



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
REGIONAL CATALÃO  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE  
MATEMÁTICA E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



NILIVAN REGES

**GEOGEBRA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:**

aplicações na inscrição e circunscrição de sólidos geométricos

CATALÃO – GO

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação      Tese

#### 2. Nome completo do autor

Nilivan Reges

#### 3. Título do trabalho

GEOGEBRA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: aplicações na inscrição e circunscrição de sólidos geométricos

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM      NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**

[https://sei.ufg.br/sei/controlador.php?acao=documento\\_imprimir...6fcb80d753a18bf2e31d816aff0a12062bc323da19cea2f87a7c292c47bb](https://sei.ufg.br/sei/controlador.php?acao=documento_imprimir...6fcb80d753a18bf2e31d816aff0a12062bc323da19cea2f87a7c292c47bb)

Página 1 de 2

SEI/UFG - 1295307 - Termo de Ciência e de Autorização (TECA)

27/04/2020 14:12



Documento assinado eletronicamente por NILIVAN REGES, Discente, em 25/04/2020, às 20:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por Thiago Porto De Almeida Freitas, Orientador, em 25/04/2020, às 20:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador 1295307 e o código CRC 18982E5D.

NILIVAN REGES

**GEOGEBRA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:**

aplicações na inscrição e circunscrição de sólidos geométricos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas

CATALÃO – GO

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Reges, Nilivan

**GEOGEBRA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS** [manuscrito] : aplicações na inscrição e circunscrição de sólidos geométricos / Nilivan Reges. - 2020.  
CXXXII, 132 f.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2020.

Bibliografia. Anexos. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. : Geometria. 2. Resolução de Problemas. 3. GeoGebra. 4. Inscrição e Circunscrição de Sólidos. I. Freitas, Thiago Porto de Almeida , orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 04 da sessão de Defesa de Dissertação de **Nilivan Reges** que confere o título de Mestre(a) em **Matemática**.

Em 17 de março de 2020, às 14h20min, no Bloco J - Sala 03 - Laboratório de Controle Operacional da "Regional Catalão - Universidade Federal de Goiás (RC/UFG)/Universidade Federal de Catalão (UFCAT) em transição", reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores **Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas (IMTec) (orientador)**, **Dra. Marta Borges (IMTec)** (por Webconferência), **Dra. Marilaine Colnago (UNESP)** (por Webconferência) para, em sessão pública, procederem a avaliação da Dissertação intitulada "GEOGEBRA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: aplicações na inscrição e circunscrição de sólidos geométricos", de autoria de **Nilivan Reges**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da "UFG-RC/UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente que, em 19min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado: (  ) **Aprovado** ou (  ) **Reprovado**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17h02min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Thiago Porto de Almeida Freitas, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo(a) discente.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por Thiago Porto De Almeida Freitas, Professor do Magistério Superior, em 17/03/2020, às 17:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por Marta Borges, Professora do Magistério Superior, em 17/03/2020, às 17:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por Marilaine Colnago, Usuário Externo, em 17/03/2020, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por NILIVAN REGES, Discente, em 18/03/2020, às 07:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador 1231773 e o código CRC 45639E43.

Referência: Processo nº 23070.008889/2020-05

SEI nº 1231773

Dedico este trabalho aos alunos da 3ª série (2019) do colégio onde foi realizada a pesquisa. A vocês, que sempre estiveram comigo e acreditaram na realização desta proposta de intervenção, o meu carinho, respeito e consideração.

“Você não sabe o quanto eu caminhei  
Pra chegar até aqui  
Percorri milhas e milhas antes de dormir  
Eu não cochilei  
Os mais belos montes escalei  
Nas noites escuras de frio chorei...  
A vida ensina e o tempo traz o tom  
Pra nascer uma canção  
Com a fé o dia a dia  
Encontrar solução”.

(*A Estrada*, Cidade Negra, 2002)

## AGRADECIMENTOS

Acredito que toda vez quando agradecemos aos que tanto se fazem ou fizeram presentes nas nossas vidas, pecamos por não nos lembrar de mencionar alguns deles. No entanto, eu vou tentar. Quero agradecer:

À tia Sebastiana Correia Silva, minha primeira professora, que me ensinou os primeiros passos para a leitura e interpretação dessa “danada vida”. Você é minha fonte de inspiração, compromisso e assiduidade.

Aos tios Arruda e Helena, sem vocês a minha vida não teria sentido. Obrigado por me proporcionar momentos de esperança, luta e paz!

À tia Negrinha e a mama Narinha, que com suas simples palavras me mostravam que eu ainda poderia fazer a diferença no lar em que eu vivia. A simplicidade de vocês faz com que eu acredite num mundo ainda melhor.

À mãezinha Edna e ao paizinho Edésio (*in memorian*), que por meio de todo o carinho e cuidado que vocês tiveram comigo, eu posso dizer que hoje sou uma pessoa um pouquinho melhor.

À minha filhotinha do coração Rostrinha, que você jamais desista da pessoa que se tornou e dos seus sonhos. É, para mim, motivo de orgulho e alegria, minha filha!

Ao meu maninho do peito, Francisco Sales, por mais que eu esteja distante das atividades físicas que fazíamos toda semana, você sempre zelou, por meio do seu carinho e cuidado, para que os meus caminhos se tornassem mais leves. Você é um dos presentes que a vida me deu.

Ao meu mano, Rodrigo Santos, graças a você eu tive coragem de aprender e manusear o GeoGebra. Obrigado pelos incentivos e apoio!

Ao amigo Cristiano, que sempre me ajudou e orientou na formatação dos trabalhos do mestrado. Não tenho palavras para expressar o quanto você fez por mim.

Às professoras Verinha e Eliane Aparecida, que são motivos de inspiração para mim.

Ao meu casal lindo do coração, Marco Antonio e Suender, obrigado por estarem sempre comigo e terem me presenteado com essas sobrinhas que eu tanto admiro.

Aos amigos, Altoney, José Carlos, José Lopes, Daniel, Alisson, Eduardo Batista e Elionaldo, por mais que estejamos ausentes, sabemos o quanto somos especiais um para com o outro.



Aos colegas do mestrado, em especial, Cátia, Maria do Carmo, Eduardo, Adriano, Cristhian, Naiane, Cassiano, Jota, Lucas, Tarcisio, Max, Daniel, Tiago, Ângela, Geovani, David, Edson e Simone. Obrigado pelo convívio, experiências trocadas, lutas e superação.

Às minhas lindonas, cheias de graça, raiva e amor: Cjanna, Mairica, Sheilinha e Thalita. Nossas viagens eram mais leves, porque vocês estavam presentes. Nossos desejos e anseios se tornavam grandes e tinham significados. Muitas vezes discordamos, apelamos, brigamos, superamos e, no final, amamos. Não há palavras para expressar o quanto vocês significam para mim.

Aos “intragáveis” amigos de trabalho, que são exemplos de profissionalismo e competência, Weidinha, Malvina, Letícia Lucena e Israel. Valeu pelos cuidados, amizade, lealdade e respeito. Obrigado pelos incentivos e carinho! Por serem colos, coração e coragem, nos momentos mais difíceis dessa minha caminhada; levarei vocês por toda a vida.

A todos os meus professores que fizeram parte da minha caminhada discente, desde o ensino básico ao mestrado, em especial à Élide Silva e Marta Borges, que me proporcionaram o engatinhar na pesquisa científica. Recebam todo o meu carinho e respeito. Sei que os caminhos não são fáceis, mas cada sementinha plantada foi motivo de eu estar aqui.

Aos colegas de trabalho, Delmar, Zélia, Adélia, Vinícius, Eliane, Eliene, Lê, Regina, Suely, Jailson, Hudson e Marcelo. Obrigado pelas pessoas lindas que vocês são na minha vida!

Aos amigos, Noemia, Walter, Wagner e Marcelo, nem sei como agradecer pelos lares cedidos, pelas noites confortantes durante as minhas idas a Catalão.

À mãe Domingas, irmãs e sobrinhos, sempre ausentes com outras ocupações. Mas lembrando a vocês que eu ainda estou aqui. Com o passar dos anos, tento entender o universo de cada um de vocês. E sei que, acima de tudo, somos uma família cheia de diferenças, porém o que importa mesmo é o que nos move - o amor.

Ao meu orientador, Thiago Porto, que constantemente esteve ao meu lado, procurando trazer à luz tudo aquilo que eu precisava para fazer um bom trabalho. Não teria chegado até aqui se eu não fosse guiado pelas suas correções e assiduidade. O profissional que você me apresentou a ser, é motivo de grande admiração e alegria.

Aos meus lindos e afetuosos alunos da 3ª série do Ensino Médio, de 2019. Tenham a certeza de que vocês podem sim, fazer desse mundo um lugar melhor, cheio de esperança, amor e paz. Obrigado por terem aceitado o convite e despendido o valioso tempo de vocês, para que pudéssemos aprender juntos.

À professora Marilaine Colnago, que aceitou o convite para participar das bancas (qualificação e defesa). Obrigado pelas sugestões e considerações!

A todos vocês, o meu muito obrigado e o desejo de dias melhores. Força, paz, e sabedoria no caminho de vocês.

“Com vocês por perto, eu gosto mais de mim.”

## RESUMO

Este trabalho é fruto de um projeto de pesquisa feito com vinte alunos da 3ª série do Ensino Médio, do turno matutino, de um colégio particular de Caldas Novas – GO, que teve como objetivos: investigar, aplicar e analisar uma proposta de ensino de sólidos geométricos desenvolvida na Metodologia de Resolução de Problemas, por meio do aplicativo GeoGebra. Partindo da questão norteadora: “Que efeitos são produzidos na aprendizagem de alunos de Ensino Médio, em relação a conteúdos de Geometria Espacial, a partir da articulação da Metodologia de Resolução de Problemas com ambientes de Geometria Dinâmica?”, foram aplicados, no mês de junho de 2019, inicialmente, um questionário e uma atividade diagnóstica, para que pudessem identificar o perfil e os hábitos dos participantes e orientarem os rumos que a pesquisa levaria. Nesse mesmo período, foram elaboradas três sequências didáticas, sendo que a primeira sequência se referia às noções básicas de Geometria Plana; a segunda ao cálculo de área e volume de poliedros e sólidos redondos; a terceira à construção e manipulação de sólidos geométricos inscritos e circunscritos. Para aplicação das sequências didáticas, no mês de agosto de 2019, utilizou-se das salas de multimídias, o laboratório de informática e a quadra de esporte da instituição de ensino, no contra turno e o no período matutino (à medida que alguns professores cediam suas aulas). No processo de coleta dos dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: fotografias, filmagens das atividades, relatórios, atividade diagnóstica e questionários. Nos procedimentos de análise, foram construídos tabelas e gráficos que contemplaram a Metodologia de Resolução de Problemas na aprendizagem, por meio da construção dos sólidos no GeoGebra, em que o pesquisador foi mediador dessas atividades. Ao final, com os resultados obtidos, notou-se que o GeoGebra aliado à Metodologia de Resolução de Problemas é uma ferramenta facilitadora no processo de resoluções de problemas que envolvem sólidos inscritos e circunscritos, concluindo que os objetivos da pesquisa foram cumpridos e esta proporcionou novas perspectivas ao pesquisador e, que, por sua vez, esta pesquisa pode beneficiar o processo de ensino e aprendizagem da matemática nessa área, principalmente, no que tange a sua manipulação, conceitos, visualização, construção e assimilação.

**Palavras-chave:** Geometria. Resolução de Problemas. GeoGebra. Inscrição e Circunscrição de Sólidos.

## ABSTRACT

This work is the result of a research project carried out with twenty students from the 3rd serie of high school, from the morning shift, from a private school in Caldas Novas-GO, which had as objectives: to investigate, apply and analyze a proposal for teaching solids geometries developed in the Problem Solving Methodology from app GeoGebra. From the guiding question: "What effects are produced in the learning of high school students, in relation to Spatial Geometry content, from the articulation of the Problem Resolution Methodology with Dynamic Geometry environments?", were applied, in the month from June 2019, initially, a questionnaire to identify the profile and habits of the research participants and a diagnostic activity that could guide the direction that the research would take. In the same period, three didactic sequences were elaborated, the first sequence referred to the basic notions of Flat Geometry, the second to the calculation of area and volume of polyhedra and round solids, and the third to the construction and manipulation of inscribed geometric solids and circumscribed. For the application of didactic sequences, in the month of August 2019, it was used the multimedia rooms, the computer lab and the sports court of the educational institution, on the counter and in the morning period (as some teachers gave in) your classes). In the process of data collection, they used the following instruments: photographs, footage of activities, reports, diagnostic activity and questionnaires. In addition, tables and graphs were built that included the analysis procedures, describing the Methodology of Resolution of Problems in the learning, through the construction of the solids in GeoGebra where the researcher was mediator of these activities. In the end, with the results obtained, it can be noted that GeoGebra combined with the Problem Resolution Methodology is a facilitating tool in the process of solving problems that involve solid enrolled and circumscribed, leading to the conclusion that, in turn, can benefit the process of teaching and learning mathematics in this area, especially with regard to its manipulation, concepts, visualization, construction and assimilation.

**Keywords:** Geometry. Problem solving. GeoGebra. Registration and Circumscription of Solids.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Triângulo equilátero inscrito e circunscrito. ....	44
FIGURA 2 – Quadrado inscrito e circunscrito na circunferência. ....	45
FIGURA 3 – Pentágono regular inscrito e circunscrito. ....	46
FIGURA 4 – Área e volume do prisma hexagonal.....	48
FIGURA 5 – Área e volume do prisma octogonal. ....	49
FIGURA 6 – Base da pirâmide triangular regular circunscrita. ....	51
FIGURA 7 – Pirâmide triangular regular inscrita e circunscrita. ....	51
FIGURA 8 – Planificação da pirâmide triangular regular circunscrita. ....	52
FIGURA 9 – Resolução da questão 6 realizada por um aluno. ....	60
FIGURA 10 – Embalagem de pizza. ....	61
FIGURA 11 – Octógono regular. ....	62
FIGURA 12 – Octógono circunscrito construído no GeoGebra ....	63
FIGURA 13 – Octógono regular e triângulo isósceles. ....	64
FIGURA 14 – Comparação volumétrica.....	69
FIGURA 15 – Construção de duas circunferências concêntricas.....	70
FIGURA 16 – Cilindros feitos no GeoGebra. ....	70
FIGURA 17 – Cálculo dos cilindros feitos no GeoGebra.....	71
FIGURA 18 – Resolução manuscrita da comparação volumétrica dos cilindros. ....	72
FIGURA 19 – Medindo os lados do cubo e o raio da esfera.....	74
FIGURA 20 – Construção do quadrado no GeoGebra. ....	74
FIGURA 21 – Esfera inscrita no cubo. ....	75
FIGURA 22 – Círculo de raio 5 cm.....	76
FIGURA 23 – Cone circular reto.....	77
FIGURA 24 – Cone e triângulo isósceles. ....	78
FIGURA 25 – Mediatrizes do triângulo isósceles. ....	78
FIGURA 26 – Esfera inscrita no cone circular reto.....	80
FIGURA 27 – Triângulo retângulo.....	81
FIGURA 28 – Resolução da questão 5 realizada por um aluno. ....	82
FIGURA 29 – Base do prisma triangular inscrito. ....	84
FIGURA 30 – Prisma triangular inscrito no cilindro.....	85
FIGURA 31 – Análise volumétrica do prisma triangular regular inscrito ao cilindro. ....	86
FIGURA 32 – Cilindro colocado na base do cone. ....	88

FIGURA 33 – Cone seccionado por retas.....	89
FIGURA 34 – Cilindro inscrito no cone.....	89
FIGURA 35 – Variação volumétrica do cilindro inscrito no cone e sua função.....	90
FIGURA 36 – Resolução da variação do cilindro em função de sua altura.....	91

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – Perfil dos participantes quanto ao gênero.....	55
GRÁFICO 2 – Quantidade de horas diárias de acesso à internet.....	55
GRÁFICO 3 – Tempo de estudo diário fora da sala de aula.....	56
GRÁFICO 4 – Quanto ao conhecimento do GeoGebra.....	57
GRÁFICO 5 – Relevância das atividades.....	66

## **LISTA DE QUADROS**

QUADRO 1 – Relação de erros e acertos.....	58
QUADRO 2 – Perguntas e respostas para se resolver o problema.....	68
QUADRO 3 – Respostas dos alunos frente à contribuição da intervenção.....	92
QUADRO 4 – Respostas dos alunos referentes aos pontos positivos e negativos.....	93
QUADRO 5 – Respostas dos alunos referentes à satisfação e dificuldade.....	95



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	19
<b>2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O GEOGEBRA: UM PONTO DE ENCONTRO</b> .....	23
2.1 A Metodologia de Resolução de Problemas.....	24
2.2 GeoGebra: um recurso para a Geometria Dinâmica .....	31
2.3 O encontro entre a Metodologia de Resolução de Problemas e o GeoGebra.....	34
<b>3 METODOLOGIA: O PASSO A PASSO DA PESQUISA</b> .....	36
3.1 A natureza metodológica da pesquisa .....	36
3.2 O ambiente e os participantes da pesquisa .....	39
3.3 As sequências didáticas .....	41
3.3.1 <i>Sequência didática 1: inscrição e circunscrição de polígonos regulares</i> .....	42
3.3.2 <i>Sequência didática 2: explorando sólidos geométricos</i> .....	47
3.3.3 <i>Sequência didática 3: inscrição e circunscrição de sólidos geométricos</i> .....	50
<b>4 ANÁLISE DE DADOS</b> .....	54
4.1 Perfil dos participantes .....	54
4.2 Atividade diagnóstica.....	57
4.3 Atividade 1: inscrição e circunscrição de polígonos regulares.....	61
4.4 Atividade 2: explorando sólidos geométricos.....	66
4.5 Atividade 3: inscrição e circunscrição de sólidos geométricos .....	73
4.6 Avaliação e análise das sequências didáticas .....	91
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	97
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	100
<b>ANEXO A – PARECER DO PROJETO DE PESQUISA APROVADO</b> .....	103
<b>APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE</b> .....	106

<b>APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE</b> .....	109
<b>APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO E PERFIL DO PARTICIPANTE</b> .....	112
<b>APÊNDICE D – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA</b> .....	114
<b>APÊNDICE E – ATIVIDADE 1</b> .....	118
<b>APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO 1</b> .....	120
<b>APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO 2</b> .....	122
<b>APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO 3</b> .....	123
<b>APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO 4</b> .....	124
<b>APÊNDICE J – ATIVIDADE 3</b> .....	125
<b>APÊNDICE K – ATIVIDADE 2</b> .....	128
<b>APÊNDICE L – TUTORIAL: VARIAÇÃO DO VOLUME DE UM CILINDRO INSCRITO EM UM CONE</b> .....	131

## 1 INTRODUÇÃO

Cheguei até aqui, “e agora, José?”. No meu pequeno universo, jamais imaginei tamanha responsabilidade: escrever a minha dissertação de mestrado. As lutas, os dissabores, o não incentivo das instituições que trabalho, a falta de tempo e a distância da minha cidade (Caldas Novas – GO) a uma universidade pública que oferecesse mestrado em Matemática, me impediam de acreditar que esse momento pudesse acontecer. Porém, estou aqui. E um dos motivos que me fez despertar, foi o fato de muitos dos meus jovens alunos, em meio a tantos percalços, buscarem seus aprimoramentos profissionais. E quanto a mim? Eles são inspirações. Espelho-me neles. Então, fui à luta também.

Sou apaixonado pela minha profissão. Reclamo como qualquer outro: do descaso pela educação em nosso país, a sobrecarga de serviços extraclasse e a desvalorização profissional. Porém, é em sala de aula que eu me vejo. Os problemas são deixados de lado e começo a entender o quanto eu sou privilegiado por ter me tornado professor. O quanto sou agraciado pelos sorrisos, abraços e afetos desses alunos. Quanta responsabilidade carrego em minhas falas e na maneira de ser e conduzir esses que são, sem dúvida, o futuro do país.

É complicado falar da escolha da minha linha de pesquisa, no entanto, a partir das aulas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática, que cursei no primeiro semestre de 2018, no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), percebi o quanto ainda precisava desenvolver em sala de aula. Pude me deparar com recursos computacionais que nunca imaginava que existiam e que pudessem se tornar aliados para o professor. Comecei então a questionar as minhas aulas, a minha didática, a aprendizagem dos meus alunos e o quanto eu poderia melhorar se eu soubesse, pelo menos, o básico, dos recursos vivenciados na disciplina. Desde então, vieram algumas reflexões:

- i. Apesar de me sentir tão empolgado e confiante em sala de aula, quais dessas aulas que, ao mesmo tempo, faltam aos alunos o mesmo entusiasmo?
- ii. Que relevância essas aulas têm para os alunos?
- iii. Dentre essas aulas, o que eu poderia trazer de inovador para sanar as dificuldades dos meus alunos?

A partir dessas inquietações e experiências, tive mais clareza sobre o caminho a ser adotado no mestrado. Na minha experiência docente, a parte da matemática que eu conseguia envolver os alunos com a realidade era a Geometria, mesmo sabendo que, muitas vezes, eu aproveitei a “dança” sozinho. Por exemplo, alguns alunos não conseguiam entender as noções básicas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, o cálculo da área e volume dos sólidos

geométricos, muito menos conseguiam acompanhar a inscrição e circunscrição de esfera, cilindros, cones, pirâmides e prismas.

A escolha do orientador foi essencial para a supracitada caminhada. Ele começou a entender o que eu estava passando e me fazia questionamentos e reflexões, até que conheci a Metodologia de Resolução de Problemas<sup>1</sup>.

Nesse contexto, o presente trabalho é resultado do desenvolvimento do projeto de pesquisa intitulado “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*”, cuja investigação ocorreu no período de outubro de 2018 a agosto de 2019, com aprovação de número 05019018.0.180.0000.8409 pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP). O objetivo geral consistiu em investigar, aplicar e analisar a aprendizagem dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, com a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra 3D, juntamente com a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino de sólidos inscritos e circunscritos.

Os objetivos secundários do projeto foram:

- a) elaborar sequências didáticas que utilizem o GeoGebra 3D para resolver, a partir da Metodologia de Resolução de Problemas, sólidos inscritos e circunscritos em aulas de Matemática do Ensino Médio;
- b) analisar o uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas quanto à facilidade da manipulação, compreensão e construção dos conceitos de sólidos inscritos e circunscritos;
- c) investigar as contribuições do uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas na interação e dinamismo das aulas na perspectiva da atuação do professor e da formação mais ampla dos alunos.

O ensinar Geometria é uma tarefa de enriquecimento. Porém, ela perde um pouco o sentido e seu significado quando os alunos não conseguem entender certos problemas geométricos. É fundamental que se apresente a importância da Geometria para a realidade desses alunos, porque segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC),

a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário

---

<sup>1</sup> Finalizada a parte do memorial, o autor optou por não utilizar, a partir dos próximos parágrafos da Introdução, a primeira pessoa.

para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 271).

Como colocada na citação, é preciso desenvolver o pensamento geométrico dos alunos de tal forma que eles consigam associar não só as figuras planas, mas também as espaciais com suas propriedades e conjecturas. A BNCC (BRASIL, 2018) ainda destaca o desenvolvimento de habilidades e competências, que serão mostradas neste trabalho, de tal forma que os alunos consigam utilizar processos e ferramentas matemáticas nas situações-problema de natureza geométrica.

A partir de uma breve revisão bibliográfica, como:

- a) Dante (2012), traz que um problema tem que ser desafiador e relevante, e deve proporcionar como objetivo, a capacidade do aluno pensar e desenvolver o raciocínio lógico;
- b) Polya (1995), diz que a partir da compreensão de um problema, pode-se estabelecer um plano para a sua resolução e execução;
- c) BNCC (BRASIL, 2018), ao se referir aos problemas matemáticos, diz que eles permitem trabalhar não só a curiosidade, como também a investigação, análise e criatividade dos alunos, e quanto aos recursos tecnológicos, ela enfatiza que estes possibilitam aos alunos ampliar a compreensão não só de si mesmos, como também do mundo social e natural;
- d) Onuchic (1999), afirma que um problema seria tudo aquilo que não se sabe fazer, mas estaria interessado em fazer.

Evidencia-se, assim, a relevância do tema. E a fim de ilustrar essa importância, pode-se verificar que alguns autores têm abordado em seus trabalhos acadêmicos (artigos, dissertações ou teses) assuntos como:

- a) *Metodologia de Resolução de Problemas*, por Angela Maria Kubiak Secundo e Reinaldo Francisco;
- b) *Uso das tecnologias em sala de aula*, por Diógenes Gewehr;
- c) *Geometria plana e espacial*, por Ângelo Papa Neto;
- d) *GeoGebra*, por Jakson Ferreira de Sousa.

Dessa maneira, configura-se assim o entendimento de como esta pesquisa possui relevância no que tange aos tópicos levantados. E tomando em consideração esses assuntos, este trabalho está dividido em alguns capítulos de modo que sua estrutura possa ilustrar a trajetória da investigação realizada com os alunos da 3ª série do Ensino Médio de um colégio particular de Caldas Novas – GO.

No segundo capítulo, a partir de alguns recortes bibliográficos, discute-se como a Metodologia de Resolução de Problemas pode ajudar os alunos a compreenderem e desenvolverem estratégias para diferentes soluções que um problema propõe. Destaca-se também o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nas salas de aula e, na ocasião, justifica-se a escolha do GeoGebra.

O terceiro capítulo aborda o percurso metodológico, o ambiente, os recursos e os participantes da pesquisa. Ademais, detalha-se a criação das sequências didáticas.

O quarto capítulo destaca como as sequências didáticas foram aplicadas, ou seja, mostra como os dados foram coletados e analisados.

Por fim, as considerações com os resultados finais da pesquisa, se os objetivos foram alcançados e a percepção do professor-pesquisador frente aos desafios e benefícios que essa pesquisa lhe proporcionou.

## 2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O GEOGEBRA: UM PONTO DE ENCONTRO

Atualmente, as salas de aulas tanto no ensino básico quanto no ensino superior, tornaram-se objetos de discussões e articulações. De acordo com uma pesquisa feita por D'Agostini pela Revista Nova Escola (2019)<sup>2</sup>, que tinha como objetivo mostrar que ser professor está muito além da apropriação de conteúdos, de planejamento didático, ele trabalha, sobretudo, com o desenvolvimento do ser humano e sua área de atuação traz desafios que ultrapassam o ensino e aprendizagem. A pesquisa apontava que de um lado, muitos professores apesar de estarem cercados pelos alunos e com a rotina agitada, sentem-se isolados na profissão, alheios à falta de cooperação e compreensão de coordenação, pais e equipe pedagógica, com problemas com a voz, sofrendo de insônia, ansiedade, dores nos membros e não recomendariam a profissão aos mais jovens. Do outro lado, a escola pode fortalecer o senso de comunidade, criando espaços que dialoguem com os docentes e os ajudam a enfrentar os desafios da profissão.

De acordo com o estudo feito por Costa<sup>3</sup>, acredita-se que o uso das tecnologias e uma metodologia que integrem aulas de matemática, podem apresentar resultados satisfatórios no que tange aos desafios que as salas de aula exigem.

Dentre as dificuldades que existem para os professores ensinarem Matemática na escola, além da falta de tempo para cumprirem os conteúdos programáticos em tempo hábil, estão a conexão e harmonia dos conteúdos com a realidade em que os alunos estão inseridos. Para superar essa barreira, no âmbito da Geometria, professores têm buscado novas metodologias de ensino, conforme destacado por Fonseca, M. (2001) que diz que

a preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino (FONSECA, M. 2001, p. 91).

No contexto supracitado, a dificuldade é mais acentuada quando o estudo de um conteúdo novo envolve aprimorar e/ou ampliar um conteúdo antigo, como por exemplo,

---

<sup>2</sup> D'AGOSTINI, Ana Carolina. **Solidão do professor**: está na hora de compartilhar. 2019. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/17318/solidao-do-professor-esta-na-hora-de-compartilhar>>. Acesso em: 19 jan. 2020.

<sup>3</sup> COSTA, Nibele Cristina de Oliveira. **A Integração das Tecnologias Educacionais ao Ensino de Matemática da 5ª Série, 2008**. Disponível em <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1667-8.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2020.



inscrição e circunscrição de sólidos geométricos que são trabalhados no Ensino Médio. Porque ao se abordarem esses conteúdos, os alunos são confrontados a aprimorarem os conceitos de inscrição e circunscrição de polígonos regulares na circunferência, poliedros convexos e corpos redondos que costumam ser trabalhados em algumas escolas dos anos finais do Ensino Fundamental.

Certo dessas dificuldades, ao ilustrar parte desse trabalho, será mostrado nesse capítulo, dividido em três momentos, alguns dos problemas e possíveis soluções que acometem certos professores quando o assunto é resolução de problemas e geometria. No primeiro momento será apresentada a importância que a Metodologia de Resolução de Problemas tem no sentido de ampliar as possibilidades para se chegar não só à solução desejada como também a escolha do problema que será proposto aos alunos. No segundo, como os professores podem apropriar-se das facilidades que alguns *softwares* oferecem, a fim de que aperfeiçoem a visualização das figuras construídas e a interação com seus alunos. E no terceiro, o encontro desses dois momentos, somando-se a esses *softwares*, o que os professores podem utilizar de metodologias que instiguem a capacidade de pensar e solucionar certos problemas aliadas à manipulação de *softwares* quando se trabalham geometria.

## 2.1 A Metodologia de Resolução de Problemas

A Base Nacional Comum Curricular, conhecida por BNCC, (BRASIL, 2018, p. 277), traz que “aprender Matemática é aprender a resolver problemas. Para resolver problemas é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas”.

Vive-se a era de uma sociedade que “resolve e arruma problemas”, sejam estes fáceis ou não, como, por exemplos, da forma de pagamento de um novo aparelho eletrônico à complexidade para entender como a natureza e o universo se comportam. Espera-se que alguns de seus cidadãos tenham habilidades para resolvê-los, pois as situações corriqueiras diárias são confrontadas a fim que eles saibam sair de algumas situações, muitas vezes, bem embaraçosas.

Mas o que vem a ser um problema? Na Matemática, conforme Dante (2012, p. 9), é “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”.

Os problemas matemáticos, nos últimos anos, tiveram novos olhares de diferentes estudiosos. Dante (2012), defende que quando um estudante consegue desenvolver método de resolução por si só, sente-se mais motivado em resolver outras situações- problema e quando os dados desses problemas estão relacionados ao seu dia a dia, o empenho é maior.

Nessa mesma perspectiva, Polya (1995) afirma que a inteligência está basicamente na habilidade de resolver problemas. Sejam eles, problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, charadas, toda sorte de problemas.

Quanto à visão de Onuchic e Allevato (2004), elas asseguram que um problema é tudo aquilo que uma pessoa não sabe fazer, porém está interessada em saber, e este pode ser entendido como qualquer tarefa ou atividade para as quais, na escola, os estudantes não têm método ou regras pré-definidas ou memorizadas, nem tão pouco a percepção de um método exclusivo para acercar-se à solução exata.

