que o homem tinha de medir terrenos desde os tempos remotos” (FERREIRA FILHO, 2015, p. 32).

Por sua vez, a expressão **fractal** deriva do latim “*fractus*” e significa fração, quebrado. Isso porque o fractal refere-se a uma estrutura geométrica ou física, cuja composição apresenta uma característica peculiar: o objeto é constituído por partes reduzidas cujas formas são semelhantes às do objeto maior (MANDELBROT, 1998). Com efeito, tais características podem ser encontradas em vários elementos da natureza como afirma Ferreira Filho (2015, p. 36):

Muitas formas observadas na natureza podem estar relacionadas à geometria. Por exemplo, as abelhas construir células hexagonais para manter o seu mel. Outra utilização que a natureza faz da geometria é das espirais logarítmicas que possuem a propriedade de manter a forma em qualquer escala, mesmo com o espaço compreendido entre sucessivas voltas, aumentando sempre. O mais intrigante é que esta forma de espiral é muito abundante na natureza, por exemplo, as espirais logarítmicas podem descrever o arranjo de sementes de girassol ou na configuração da couve flor. Essa curva fascina os matemáticos desde o século XVII quando Jacob Bernoulli se dedicou a um estudo de várias curvas planas. (sic)

Ainda que a geometria euclidiana venha sendo usada há muitos séculos, é perceptível que a mesma se mostrou limitada no sentido de explicar e reproduzir as inúmeras formas presentes na natureza, como defende MIRANDA et. al, (2008, p. 01):

Descobertas recentes revelam que modelos matemáticos euclidianos, de há muito estabelecidos e que procuram reproduzir a geometria da natureza, às vezes se apresentam incompletos e, em determinadas situações inadequados. Especificamente, muitas das formas encontradas na natureza não são círculos, triângulos, esferas, icosaedros ou retângulos. Enfim, não são simples curvas, superfícies ou sólidos, conforme definidos na geometria clássica de Euclides (300a.C) [...].

Frente a todas as necessidades da humanidade de compreender e reproduzir alguns dos fenômenos presentes na natureza e partindo desse pressuposto é que surge a geometria fractal, originada em 1975, e assim denominada pelo físico polonês Benoit Mandelbrot<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>De origem judaica, Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia, Polônia, em 20 de novembro de 1924. Foi criado e educado em Paris, onde foi aluno Ecole Polytechnique. Em 1948, foi para os Estados Unidos onde estudou ciência aeroespacial no Instituto de Tecnologia da Califórnia. A partir de então, interessou-se e dedicou-se ao estudo de variados ramos do conhecimento como geologia, economia, biologia, comunicação, meteorologia, entre outros (FERREIRA FILHO, 2015).

Embora Mandelbrot tenha sido o responsável por nomear, explicar e tornar conhecida a geometria fractal no que concerne as suas características básicas, considera-se necessário ressaltar algumas características relevantes acerca dos estudo dos fractais: autossimilaridade, dimensão e complexidade. Com relação a autossimilaridade, MIRANDA et. al (2008, p. 01) afirma que:

Tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Isto não é o que ocorre, por exemplo, com uma circunferência, que parece reduzir a sua curvatura à medida em que ampliamos uma das suas partes (MIRANDA et. al, 2008, p. 01).

No entanto, Ferreira Filho (2015) esclarece que antes da publicação dos estudos de Mandelbrot, alguns matemáticos, como Niels Fabian Helge von Koch, George Waldemar Cantor, David Hilbert, Giuseppe Peano e Waclaw Sierpinski, já tinham antecipado o conceito dessa geometria com outra nomenclatura: os chamados “monstros matemáticos”.

Embora os fractais não foram descobertos nem criados inicialmente por Mandelbrot, ele os agregou em torno de características comuns a todos esses entes matemáticos, visto que estes lá eram conhecidos antes de sua descoberta. Há indícios de que eles existiam antes do século XX e eram conhecidos como “monstros matemáticos” na Grécia Homérica, Índia e China (FERREIRA FILHO, 2015, p. 30).(sic)

No que concerne a autossimilaridade, uma figura é considerada autossimilar, quando se amplia ou se reduz sua escala, ampliamos ou se diminuimos a sua escala, o resultado é que as partes (ampliadas/reduzidas) se assemelham com a figura no seu estado inicial. Embora a mesma seja destaque, não é a única característica das formas geométricas dos fractais. Além dela, dimensões e complexidades também são propriedades que estão presentes.

Dentre as propriedades dos fractais, destaque a complexidade infinita, ao qual retrata toda a beleza das estruturas do fractal. Dentro de tamanha beleza a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores, isto é, o detalhamento do fractal não diminui mesmo quando observamos uma parte arbitrariamente pequena (FERREIRA FILHO, 2015, p. 50).

Nessa perspectiva, com base no exposto, pode-se dizer que a complexidade pressupõe o processo de construção da figura geométrica, onde uma deriva da outra, unindo e organizando as partes entre si, formando um todo, como bem descreve Ferreira Filho (2015, p. 50).

A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como fractal, decorre da mesma figura; encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado. Vale esclarecer que no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados, gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa (FERREIRA FILHO, 2015, p. 50).

A terceira característica do fractal refere-se à sua dimensão numericamente não inteira, ou seja, a dimensão do fractal, que, por sua vez, também apresenta características fracionárias.

Finalmente, a dimensão de um fractal, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha possui dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um volume possui dimensão três. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém (MIRANDA et. al, 2008, p. 2304-2).

Pressupõe que, quanto mais irregulares forem as formas geométricas, mais altas serão suas dimensões. Assim, a dimensão confere um caráter infinito para as formas geométricas fractais. Nesse sentido, Ferreira Filho (2015, p. 50) esclarece.

Mandelbrot descobriu que existe uma dimensão que não é inteira localizada entre as dimensões euclidianas, e essa dimensão inclui um conjunto infinito de dimensões fracionais que se encontram entre o zero e primeira dimensão; a primeira e segunda dimensão e a segunda e terceira dimensão. Ele chamou esse conjunto de “dimensão fractal” mostrando matematicamente e graficamente como a natureza utiliza as dimensões fractais e como construir as formas complexas e irregulares do mundo real.

Desse modo, é válido concordar que a aplicabilidade da geometria fractal é significativa, porém, esse conteúdo, assim como suas características (autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal) será tratado com mais profundidade nos capítulos subsequentes.

Como resultado dos apontamentos feitos anteriormente, fica evidente a importância dos debates propostos nas pesquisas, as quais indicam a contribuição da geometria fractal no que se diz respeito à aprendizagem de conteúdos matemáticos relacionados a identificação de padrões ou diferenças, oportunizando o desenvolvimento do aluno. A discussão matemática a partir da abordagem sobre fractais é sugerida nos documentos oficiais, os quais afirmam que o conhecimento matemático se dá:

[...] a partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático. O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (PCN, 1998, p. 26).

Neste contexto, por concordar que alguns conteúdos de ensino médio podem ser abordados a partir das ideias de fractais, traz-se aqui, como proposta de investigação, a seguinte questão de pesquisa: de que modo as ideias relacionadas à geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio?

Objetivando responder a este questionamento, a presente pesquisa buscou investigar de que modo as ideias relacionadas a geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio. Em termos específicos a pesquisa buscou: apresentar conceito de aplicação da geometria fractal; descrever as características de alguns tipos de fractais regulares; identificar as peculiaridades da dimensão fractal; aplicar atividades de geometria fractal em uma turma de Ensino Médio; analisar as escolhas matemáticas utilizadas pelos alunos na resolução de atividades de probabilidade.

A escolha deste tema se deve ao fato de que a geometria fractal vem sendo utilizada em diversos campos da ciência e da tecnologia. Refere-se a um segmento da Teoria do Caos que vem despertando o interesse nos contextos acadêmico e científico. Embora no universo do senso comum ainda seja pouco conhecida, a geometria fractal apresenta aplicações úteis em áreas como física, arquitetura e medicina. Por essa razão, achou-se necessário apresentar este conteúdo para estudantes do Ensino Médio.

Nesse sentido, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) estabelece:

[...] que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais. (BRASIL, 2018, p. 542).

Para uma melhor apresentação, esta pesquisa foi dividida em quatro capítulos e considerações finais. O primeiro apresenta o conceito e características de alguns fractais regulares. O segundo capítulo apresenta as discussões sobre dimensão fractal, as quais contém métodos de cálculo das dimensões de Hausdorff e Box-Counting. O terceiro capítulo apresenta a metodologia e a descrição das atividades que serviram de base para constituição dos dados, ou seja, descreve como este estudo foi construído. O quarto capítulo

apresenta a análise dos dados coletados in loco. As considerações finais apresentam as conclusões desta pesquisa.

O conceito de dimensão fractal vem atualmente sendo aplicado e calculado para linhas, figuras ou superfícies em diversos campos. Na medicina, por exemplo, como método de diagnóstico quantitativo de patologias. Um dos campos onde este procedimento é mais desenvolvido é o diagnóstico do câncer, através da análise de imagens de tumores. As evidências experimentais sugerem que tumores de câncer apresentam uma fronteira com dimensão fractal superior às que ocorrem em agregados de tecidos normais.

Desse modo, concordamos que a aplicabilidade da geometria fractal é significativa, porém, esse conteúdo assim como suas características (autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal) serão tratadas com mais profundidade nos capítulos subsequentes.

Como resultado dos apontamentos feitos anteriormente, evidenciamos a importância dos debates propostos nas pesquisas, as quais indicam a contribuição da geometria fractal no que se diz respeito à aprendizagem de conteúdos matemáticos relacionados a identificação de padrões ou diferenças, oportunizando o desenvolvimento do aluno. A discussão matemática a partir da abordagem sobre fractais, é sugerida nos documentos oficiais, os quais afirmam que o conhecimento matemático se dá:

[...]a partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático. O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino. (PCN, 1998, p. 26)

Neste contexto, por concordar que alguns conteúdos de ensino médio podem ser abordados a partir das ideias de fractais, trazemos como proposta de investigação, a seguinte questão de pesquisa: De que modo as ideias relacionadas a geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio? Para responder a questão de pesquisa traçamos o seguinte objetivo geral: Investigar de que modo as ideias relacionadas à geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio. Para alcançarmos o objetivo geral traçamos como objetivo específico: Analisar as escolhas matemáticas utilizadas pelos alunos na resolução de atividades de probabilidade. O objetivo específico, ora apresentado, visa observar o tipo de escolha

mobilizada pelo aluno para a resolução das atividades propostas, buscando compreender a opção do mesmo no que se refere a uma justificativa matemática (contas) ou justificativas conceitual (definição, propriedade).

A geometria fractal vem sendo utilizada em diversos campos da ciência e da tecnologia. Refere-se a um segmento da Teoria do Caos que vem despertando o interesse nos contextos acadêmico e científico. Embora no universo do senso comum ainda seja pouco conhecida, a geometria fractal apresenta aplicações úteis em áreas como física, arquitetura e medicina. A presente pesquisa objetiva apresentar conceitos e particularidades relevantes da geometria fractal e descrever sua aplicabilidade.

Para uma melhor apresentação, esta pesquisa foi dividida em quatro capítulos. O primeiro, apresenta os principais conceitos de alguns fractais regulares. O segundo capítulo, apresenta as discussões sobre dimensão fractal, nas quais apresentamos dois métodos de cálculo da dimensão: Dimensão de Hausdorff e Box-Counting. No quarto capítulo, trazemos a metodologia e a descrição da atividade que serviu como base para a constituição dos dados. O quinto e último capítulo apresenta a análise dos dados coletados e as considerações finais acerca do que foi observado.

# Capítulo 2

## FRACTAIS REGULARES

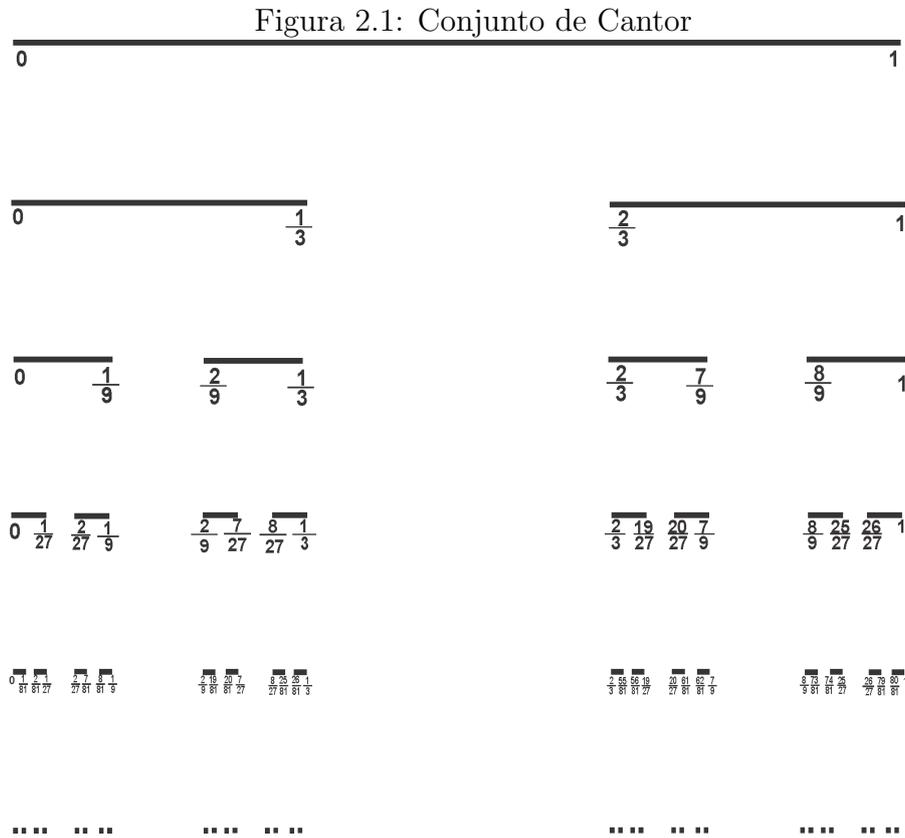
Neste capítulo, serão apresentados alguns fractais regulares, como: Conjunto de Cantor, Fractais de Sierpinski (Triângulo e Tapete), Floco de Neve de Koch e Esponja de Menger, assim como suas principais características.

### 2.1 Conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor foi um matemático descendente de portugueses que, embora tenha nascido em São Petersburgo, Rússia, em 03 de março de 1845 adotou a nacionalidade alemã (sua família emigrou para a Alemanha quando Cantor era criança). Estudou em Zurique, Berlim e Göttingen. Foi professor na Universidade de Halle, Alemanha, onde desenvolveu pesquisas significativas sobre matemática. Uma de suas principais contribuições foi a Teoria dos Conjuntos. Também destacou-se por apresentar ideias altamente criativas sobre o conceito de infinito, produzindo a construção de um objeto que resultou chamar-se de Conjunto de Cantor, cuja construção geométrica também é conhecida como “Poeira de Cantor”. Faleceu em Halle em 6 de janeiro de 1918 (BARBOSA, 2005).

