UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CRISTHIAN PIRES DA COSTA

A ABSTRAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE INTERAÇÕES ENTRE ENGRENAGENS LEGO®.

CATALÃO
2020

SIBI
SISTEMA DE BIBLIOTECAS UFG

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o(a) autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do(a) autor(a): Cristhian Pires da Costa

Título do trabalho: A ABSTRAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE INTERAÇÕES ENTRE ENGRENAGENS LEGO®.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Independente da concordância com a disponibilização eletrônica, é imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Cristhian Pires da Costa
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Fernando Kennedy da Silva
Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 16 / 04 / 2020

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] As assinaturas devem ser originais sendo assinadas no próprio documento. Imagens coladas não serão aceitas.

Versão GRT_BC_fev_2020

CRISTHIAN PIRES DA COSTA

A ABSTRAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE INTERAÇÕES ENTRE ENGRENAGENS LEGO®.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof.º Dr. Fernando Kennedy da Silva.

CATALÃO
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

PIRES DA COSTA, CRISTHIAN
A ABSTRAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE INTERAÇÕES ENTRE ENGRENAGENS LEGO® [manuscrito] / CRISTHIAN PIRES DA COSTA. - 2020.
CXCVI, 196 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. FERNANDO KENNEDY DA SILVA .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia, Catalão, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RC), Catalão, 2020.

Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Função Exponencial. 2. Engrenagens. 3. Sequência Didática. 4. Robótica Educacional. 5. LEGO®. I. , FERNANDO KENNEDY DA SILVA, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **08** da sessão de Defesa de Dissertação de **Cristhian Pires da Costa** que confere o título de Mestre(a) em **Matemática**.

Em 09 de abril de 2020, às 14h00min, reuniram-se os componentes da banca examinadora, professores(as) **Dr. Fernando Kennedy da Silva (IMTec) (orientador) - à distância pelo RNP, Dr. Fernando da Costa Barbosa (IMTec) - à distância pelo RNP e Dr. Deive Barbosa Alves (PPGecim / UFT) - à distância pelo RNP** para, em sessão pública realizada na Sala Virtual do Sistema de webconferência da Rede Nacional de Ensino e Pesquisa (RNP), procederem a avaliação da Dissertação intitulado(a) *"A ABSTRAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE INTERAÇÕES ENTRE ENGRENAGENS LEGO®.* ", de autoria de **Cristhian Pires da Costa - à distância pelo RNP**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da "UFG/RC - UFCAT em transição". A sessão foi aberta pelo(a) presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao(à) discente que, em 61 min procedeu a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o(a) examinando(a). Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerado(a): **(x) Aprovado(a)** ou ( ) **Reprovado(a)**. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16h03min a presidência da mesa encerrou a sessão e para constar, eu Fernando Kennedy da Silva, lavrei a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora e pelo(a) discente.

Obs: "*Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES n. 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:*

Art. 2o A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Fernando Kennedy Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2020, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando Da Costa Barbosa, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2020, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Deive Barbosa Alves, Usuário Externo**, em 09/04/2020, às 16:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **CRISTHIAN PIRES DA COSTA, Discente**, em 10/04/2020, às 19:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1270424** e o código CRC **A37D268C**.

Dedico este trabalho a minha filha Bella Valentina Pires Furquim, todas as horas e energias gastas, espero convertê-las em prol de nosso bem-estar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me concedido força e saúde para não desistir de um sonho por muitas vezes desacreditado.

Aos meus pais, a minha mãe, por sempre me apoiar e incentivar em meus estudos, ao meu pai, por juntar moedas em um cofre durante o ano todo para, a cada início de semestre, na época de minha graduação, ajudar-me a pagar a renovação da matrícula.

A meus irmãos, por sempre entenderem minha ausência nos momentos de lazer em família, por motivo de estudos.

A meu amigo Renato de Souza Nunes, por me incentivar a cursar uma faculdade.

A meu amigo Lucas Vieira, por ter sido meu maior companheiro, nos momentos difíceis e felizes da minha época de graduação.

A meu amigo e companheiro de profissão e mestrado, Tiago Miranda, por ter enfrentado junto comigo todas as dificuldades de dois estudantes humildes do interior, em desbravar um curso de mestrado em uma Universidade Federal, longe de nossas casas e realidades.

A meus alunos, que são meu combustível diário para querer sempre avançar em minha profissão e encontrar sentido ao final de um dia de trabalho.

A meus amigos de mestrado, que me ajudaram a superar todas as dificuldades para chegar até este momento, que compartilhavam também de histórias difíceis que me serviam de inspiração e eliminavam a possibilidade da desculpa para desistir.

Aos professores de minha banca de qualificação, Dr. Deive Barbosa Alves e Dr. Fernando da Costa Barbosa, pela enorme contribuição ao meu trabalho e seriedade para com meu projeto.

A minha filha, que, ainda que pequenininha, sempre me recebe com um sorrisinho no rosto, mesmo que, às vezes, eu tenha deixado de passear com ela por compromissos e datas a serem cumpridos.

Ao meu orientador Dr. Fernando Kennedy da Silva pela idealização deste trabalho.