Sob esse pensamento, Diniz (2001) garante que a resolução de problemas deve ser compreendida como capacidade mínima para que um indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho. E ainda, ao se chegar à solução dos problemas, após todos os enfoques dos dados e procedimentos, resultaria em aprender matemática, no sentido de que o ambiente estava preparado para que ele chegasse à resposta apropriada.

Assim, pode-se entender que, para Dante (2012) e Polya (1995), os problemas viraram a arte de resolvê-los, para outros, como Diniz (2001) e Onuchic e Allevato (2004), acentuam-se as mesmas ideia anteriores, porém, os problemas ainda exigem que os alunos saibam conceitos muitas vezes preliminares e dali, o professor de matemática, criaria meios que possibilitariam os alunos a chegar à solução.

Mas quais são os objetivos de resolver um problema? Para Dante (2012, p.10), alguns dos objetivos da resolução são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base de Matemática às pessoas.

Esses objetivos norteiam os pilares da Metodologia de Resolução de Problemas. Ao usar novas metodologias de ensino, conforme explicita Mendonça (1993, p. 260), deve-se “como ponto de partida: olhar o problema como elemento que pode disparar um processo de

construção do conhecimento matemático”. Se os professores acreditam nesse entendimento, é necessário elaborar, discorrer problemas que permitam o processo de construção do conhecimento, de modo que os alunos, de forma coerente, executem os problemas que serão trabalhados em sala de aula a fim de evitar dissabores e aborrecimentos, no que se dizem a respeito desses problemas, porque segundo Polya (1995),

[...] É triste trabalhar para um fim que não se deseja. [...] coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno deve compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe falta compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido nem muito difícil nem muito fácil (POLYA, 1995, p. 4).

A escolha da situação-problema não é fácil, pois muitas vezes os docentes são desarmados em seus desejos, porque veem a turma como um todo. Não compreendem como cada aluno se manifesta na perspectiva que lhe é avançado o grau de dificuldade desses problemas. Para Onuchic (1999), seguindo esse pensamento, o professor tem que entender e observar, cuidadosamente, e se não perceber qualquer garantia de iniciativa dos alunos, deve apresentar, de forma clara e concisa, repetidas vezes todo o seu diálogo com os estudantes para que estes consigam chegar à solução desejada. Deve-se também se preparar para novas indagações e apresentar o problema com certas modificações, de modo que quebre o silêncio e as barreiras que impedem que a turma entenda o problema proposto por ele.

Quanto à didática em relação aos problemas matemáticos, quando executá-los, o professor pode aprimorar as habilidades por meio da Metodologia de Resolução de Problemas. Segundo Leite e Afonso (2001), de modo contrário que acontece na educação tradicional, os conceitos dos problemas são introduzidos pelos professores, vindo depois a possível aplicação desses problemas, porém, no ensino baseado na resolução de problemas, os alunos são confrontados por problemas abertos que permitem a discussão e relevância desses problemas para a vida diária dos discentes, criando assim meios que possibilitem o ponto de partida da aprendizagem dos alunos. Entende-se, assim, que essa didática consente aos envolvidos, professor e aluno, uma melhor interação e compreensão dos problemas que são levantados na sala de aula.

Entretanto, como escolher os problemas que serão trabalhados em sala? Alguns autores, como Dante (2018) e Polya (1995), defendem a ideia de que o professor, ao propor o problema, esse deve ser claro, conciso, direto e atual e, para outros, como Onuchic e Allevato (2004), têm que trazer à reflexão, ao envolvimento e à interdisciplinaridade, sem deixar de lado os conceitos e definições.

No entanto, as dificuldades para a escolha do problema são inúmeras. Ao levá-los, o professor deve também analisar o desenvolvimento da turma. Observar se aqueles alunos que apresentam mais dificuldades estarão dispostos a interagir e compartilhar desse processo de ensino. Caso contrário, o professor pode buscar métodos que o auxiliem para aplicação dos problemas propostos.

Depois de escolher os problemas, os professores devem levar os alunos a terem as seguintes observações que, segundo Polya (1995), dividem-se em 4 (quatro) etapas, a saber:

- 1 – É preciso compreender o problema. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
- 2 – Estabelecimento de um plano. Qual a conexão entre os dados e a incógnita? Conhece um problema correlato? É possível reformular o problema? É possível imaginar um problema correlato mais simples? É possível resolver uma parte do problema? Utilizou todos os dados? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
- 3 – Execução do plano. Verifique cada passo do plano escolhido. É possível demonstrar que ele está correto?
- 4 – Retrospecto. Examine a solução obtida. É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um outro caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? (POLYA, 1995, p. 4-10).

As etapas da metodologia defendida por Polya (1995) auxiliam os professores e alunos a resolverem alguns problemas e a chegar à solução das situações-problema por meio de diferentes maneiras e estratégias. Nesse sentido, Krulik e Reys (1997) afirmam que,

[...] toda a Matemática se relaciona com a resolução de problemas. Alguns problemas são teóricos e muitos são práticos. Problemas de vários tipos ocorrem, obviamente, ao longo de toda a Matemática. No entanto, há certas estratégias gerais e métodos que são úteis em todos os tipos de problemas (KRULIK; REYS, 1997, p. 9).

O entendimento dos problemas, como teóricos ou práticos, é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Assim, ao examinar essas situações, o professor pode utilizar conceitos e definições abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema, para a construção e aplicação desses conceitos matemáticos.

Tratando-se em termos metodológicos, de acordo com as etapas de Polya (1995), relacionados ao ensino das situações-problema, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, isto é, de situações em que os discentes necessitam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos norteadores para o conceito que se quer estudar, o aluno

deve ser conduzido a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Entende-se, então, que um conceito matemático se constrói articulando com outros conceitos por meio de generalizações e interpretações bem estruturadas.

Ao resolver problemas e se ainda persistirem as dúvidas dos alunos, na resolução desses problemas, a partir das estratégias adotadas, o professor pode fazer algumas perguntas que acentuem as possibilidades de respostas, como:

- O que se procura com a resolução desse problema?
- O que o problema está perguntando?
- O que é dito no problema que você pode usar?
- É possível elaborar um gráfico ou um desenho? (POLYA, 1995, p. 6).

Após essas indagações para induzir os diálogos, de assimilar os objetivos e as características de cada problema, o professor pode prepará-los para as etapas seguintes. Há várias formas de se chegar à resolução desses problemas, e esta deve ser o principal motivo de ensinar matemática, “resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar” (ONUCHIC, 1999, p. 204), porque a resolução dos problemas permite que os professores consigam entender os caminhos e/ou raciocínios que os alunos levam da aprendizagem matemática.

Existem vários tipos de problemas, no entanto, Dante (2009, p. 18) ressalta que os problemas devem aguçar e motivar a curiosidade dos alunos, para tanto o problema deve ser:

- desafiador para o aluno;
- real;
- interessante;
- o elemento de um problema realmente desconhecido;
- indireto e não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- equiparado, ou seja, ter um nível adequado de dificuldade.

Durante a elaboração e execução dos problemas matemáticos, os professores costumam ser forçados a seguir certo padrão para que os objetivos sejam alcançados. Entretanto, para que execução ocorra imersa na Metodologia de Resolução de Problemas, é necessário que eles se atentem às barreiras que cada problema traz, uma vez que,

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos

matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 2018, p. 262).

Sob esse ponto de vista, o professor rompe as barreiras e estreita laços com os alunos, de modo a encorajá-los a desenvolver a autoconfiança e a capacidade de reelaborar os problemas, com novas abordagens e estratégias.

Dessa maneira, o educador ao reformular os problemas com novas abordagens, questionamentos e diálogos, permite também que os alunos tenham capacidade de relacionar os problemas que são propostos às conjecturas e abstrações com outros problemas, e saber refletir sobre cada um deles. Sendo que, em consonância com a BNCC (BRASIL, 2018), ao refazer ou reformular os problemas, é preciso estes possam:

[...] favorecer a abstração. É importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2018, p. 299).

Desse modo, verifica-se que as escolhas e elaborações dos problemas devem requerer e validar as estratégias adotadas pelos discentes, de forma que viabilizem a capacidade de argumentação e planejamento. Para tanto, segundo Diniz (2001, p. 87) “os exemplos de textos que encontramos nos livros didáticos estão centrados nos enunciados de problemas chamados de convencionais pela sua estrutura e pelo tratamento que se tem dado a eles”. Desse modo, é necessário que os problemas sejam práticos e que seus códigos e linguagens estejam relacionados com a vida diária dos estudantes.

Assim como sugere Polya (1995), quanto à resolução de problemas, Diniz (2001, p. 89) afirma que um problema é “toda a situação na qual o indivíduo confrontado não tem garantia de obter solução com o uso de um algoritmo, sendo que todo o conhecimento relevante desta pessoa deve ser combinado de maneira nova para resolver esta questão”.

Nesse sentido, os problemas matemáticos que trazem situações do cotidiano e fazem parte do processo de conhecimento, tornam-se não só da Matemática como também de outras áreas do conhecimento. Abrangendo-se, assim, a interdisciplinaridade.

Trazer problemas que possam trabalhar as habilidades dos discentes em suas mais variadas situações, é proporcioná-los momentos de privilégios no que diz respeito ao desenvolvimento do ensino de Matemática.

Conforme defende Onuchic (1999, p. 6), a compreensão aumenta na medida em que o aluno consegue relacionar um determinado conceito matemático a uma “grande variedade de contextos, consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele e alcança meios para construir relações entre as várias ideias matemáticas, nas quais podem estar contidas num mesmo problema”.

De acordo com Onuchic (1999), relacionar problemas matemáticos à experiência de cada aluno é procurar medidas que os permitam a serem capazes de obter as diferentes ideias. Proporcionando-lhes solucionar os mais diversos tipos de problemas, mesmo sabendo que, desse modo, não é uma tarefa simples para os docentes ao trazer nos problemas matemáticos as vivências e experiências.

Assim, diante das dificuldades encontradas e das estratégias que podem ser sugeridas aos alunos, os professores, para solucionar tais problemas, devem encorajá-los a pensar, a refletir e ter clareza para fazer as indagações. Dessa maneira, é fazer do professor um papel preponderante no que diz respeito à aprendizagem dos alunos. Sob essa perspectiva, o professor que,

deseja desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (POLYA, 1995, p. 3).

Nesse contexto, é inegável que se entenda que cada turma estabelece uma configuração diferenciada ao professor, no entanto, às vezes, esses problemas são desafiadores e exigem que os alunos saibam conceitos básicos para solucioná-los, porque “o real prazer de estudar Matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Sua autoestima aumenta consideravelmente com a sensação do eu sou capaz” (DANTE, 2009, p. 21).

O fato de essas questões serem difíceis ou não, está na abordagem dos problemas levantados em sala de aula pelos professores. Dessa maneira, o professor ao evitar a repetição e usar estratégias que constata com a realidade dos alunos, entende que,

a resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 2012, p. 59).

A ação colocada aqui, muitas vezes, culmina com novas abordagens e estratégias. No entanto, nem sempre os alunos estão receptivos a tais ações. O professor pode intermediar a aprendizagem por meio de *softwares* que facilitem a visualização e o dinamismo das questões. A próxima seção traz como o uso de tecnologias e, em especial, o uso de *softwares* pode ajudar os professores e alunos a entenderem os problemas propostos no que diz respeito à Geometria.

## 2.2 GeoGebra: um recurso para a Geometria Dinâmica

A necessidade de reinventar em sala de aula faz com que muitos professores busquem novos conceitos, técnicas e procedimentos tecnológicos que permitam viabilizar a aprendizagem dos alunos. Para isso, é necessário entender o conceito de tecnologia na sala de aula, pois segundo Reis (2009, p. 5), o que se entende de tecnologia educacional pode ser expresso como o “conjunto de procedimentos (técnicas) que visam ‘facilitar’ os processos de ensino e aprendizagem com a utilização de meios (instrumentais, simbólicos ou organizadores) e suas consequentes transformações culturais”.

Dentre as tecnologias disponíveis, o presente trabalho foca a discussão no uso do *software* GeoGebra<sup>4</sup> nas aulas de matemática. O GeoGebra é um *software* livre que pode ser instalado em computadores e até mesmo em dispositivos móveis, como *tablets* e celulares, pois possui código aberto com multiplataformas e está disponível gratuitamente para usuários não comerciais. Ele proporciona que seus usuários consigam entender a junção de conceitos de geometria e de álgebra numa interface gráfica, promovendo a construção de vários conceitos no campo matemático, de modo que

a manipulação de figuras/objetos dinâmicos, oferecida pelo GeoGebra, introduz um novo tratamento para o registro desenho, pois o conjunto de “desenhos em movimento” substitui o desenho particular e estático presente nos livros didáticos e que muito contribui à formação de imagens mentais inadequadas (GRAVINA, 2010, p. 22).

O fato de movimentar as figuras geométricas no GeoGebra, permite que seus usuários aprofundem a noção abstrata de algumas imagens que, em alguns casos, são distorcidas, quando feitas pelo professor em salas de aula ou até mesmo quando aparecem nos livros didáticos.

---

<sup>4</sup> *Software* criado como tese de doutorado pelo professor alemão Markus Hohenwarter, que pode ser instalado a partir do endereço eletrônico <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 21 mar. 2020.



As interações promovem novos olhares e perspectivas, quando se estuda Geometria. Poder movimentar polígonos ou até mesmo sólidos redondos ou prismas, por exemplo, sem alterar suas propriedades, é trazer aos que procuram trabalhar Geometria, a oportunidade de ir além dos conceitos e imagens que muitas vezes são alteradas e mal interpretadas pelos alunos. É sabido que, apesar de toda a facilidade oferecida por esse *software*, é necessário que seus usuários tenham noções básicas dos conceitos e particularidades de Geometria, a fim de que, cada figura construída assuma sua verdadeira relevância no que tange as suas propriedades geométricas. Por isso, à medida que se avançam nas construções de cada figura, entende-se que o GeoGebra é uma ferramenta que visa facilitar e agregar os conhecimentos que são promovidos em cada etapa.

Devido à facilidade de se instalar e manusear o GeoGebra, sua popularidade tem crescido a cada ano, desde sua criação ocorrida no ano de 2001. Dentre as características diferenciadas nesse *software*, têm-se as construções de gráficos e tabelas; janela de visualização interligada com Geometria plana e espacial, de forma dinâmica; ferramentas interativas nas páginas da internet, qualidades que permitiram a aplicação dessa pesquisa em sala de aula.

No mundo cada vez mais tecnológico, adotar recursos computacionais em sala de aula de matemática tornou-se ainda mais importante, pois, segundo D'Ambrosio (1996, p. 80) a “busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível”.

Embora os alunos estejam rodeados de tecnologias digitais, como *tablets*, celulares e computadores, nem sempre a escola utiliza estas tecnologias em prol do aprendizado deles, já que há dificuldades de variados contextos para esta inserção, porque

mesmo com as tecnologias de ponta, ainda temos grandes dificuldades no gerenciamento emocional, tanto no pessoal como no organizacional, o que dificulta o aprendizado rápido. As mudanças na educação dependem, mais do que das novas tecnologias, de termos educadores, gestores e alunos maduros intelectual, emocional e eticamente; pessoas curiosas, entusiasmadas, abertas, que saibam motivar e dialogar [...]. São poucos os educadores que integram teoria e prática e que aproximam o pensar do viver (MORAN, 2014, p. 2).

A inserção das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na sala de aula coloca os professores numa emaranhada situação de rever os métodos que podem ser estudados com a ajuda delas, porém existem algumas barreiras para aplicação dessas tecnologias. Como assegura Schuhmacher (2014), pode-se dizer que essas barreiras se referem à infraestrutura física da escola, em termos de equipamentos, conexão à internet e

ambientes em que esses equipamentos sejam utilizados na prática do professor e, ainda, a inexistência ou insuficiência de apoio institucional de ensino para o seu uso. Essas dificuldades tornam-se um agravante para o professor que pretende adotar as TICs em sua prática de ensino.

Em concordância a essa realidade, a BNCC (BRASIL, 2018) indica, no entanto, que esses saberes e competências do uso das TICs devem ser garantidos na formação dos professores, tanto inicial quanto formação continuada, quando o professor deve ser capaz de fazer uso dos recursos da tecnologia da informação e da comunicação, de forma a aumentar as possibilidades de aprendizagem dos alunos.

Os educadores estão sujeitos a um processo contínuo de formação profissional. E ao se deparar com os questionamentos que alguns alunos fazem a respeito das aulas, principalmente no que refere ao estudo de Geometria, deve-se entender que esses problemas podem ser minimizados com o uso de *softwares*, como o GeoGebra.

Compreende-se que os aplicativos matemáticos não só ajudam os professores como também os estudantes a terem um papel relevante no desenvolvimento de suas prerrogativas: a capacidade de questionar e entender os meios que os levam a cada solução dos problemas propostos. Isso é liberdade. É autonomia no processo de ensino e aprendizagem.

É certo que a BNCC (BRASIL, 2018), defende o uso de *softwares* nas aulas de matemática, principalmente no que diz a respeito ao ensino de Geometria, uma vez que

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos (BRASIL, 2018, p. 527).

Ao interpretar e representar figuras geométricas no GeoGebra, deve-se entender que, mesmo sabendo que há uma grande dificuldade até mesmo da escolha da tecnologia que os professores procuram colocar em prática na sala de aula, eles têm que lidar com algumas barreiras, como: conhecimento tanto deles quanto dos alunos, no que se refere aos *softwares*, a aplicabilidade dos conceitos e métodos que podem ser trabalhados, a interação da turma e nos objetivos que se desejam alcançar, sendo que, para utilizar

os *softwares* educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento (BRASIL, 2001, p. 47).

Uma dessas formas de se pensar em resolver certos problemas matemáticos é com o uso do GeoGebra, onde é atribuído à construção dos conceitos e objetos matemáticos envolvidos. Ressalta-se ainda que esse *software* pode oferecer relevantes suportes no que diz respeito à sua dinâmica e funcionalidade, porque bem como foi falado, as aulas de quadro e giz não oferecem o que esse *software* pode acarretar, porque segundo Chicon et al. (2011), os professores de matemática podem apresentar dificuldades em desenvolver correlações entre as incógnitas e suas correspondências no gráfico, porém com o uso GeoGebra a aula transfigura-se em formato dinâmico, o alunos podem visualizar a matemática em movimento. Configurando assim, que as facilidades do manuseio desse *software* são, em grande parte, apontadas pela visualização e melhor compreensão dos objetos.

### 2.3 O encontro entre a Metodologia de Resolução de Problemas e o GeoGebra

Ao se trabalhar na elaboração e nos caminhos que permitem chegar à solução de um determinado problema, podem-se seguir algumas etapas, segundo Onuchic e Allevato (2011) que basearam esse estudo levando em consideração o mesmo ponto de vista que Polya (1995) sugeria, como: selecionar o problema, também chamado de problema gerador; fazer leitura individual ou em conjunto do problema; observar e analisar as possibilidades de solução; resolver o problema, a partir do entendimento e interpretação do enunciado; e por fim, registrar e discutir a solução encontrada por meio dos processos que o aluno levou para obtê-la. Porém essas etapas podem fazer mais sentido, quando esses problemas, acompanhados do conteúdo de Geometria, são desenvolvidos por meio do GeoGebra.

Assim, o professor permite que o aluno, ao ter as indagações e diálogos que a Metodologia de Resolução de Problemas estabelece, cria possibilidade, com a ajuda do GeoGebra, de distinguir melhor e explorar as propriedades do conteúdo ministrado nas etapas que são trabalhadas.

Dessa maneira, o professor ao selecionar o problema pode visar à construção, os questionamentos e os meios que permitirão que seus alunos cheguem à formalização do problema. E como o GeoGebra agrega tanto a dinamicidade nas atividades quanto facilidade na interação e articulação dos conceitos apresentados, entende-se que as etapas da resolução de problemas se tornam mais experimentais e dinâmicas. Recomenda-se que, o professor ao se apropriar-se dessas tecnologias, leve em consideração o planejamento e a realidade onde atua. É necessário conhecer seu alunado e a sua escola, ou seja, saber como, quando e onde aplicar os métodos e os suportes que o GeoGebra pode oferecer.

Frente às facilidades e interação que o GeoGebra oferece, procurou-se destacar aqui a importância que esse *software* terá na pesquisa em questão. Partindo desse entendimento, dos universos que abrangem tanto a resolução quanto o GeoGebra, compreende-se que a Geometria Dinâmica permite abranger, visualizar e entender os conceitos e construções. Juntando os recortes de Geometria Dinâmica, Tecnologia e a Metodologia de Resolução de Problemas, serão apontados neste trabalho, nas seções seguintes, os efeitos na aprendizagem de Geometria de alunos do Ensino Médio que ocorreram a partir da inserção de Ambientes de Geometria Dinâmica em atividades desenvolvidas na perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas.

### 3 METODOLOGIA: O PASSO A PASSO DA PESQUISA

Neste capítulo será apresentado o percurso metodológico do processo de investigação acerca da aprendizagem dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, tendo como suporte o uso da Metodologia de Resolução de Problemas e do GeoGebra, em relação à inscrição e circunscrição de sólidos geométricos.

Para o entendimento deste percurso seguem: a natureza metodológica da pesquisa, na qual os recortes bibliográficos foram fundamentais para a construção e aplicação das sequências didáticas; o ambiente e os participantes da pesquisa; e por último, o procedimento de coleta de dados.

#### 3.1 A natureza metodológica da pesquisa

A trajetória da presente pesquisa, quanto à metodologia adotada, foi dividida em dois momentos: o primeiro, pesquisa bibliográfica, com a coleta de dados teóricos a respeito da Metodologia de Resolução de Problemas e o uso da Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, e no segundo momento, o estudo de caso.

Uma pesquisa bibliográfica, para Fonseca, J. (2002), é quando se levantam dados a partir de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Os trabalhos científicos iniciam-se com uma pesquisa bibliográfica, que possibilitam ao pesquisador apreciar o que se estudou sobre o assunto. E entende-se, de acordo com Gil (2008), que ela

é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo (GIL, 2008, p. 50).

Os recortes bibliográficos foram de grande importância para a construção e elaboração das sequências didáticas que se fazem presentes nesta pesquisa. Esses recortes permitiram que o professor-pesquisador pudesse entender melhor os caminhos que levaria a pesquisa de modo que pudesse traçar planos e objetivos que deveriam ser seguidos em cada sequência didática.

A natureza metodológica desta pesquisa teve objetivos com abordagens qualitativas. Sobre essas características, Araújo e Borba (2004) enfatizam que,

Pesquisa qualitativa deve ter por trás uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, etc. e interpretações. O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 104).

Vale ressaltar que as fontes de dados numa pesquisa qualitativa são:

- o entrevistado [por meio da própria declaração, verbal ou por escrito, ou pela observação];
- as pessoas que têm informações sobre o pesquisado [parentes, colegas, subordinado, chefe, cliente, fornecedor e outros]; e
- os dados secundários disponíveis [revistas, jornais, pesquisas, livros e outros] (ZANELLA, 2013, p. 97).

Dessa forma, dados quantitativos podem ser utilizados dentro de uma pesquisa qualitativa. Cabe nesse momento salientar que, segundo Zanella (2013) na pesquisa qualitativa o processo de coleta de dados dá-se, ao mesmo tempo, com a sua análise; o que se contrapõe da pesquisa quantitativa, na qual, em um momento, os dados são coletados e, em outro, são analisados. E ainda, para ela, na pesquisa qualitativa não existem dois momentos distintos, o processo é interativo e integrado.

Assim, nota-se que nesta investigação foi utilizada, quanto à forma, abordagem qualitativa, pois a aprendizagem dos alunos, por ser um aspecto subjetivo, é o principal objeto de análise dessa pesquisa.

Em relação ao estudo de caso, Gil (2007) caracteriza-o como sendo um estudo intenso e exaustivo de um ou poucos elementos, de maneira a consentir o seu conhecimento amplo e detalhado, tarefa praticamente impossível mediante os outros tipos de delineamentos considerados. Para ele, o estudo de caso tem caráter qualitativo, mas não é uma técnica específica, pois visa o exame detalhado de um ambiente, de um sujeito ou de uma situação particular. O estudo de caso procura responder às questões “como” e “por quê” certos fenômenos ocorrem não tendo controle sobre os eventos estudados. Esse tipo de pesquisa é temporal porque só podem ser analisados fenômenos no contexto atual, sob a ótica da vida cotidiana.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 70), o pesquisador “diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela”.

Pode-se também, segundo Lüdke e André (1986), caracterizar os estudos de caso. Algumas dessas características, que serviram para essa pesquisa, são:

- a) utilizar um grande número de fontes de informação. Quanto mais variadas as fontes de informações para os estudos de caso mais as análises serão válidas;
- b) visar à descoberta. Mesmo tendo uma ideia inicial, novos elementos podem surgir redirecionando o foco de sua pesquisa. Essa característica pressupõe que “o conhecimento não é algo acabado”;
- c) aplicar uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa. A linguagem utilizada nos relatórios da pesquisa se mostra mais clara e articulada. Os relatos escritos aparecem em formatações distintas dependendo do foco do trabalho, mas, normalmente, na forma de narrativa. Os dados coletados podem ser fotografias, colagens, desenhos, entre outros.

Na fase do estudo de caso, os dados foram coletados a partir de: fotografias, filmagens das atividades, questionários e documentos produzidos pelos alunos. Sendo que numa atividade de investigação, desenvolvem-se, habitualmente, algumas fases, conforme Ponte, Brocado e Oliveira (2005), a saber:

- introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito;
- realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma;
- discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARDÓ; OLIVEIRA, 2005, p. 25).

Para a aplicação das atividades e obtenção dos dados, foram realizadas as seguintes ações:

- a) leitura e explanação dos objetivos e a metodologia da pesquisa para os alunos que se mostraram interessados pelo projeto, em junho de 2019;
- b) obtenção das assinaturas dos participantes e dos respectivos responsáveis no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e no Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), que se encontram, respectivamente, nos Apêndices A e B, no mês de junho de 2019;
- c) aplicação, no mês de junho de 2019, do Questionário do Perfil do Participante, que se encontra no Apêndice C;
- d) aplicação de Atividade Diagnóstica, no mês de junho de 2019, Apêndice D, que envolvem o conteúdo sobre sólidos inscritos e circunscritos, bem como área e volume de alguns poliedros;

- e) desenvolvimento das três sequências didáticas, que nortearam o uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas;
- f) entrega da Lista com Problemas Matemáticos, no mês de agosto de 2019, que se encontra no Apêndice E, envolvendo sólidos inscritos e circunscritos para ser trabalhada a sua resolução, sem o uso dos recursos computacionais, a fim de diagnosticar o que os alunos conseguiram desenvolver após a intermediação do professor na pesquisa;
- g) aplicação dos questionários, Apêndices F, G, H e I, no encerramento das aulas, para diagnosticar e entender os efeitos do uso do GeoGebra como apoio para a Metodologia de Resolução de Problemas.

A coleta dos dados foi feita a partir de uma intervenção pedagógica, seguindo os pressupostos da investigação matemática.

### 3.2 O ambiente e os participantes da pesquisa

A pesquisa, em seu momento de estudo de caso, foi realizada em um colégio particular da cidade de Caldas Novas/GO com estudantes da 3ª série do Ensino Médio. Inicialmente, era previsto o trabalho com 30 (trinta) alunos, no entanto, apenas 20 (vinte)<sup>5</sup> participaram efetivamente do trabalho desenvolvido.

Na biblioteca da instituição foram disponibilizados livros e materiais de apoio, como régua, compasso e transferidor. Ademais, a bibliotecária colaborou com a confecção dos polígonos e sólidos que seriam utilizados nas atividades das sequências didáticas. Cabe destacar que tais materiais foram construídos a partir de EVA, cola quente e papelão. Para realização e/ou aplicação da pesquisa foram utilizados:

- a) livro didático adotado pela instituição;
- b) computadores do laboratório de informática;
- c) acesso à internet;
- d) quadra de esporte;
- e) lousa digital;
- f) *datashow*.

---

<sup>5</sup> Essa redução se deu porque 10 (dez) alunos foram aprovados no vestibular. Como o colégio trabalha com a carga horária satisfatória para a conclusão do Ensino Médio, esses alunos entraram com mandado de segurança, fizeram a Reclassificação (prova feita pelo colégio aos alunos que pretendem obter a conclusão do Ensino Médio, quando impetrada judicialmente), conseguiram nota suficiente nesta prova e ingressaram nas universidades. Por conseguinte, infelizmente, deixaram de fazer parte do projeto pesquisa.



Ao valer-se da quadra de esporte, foi aplicada a ideia de figuras planas que podem ser inscritas a partir do círculo central e dos semiarcos dessa quadra. E como as salas de aulas contaram com recursos de multimídias, algumas atividades foram desenvolvidas com o uso de quadro e giz, repassadas depois para o *datashow*, no qual foi usado o *software* GeoGebra para confrontar os resultados obtidos.

As aplicações da pesquisa tiveram diferentes horários, submetidas:

- a) às segundas-feiras, das 14h às 14h45, no total de 2 (dois) encontros, aulas ofertadas pela coordenação ao próprio pesquisador, que abriu mão de continuar com os conteúdos programáticos para sanar dúvidas das situações-problema da pesquisa;
- b) às quartas-feiras e quintas-feiras, das 7h50 min às 9h15 min, sendo essas aulas cedidas pelos professores, no total de três encontros;
- c) às sextas-feiras, das 14h às 17h, no total de três encontros, como planejados pelo pesquisador;

O laboratório de informática foi utilizado para o desenvolvimento de uma parte das sequências didáticas e, nesse momento, contou-se com a ajuda do profissional responsável pela manutenção e instalação de recursos audiovisuais. O referido espaço contava com 20 (vinte) computadores, onde foram disponibilizados para a pesquisa, previamente instalados, o *software GeoGebra 6 Classic*, a lousa digital e o *datashow*.

Os participantes da pesquisa foram, inicialmente, convidados a participarem das atividades no contra turno das aulas. Na construção das sequências didáticas e na rotina de aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), houve uma mobilização de alguns profissionais do colégio, como bibliotecária e professores de Física, História, Biologia, Informática, Química, Filosofia e Sociologia, para colaborar no desenvolvimento das atividades propostas. Esse apoio foi bastante válido, mesmo sendo apenas como suporte e não com atividades interdisciplinares, pois eles já tinham certa experiência com aplicação de projetos, dando, prontamente, sugestões e auxiliando no cumprimento das atividades. Alguns desses professores vieram até mesmo fora do horário de trabalho, para que pudessem ajudar o professor-pesquisador a orientar os alunos quanto à construção e dinâmica dos problemas propostos.

Vale destacar que a escolha dessa turma foi baseada no seguinte aspecto: os alunos que fazem parte dessa instituição de ensino concluem todo o conteúdo programático na 2ª série do Ensino Médio, ficando apenas a 3ª série como revisão e preparação para os

vestibulares. Acreditava-se que esses alunos deveriam ter noções básicas de figuras planas e sólidos geométricos.

### 3.3 As sequências didáticas

Nesta seção são apresentadas três sequências didáticas que foram desenvolvidas, na ordem sugerida, e serviram para explorar o tema de inscrição e circunscrição de sólidos em aulas de matemática da 3ª série do Ensino Médio.