Para a construção deste conjunto, primeiramente denomina-se  $I_0$  sendo o segmento unitário  $[0, 1]$ . A partir desse intervalo  $I_0$ , divide-se em três novos intervalos:  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , retirando o terço médio deste intervalo ficar-se-ão somente os intervalos  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , o qual será chamado de  $I_1$  (união dos dois intervalos). Repetindo-se este mesmo processo, nos dois intervalos de  $I_1$ , cada intervalo será dividido em três partes iguais e retira-se novamente o terço médio de cada um desses intervalos, obtendo  $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$  e  $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ , sendo a união desses quatro intervalos, denominada  $I_2$ . Se

der sequência a este processo indefinidamente e sucessivamente retirando o terço médio dos intervalos, obter-se-á  $I_n$ , na retirada do terço médio de cada intervalo de  $I_{n-1}$ . Dessa forma, obtém-se o conjunto de Cantor  $C$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . O procedimento é retratado na Figura 2.1.



Fonte: Autor

Na construção do “Conjunto de Cantor”, são definidas algumas notações em suas  $n$ -ésimas etapas:

- $Q_n$  sendo a quantidade de intervalos;
- $C_n$  o comprimento de cada intervalo;
- $T_n$  o comprimento total de  $I_n$ .

Analisa-se primeiramente a quantidade de intervalos em cada etapa. De fato, para  $n = 0$  tem-se  $Q_0 = 1$ , para  $n = 1$  temos  $Q_1 = 2$ , para  $n = 2$  temos  $Q_2 = 4$ , para  $n = 3$  temos  $Q_3 = 8$ , pode-se concluir que em cada  $n$  etapa, há uma quantidade de  $2^n$  intervalos. Assim, quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ , ou seja, o número de intervalos tende ao infinito.

Agora, será analisado o comprimento de cada intervalo, o qual denominaremos de  $C_n$  em sua  $n$ -ésima etapa. Note que para  $n = 0$ , o comprimento será  $C_0 = 1$ , já para  $n = 1$  tem-se  $C_1 = \frac{1}{3}$ , para  $n = 2$  o comprimento será  $C_2 = \frac{1}{9}$ , seguindo este mesmo processo temos para a  $n$ -ésima etapa o comprimento  $C_n = \frac{1}{3^n}$ . Com isso, tem-se que para infinitas etapas o limite de  $C_n$  para  $n \rightarrow \infty$ , será  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ . Logo o comprimento dos intervalos tende a zero, obtendo uma série infinita de pontos, e esse é o motivo da denominação “Poeira de Cantor”.

Para concluir o comprimento total  $T_n$ , será necessário a utilização da quantidade de intervalos e o seu comprimento. Assim, multiplicam-se os dois resultados, logo  $T_n = Q_n \cdot C_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Quando o número de etapas tende ao infinito, tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . Dessa forma, o comprimento do conjunto de cantor é zero, o que implica em não conter intervalos.

Tabela 2.1: Conjunto de Cantor

Etapas	Nº de Intervalo	Comp. do intervalo	Comp.total do intervalo
0	1	1	1
1	2	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)$
2	4	$\left(\frac{1}{9}\right)$	$\left(\frac{4}{9}\right)$
3	8	$\left(\frac{1}{27}\right)$	$\left(\frac{8}{27}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$2^n$	$\left(\frac{1}{3^n}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Fonte: Autor.

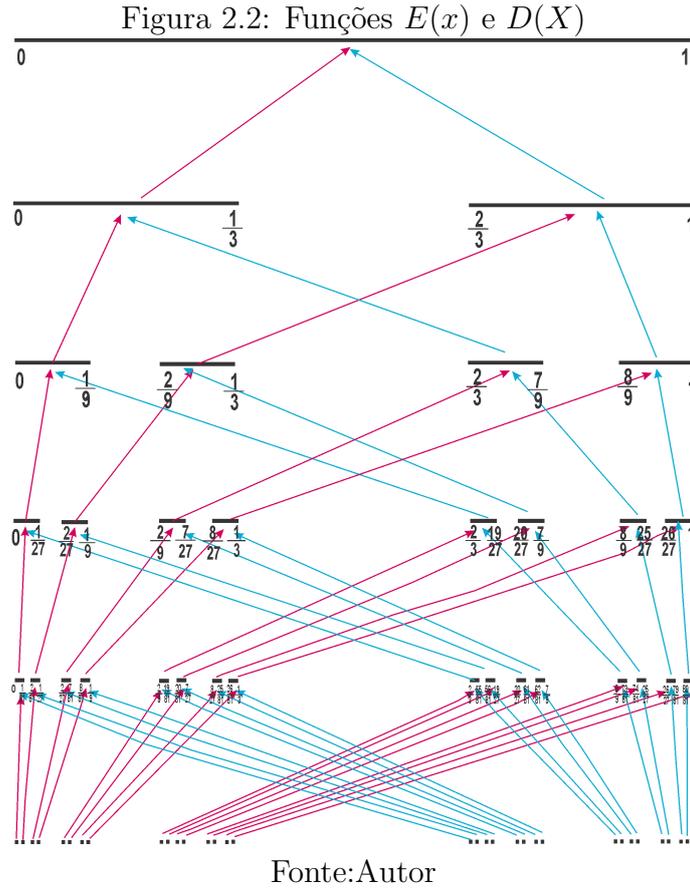
Outra observação importante do Conjunto de Cantor é que, em cada etapa, os extremos sempre permanecem, nunca são eliminados, podendo concluir então que é formado por:

$$I = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

Uma das mais importantes propriedades dos fractais é a autossimilaridade, ou seja, pequenas partes são representações do todo. Para justificar a autossimilaridade de fractais, nessa seção, construir-se-ão aplicações bijetoras, que associam a cada parte do fractal em uma determinada etapa à sua parte geradora.

Na construção do Conjunto de Cantor, considere  $I_0 = [0, 1]$  o intervalo inicial, etapa 0. Na etapa 1, dividimos o intervalo  $I_0$  em três intervalos, e retiramos o terço-médio. Seja  $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$ , onde  $I_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $I_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ . Na etapa 2, cada intervalo de  $I_1$  será dividido em três novos intervalos e retira-se o terço-médio de cada um. Assim,  $I_2 = \bigcup_{i=1}^4 I_{2,i} - N_2$ , onde  $N_2$  indica os intervalos retirados nessa etapa, logo  $I_{2,1} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$ ,  $I_{2,2} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ ,  $I_{2,3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ ,  $I_{2,4} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ . Repetindo-se esse processo, na etapa  $n$ , tem-se  $I_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i} - N_n$ , ou seja,  $I_n$  contém  $2^n$  intervalos e  $N_n$  indica os intervalos retirados nas  $n$  etapas. Veja Figura 2.1.

O objetivo é construir uma função bijetora, que associa cada subintervalo de  $I_n$  ao intervalo  $I_0$ . Para isso, em cada etapa  $n$  os intervalos  $I_{n,i} \subseteq I_{1,1}$ , com  $i = 1, \dots, 2^{n-1}$  serão ditos intervalos do lado esquerdo, e os intervalos  $I_{n,i} \subseteq I_{1,2}$ , com  $i = 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n$  serão ditos intervalos do lado direito. Além disso, considerando que as funções  $E(x) = 3x$  se  $x$  pertence à um intervalo do lado esquerdo, e  $D(x) = 3x - 2$  se  $x$  pertence à um intervalo do lado direito. Sempre que se considera as funções definidas sobre os intervalos do domínio, ou seja, também se consideram os intervalos em cada etapa, indicado por  $N_n$ . Veja Figura 2.2, onde as setas vermelhas indicam a função  $E(x)$  e as setas azuis indicam a função  $D(x)$ .



Portanto, definimos  $T^n : I_{n,i} \rightarrow I_0$ , com  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ , da seguinte forma:  $T^n(x) = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_{n-1} \circ T_n(x)$ , onde :

$$\begin{cases} T_i(x) = E(x) & \text{se } x \text{ está do lado esquerdo} \\ T_i(x) = D(x) & \text{se } x \text{ está do lado direito} \end{cases}$$

Como  $E$  e  $F$  são funções bijetoras, segue que a função  $T^n$  também é bijetora, pois a composta de funções bijetoras também é bijetora.

Como exemplo, considere-se o intervalo  $I_{4,3} = \left[ \frac{2}{27}, \frac{7}{81} \right]$  da etapa 4, assim a transformação linear  $T^4 = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4$  será definida da seguinte forma: Note que  $I_{4,3}$  está do lado esquerdo, assim  $T_4(x) = E(x)$  e  $T_4(I_{4,3}) = \left[ \frac{2}{9}, \frac{7}{27} \right] = I_{3,3}$ . Agora  $I_{3,3}$  está também do lado esquerdo, então  $T_3(x) = E(x)$ , assim  $T_3(I_{3,3}) = \left[ \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] = I_{2,3}$ . Como  $I_{2,3}$  está do lado direito, então  $T_2(x) = D(x)$ , assim  $T_2(I_{2,3}) = \left[ 0, \frac{1}{3} \right] = I_{1,1}$ . Por fim, como  $I_{1,1}$  está do lado esquerdo, então  $T_1(x) = E(x)$  e  $T_1(I_{1,1}) = [0, 1] = I_0$ . Portanto,  $T^4(x) = T_1(T_2(T_3(T_4(x)))) = T_1(T_2(T_3(3x))) = T_1(T_2(9x)) = T_1(27x - 2) = 81x - 6$ .

O Conjunto de Cantor se constitui em uma significativa contribuição para a matéria em geral e para a geometria em particular. Pode-se dizer que ele é o precursor da geometria fractal. Ele se fundamenta no processo de retiradas assim como os conjuntos de Sierpinski (cujo trabalho será abordado na próxima seção). O trabalho de Cantor foi um divisor de águas e representa um dos principais avanços no estudo da geometria fractal.

## 2.2 Fractais de Sierpinski

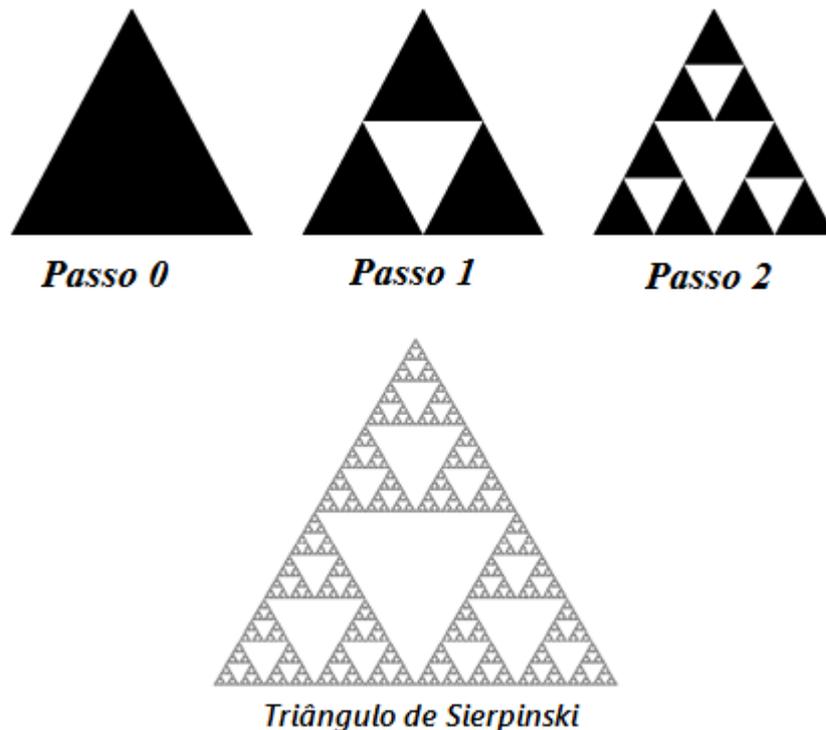
Waclaw Sierpinski, nasceu (em 14 de março de 1882) e faleceu (em 21 de outubro de 1969) em Varsóvia (atual Polônia). Ingressou no Departamento de Matemática e Física da Universidade de Varsóvia em 1899. Tornou-se figura de destaque na topologia de conjuntos e foi um dos fundadores da escola polonesa de matemática, que erigida entre a primeira e segunda guerra mundial (BARBOSA, 2005).

O trabalho de Sierpinski em topologia de conjuntos foi extenso, totalizando mais de 600 trabalhos de pesquisa e, no final de sua vida, ele adicionou mais 100 trabalhos sobre teoria dos números. Ele se esforçou muito para dar uma caracterização topológica ao conjunto de números reais e, assim, descobriu muitos exemplos de espaços topológicos com propriedades inesperadas, dos quais o triângulo(ou gaxeta) de Sierpinski é a mais famosa. Nas subseções seguintes, serão abordados o “Triângulo de Sierpinski” e o “Tapete de Sierpinski”.

### 2.2.1 Triângulos de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski, assim como o Conjunto de Cantor, é obtido por sequência infinita de “remoções”. Considere um triângulo equilátero como na Figura 2.3. A etapa zero é um triângulo equilátero totalmente preenchido. Marcando os pontos médios de cada lado do triângulo e ligando-os, obtém-se quatro novos triângulos equiláteros menores. Na primeira etapa, retira-se o triângulo central, permanecendo com três triângulos equiláteros. Repetindo esse mesmo raciocínio em cada um dos três triângulos restantes da primeira etapa, na etapa dois, retira-se os triângulos centrais e obtém-se nove triângulos equiláteros. Aplicando este processo infinitas vezes, obtemos o “triângulo de Sierpinski”.

Figura 2.3: Construção do triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor

Assim, como o Conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski possui a característica de autossimilaridade. No entanto, dessa vez, o fator ampliação é 2, pois como os triângulos são construídos através de pontos médios, cada lado do novo triângulo sempre será metade do lado do triângulo da etapa anterior.

Para melhor entendimento deste processo do fator de ampliação, considere  $C_n$  o comprimento de cada lado do triângulo na sua  $n$ -ésima etapa. Assim, considerando o triângulo inicial com o comprimento de lado  $l$ , temos na etapa 0,  $C_0 = l$ . Na etapa 1,  $C_1 = \left(\frac{1}{2}\right)l$ , na etapa 2,  $C_2 = \left(\frac{1}{4}\right)l$ , seguindo esse raciocínio, para  $n$ -ésima etapa, teremos  $C_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)l$ . Dessa forma, conclui-se que o fator de ampliação é 2.

Seja  $Q_n$  a quantidade de triângulos em cada etapa  $n$ . Observando a figura 2.3, vemos que na etapa 0,  $Q_0 = 1$ . Na etapa 1 tem-se  $Q_1 = 3$ , na etapa 2 tem-se  $Q_2 = 3^2 = 9$ . Seguindo esse raciocínio, conclui-se que, para a  $n$ -ésima etapa dessa construção, tem-se  $Q_n = 3^n$  triângulos construídos.

Através dessas informações obtidas, calcular-se-á o perímetro e a área do triângulo de Sierpinski. Seja  $P_n$  o perímetro e  $A_n$  a área do triângulo de Sierpinski na  $n$ -ésima etapa.