A todos meus colegas de profissão, professores, que, mesmo diante de tantas dificuldades, em um país onde o que se tem como políticas públicas de nossa valorização são apenas falácias, não desanimam, não se curvam diante do sistema, quando este não cumpre sua função constitucional, e, ainda que sozinhos e sem incentivos, lutam para se aperfeiçoarem e serem amanhã profissionais melhores do que foram no final deste dia.

Diante de gigantes não se afugente. Suba em seus ombros.

Próprio autor.

RESUMO

Neste trabalho, o tema central é a abstração da função exponencial e do tipo exponencial de interações entre engrenagens do Kit LEGO® Mindstorms NXT. Isto, com o auxílio da construção de um carrinho com peças do kit, composto por um câmbio de 4 marchas, que funcionam sob uma taxa de variação exponencial. A motivação deste trabalho se deu em descobrir se seria possível ou não abstrair esta função, a partir de interações entre engrenagens que, em sua grande maioria, são associadas apenas às questões de proporcionalidades e, consequentemente, a funções lineares. Com análises e estudos feitos em materiais já produzidos, tanto sobre interações entre engrenagens, como sobre câmbios de marchas feitos de peças LEGO®, conseguimos efetuar a construção do câmbio proposto. Para isto, utilizamos de reduções de giros nas engrenagens, que, em sequência, formaram uma progressão geométrica, a qual, por sua vez, foi associada à função do tipo exponencial. Assim, esse câmbio é utilizado como objeto de estudo de uma sequência didática e de conteúdos, tanto no que diz respeito a sua construção (detalhada na sequência didática) como quanto a seu funcionamento (explorado em forma de exercícios). A sequência, com o objetivo de auxiliar o professor no ensino da função exponencial, é embasada pela teoria de Zabala (1998), que tem como alicerce as concepções construtivistas de Piaget (1978) sobre o processo cognitivo da construção do conhecimento. Sobre a escolha da utilização de engrenagens e tecnologias digitais na educação, com a ajuda da robótica educacional, trazemos as orientações de Saymon Papert (1985), autor da teoria construcionista. E com o resultado positivo deste trabalho, foi possível vislumbrar o grande arsenal matemático existente nas interações entre engrenagens, o que, quando associado à Robótica Educacional, permite trabalhar de forma plena o desenvolvimento integral dos alunos, por relacionar na execução de suas atividades, de forma simultânea, conceitos, procedimentos e atitudes.

Palavras-chave: Função Exponencial. Engrenagens. Sequência Didática. Robótica Educacional. LEGO®.

ABSTRACT

In this paper, the central theme is the abstraction of the exponential function and the exponential type of interactions between gears in the LEGO® Mindstorms NXT Kit. Through the construction of a cart using parts of this kit, was found that it is composed of a 4-speed gearbox, which works with an exponential rate of change. The motivation of this paper was to discover whether it would be possible or not to abstract this function, based on interactions between gears, that in the great majority, are associated only with the proportionality issues and, consequently, with linear functions. With analyzes and studies made based on materials already produced, both on interactions between gears, and on gear shifts made of LEGO® parts, we were able to do the construction of the proposed gearbox. For this, we use gears reductions of spins, which in sequence was able to create a geometric progression, which was associated with the exponential type of function. Thus, this gear is used as an study object of a didactic sequence and of contents, both with regard to its construction (detailed in the didactic sequence) and as to its functioning (explored in the form of exercises). The sequence, as an objective of assisting the teacher in teaching the exponential function is based on the Zabala's (1995) theory, which is based on Piaget's constructivist conceptions (1978) on the cognitive process construction of knowledge. Based on the choice of using gears and educational digital technologies, through educational robotics, we bring the guidance of Saymon Papert (1985), author of the constructionist theory. And with the positive result of this work, it was possible to see the great mathematical arsenal existing in the interactions between gears, which, when associated with Educational Robotics, allows to fully work on the integral development of the students, by relating in the execution of their activities, in a simultaneously way, such as concepts, procedures and attitudes.

Keywords: Exponential function. Gears. Following teaching didactics. Educational Robotics. LEGO®.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A função exponencial, conteúdo abordado no primeiro ano do ensino médio na disciplina de matemática, está presente em várias situações do cotidiano e possui aplicabilidade em diversas áreas. Como na arqueologia, economia, biologia, física, engenharias etc., o seu papel é sempre importante ao caracterizar um tipo de crescimento ou decrescimento específico, em que a taxa de variação não é constante como na linear, mas, proporcional. Costuma-se dizer que tal função apresenta um comportamento "explosivo", pelo seu rápido crescimento ou decréscimo. Como, por exemplo: *Se é oferecido a uma pessoa duas opções financeiras: 1 milhão de reais no último dia do próximo mês ou 1 real no primeiro dia do próximo mês com a condição de dobrar tal valor a cada dia até o último do mês*, qual seria a escolha mais vantajosa financeiramente para ela?

Nesse exemplo, é levado em consideração o acentuado crescimento caracterizado como exponencial, pois, apesar de 1 milhão de reais ser bem maior que 1 real, como este valor é sempre dobrado, no vigésimo primeiro dia do mês ele já terá ultrapassado o valor de 1 milhão. Esse crescimento exponencial representa uma parte de todo o conteúdo que envolve a função em si, da mesma maneira que a característica de transformar produtos em soma, ou ainda a representação da curva catenária e os juros cobrados em transações financeiras pelos bancos (os juros compostos) e diversas outras situações cotidianas e também complexas.