Para esta pesquisa, adota-se como sequência didática, a definição de Rojo e Cordeiro (2010), que afirmam que:

Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito. [...] Quando nos comunicamos, adaptamo-nos à situação de comunicação. [...] Os textos escritos ou orais que produzimos diferenciam-se uns dos outros e isso porque são produzidos em condições diferentes. (ROJO; CORDEIRO, 2010, p. 97)

Nessa mesma perspectiva, Zabala (1998), usa o termo “Sequências Didáticas” como sendo “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18).

Assim, as atividades relacionadas na sequência didática, apesar de toda categorização e sistematização, possuem objetivos claros e específicos e devem ser bem planejadas, aplicadas e avaliadas de modo que, conforme Carvalho (2009, p. 18), permitam aos alunos “a resolverem os problemas e questões que lhe são colocadas, agindo sobre os objetos oferecidos e estabelecendo relações entre o que fazer e como o reagir diante dos problemas”.

Uma sequência didática pode ser composta por várias atividades interligadas, no caso da pesquisa em questão, optou-se por trazer a inscrição de polígonos regulares, noções básicas de sólidos geométricos e a inscrição desses sólidos, respectivamente.

Conforme Zabala (1998), não poderia deixar de colocar nas sequências, questionamentos, atitudes, procedimentos e ações que os alunos executaram com a mediação do professor.

No que tange às atividades das sequências, elas são foram ordenadas de maneira a aprofundar o tema estudado e foram variadas em termos de estratégia: leituras, aulas dialogadas e discutidas, simulações computacionais, experimentos, confecções de materiais,

etc. Assim, durante as aulas, o assunto foi tratado num conjunto de apresentações, de modo que o aluno se aprofundasse e se apropriasse dos temas desenvolvidos.

As três sequências didáticas, construídas a partir da revisão bibliográfica realizada, podem servir como material de apoio para professores de Matemática que desejam trabalhar a inscrição tanto de polígonos regulares quanto dos sólidos geométricos.

### 3.3.1 Sequência didática 1: inscrição e circunscrição de polígonos regulares

A primeira sequência didática pode ser dividida em quatro aulas de 50 minutos, trabalhadas no laboratório de informática da instituição, na quadra de esporte e em sala de aula com ajuda dos recursos de multimídias. Para dar início a essas aulas, sugere-se que passe pelas seguintes etapas:

- a) o “Questionário e Perfil do Participante”, que se encontra no Apêndice C, para ser respondido em casa;
- b) a “Atividade Diagnóstica”, constante no Apêndice D, dentro de sala de aula, numa aula de 50 minutos, após colhidas as informações do Questionário e Perfil do Participante. Nela, observa-se a exploração de alguns itens, que dão norte às atividades, como: cálculo do volume de prismas, cilindros, cones e esferas; comparação de volume de diferentes sólidos geométricos; domínio da inscrição e circunscrição de cilindros, cone, prismas e esferas;
- c) apresentação do GeoGebra aos alunos, como suporte da apostila<sup>6</sup> “Software GeoGebra e alguns de seus comandos”. Nessa apostila, encontram-se instruções para a construção de figuras planas e espaciais e gráficos de funções, bem como suas características e particularidades. Este momento pode ser enriquecido com a criação de tutoriais das ferramentas envolvidas nas aulas a serem vivenciadas;
- d) conteúdos que serão explorados nos problemas propostos dessas aulas, como: reconhecer ângulos; classificar tipos de polígonos a partir de seus elementos; calcular áreas de figuras planas; definir inscrição de polígonos; inscrever e circunscrever polígonos;
- e) os questionários constantes nos Apêndices F e G podem ser construídos e disponibilizados no *Google* Formulários. Tais questionários trazem a avaliação do

---

<sup>6</sup> Promovida pelos alunos da Universidade Federal de Santa Maria e pode ser encontrada através do endereço eletrônico <[www.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila\\_GeoGebra.pdf](http://www.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/GeoGebra/Apostila_GeoGebra.pdf)>. Acesso em: 20 mar. 2020.

professor e a avaliação dos alunos para as próximas sequências de modo que os alunos possam responder se assimilou ou não os conteúdos explanados e sugestões para que o professor quanto à aprendizagem.

Para apresentar a aplicação e relevância da primeira sequência didática, um dos problemas que pode ser trabalhado e feito pelo professor-pesquisador, quando se refere ao ensino de inscrição e circunscrição de polígonos regulares, é:

*“Leia o seguinte texto:*

*Por volta do século III a.C., Arquimedes – o mais famoso matemático da Antiguidade, que viveu e morreu em Siracusa, na Grécia - também procurou calcular a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.*

*Começando com um hexágono regular, Arquimedes calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados.*

*Calculando o perímetro desse polígono de 96 lados, conseguiu para  $\pi$  um valor entre  $3 \frac{10}{71}$  e  $3 \frac{10}{70}$ . Ou seja, para Arquimedes  $\pi$  era um número entre 3,1408 e 3,1428.*

*Com um polígono de 720 lados inscrito numa circunferência de 60 unidades de raio, Ptolomeu, que viveu em Alexandria, no Egito, por volta do século III d.C., conseguiu calcular o valor de  $\pi$  como sendo  $\frac{377}{120}$ , que é aproximadamente igual a 3,1416, uma aproximação ainda melhor que a de Arquimedes.*

*O fascínio pelo cálculo do valor exato de  $\pi$  também tomou conta dos chineses. No século III d.C., Liu Hui, um copiadador de livros, conseguiu obter o valor 3,14159 com um polígono de 3 072 lados.*

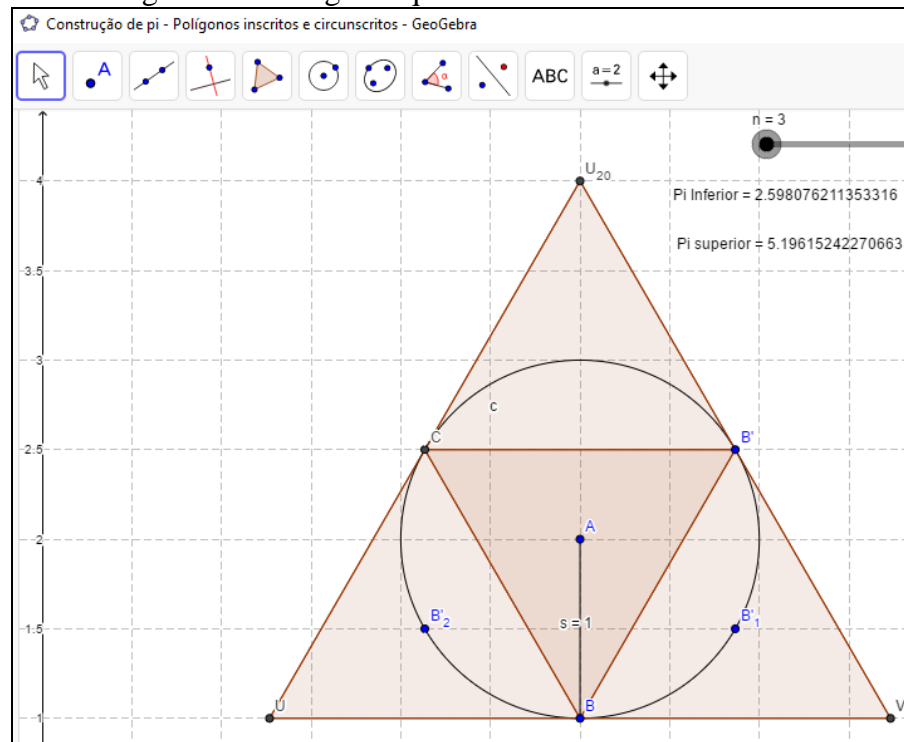
*Mas no fim do século V, o matemático Tsu Ch'ung-chih foi mais longe ainda: encontrou como valor de  $\pi$  um número entre 3,1415926 e 3,1415927. (NÚCLEO DE ESTUDOS PROFESSOR STEVAN, 2019, p. 78).*

*De acordo com o texto apresentado desenvolva, no GeoGebra, algumas aproximações para o número  $\pi$  ( $\pi$ ) a partir da inscrição e circunscrição de polígonos regulares, usando o método de Arquimedes, começando, neste caso, com o triângulo equilátero”.*

As Figuras 1, 2 e 3 ilustram alguns dos polígonos regulares que podem ser feitos no GeoGebra como aproximações do número pedido a partir das sugestões dadas no final de cada uma delas. Nelas, notam-se uma circunferência de raio 1 cm e o polígono que a inscreve, os pontos da circunferência que tangenciam o polígono circunscrito, o apótema e, na parte superior, o intervalo para o valor do número  $\pi$  ( $\pi$ ).

A Figura 1 relaciona-se ao triângulo equilátero inscrito e circunscritos à circunferência de raio 1 cm.

Figura 1 – Triângulo equilátero inscrito e circunscrito.



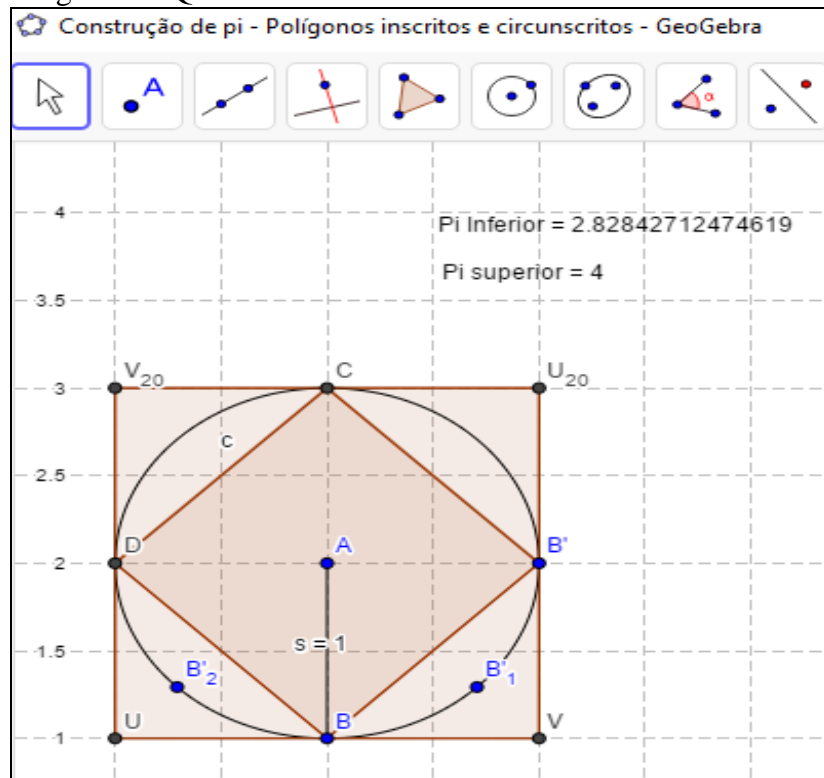
Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Na construção da Figura 1, pode-se explorar os seguintes assuntos:

- o baricentro (ponto de encontro das medianas de um triângulo);
- a proporção 2 para 1 do baricentro a um dos vértices do triângulo;
- altura do triângulo equilátero;
- relação entre os lados dos triângulos formados com o raio da circunferência;
- relação do raio da circunferência com o apótema;
- razão entre o perímetro dos triângulos com o comprimento da circunferência;
- intervalo para as aproximações do número  $\pi$  (pi) para o polígono de três lados.
- 

Na Figura 2 é apresentada a inscrição e circunscricão do quadrado na circunferência de raio 1 cm.

Figura 2 – Quadrado inscrito e circunscrito na circunferência.



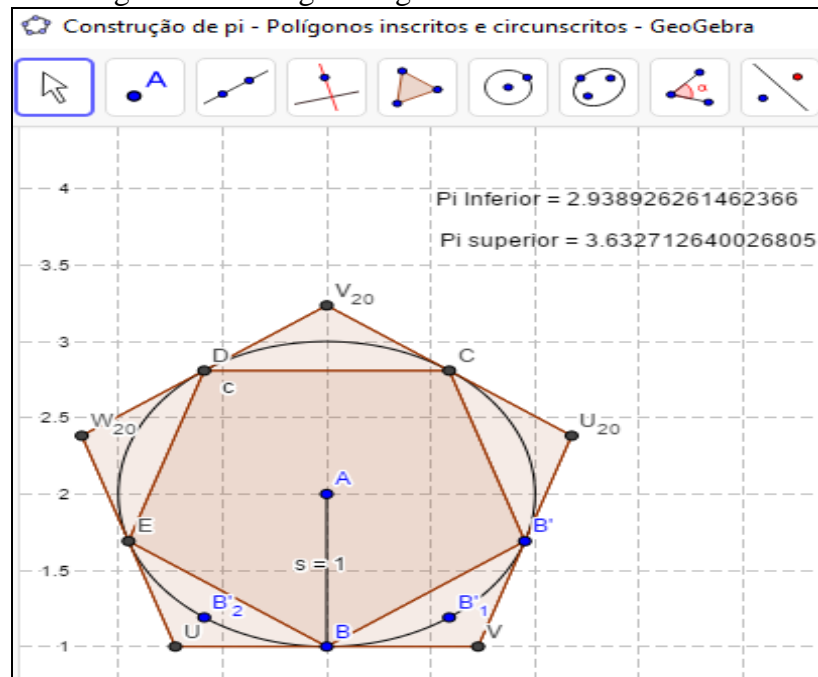
Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Ao trabalhar a construção da Figura 2, podem ser arrolados os seguintes assuntos:

- a diagonal do quadrado;
- o apótema do quadrado inscrito e circunscrito na circunferência de raio 1 cm;
- razão entre os lados dos quadrados com o raio da circunferência;
- relação do apótema com o raio da circunferência;
- diferença entre as áreas do quadrado inscrito e circunscrito na circunferência de raio 1 cm;
- razão entre os perímetros dos quadrados com o da circunferência;
- variação do número  $\pi$  (pi) para o caso do polígono de quatro lados.

A Figura 3 refere-se ao pentágono regular inscrito e circunscrito na circunferência bem como as aproximações o número desejado, ou seja, o número  $\pi$  (pi).

Figura 3 – Pentágono regular inscrito e circunscrito.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Em relação à Figura 3, ao se trabalhar a sua construção, pode-se trazer os seguintes assuntos:

- ângulo central, nesse caso dado por  $360^\circ/n$ , onde  $n$  é o número de lados do polígono dado;
- número de diagonais que passam pelo centro de um polígono regular de  $n$  lados, em que se  $n$  for par, passam  $n/2$  diagonais pelo centro, e, se  $n$  for ímpar, nenhuma diagonal;
- apótema do pentágono inscrito e circunscrito na circunferência de raio 1 cm;
- formação de triângulos isósceles (criados unindo os vértices do polígono com o centro da circunferência) e o uso de suas propriedades feitas;
- tabela trigonométrica para obter, a partir da Lei do Seno ou Cosseno, a relação entre o lado do polígono e o raio da circunferência;
- relação entre o apótema do pentágono e o raio da circunferência;
- razão entre os perímetros dos pentágonos com o da circunferência;
- intervalo para a aproximação do o número  $\pi$  (pi) a partir de pentágonos regulares.

Dessa forma, para esse problema pode-se fazer generalizações de inscrição e circunscção de polígonos regulares de  $n$  lados, onde deve ser observado em cada etapa o cálculo da relação entre o apótema, lado e perímetro do polígono regular com o raio e o

perímetro da circunferência. E ainda, com a ajuda do GeoGebra, confirmar os resultados obtidos, ou seja, na oportunidade, o professor mediador deve apresentar outros polígonos regulares para que os alunos façam essas associações.

É importante ressaltar as noções básicas de geometria bem como o uso do GeoGebra na resolução e visualização. Outros aspectos que devem ser observados, no que tange a avaliação de aprendizagem dessa sequência, são os conceitos básicos de geometria plana, principalmente no que referem à inscrição e circunscrição de polígonos regulares, como eles são construídos, classificados e definidos.

Para finalizar a primeira sequência didática, por meio dos questionários e atividades, verifica-se se foram bem assimilados os conteúdos que envolveram áreas de figuras planas e a inscrição de polígonos. Satisfeitas essas observações, pode-se prosseguir para a sequência seguinte.

### 3.3.2 Sequência didática 2: explorando sólidos geométricos

Esta seção explora a construção de sólidos geométricos, a qual pode ser trabalhada em seis aulas. A atividade referente a essa sequência encontra-se no Apêndice K. Nela, o professor pode enfatizar o uso do GeoGebra para proporcionar melhor visualização e manipulação dos sólidos envolvidos. O ambiente para a execução das atividades ocorre em dois momentos: na sala de aula e no laboratório de informática, separando os alunos em pequenos grupos.

Essa sequência tem como conteúdos, em suas respectivas aulas:

- a) aulas 1 e 2: exemplos de como a geometria espacial aparece no mundo e construção, por meio do GeoGebra, das figuras envolvidas;
- b) aulas 3 e 4: comparação de poliedros, como prismas, com suas respectivas imagens;
- c) aulas 5 e 6: sólidos que representam corpos redondos e sua construção no GeoGebra.

Uma proposta de problema elaborada pelo professor-pesquisador, que pode ser trabalhada nessa segunda sequência didática, é:

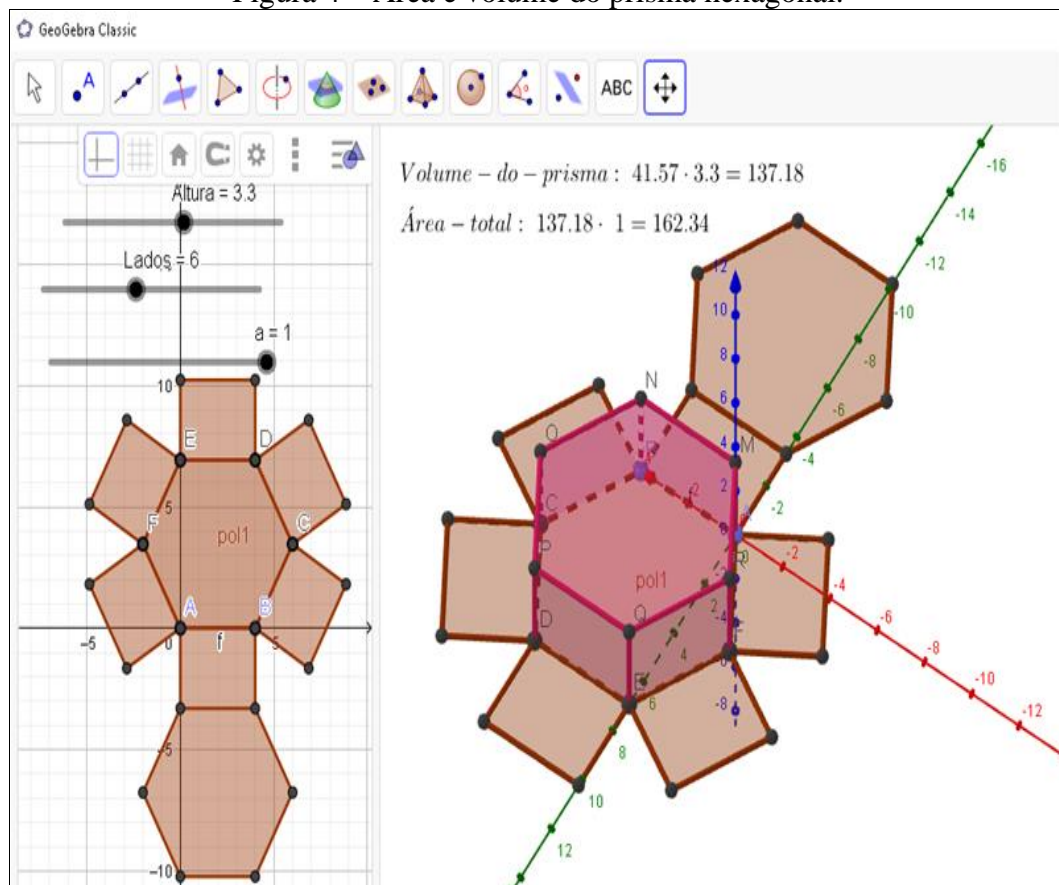
*“Construa, no GeoGebra, prismas regulares retos de base  $n$  lados. E a partir da variação do número de lados e altura desses prismas:*



- relacione o número de vértice, face e aresta;
- calcule a soma dos ângulos internos das faces;
- faça a planificação;
- determine o cálculo da: área lateral, base e total;
- obtenha o volume de cada um deles”.

As Figuras 4 e 5 ilustram o cálculo da área e do volume de alguns prismas que podem ser formados. A Figura 4 mostra um prisma de base hexagonal e sua planificação.

Figura 4 – Área e volume do prisma hexagonal.

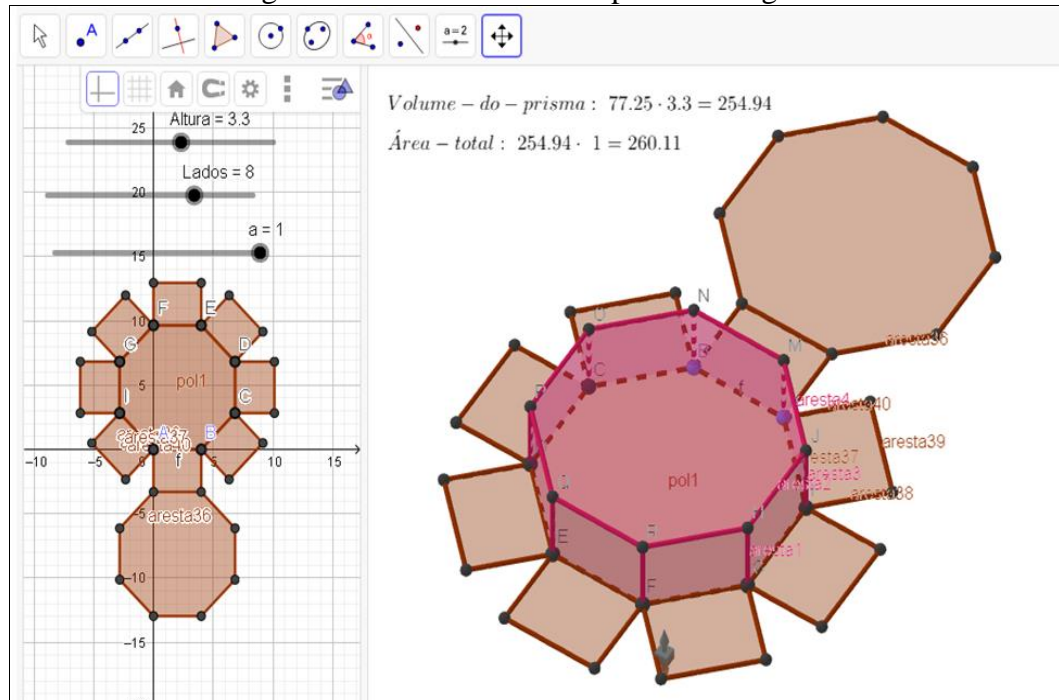


Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Nota-se, na Figura 4, o cálculo da área total e do volume, e, ainda, pode-se inferir a definição de um prisma reto de base  $n$  lados, onde há  $n$  faces laterais retangulares cujas bases são paralelas e congruentes. E no prisma hexagonal regular em questão, a partir do centro, a sua base pode ser dividida em seis triângulos equiláteros congruentes.

Na Figura 5, tem-se a representação da planificação, do volume e da área do prisma octogonal, bem como seus respectivos valores. Lembrando que essas imagens ajudam a visualizar e a entender o que cada prisma representa.

Figura 5 – Área e volume do prisma octogonal.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Para o cálculo da área total da Figura 5, é necessário lembrar que há oito faces retangulares e duas bases octogonais congruentes. A área da base pode ser calculada, a partir do centro, dividindo-a em oito triângulos isósceles cujos dois lados, que são congruentes, foram obtidos a partir dos segmentos de retas que partem do centro e interceptam os vértices da base octogonal. E para se obter esses lados, pode-se dividir o ângulo central em oito partes iguais, e tomando a Lei do Cosseno, calculam-se os lados.

Partindo da construção, no GeoGebra, dos poliedros convexos, como os prismas, pode-se pedir para que os alunos:

- verifiquem a relação entre o número de vértice ( $V$ ), face ( $F$ ) e aresta ( $A$ ) desses poliedros, ou seja, devem obter a Relação de Euler, dada por:

$V + F = A + 2$ , onde  $A = L/2$  e  $L$  é o número total de lados que compõe as faces dos poliedros convexos;

- planifiquem os poliedros e identifiquem a soma dos ângulos internos de cada polígono, dada por:

$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , onde  $S_i$  é a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados;

- c) calculem a soma dos ângulos internos das faces, conhecida por:

$S_{if} = (V-2) \cdot 360^\circ$ , onde  $V$  é o número de vértice do poliedro convexo e  $S_{if}$  é soma dos ângulos internos das faces do poliedro convexo.

### 3.3.3 Sequência didática 3: inscrição e circunscrição de sólidos geométricos

A terceira sequência didática pode ser dividida em sete aulas de 50 minutos, aplicadas em sala de aula e no laboratório de informática. O professor pode trazer questionamentos e considerações para a aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas, bem como o auxílio no desenvolvimento dos problemas, feitos no GeoGebra, que se encontram no Apêndice J. Essa sequência, tem por objetivos:

- aulas 1 e 2: relacionar o volume de sólidos e circunscritos;
- aulas 3 e 4: verificar a semelhança de polígonos; discutir a Princípio de Cavalieri e os pontos médios dos lados dos poliedros regulares;
- aulas 5, 6 e 7: desenvolver, através das funções quadráticas, o cálculo do valor máximo ou mínimo do volume do cilindro inscrito no cone; relembrar conceitos de paralelismo e perpendicularismo.

Um problema que pode ser trabalhado, elaborado pelo professor-pesquisador, nessa sequência didática é:

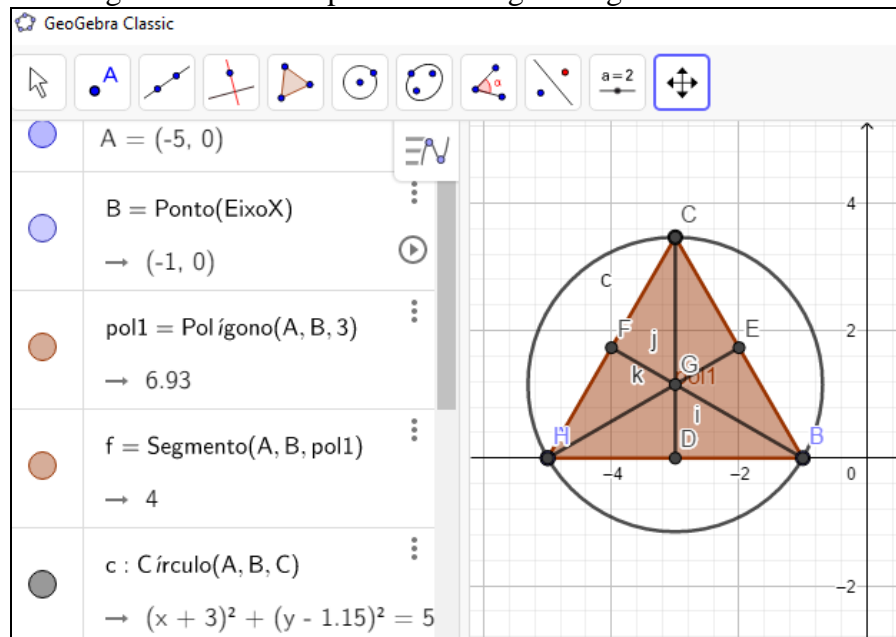
*“As pirâmides fazem parte da história da humanidade. Elas, até nos dias de hoje, aguçam a curiosidade de alguns místicos para explicar os fenômenos relacionados do Universo. Sabendo que pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal e as faces são regiões triangulares. Uma pirâmide se diz regular quando sua base for um polígono regular e for reta (projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base).*

*Admitindo essa definição, a partir dos pontos médios da pirâmide triangular regular, determine outra pirâmide triangular regular e associe seu volume com a primeira usando o Princípio de Cavalieri.”*

Para iniciar a discussão do problema, faz-se necessário ressaltar os tópicos trabalhados na primeira sequência didática.

A Figura 6 representa um triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Figura 6 – Base da pirâmide triangular regular circunscrita.

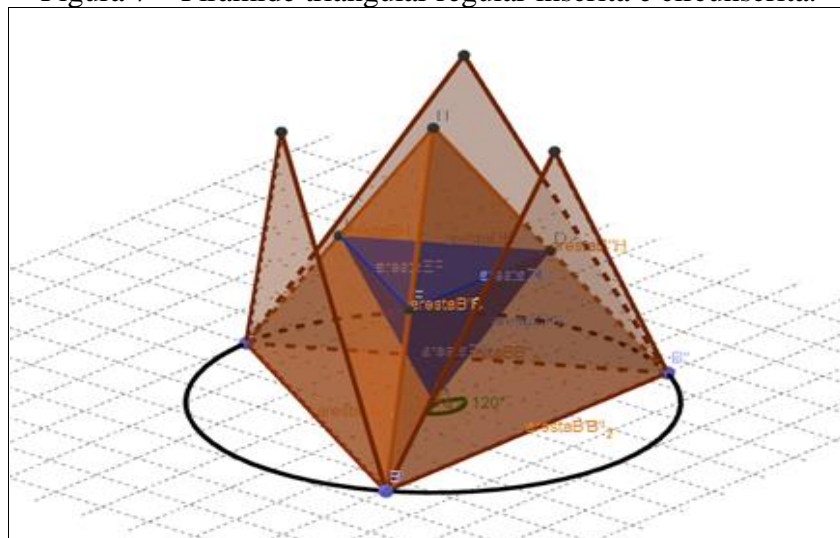


Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Vale lembrar que na Figura 6 foi marcado o ponto G, que representa o ponto de encontro dos segmentos de retas que partiram de cada vértice do triângulo e dividiram o lado oposto desse triângulo em duas partes congruentes, ou seja, o ponto de encontro das medianas.

A Figura 7 mostra a pirâmide triangular regular inscrita e a circunferência que a envolve.

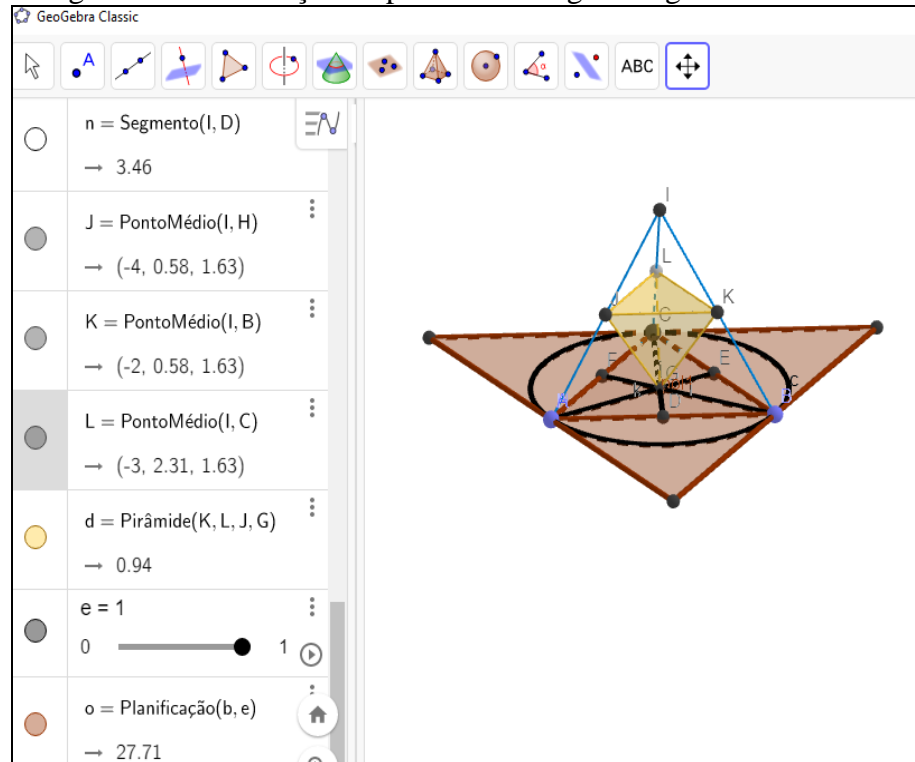
Figura 7 – Pirâmide triangular regular inscrita e circunscrita.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

A Figura 8 representa a planificação da pirâmide circunscrita.