Para analisar o perímetro  $P_n$  do triângulo de Sierpinski, utilizar-se-ão os resultados obtidos nos cálculos de  $C_n$  e  $Q_n$ , pois o perímetro de uma figura regular é dado pelo quantidade de lados multiplicado pelo comprimento de cada lado. Assim, verifica-se que o perímetro na  $n$  etapa do triângulo de Sierpinski, é dado por  $P_n = Q_n \cdot 3C_n$ . Observa-se o que acontece em cada  $n$  etapa:

$$\begin{aligned} P_0 &= (3^0) \cdot 3l = 3l \\ P_1 &= (3^1) \cdot 3 \left(\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^1 \cdot P_0 \\ P_2 &= (3^2) \cdot 3 \left(\frac{l}{2^2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot P_0 \\ P_3 &= (3^3) \cdot 3 \left(\frac{l}{2^3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= (3^n) \cdot 3 \left(\frac{l}{2^n}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P_0 \end{aligned}$$

Com isso, o perímetro do Triângulo de Sierpinski, na etapa  $n$  será  $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot P_0$ , assim o perímetro  $P$  do Triângulo de Sierpinski é obtido fazendo  $n \rightarrow \infty$ , logo  $P \rightarrow \infty$ , pois  $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

Agora, para a área do triângulo, olhando para a Figura 2.3 na etapa 1, é possível observar que o triângulo da etapa 0 foi dividido em quatro triângulos iguais e deste tirado o triângulo central, assim tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} A_0 &= A \\ A_1 &= A - \frac{1}{4}A = A \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) A \\ A_2 &= A_1 - \frac{1}{4}A_1 = A_1 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A \\ A_3 &= A_2 - \frac{1}{4}A_2 = A_2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n-1} - \frac{1}{4}A_{n-1} = A_{n-1} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A \end{aligned}$$

Logo, a área do Triângulo de Sierpinski na etapa  $n$  é  $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , tem-se que área  $A$  do Triângulo de Sierpinski tende a zero, pois  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

Tabela 2.2: Triângulo de Sierpinski

Étapas	Quant. de triângulos	Comp. do lado do triângulo	Perímetro	Área
0	$3^0$	$l$	$3^1 l$	$A_0$
1	$3^1$	$\left(\frac{l}{2}\right)$	$3^2 \left(\frac{l}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right) A$
2	$3^2$	$\left(\frac{l}{2^2}\right)$	$3^3 \left(\frac{l}{2^2}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 A$
3	$3^3$	$\left(\frac{l}{2^3}\right)$	$3^4 \left(\frac{l}{2^3}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$3^n$	$\left(\frac{l}{2^n}\right)$	$(3^{n+1}) \left(\frac{l}{2^n}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$

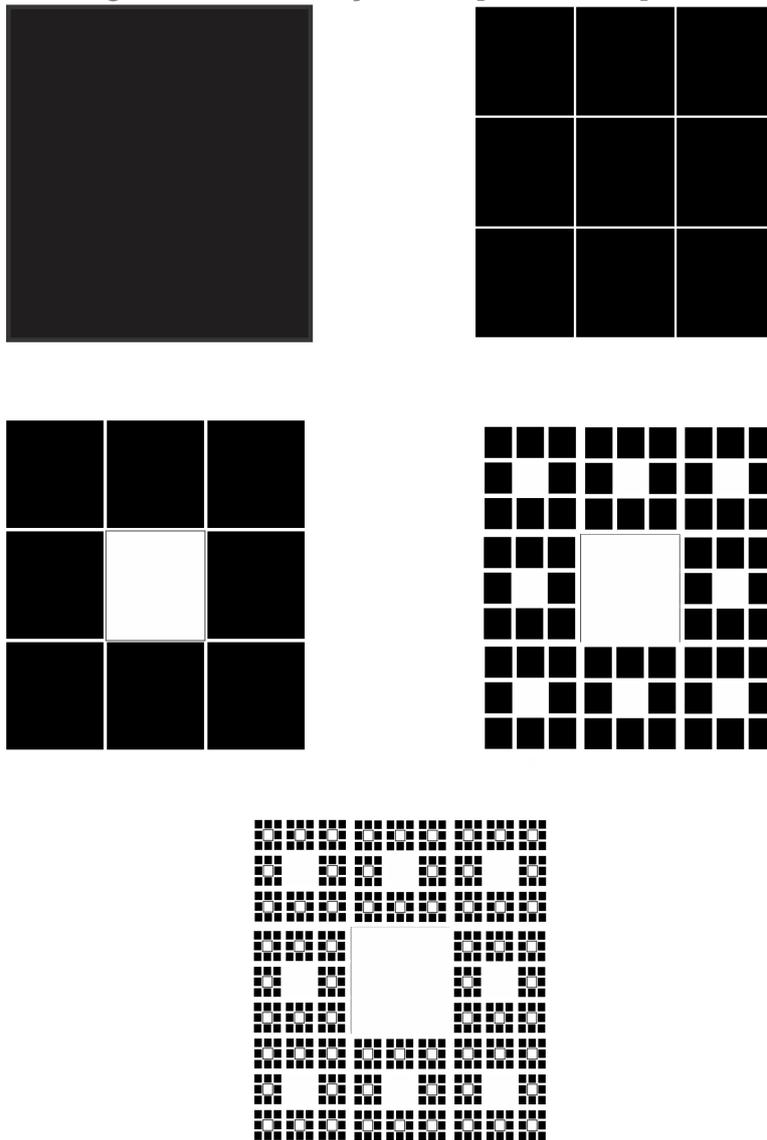
Fonte: Autor

O triângulo de Sierpinski permitiu expandir ainda mais os horizontes da geometria fractal. Ele (o triângulo) seguido pelo tapete de Sierpinski (fractal no plano sobre o qual será percorrido na próxima seção) permite compreender que nem sempre quando for aumentado o perímetro de uma figura será aumentada sua área, algo que parecia óbvio para a geometria euclidiana.

### 2.2.2 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski será construído usando o mesmo raciocínio do Triângulo de Sierpinski. Com efeito, considere um quadrado totalmente preenchido, de lado,  $l$ . O primeiro passo, será dividir este quadrado em nove quadrados congruentes, sendo retirado o quadrado central, ficando apenas com oito quadrados. Na etapa 2, repete-se esse processo para cada um dos oito quadrados restantes da etapa 1, obtendo 64 novos quadrados. Realizando este processo infinitas vezes, obtém-se o tapete de Sierpinski, como mostra a figura 2.4 a seguir:

Figura 2.4: Construção do tapete de Sierpinsk



Fonte: Autor

Analisando a Figura 2.4, pode-se observar que, como no Triângulo de Sierpinski, a cada construção, o lado do novo quadrado se reduz, só que agora o fator de redução será de  $\frac{1}{3}$  e a quantidade de novos quadrados sempre aumenta em um fator 8. Dessa forma, na  $n$ -ésima etapa tem-se  $8^n$  quadrados.

Com estas informações, pode-se analisar o perímetro  $P_n$  do tapete nas  $n$  etapas do processo. Primeiramente, considera-se um quadrado de lado  $l$ , sendo assim, na etapa 0, teremos  $P_0 = 4l$ . Na etapa 1, tem-se 8 quadrados, cujo o de perímetro de cada um desses quadrados é  $\left(\frac{1}{3}\right) P_0$ , pois o fator de redução é  $\left(\frac{1}{3}\right)$ , então  $P_1 = \left(\frac{8}{3}\right) P_0$ . Na etapa  $n = 2$ ,

teremos  $8^2$  quadrados, cujo perímetro de cada quadrado é  $\left(\frac{1}{3^2}\right)P_0$ , logo o perímetro será  $P_2 = \left(\frac{8^2}{3^2}\right)P_0$ . Sendo assim, para a  $n$ -ésima etapa,  $P_n = \left(\frac{8^n}{3^n}\right)P_0$ . Portanto, quando  $n \rightarrow +\infty$  o perímetro  $P$  do Tapete tende ao infinito, pois  $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ .

Para calcular a área do Tapete de Sierpinski, observa-se que o quadrado inicial é dividido em nove quadrados menores, sendo assim a área dos quadrados menores, terá um fator de redução de  $\frac{1}{9}$  em relação ao quadrado gerador anterior. Com isso, podemos começar a análise sobre a área do tapete. Seja  $A_n$  a área de apenas um único quadrado em cada  $n$  etapa e  $A_0 = l^2$  sendo a área inicial, ou seja, a área na etapa 0. Continuando o mesmo raciocínio, temos que:

$$A_1 = \left(\frac{A_0}{9}\right), A_2 = \left(\frac{A_1}{9}\right) = \left(\frac{A_0}{9^2}\right), A_3 = \left(\frac{A_2}{9}\right) = \left(\frac{A_0}{9^3}\right), \dots, A_n = \left(\frac{A_0}{9^n}\right)$$

Seja  $T_n$  a área total nas  $n$  etapas, ou seja  $T_n$  é produto da quantidade de quadrados na etapa  $n$  pela área de cada quadrado na mesma etapa. Dessa forma para calcular a área total, faz-se necessário incluir a quantidade total de quadrados de cada etapa. Logo para a  $n$ -ésima etapa teremos:

$$T_n = 8^n \left(\frac{A_0}{9^n}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^n A_0 .$$

Sendo assim, fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , a área  $A$  do Tapete de Sierpinski será zero, pois  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .

Como no Conjunto de Cantor, o Tapete de Sierpinski também possui a característica de autossimilaridade. Sendo assim, constrói-se uma função bijetora, que associa cada quadrado de uma determinada etapa  $n$  ao quadrado inicial.

Seja  $Q_0 = \left[\frac{a_0}{3^0}, \frac{a_0 + 1}{3^0}\right] \times \left[\frac{b_0}{3^0}, \frac{b_0 + 1}{3^0}\right]$  como sendo a etapa inicial, onde  $a_0, b_0 = 0$ .  
Veja Figura 2.5:

Figura 2.5: Etapa 0



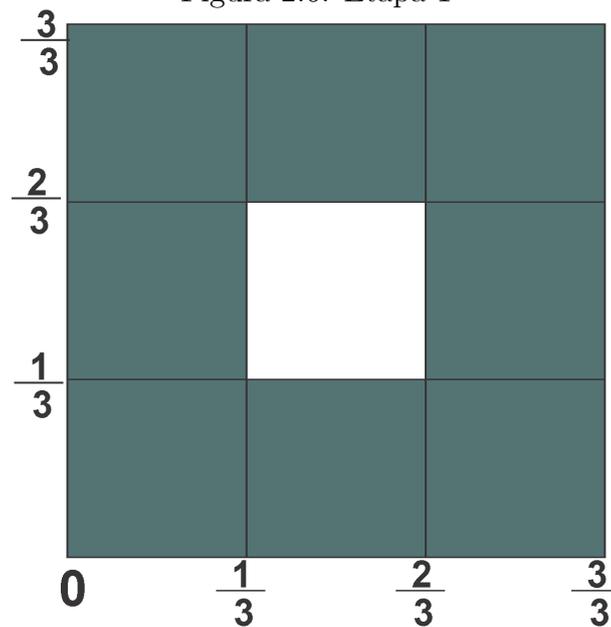
Fonte: Autor

Na etapa 1, divide-se o quadrado  $Q_0$  em 9 quadrados, retirando o quadrado central, obtendo 8 novos quadrados. Observamos que cada intervalo  $[0, 1]$  de  $Q_0$  é dividido em três intervalos. Dessa forma, definimos

$$Q_1 = \bigcup_{a_1, b_1=0}^2 \left[ \frac{a_1}{3^1}, \frac{a_1 + 1}{3^1} \right] \times \left[ \frac{b_1}{3^1}, \frac{b_1 + 1}{3^1} \right] - B_1,$$

onde  $B_1$  indica o quadrado retirado nessa etapa. Veja Figura 2.6.

Figura 2.6: Etapa 1



Fonte: Autor

A aplicação que leva cada um desses oito quadrados de  $Q_1$  em  $Q_0$  é definida da seguinte forma:

$$T_1 : \begin{aligned} \left[ \frac{a_1}{3^1}, \frac{a_1+1}{3^1} \right] \times \left[ \frac{b_1}{3^1}, \frac{b_1+1}{3^1} \right] &\rightarrow \left[ \frac{a_0}{3^0}, \frac{a_0+1}{3^0} \right] \times \left[ \frac{b_0}{3^0}, \frac{b_0+1}{3^0} \right] \\ (x, y) &\rightarrow \left( 3x - \left( \frac{a_1 - a_0}{3^0} \right), 3y - \left( \frac{b_1 - b_0}{3^0} \right) \right), \end{aligned}$$

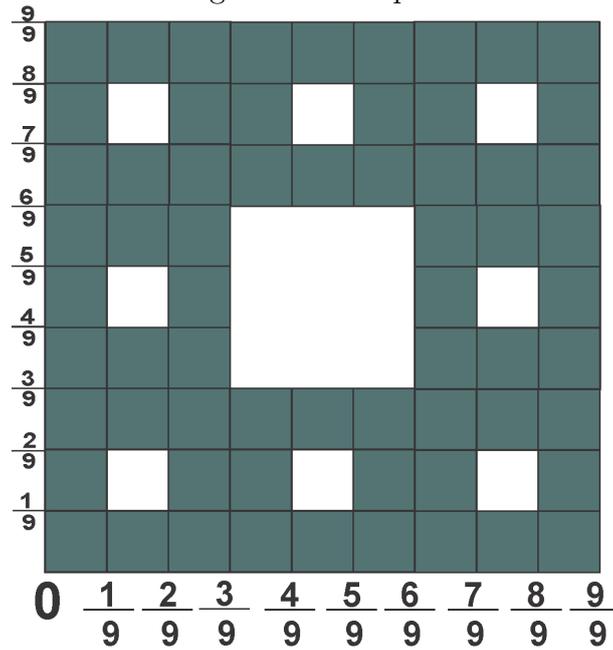
com  $a_1, b_1 = 0, 1, 2$  e  $a_0, b_0 = 0$ .

Na etapa 2, cada um dos oito quadrados de  $Q_1$  são divididos em nove quadrados, retirando-se o quadrado central, obtendo agora  $8^2 = 64$  novos quadrados. Agora, cada intervalo  $[0, 1]$  de  $Q_0$  é dividido em nove intervalos. Dessa forma, definimos

$$Q_2 = \bigcup_{a_2, b_2=0}^8 \left[ \frac{a_2}{3^2}, \frac{a_2+1}{3^2} \right] \times \left[ \frac{b_2}{3^2}, \frac{b_2+1}{3^2} \right] - B_2,$$

onde  $B_2$  representa a quantidade de quadrados retirados nessa etapa e na etapa anterior. Veja Figura 2.7.

Figura 2.7: Etapa 2



Fonte: Autor

A aplicação que leva cada um dos 64 quadrados de  $Q_2$  ao seu respectivo quadrado de  $Q_1$  é definida da seguinte forma:

$$T_2 : \begin{aligned} \left[ \frac{a_2}{3^2}, \frac{a_2 + 1}{3^2} \right] \times \left[ \frac{b_2}{3^2}, \frac{b_2 + 1}{3^2} \right] &\rightarrow \left[ \frac{a_1}{3^1}, \frac{a_1 + 1}{3^1} \right] \times \left[ \frac{b_1}{3^1}, \frac{b_1 + 1}{3^1} \right] \\ (x, y) &\rightarrow \left( 3x - \left( \frac{a_2 - a_1}{3^1} \right), 3y - \left( \frac{b_2 - b_1}{3^1} \right) \right), \end{aligned}$$

com  $a_2, b_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  e  $a_1, b_1 = 0, 1, 2$ .