Portanto, a aplicabilidade dessa função em diversas áreas e suas características específicas foram fatores motivadores para a escolha deste tema. E, consequentemente, ficou escolhido também o público-alvo, uma vez que seu ensino na educação básica ocorre no nível médio, frequentemente no primeiro ano, conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017).

Escolhidos, então, o tema e o público, a questão passaria a ser de como trabalhar esse tema, pois era necessário encontrar uma forma de abordar a função exponencial que despertasse interesse por parte dos alunos, motivando-os a querer entender seu comportamento e suas aplicabilidades e, além disso, que instigasse o professor a se capacitar ainda mais para o conteúdo. Com isso, pretendia-se que, de certa forma, houvesse a abstração da função para que o aluno tivesse a percepção dela a partir de sua passagem do concreto para o abstrato, e que ao mesmo tempo isso fosse feito de maneira atual.

Deste ponto de vista, seguindo esses anseios, escolhemos abordar o tema utilizando tecnologia. O que foi feito com embasamento na teoria Construtivista, na qual se aponta a criação de novos conhecimentos como fruto de interações entre indivíduo, objetos e o meio social, sob o viés do aprender fazendo, instruído por Papert (1985), assim como em sua indicação do uso de engrenagens como forma eficiente para o ensino de matemática, para tanto optamos pela utilização do Kit LEGO® Mindstorms NXT.

No intuito, então, de associar a robótica por meio do Kit LEGO® com a função exponencial, mediante interações entre engrenagens, chegamos à pergunta norteadora deste trabalho: **seria possível abstrair a função exponencial de interações entre engrenagens LEGO® e, com estas interações, construir um câmbio de marchas que possa ser objeto de estudo em uma sequência didática para auxílio no ensino da função exponencial?**

Deste modo, o objetivo principal deste trabalho é a abstração da função exponencial, por meio do funcionamento do câmbio de 4 marchas, construído com o Kit LEGO® Mindstorms NXT, sendo este, objeto de estudo da sequência didática, aplicada como auxílio para o ensino da função exponencial.

Dos objetivos específicos temos:

1. Demonstrar aos professores e pessoas interessadas na educação e no ensino de maneira geral, a importância de um entendimento da construção do conhecimento nas crianças e adolescentes.
2. Ressaltar a importância do ensino através do aprender fazendo, tendo o aluno participação ativa em seu processo de aprendizado.
3. Apresentar a Robótica Educacional como um excelente recurso para a inovação em aulas e nova forma de apresentação de conteúdos.
4. Promover o ensino da função exponencial e suas aplicabilidades em nosso meio.
5. Revisar o conteúdo de proporcionalidade graças a interações entre as engrenagens LEGO®.
6. Relacionar a função linear com os fatores de proporcionalidades das interações entre as engrenagens.
7. Modelar, com o auxílio de composições de funções lineares, interações mais complexas entre engrenagens.
8. Produzir progressões aritméticas e geométricas mediante de interações de trens de engrenagens.
9. Associar funções exponenciais e do tipo exponencial a progressões geométricas.
10. Apresentar o câmbio de marchas e detalhar sua construção.

A partir de tais objetivos, o trabalho foi estruturado da seguinte forma:

No segundo capítulo é feita uma apresentação dos autores e suas teorias, respectivamente: o Construtivismo de Jean Piaget (1978) e o Construcionismo de Seymour Papert (1985).

O terceiro capítulo trata da relação tecnologia e educação apontando os benefícios e as orientações a serem seguidas sobre essa relação de acordo com a BNCC, e um breve histórico das tecnologias digitais na educação e da situação atual delas.

No quarto capítulo, o tema apresentado é a função exponencial, ressaltando-se a importância de seu estudo, suas aplicabilidades e as orientações existentes para seu ensino no nível médio.

No quinto capítulo, é detalhado o tipo de material que foi utilizado na construção do câmbio de marchas, utilizado na sequência didática, o Kit LEGO® Mindstorms NXT.

O sexto capítulo é destinado aos conceitos matemáticos que norteiam este trabalho e associá-los às construções em que se utilizou o Kit LEGO®®. Entre os conceitos estão: proporcionalidade, função, monotonicidade, função linear, composição de funções, progressões aritméticas e geométricas, funções exponenciais e do tipo exponencial. Esse momento do trabalho tem como referencial teórico principalmente obras do professor Elon Lages Lima (LIMA et al., 2010; LIMA, 2013).

O sétimo capítulo é destinado à sequência didática, no qual se explica, na teoria, o que vem a ser uma, segundo Zabala (1998), e detalha-se toda estrutura de aulas, conteúdos e exercícios a serem aplicados na sequência resultante deste estudo e, ao final dela, será explicado o funcionamento e a construção do câmbio de 4 marchas, modelado pela função do tipo exponencial.

Por fim no oitavo capítulo, destinado às considerações finais, apresentaremos um resumo de toda a evolução no processo envolvido neste trabalho, os desafios superados e resultados e conclusões obtidas.