Figura 8 – Planificação da pirâmide triangular regular circunscrita.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Na Figura 8, observa-se que ao prolongar os segmentos de retas que passam por cada vértice do triângulo equilátero inscrito na circunferência, o ponto de encontro desses prolongamentos será a planificação do tetraedro regular circunscrito. E ainda, a planificação desse sólido representa o triângulo equilátero circunscrito na mesma circunferência.

*Possibilidade de solução, associando os dois sólidos formados:*

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as áreas,  $V_1$  e  $V_2$  os volumes, e  $L$  e  $L/2$  os lados, do tetraedro regular circunscrito e inscrito, respectivamente.

Como  $A_2$  foi formado a partir dos pontos médios de  $A_1$ , tem-se que, pelo Princípio de Cavalieri:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{L}{L/2}\right)^2$$

Resolvendo a equação, obtém-se que  $A_1 = 4 \cdot A_2$ ;

Pelo mesmo princípio, tem-se

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{L}{L/2}\right)^3$$

Logo,  $V_1 = 8.V_2$ .

Vale salientar que, para cada inscrição desses sólidos, é necessário que traga: a sua definição e particularidades e um tutorial para que o professor e participantes se orientem frente à construção dessas inscrições.

Destaca-se ainda que, nessa sequência didática, o professor poderá avaliar por meio do questionário que se encontra no Apêndice I, a capacidade que os alunos têm de relacionar diferentes sólidos inscritos usando como ferramenta o GeoGebra e a Metodologia de Resolução de Problemas.

Ressalta-se que, os caminhos levantados e supracitados foram fundamentais para análise de dados que são comentados no capítulo seguinte. Finalizadas as etapas da metodologia, segue-se para a análise de dados, onde estes dados foram construídos a partir de discussões, diálogos, imagens, gráficos e tabelas. Permitindo assim, o entendimento de como foram desenvolvidas e aplicadas as sequências didáticas que dirigiram essa pesquisa.

## 4 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo é apresentada a análise dos dados coletados a partir dos instrumentos, filmagens das atividades, fotografias, atividade diagnóstica e questionários, ao longo do desenvolvimento das sequências didáticas com os alunos da 3ª série do Ensino Médio, caracterizadas no capítulo anterior. Cabe ressaltar que, tal coleta foi realizada preservando a integridade, resguardando nomes e imagens dos participantes da pesquisa.

A análise destes dados ocorreu por meio do processo de categorização, definido segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 134), a “categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns”.

Neste capítulo encontra-se: o perfil dos participantes, onde foram levantados não só o gênero dos participantes, como também a rotina fora da sala de aula; análise descritiva da Atividade Diagnóstica, mostrando o percentual de erros e acertos dos alunos em cada questão; diálogos e discussões para dos principais problemas que envolveram cada sequência didática; e por fim, a avaliação do professor-pesquisador e dos alunos quanto a intervenção.

### 4.1 Perfil dos participantes

Em relação ao perfil dos participantes que fizeram parte dessa proposta de intervenção, foi feito um questionário, Apêndice C e, por meio dele, buscou-se conhecer, por exemplo, o gênero, as características relacionadas ao acesso à internet e as horas de estudos. Estas resumem o questionário, de modo que foram as demais questões foram suprimidas.

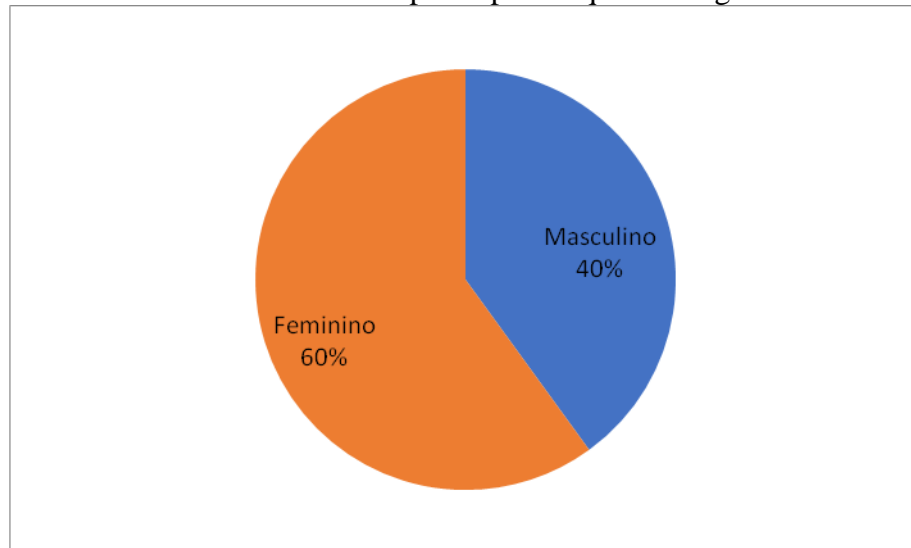
O Gráfico 1 relaciona-se ao gênero dos participantes e foi respondido por 20 (vinte) alunos. Esse gráfico foi feito a título de curiosidade do professor-pesquisador, já que, segundo a Revista Educação<sup>7</sup> publicada em outubro de 2015, ainda existe um grande preconceito em relação à participação das mulheres quando se refere às atividades desenvolvidas nas áreas de Ciências Exatas. Mesmo que elas, segundo a revista, sejam conhecidas por serem mais caprichosas, faltam-lhes créditos quando o assunto é a Ciências da Natureza. No entanto, na mesma reportagem, mostra que apesar de todas as pesquisas feitas a respeito do tema, não há uma justificativa plausível de que esse desempenho esteja ligado ao gênero ou que seja apenas

---

<sup>7</sup> A reportagem completa e discussões podem ser encontradas através do endereço eletrônico <<https://revistaeducacao.com.br/2015/10/06/explicar-diferencas-de-desempenho-de-genero-em-matematica>>. Acesso em: 20 mar. 2020.

fator social. Sendo assim, este gráfico ilustra apenas a quantidade de participantes de cada gênero, não tem interesse de provar que gênero é mais ou menos eficaz nas Ciências Exatas.

Gráfico 1 – Perfil dos participantes quanto ao gênero.

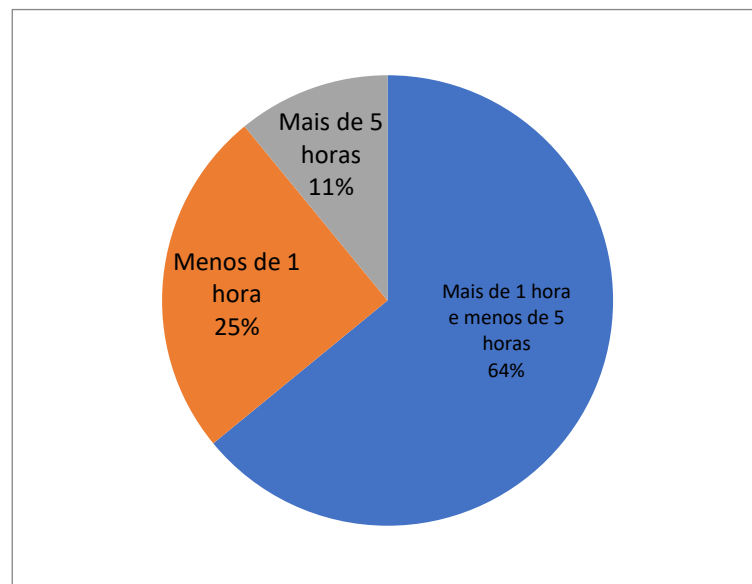


Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Dos 20 (vinte) alunos que responderam esse questionário, 8 (oito) eram do sexo masculino e 12 (doze) do sexo feminino. Em relação à intervenção do projeto de pesquisa, houve sim uma grande participação, interesse e bons desempenhos de ambos os sexos.

O Gráfico 2 retrata a quantidade de horas diárias que esses estudantes, frequentemente, acessam a internet, sejam por estudos, filmes, jogos, redes sociais, etc.

Gráfico 2 – Quantidade de horas diárias de acesso à internet.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

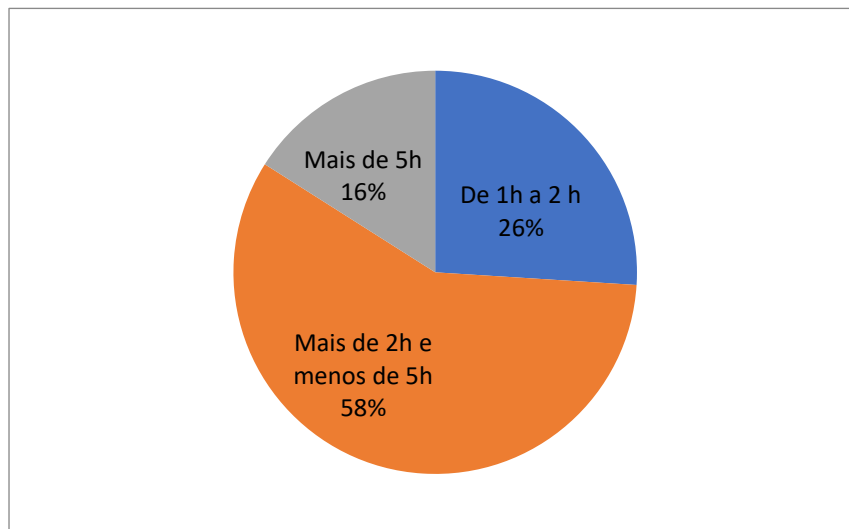


Pode-se inferir do Gráfico 2 que a maioria desses alunos (64%) acessam mais de uma hora e menos de cinco horas diárias. Por se tratar de um colégio particular e com um grande poder aquisitivo por parte desses alunos, o acesso à internet é comum entre eles. De posse desse resultado, o professor-pesquisador conseguiu colocar algumas atividades que seriam feitas em casa, com o auxílio da internet.

Esse número poderia ser maior, segundo os alunos, se não fosse o fato de que eles estão no colégio todas as manhãs, de segunda à sexta, e algumas tardes, nos dias de segundas, terças, quartas e sextas-feiras e contando também com quatro provas semanais e simulados, nos finais de semana.

Como eles ficam boa parte do tempo na instituição de ensino, o Gráfico 3 mostra a quantidade de horas diárias que esses estudantes ainda conseguem estudar fora do ambiente escolar.

Gráfico 3 – Tempo de estudo diário fora da sala de aula.

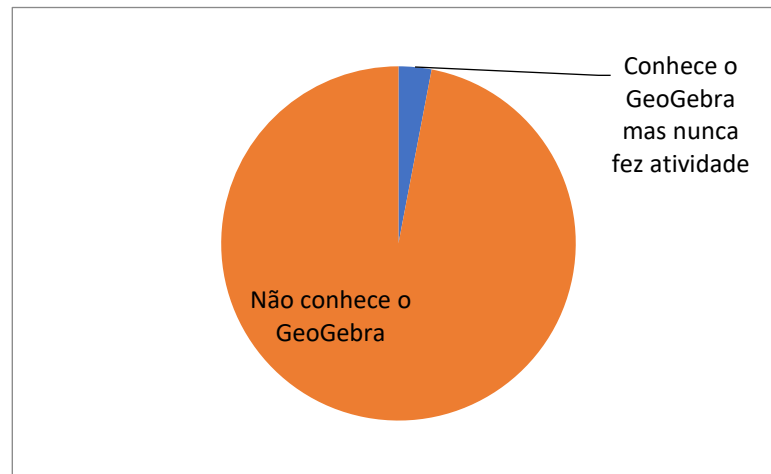


Fonte: Arquivo pessoal (2019).

O Gráfico 3 ilustra que a maior parte (58%) estuda mais de duas horas e menos de cinco horas diárias fora do colégio.

Como a pesquisa estava relacionada ao *software* GeoGebra, o Gráfico 4 representa o grau de conhecimento do *software*.

Gráfico 4 – Quanto ao conhecimento do GeoGebra.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Do gráfico 4, inferem-se algumas considerações:

- apenas um aluno respondeu que havia ouvido falar do GeoGebra, mas não sabia trabalhar com os seus comandos;
- desses que não conheciam, apontaram que tinham interesse em saber manipular o *software* uma vez que foi falado pelo professor-pesquisador a sua importância e relevância.

Nesse momento, o professor-pesquisador pode entender a importância que a pesquisa teria para esses alunos no que se referia aos meios tecnológicos utilizados pelos professores de matemática.

#### 4.2 Atividade diagnóstica

A Atividade Diagnóstica, constante no Apêndice D, foi realizada por vinte alunos na sala de aula, num período contínuo de 50 minutos, individualmente e sem consulta. Teve como objetivo diagnosticar se os estudantes possuíam: noções básicas de Geometria Plana e Espacial, bem como área e volume de alguns sólidos geométricos. A Quadro 1 representa a tabulação referentes aos erros e acertos dos exercícios da Atividade diagnóstica.

Quadro 1 – Relação de erros e acertos.

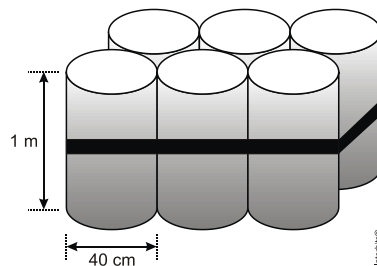
Problema	Percentual de erros	Percentual de acertos
1	40%	60%
2	45%	55%
3	20%	80%
4	25%	75%
5	10%	90%
6	85%	15%
7	80%	20%
8	45%	55%

Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Apesar dos alunos terem visto os conteúdos abordados nos problemas nos anos anteriores, eles apresentaram certas dificuldades, principalmente nas questões 6 e 7, que abordavam cones e esfera inscrita, cilindro circunscrito e razão de volume de sólidos geométricos, respectivamente. Ao fazer uma breve análise do Quadro 1, têm-se.

a) Observe as Questões 3, 4 e 5 da Atividade Diagnóstica:

3) (ENEM 2ª aplicação 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R\$ 2,50 por metro cúbico utilizado.

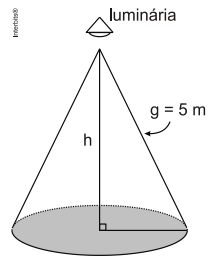


Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de

(considere  $\pi \cong 3$ )

- a) R\$ 86,40.
- b) R\$ 21,60.
- c) R\$ 8,64.
- d) R\$ 7,20.
- e) R\$ 1,80.

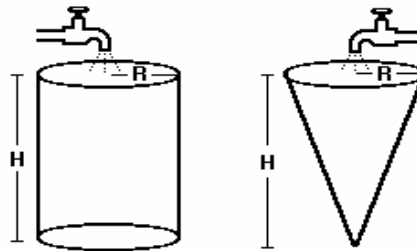
4) (ENEM 2ª aplicação 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de  $28,26\text{m}^2$ , considerando  $\pi \cong 3,14$ , a altura  $h$  será igual a

- a) 3 m.
- b) 4 m.
- c) 5 m.
- d) 9 m.
- e) 16 m.

5) (CESGRANRIO) No desenho a seguir, dois reservatórios de altura  $H$  e raio  $R$ , um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:



- a) 2 h
- b) 1 h e 30 min
- c) 1 h
- d) 50 min
- e) 30 min

Os alunos tiveram maior quantidade de acertos nessas questões, pois se tratou de conteúdos recorrentes pelo ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) porque muitos desses alunos vinham se preparando há meses para essas provas;

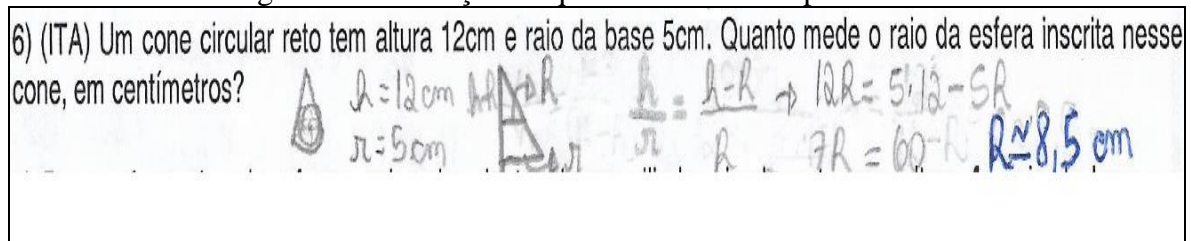
b) Observe a Questão 6 da Atividade Diagnóstica:

6) (ITA) Um cone circular reto tem altura 12cm e raio da base 5cm. Quanto mede o raio da esfera inscrita nesse cone, em centímetros?

Essa questão exigia dos alunos um pouco mais dos conhecimentos adquiridos em relação à inscrição de sólidos.

A Figura 9 ilustra uma situação particular da Questão 6, que pedia para ser calculado o raio da esfera inscrita no cone circular reto, onde a maioria dos alunos (85%) não conseguiu relacionar os raios dos sólidos envolvidos. Essa questão foi a que eles mais erraram, como pode ser verificado pelo Quadro 1.

Figura 9 – Resolução da questão 6 realizada por um aluno.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Apesar de ser um caso particular, os erros cometidos na questão 6, ver Figura 9, resumem o que muitos alunos cometeram. Assim, em relação a essa questão, nota-se que o aluno extraiu corretamente os dados do problema, no entanto, podem ser verificadas algumas falhas matemáticas no que diz respeito a resolução, como:

- colocar incorretamente um dos pontos de tangência, neste caso, o raio da esfera com a geratriz do cone, como se tivesse um cone ou cilindro inscrito, por exemplo;
- associar a mesma relação de semelhança de tronco de cone com a esfera inscrita no cone;
- visualizar de forma incorreta onde a esfera tangencia o cone;
- relacionar incorretamente a ideia de circunferência inscrita no triângulo isósceles.

Diante das dificuldades encontradas para inscrever e circunscrever sólidos geométricos na Atividade Diagnóstica, principalmente na questão 6, o professor-pesquisador buscou sanar as dúvidas encontradas, utilizando os comentários dessa questão na seção 4.5, o GeoGebra e argumentos da Metodologia de Resolução de Problemas.

Por se tratar de tópicos revisitados, eles se deram muito bem no que tange a interpretação dos exercícios, no entanto, nas demais questões, foi observado que eles apresentaram ainda muita dificuldade ao associar dois ou mais sólidos, ou seja, não se encontrava consolidada a aprendizagem no tocante à inscrição e circunscção de polígonos regulares e muito menos, sólidos geométricos.

#### 4.3 Atividade 1: inscrição e circunscrição de polígonos regulares

A sequência didática 1 foi desenvolvida em três ambientes do colégio, a saber: sala de aula, laboratório de multimídia e quadra esporte do colégio. A atividade central, trabalhada nessa sequência, constante no Apêndice E, abordou os conteúdos:

- a) polígonos: classificação e elementos;
- b) ângulos;
- c) áreas figuras planas;
- d) inscrição e circunscrição de polígonos.

Dentre os exercícios trabalhados nessas atividades, alguns merecem destaques, como o problema 5, elaborado pelo professor-pesquisador:

*“Sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas defendido por Polya (1995) explanada pelo professor-pesquisador e usando o GeoGebra como suporte para a solução, observe as embalagens de pizzas e considere apenas a parte superior das embalagens, suponha ainda que as pizzas sejam circulares e inscritas às embalagens formadas por polígonos regulares. Dessa forma, responda:*

- a) *Se a pizza for dividida em 4, 6 ou 8 pedaços iguais, qual o valor de cada ângulo central?*
- b) *Qual a relação do lado da embalagem com o raio da pizza inscrita?*
- c) *Qual o valor do apótema?*
- d) *Qual a área da parte superior de cada embalagem?”*

A ilustração de uma dessas embalagens é mostrada na Figura 10.

Figura 10 – Embalagem de pizza.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Para a solução desse problema, primeiro foi medido cada lado da embalagem da pizza e a partir do centro dessa embalagem, discutiu-se qual seria o valor do raio da pizza que caberia ali, lembrando que considerou apenas a região interna da embalagem.

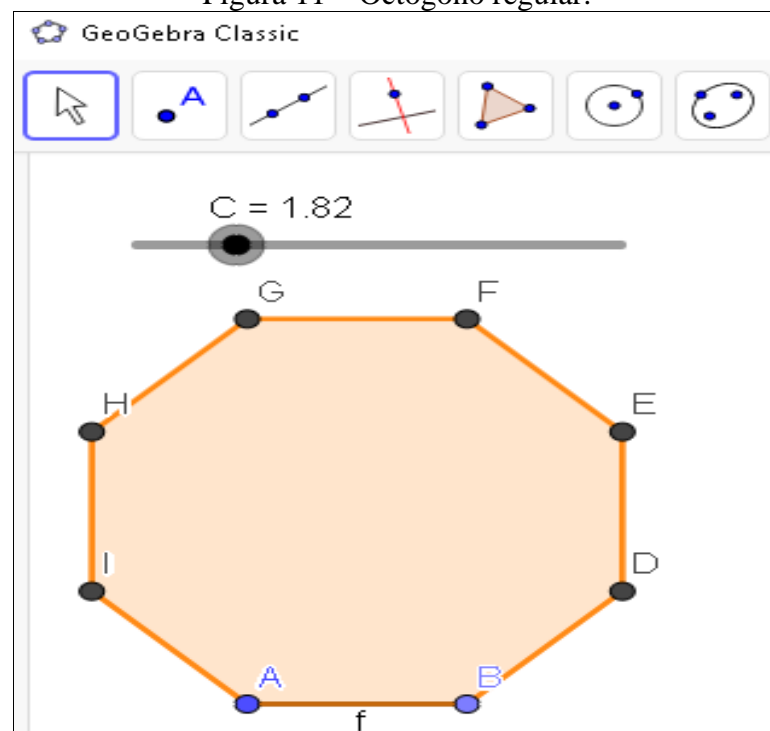
Ao manusear o GeoGebra, os alunos estavam com dificuldades de visualizar as reais medidas das embalagens, pois não conseguiam colocar na escala os valores. A fim de contornar essa situação, o professor-pesquisador lembrou-os de usar o Princípio de Cavalieri, que garante relacionar polígonos e sólidos semelhantes. Assim foram feitas as medidas dessas embalagens e, obedecidas as devidas proporções, os alunos usaram o GeoGebra.

As Figuras 11 e 12 representam parte da construção dessas embalagens de pizzas, no GeoGebra, feitas pelos alunos.

O tutorial<sup>8</sup> da supracitada construção, quando a embalagem de pizza possui 8 lados, segue descrito:

- 1) Crie, na **Caixa de texto**, o **Controle deslizante C** para o comprimento do lado do polígono regular, com **valor mínimo 1** e **máximo 5**, com **variação 0,01**;
- 2) No comando, **Segmento com Comprimento Fixo**, digite **C**;
- 3) Na opção **Polígono Regular**, digite **8 lados** com extremidade **C**;

Figura 11 – Octógono regular.

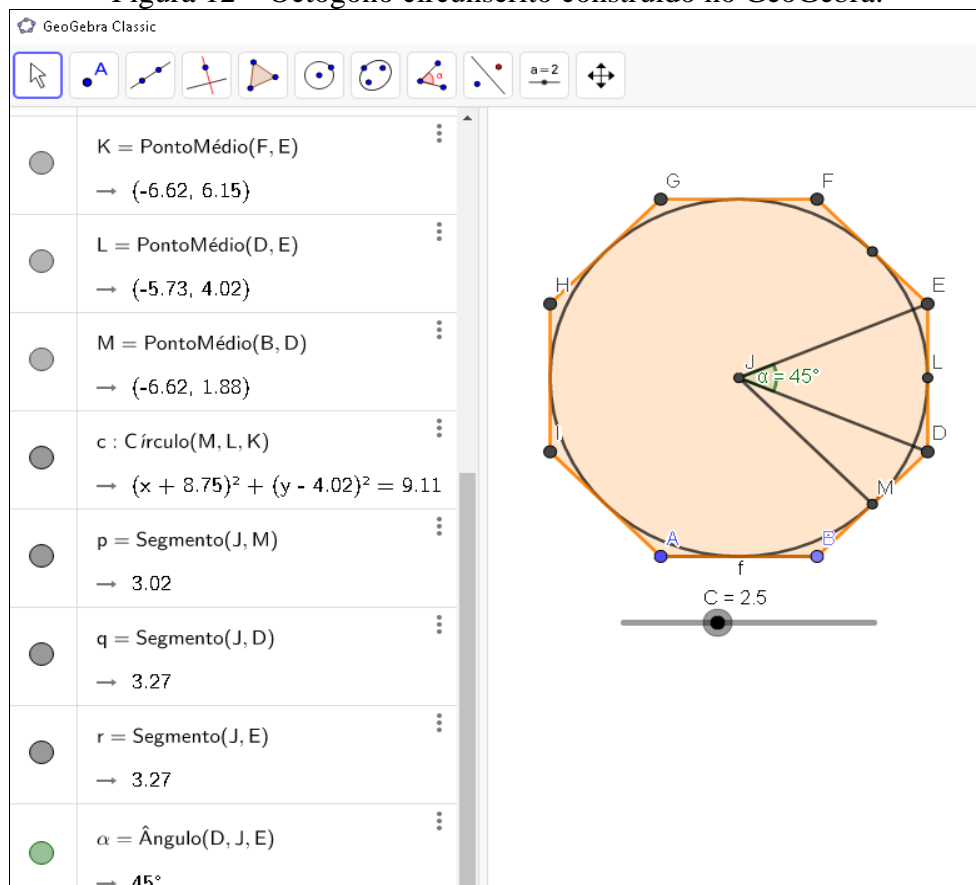


Fonte: Arquivo pessoal (2019).

<sup>8</sup> Para as marcações em negrito que se seguem nos tutoriais dessa pesquisa, são opções feitas pelos comandos no *GeoGebra Classic 6*.

- 4) No comando **Ponto Médio**, marque os pontos médios dos lados do polígono anterior e de uma de suas diagonais que passam pelo centro;
- 5) Com o comando **Circunferência formada por três pontos**, construa a circunferência inscrita no polígono a partir dos pontos médios anteriores;
- 6) Com o comando da opção **Ângulo**, determine o ângulo central do setor circular;
- 7) A partir do comando **Áreas**, determine a área do círculo e do polígono, bem como o apótema que relaciona os lados com o raio da circunferência.

Figura 12 – Octógono circunscrito construído no GeoGebra.



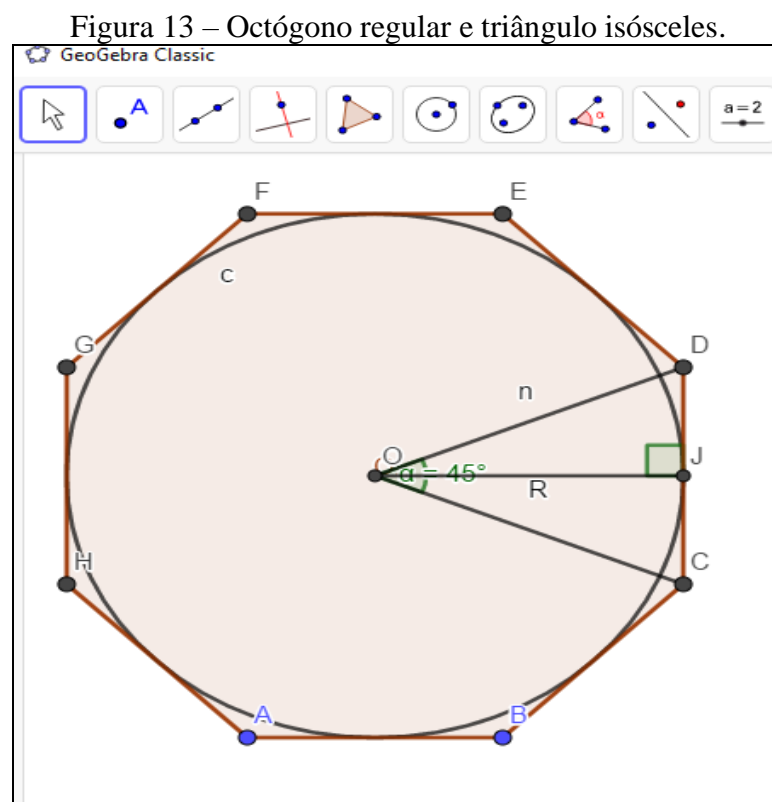
Fonte: Arquivo pessoal (2019).

A Figura 12 mostra o valor do ângulo central  $\alpha$ , o comprimento do lado  $C$ , o apótema  $p$ , e o raio  $p$  da circunferência inscrita no octógono regular, neste caso, coincide com o apótema. O segmento  $q$  representa o lado dos oitos triângulos isósceles que podem ser construídos a partir do ângulo central  $\alpha$ . Dentre os mais variados problemas que foram trabalhados na sequência didática 1, esse mereceu maior destaque, devido a sua complexidade.



O professor-pesquisador optou por aprofundar a discussão, a partir das soluções apresentadas pelos alunos, na referida questão, visto que se tratava de uma questão que exigia dos alunos, além do conhecimento dos lados do polígono circunscrito, o cálculo da área desse polígono e o raio da circunferência. Por conseguinte, os alunos se sentiam mais confortáveis para discutir e resolver os demais exercícios que se seguiam.