A relação dos pontos  $\{a_2, b_2\}$  de  $Q_2$  que se relacionam com os pontos  $\{a_1, b_1\}$  de  $Q_1$  é dada por:

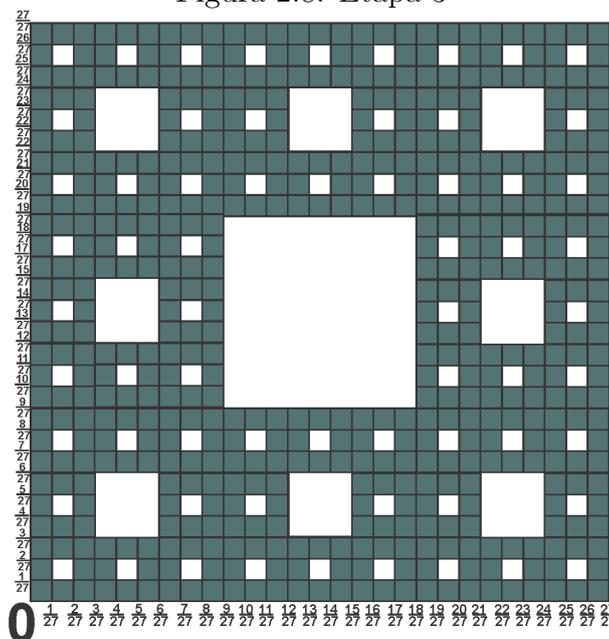
$$\begin{cases} a_2, b_2 = 0, 1, 2 \Rightarrow a_1, b_1 = 0 \\ a_2, b_2 = 3, 4, 5 \Rightarrow a_1, b_1 = 1 \\ a_2, b_2 = 6, 7, 8 \Rightarrow a_1, b_1 = 2 \end{cases}$$

Na etapa 3, cada um dos 64 quadrados de  $Q_2$  são divididos em nove novos quadrados, retirando-se sempre o quadrado central, obtendo  $512 = 8^3$  novos quadrados. Agora, cada intervalo  $[0, 1]$  de  $Q_0$  será dividido em 27 intervalos. Dessa forma, definimos

$$Q_3 = \bigcup_{a_3, b_3=0}^{26} \left[ \frac{a_3}{3^3}, \frac{a_3 + 1}{3^3} \right] \times \left[ \frac{b_3}{3^3}, \frac{b_3 + 1}{3^3} \right] - B_3,$$

onde  $B_3$  representa a quantidade de quadrados retirados nessa etapa e nas etapas anteriores. Veja Figura 2.8

Figura 2.8: Etapa 3



Fonte:Autor

A aplicação que leva cada um dos 512 quadrados de  $Q_3$  ao seu respectivo quadrado de  $Q_2$  é definida da seguinte forma:

$$T_3 : \left[ \frac{a_3}{3^3}, \frac{a_3 + 1}{3^3} \right] \times \left[ \frac{b_3}{3^3}, \frac{b_3 + 1}{3^3} \right] \rightarrow \left[ \frac{a_2}{3^2}, \frac{a_2 + 1}{3^2} \right] \times \left[ \frac{b_2}{3^2}, \frac{b_2 + 1}{3^2} \right]$$

$$(x, y) \rightarrow \left( 3x - \left( \frac{a_3 - a_2}{3^2} \right), 3y - \left( \frac{b_3 - b_2}{3^2} \right) \right),$$

com  $a_3, b_3 = 0, 1, 2, 3, \dots, 26$  e  $a_2, b_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

A relação dos pontos  $\{a_3, b_3\}$  de  $Q_3$  que se relacionam com os pontos  $\{a_2, b_2\}$  de  $Q_2$  é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3, b_3 = 0, 1, 2 \Rightarrow a_2, b_2 = 0 \\ a_3, b_3 = 3, 4, 5 \Rightarrow a_2, b_2 = 1 \\ a_3, b_3 = 6, 7, 8 \Rightarrow a_2, b_2 = 2 \\ a_3, b_3 = 9, 10, 11 \Rightarrow a_2, b_2 = 3 \\ \vdots \\ a_3, b_3 = 24, 25, 26 \Rightarrow a_2, b_2 = 8 \end{array} \right.$$

Seguindo este raciocínio, na etapa  $n$  temos  $8^n$  quadrados, já considerando todos os quadrados retirados nessa etapa e nas etapas anteriores, indicado por  $B_n$ . Agora, cada intervalo  $[0, 1]$  de  $Q_0$  será dividido em  $3^n$  intervalos. Seja

$$Q_n = \bigcup_{a_n, b_n=0}^{3^n-1} \left[ \frac{a_n}{3^n}, \frac{a_n+1}{3^n} \right] \times \left[ \frac{b_n}{3^n}, \frac{b_n+1}{3^n} \right] - B_n,$$

A aplicação que associa cada um dos quadrados de  $Q_n$  ao seu respectivo quadrado da etapa anterior,  $Q_{n-1}$ , é definida da seguinte forma:

$$T_n : \left[ \frac{a_n}{3^n}, \frac{a_n+1}{3^n} \right] \times \left[ \frac{b_n}{3^n}, \frac{b_n+1}{3^n} \right] \rightarrow \left[ \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{a_{n-1}+1}{3^{n-1}} \right] \times \left[ \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}}, \frac{b_{n-1}+1}{3^{n-1}} \right]$$

$$(x, y) \rightarrow \left( 3x - \left( \frac{a_n - a_{n-1}}{3^{n-1}} \right), 3y - \left( \frac{b_n - b_{n-1}}{3^{n-1}} \right) \right),$$

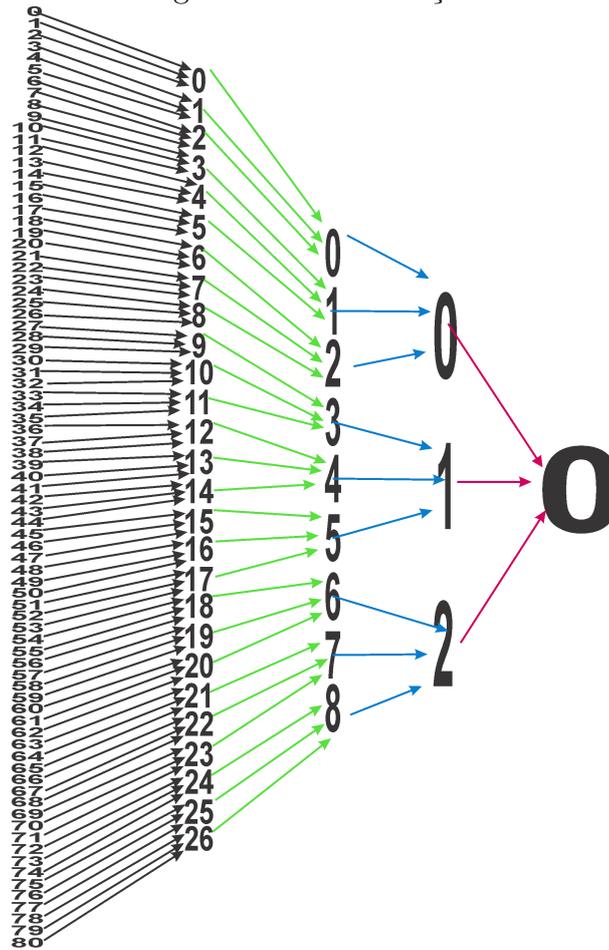
com  $a_n, b_n = 0, 1, 2, 3, \dots, 3^n - 1$  e  $a_{n-1}, b_{n-1} = 0, 1, 2, 3, \dots, 3^{n-1} - 1$ .

A relação dos pontos  $\{a_n, b_n\}$  de  $Q_n$  que se relacionam com os pontos  $\{a_{n-1}, b_{n-1}\}$  de  $Q_{n-1}$  é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n, b_n = 0, 1, 2 \Rightarrow a_{n-1}, b_{n-1} = 0 \\ a_n, b_n = 3, 4, 5 \Rightarrow a_{n-1}, b_{n-1} = 1 \\ a_n, b_n = 6, 7, 8 \Rightarrow a_{n-1}, b_{n-1} = 2 \\ a_n, b_n = 9, 10, 11 \Rightarrow a_{n-1}, b_{n-1} = 3 \\ \vdots \\ a_n, b_n = 3^n - 3, 3^n - 2, 3^n - 1 \Rightarrow a_{n-1}, b_{n-1} = 3^{n-1} \end{array} \right.$$

Um diagrama para representar essas combinações, podem ser vistos na Figura 2.9

Figura 2.9: Combinações



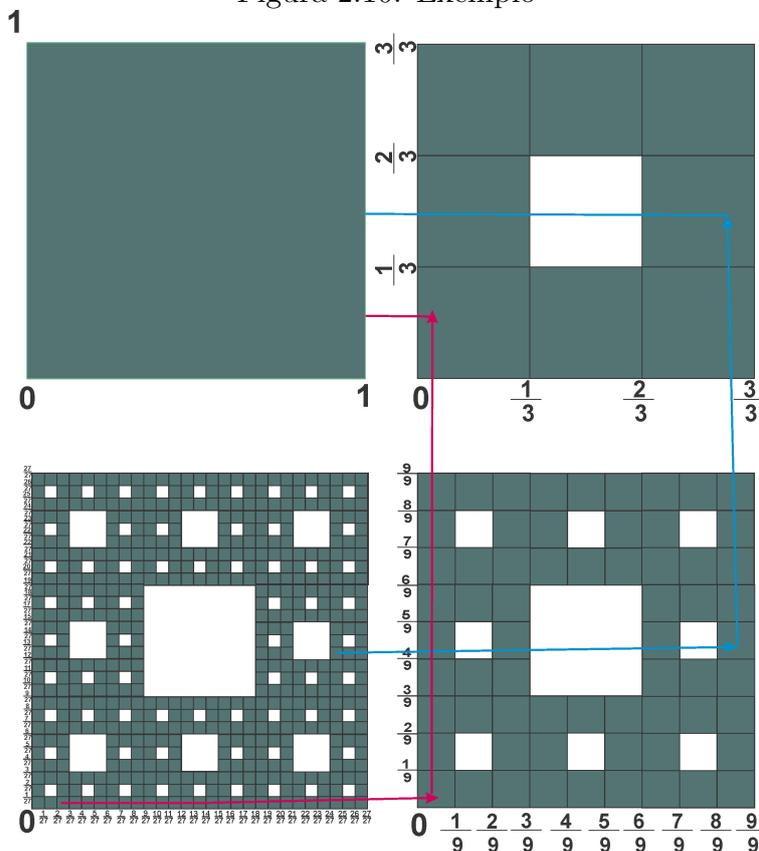
Fonte:Autor

Agora, dado qualquer quadrado  $Q_{n,i}$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, 8^n$  numa etapa  $n$ , para associar ele ao quadrado original  $Q_0$ , basta tomar a aplicação  $T^n : Q_{n,i} \Rightarrow Q_0$ , definida pela composição de transformações, onde  $T^n = T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_{n-1} \circ T_n$ . Como exemplo, para  $n = 3$ , considere os quadrados  $Q_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3^3 & 3^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3^3 & 3^3 \end{bmatrix}$  e  $Q_{3,2} = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 3^3 & 3^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 3^3 & 3^3 \end{bmatrix}$  de  $Q_3$ . Veja Figura 2.10

- (a)  $T^3 : Q_{3,1} \rightarrow Q_0$ , onde  $T^3(Q_{3,1}) = T_1 \circ T_2 \circ T_3(Q_{3,1}) = T_1(T_2(T_3(Q_{3,1})))$ . Note que,  $T_3(Q_{3,1}) = Q_{2,1}$ ,  $T_2(Q_{2,1}) = Q_{1,1}$  e  $T_1(Q_{1,1}) = Q_0$ , onde  $Q_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3^2 & 3^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3^2 & 3^2 \end{bmatrix}$  e  $Q_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
- (a)  $T^3 : Q_{3,2} \rightarrow Q_0$ , onde  $T^3(Q_{3,2}) = T_1 \circ T_2 \circ T_3(Q_{3,2}) = T_1(T_2(T_3(Q_{3,2})))$ . Note que,  $T_3(Q_{3,2}) = Q_{2,2}$ ,  $T_2(Q_{2,2}) = Q_{1,2}$  e  $T_1(Q_{1,2}) = Q_0$ , onde  $Q_{2,2} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 3^2 & 3^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3^2 & 3^2 \end{bmatrix}$

$$e Q_{1,2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Figura 2.10: Exemplo



Fonte: Autor

A figura 2.10 acima demonstra geometricamente o processo dos calculos realizados acima.

Embora no primeiro momento se pareça complexo, o tapete de Sierpinski confira-se em um fractal relativamente simples se comparado ao floco de neve de Koch (conteúdo que será tratado na próxima seção). Isso porque além do processo de retiradas que ocorre no tapete de Sierpinski, o floco ainda tem um processo de adição como veremos a seguir.

### 2.3 O Floco de Neve de Koch

Niels Fabian Helge von Koch, nasceu em 25 de janeiro de 1870, Estocolmo-Suécia e morreu em 11 de março de 1924 , Estocolmo. Foi um matemático famoso por sua descoberta da curva do floco de neve de von Koch, uma curva contínua importante no estudo da geometria fractal. Von Koch foi aluno de Gösta Mittag-Leffler e o sucedeu

como professor de matemática na Universidade de Estocolmo em 1911. Seu primeiro trabalho foi sobre a teoria dos determinantes de matrizes infinitas, um tópico iniciado pelo matemático francês Henri Poincaré. Este trabalho agora faz parte da teoria dos operadores lineares, que são fundamentais no estudo da mecânica quântica. Ele também trabalhou na hipótese de Riemann e no teorema do número primo.

Von Koch é lembrado principalmente, no entanto, por um artigo de 1906 no qual ele deu uma descrição muito atraente de uma curva contínua que nunca tem uma tangente. Funções contínuas e “não diferenciáveis” foram rigorosamente introduzidas na matemática pelo alemão Karl Weierstrass na década de 1870. Seguindo sugestões do alemão Bernhard Riemann e, ainda mais cedo, do boêmio Bernhard Bolzano, cujo trabalho não era bem conhecido. O exemplo de Von Koch é talvez o mais simples. Começando com um triângulo equilátero, ele substitui o terço médio de cada segmento por um triângulo equilátero tendo a parte excluída do segmento como sua base (a base é apagada). Essa operação de substituição é continuada indefinidamente, com o resultado de que a curva limitadora é contínua, mas não diferenciável. Se os novos triângulos sempre estiverem voltados para fora, a curva resultante terá uma semelhança impressionante com um floco de neve e, portanto, a curva é freqüentemente chamada de floco de neve de von Koch.

Ao contrário do triângulo de Sierpinski, o floco de neve de Koch é gerado por uma sucessão infinita de adições. Antes de dar início a construção do floco de neve, introduziremos a curva de Koch, uma das primeiras estruturas fractais descritas na matemática, ela foi introduzida através da criação de uma curva contínua sem tangentes em nenhum ponto.

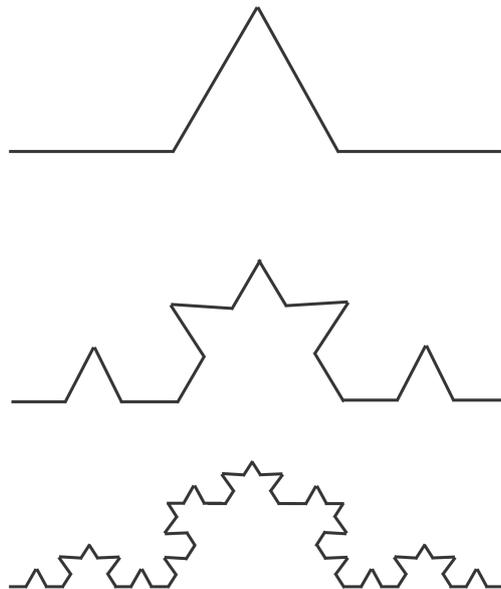
Geometricamente a construção da Curva de Koch é similar a do Conjunto de Cantor, ambas inicia-se com um segmento de reta de comprimento igual à 1 e em cada etapa os segmentos são divididos em 3 partes iguais. A diferença entre ambos é que na curva de Koch o terço médio de cada segmento formado em cada etapa é substituído por um triângulo equilátero, já no Conjunto de Cantor apenas é retirado o terço médio de cada segmento.