2 CONSTRUTIVISMO – CONSTRUCIONISMO

Como este trabalho consiste em uma sequência didática de conteúdos, embasada na teoria e definições de Zabala (1998), e essa teoria, por sua vez, fundamenta-se na perspectiva construtivista cognitiva de Piaget (1978). A partir desse contexto, iniciamos este capítulo com um breve levantamento sobre Piaget e sua teoria, o Construtivismo Cognitivo. E após isso, sendo o objeto de estudo da sequência didática um câmbio de marchas construído a partir de engrenagens LEGO®, há na sequência uma seção sobre Papert e sua teoria Construcionista. Isso se faz necessário porque esse autor, além de também ter utilizado na elaboração de sua teoria – o Construcionismo – a perspectiva construtivista, apresenta uma relação íntima e afetiva com as engrenagens, conforme relatado no prefácio de seu livro, sob o título: *As engrenagens de minha infância*, as quais, para ele, foram fundamentais para seu entendimento das questões matemáticas durante a escola. Conforme ele menciona, *Engrenagens, servindo como modelos, facilitaram o meu acesso a ideias que eram muito abstratas.* (PAPERT, 1985, p. 12). E ainda, Papert foi um dos primeiros a promover a integração entre tecnologias digitais e educação, a princípio, pelo intermédio da informática e, posteriormente, pela Robótica Educacional.

2.1 PIAGET – E O CONSTRUTIVISMO COGNITIVO

Jean Piaget nasceu em Neuchâtel, na Suíça francesa, em 9 de agosto de 1896 e faleceu em 1980. Conforme Palangana (2001), Piaget (como é mais conhecido) licenciou-se em Ciências Naturais, na Universidade de Neuchâtel em 1915, após três anos concluiu seu doutorado sobre moluscos da região de Valois, ainda na Suíça. Influenciado pela sua formação na área da Biologia, Piaget acreditava, a princípio, que os processos de conhecimento teriam relação com alterações biológicas, de modo que tanto ações externas como os pensamentos de um indivíduo implicariam em uma organização lógica. E é dessa forma que ele busca, então, associar estas duas variáveis – o lógico e o biológico – em uma única teoria, sobre o conhecimento humano.

Nessa busca, ainda conforme Palangana (2001), ele deparava-se com dois entraves para a criação de um modelo teórico que explicasse a estrutura do conhecimento. Ora pretendia apoiar-se no campo da Filosofia, porém este se demonstrava estritamente abstrato e intuitivo, ora no campo da Biologia, que, por sua vez, partia de experimentos. Foi então que, no objetivo de associar, as duas áreas – Filosofia e Biologia – ele recorreu à Psicologia, tomando-a como base para a sua proposta teórica, possibilitando um tratamento científico para os procedimentos experimentais pertinentes a área.

Com o início de seus estudos e a convicção da importância da psicologia experimental na elaboração da epistemologia do conhecimento humano, Piaget aplicava testes a um grande número de crianças. Nas respostas delas, o que mais lhe chamara a atenção não eram as respostas certas, mas sim as erradas. Por meio delas, observou que crianças com a mesma idade apontavam erros iguais. Portanto, decidiu que deveria analisar a finco não a quantidade de respostas corretas de cada criança, mas a qualidade das respostas, pois, assim, seria possível compreender em qual patamar se encontrava a lógica do pensamento mental de cada criança e que esta lógica era qualitativamente diferente da lógica adulta, despertando a necessidade de entender como se ocorre essa transformação (PALANGANA, 2001).

Já no início de seus estudos, na análise destes testes supracitados, Piaget constatou que a lógica do pensamento humano não é inata, mas que se desenvolve gradativamente. Dessa maneira, concluiu que procedimentos experimentais definitivamente seriam capazes de apontar a origem do conhecimento humano. Esse projeto piagetiano (como podemos chamá-lo) de elaborar uma epistemologia, tornou-se mais consistente em 1955, com a criação do Centro Internacional de Epistemologia Genética, fundado por ele próprio. Nesse contexto e com esse aparato, o até então projeto piagetiano veio a se tornar a obra piagetiana, focada na explicação do processo de desenvolvimento do pensamento.

Essa obra é dividida em dois momentos: no primeiro, a importância se dá à estrutura do pensamento, à linguagem e à interação entre as pessoas, revelando, dessa forma, um modelo mais comprometido com o social; e, no segundo momento, que vem a ser o modelo psicogenético mais difundido hoje, o foco passa a ser na manipulação de objetos, o que, juntamente com a maturação biológica, passa a constituir a estruturação do pensamento (PALANGANA, 2001).

Ainda segundo Palangana (2001), Piaget instala sua teoria da gênese do conhecimento, nos desenvolvimentos cognitivos da criança, mas não deixando de lado um teor filosófico em sua teoria, demonstrado em afirmações como:

> Epistemologia é a teoria do conhecimento válida e, mesmo que esse conhecimento não seja jamais um estado e constitua sempre um processo, esse processo é essencialmente a passagem de uma validade menor para uma validade superior. (PIAGET, 1978, p. 14).