Dessa forma, sem apresentar os valores dos lados no GeoGebra, os alunos puderam descrever a imagem da caixa da pizza, Figura 13, e verificar uma possível solução para as perguntas que haviam sido feitas no início dessa questão.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

*Solução sugerida baseada a partir da Figura 13:*

*Sejam o ângulo central  $i = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$  e o  $\triangle CDO$  isósceles de base  $DC$ , considere que  $OD \equiv OC = n$  e  $CD = L$ . Assim, pela Lei do Cosseno, segue:*

$$L^2 = n^2 + n^2 - 2 \cdot n \cdot n \cdot \cos 45^\circ$$

Desenvolvendo esta equação, obtém-se:

$$n = L \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

E ainda, seja  $OJ = R$ , onde  $R$  representa o apótema do octógono regular e no  $\triangle COJ$ , pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$n^2 = R^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Visto que  $OJ$  é mediana e altura relativa à base  $DC$ , daí vem a relação do raio da circunferência inscrita com a embalagem de pizza octogonal,

$$R = L \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

Para obter a área  $At$  da parte superior em função do raio, basta observar que esta corresponde a oito triângulos isósceles congruentes ao  $\triangle CDO$ , de modo que:

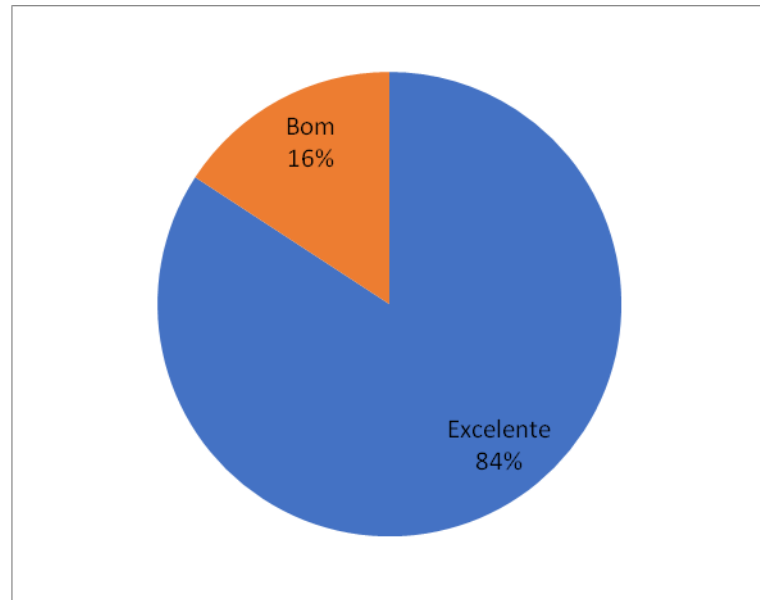
$$At = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = 4L^2(3 + 2\sqrt{2})$$

No final dessa sequência didática, foram disponibilizados questionários online, constantes nos Apêndices F e G. A dinâmica e interação, com as quais os problemas foram expostos e discutidos, apresentaram aceitação por todos os participantes.

Alguns alunos tiveram dificuldade para acompanhar a turma porque perderam as primeiras noções do uso do GeoGebra. Diante disso, o professor-pesquisador tomou os devidos cuidados e atenção para as sequências seguintes, de modo que todos pudessem interagir, participar e entender os comandos, sem deixá-los de fora desse momento de aprendizagem.

O Gráfico 5 aponta relevância das atividades desenvolvidas de inscrição e circunscrição de polígonos feitos nessa primeira sequência.

Gráfico 5 – Relevância das atividades.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Do Gráfico 5, apesar das opções constantes no Apêndice F a respeito dessa avaliação como, por exemplo, excelente, bom, regular ou péssimo, os alunos creditaram favorável às atividades feitas na primeira sequência didática.

#### 4.4 Atividade 2: explorando sólidos geométricos

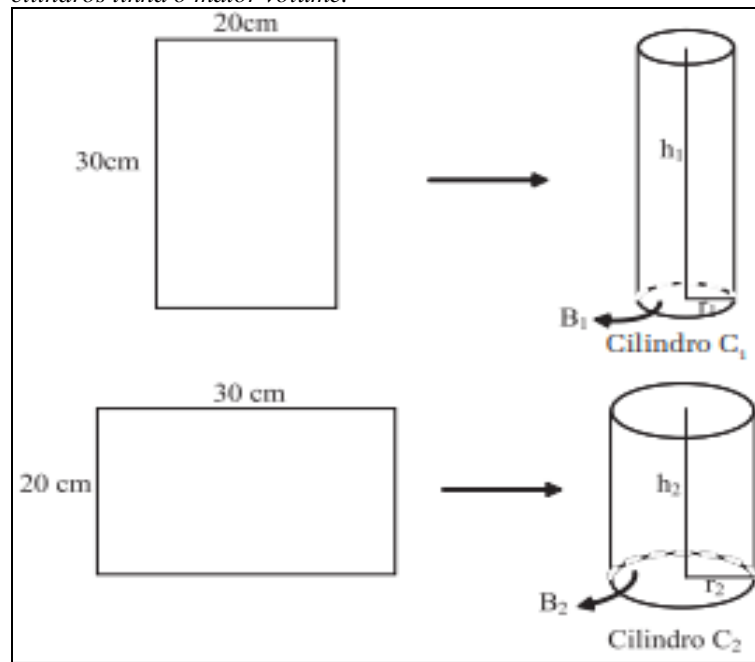
Na atividade 2 que integra a sequência didática 2, constante no Apêndice K, foram explorados os seguintes assuntos:

- a) Relação de Euler;
- b) prismas e pirâmides: planificação, área e volume;
- c) cilindro e cone: área e volume;
- d) comparação do volume de cilindros;
- e) esfera: volume.

A sequência foi feita no laboratório de informática e em sala de aula, com um total de seis aulas de 50 minutos. Os vinte alunos participantes dessa pesquisa responderam a essa atividade, individualmente, com a mediação do professor-pesquisador e de alguns professores do colégio.

Nessa atividade, destacou-se o problema 7. Problema baseado no livro *Pesquisa em Educação Matemática* de Onuchic (1999), que trazia a comparação de volume de cilindros a partir do raio e altura:

“A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.



Jorge disse: – No meu cabe mais, porque é mais alto.

Ema disse: – No meu cabe mais, porque é mais largo.

Laura disse: – Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.

Quem está certo? Como você sabe?” (ONUChIC, 1999, p. 71)

Para que pudessem entender melhor o problema e a forma de resolvê-lo, foram entregues duas folhas de papel sulfite para cada aluno e com essas folhas, eles construíram cilindros com raios e alturas diferentes.

Alguns questionamentos/ diálogos<sup>9</sup> para resolver o problema, como propõem Onuchic (1999) e Dante (2012), foram feitos pelo professor-pesquisador a fim de se obter a solução do problema proposto e respondido pelos alunos, conforme destacado no Quadro 2<sup>10</sup>:

<sup>9</sup> As respostas dadas aos questionamentos/diálogos que aparecem nessas sequências didáticas foram da turma em conjunto. Ora algum aluno específico, porém, optou-se de colocar aqui apenas as respostas que encaminhariam a solução, depois que toda a turma concordasse com a resposta sugerida pelo aluno. Algumas dessas respostas foram anotadas/ registradas nas listas que cada aluno possuía, outras foram as que o pesquisador lembrava que os alunos haviam respondido.

<sup>10</sup> O professor-pesquisador optou-se em fazer esse diálogo em forma de quadro porque a maior parte das respostas dadas pelos alunos estava ainda bastante dividida.

Quadro 2 – Perguntas e respostas para se resolver o problema.

<b>ALGUNS QUESTIONAMENTOS PARA RESOLVER O PROBLEMA</b>	
<b>Perguntas feitas professor-pesquisador</b>	<b>Respostas dadas pela turma</b>
Construa os cilindros pedidos. Apareceram cilindros de tamanhos diferentes?	<i>Disseram que sim, alguns cilindros são gordinhos outros finos.</i>
O que se pode afirmar em relação aos seus volumes?	<i>Alguns disseram que apresentam volumes iguais, já que se eram formados por folhas de papel sulfite de mesma área. Outros achavam que tinham volumes diferentes, porém, não tinham certeza em dizer quais deles tinham o maior volume.</i>
Qual o plano para saber qual deles apresenta o maior volume?	<i>Uns pediram para que pudessem resolver na lousa, outros sugeriram colocar pequenos objetos dentro deles e comparar.</i>

Fonte: Elaborado pelo professor-pesquisador (2019).

Lembrando que além dos questionários, alguns registros dessa intervenção, se deram a partir das discussões entre os participantes, com anotações no decorrer dessas interações e salvas em arquivos de multimídias.

Depois dos cilindros prontos tanto na folha de papel sulfite quanto no GeoGebra, Figura 14, foram feitas algumas considerações a respeito de qual deles apresentariam maior volume e que estratégias seriam adotadas para encontrar a solução.

Feita a construção dos cilindros pelos alunos, o professor-pesquisador sugeriu que os cilindros fossem colocados com a base apoiada sob a mesa e, ainda, que dessa forma, poderiam utilizar os termos que foram sugeridos pelo problema, como “cilindro alto” e “cilindro mais largo”. Assim, o professor-pesquisador solicitou que colocassem também o “cilindro maior” dentro do “cilindro mais largo” e pediu para que os estudantes depositassem pequenos materiais sólidos, tais como feijão, arroz ou milho, dentro do “cilindro mais alto” até enchê-lo completamente. Após essa etapa, os alunos retiraram, cuidadosamente, o “cilindro mais alto” de modo que todo o material fosse transferido para o outro cilindro. Dessa maneira, os alunos puderam observar que o “cilindro mais largo” tem maior volume, pois ao fazer essa ação, notaram que não o encheu por inteiro.

A Figura 14 mostra a participação de duas alunas para preenchimento dos cilindros com pipocas para comparar os volumes dos cilindros.

Figura 14 – Comparação volumétrica.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

Antes de partir para a construção dos cilindros no GeoGebra, o professor-pesquisador fez a seguinte observação:

*“Pela imagem do problema proposto, verifica-se as bases dos retângulos, formados pela folha de papel sulfite, 30 cm e 20 cm, coincidirão com os comprimentos das circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , que representam as bases dos “cilindros mais largo e mais alto”, respectivamente. Sendo assim, considere que para o cilindro de base 30 cm de perímetro, tem-se:*

$$C_1 = 2 \cdot \pi \cdot R = 30 \rightarrow R = \frac{15}{\pi}$$

*E para o cilindro de base 20 cm:*

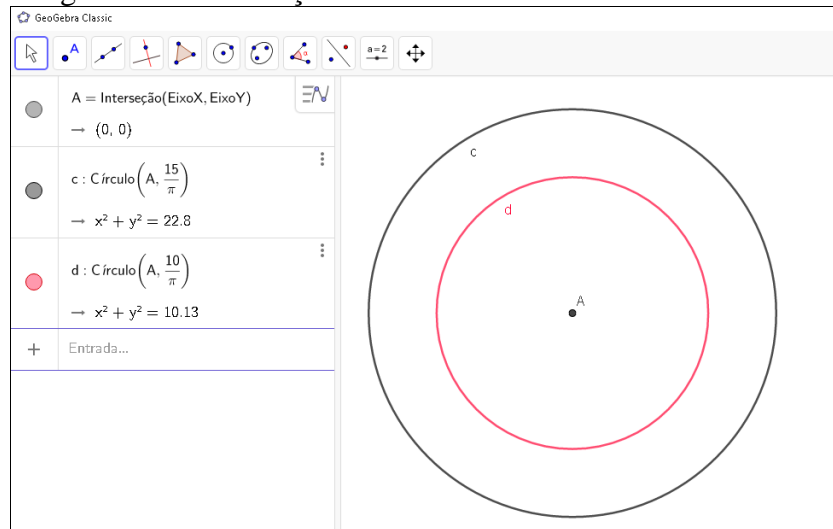
$$C_2 = 2 \cdot \pi \cdot r = 20 \rightarrow r = \frac{10}{\pi}$$

*Dessa maneira, pode-se lançar os valores dos raios encontrados no GeoGebra.”*

Para fazer a construção desses cilindros no GeoGebra, definiu-se o seguinte tutorial:

- 1) Na opção, **Círculo definido por centro e raio**, construa dois círculos de raios diferentes, **r** e **R**, de mesmo centro, Figura 15;

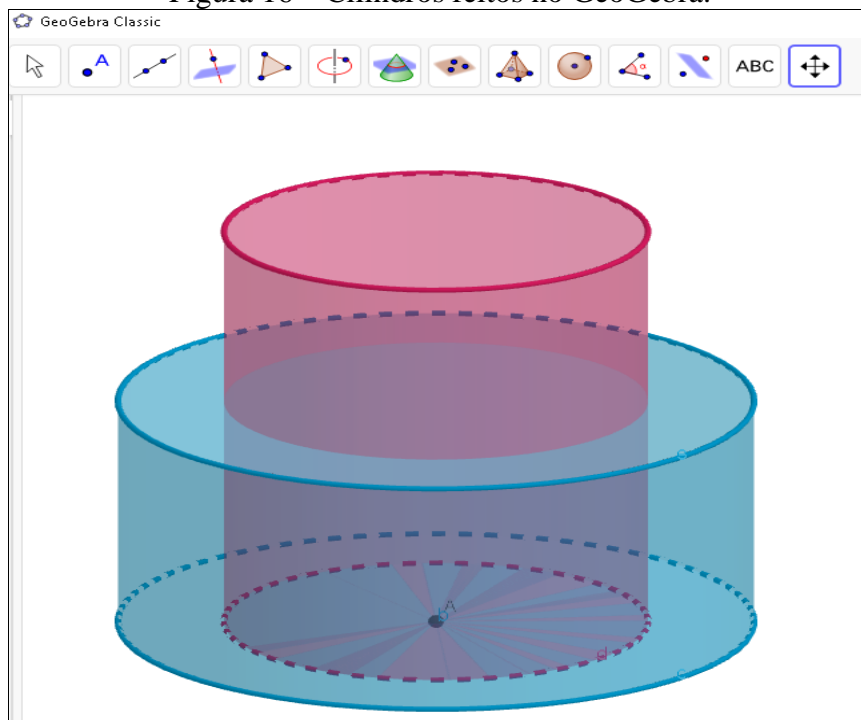
Figura 15 – Construção de duas circunferências concêntricas.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

- 2) Ainda na janela de visualização 2D, na opção **Controle deslizante**, faça as alturas **h** e **H**, de medidas variáveis, Figura 16;

Figura 16 – Cilindros feitos no GeoGebra.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

- 3) Abra a janela de visualização 3D, e vá ao comando **Cilindro Circular de Centro O** e alturas **h** e **H**, respectivamente, e construa os cilindros pedidos, dessa forma, verifique as variações dos volumes, na opção **Volume**, e perceba qual se apresentou maior.

A Figura 17 retrata os cálculos com os dados que o problema trazia.

Figura 17 – Cálculo dos cilindros feitos no

GeoGebra.

$A = \text{Interseção}(\text{EixoX}, \text{EixoY})$	$\rightarrow (0, 0)$
$c : \text{Círculo}\left(A, \frac{15}{\pi}\right)$	$\rightarrow x^2 + y^2 = 22.8$
$d : \text{Círculo}\left(A, \frac{10}{\pi}\right)$	$\rightarrow x^2 + y^2 = 10.13$
<b>H = 30</b>	0 <input type="range" value="30"/> 30
<b>h = 20</b>	0 <input type="range" value="20"/> 20
$f : \text{Cilindro}(d, H)$	$\rightarrow 954.93$
$a : \text{Cilindro}(c, h)$	$\rightarrow 1432.39$

Fonte: Acervo pessoal (2019).

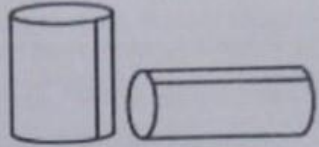
Depois de discutida a solução no GeoGebra, o professor-pesquisador pediu para que os alunos apresentassem a solução no papel. Uma das soluções apresentadas consta na Figura 18, que representa um caso particular.



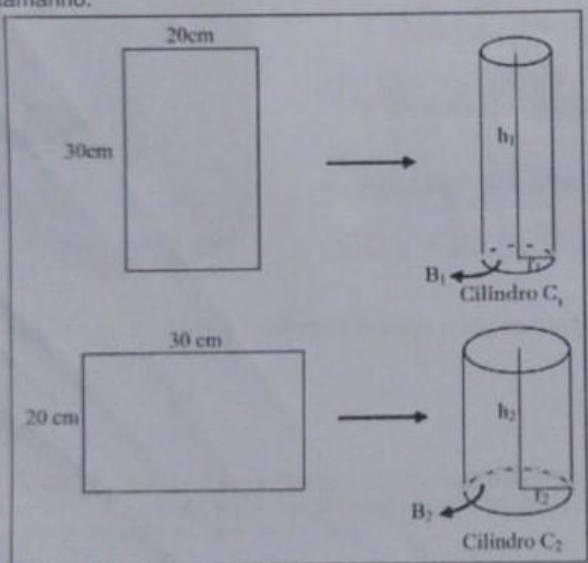
Figura 18 – Resolução manuscrita da comparação volumétrica dos cilindros.

7) A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

$C = 2\pi r$      $V = \pi r^2 h$



Jorge disse: – No meu cabe mais, porque é mais alto.  
 Éma disse: – No meu cabe mais, porque é mais largo.  
 Laura disse: – Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.



$20 = 2\pi r_1$      $30 = 2\pi r_2$   
 $r_1 = \frac{10}{\pi}$      $r_2 = \frac{15}{\pi}$   
 $V_1 = \pi r_1^2 h_1$      $V_2 = \pi r_2^2 h_2$   
 $V_1 = \pi \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 30$      $V_2 = \pi \left(\frac{15}{\pi}\right)^2 \cdot 20$   
 $V_1 = \frac{100 \cancel{\pi} \cdot 30}{\pi \cdot \cancel{\pi}}$      $V_2 = \frac{225 \cancel{\pi} \cdot 20}{\pi \cdot \cancel{\pi}}$   
 $V_1 = \frac{3000}{\pi} \text{ cm}^3$      $V_2 = \frac{4500}{\pi} \text{ cm}^3$   
 $\therefore V_2 > V_1$

Quem está certo? Como você sabe?  
 Éma, pois na fórmula de volume do cilindro o raio fica ao quadrado e a altura não.  
 Já Jorge, o volume aumenta mais a partir do raio do que pela altura.

Fonte: Acervo pessoal (2019).

A partir da construção e com comentários dos outros alunos a respeito do comprimento da circunferência, área lateral do cilindro (planificação que corresponde a um retângulo), o aluno entendeu corretamente as noções de comparações de volume de cilindros bem como o desenvolvimento da escrita quanto à solução esperada.

Feitas as atividades da segunda sequência, foi aplicado um questionário, constante no Apêndice H, a respeito de como essas atividades foram desenvolvidas e, ainda, como a avaliação delas proporcionariam a entender os caminhos que deveriam ser percorridos rumo às etapas seguintes.

Como os alunos estavam participativos pela forma de abordagem dos problemas, o professor-pesquisador teve como avaliação de aprendizagem as possíveis soluções levantadas pelos alunos, remetendo-os à Metodologia de Resolução de Problemas em que se deu a

liberdade, a fim de que estes alunos chegassem às soluções por meio de diferentes maneiras. Ademais, foi usado o questionário, constante no Apêndice H, para avaliar o desempenho frente à exploração de sólidos geométricos com o auxílio do GeoGebra.

#### 4.5 Atividade 3: inscrição e circunscrição de sólidos geométricos

Os conteúdos trabalhados na sequência didática 3, constante no Apêndice J, arrolaram os seguintes assuntos:

- a) volume de sólidos inscritos e circunscritos;
- b) pontos médios dos lados dos poliedros regulares;
- c) semelhança de polígonos;
- d) Princípio de Cavalieri;
- e) valor máximo ou mínimo do volume do cilindro inscrito no cone;
- f) paralelismo e perpendicularismo.

Essa sequência foi dividida em sete aulas de 50 minutos, em regime de alternância, na sala de aula e no laboratório de informática.

Dentre os problemas trabalhados, foram escolhidos aqui três deles: análise volumétrica da esfera inscrita no cubo; prisma triangular regular inscrito no cilindro; e construção da variação do volume do cilindro circular reto inscrito no cone.

A Figura 19 ilustra uma das estratégias utilizada pelos alunos para a análise volumétrica da esfera inscrita no cubo e para chegar à solução.

Os alunos mediram, primeiramente, os lados e, em seguida, com o auxílio do Princípio de Cavalieri, lançaram os valores obtidos no GeoGebra. A Figura 19 ilustra dois alunos medindo com régua os lados do cubo e raio da esfera inscrita. Estes sólidos foram feitos pelos próprios alunos.

Figura 19 – Medindo os lados do cubo e o raio da esfera.

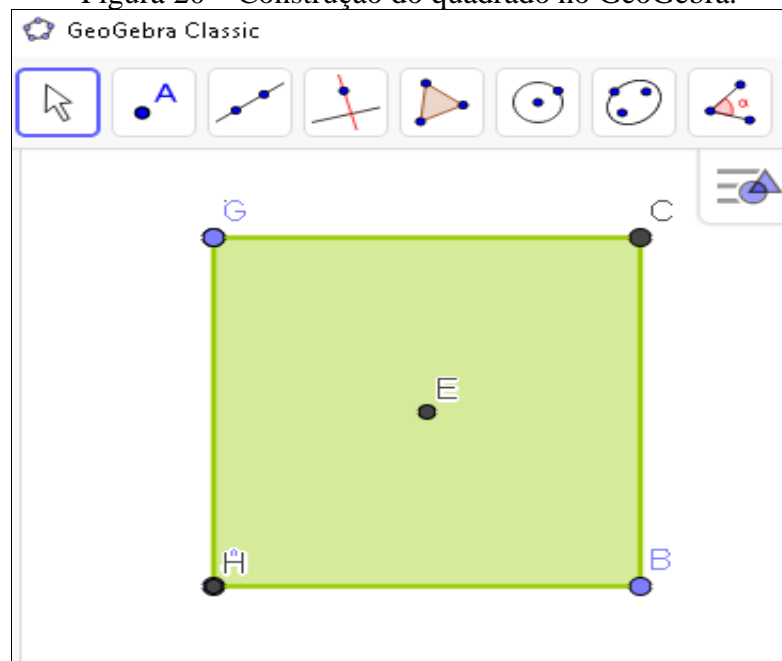


Fonte: Acervo pessoal (2019).

Segue o tutorial que mostra os comandos que foram utilizados no GeoGebra para fazer a esfera inscrita no cubo:

- 1) Na opção **Ponto**, marque dois pontos distintos quaisquer, **B** e **C**;
- 2) Construa um quadrado de lado **BC**, a partir do comando **Polígono Regular**;
- 3) Determine o centro do quadrado **E** por meio de uma de suas diagonais, com o comando **Ponto Médio** (Figura 20);

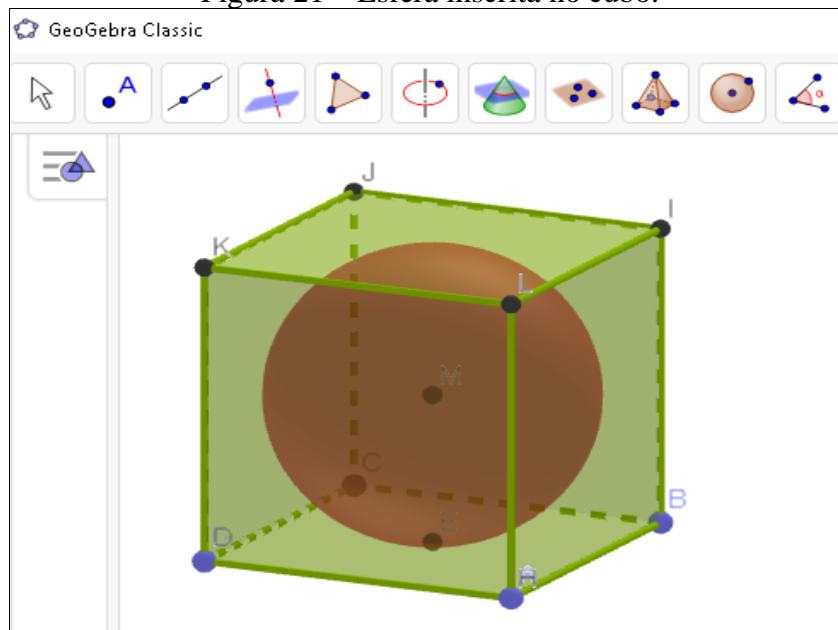
Figura 20 – Construção do quadrado no GeoGebra.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

- 4) Com o comando **Cubo de aresta dada**, faça o cubo de aresta **BC**;
- 5) Na opção **Segmento de reta**, trace as diagonais das faces opostas do cubo;
- 6) Marque a intersecção **M** das diagonais do cubo, com o comando **Intersecção de dois objetos**, e oculte, na **Caixa de entrada**, as diagonais feitas;
- 7) Em seguida, na opção **Esfera dados centro e um de seus pontos**, crie a esfera inscrita no cubo de centro **M** e ponto **E** (Figura 21).

Figura 21 – Esfera inscrita no cubo.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

Após construída a Figura 21, o professor-pesquisador ressaltou aos alunos que:

- a) *as faces do cubo tangenciam a esfera;*
- b) *o centro da esfera é o mesmo que do cubo cuja distância a um do vértice corresponde à metade da diagonal do cubo.*

Em relação à Atividade Diagnóstica, comentada na seção 4.2, onde comentou o erro o por um dos alunos na resolução do exercício de número 6, Figura 9, o professor-pesquisador apresentou à turma uma abordagem, de como pensar, agir e construir uma solução, por meio das indagações sugeridas por Polya (1995) e com o uso do GeoGebra, por meio de seus comandos.

Tomando o conhecimento de que ao propor o diálogo sugerido por Polya (1995), o professor-pesquisador levou em consideração que nem todas as respostas dadas pelos alunos direcionam à solução do problema. Por isso, faz-se necessária a preparação de cada pergunta e, caso não obtivesse a resposta esperada, mudou o plano e tentou novamente com uma nova

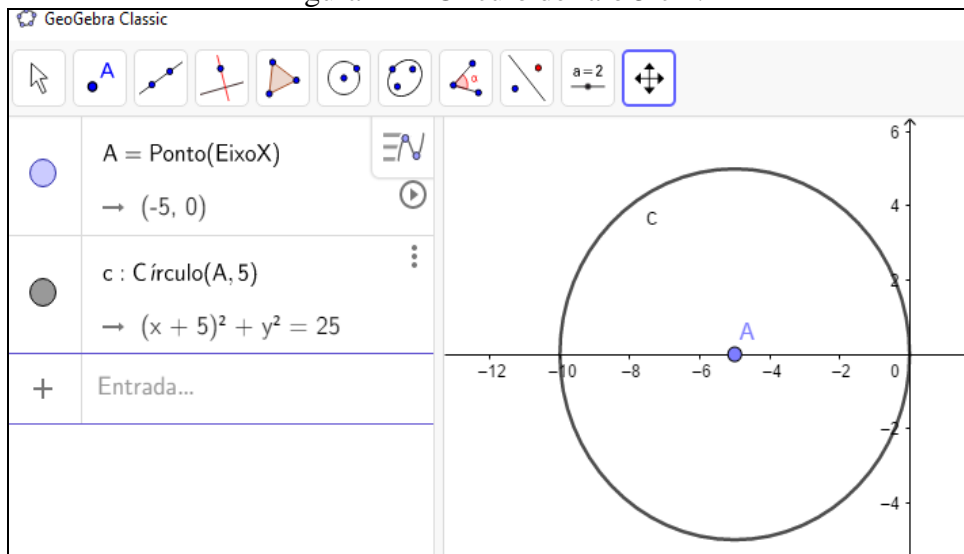
abordagem. Sabendo disso, observe alguns trechos que levaram para a solução do problema proposto.

O diálogo entre professor-pesquisador e seus alunos<sup>11</sup> foi principiado da seguinte maneira:

- Qual a incógnita?
- *O raio da esfera inscrita no cone.*
- Quais são os dados?
- *O raio e a altura do cone.*
- Ao estabelecer um plano, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que podem ser executados para obter a incógnita?

Para essa pergunta, os alunos desenharam, no GeoGebra, na janela de visualização 2D, um círculo de raio de 5 cm de centro qualquer. (Figura 22)

Figura 22 – Círculo de raio 5 cm.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Finalizada a construção da Figura 22, o professor-pesquisador tomou o devido cuidado para que os alunos não se dispersassem dos objetivos da atividade, cujo um dos objetivos era, calcular o raio da esfera inscrita. Para isso, o professor-pesquisador fez uma breve abordagem acerca da equação da circunferência e continuaram as indagações do problema:

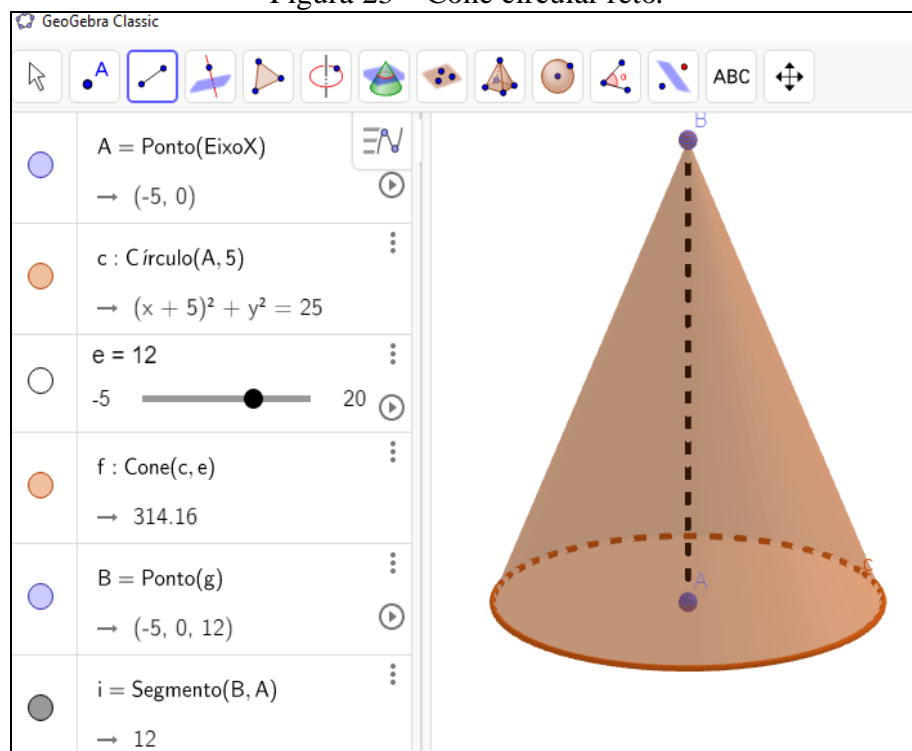
<sup>11</sup> Os diálogos que se seguem nessa pesquisa, as perguntas foram feitas pelo professor-pesquisador e as respostas, em itálico, pelos alunos. E mais uma vez, ressalta-se que as respostas colocadas aqui foram apenas àquelas que levariam a uma possível solução do problema proposto.

– Se já tem o círculo, qual o próximo passo a ser tomado? E o que esse círculo representa?

– *Construção no GeoGebra. Representa a base do cone.*

Após desenharem o círculo de raio de 5 cm, eles partiram para a janela de visualização 3D e fizeram um cone de altura 12 cm (Figura 23), tendo como base o círculo da Figura 22.

Figura 23 – Cone circular reto.