A construção dessa figura é dada da seguinte forma:

- Inicia-se com um reta de comprimento  $L$ ;
- Divide-se essa reta em três partes iguais e adiciona-se um triângulo equilátero com base no terço medio;
- Retira-se o terço médio da reta dividida que serviu de base
- O processo anterior iniciado com a construção do triângulo equilátero sobre o terço médio da reta é repetido em cada novo segmento de reta;

- Repita-se esse processo indefinidamente em cada novo segmento formado, obtendo assim a Curva de Koch.
- Veja Figura 2.11

Figura 2.11: Curva de Koch

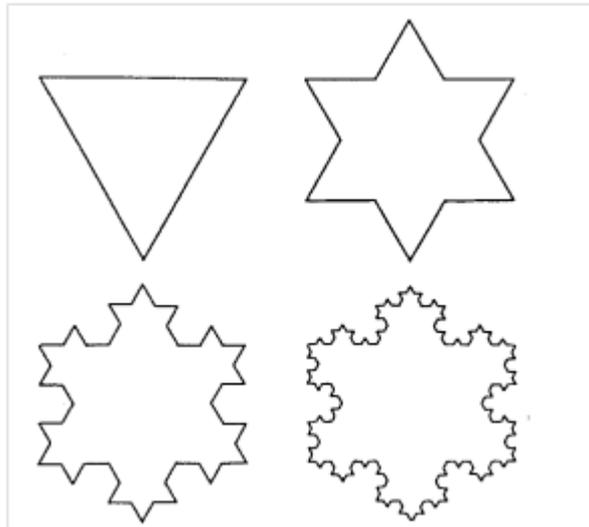


Fonte: Autor

Note que a Curva de Koch, têm comprimento infinito dentro de um plano finito, logo sua dimensão não é de uma reta e nem de um plano, mas intermediária a ambas, ou seja, mais que unidimensional e menos que bidimensional.

Para a construção do floco de neve, inicia-se com um triângulo equilátero com lados de comprimento  $l$ . A primeira etapa neste processo, é remover o terço médio de cada lado do triângulo, assim como se faz na construção do conjunto de Cantor. Mas, agora serão realizadas as substituições de cada um desses pedaços em dois pedaços de mesmo comprimento, dando um formato de estrela retratado na Figura 2.12. Essa nova imagem tem doze lados, cada um com comprimento de  $\frac{1}{3}l$ . Repetindo este processo para a segunda etapa divide-se cada lado em três partes iguais, retira-se o terço médio e substitui-se por dois pedaços de comprimento  $\frac{1}{9}l$ . O resultado também é mostrado na Figura 2.12. Repetindo este processo infinitas vezes, obtém-se uma figura que é uma curva infinita e não possui linha reta. Esses objetos são chamados de Floco de Neve de Koch.

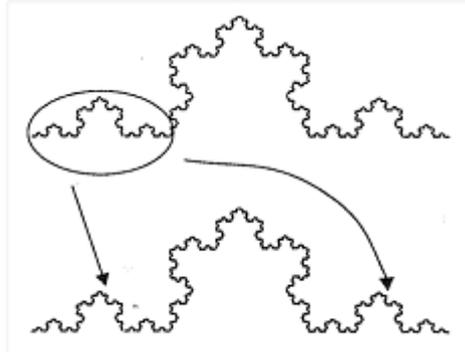
Figura 2.12: Construção do Floco de Neve de Koch



Fonte: A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment (1992)

Claramente, existem pedaços de flocos de neve que são autossimilantes. Ao olhar um lado de um floco de neve, o que se vê é chamado de Curva de Koch, ver Figura 2.13. Nessa perspectiva, se for examinado um terço dessas bordas e ampliada essa porção por um fator de 3, observar-se-á novamente a mesma Figura 2.13.

Figura 2.13: Ampliação da curva de Koch



Fonte: A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment (1992)

Cada fase de construção da curva de Koch, ampliada por um fator 3, obtém-se uma imagem como a anterior. Assim como antes, a imagem final é autossimilante a anterior.

Esse fractal tem uma propriedade geométrica incrível. Sua área final é finita, mas, seu perímetro é infinito! Isso significa, que se pode pintar dentro do floco de neve de Koch, mas nunca se poderá envolver um comprimento de corda ao redor do seu limite. Isso é um contraste para os diferentes formatos encontrados em geometria euclidiana, como quadrados e círculos, que tem área e perímetro finito.

Para verificar essa propriedade, considere  $N_0, N_1, N_2, \dots$  o número de lados do floco de neve nas etapas correspondentes da construção. Assim,

$$\begin{aligned} N_0 &= 3 \\ N_1 &= 4 \cdot 3 = 12 \\ N_2 &= 4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ N_n &= 4 \cdot N_{n-1} = 4^n \cdot 3 \end{aligned}$$

Observa-se que o número de lados crescem rapidamente, porém o comprimento dos lados diminui. Para calcular o perímetro, considere  $C_n$  o comprimento de cada segmento depois da  $n$ -ésima fase. No início cada segmento tem comprimento  $l$ , depois da primeira adição, o comprimento de cada segmento será  $\frac{1}{3}l$ , depois da segunda, o comprimento de cada lado terá  $\frac{1}{3^2}l$ , e assim em diante. Descobrimos que na  $n$ -ésima etapa teremos,  $C_n = \frac{1}{3^n}l$ .

Como perímetro  $P_n$  em cada etapa  $n$  é dado pelo número de segmentos vezes o comprimento de cada segmento, assim  $P_n = N_n \cdot C_n$ , logo  $P_n = 4^n \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3^n}l\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3l$ . Portanto, quando fazemos  $n \rightarrow \infty$ , obtém-se o perímetro  $P$  do floco de Neve, portanto  $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \infty$ .

Para calcular a área do Floco de Neve, considere  $A_n$ , a área do floco de neve na  $n$ -ésima etapa. Considerando um triângulo equilátero de lado  $l$ , e para resolver utilizar-se-á a fórmula da área do triângulo equilátero, logo  $A_0 = (l)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ . Para calcular  $A_1$  somar-se-ão a área do triângulo anterior com a área dos segmentos que aumentaram, ou seja, três triângulos equiláteros de lado  $\frac{1}{3}l$ , seguindo o mesmo raciocínio tem-se:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \\
A_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 + 3 \left(\frac{1}{3}l\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)l^2 \\
A_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)l^2 + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3^2}l\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)\right)l^2 \\
A_3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)\right)l^2 + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3^3}l\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2\right)l^2 \\
&\vdots \\
A_n &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)l^2
\end{aligned}$$

Analisando  $A_n$ , observa-se que pode ser escrito da seguinte forma,

$$A_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right)l^2$$

No que  $\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$  é uma progressão geométrica (PG) de razão  $\frac{4}{9}$ . Ao fazermos  $n \rightarrow \infty$ , esta progressão geométrica será uma progressão infinita, assim pela fórmula da soma de uma PG infinita, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5} .$$

Note que a área  $A$  do Floco de Neve de Koch é dada por  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5}\right)l^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)l^2 \cong (0,7)l^2$$

Portanto a área do Floco de Neve de Koch é aproximadamente  $(0,7)l^2$ .

Enfim, o floco de neve de Koch pode ser considerado como um dos fractais mais bonitos. Isso porque suas formas complexas (inúmeros triângulos adicionados ao perímetro do triângulo inicial) permitem confundir os olhos de quem o observa, fazendo deste uma figura unidimensional.

## 2.4 Esponja de Menger

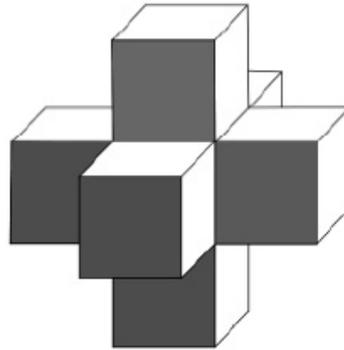
Karl Menger nasceu em 13 de janeiro de 1902 e morreu em 5 de outubro de 1985. Foi um matemático austríaco, filho do economista Carl Menger. Ele é conhecido pelo teorema de Menger. Ele trabalhou em álgebra matemática, teoria da curva e dimensões. Além disso, ele contribuiu para a teoria dos jogos e as ciências sociais.

Karl Menger foi aluno de Hans Hahn e recebeu seu PhD da Universidade de Viena em 1924. L. E. J. Brouwer convidou Menger em 1925 para lecionar na Universidade de Amsterdã. Em 1927, ele retornou a Viena para aceitar um cargo de professor. Entre 1930 e 1931, foi professor visitante na Universidade de Harvard e no The Rice Institute. De 1937 a 1946, ele foi professor na Universidade de Notre Dame. De 1946 a 1971, ele foi professor no Instituto de Tecnologia de Illinois, em Chicago. Em 1983, o IIT concedeu a Menger o título de Doutor em Letras e Ciências Humanas.

Sua contribuição na matemática mais famosa e popular, foi a esponja de Menger (erroneamente conhecida como esponja de Sierpinski), uma versão tridimensional do tapete de Sierpinski. Também está relacionado ao conjunto Cantor. Com Arthur Cayley, Menger é considerado um dos fundadores da geometria da distância, especialmente por ter formalizado definições para as noções de ângulo e curvatura em termos de quantidades físicas diretamente mensuráveis, ou seja, proporções de valores de distância. As expressões matemáticas características que aparecem nessas definições são os chamados “Determinantes de Cayley-Menger”.

A esponja segue o mesmo princípio do Triângulo e Tapete de Sierpinski, porém desta vez a figura é um cubo. Para a construção deste fractal, inicia-se na etapa 0 com um cubo. Na etapa 1, divide-se o mesmo em 27 cubos menores de mesmo tamanho, e destes retira-se um cubo de cada face e o cubo central, como pode ser visto na Figura 2.14, sobrando apenas 20 cubos menores do cubo inicial.

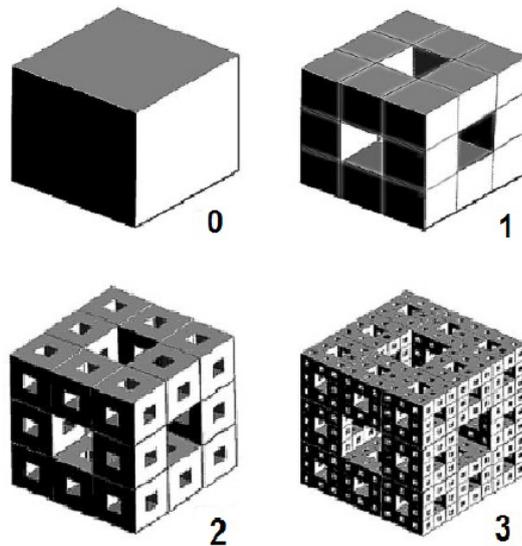
Figura 2.14: Superfície Removida da Esponja de Menger



Fonte:Moura, 2016

Na etapa 2, repete-se este mesmo raciocínio para os 20 cubos restantes da etapa 1, assim teremos agora  $20^2$  cubos. Dessa forma, na  $n$ -ésima etapa o número de cubos será de  $20^n$ , pois a cada etapa aumenta-se um fator de 20. As diversas iterações da esponja de Menger, veja a figura 2.15.

Figura 2.15: Esponja de Menger



Fonte:Moura, 2016

Agora analisaremos a área e o volume deste fractal. Primeiramente iniciaremos pela área da superfície, a qual denomina-se  $A_n$ , área da esponja nas  $n$  etapas. Para calcular a área, precisaremos multiplicar a área de cada face pela quantidade de faces nas diversas

etapas. Sendo assim, será chamada  $f_n$ , a quantidade de faces nas  $n$  etapas, logo se terá na etapa  $n = 0$ ,  $f_0 = 6$ , pois o cubo é formado por 6 faces. Já na etapa 1, tem-se a multiplicação do número de faces da etapa anterior por oito que é o número de faces que restaram após as retiradas e ainda somar 24, sendo este a multiplicação do número de faces retiradas por o número de faces que se ganha que no caso será  $6 \times 4$ , ficando da seguinte forma:

$$f_1 = f_0 \cdot 8 + 24 = 6 \cdot 8 + 24$$

Na etapa 2, teremos

$$f_2 = f_1 \cdot 8 + 20 \cdot 24 = (6 \cdot 8 + 24) \cdot 8 + 20 \cdot 24 = 6 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 20 \cdot 24$$

já na etapa 3,

$$f_3 = f_2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24 = (6 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 20 \cdot 24) \cdot 8 + 20^2 \cdot 24 = 6 \cdot 8^3 + 24 \cdot 8^2 + 20 \cdot 24 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24$$

Sendo assim, para a  $n$ -ésima etapa,

$$f_n = 6 \cdot 8^n + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^{n-1} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{n-2} + \dots + 20^{n-1} \cdot 24 \cdot 8^0$$

A partir de agora é possível definir a área da Esponja de Menger ( $A_n$ ). Seja  $l$  área inicial de cada face, logo para  $n = 0$ , tem-se  $A_0 = f_0 \cdot l = 6 \cdot l$ . Observe que na etapa 1 a área será:

$$A_1 = f_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) l = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 l + \left(\frac{24}{9}\right)^1 l$$

A área de cada face será  $\left(\frac{1}{9}\right) l$  em relação a área da etapa 0. Assim seguindo esse raciocínio, para  $n = 2$ , a área será dada por:

$$A_2 = f_2 \cdot \left(\frac{1}{9^2}\right) l = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 l + \left(\frac{24}{9}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^1 l + \left(\frac{20}{9}\right)^1 \left(\frac{24}{9}\right) l$$

A análise para  $n = 3$ :

$$A_3 = f_3 \cdot \left(\frac{1}{9^3}\right) l = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 l + \left(\frac{24}{9}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^2 l + \left(\frac{20^1 \cdot 24}{9^2}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^1 l + \left(\frac{20}{9}\right)^2 \left(\frac{24}{9}\right) l$$

Sendo assim, na  $n$ -ésima etapa tem-se:

$$A_n = f_n \cdot \left(\frac{1}{9^n}\right) l = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n l + \left(\frac{24}{9}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} l + \left(\frac{20 \cdot 24}{9^2}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} l + \dots \\ \dots + \left(\frac{20^{n-2} \cdot 24}{9^{n-1}}\right) \left(\frac{8}{9}\right)^1 l + \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{24}{9}\right) l$$

Conclui-se que  $A_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , de fato como  $\left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{24}{9}\right) l < A_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} \left(\frac{24}{9}\right) l = \left(\frac{24}{9}\right) l \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} = \infty$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$ .