À época de seus estudos, havia concepções psicológicas sobre o processo do conhecimento menos propagadas, que podiam ser vistas como duas perspectivas: a inatista e a ambientalista. Uma parte dos estudiosos do assunto, a partir da filosofia idealista, desenvolvia uma psicologia de caráter inatista, de modo que, no processo do conhecimento, fatores internos do indivíduo tinham grande destaque no processo, consequentemente, o sujeito se sobrepunha ao objeto. A partir disso, concluía-se que o meio apresentava papel secundário no desenvolvimento mental do sujeito.

Enquanto isso, outro grupo, com base na epistemologia positivista, atribuía aos fenômenos psíquicos elementares o efeito da causalidade, abordando dessa maneira uma perspectiva – ambientalista – onde o objeto se impõe ao sujeito. E é neste meio que Piaget insere sua teoria psicogenética, trazendo nela marcas desse dualismo.

Parte importante em seus estudos foi a introdução do método clínico, que apresentava em sua concepção atividades como o diálogo não padronizado, mantido entre o pesquisador e a criança, o que possibilitava maior entendimento do pensamento infantil, fugindo dos métodos tradicionais da época, que oferecia perguntas elaboradas previamente. Porém, neste método, era de suma importância, segundo Freitag (1986), que:

> Em cada momento do diálogo ele precisa ter uma hipótese de trabalho clara, para compreender adequadamente as justificativas (verbais) que a criança dá para as suas ações e estar em condições de fazer as perguntas certas, que permitam maior aproximação à estrutura cognitiva da criança. No método clínico, o que importa é que as crenças e representações espontâneas da criança sejam corretamente captadas, a fim de se obter aquelas respostas que – do ponto de vista da teoria e do interesse científico – sejam realmente relevantes. (FREITAG, 1986, p.46).

Portanto, o pesquisador sempre deve manter em foco os objetivos de sua pesquisa, ou seja, sua teoria e suas hipóteses. Que se tratando de sua teoria psicogenética, Piaget transfere da biologia algumas concepções como:

> [...] o ajustamento de antigas estruturas a novas funções e o desenvolvimento de novas estruturas para preencher funções antigas, o que pressupõe, no desenvolvimento, uma corrente contínua onde cada função se liga a uma base pré-existente e, ao mesmo tempo, se transforma para ajustar-se a novas exigências do meio, ocorrendo, então, o que Piaget denomina de adaptação. Assim sendo, segundo Piaget, dois princípios básicos e universais da biologia – estrutura e adaptação – encontram-se também presentes na atividade mental, já que, para ele, a inteligência é uma característica biológica do ser humano. (PALANGANA, 2001, p. 20).

Ainda segundo Palangana (2001), para Piaget desenvolvimento cognitivo, apresenta estágios, os quais partem de exercícios dos reflexos da criança, os quais ele considera inatos, que se transformam em esquemas motores através da ação e, portanto, a criança constrói gradativamente suas estruturas cognitivas. Sobre esses esquemas na teoria piagetiana, Chiarottino define que:

> O esquema é a condição primária da ação, ou seja, da troca do organismo com o meio. Ele é engendrado pelo funcionamento geral de toda organização viva, a adaptação. O organismo com sua bagagem hereditária, em contato com o meio, perturba-se, desequilibra-se e, para superar esses desequilíbrios, ou seja, para adaptar-se, constrói os esquemas (CHIAROTTINO, 1984, p.34).

E, dessa forma, Palangana (2001, p. 21) conclui: “É somente na troca do organismo com o meio que se dá a construção orgânica das referidas estruturas”. A saber, estruturas cognitivas, que permitem que a criança tenha a capacidade de elaborar relações de inclusão, de ordem, de correspondência etc. Relações que contribuem para que a criança dê significado ao real, a princípio ao concreto e, após, ao abstrato. E assim é que se conclui que as estruturas mentais não são transmitidas pela hereditariedade, são ocorrência da ação do indivíduo com o meio e das trocas advindas dessa interação. Podemos, ainda, classificar a teoria piagetiana sobre o conhecimento como interacionista. Afinal, com ele, evidencia-se que o conhecimento não advém do sujeito, nem tão pouco do objeto, mas que é construído da interação entre estes.

Vale ressaltar que é esta interação que desencadeia a adaptação já relatada anteriormente. Para Piaget essa adaptação é composta por dois momentos: assimilação e acomodação. No processo de assimilação, o indivíduo associa o que recebeu do meio externo com suas estruturas mentais já existentes, compreendendo o que lhe está sendo apresentado. Mas o que ocorre quando ele não consegue realizar esta associação com as estruturas já existentes? É neste momento que ocorre o desequilíbrio dessas estruturas e, dessa forma, elas são novamente organizadas, afim de, então, acomodar a nova informação, criar-se novas estruturas e, consequentemente, um novo conhecimento.

2.2 SEYMOUR PAPERT – E O CONSTRUCIONISMO

Conforme dados disponíveis no MIT Media Lab (2020), Seymour Papert nasceu em 29 de fevereiro de 1928, na África do Sul, e faleceu em 31 de julho de 2016. Papert (como ficou conhecido) formou-se em matemática no ano de 1949, na Witwaterstrand University, onde também se tornou PhD em matemática em 1952. E em 1959, recebeu seu segundo título de PhD em matemática, pela Cambridge University. Papert, no intuito de entender como as crianças poderiam aprender a pensar, estudou em Genebra, no início da década de 60, com

Jean Piaget. Matemático de formação, utilizava-se da matemática para tais estudos. Iniciou seus estudos no MIT (Massachusetts Institute of Techonology), primeiramente como pesquisador e posteriormente como diretor do Laboratório de Inteligência Artificial do referido instituto. Criou, junto de sua equipe, a linguagem de programação LOGO, para computadores, voltada para o ensino e aprendizado de crianças.