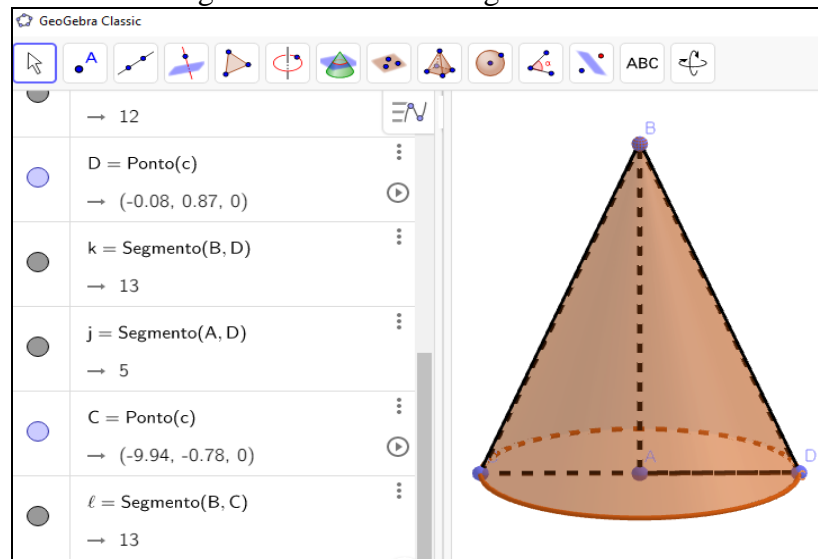
Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Porém ainda faltavam alguns cálculos para que eles pudessem avançar na resolução e o diálogo foi continuado:

– Como proceder agora? Conhecem algum problema que tenha o raciocínio semelhante?

– *O raciocínio semelhante seria formar um triângulo isósceles a partir da geratriz com o diâmetro da base (Figura 24), cujos lados congruentes correspondem às geratrizes.*

Figura 24 – Cone e triângulo isósceles.



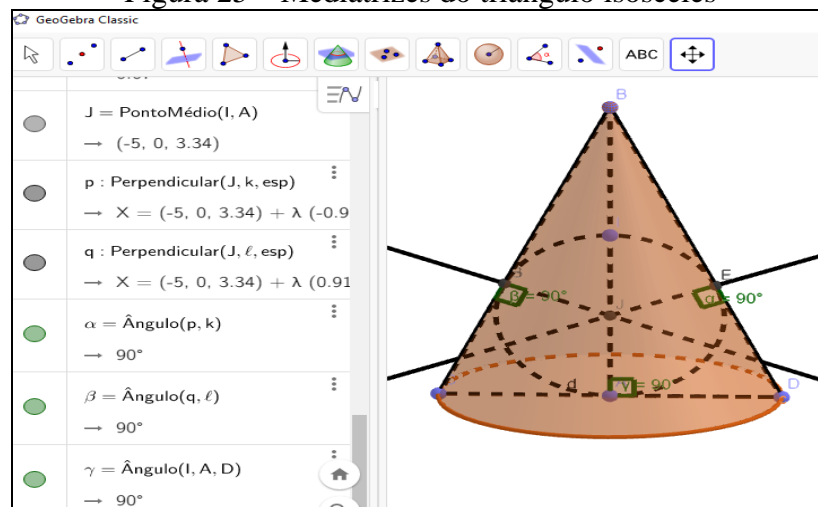
Fonte: Arquivo pessoal (2019).

Em relação à Figura 24, o professor-pesquisador lembrou que o triângulo isósceles estava em destaque, mas havia também o cone circular reto cuja altura era equivalente a altura daquele triângulo. E assim, continuou com suas argumentações:

– Antes de construir a esfera inscrita no cone, qual a visão frontal que teria essa situação e o que deve observado?

Os alunos responderam que teria um triângulo isósceles circunscrito a uma circunferência. (Figura 25).

Figura 25 – Mediatrizes do triângulo isósceles



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

– O que deve ser observado quando são marcados os pontos de tangência?

Para essa resposta, houve bastante divergência, assim, o professor-pesquisador sugeriu que tomasse o cone como se fosse um triângulo isósceles e a esfera como uma circunferência inscrita nesse triângulo, Figura 25. Observasse assim que, o raio da circunferência inscrita tangencia os lados do triângulo isósceles. E raios dessa circunferência formam ângulos retos com os segmentos de tangências.

– Para a execução do plano, quais as ferramentas podem ser usadas agora?

Mais uma vez o professor-pesquisador, propôs o seguinte: “Como é sabido que o raio da esfera é o mesmo que o da circunferência inscrita no triângulo isósceles, e que esses raios são segmentos que se encontram no centro da esfera, basta traçar, no GeoGebra, na opção retas perpendiculares. Sendo que as retas suportes que partem desse centro obedecem a essa particularidade. Assim, clicar na medida do segmento para obter o valor do raio da esfera (Figura 25)”. Dessa forma, eles entenderiam melhor as etapas seguintes.

– Há alguma possibilidade de confusão quanto ao esquema formado?

– *Não confundir mediana com mediatriz.*

Dentre os diferentes comentários provocados, nesse momento, o professor-pesquisador recomendou aos alunos que tomassem o devido cuidado de não colocar o centro da esfera inscrita como sendo o baricentro do triângulo isósceles, visto que, como se verifica na Figura 25, nem todas as retas perpendiculares formadas não passam pelos vértices do triângulo. Lembrou ainda que, caso isso acontecesse, configuraria num triângulo equilátero, cujo apótema desse triângulo corresponderia ao raio da esfera inscrita.

O professor-pesquisador observou também que as retas perpendiculares traçadas nada mais são que as mediatrizes, onde o centro da circunferência é o ponto de encontro dessas mediatrizes, chamado de circuncentro. Ao lembrá-los desse ponto notável do triângulo, levantou a seguinte situação:

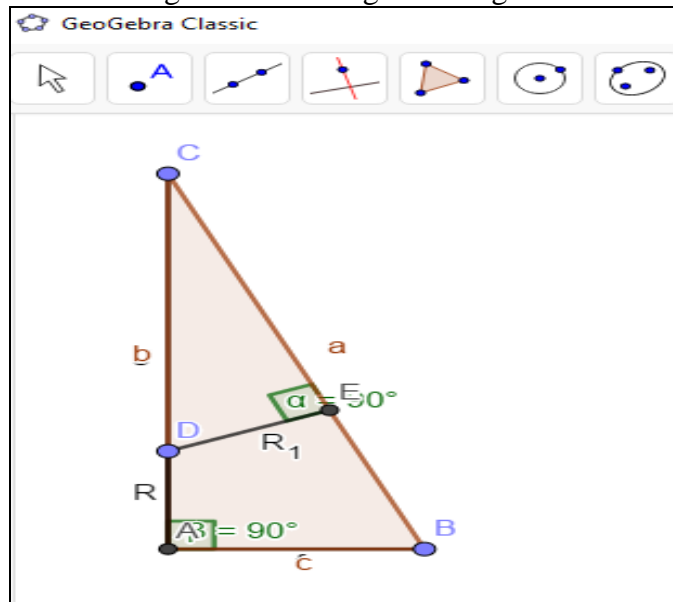
– Pode-se problematizar e relacionar o problema das mediatrizes trazendo um contexto do dia a dia. Em relação aos pontos notáveis desse triângulo, qual se encaixaria nessa situação?





Nota-se que a altura relativa à base do triângulo isósceles formado na Figura 27 corresponde a um dos catetos do triângulo retângulo obtido na Figura 24.

Figura 27 – Triângulo retângulo.



Fonte: Arquivo pessoal (2019).

De acordo com Figura 27, tem-se a *solução sugerida*:

Como o  $\triangle ABC$  é retângulo em  $\hat{A}$ , com  $\overline{AC} = 12$  cm e  $\overline{AB} = 5$  cm, então pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que  $\overline{BC} = 13$  cm.

E ainda, se  $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ , então  $\triangle DCE$  é retângulo em  $\hat{E}$ , por conseguinte, vem que  $\hat{A} \equiv \hat{E}$  e  $\widehat{DCE} \equiv \widehat{ACB}$ . Sendo assim, segue que, o  $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ , pelo caso de semelhança AA (ângulo, ângulo).

Considere que  $R \equiv R_1$ , onde  $R$  é o raio da esfera em questão, e  $\overline{CD} = (12 - R)$  cm, por semelhança de triângulos, tem-se que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$

Substituindo os valores dados, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{R}{5} = \frac{12 - R}{13}$$

Daí encontra-se o valor do raio da esfera inscrita no cone de raio 5 cm e altura 12 cm, dado por

$$R = \frac{10}{3}$$

Comparando os resultados, confirma-se a solução encontrada da Figura 25 feita no GeoGebra.

Como sugerida pela metodologia de Polya (1995) e Dante (2012), deve-se rever os caminhos que os alunos percorreram, quando o problema é desafiador, para chegar à solução. Sendo assim, tendo em vista confrontar a solução encontrada do problema que envolvia a inscrição de esfera, o professor-pesquisador relembrou aos alunos a forma progressiva com a qual foi levantada a questão.

O entendimento de alguns alunos frente às questões que envolviam inscrição e circunscrição de sólidos ainda possuía algumas fragilidades matemáticas, como pode ser verificado na Figura 28 que mostra um pequeno equívoco na solução apresentada por um aluno.

Figura 28 – Resolução da questão 5 realizada por um aluno.

5) Represente geometricamente um cilindro inscrito e outro circunscrito a um prisma quadrangular regular cuja base é 4 cm e altura 6 cm. Determine o volume e área total desses cilindros.

$V_1 = \pi r^2 \cdot h = \pi 2^2 \cdot 6 = 4 \cdot 6 \pi = 24 \pi \text{ cm}^3$   
 $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi (2\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 6 \pi = 72 \pi \text{ cm}^3$   
 $S_{T1} = \pi r^2 \cdot 2 + 2 \pi r \cdot h = 2^2 \cdot 2 \pi + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \pi = 8 \pi + 24 \pi = 32 \pi \text{ cm}^2$   
 $S_{T2} = \pi R^2 \cdot 2 + 2 \pi R \cdot h = (2\sqrt{3})^2 \cdot 2 \pi + 2 \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \pi + 24 \pi \sqrt{3}$   
 $S_{T2} = 24 \pi + 24 \pi \sqrt{3} = 24 \pi (1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

1)  $r = \frac{a}{2}$   
 2)  $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$   $R = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Fonte: Arquivo pessoal (2019).

A Figura 28 trata da questão de número 5 da atividade desenvolvida, onde foi abordada a inscrição e circunscrição de cilindros num prisma quadrangular regular. Observa que é um caso particular de um aluno que respondeu de forma manuscrita, sem o uso GeoGebra, porém o erro cometido foi confundir a fórmula da diagonal da base do prisma (representada por um quadrado) pela diagonal do cubo.

Para tanto, o professor-pesquisador percebeu a necessidade de continuar a explorar a inscrição de alguns sólidos. Após vários comentários a respeito dos diferentes tipos de inscrições, ele comentou, novamente, as fórmulas que foram usadas nos sólidos e polígonos, como estas são facilmente demonstradas, aplicadas e desenvolvidas com a ajuda do GeoGebra.

Assim, foi proposto aos alunos o seguinte problema adaptado<sup>12</sup> e partir dele, o professor-pesquisador fez a mediação frente à assimilação dos alunos:

*“Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência. A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região.”*

Imerso na aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas, o professor-pesquisador fez indagações aos alunos, colocando aqui as respostas que foram convenientes para a solução do problema:

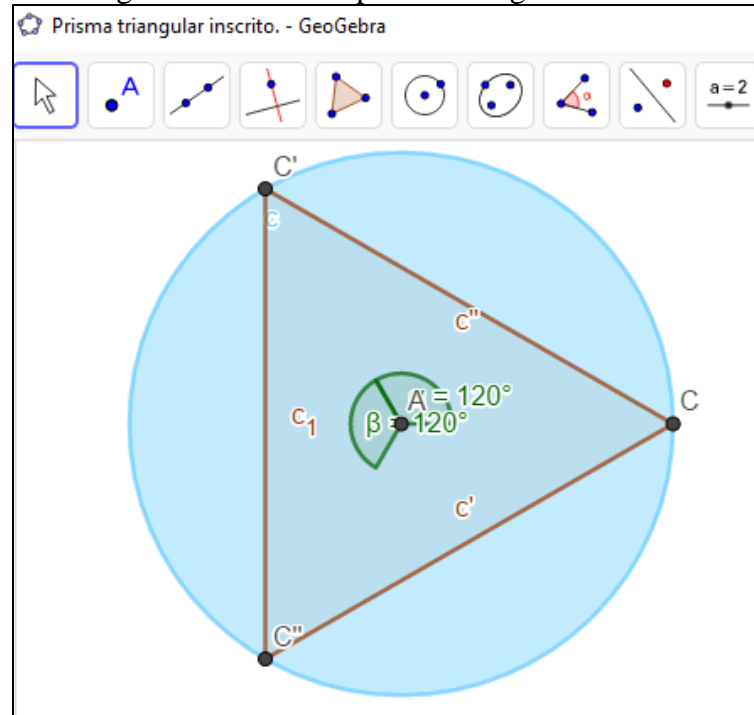
- Quais são os dados do problema?
- *Raio e altura do cilindro circunscrito.*
- O que são as bases desses sólidos? E como essas bases estão?
- *Triângulo equilátero e um círculo. O triângulo está inscrito na base.*
- Existe algum plano ou alguma ferramenta que facilite a visualização dessas bases?
- *Usando o GeoGebra ou os desenhos geométricos sugeridos.*
- No GeoGebra, represente essa situação.

---

<sup>12</sup> Questão pode ser encontrada no site do Curso Objetivo de São Paulo, através do endereço eletrônico <[https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao\\_comentada/unesp/2008/2dia/unesp2008\\_2dia.pdf](https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/unesp/2008/2dia/unesp2008_2dia.pdf)>. Acesso em: 25 mar. 2020

A Figura 29 ilustra as bases dos sólidos envolvidos no problema feitas por um dos alunos.

Figura 29 – Base do prisma triangular inscrito.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

– Tomando a inscrição de polígonos regulares levantadas na primeira sequência didática, cite algumas considerações a respeito do polígono regular criado na Figura 29.

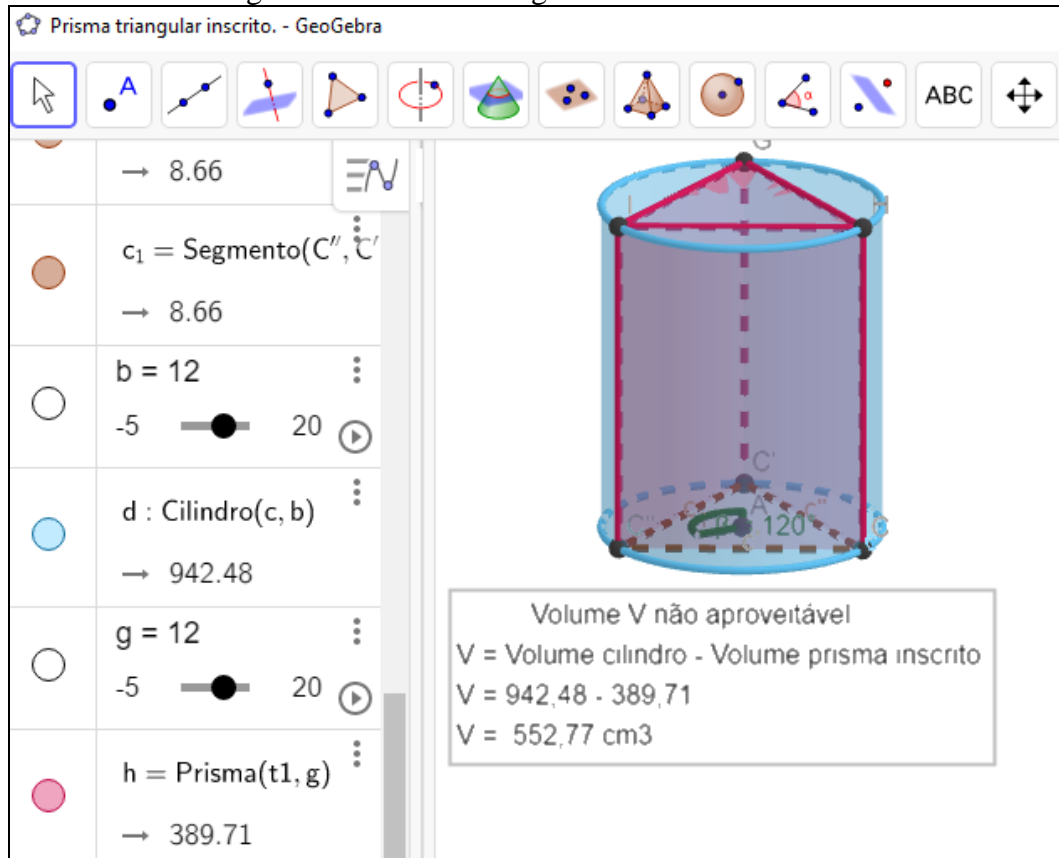
– *O centro da circunferência corresponde ao centro do triângulo equilátero e o raio da circunferência circunscrita representa dois terços da altura relativa do triângulo equilátero.*

– Para a execução do plano, como proceder a partir de agora?

– *Basta criar os sólidos no GeoGebra, a partir dessas bases, e pedir para calcular seus volumes.*

A Figura 30 representa a situação levantada pelo problema, bem como a solução dele.

Figura 30 – Prisma triangular inscrito no cilindro.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

Vale lembrar que no GeoGebra há as opções para o cálculo não só das áreas como também dos volumes de cada sólido que são criados no ambiente. Dessa forma, os alunos calcularam o volume dos sólidos e apresentaram a solução desejada, como ilustrado na Figura 30.

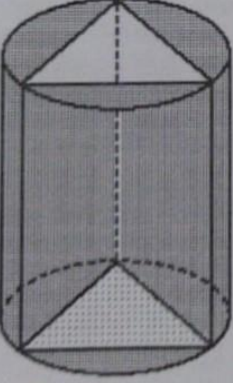

O professor-pesquisador quis verificar se os alunos assimilaram o processo de resolução de problema, para isso, propôs aos alunos que apresentassem a solução de forma manuscrita.

Um dos resultados dessa ação se verifica na Figura 31 que representa a resolução do prisma triangular regular inscrito ao cilindro, feita manuscritamente, por um dos alunos que havia cometido erro na resolução de um dos problemas da Atividade Diagnóstica.

Figura 31 – Análise volumétrica do prisma triangular regular inscrito ao cilindro.

**GEOMETRIA DINÂMICA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:** uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos

1) Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência.

Como:  $R = 5 \text{ cm}$ , então:

$$R = \frac{2h}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}, \text{ onde } h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$5 = \frac{l\sqrt{3}}{3} \rightarrow 15\sqrt{3} = l \rightarrow l = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

É ainda, a área do triângulo equilátero é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}, \text{ daí vem que:}$$

$$A_{\Delta} = \frac{(5\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Logo, o volume  $V_p$  do prisma será:

$$V_p = A_{\Delta} \cdot H, \text{ onde } H = 12 \text{ cm}$$

$$V_p = \frac{75\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 225\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região.

→ É o volume  $V_c$  do cilindro:

$$V_c = \pi R^2 \cdot H, \text{ onde } R = 5 \text{ cm} \text{ e } H = 12 \text{ cm}$$

$$V_c = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi \text{ cm}^3$$

∴ O volume da região não aproveitável é:

$$300\pi - 225\sqrt{3} = 75(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^3$$

Fonte: Acervo pessoal (2019).

Nota-se que o problema ilustrado na Figura 31 abordou os seguintes assuntos: a relação do lado do triângulo equilátero com o raio do cilindro; área e altura de um triângulo equilátero; área do círculo; volume do prisma triangular regular e do cilindro.

Para finalizar as considerações a respeito das soluções de algumas das atividades da terceira sequência mostradas até aqui, foi sugerido aos alunos o seguinte problema:

“Partindo da definição: ‘um cilindro está inscrito em um cone circular reto se, e somente se, tangencia todas geratrizes e a base do cone. Nesse caso, se diz também que o cone está circunscrito no cilindro’, mostre, no GeoGebra, imagens que representam a variação do volume de um cilindro inscrito no cone circular reto bem como o gráfico da função que representa esse volume.”

Sabendo que há diferentes diálogos para se chegar à solução de um problema, mais uma vez o professor-pesquisador fez alguns questionamentos, levando em consideração a metodologia adotada por Polya (1995). A seguir estão representadas as perguntas levantadas pelo pesquisador e professor-pesquisador algumas das respostas dadas pelos alunos.

Na primeira parte do diálogo, tratou da *familiarização do problema*, a saber:

- Por onde começar?
- *Definir cone circunscrito e cilindro inscrito.*
- O que se pode fazer?
- *Relacionar retas paralelas e perpendiculares.*
- Qual a vantagem em assim proceder?
- *Ter em mente o que significa cada um desses elementos que correspondem ao cone e cilindro.*

Na segunda parte, relacionou o aperfeiçoamento da compreensão:

- Por onde começar?
- *Releia o enunciado do problema. Separe o problema em partes.*
- O que se pode fazer?
- *Use ferramentas que relacionem seus elementos.*
- Qual a vantagem em assim proceder?
- *Preparação para confrontar as etapas seguintes. Surgimento de novas ideias.*

Na terceira parte, observou a execução do plano, a saber:

- Por onde começar?
- *Construa retas paralelas e perpendiculares à base do cone.*
- O que se pode fazer?
- *Construir a base e a geratriz do cilindro.*
- Qual a vantagem em assim proceder?
- *Verificar a variação do cilindro inscrito ao cone.*

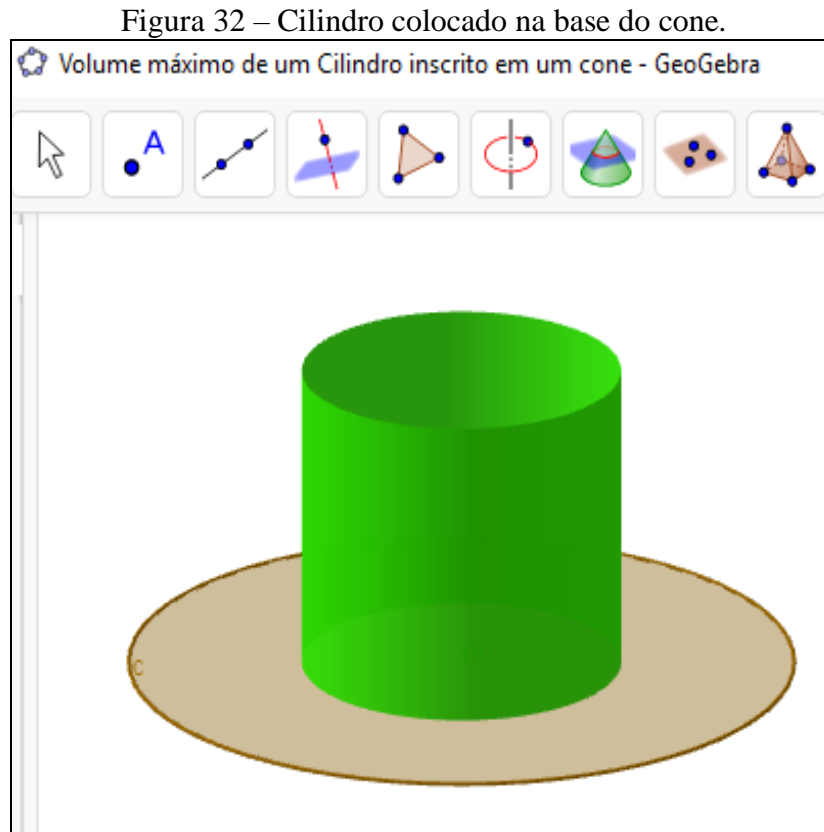
Na quarta e última parte, tratou da reflexão do problema:

- Por onde começar?
- *Pela solução, completa e correta, observada cada detalhes.*
- O que se pode fazer?
- *Criar uma função que relacione ao volume do cilindro.*
- Qual a vantagem em assim proceder?
- *É possível que encontre outra solução melhor; verifique e examine a resolução do problema.*



Criadas algumas imagens feitas pelos alunos, no GeoGebra, a partir do tutorial <sup>13</sup>que se encontra no Apêndice L.

A Figura 32 representa a base do cone e o cilindro que será inscrito nesse cone.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

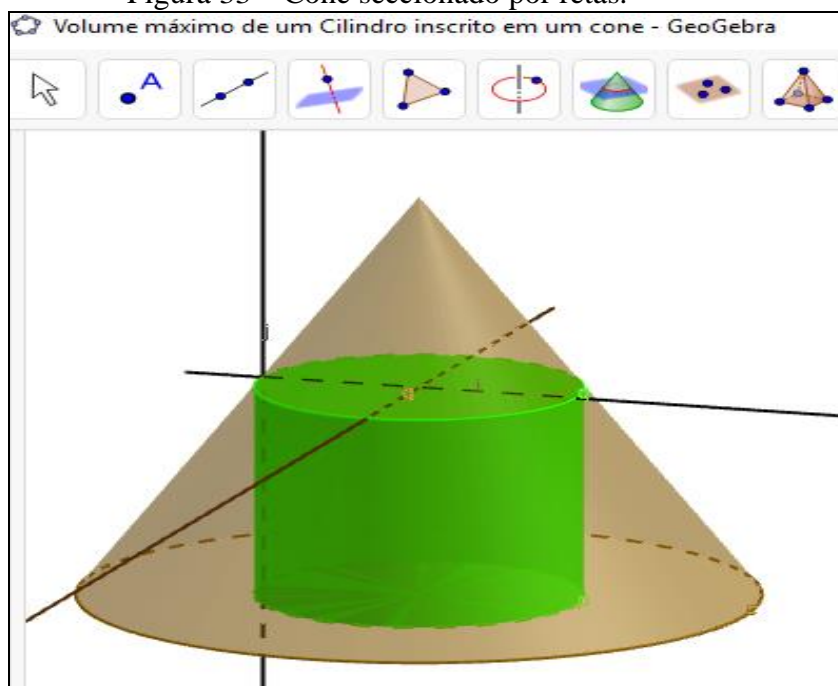
A partir da Figura 32, foi necessário destacar que ambos os sólidos deveriam ter o mesmo centro, caso isso não fosse obedecido, os alunos não acertariam as condições do cilindro inscrito no cone.

O professor-pesquisador mencionou que para formação do cilindro inscrito deve ser observado que todas as retas perpendiculares suportes tanto na base quanto na face lateral do cone, corresponderão aos planos que serão a face lateral e a base do cilindro, ou seja, os planos que seccionarão o cone e ao mesmo o tempo o cilindro inscrito.

A Figura 33 ilustra algumas das retas dessa situação.

<sup>13</sup> Baseado nas construções feitas por Cláudia Campos, Fabiana Righi e José Soeiro que disponibilizaram seus trabalhos do GeoGebra a quaisquer interessados através do endereço eletrônico <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso 25 mar. 2020.

Figura 33 – Cone seccionado por retas.

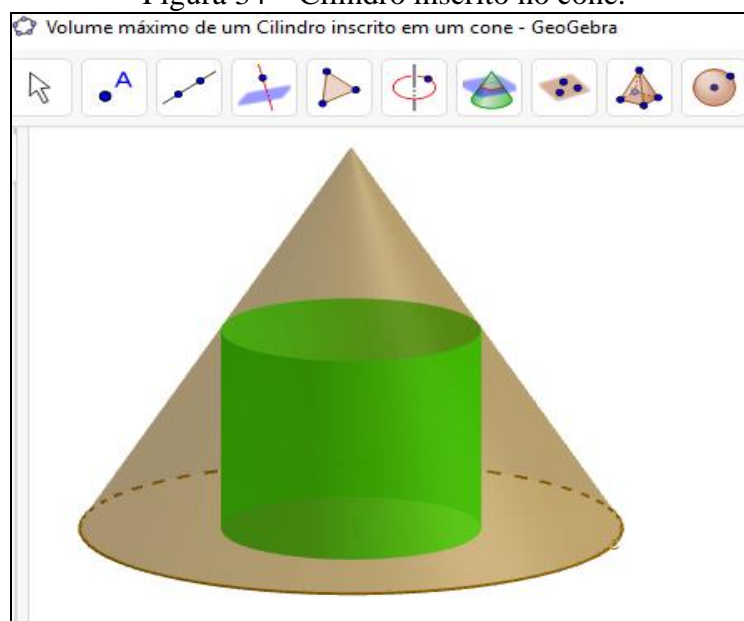


Fonte: Acervo pessoal (2019).

Na Figura 33, nota-se que as retas que passam pelo centro do cone e são perpendiculares às retas que partem da face lateral que formarão a geratriz e a base do cilindro inscrito, ou seja, trata-se de um cone circular reto, onde a base é perpendicular à geratriz.

Sendo assim a Figura 34, mostra a construção completa do cilindro e do cone a partir das retas que foram construídas na Figura 33.

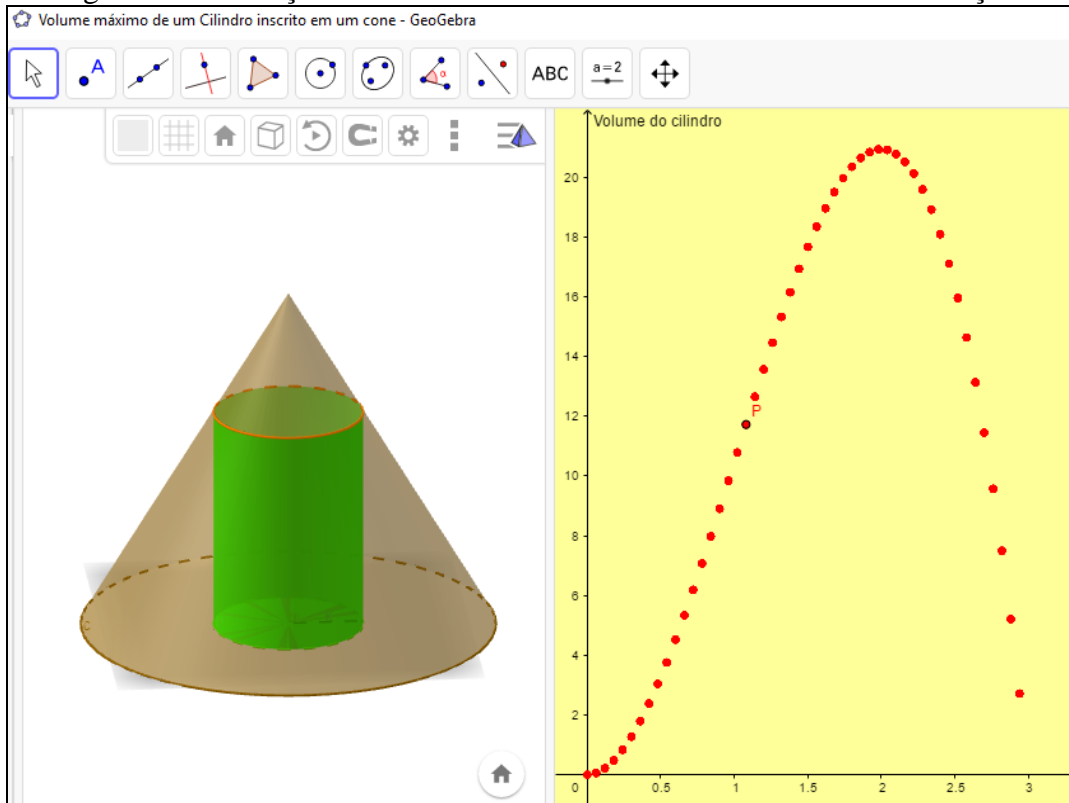
Figura 34 – Cilindro inscrito no cone.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

O gráfico da função que relaciona a variação do volume do cilindro inscrito ao cone é representado pela Figura 35.