Sobre o Volume da Esponja de Menger, seja  $V_n$  o volume da esponja nas  $n$ -ésimas etapas das iterações. Considere  $V$  o volume na etapa 0, ou seja  $n = 0$ , para calcular o volume nas  $n$  etapas, basta que se considere o volume da etapa anterior menos a quantidade de cubos retirados multiplicado pelo seu volume atual. Logo para  $n = 1$  teremos:

$$V_1 = V - 7 \cdot \left(\frac{1}{27}\right) V = \left(\frac{20}{27}\right) V$$

Na etapa 2, a quantidade de cubos retirados será  $7 \times 20$ , e o volume de cada um destes cubos  $\left(\frac{1}{27}\right)^2$  em relação ao cubo inicial, sendo assim o volume será:

$$V_2 = V_1 - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \left(\frac{20}{27}\right) V - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V$$

Desta forma, mantendo o mesmo raciocínio das etapas anteriores, tem-se o volume para a  $n$ -ésima etapa do seguinte modo:

$$V_n = V_{n-1} - 7 \cdot 20^{n-1} \left(\frac{1}{27}\right)^n V = \left(\frac{20}{27}\right)^n V$$

$$\text{Logo, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n V = V \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0, \text{ pois } \left(\frac{20}{27}\right) < 1.$$

Diante do exposto, conclui-se que quando  $n \rightarrow \infty$  o Volume da Esponja de Menger será zero. Uma das características interessantes da esponja é que sua área está indo para o infinito enquanto seu volume vai para zero.

Espera-se que esta breve apresentação de alguns dos fractais regulares permita ao leitor adentrar este fascinante universo da geometria fractal. Nessa perspectiva, o próximo capítulo discorrerá sobre a dimensão fractal e o que isso representa nesta peculiar área da matemática.

# Capítulo 3

## DIMENSÃO FRACTAL

Como visto no capítulo anterior, uma característica dos fractais é a autosemelhança. O Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski e o Floco de Neve de Koch, compartilham essa propriedade. Mas, as linhas, quadrados e cubos, figuras familiares da Geometria Euclidiana, também são todas autossemelhantes. Por exemplo: um segmento de linha obviamente pode ser dividido em  $N$  menores subintervalos de comprimentos iguais, sendo eles podendo ser ampliado por um fator  $N$  para retornar ao segmento original. Então, o que distingue conjuntos complicados como o Conjunto de Cantor e Triângulo de Sierpinski de linhas e planos? A resposta é a dimensão.

Não há dúvidas que uma linha tem dimensão um, que o quadrado tem dimensão dois e o cubo tem dimensão três. Ingenuamente falando, essas razões são óbvias. Há somente uma direção para mover uma linha (para frente e para trás), duas direções em um quadrado (comprimento e largura), e três direções em um cubo (comprimento, largura e altura). Então essas figuras tem dimensões 1,2 e 3 respectivamente.

Já a dimensão na geometria fractal, está relacionada ao grau de irregularidade, aspereza e fragmentação, o que pressupõe o motivo de terem dimensão fracionária e serem conhecidos como objetos “imperfeitos”. Nem todos os conjuntos tem dimensões fractais bem definidas. Por essa razão, serão considerados somente os conjuntos que tem, ou seja, aqueles que são afins, autossemelhantes. Uma das ferramentas utilizadas para calcular a dimensão de Fractais, são a dimensão de Hausdorff e o método box-counting.

### 3.1 Dimensão de Hausdorff

A Dimensão de Hausdorff foi desenvolvida e apresentada pelo matemático Felix Hausdorff em 1918, ocasião em que levantou a hipótese de que as dimensões poderiam ser números não inteiros. Posteriormente, o matemático russo Abram Samoilovitch Besicovitch contribuiu para esta área formalizando a equação matemática, tornando possível o

cálculo de dimensões para conjuntos significativamente irregulares. Por essa razão, essa dimensão também é conhecida como Dimensão Hausdorff-Besicovitch (CORÔA, 2019). Segundo Santos et. al. (2020), a dimensão Hausdorff

[...] é utilizada para descrever leis de invariância de escala, em que as funções autossimilares seguem uma lei da forma  $f(sx) = s^D f(x)$ , sendo  $s$  o fator de escala. [...] Um objeto invariante de escala verdadeiro repete sua forma em todas as escalas e possui, portanto, uma complexidade infinita. Sucintamente dizendo, a dimensão mensura o tamanho de um local de espaço levando em consideração a distância existente entre seus pontos. É a dimensão mais apropriada à geometria fractal.

Sucintamente dizendo, a dimensão mensura o tamanho de um local de espaço levando em consideração a distância existente entre seus pontos. É a dimensão mais apropriada à geometria fractal.

O método de cálculo da dimensão de Hausdorff permite calcular a dimensão de objetos ditos “perfeitos” e dos fractais que, com o aumento da escala, percebe-se que em seu interior existem partes que são exatamente autossimilares a todo conjunto fractal.

De maneira intuitiva, usando a Geometria Euclidiana, serão apresentados alguns exemplos até chegar a uma fórmula para se calcular a dimensão fractal.

- **1° Exemplo:** Toma-se um segmento de reta de comprimento  $L$  e a divide em  $N$  partes. Seja  $U = \frac{L}{N}$ , o comprimento de cada segmento obtido pela divisão de reta em  $N$  partes. Note que  $N = \frac{L}{U}$ . Assim, calcula-se a dimensão do segmento de reta, pela seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 1.$$

- **2° Exemplo:** Considere um quadrado de lado  $L$ . Aplica-se o mesmo processo visto no exemplo anterior. Divide-se o quadrado em  $N$  quadrados iguais, semelhantes ao quadrado original. Logo, cada lado de um novo quadrado é  $U = \frac{L}{\sqrt{N}}$ , ou seja,  $N = \left(\frac{L}{U}\right)^2$ . Sabe-se que quadrados são figuras bidimensionais, assim aplicando o logaritmo, tem-se:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 2.$$

- **3º Exemplo:** Agora toma-se um cubo de lado  $L$  e o divide em  $N$  partes iguais. Para que os cubos formados a partir da divisão sejam semelhantes ao tomado inicialmente, o lado de cada um deles, tem que ser  $U = \frac{L}{\sqrt[3]{N}}$ , assim  $N = \left(\frac{L}{U}\right)^3$ . Portanto

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}} = 3.$$

Logo, a dimensão de um fractal pode ser expresso através da fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{L}{U}}, \quad (3.1)$$

onde  $D$  é a dimensão de fractal,  $N$  é o número de partes em cada etapa da divisão,  $L$  é o comprimento inicial do objeto que foi dividido em  $N$  partes iguais e  $U$  é o comprimento de cada segmento obtido através da divisão.

Agora, será explicado como calcular a dimensão de alguns fractais, utilizando a Equação 3.1.

### 3.1.1 Conjunto de Cantor

- Considere um segmento de reta de comprimento  $L = 1$ , divida em três partes iguais eliminando o terço médio, e em cada segmento formado repita o mesmo processo indefinidamente;
- Note que em cada etapa  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  são formados  $N = 2^n$  segmentos de comprimento  $3^{-n}$ ;
- Aplicando a fórmula da dimensão:

$$D_C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} \approx 0,631\dots$$

Tabela 3.1: Dimensão Conjunto de Cantor

Etapas	N	U
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$2^n$	$3^{-n}$

Fonte: Autor

### 3.1.2 Curvas de Koch

- Considere uma reta de comprimento  $L = 1$ , e a divida em 3 partes iguais, substituindo o terço médio por 2 novos segmentos de reta de comprimento igual aos 2 que restaram. Repita-se este processo indefinidamente, obtendo a Curva de Koch;
- Em cada etapa  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  são formados  $N = 4^n$  segmentos de comprimento  $U = 3^{-n}$ ;
- Aplicando a fórmula da dimensão, quando  $n \rightarrow +\infty$ , obtém-se:

$$D_K = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26\dots$$

Tabela 3.2: Dimensão Curva de Koch

Etapas	N	U
0	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$
2	16	$\frac{1}{9}$
3	64	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$4^n$	$3^{-n}$

Fonte: Autor

### 3.1.3 Triângulo de Sierpinski

- A construção do Triângulo Sierpinski inicia-se com um triângulo equilátero de lado  $L = 1$ , e em cada etapa  $n$  da construção é inscrito um triângulo com vértices no ponto médio de cada lado do triângulo formado na etapa anterior;
- Assim, em cada etapa tem-se  $N = 3^n$  triângulos de lado  $U = 2^{-n}$ ;
- Aplicando a fórmula da dimensão, quando  $n \rightarrow +\infty$ , obtém-se:

$$D_T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 3^n}{\log \frac{1}{2^{-n}}} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58\dots$$

Tabela 3.3: Dimensão Triângulo de Sierpinski

Etapas	N	U
0	1	1
1	3	$\frac{1}{2}$
2	9	$\frac{1}{4}$
3	27	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$3^n$	$2^{-n}$

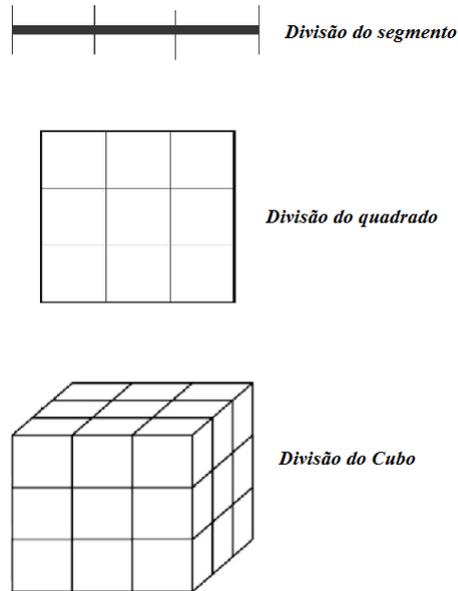
Fonte: Autor

## 3.2 Fator de Ampliação

Uma maneira similar a Dimensão de Hausdorff de ver o cálculo da dimensão de fractais regulares, é através do fator de ampliação do fractal.

Diz-se que um conjunto  $S$  é chamado autossemelhante se  $S$  pode ser subdividido em  $p$  subconjuntos congruentes, cada um podendo ser ampliado por um fator constante  $K$  para produzir um conjunto inteiro de  $S$ . Nota-se que todos os conjuntos analisado nas seções anteriores são autosemelhantes. Diante disso, inicia-se a análise pela linha, quadrado e cubo. Primeiramente, essas figuras serão divididas em pedaços menores e semelhantes ao original, como podemos observar na Figura 3.1

Figura 3.1: Divisões da reta, do quadrado e do cubo



Fonte: Autor

Para melhor entendimento, esses dados serão organizados na seguinte tabela:

Tabela 3.4: Ilustração da relação entre a dimensão e quantidade de peças para três tipos de objetos.

Figura	Dimensão	Quantidade de Peças
Segmento de Reta	1	3
Quadrado	2	9
Cubo	3	27

Fonte: Autor

Observa-se que o fator de ampliação para retornar a figura inicial será dado da seguinte forma:

Tabela 3.5: Ilustração do fator de ampliação para retornar a figura inicial.

Figura	Dimensão	Quantidade de Peças
Segmento de Reta	1	$3 = 3^1$
Quadrado	2	$9 = 3^2$
Cubo	3	$27 = 3^3$
Fator de Ampliação	$D$	$p = K^D$

Fonte: Autor

Denomina-se “D” sendo a dimensão da figura, “p” a quantidade de peças após as divisões e “K” o fator de ampliação para retornar à figura original. Através da Tabela 3.5 podemos concluir que a dimensão  $D$  é encontrada através da seguinte regra:

$$p = K^D .$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade tem-se:

$$D = \frac{\log(p)}{\log(K)}$$

Deste modo, identifica-se um método para calcular dimensão de objetos ditos “perfeitos” e dos fractais que apresentem autossimilaridade, das iterações com o todo. Esta fórmula será utilizada para encontrar as dimensões dos seguintes fractais: Conjunto de Cantor, Triângulo e Tapete de Sierpinski, Floco de Neve de Koch e Esponja de Menger. Na realização deste cálculo serão utilizados alguns resultados encontrados em seções anteriores.

Inicia-se com o conjunto de Cantor. Como analisado nas seções anteriores, o fator de ampliação do Conjunto de Cantor é  $K = 3^n$  e a quantidade de peças é  $p = 2^n$ , assim pela Equação 3.2 tem-se:

$$D = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} \approx 0,63$$

Nos fractais de Sierpinski, iniciaremos pelo triângulo, o qual o fator de ampliação é  $K = 2^n$  e a quantidade de peças é  $p = 3^n$ , aplicando a Equação 3.2 temos:

$$D = \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} \approx 1,59$$

No tapete de Sierpinski, o fator de ampliação será  $3^n$  e a quantidade de peças  $8^n$ , sendo assim:

$$D = \frac{\log(8^n)}{\log(3^n)} \approx 1,9$$

O Floco de Neve de Koch tem fator de ampliação  $3^n$ , ou seja  $K = 3^n$  e sua quantidade de peças é  $4^n$ , logo  $p = 4^n$ , então:

$$D = \frac{\log(4^n)}{\log(3^n)} \approx 1,26$$

Para se calcular a dimensão da Esponja de Menger, nota-se que fator de ampliação é  $3^n$  e sua quantidade de peças  $20^n$ . Dessa forma  $K = 3^n$  e  $p = 20^n$ , logo:

$$D = \frac{\log(20^n)}{\log(3^n)} \approx 2,72$$

Para melhor compreensão do cálculo da dimensão, é indispensável observar os dados organizados na Tabela 3.6:

Tabela 3.6: Dimensão de Fractais Regulares

Figura	Fator Ampliação (K)	Quantidade de Peças (p)	Dimensão (D)
Conj. Cantor	$3^n$	$2^n$	0,63
Triângulo Sierpinski	$2^n$	$3^n$	1,59
Tapete Sierpinski	$3^n$	$8^n$	1,9
Floco de Neve de Koch	$3^n$	$4^n$	1,26
Esponja de Menger	$3^n$	$20^n$	2,72

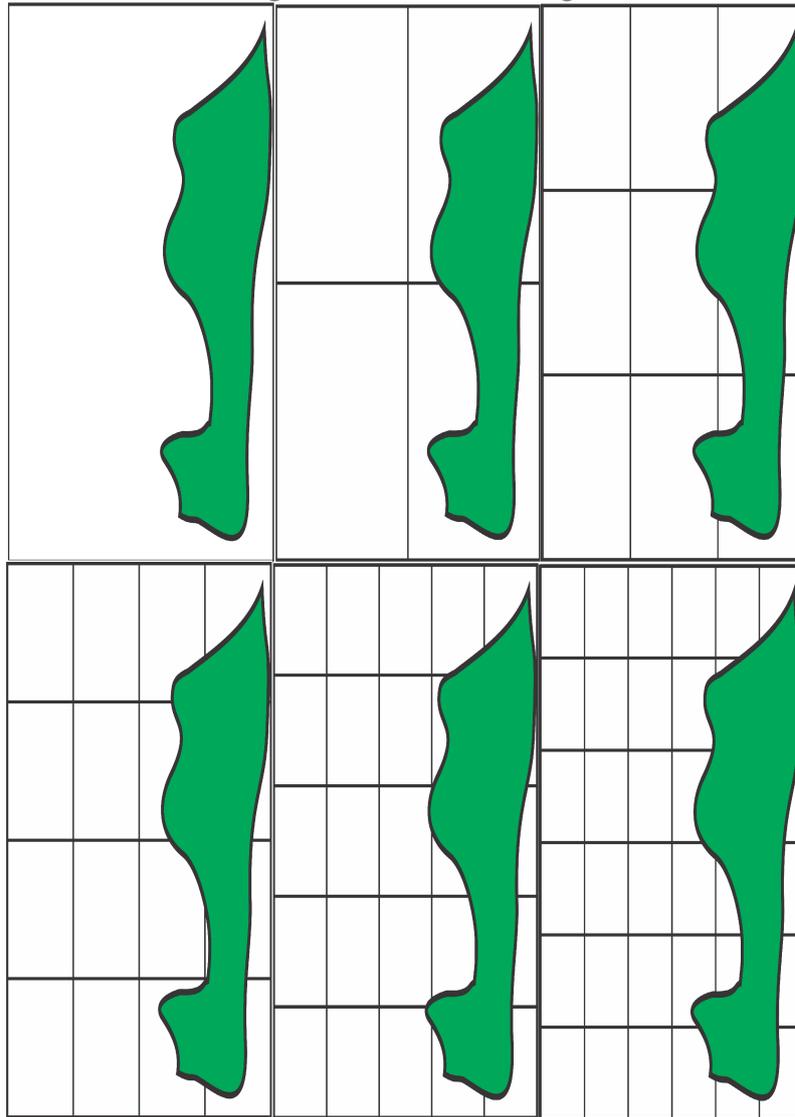
Fonte: Autor

Sendo assim, pode-se observar que esse método depende do fator de ampliação e quantidade de peças para determinarmos a dimensão tanto das figuras da geometria euclidiana como na fractal, para ampliar mais o conhecimento será estudado o Método Box-Counting (método no qual será discorrido na próxima seção).