Influenciado pelos estudos realizados juntos a Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo – interacionista – isto aliado à busca por um método de ensino e aprendizagem com foco na matemática e, eficaz para crianças, utilizando da tecnologia advinda dos computadores, Papert (1994), então, como ele próprio descreve, faz uma "*reconstrução pessoal do Construtivismo, o Construcionismo*".

Deste modo, enquanto o construtivismo se ocupa em explicar como uma criança passa de um nível de menor conhecimento para um nível de maior conhecimento, o construcionismo busca explorar a relação do aprendiz com as ferramentas de aprendizagem. Nessa perspectiva, segundo Papert (1994), o aprendiz deve construir o seu próprio conhecimento, e isto com o auxílio do computador, ou seja, há a valorização do saber fazer. E, ainda segundo ele, essa construção é de interesse do próprio aprendiz, o que produz motivação e posteriormente melhor aprendizagem. Papert, então, define:

> Assim, o Construcionismo, minha reconstrução pessoal do Construtivismo, apresenta como principal característica o fato que examina mais de perto do que os outros ismos educacionais a ideia da construção mental. Ele atribui especial importância ao papel das construções no mundo como um apoio para o que ocorreu na cabeça, tornando-se, desse modo, menos uma doutrina puramente mentalista. Também leva mais a sério a ideia de construir na cabeça reconhecendo mais um tipo de construção (algumas delas tão afastadas de construções simples como cultivar um jardim) e formulando perguntas a respeito dos métodos e materiais usados. (PAPERT, 1994, pp.127-128).

Em sua teoria Construcionista, a construção do conhecimento é favorecida, quando há a criação de micromundos – ambientes intelectuais onde o falso ou verdadeiro, certo ou errado, não são decisivos (PAPERT, 1985, p. 163) - com participação do educador, como mediador das instruções e orientador na construção de objetos relevantes, que possibilitem ao aprendiz testar suas ideias, confirmar suas conclusões, ou mesmo verificar seus erros, isto em um trabalho coletivo, que fomente a socialização e a cooperação em prol da construção de algo, de comum interesse.

É no intuito de criar tais micromundos que Papert desenvolveu a linguagem de programação LOGO. Uma linguagem relativamente simples, se comparada a linguagens de programação profissionais, mas que apresentam os mesmos recursos de uma linguagem profissional e os mesmos pontos a serem superados em relação à lógica de programação. Com essa linguagem, o aprendiz em relação à máquina, inverte os papeis e passa a ensiná-la o que deve ser feito. Essa independência do aprendiz em seu momento de estudo é um dos objetivos de Papert:

> [...] as crianças farão melhor descobrindo (‘pescando’) por si mesmas o conhecimento específico de que precisam; a educação organizada ou informal poderá ajudar mais se certificar-se de que elas estarão sendo apoiadas moral, psicológica, material e intelectualmente em seus esforços (PAPERT,1994, p. 135).

Portanto, segundo aponta em sua teoria, quando a criança descobre, conclui, ou, como ele mesmo diz, “*pesca*” o conhecimento, este é mais bem interiorizado por ela. E, ainda, quando ele utiliza a expressão: “*conhecimento específico de que precisam*”, demonstra a questão do afeto e do acreditar ser importante o que se está a aprender, ambas fundamentais também para a interiorização de conhecimentos conforme sua teoria.

2.2.1 Papert – E as Engrenagens de Minha Infância

Segundo relata em seu livro, *Logo: Computadores e Educação [Mindstorms: children, computers and powerful ideas]*, Papert (1985) teve em sua infância uma relação afetiva com engrenagens como brinquedos. Segundo ele, antes de seus dois anos de idade, já se interessava bastante por automóveis, os nomes das peças que compunham o carro faziam parte de seu vocabulário, e, à medida que foi crescendo, a parte do diferencial nos carros, juntamente com as engrenagens que o compõe, tornaram-se sua parte favorita. Brincar com engrenagens era seu melhor passatempo: “*Adorava girar objetos uns contra os outros em movimentos circulares e, naturalmente, meu primeiro "projeto de construção" foi um sistema rudimentar de engrenagens.*” (PAPERT, 1985, p. 11).

Ele associava a relação entre os giros das engrenagens ao que lhe era ensinado na escola, conseguindo assimilar melhor o entendimento de conteúdos abstratos:

> [...] Engrenagens, servindo como modelos, facilitaram o meu acesso a ideias que eram muito abstratas.[...] Eu via as tabuadas como engrenagens, e meu primeiro contato com equações de duas variáveis (por exemplo, 3x x 4y = 10) evocaram imediatamente o diferencial. Quando eu estabelecia um modelo mental de engrenagens para a relação entre x e y, imaginando quantos dentes cada uma delas necessitava, a equação tornava-se um ser amigável. (PAPERT, 1985, pp. 11-14).