Figura 35 – Variação volumétrica do cilindro inscrito no cone e sua função.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

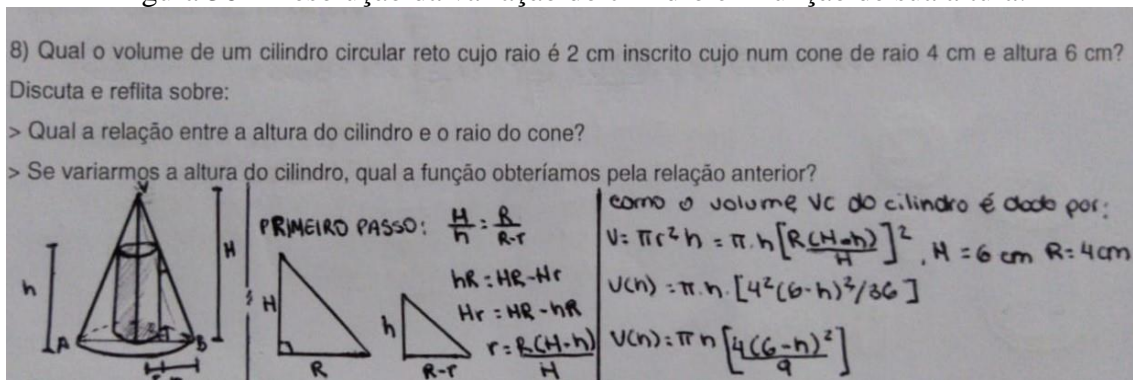
Foram consideradas, a respeito da Figura 35, algumas observações feitas pelo professor-pesquisador e alunos no que tange à variação do volume do cilindro, bem como a correspondência em seu gráfico:

- à medida que a altura do cilindro coincidia com a altura do cone, o volume daquele se tornava nulo. Entendiam aqui, que o cilindro “tendia” a uma reta;
- a mesma situação anterior se repetia (com volume do cilindro nulo), quando a base do cone se igualava à base do cilindro inscrito. Nesse caso, a altura do cilindro era nula, e este “tendia” a um plano, ou seja, ao círculo da base do cone;
- e entre esses intervalos de variação de existência ou não do cilindro inscrito, este assumia o seu volume máximo ou nulo, como mostrado no gráfico da Figura 32.

Feitas as observações do problema proposto, com a ajuda do GeoGebra e das indagações da Metodologia de Resolução de Problemas, foi solicitado, aos alunos, a relação entre a altura do cilindro inscrito com o raio do cone e a função do volume do cilindro inscrito que corresponde a essa relação.

A Figura 36 ilustra uma solução manuscrita realizada por um desses alunos para o cálculo pedido.

Figura 36 – Resolução da variação do cilindro em função de sua altura.



Fonte: Acervo pessoal (2019).

Observa-se, de acordo com a Figura 36, que o aluno em questão:

- entendeu corretamente o conceito de inscrição e circunscrição para a situação sugerida;
- ilustrou de forma clara e precisa os sólidos envolvidos bem como as dimensões desses sólidos;
- utilizou da semelhança de triângulos para comparar os raios e alturas dos sólidos;
- isolou a variável de forma simplificada;
- lembrou corretamente as fórmulas que o problema propusera;
- soube substituir corretamente os dados do problema e a variável desejada;
- obteve, finalmente, de forma reduzida, a função que relacionava o volume do cilindro ao raio do cone.

Dessa maneira, finalizadas as resoluções que as atividades das sequências didáticas propuseram, a seção seguinte retrata depoimentos e observações feitas, a partir da análise dos questionários, pelo professor-pesquisador e alunos.

#### 4.6 Avaliação e análise das sequências didáticas

Frente aos objetivos da pesquisa, dos depoimentos elencados no final de cada sequência didática, das soluções apresentadas e discutidas pelos alunos, procurou agrupar, no Quadro 3, padrões ou características comuns que pudessem trazer a resposta da pergunta norteadora da pesquisa em relação à aprendizagem desses alunos.

O Quadro 3 mostra algumas respostas dos alunos frente às contribuições da intervenção da pesquisa.

Quadro 3 – Respostas dos alunos frente à contribuição da intervenção.

(continua)

Questões	Categoria	Observações e sugestões feitas pelos alunos
O que o uso do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas contribuíram para você nesta pesquisa?	Visualização	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “Me ensinaram a ver a geometria de outro jeito [...]”</li> <li>– “Uma visualização mais ampla da construção dos sólidos [...]”</li> <li>– “Consegui visualizar de forma melhor[...]”</li> <li>– “Contribui de forma espetacular na visualização do exercício em novos planos [...]”</li> <li>– [...] Melhorou a visualização em 3D.”</li> </ul>
	Compreensão	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “[...] facilita muito pra imaginar um exercício sobre sólidos”.</li> <li>– “Aprendi diversos fundamentos e conceitos sobre polígonos inscritos e circunscritos e como se relacionam, contribuindo para meus estudos e até mesmo para noções de geometria em relação à vida cotidiana”.</li> <li>– “Consegui compreender de forma prática a metodologia adotada”.</li> <li>– “[...] Me possibilitou maior entendimento quanto a análise geométrica e maior segurança na resolução”.</li> <li>– “Muito aprendizado, melhorou minha compreensão das fórmulas[...].”</li> </ul>
O que o uso do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas contribuíram para você nesta pesquisa?	Execução	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “Resolução de forma prática dos exercícios de Geometria espacial com o programa, não só vendo de perto, mas também lembrando as fórmulas, termos e propriedades.”</li> <li>– “[...] mostrou que temos diversas formas de resolução de um exercício”.</li> </ul>

Fonte: Elaborado pelo professor-pesquisador (2020).

Ao elaborar o Quadro 3, o professor-pesquisador levou em consideração as respostas que fossem comuns em relação à contribuição da Metodologia de Resolução de Problemas e do GeoGebra frente à pesquisa. Dessa forma, categorizou essas contribuições no que os alunos observaram: visualização, compreensão e execução.

O Quadro 4 mostra algumas respostas dos alunos frente aos pontos positivos e negativos durante a pesquisa.

Quadro 4 – Respostas dos alunos referentes aos pontos positivos e negativos.

(continua)

Questão	Categoria	Subcategoria	Observações e sugestões feitas pelos alunos
Quais os pontos positivos e negativos que você encontrou nessa pesquisa?	Pontos positivos	Organização/ Facilidade	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “[...] a organização das sequências. E não vi pontos negativos nas atividades”.</li> <li>– “Os pontos positivos são vários, como por exemplo o aumento da facilidade do entendimento da construção dos sólidos inscritos e circunscritos.</li> <li>– “Pontos positivos para prender a atenção nos diálogos e curiosidades no aprendizado, é uma ferramenta que se utilizada de maneira correta consegue estimular a vontade de compreender a matéria. [...]”</li> <li>– “Positivos são os vários modos de visualizar as geometrias pelo 3D [...]”</li> </ul>
		Interação/ dinamismo	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “Os pontos positivos são muitos, e dentre eles posso citar a maior interação entre pesquisador e aluno [...]”.</li> <li>– “A proposta foi trabalhada de forma inteligente e produtiva, de forma a despertar o interesse dos alunos pelo estudo [...]”</li> </ul>

(conclusão)

Questão	Categoria	Subcategoria	Observações e sugestões feitas pelos alunos
Quais os pontos positivos e negativos que você encontrou nessa pesquisa?	Pontos positivos	Ludicidade	– “[...] maior conveniência no aprendizado e maior diversão na sala de aula. Gostei bastante”. “[...] várias dinâmicas para a melhor fixação do conteúdo e descontração da sala, sem deixar a aula entediante ou complicada”.
	Pontos negativos	Desconhecimento da metodologia e do <i>software</i>	– “[...] o programa GeoGebra requer de um certo conhecimento técnico para desfrutar totalmente das ferramentas apresentadas, porém com um pouco de prática conseguimos utilizá-lo de forma mais tranquila”. – “[...] algumas funções não podem ser utilizadas ao mesmo momento; a ideia nova do diálogo da metodologia dificulta uma experiência completa de aprendizado [...]”. – “Tem muitos comandos complicados de entender.”
		Aulas insuficientes	– “As aulas são curtas para fazer os exercícios.”

Fonte: Elaborado pelo professor-pesquisador (2020).

Em relação ao Quadro 4, o professor-pesquisador procurou colocar uma subcategoria, pois alguns alunos responderam, dentre os pontos positivos da pesquisa: a interação, dinamismo e ludicidade. Já em relação aos pontos negativos, eles apontaram que desconheciam a metodologia adotada e o *software*, e acharam as aulas insuficientes para fazer a pesquisa.

O Quadro 5 mostra algumas respostas dos alunos referentes à satisfação e dificuldades relacionadas na execução das atividades.

Quadro 5 – Respostas dos alunos referentes à satisfação e dificuldade.

(continua)

Questão	Categoria	Observações e sugestões feitas pelos alunos
Dos sólidos inscritos e/ou circunscritos, construídos no GeoGebra com a Metodologia de Resolução de Problemas, qual lhe rendeu mais prazer em fazê-lo? E qual você teve mais dificuldade para executar e entender?	Satisfação	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “Gostei muito de fazer e resolver o exercício dos cilindros, pois consegui visualizar algo que por uma bobeira eu iria errar em uma prova. Não tive dificuldades de visualização, o pesquisador fez um excelente trabalho em todos os sentidos de sua pesquisa”.</li> <li>– “Senti prazer na construção de todos os sólidos, assim como também consegui fazê-los e aprendê-los de maneira excepcional”. <ul style="list-style-type: none"> <li>– “O que eu mais gostei foi quando colocamos uma esfera inscrita e circunscrita a um cubo e vemos as relações entre os raios, diagonais, arestas e etc...”.</li> </ul> </li> </ul>

(conclusão)

Questão	Categoria	Observações e sugestões feitas pelos alunos
Dos sólidos inscritos e/ou circunscritos, construídos no GeoGebra com a Metodologia de Resolução de Problemas, qual lhe rendeu mais prazer em fazê-lo? E qual você teve mais dificuldade para executar e entender?	Dificuldade na construção	<ul style="list-style-type: none"> <li>– “O mais difícil foi quando fizemos um cilindro dentro de um cone...”.</li> <li>– “Tive dificuldades de compreender a relação do cilindro dentro do cone.”</li> <li>– “O melhor foi o cilindro reto, e o que mais me trouxe uma certa dificuldade [...]”</li> <li>– “Não tive dificuldades extremas no restante, apenas algumas dúvidas com as fórmulas, pois são semelhantes e suas diferenças são sutis”.</li> </ul>

Fonte: Elaborado pelo professor-pesquisador (2020).

O Quadro 5 retrata as satisfações e dificuldades dos alunos frente aos problemas propostos no decorrer da pesquisa. Como pode ser verificado, alguns tiveram satisfação ao resolver uma esfera inscrita num cubo, por exemplo, e outros tiveram dificuldade de entender o cilindro inscrito no cubo.

Após análises dos gráficos e tabelas, e a partir da avaliação diagnóstica, dos questionários J e H e nas atividades feitas pelos alunos, o professor-pesquisador pode



perceber a evolução da aprendizagem matemática de alguns desses alunos, mostradas no decorrer dessas sequências, como por exemplo:

- a) os erros cometidos pelos alunos na Questão 6 da Atividade Diagnóstica, seção 4.2. (Figura 9), fez com que o professor-pesquisador relacionasse os conteúdos comuns dessa questão à seção 4.5, sequência didática 3, que pudesse mostrar a evolução desses alunos, como ilustrado na Figura 31;
- b) o mesmo procedimento foi levantado quanto ao erro cometido pelos alunos na questão 5 da atividade 3, como se ver na Figura 28. Porém, após a intervenção do professor-pesquisador, os alunos conseguiram responder de forma correta as questões da Figura 18 e 36, sequência didática 2 e 3, respectivamente. Lembrando que essas questões se tratavam dos mesmos conteúdos, inscrição e circunscrição de sólidos.

Os acertos que esses alunos apresentaram se deram a partir da intervenção do professor-pesquisador. Observa-se ainda que as respostas dadas, na realização dessas atividades de intervenção, referem-se à articulação da proposta de trabalho promovidas na execução das atividades que foram analisadas e respondidas.

Dessa forma, partindo da análise de dados, como os erros e acertos dos problemas das atividades que foram contempladas, e a partir de um breve diálogo com a literatura dos autores trabalhados nessa pesquisa, permitiram ao professor-pesquisador entendesse que a Metodologia de Resolução de Problemas conciliada com o GeoGebra o levaria frente as facilidades e compreensão dos problemas que envolviam inscrições e circunscrições de polígonos e sólidos.

Contudo, partindo da questão norteadora que motivou a pesquisa: “Que efeitos são produzidos na aprendizagem de alunos de Ensino Médio, em relação a conteúdos de Geometria Espacial, a partir da articulação da Metodologia de Resolução de Problemas com ambientes de Geometria Dinâmica?”, notam-se através dos dados coletados e das análises, que estes auxiliarão o professor-pesquisador a uma possível resposta: viabilizar a visualização, e a manipulação e a compreensão dos alunos frente à aprendizagem matemática, no que se refere à inscrição e circunscrição de sólidos geométricos.

Dessa forma, a partir dos resultados obtidos e análise desses dados, pode-se justificar a conclusão dessa pesquisa no próximo capítulo, onde serão mostrados se a pesquisa foi relevante quanto à aprendizagem dos alunos; os pontos positivos e negativos da pesquisa; e, se os objetivos foram alcançados.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das inquietações e questionamentos feitos ao longo da minha caminhada como docente permitiu que, através da aplicação dessa pesquisa, rever a minha prática de ensino. Pude mostrar aos meus alunos que ainda há tempo de inovar, mudar e buscar novas ferramentas de trabalho antes que eles finalizassem o Ensino Básico, e comigo ficasse a incerteza: “que trabalho diferenciado fiz ao longo desses anos para esses alunos?”.

Partindo da questão norteadora que motivou toda a pesquisa, “Que efeitos são produzidos na aprendizagem de alunos de Ensino Médio, em relação a conteúdos de Geometria Espacial, a partir da articulação da Metodologia de Resolução de Problemas com ambientes de Geometria Dinâmica?”, fez com que traçassem objetivos e planos que pudessem culminar na resposta dessa pergunta. Certo de que a pergunta tenha sido respondida de forma clara e concisa, visto que, obtive resultados relevantes quanto à aprendizagem matemática dos alunos pesquisados. No entanto, foi preciso que levassem em consideração os teóricos que foram trabalhados nessa pesquisa. E partir deles, entendesse os caminhos e objetivos que norteariam a pesquisa.

Para tanto, buscamos, então, através dos objetivos secundários, elaborar sequências didáticas que utilizassem o GeoGebra 3D para resolvermos, a partir da Metodologia de Resolução de Problemas, sólidos inscritos e circunscritos em aulas de Matemática do Ensino Médio.

Essas sequências didáticas, criadas a partir de recortes bibliográficos, foram essenciais para a execução e planejamento das aulas ministradas. Para a correção das atividades, demos algumas sugestões de respostas aos alunos, onde foram apontados alguns pontos que deveríamos melhorar. Por meio destas sequências, organizamos os exercícios que sequenciariam cada etapa, a quantidade de aulas e os conteúdos abordados, os tutoriais e os questionários avaliativos.

Verificamos que os objetivos secundários do projeto foram cumpridos, pois tínhamos que:

- a) elaborar sequências didáticas que utilizassem o GeoGebra 3D para resolver, a partir da Metodologia de Resolução de Problemas, sólidos inscritos e circunscritos em aulas de Matemática do Ensino Médio,
  - fizemos três sequências didáticas com conteúdos e abordagens dos mais variados problemas;

- b) analisar o uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas quanto à facilidade da manipulação, compreensão e construção dos conceitos de sólidos inscritos e circunscritos,
  - fizemos gráficos, quadros, figuras e tabelas que ilustram a análise de intervenção dessa pesquisa;
- c) investigar as contribuições do uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas na interação e dinamismo das aulas na perspectiva da atuação do professor-pesquisador e da formação mais ampla dos alunos,
  - a partir dos questionários criados e análise da aprendizagem gradativa de alguns alunos, investigamos as contribuições que essa pesquisa trouxe.

Ainda na perspectiva dos objetivos secundários, procuramos investigar as contribuições do uso do GeoGebra 3D na Metodologia de Resolução de Problemas na interação e dinamismo das aulas na perspectiva da atuação do professor-pesquisador e da formação mais ampla dos alunos. Quando nos referimos ao dinamismo das aulas, constatamos que muitos alunos participaram e interagiram quando perguntado que estratégias e ferramentas poderíamos ter para alcançar a solução desejada de cada problema proposto.

Os desafios para a aplicação da pesquisa fizeram com que organizássemos as aulas de modo que os participantes da pesquisa não “perdessem” tempo para executar as outras atividades do colégio. Como a pesquisa não valorizava pontos extras nas notas de matemática, e tinha como proposta inicial ser trabalhada no contra turno das aulas, foi bastante gratificante ver a participação dos alunos nas atividades propostas.

Sabendo que ainda há muito a ser feito, essa experiência só nos mostra o quanto ainda é necessário que acreditemos naquilo que nos move: carinho e respeito pelas atividades que nos são colocadas. Assim, buscamos percorrer os caminhos que nos levássemos ao objetivo principal da pesquisa, e este objetivo foi satisfatório, graças ao planejamento metodológico e estratégias que adotamos durante toda a intervenção.

As aulas de geometria terão, para mim, daqui para frente uma nova perspectiva. Ao abordar conteúdos que muitas vezes estava longe da minha realidade em sala de aula, procurei fazer questionamentos que aguçassem às possibilidades de respostas. Como relatado pelos alunos, em diversos momentos da pesquisa, esse conhecimento foi desenvolvido com a ajuda do *software* GeoGebra. Esse *software* provocou que a turma interagisse mais pelas construções geométricas e me permitiu, com o conhecimento da Metodologia de Resolução de Problemas, mediar as atividades propostas.

Como trabalho numa instituição de ensino privado, tive bastante respaldo quanto à aplicação da pesquisa. Todo material que eu procurava usar, a direção concedia. Dessa forma, ficava mais fácil eu colocar em prática, com os alunos, os problemas que seriam utilizados, ferramentas tecnológicas ou quaisquer outros recursos audiovisuais.

Porém, antes da aplicação da pesquisa, um dos entraves estava na maneira de buscar a conhecer e aprender a manusear o *software* GeoGebra. No entanto, partindo de vídeos e tutoriais lançados na internet, sejam em língua portuguesa ou estrangeira, pude aprender e transferir para os meus alunos um pouquinho daquilo que estava me fazendo tão bem, a facilidade das construções geométricas por meio do GeoGebra.

Outro fator que merece ser destacado: eu sempre fui um grande apaixonado pela resolução de problemas. Entretanto, foi, a partir do conhecimento de alguns autores que tratavam do assunto da Metodologia de Resolução de Problemas, que eu pude aprimorar a técnica que eu utilizava na sala de aula.

Posso findar essa pesquisa de forma muito feliz e satisfeito, e certo de que os caminhos traçados serão mais fáceis no momento que eu deixar que a boa relação entre professor e aluno no que se refere à aprendizagem pode ser sempre melhorada.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.104.
- BORSOI, C. GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial. In: XX EBRAPEM – ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba, 12-14 de novembro de 2016.
- BRASIL, S. E. F; **Base Nacional Comum Curricular: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2018, p. 11-266.
- CARVALHO, A. M. P. **Ciência no Ensino Fundamental: o conhecimento físico**. São Paulo: Scipione. 2009.
- CHICON, T. R. et al. **Geogebra e o Estudo da Função Quadrática**. Parada Benito: UNICRUZ- Universidade de Cruz Alta, 2011. Disponível em: <[http://www.unicruz.edu.br/16\\_seminario/artigos/agrarias/GEOGEBRA%20E%20O%20ESTUDO%20DA%20FUNÇÃO%20QUADRÁTICA.pdf](http://www.unicruz.edu.br/16_seminario/artigos/agrarias/GEOGEBRA%20E%20O%20ESTUDO%20DA%20FUNÇÃO%20QUADRÁTICA.pdf)>. Acesso em: 12 out. 2019.
- D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 2, n. 2, p. 15-19, 1996.
- DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2012.
- DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. São Paulo: Ática, 2009.
- DINIZ, M. I; Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, K. S; DINIZ, M. I; (Org). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 87 - 97.
- FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. São Paulo: Autores Associados, 2006.
- FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.
- FONSECA, M. C. **O ensino da geometria na escola fundamental: três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- FRANCISCO; R.; ANGELA, S.; KUBLAK, M. Aplicação da metodologia da resolução de problemas vinculada com a análise de erros. In: **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. 2013. Disponível em: <[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pde/pdebusca/producoes\\_pde/2013/2013\\_unicentro\\_mat\\_artigo\\_angela\\_maria\\_kubiak\\_secundo.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_artigo_angela_maria_kubiak_secundo.pdf)>. Acesso em: 28 fev. 2020.

GEWEHR, D.; **Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs) na escola e em ambientes não escolares**. 2016. 136 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado em Ensino, Centro Universitário Univates, Lajeado, 2016.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

\_\_\_\_\_. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008, p.50.

GRAVINA, M. A. O Software GeoGebra no ensino da Matemática. In: III Semana de Matemática, 2010, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. Anais eletrônicos. Disponível em:

<<http://essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/index/login?source=%2Findex.php%2Foutraspub%2Farticle%2Fview%2F368>>. Acesso em: 20 de mar. 2020.

KRULIK, S; REYS, R. E. (org.). **A Resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo. Atual, 1997.

LEITE, L.; AFONSO, A. S. Aprendizagem baseada na Resolução de Problemas: característica, organização e supervisão. **Boletim das Ciências**. Santiago de Compostela, v. 14. n. 48, nov. 2001. Disponível em:< <http://hdl.handle.net/1822/5538>>. Acesso em: 11 out. 2019.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática**. 1993. 307 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MORAN, J. M. **Tecnologias da educação**. 2014. Disponível em:  
<[http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias\\_eduacacao/espacos.pdf](http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/espacos.pdf)>. Acesso em: 11 out. 2019.

PAPA NETO, Ângelo. **Geometria plana e construções geométricas Fortaleza**: UAB/IFCE, 2017.

NÚCLEO DE ESTUDOS PROFESSOR STEVAN. **A história do pi**. 2012. Disponível em:  
<<http://www.neps.com.br/curiosidade.php?id=3&A+Hist%F3ria+do+PI>>. Acesso em: 22 out. 2019.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. cap. 12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 80, dez. 2011. Disponível em: <<http://www.redaly.org/pdf>>. Acesso em: 15 set. 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

REIS, J. B. A. **O conceito de tecnologia e tecnologia educacional para alunos do ensino médio e superior**. 2009. Disponível em: <[http://alb.com.br-arquivos-morto/edicoes\\_anais17/txtcompletos/sem16/COLE\\_932.pdf](http://alb.com.br-arquivos-morto/edicoes_anais17/txtcompletos/sem16/COLE_932.pdf)>. Acesso em: 11 out. 2019.

ROJO, R.; CORDEIRO, G. S. C. Apresentação – gêneros orais e escritos como objetos de ensino: modo de pensar, modo de fazer. In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Gêneros orais e escritos na escola**. Tradução e organização Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro. Campinas: Mercado das Letras, 2010.

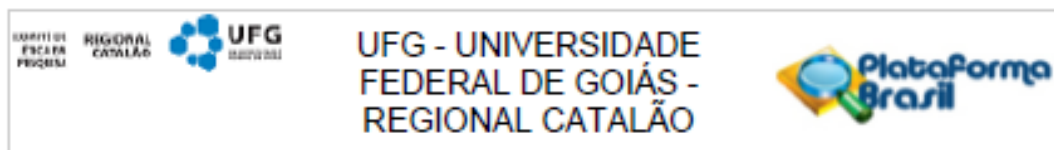
SCHUHMACHER, V. R. N. **Limitações da prática docente no uso das tecnologias da informação e comunicação**. 2014. 346 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

SOUSA; J. F. **USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA**. 2018. 156 F. DISSERTAÇÃO (MESTRADO) – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* MESTRADO EM ENSINO, UNIVERSIDADE DO VALE DO TAQUARI – UNIVATES, LAJEADO, 2018.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZANELLA, L. C. H. **Metodologia de pesquisa**. 2. ed. reimp. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/ UFSC, 2013. p. 22-97.

## ANEXO A – PARECER DO PROJETO DE PESQUISA APROVADO



### PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

#### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** GEOMETRIA DINÂMICA E A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: Uma Investigação Acerca da Aprendizagem de Sólidos Inscritos e Circunscritos.

**Pesquisador:** NILIVAN REGES

**Área Temática:**

**Versão:** 2

**CAAE:** 05019018.0.0000.8409

**Instituição Proponente:** UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIAS

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

#### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 3.368.579

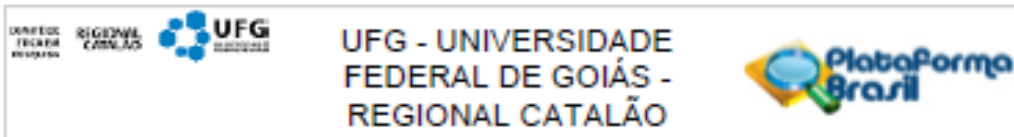
#### Apresentação do Projeto:

O projeto de pesquisa intitulado "Geometria dinâmica e a metodologia de resolução de problemas: Uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos", proposto pelo pesquisador responsável Nilivan Reges, trata de um projeto que visa investigar, aplicar e analisar uma proposta de ensino tendo como base a metodologia de ensino através da resolução de problemas usando como ferramenta um software de plataforma livre, GEOGEBRA, para uma classe de alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola particular da cidade de Caldas Novas. Trata-se de uma pesquisa de mestrado a ser desenvolvida no programa de Pós-graduação de Ensino de Matemática - ProfMat, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, sob a orientação do Prof.º Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas.

De acordo com o pesquisador, "Com o avanço tecnológico as salas de aulas tomaram-se um grande desafio para a maior parte dos professores. Estes têm que lidar com as novas tendências educacionais que se contrapõem com a metodologia da aula expositiva tradicional. Nossos alunos exigem que saibamos ensinar, interagir e aplicar os conteúdos ministrados. Porém, o que nos motivará a fazer isso? A ideia de que "eu quero e eu posso" nem sempre é a realidade vivenciada em muitas de nossas escolas. No entanto, nossas inquietações, que tanto nos afugentam e nos fazem querer fazer algo novo, vão ganhando força à medida de que precisamos inovar. Resolver problemas torna-se mais trabalhoso quando não estamos amparados didaticamente. Não é fácil

**Endereço:** Av Dr Lamartine Pinto de Avelas, nº 1120, Setor Universitário  
**Bairro:** LOTEAMENTO VILA CHAUD **CEP:** 75.704-020  
**UF:** GO **Município:** CATALAO  
**Telefone:** (64)3441-7609 **E-mail:** cep.rc.ufg@gmail.com





Continuação do Parecer: 3.300.579

8-orçamento: orçamento detalhado de todos os Insumos, com seus respectivos custos, a serem usados durante o desenvolvimento do projeto;

9-cronograma: cronograma, com as devidas alterações em decorrência das solicitações feitas pelo relator do projeto, detalhando todas as etapas do projeto;

10-Informações básicas apresentadas na Plataforma Brasil em acordo com o projeto detalhado.

**Recomendações:**

Colocar como será a devolutiva dos resultados da pesquisa.

Nos documento obrigatórios colocar, onde houver espaços para marcar X, espaço para a assinatura dos participantes.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

As pendências indicadas no parecer anterior foram atendidas. Recomenda-se a aprovação do presente protocolo, salvo melhor juízo deste Comitê.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

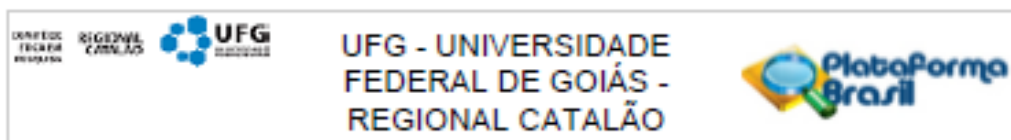
Informamos que o Comitê de Ética em Pesquisa da UFG/Regional Catalão (CEP/UFG/RC) considera o presente protocolo APROVADO, o mesmo foi considerado em acordo com os princípios éticos vigentes. Reiteramos a importância deste Parecer Consubstanciado, e lembramos que o(a) pesquisador(a) responsável deverá encaminhar ao CEP/UFG/RC o Relatório Final baseado na conclusão do estudo e na incidência de publicações decorrentes deste, de acordo com o disposto na Resolução CNS no. 466/12 e suas complementares no. 510/16 ou no. 580/18. O prazo para entrega do Relatório é de até 30 dias após o encerramento da pesquisa, previsto para 29/12/2019.

OBS.: O CEP/UFG/RC LEMBRA QUE QUALQUER MUDANÇA NO PROTOCOLO DEVE SER INFORMADA IMEDIATAMENTE AO CEP, NA FORMA DE EMENDA, PARA FINS DE ANÁLISE E APROVAÇÃO DA MESMA.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1272976.pdf	29/03/2019 23:46:30		Aceito
Outros	CARTA_DE_ENCAMINHAMENTO.pdf	29/03/2019	NILIVAN REGES	Aceito

Endereço: Av Dr Lamartine Pinto de Avelas, nº 1120, Setor Universitário  
 Bairro: LOTEAMENTO VILA CHAUD CEP: 75.704-020  
 UF: GO Município: CATALAO  
 Telefone: (54)3441-7809 E-mail: cep.rc.ufg@gmail.com



Continuação do Parecer: 3.360.579

Outros	CARTA_DE_ENCAMINHAMENTO.pdf	23:40:59	NILIVAN REGES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	29/03/2019 23:37:01	NILIVAN REGES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE.pdf	29/03/2019 23:36:50	NILIVAN REGES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Anuencia.jpeg	29/03/2019 23:36:31	NILIVAN REGES	Aceito
Declaração de Pesquisadores	Termo_de_Responsabilidade.jpeg	29/03/2019 23:27:12	NILIVAN REGES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_de_PESQUISA_NILIVAN_REGES_29_03_19.pdf	29/03/2019 23:26:48	NILIVAN REGES	Aceito
Orçamento	ORCAMENTO.pdf	29/03/2019 23:17:48	NILIVAN REGES	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA.pdf	29/03/2019 23:17:20	NILIVAN REGES	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	21/12/2018 10:05:22	NILIVAN REGES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

CATALAO, 04 de Junho de 2019

Assinado por:  
Adriana Freitas Neves  
(Coordenador(a))

Endereço: Av Dr Lamartine Pinto de Avelas, nº 1120, Setor Universitário  
Bairro: LOTEAMENTO VILA CHALUD CEP: 75.704-020  
UF: GO Município: CATALAO  
Telefone: (54)3441-7809 E-mail: cep.rc.ufg@gmail.com

**APÊNDICE A – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE****UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E  
PÓS-GRADUAÇÃO  
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA/CEP****TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE**

Você/Sr./Sra. está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*”. Meu nome é Nilivan Reges, sou o professor-pesquisador responsável e minha área de atuação é Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence ao professor-pesquisador responsável. Esclareço que, em caso de recusa na participação, você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pelo professor-pesquisador responsável, via e-mail e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do telefone. Ao persistirem as dúvidas *sobre os seus direitos* como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (64)3441-7609.