### 3.3 Método Box-Counting

O cálculo da dimensão pelo método box-counting expõe uma medida sistemática, que pode ser aplicada a qualquer tipo de estrutura colocada facilmente sobre um plano com malha. O método consiste em se colocar uma estrutura sobre uma grade com malha de tamanho  $U$  e então conta-se o número de caixas da grade que contém parte da estrutura, isto dá um certo número  $N$  que depende do tamanho  $U$ , isto é,  $N(U)$ . Em seguida diminui-se o tamanho de  $U$ , o que consequentemente aumenta  $N(U)$ . Tende-se, novamente, esta malha a tamanhos cada vez menores de forma a se obter estruturas com tamanhos cada vez menores e conta-se novamente o número de estruturas  $N(U)$  da grade. Veja Figura 3.2

Figura 3.2: Box-Counting



Fonte: Autor

Posteriormente, para cada iterada  $n$ , constrói-se o gráfico no plano  $\log(N(U)) \times \log\left(\frac{1}{U}\right)$  e marcamos os pontos  $(\log(N(U_n)), \log\left(\frac{1}{U_n}\right)), (\log(N(U_{n+1})), \log\left(\frac{1}{U_{n+1}}\right)), \dots$  com  $n = 0, 1, 2, \dots$  e encaixa-se uma linha reta nos pontos do diagrama.

A medida da inclinação dessa da reta corresponde a dimensão box-counting da estrutura, que é denotada e dada por:

$$D_B = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(N(U_{n+1})) - \log(N(U_n))}{\log(1/U_{n+1}) - \log(1/U_n)}.$$

### 3.3.1 Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski que pode ser visto na Figura 2.4 e seus dados na tabela 2.2, pode-se concluir que são necessário, para cobrir o tapete de Sierpinski,  $8^n$  caixas cujo lados tem comprimento igual a  $3^{-n}$ , logo tem-se que:

$$D_B = \lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{\log 8^{n+1} - \log 8^n}{\log 3^{n+1} - \log 3^n} = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,89\dots$$

Tabela 3.7: Dimensão Tapete de Sierpinski

Etapas	N	U
0	1	1
1	8	$\frac{1}{3}$
2	64	$\frac{1}{9}$
3	512	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$8^n$	$3^{-n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autor

### 3.3.2 Esponja de Menger

É também possível utilizar a contagem de caixas para calcular a dimensão da esponja de Menger M, cuja construção é semelhante a do tapete de Sierpinski, a diferença é que a mesma é construída a partir de um cubo. A Figura 2.15 mostra algumas das etapas do encaixotamento da esponja de Menger. As etapas do processo de encaixotamento da esponja de Menger, podem ser descritas pela Tabela 3.8

Tabela 3.8: Esponja de Menger

Etapas	N	U
0	1	1
1	20	$\frac{1}{3}$
2	400	$\frac{1}{9}$
3	8000	$\frac{1}{27}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$20^n$	$3^{-n}$
$n + 1$	$20^{n+1}$	$3^{-(n+1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Autor

A partir dos dados da Tabela 3.8, pode-se calcular a dimensão da esponja de Menger por meio do processo de encaixotamento. Quando uma determinada quantidade de caixas é dividida pelo inverso do comprimento do lado de cada caixa da mesma etapa do encaixotamento encontra-se a dimensão da esponja de Menger. Portanto,

$$D_B = \lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{\log 20^{n+1} - \log 20^n}{\log 3^{n+1} - \log 3^n} = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,726\dots$$

A dimensão fractal se ocupa em mensurar o tamanho/valor do objeto. Para despertar o interesse no aprendizado da geometria fractal, não basta apresentar as suas formas; também é necessário que se explique para que serve, qual é a sua utilidade. Nesse sentido, o próximo capítulo abordará como se deu a metodologia de construção da atividade apresentada em sala de aula.

## Capítulo 4

# METODOLOGIA E DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

A Matemática se constitui em uma disciplina que oferece inúmeras oportunidades de aprendizagem em qualquer estágio. Nessa perspectiva, trabalhar conteúdos diferenciados no Ensino Médio (composto em sua maioria de adolescentes) se faz necessário de modo a despertar o interesse dos alunos assim como ampliar o leque de conhecimentos. Nesse sentido, a Competência Específica 1 Da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) estabelece:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2018, p. 532).

Acredita-se que as atividades propostas em sala de aula permitirão o desenvolvimento da seguinte habilidade:

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BRASIL, 2018, p. 533).

Para que uma pesquisa possa ser efetivada são necessários procedimentos metodológicos que visam traçar o caminho a ser percorrido para produção da mesma. Desse modo, entende-se que esta pesquisa é de caráter qualitativo, uma vez que, segundo Garnica (2012, p. 97-98):

Um método sempre traz, em si, a noção de eficácia. Cuida-se de engendrar um mecanismo que, de modo julgado eficaz, nos dê pistas para compreender determinada situação, resolver determinado problema, responder a determinada questão ou encaminhar determinados entraves. A eficácia, porém será julgada segundo os pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, e esse é o motivo principal de não se poder apartar uma metodologia de uma concepção de mundo e dos fundamentos teórico-filosóficos do pesquisador.

Nesse sentido, a partir da definição do problema de pesquisa (De que modo as ideias relacionadas à probabilidade podem ser mobilizadas a partir da geometria fractal?), deu-se início à discussão para a elaboração da atividade a ser implementada.

No movimento de construção da atividade o primeiro aspecto que necessitava ser definido era que conteúdo matemático do ensino médio seria abordado, desse modo, devido à presença marcante da probabilidade nos conceitos de fractais delimitou-se assim nosso objeto matemático.

A atividade proposta aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio foi retirada da obra de Cauê Matsmoto Silva (2015) e objetiva a resolução de probabilidades utilizando conhecimentos da geometria fractal, como mostrado a seguir:

Conteúdo: Probabilidade

Ano/ série:

Atividade: Probabilidade a partir da ideia dos fractais

O professor propõe a atividade a partir da discussão de uma situação problema: “Em um jogo de dardos, supondo que o jogador acerte o alvo ao acaso, qual a chance dele acertar o alvo na área de maior pontuação?” Esse problema se aproxima bastante da situação da resolução da atividade que será implementada posteriormente, haja vista, que os alunos precisarão raciocinar acerca do espaço amostral e dos eventos das situações probabilísticas que serão apresentadas.

1) Construir um triângulo equilátero de lado igual a 8 cm e encontrar os pontos médios de cada lado ligando-os. A partir desta divisão, teremos quatro novos triângulos equiláteros congruentes. Pintar o triângulo central, será denominado de “buraco”, em seguida responder qual a probabilidade de ao escolher um ponto qualquer do triângulo, sendo que ele pertença ao buraco? Justificar a resposta.

2) Utilizando a mesma ideia, construir um quadrado de lado igual a 9 cm e dividir os lados em três medidas congruentes, ligando-as. Em seguida observar quantos quadrados serão encontrados, verificando que são congruentes. A partir disso, pintar o quadrado central que será denominado como “buraco”. Nesse sentido qual a probabilidade de se escolher um ponto aleatório do quadrado, sendo que ele não pertença ao buraco? Justificar

a resposta.

Explorar as construções realizadas relacionando-as com os fractais, a saber, Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski. Ressaltar que estas figuras têm as características peculiares aos fractais: a autossimilaridade ou autossemehança, (explicar o significado dos termos) o que tornará as figuras cada vez mais complexas.

3) Continuar a construção do triângulo e tapete de Sierpinski, respectivamente aplicando o mesmo procedimento em todos os triângulos com exceção do buraco.

- a) Quantos triângulos resultaram deste processo?
- b) Qual a área de cada triângulo? Qual a relação da área do novo triângulo com o triângulo inicial?
- c) Qual a probabilidade de escolhermos um ponto aleatório pertencente ao triângulo inicial, sendo que este ponto não caia no buraco?

4) Fazer os mesmos questionamentos sobre o tapete de Sierpinski.

5) O que acontecerá se o processo for feito infinitamente nas duas construções?

- a) Existe a possibilidade de escolhermos um ponto aleatório do triângulo ou do quadrado, sendo que o ponto não caia em um buraco?

Objetivo da atividade: Utilizar as ideias acerca dos fractais para o cálculo de probabilidade geométrica, mobilizando a resolução de problemas para que o aluno realize a construção, minimizando o nível de abstração que envolve os questionamentos. Nessa perspectiva o cálculo de probabilidade geométrica deverá resultar no seguinte raciocínio:

Se tivermos uma região  $B$  do plano contida em uma região  $A$ , admitimos que a probabilidade de um ponto de  $A$  também pertencerá  $B$  é proporcional à área de  $B$  e não depende da posição que  $B$  ocupa em  $A$ . Portanto, selecionando ao acaso um ponto de  $A$ , a probabilidade  $p$  de que ele pertença a  $B$  será:

$$p = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A} \quad (\text{WAGNER, 1997 apud LOVES et. al, 2013, p. 54 - 55})$$

Os exercícios podem ser resolvidos de maneira simples, mobilizando apenas conceitos da probabilidade: espaço amostral e evento. Para o triângulo de Sierpinski tem-se  $p = \frac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}} = \frac{1}{4}$ , haja vista que o espaço amostral é composto por 4 triângulos e um deles é o evento. O mesmo raciocínio deve ser aplicado para o tapete de Sierpinski

$$p = \frac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}} = \frac{8}{9}$$

Os demais exercícios podem ser respondidos a partir deste raciocínio que é uma reprodução do que acontece com os fractais.

Espera-se que, com essa atividade, os alunos cheguem à seguinte resolução: a) 9 triângulo; b) a área de cada triângulo é de  $\sqrt{3}cm^2$ , o que corresponde à décima sexta parte do triângulo original. O mesmo vale para o quadrado. a) 64 quadrados; b) a área de cada quadrado é de  $1cm^2$ , o que corresponde é octogésima primeira parte do quadrado original. As demais questões podem ser resolvidas a partir desse mesmo raciocínio utilizando a fórmula:

$$p = \frac{\text{área de B}}{\text{área de A}}$$

Aplicando:

$$p = \frac{\text{área do triângulo de Sierpinski}}{\text{área do triângulo inicial}} = \frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{9}{16}$$

De modo análogo a resolução para o quadrado será:

$$p = \frac{\text{área do tapete de Sierpinski}}{\text{área do quadrado inicial}} = \frac{64 \cdot 1}{81} = \frac{64}{81}$$

Cabe ressaltar que a fórmula para esse cálculo refere-se à probabilidade de um ponto não pertencer a qualquer um dos buracos, assim sendo, a probabilidade  $p$  de se escolher um ponto que caia em um buraco será:

$$p = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81}$$

Todo esse raciocínio servirá de base para a resolução do exercício 5, uma vez que a utilização do desenho se torna inviável pois o processo será repetido infinitamente. No entanto, é necessário que após essa trajetória, por parte dos alunos, seja feita a generalização com a mediação do professor. Após concluir que na primeira etapa a área de cada triângulo é  $\frac{1}{4}$  da área original, na segunda, a área é  $\frac{1}{16}$  da área original espera-se que os alunos consigam generalizar que na  $n$ ésima etapa a área será  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  da área original e conseqüentemente quando  $n \rightarrow \infty$  a área do triângulo tenderá a zero, verificando matematicamente.

$$p = \frac{0}{16\sqrt{3}} = 0$$

Resumindo, um evento impossível, já que todos os pontos irão pertencer a algum buraco.

# Capítulo 5

## ANALISE DOS DADOS COLETADOS E RESULTADOS

### 5.1 ANALISE DOS DADOS COLETADOS

A implementação da atividade foi realizada em uma Escola Estadual na cidade de Batayporã/MS no 3º ano do ensino médio, sendo desenvolvida inicialmente com uma conversa informal sobre as ideias que envolvem probabilidade e ponto médio com intuito de relembrar conceito que os mesmo utilizariam na resolução da mesma e identificar concepções prévias que os alunos possuem acerca da temática. A turma era composta por 23 alunos e todos concordaram em participar da implementação proposta.

A proposta da atividade se deu a partir da discussão da seguinte situação problema: Em um jogo de dardos, supondo que o jogador acerte o alvo ao acaso, qual a chance dele acertar o alvo na área de maior pontuação?. A ideia da escolha desse problema é que o mesmo se aproxima bastante da situação da resolução da atividade que será implementada posteriormente, haja vista, que os alunos precisarão raciocinar acerca do espaço amostral e dos eventos das situações probabilísticas que serão apresentadas.

Segundo a abordagem proposta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais é fundamental que o ensino de Probabilidade não seja focado apenas em uma única concepção, haja vista que em se tratando dos aspectos relacionados a probabilidade geométrica o fio condutor proposto pelas noções de fractais podem contribuir para a apreensão de conhecimentos relacionados à Probabilidade. Consideramos que as tentativas de trabalho com o algoritmo são importantes para que os alunos se familiarizem com as estratégias de resolução que serão utilizadas na resolução das questões propostas. Assim sendo, compreende-se a importância do acompanhamento e mediação do professor, durante o processo, e que o mesmo é indispensável para que se consiga observar e avaliar os percursos utilizados pelos alunos e interferir, no sentido de não permitir que os alunos se

afastem demais do caminho da generalização, se for o caso. Nesse sentido, a observação do professor nesse processo também será utilizada para avaliar os alunos.