Ao utilizar a expressão, "*a equação tornava-se um ser amigável"*, ele reforça um dos pontos de sua preocupação em fazer uma reconstrução pessoal do construtivismo de Piaget. Os conceitos do construtivismo são sensos comuns para Papert (1985). Porém, ele aponta uma preocupação sobre o que, segundo ele, não encontrou na teoria de Piaget, o lado afetivo no processo de assimilação de novos conhecimentos. Sobre o processo de assimilação ele diz:

> [...] quando li Piaget, este incidente me serviu como modelo para a noção de assimilação que ele propôs, apesar de ficar muito impressionado pelo fato de sua discussão não fazer justiça total às suas próprias ideias. Ele praticamente só fala sobre os aspectos cognitivos da assimilação, sem levar em conta o componente afetivo. A assimilação de equações em termos de engrenagens é certamente uma maneira poderosa de fazer com que um conhecimento anterior seja relevante à compreensão de um novo assunto. Mas este esquema ainda faz mais. Estou certo que tais assimilações fizeram com que a matemática tivesse, para mim, um caráter afetivo que remonta às experiências com carros durante minha infância. (PAPERT, 1985, p. 12).

Portanto, para Papert, assimilar novos conhecimentos implica em tomar como base, ou modelo, conhecimentos já adquiridos, tendo relativa importância a maneira de como ocorrerá esta aquisição. Logo, ele afirma:

> Aos poucos, comecei a formular o que ainda considero o fato fundamental sobre aprendizagem: qualquer coisa é simples se a pessoa consegue incorporá-la ao seu arsenal de modelos; caso contrário tudo pode ser extremamente difícil. (PAPERT, 1985, p. 13).

Portanto podemos deduzir duas situações, primeiro, que temos um ciclo recursivo, pois aprender novos conhecimentos gera um maior arsenal de modelos disponíveis na mente, o qual, por sua vez, é utilizado na assimilação de outros novos conhecimentos. Ou seja, quanto mais se aprende, mais se está apto a aprender. E segundo, que, ao nascer precisamos de uma bagagem hereditária de conhecimentos, para que estes sirvam de iniciais modelos, caso contrário os primeiros aprendizados seriam extremamente difíceis, o que também está em acordo com a teoria de Piaget. Associando, então, as ideias de Piaget com a experiência na infância com as engrenagens, Papert atribui a elas uma eficaz ferramenta no ensino de conteúdos matemáticos:

> Os trabalhos de Piaget me deram uma nova perspectiva para olhar as engrenagens de minha infância. Elas podem ser usadas para ilustrar muitas ideias matemáticas poderosas e avançadas, tais como teoria dos grupos ou movimento relativo. Mas elas fazem ainda mais que isso. Assim como as engrenagens estão relacionadas com o conhecimento matemático formal, relacionam-se também com o conhecimento corporal, com o esquema sensório-motor de uma criança. Você pode ser a

> engrenagem, você pode entender coma ela se movimenta projetando seu próprio corpo em seu lugar e girando com ela. E essa dupla relação – tanto abstrata quanto sensorial – é que dá à engrenagem o poder de suscitar inúmeras ideias matemáticas na mente. (PAPERT, 1985, pp. 13-14).

Deste contexto, utilizando de interações entre engrenagens, propomos a construção de um câmbio de marchas com o KIT LEGO® Mindstorms NXT (detalhado posteriormente), com seu funcionamento modelado pela função do tipo exponencial. Esse câmbio, inserido como objeto de estudo em uma sequência didática de conteúdos, pode ser utilizado como auxílio no ensino da função, assim como na revisão dos conceitos prévios necessários e utilizados durante o processo de construção.

3 TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

“Educação e Tecnologias são indissociáveis”, afirma Kenski (2007), em seu livro, *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação*, onde também ressalta que, segundo o dicionário Aurélio, a educação diz respeito ao processo de desenvolvimento da capacidade física, intelectual e moral da criança e do ser humano em geral, visando a sua melhor integração individual e social (AURÉLIO, 2002 apud KENSKI, 2007, p. 43).

Integração em uma sociedade cada vez mais tecnológica, conforme aponta FGV (2018), que já tem mais de um smartphone ativo por habitante, ou seja, a utilização de tecnologias digitais no cotidiano das pessoas, já é algo natural em nosso país. Dessa forma, sobre esta integração no meio tecnológico Kenski (2007) orienta:

> Para que ocorra essa integração, é preciso que conhecimentos, valores, hábitos, atitudes e comportamentos do grupo sejam ensinados e aprendidos, ou seja, que se utilize a educação para ensinar sobre as tecnologias que estão na base da identidade e da ação do grupo e que se faça uso delas para ensinar as bases dessa educação.(KENSKI, 2007, p. 43).

Todavia, sendo essa integração (Tecnologias e Educação) indissociável, conforme Kenski (2007), se em dado momento houve um processo educacional, houve também a utilização de uma ou mais tecnologias. Então, se faz necessário perguntar qual o real conceito de tecnologias? De acordo com Kenski (2007, p. 15), as tecnologias são tão antigas quanto à espécie humana. E, ainda:

> Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de tecnologia. (KENSKI, 2007, p. 24).