**1.1 Informações Importantes sobre a Pesquisa**

O ensino de Matemática deve desenvolver no aluno o raciocínio lógico, a criatividade, a capacidade de resolver problemas e habilidades para se adaptar às exigências tecnológicas do mundo contemporâneo. Nesse sentido, é importante usar metodologias de ensino diferenciadas em sala, a fim de tornar os conteúdos mais atrativos, de forma que o aluno se esforce espontaneamente e exponha suas ideias. Além disso, as avaliações devem integradas a essas metodologias. Neste projeto intitulado “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*” objetiva-se a investigar, aplicar e analisar uma proposta de ensino de sólidos geométricos desenvolvida na Metodologia de Resolução de Problemas a partir do GeoGebra.

a) Nas proposições seguintes, assinale ou rubrique no espaço. Serão desenvolvidas atividades diagnósticas extra sala de aula, usando metodologias de ensino diferenciadas. Durante este período as atividades serão filmadas/gravadas/fotografadas e serão utilizados questionários para coleta de dados. A partir da análise desse material serão produzidos textos acadêmicos sobre os resultados alcançados usando tais metodologias.

b) Permito a divulgação da minha opinião nos resultados publicados da pesquisa:

(  ) Sim (  ) Não

c) Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa:

(  ) Sim (  ) Não

d) Permito a divulgação da minha voz nos resultados publicados da pesquisa:

(  ) Sim (  ) Não

f) O projeto oferece risco ínfimo à integridade física, moral, intelectual e emocional. Você pode se sentir desconfortável ao responder os questionários, participar de entrevistas ou ser filmado/fotografado. Contudo, nada é obrigatório e não existem punições quanto à não participação. Todas as imagens serão editadas para minimizar o risco de identificação. A pesquisa não visa denegrir os participantes, não necessita materiais ou ações físicas que pressuponham uso de EPI (Equipamento de proteção individual).

Sua participação na pesquisa, pode lhe propiciar melhor aprendizagem de conteúdos Matemáticos, além de contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Matemática em um contexto geral, bem como para a coleta de dados relevantes para produção acadêmica.

- Não haverá despesas decorrentes da sua participação.
- Garantimos seu sigilo, privacidade e anonimato.
- Você pode se recusar a participar da pesquisa ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma.
- A qualquer momento você pode se recusar a participar de aplicação de questionários ou entrevistas e a ser filmado/fotografado caso se sinta *desconfortável* e/ou *constrangido*.
- Informamos que você tem o direito de pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros), garantida em lei, decorrentes da sua participação na pesquisa.

- Os resultados serão divulgados por meio de trabalhos acadêmicos que poderão ser apresentados em congressos da área ou publicados em revistas e por meio de relatórios.

## 1.2 Assentimento da Participação na Pesquisa

Eu, ....., inscrito(a) sob o RG/ CPF....., abaixo assinado, concordo em participar do estudo intitulado “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*”. Destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo professor-pesquisador responsável Nilivan Reges sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

Caldas Novas, 17 de junho de 2019.

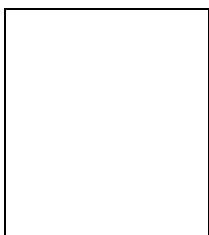
---

Assinatura por extenso do(a) participante

---

Assinatura por extenso da professor-pesquisador responsável

Testemunhas em caso de uso da assinatura datiloscópica




---

**APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE****UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E  
PÓS-GRADUAÇÃO  
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA/CEP**

Sr(a) responsável, seu filho(a) está sendo *convidado(a)* para participar da pesquisa intitulada “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*”. Meu nome é Nilivan Reges, sou o professor-pesquisador responsável e minha área de atuação é Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence à pesquisadora responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação você não será penalizado (a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelo professor-pesquisador responsável, via e-mail e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do(s) seguinte(s) contato(s) telefônico(s): . Ao persistirem as dúvidas sobre os seus direitos como participante desta pesquisa, você também poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Goiás, pelo telefone (62) 3521-1215.

**1.1 Informações Importantes sobre a Pesquisa**

A pesquisa “*Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: uma investigação acerca da aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos*”, se justifica com a seguinte observação: A partir das aulas do mestrado de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática e das minhas inquietações sobre a aprendizagem de sólidos inscritos e circunscritos, gostaria de analisar quais os efeitos a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, no ensino de sólidos inscritos e circunscritos. Observando se estes recursos auxiliam no processo de ensino deste conteúdo.

Diante de tal situação, faz-se necessário buscar meios para trabalharmos com nossos alunos de forma a proporcionar-lhes condições de se desenvolverem academicamente com embasamento teórico e prático visando o seu desenvolvimento e preparo para a vida escolar e profissional.

No decorrer da pesquisa você responderá questionário sobre o perfil do discente ingressante na 3ª série do Ensino Médio, quais os domínios em relação a requisitos básicos da geometria espacial, como área e volume de alguns sólidos, posteriormente, responderá algumas questões sobre sólidos inscritos e circunscritos para sondarmos suas dificuldades e assim planejarmos atividades a fim de possibilitar as melhorias desejadas. Por isso precisamos do seu consentimento para divulgação dos resultados publicados da pesquisa:

- ( ) Permito a divulgação da minha imagem/voz/opinião nos resultados publicados da pesquisa;
- ( ) Não permito a publicação da minha imagem/voz/opinião nos resultados publicados da pesquisa.

Possivelmente, devido às etapas da pesquisa, necessitemos que você registre seus conhecimentos no teste de sondagem e participe das atividades planejadas, o desconforto emocional poderá ocorrer, mas desenvolva com tranquilidade, sem se preocupar com avaliação. Pois, os benefícios acadêmicos e sociais decorrentes da participação na pesquisa serão evidenciados. Trata-se de procedimentos do projeto para que possamos atuar melhor na sua formação.

Garantimos sigilo que assegure sua privacidade e o anonimato. Do contrário, caso seja do interesse da pesquisa a identificação e divulgação do seu nome, isso só será feito se for de seu interesse e não houver objeção. Por favor, se manifeste a seguir:

- ( ) Permito a minha identificação através de uso de meu nome nos resultados publicados da pesquisa
- ( ) Não permito a minha identificação através de uso de meu nome nos resultados publicados da pesquisa.

Garantimos sua liberdade de se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma.

Garantimos sua liberdade de se recusar a responder questões que lhe causem desconforto emocional e/ou constrangimento em entrevistas e questionários que forem aplicados na pesquisa.

- Declaramos que os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não.
- A divulgação dos resultados será registrada, na redação final da pesquisa.
- Informamos aos participantes, o direito de pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros), garantida em lei, decorrentes da sua participação na pesquisa.
- Declaramos aos participantes que toda pesquisa a ser feita com os dados que forem coletados deverá ser autorizada pelo/a participante e também será submetida para aprovação do CEP institucional e, quando for o caso, à CONEP. O material que fora coletado, oportuniza o uso futuro, por isso ficarão armazenados. Os resultados da pesquisa serão tornados públicos, sejam eles favoráveis ou não. Portanto, necessito que autorizem a guarda do material coletado para uso em pesquisas futuras:

) Declaro ciência de que os meus dados coletados podem ser relevantes em pesquisas futuras e, portanto, autorizo a guarda do material em banco de dados;

) Declaro ciência de que os meus dados coletados podem ser relevantes em pesquisas futuras, mas não autorizo a guarda do material em banco de dados

Consentimento da Participação na Pesquisa:

Eu, responsável legal pelo(a) menor \_\_\_\_\_  
consinto na sua participação no projeto citado acima, caso ele(a) deseje, após ter sido devidamente esclarecido.

Caldas Novas, 17 de junho de 2019.

---

Pai / Mãe ou Responsável Legal



## APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO E PERFIL DO PARTICIPANTE

### QUESTIONÁRIO E PERFIL DO PARTICIPANTE

#### Geometria Dinâmica e a Metodologia de Resolução de Problemas: Uma Investigação Acerca da Aprendizagem de Sólidos Inscritos e Circunscritos.

Você, como participante dessa pesquisa está sendo convidado a responder o presente questionário. Desde já muito obrigado por participar dessa pesquisa.

**Instruções:** *O questionário possui 10 perguntas referentes ao perfil do participante. Ainda que você esteja se identificando, essa identificação não será utilizada em nenhum momento na pesquisa. Responda todas as questões com sinceridade e tranquilidade.*

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_

1) Você utiliza o computador, *smartphones* ou *tablets*?

( ) não. Passe o item 3.

( ) sim. Onde: ( ) em casa ( ) no colégio ( ) na *lan house* ( ) outros \_\_\_\_\_

2) Quanto ao uso do computador, *smartphones* ou *tablets*, qual a finalidade? (Você poderá escolher mais de uma alternativa)

( ) estudo ( ) trabalho ( ) entretenimento

3) Você fica conectado à internet, em média, quantas horas por dia?

( ) Menos de 1 (uma) hora ( ) Mais de uma e menos de 5 (cinco) ( ) Mais de 5 (cinco)

4) Você possui algum curso na área de informática? ( ) não ( ) sim. Qual?

\_\_\_\_\_.

5) Você acha que o uso das “novas” tecnologias auxilia no seu aprendizado? (Computador, internet, *softwares* educativos entre outros).

( ) sim ( ) não ( ) parcialmente

6) Seus professores em séries anteriores utilizaram recursos tecnológicos para trabalharem algum conteúdo? ( ) não ( ) sim. Em qual disciplina? Qual recurso tecnológico? Qual conteúdo?

---

---

7) Você conhece o *software* GeoGebra? Já realizou alguma atividade utilizando esta ferramenta?

---

---

8) Você tem o hábito de estudar fora colégio? ( ) não ( ) sim. Em qual disciplina você o faz com mais frequência? Por que?

---

---

9) Você costuma estudar, em média, quantas horas por dia? Qual dia de descanso?

---

---

10) Você tem o hábito de estudar em grupo ou individualmente? Qual disciplina lhe permite mais tranquilidade quanto aos estudos? E qual a mais temerosa?

---

---

Muito obrigado pela colaboração.

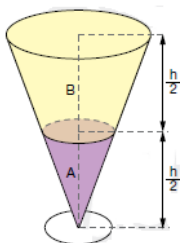
## APÊNDICE D – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

**Este questionário possui a finalidade de identificar seus conhecimentos prévios sobre o conteúdo de Geometria Espacial, bem como área e volume de alguns sólidos. Terá duração de 1 hora, aula (50 minutos) e deverá ser realizado individualmente e sem consultas.**

Nome: \_\_\_\_\_

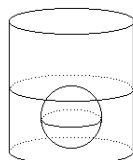
Número: \_\_\_\_\_

1) Duas substâncias, *A* e *B*, que não se misturam, são colocadas num recipiente de forma cônica, de modo que a substância *A* ocupe até a metade da altura do cone e a substância *B*, o restante (conforme a figura). A razão entre o volume de *A* e o volume de *B* é:



- a)  $\frac{8}{7}$       b)  $\frac{1}{7}$       c) 1      d)  $\frac{1}{8}$       e) 7

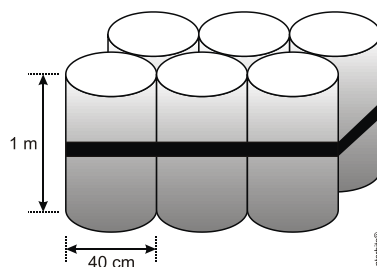
2) (UFRS) Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar-se ao fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera.



Antes da esfera ser colocada no copo, a altura de água era de:

- a)  $27/8$  cm      b)  $19/6$  cm      c)  $18/5$  cm      d)  $10/3$  cm      e)  $7/2$  cm

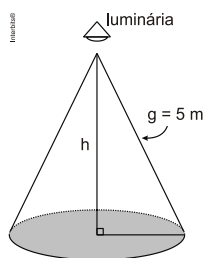
3) (ENEM 2ª aplicação 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R\$ 2,50 por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere  $\pi \cong 3$ )

- a) R\$ 86,40.
- b) R\$ 21,60.
- c) R\$ 8,64.
- d) R\$ 7,20.
- e) R\$ 1,80.

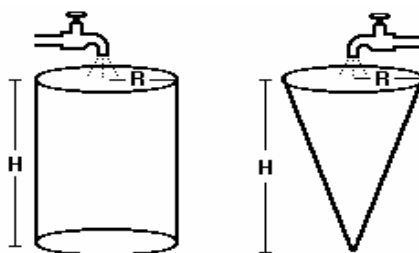
4) (ENEM 2ª aplicação 2010) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de  $28,26\text{m}^2$ , considerando  $\pi \cong 3,14$ , a altura  $h$  será igual a

- a) 3 m.
- b) 4 m.
- c) 5 m.
- d) 9 m.
- e) 16 m.

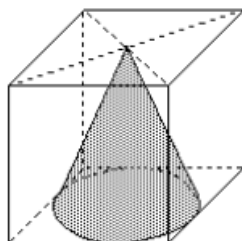
5) No desenho a seguir, dois reservatórios de altura  $H$  e raio  $R$ , um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:



- a) 2 h
- b) 1 h e 30 min
- c) 1 h
- d) 50 min
- e) 30 min

6) (ITA) Um cone circular reto tem altura 12cm e raio da base 5cm. Quanto mede o raio da esfera inscrita nesse cone, em centímetros?

7) (MACK) Na figura, a base do cone reto está inscrita na face do cubo.



Supondo  $\pi = 3$ , se a área total do cubo é 54, então o volume do cone é:

- a)  $81/2$                       b)  $27/2$                       c)  $9/4$                       d)  $27/4$                       e)  $81/4$

8) Duas esferas de raio  $r$  foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura  $4r$ , raio da base  $r$  e espessura desprezível. Calcule a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas.



9) (UERJ-Adaptada) Observe o dado ilustrado abaixo, formado a partir de um cubo, e com suas seis faces numeradas de 1 a 6.



Esses números são representados por buracos deixados por semiesferas idênticas retiradas de cada uma das faces. Todo o material retirado equivale a 4,2% do volume total do cubo.

Considerando  $\pi = 3$ , a razão entre a medida da aresta do cubo e a do raio de uma das semiesferas, expressas na mesma unidade, é igual a:

**Referências:**

[www.professorwalter.mat.br](http://www.professorwalter.mat.br);

[www.curso-objetivo.br](http://www.curso-objetivo.br);

[www.colegioanglodecampinas.com.br](http://www.colegioanglodecampinas.com.br);



Calculando o perímetro desse polígono de 96 lados, conseguiu para  $\pi$  um valor entre  $3 \frac{10}{71}$  e  $3 \frac{10}{70}$ . Ou seja, para Arquimedes  $\pi$  era um número entre 3,1408 e 3,1428.

Com um polígono de 720 lados inscrito numa circunferência de 60 unidades de raio, Ptolomeu, que viveu em Alexandria, no Egito, por volta do século III d.C., conseguiu calcular o valor de  $\pi$  como sendo  $377/120$ , que é aproximadamente igual a 3,1416, uma aproximação ainda melhor que a de Arquimedes.

O fascínio pelo cálculo do valor exato de  $\pi$  também tomou conta dos chineses. No século III d.C., Liu Hui, um copiadador de livros, conseguiu obter o valor 3,14159 com um polígono de 3 072 lados.

Mas no fim do século V, o matemático Tsu Ch'ung-chih foi mais longe ainda: encontrou como valor de  $\pi$  um número entre 3,1415926 e 3,1415927.”

Fonte: Revista Matemática Educacional (2019)

Sendo assim, desenvolva algumas aproximações para o número  $\pi$  ( $\pi$ ) a partir das inscrições e circunscritões de polígonos regulares.

5) Sob o viés da Metodologia de Resolução de Problemas defendido por Polya (1995), observe as embalagens de pizzas e contando que deve considerar apenas a parte superior das embalagens; suponha que as pizzas sejam circulares e inscritas às embalagens formadas por polígonos regulares. Dessa forma, responda: qual a relação do lado da embalagem com o raio da pizza inscrita?



E se a pizza for dividida em 4, 6 ou 8 pedaços iguais, qual o valor de cada ângulo central? Qual o valor do apótema? Qual a área da parte superior de cada embalagem? Tome como recurso o GeoGebra, para se inscrever e circunscrever outros polígonos, calculando a relação entre o apótema, lado e área do polígono com o raio da circunferência.

### Para casa:

- 1) Determine a razão entre as áreas do hexágono regular e inscrito e circunscrito numa circunferência de raio 3 cm.
- 2) Devido à seca que invade uma certa região, os representantes de três cidades decidiram construir um poço que atenda essas cidades, de tal forma que ele fique equidistante das três cidades. Assinale três pontos quaisquer A, B e C, não colineares que representem essas cidades. A seguir, assinale o ponto O equidistante de A, B e C. Qual a relação entre essas distancias?
- 3) Desenhe um polígono regular qualquer e assinale o seu centro O. A seguir, desenhe:
  - a) A circunferência circunscrita a esse polígono, isto é, a circunferência que passa por todos os vértices do polígono.
  - b) A circunferência inscrita nesse polígono, isto é, a circunferência que tangencia todos os lados do polígono.



**APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO 1****Referente: GeoGebra; Metodologia de Resolução de Problemas; professor-pesquisador**

- 1) Você já conhecia o *software* GeoGebra?  
 Sim  
 Não
- 2) O pesquisador apresentou de forma satisfatória as ferramentas utilizadas no GeoGebra para execução dos problemas?  
 Bem satisfatório  
 Pouco satisfatório  
 Insuficiente
- 3) A dinâmica e a interação com as quais os problemas foram expostos e discutidos foram satisfatórias?  
 Bastante  
 Pouco  
 Insuficiente
- 4) Ao utilizar o software GeoGebra, você conseguiu visualizar melhor as imagens nesse aplicativo do que nos livros didáticos?  
 Muito  
 Pouca Diferença  
 Não mudou nada
- 5) O pesquisador utilizou a Metodologia de Resolução de Problemas para que você entendesse e interagisse com os problemas propostos?  
 Sim  
 Pouco  
 Não
- 6) Ao visualizar e manipular as figuras, o pesquisador instigou a sua atenção e a capacidade de resolver esses problemas?  
 Sim  
 Pouco  
 Não

- 7) Qual a sua satisfação quanto ao manuseio do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas?
- Completamente satisfatória
  - Satisfatória
  - Pouco Satisfatória
  - Insuficiente
- 8) Com a Metodologia de Resolução de Problemas associada ao uso do *software* GeoGebra permite que a resolução de um problema seja feita a partir de certas etapas. Como o pesquisador se apresentou em relação à essa proposta?
- Excelente
  - Bom
  - Regular
  - Péssimo
- 9) Dê sugestões de como o pesquisador poderia melhorar a atuação dessa investigação?

**APÊNDICE G – QUESTIONÁRIO 2****Referente: Sequência Didática 1 - Noções básicas de Geometria Plana: Inscrição e Circunscrição de polígonos**

- 1) As atividades desenvolvidas de inscrição e circunscrição de polígonos foram essenciais para que você pudesse entender as próximas sequências?  
 Excelente  
 Bom  
 Regular  
 Péssimo
- 2) Quando o pesquisador propôs problemas contextualizados de polígonos inscritos e circunscritos com uso da Geometria Dinâmica e da Metodologia de Resolução de Problemas, você compreendeu os conceitos envolvidos?  
 Completamente  
 Pouco  
 Insuficiente
- 3) Nesse sentido, o que você sugere ao pesquisador para que ele possa aprimorar esses conceitos?

### APÊNDICE H – QUESTIONÁRIO 3

**Referente: Sequência Didática 2 - Geometria Espacial:  
Noções básicas de prismas, pirâmides e corpos redondos**

- 1) O pesquisador apresentou de forma satisfatória os sólidos que por sua vez seriam trabalhados nas inscrições seguintes?  
 Excelente  
 Bom  
 Regular  
 Péssimo
- 2) Ao construir e visualizar as figuras 3D no GeoGebra, como variação do cone, cilindro e prisma, você acha que dessa forma contribuiu para o dinamismo e interação das aulas?  
 Completamente  
 Pouco  
 Insuficiente
- 3) Quanto à Metodologia de Resolução de Problemas, você conseguiu entender a maneira pela qual um problema pode ser resolvido usando diferentes estratégias?  
 Completamente  
 Pouco  
 Insuficiente
- 4) Dê algumas sugestões para que o pesquisador consiga melhorar a Resolução de Problemas aplicada à Geometria Espacial.

## APÊNDICE I – QUESTIONÁRIO 4

### Referente: Sequência Didática 3 - Inscrição e Circunscrição de sólidos geométricos

- 1) Dos sólidos inscritos e/ou circunscritos, construídos no GeoGebra com a Metodologia de Resolução de Problemas, qual lhe rendeu mais prazer em fazê-lo? E qual você teve mais dificuldade para executar e entender?
  
- 2) Os conceitos, a visualização e a construção desses sólidos inscritos e circunscritos foram trabalhados de forma satisfatória?  
  
 Excelente  
 Bom  
 Regular  
 Péssimo
- 3) O que o uso do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas contribuíram para você nessa pesquisa?
  
- 4) Quais os pontos positivos e negativos que você encontrou nessa pesquisa? Quais sugestões você daria para que fossem sanados esses pontos falhos?

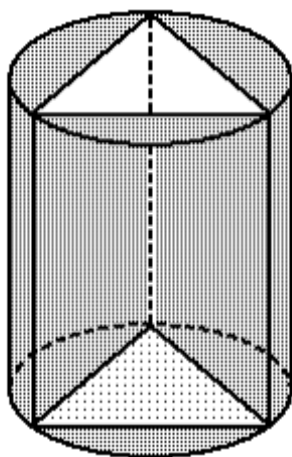
### APÊNDICE J – ATIVIDADE 3

Nessa atividade exploraremos com ajuda do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas, os seguintes assuntos:

- Relacionar o volume de sólidos e circunscritos;
- Pontos médios dos lados dos poliedros regulares;
- Semelhança de polígonos;
- Noções de derivadas para o cálculo do valor máximo na função do cilindro inscrito no cone;
- Paralelismos e perpendicularismo;

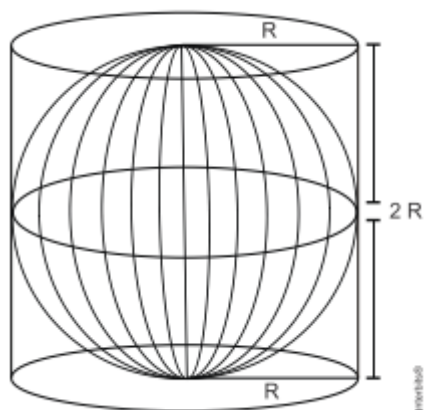
1) Baseando na Visualização 2D e redirecionando a 3D, construa os sólidos inscritos e circunscritos e faça algumas comparações quanto ao volume de cada sólido.

2) (VUNESP- SP) Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência.



A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região.

3) Por motivo de segurança, construiu-se um superaquário de vidro, em formato esférico, dentro de um cilindro também de vidro, conforme esquematizado na figura a seguir. A esfera está completamente cheia de água e, caso quebre, toda a água passará para o cilindro.

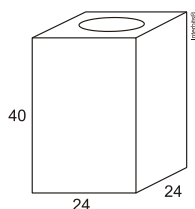


Desconsidere a pequena diferença entre os raios da esfera e do cilindro e o volume de água deslocado pelos pedaços de vidro da esfera quando quebrada. Supondo que  $R$  é igual a 2 m, determine:

- a) O volume de água da esfera;
  - b) A capacidade volumétrica do cilindro;
  - c) A altura do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre.
- 4) Represente geometricamente um cilindro inscrito e outro circunscrito a um prisma quadrangular regular cuja base é 4 cm e altura 6 cm. Determine o volume e área total desses cilindros.
  - 5) A partir dos pontos médios do prisma triangular, determine um outro prisma triangular regular e partir da Princípio de Cavalieri, calcule o volume do segundo prisma.
  - 6) Qual o volume de um cilindro circular reto cujo raio é 2 cm inscrito num cone de raio 4 cm e altura 6 cm? Discuta e reflita sobre:
    - a) Qual a relação entre a altura do cilindro e o raio do cone?
    - b) Se variarmos a altura do cilindro, qual a função obteríamos pela relação anterior?
    - c) Discuta e reflita sobre a variação do volume do cilindro inscrito no cone e associe a função polinomial formada.

**Para casa:**

- 1) Construa um cone inscrito em um cubo. Qual a diferença, em modulo, entre seus volumes?
- 2) Obtenha uma esfera circunscrita a um cubo. Compare a relação entre o raio da esfera e a diagonal do cubo.
- 3) Obtenha uma esfera inscrita em um cubo. Qual o volume do cubo em função do raio da esfera?
- 4) (ENEM 2014) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual. Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- a) 14,4%
- b) 20%
- c) 32,0%
- d) 36,0%
- e) 64,0%



## APÊNDICE K – ATIVIDADE 2

Nessa atividade exploraremos com ajuda do GeoGebra e da Metodologia de Resolução de Problemas, os seguintes assuntos:

- Relação de Euler;
- Prismas e pirâmides: planificação, área e volume;
- Cilindro e cone: área e volume;
- Comparação do volume de cilindros;
- Esfera: volume.

1) Construa alguns poliedros convexos. Verifique, em cada um deles, o número de vértices, faces, arestas: **Estabeleça uma fórmula que relacione “V”; “F” e “A”.**



2) Construa prismas e pirâmides de bases iguais de  $n$  lados regulares e faça as observações seguintes:

Para auxiliar a compreensão da fórmula do volume e sua relação com a área da base e a altura do prisma, uma tabela como a abaixo pode ser construída.

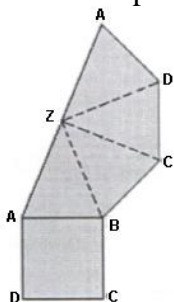
Anote na tabela a seguir cinco valores do volume do prisma encontrado com suas respectivas áreas da base e alturas.

Área da Base	Altura	Volume

Qual a relação que você observa entre esses valores? Espera-se perceberam que o volume do prisma é dado pelo produto dos valores das duas primeiras colunas da tabela, ou seja, é dado por Área da base  $\times$  altura e da pirâmide um terço desse volume encontrado.

3) Obtenha a área da superfície do cone bem como seu volume. Nesse caso, construa cones com raio e altura variados.

4) Para desenvolver a visão espacial dos estudantes, o professor ofereceu-lhes uma planificação de uma pirâmide de base quadrada como a figura:



a) A área da base dessa pirâmide é  $100 \text{ cm}^2$  e a área de cada face é  $80 \text{ cm}^2$ .

b) A área total, no caso da pirâmide considerada, é igual a:

5) (FUVEST-SP) A figura abaixo mostra uma vista parcial do Museu do Louvre em Paris, em cuja entrada foi construída uma enorme pirâmide de vidro que funciona como acesso principal. A pirâmide do Louvre, um projeto do arquiteto sino-americano Ming Pei, foi inaugurada em 1988 e está situada na praça central do museu. Trata-se uma pirâmide regular, de base quadrada e com lados (arestas) medindo 35 m.



De acordo com os dados apresentados acima, determine:

a) a altura da pirâmide;

b) o volume da pirâmide.

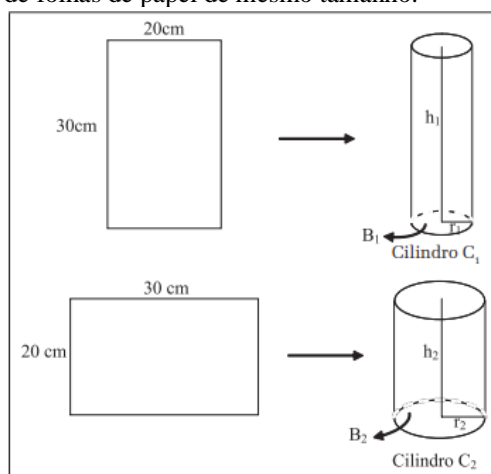
6) Problema baseado no livro de *Resolução de Problemas de Lourdes de la Rosa Onuchic*:

“A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

Jorge disse: – No meu cabe mais, porque é mais alto.

Ema disse: – No meu cabe mais, porque é mais largo.

Laura disse: – Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.



Quem está certo? Como você sabe?

### Para casa:

- 1) Construa sólidos redondos, como: esfera, cilindro e cone com raios variados. Compare os resultados de seus volumes.
- 2) Uma pilha de latas de leite está exposta num supermercado, em forma de pirâmide de base triangular, como mostra a figura abaixo.



Para montar uma pirâmide semelhante, um promotor de vendas usou 5 caixas contendo 24 latas em cada uma. Cada lata mede 15cm de altura e 10 cm de raio. Observe que, do topo para a base da pirâmide, a quantidade de latas é 1, 3, 6, e assim sucessivamente. Determine a altura da pirâmide formada pelo promotor de vendas e o seu volume.

## APÊNDICE L – TUTORIAL: VARIAÇÃO DO VOLUME DE UM CILINDRO INSCRITO EM UM CONE

- 1) Abra a janela de visualização 3D
- 2) Determine os pontos  $A = (0,0,0)$  e  $B = (0,0,5)$ ;
- 3) A partir desses pontos, desenhe o cone com centro de base em A, vértice em B e raio 3, escrevendo na caixa de entrada **Cone [A, B, 3]**;
- 4) Abra a janela de visualização 2D
- 4) Crie um controle deslizante **h**, verticalmente, de intervalo 0 a 5, incremento 0,01 e escala 500;
- 5) Volte na janela de visualização 3D
- 6) Determine o plano  $z = h$ ;
- 7) Obtenha a intersecção entre o cone e o plano anterior, escrevendo na caixa de entrada **intersecção [a, p]**;
- 8) Faça a intersecção **C** entre o plano y e o eixo z, digitando na caixa de entrada **intersecção [p, EixoZ]**;
- 9) Trace por **C** uma reta paralela ao eixo x;
- 10) Obtenha as intersecções **D** e **E** entre a **circunferência** e a reta traçada, da forma intersecção **[f, e]**;
- 11) Pelo ponto **E**, trace a reta perpendicular à base do cone e o plano xy;
- 12) Faça a intersecção **F** entre a reta perpendicular e o plano xy;
- 13) Crie o segmento **AF**, chamando-o de **i**, na opção **segmento [A, F]**;
- 14) Desenhe o cilindro inscrito no cone, na caixa de entrada escrevendo **cilindro [A,C,i]**;
- 15) Oculte as retas feitas anteriormente;
- 16) Abra a janela de visualização 2D;
- 17) Mova os eixos x e y; colocando-os no eixo **x = raio do cilindro**, com escala de 0 a 0,5 e no eixo **y = volume do cilindro**, com escala 2 em 2, na opção eixos em rótulo;
- 18) Obtenha o ponto **P** que tem por abscissa e ordenada, o raio e volume do cilindro, respectivamente, da seguinte forma **P = [i, volume(j)]**;
- 19) Na opção **Ponto [Ponto, Sólido]**; crie esse ponto;
- 20) Clique em **P** e mostre o rastro desse ponto;
- 21) Abra a janela de visualização 3D
- 22) Gire o cone;
- 23) Como a altura h desse cilindro é variável, faça algumas considerações que correlacione com a função obtida.