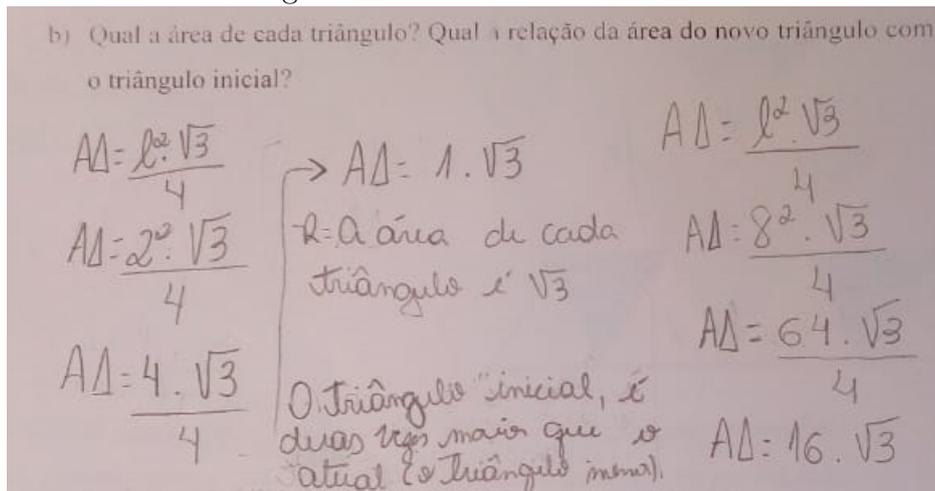
## 5.2 RESULTADOS

Visando responder nossa questão de pesquisa: De que modo as ideias relacionadas a probabilidade podem ser mobilizadas a partir geometria fractal? Analisamos as escolhas matemáticas de alguns alunos de uma turma do Ensino Médio em uma Escola Estadual na cidade de Batayporã, MS. Nessa perspectiva, desenvolveu-se uma atividade no sentido de observar que argumentações os alunos de ensino médio utilizam para justificar matematicamente questões relacionadas à geometria fractal, bem como as ideias relacionadas à geometria fractal são mobilizadas por alunos do ensino médio para a resolução de problemas envolvendo probabilidade.

Foram analisadas as estratégias de resolução de questões de probabilidade que poderiam ser respondidas a partir do raciocínio da geometria fractal e observamos que os alunos as resolveram sem muitas dificuldades mobilizando algumas ideias de resolução presentes no estudo da geometria fractal. Entende-se que para a busca de soluções por parte dos alunos é necessário proporcionar e incentivá-los a buscarem a formalização da ideia de probabilidade geométrica, demonstrando como é realizado o cálculo de probabilidade através das áreas dos objetos. Cabe ressaltar que nessa etapa o professor exponha e exemplifique resumidamente o que é a geometria fractal e que as figuras dos dois primeiros exercícios são: o Triângulo de Sierpinski e o Tapete de Sierpinski.

Nessa perspectiva, a ideia é incentivar os alunos a utilizarem algoritmos do cálculo da probabilidade geométrica (buscando a generalização) para solucionar os exercícios que serão propostos, reiterando para os alunos que o método se aplica para resolver os demais problemas. Era esperado que a maior parte dos alunos conseguissem realizar a atividade sem maiores obstáculos e que talvez eles tivessem um pouco de dificuldade em discorrer uma justificativa sem cálculos, apontando nesse sentido, que possivelmente os alunos mobilizam estratégias de resolução meramente mecânicas. Figura 5.1

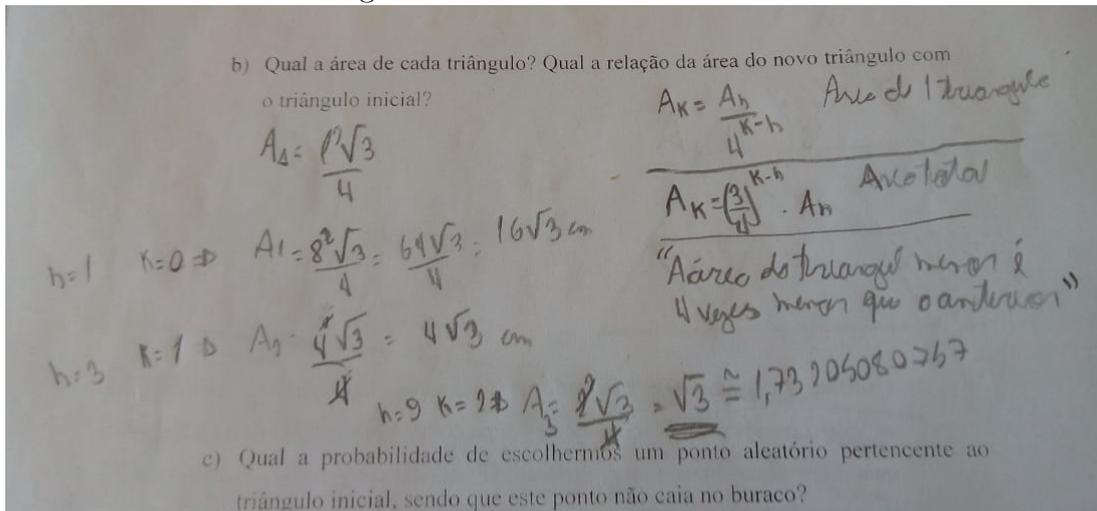
Figura 5.1: Atividades em sala 1



Fonte: Autor

Alguns alunos se destacaram mais nos raciocínios matemáticos na resolução das questões o que em alguns momentos os levaram a não focar na parte matemática que era realmente necessária para a resolução, como mostra a figura 5.2.

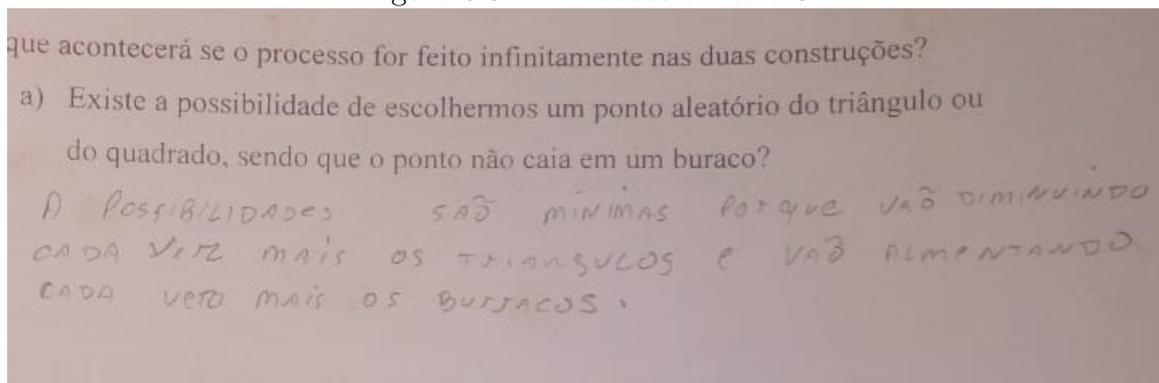
Figura 5.2: Atividades em sala 2



Fonte: Autor

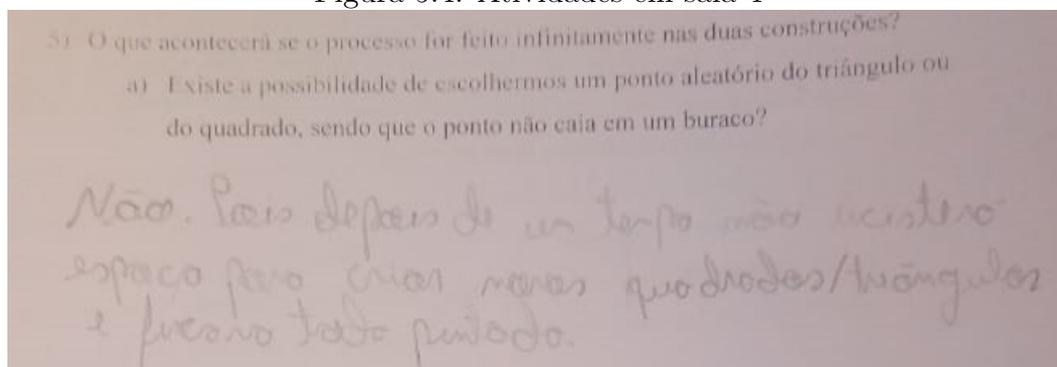
Dois alunos logo conseguiram perceber que a medida que o número de interações aumentava mais aumentava o "buraco", no entanto, não conseguiram justificar verbalmente esta conclusão. De modo geral a implementação proporcionou dados relevantes para serem analisados. Figuras 5.3 e 5.4

Figura 5.3: Atividades em sala 3



Fonte:Autor

Figura 5.4: Atividades em sala 4



Fonte:Autor

Em geral os alunos relacionam a área e perímetro de modo que se uma aumenta a outra aumenta, no caso dessa pesquisa as atividades elaboradas permitem que os alunos percebam que quando o perímetro aumenta a área tende ao infinito e em outros casos área tende a zero e o perímetro que tende ao infinito.

Cabe ressaltar, no entanto, que a atividade implementada em sala de aula contempla apenas o primeiro caso. Ademais, indícios apontam que o trabalho com atividades que envolvem noções acerca dos fractais, contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, bem como o imbricamento entre os conceitos e definições matemáticos com situações e elementos do cotidiano, dentre outras habilidades.

Nesse contexto, Almeida (2006), diz ser possível desenvolver a geometria fractal para ilustrar tópicos como área e perímetros de polígonos, tornando seu estudo mais motivador. Verifica-se nesse sentido que os alunos apresentaram um raciocínio coerente no que se refere à relação entre o estudo dos fractais e a geometria euclidiana. Entende-se ainda que a abordagem dos fractais para o estudo de probabilidades pode ser vista como uma motivação para a investigação acerca deste conteúdo, haja vista que o mesmo também

contribui para a compreensão de outras ideias básicas de outros conteúdos matemáticos a saber: limites, frações, funções, divisões sucessivas, possibilitando um processo de generalização menos abstrata.

## Capítulo 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar de que modo as ideias relacionadas a geometria fractal podem ser mobilizadas para o estudo de probabilidades no Ensino Médio. Para tanto, primeiramente considerou-se necessário apresentar conceito e aplicação da geometria fractal. Nesse sentido, em poucas palavras, pode-se dizer que um fractal é uma figura geométrica que, se dividida em partes iguais, cada uma das partes se assemelha à figura antes de ser fragmentada ou seja, é como se fosse uma miniatura da forma original. Apesar de despertar interesse nos contextos acadêmicos e científicos, a geometria fractal tem apresentado aplicações úteis na física, na arquitetura e na medicina. Num segundo momento, este estudo ocupou-se em descrever as características de alguns tipos de fractais regulares, os quais: Conjunto de Cantor; Fractais de Sierpinski (triângulo e tapete); Floco de Neve de Koch; Esponja de Menger. O Conjunto de Cantor (também conhecido como Poeira de Cantor) é construído a partir de um intervalo da reta, formando novos intervalos de reta autossemelhantes, ou seja, um único intervalo dá origem a uma sequência de novos intervalos. O Triângulo e o Tapete de Sierpinski são figuras autossemelhantes. Contudo, esses conjuntos são iniciados por figuras planas (triângulo e quadrado), onde tem-se uma área tendendo para zero e os perímetros tendendo para o infinito, algo diferente do encontrado na geometria euclidiana. O Floco de Neve de Koch também é autossemelhante (é constituída de partes semelhantes entre si), porém, a característica que mais se destaca se refere ao fato de que sua área é finita, mas, o seu perímetro é infinito. Além disso, se for modificado com outras construções parecidas, dará origem a outros fractais. A Esponja de Menger é uma versão tridimensional do Tapete de Sierpinski, ou seja, é baseada no mesmo princípio de remoção (mas, realizado com um Cubo) e a característica destaque deste fractal é que sua área cresce para o infinito enquanto o seu volume decresce para zero. Pode-se dizer que a autossemelhança (ou autossimilaridade) é uma característica comum a todos os fractais, pois, quando se analisa uma porção menor do objeto, verificam-se formações idênticas à do objeto maior, ou seja, em todos os fractais, o grau de detalhamento não

diminui quando se examina uma fração do mesmo, daí o nome “fractal”. No tocante às peculiaridades da dimensão fractal, verificou-se que, na geometria fractal, a dimensão está relacionada ao grau de irregularidade, aspereza e fragmentação. Nessa perspectiva, para se calcular a dimensão, utiliza-se a dimensão de Hausdorff, fator de ampliação e o método box-counting (contagem de caixa). A pesquisa de campo consistiu na aplicação de atividades de geometria fractal em uma turma de 23 alunos do 3.º ano do Ensino Médio de uma escola pública no Município de Batayporã, Estado de Mato Grosso do Sul, para que estes calculassem a probabilidade geométrica. Nessa fase, buscou-se analisar as escolhas matemáticas utilizadas pelos alunos na resolução de atividades de probabilidade. Para tanto, foi proposta uma atividade, que também foi usada em uma pesquisa de Silva (2015), objetivando analisar as argumentações que os alunos utilizaram para justificar (no contexto matemático) conhecimentos relacionados à geometria fractal para a resolução de problemas envolvendo probabilidade. Os alunos conseguiram desenvolver a atividade sem grandes dificuldades, associando os conceitos de geometria fractal com a resolução do problema proposto. O tempo da pesquisa de campo foi curto, mas foi suficiente para perceber que a geometria fractal pode ser mobilizada para o estudo de probabilidades no Ensino Médio desde que se trabalhe antes o seu conceito, suas características e suas aplicações com os alunos. Nessa perspectiva, apresentar a aplicação prática de geometria fractal para alunos do Ensino Médio contribuirá para que, entre os jovens, se amplie o interesse assim como o estudo e o desenvolvimento deste segmento. Ademais, a abordagem dos fractais para o estudo de probabilidades permite motivar a investigação para este segmento da matemática assim como também pode contribuir sobremaneira para a compreensão de outros conteúdos matemáticos como: limites, frações, funções e divisões sucessivas.

# Referências Bibliográficas

ALMEIDA, A. A. O de. **OS FRACTAIS NA FORMAÇÃO DOCENTE E SUA PRÁTICA EM SALA DE AULA**. 2006. 221 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11076>. Acesso em: 06 de agosto de 2019.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para a Sala de Aula**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. 2018. Brasília, DF. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em 21 de abril de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais-Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 21 de abril de 2020.

BRASIL, **Parâmetro Curriculares Nacionais (PCNs)**. Introdução. Ensino Médio. Brasília. MEC/SEF, 1998.

CORÔA, Utilan Da Silva Ramos. **Gestão de portfólio**: hipótese de fractal na construção de carteiras de ações no Brasil. Jundiaí: Paco Editorial, 2019.

CÔRTEZ, Ivana Resende da Costa. **Geometria Fractal no Ensino Médio**: Teoria e Prática. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

DEVANEY, Robert Luke. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. Westview Press. 1992.

FERREIRA FILHO, José Roberto. **Geometria fractal**: da natureza para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; SOUZA, Luzia Aparecida de. **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

MANDELBROT, Benoit. P. **The Fractal Geometry of Nature**. Lisboa: Gradiva, 1998.

MIRANDA, José Garcia Vivas [et. al.]. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, 2304 (2008). Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/302304.pdf>. Acesso em 15 de dezembro de 2019.

SANTOS, Sthefany [et. al.]. Dimensionalidade fractal e invariância de escala em circuitos elétricos AC e linhas de transmissão. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v42/1806-9126-RBEF-42-e20190188.pdf>. Acesso em 20 de dezembro de 2019.

SILVA, Kauê Matsumoto. **Fractais e algumas aplicações ao ensino**. Dissertação (Licenciatura Matemática) - São Paulo: IFSP, 2015.

SOUSA, Cleiton Veras de [et. al.]. Importância de trabalhar a geometria fractal na formação dos docentes de matemática. **V Congresso Nacional de Educação - CONEDU**. Olinda, 2018.