Logo, desde ao processo de construção e utilização de um computador, quanto ao de um lápis, estamos tratando de tecnologias. Quando estabelecemos códigos ou signos, sejam sonoros, visuais, ou palpáveis, para transmitir uma informação, estamos criando um tipo de linguagem e, portanto, também estamos tratando de tecnologias. O fato é que algumas tecnologias se tornaram, e outras vão se tornando, tão naturais em nosso cotidiano, que passam a ser transparentes aos nossos olhos.

No meio educacional, esse não reconhecimento de todas as tecnologias que nos cercam, não é diferente. Conforme aponta Tangreyse Ehalt Macedo (2007), em seu artigo:

"As tecnologias da informação e comunicação como ferramenta de enriquecimento para a educação":

> Hoje em dia, quando a expressão "Tecnologia na Educação" é empregada, dificilmente se pensa em giz e quadro negro, ou mesmo, livros e revistas, muito menos em entidades abstratas como currículos e programas. A fala humana, a escrita e conseqüentemente, aulas, livros e revistas, currículos e programas, são tecnologias, e muitos educadores vêm usando tecnologia na educação há muito tempo. É apenas a sua familiaridade com essas tecnologias que as torna transparentes a eles. (MACEDO, 2007, p. 7).

Logo, a questão de orientações e incentivos quanto ao uso de tecnologias na educação, como na BNCC – que será detalhada posteriormente –, é mais específica quanto às novas tecnologias. Essa ideia também não pode ser tratada de maneira superficial, pois conforme Kenski (2007):

> O conceito de novas tecnologias é variável e contextual. Em muitos casos, confunde-se com o conceito de inovação. Com a rapidez do desenvolvimento tecnológico atual, ficou difícil estabelecer o limite de tempo que devemos considerar para designar como "novos" os conhecimentos, instrumentos e procedimentos que vão aparecendo. O critério para a identificação de novas tecnologias pode ser visto pela sua natureza técnica e pelas estratégias de apropriação e de uso. (KENSKI, 2007, p. 25).

Nesse sentido, quando uma escola troca quadro negro e giz, por quadro branco e pincel, ou, ainda, por uma lousa digital, se a funcionalidade permanece a mesma, houve apenas uma inovação para execução de determinada atividade, mas não a apropriação de uma nova tecnologia.

Portanto, buscamos em nosso trabalho, promover a integração da tecnologia e educação, porém, mais especificamente a Tecnologia Digital, que aborda os computadores, "softwares", recursos digitais, etc., e que tem como um de seus frutos (desta integração Educação e Tecnologia Digital) a Robótica Educacional, utilizada em nosso trabalho. E a seguir coloca-se as orientações, conforme a BNCC, sobre esta integração.

3.1 BNCC – BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR – DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Homologada em 21 de dezembro de 2017, pelo então ministro da Educação, Mendonça Filho, a BNCC do Ensino Médio, segundo consta no próprio documento, é:

> [...] de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)1, e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 7).

Com sua homologação, a BNCC passa a ser a referência obrigatória na construção de todos os currículos escolares no país, desde o ensino infantil, ao ensino fundamental e médio. A BNCC referente aos ensinos infantil e fundamental já havia sido homologada no início de 2017.

Nesse documento, são definidos então os conjuntos de aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas pelas escolas:

> Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 8).

A respeito do termo competências, a BNCC define que:

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 8).

E dentre as dez competências, se tratando do uso da tecnologia, mais especificamente da digital, na educação, por ser o foco de nosso trabalho, podemos destacar as seguintes orientações:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo [...] digital para entender e explicar a realidade; [...] formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas; Utilizar diferentes linguagens – [...] sonora e digital [...]; Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação [...]. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 9)

Como se pode perceber, o uso de tecnologias digitais na educação de fato não necessita mais de debates voltados para a sua defesa, esse uso já faz parte das normas de nosso sistema educacional. Apenas para reforçar esta ideia, no corpo do documento BNCC do

Ensino Médio, a palavra *tecnologia(s)* é citada 147 vezes, ao longo das suas 150 páginas, nestas, em sua grande maioria, é citada junto ao contexto digital ou no contexto de novas tecnologias de comunicação e informação, o que demonstra, dessa maneira, tamanha importância e presença dessa questão.

Segundo consta na BNCC do ensino médio, esta última fase do ensino básico, atualmente vem sendo o gargalo na garantia do direito à Educação, com relevantes taxas de evasão e baixo desempenho em avaliações nacionais, como no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), em que obteve a nota de 3,8 em 2017, enquanto a meta era de 4,7.

Ainda conforme a BNCC do Ensino Médio, o currículo até então utilizado apresenta excesso de componentes curriculares e abordagens pedagógicas distantes das culturas juvenis e do mundo do trabalho. Posto isto, um dos desafios apontados para uma base escolar, neste nível, é que além de contribuir para a permanência desses alunos na escola até a conclusão da educação básica, deve haver nela também aprendizagens que correspondam às aspirações presentes e futuras dos estudantes.

De acordo com a DCN (Diretrizes Curriculares Nacionais), a forma de trabalho no ensino médio deve ser:

> Com a perspectiva de um imenso contingente de adolescentes, jovens e adultos que se diferenciam por condições de existência e perspectivas de futuro desiguais, é que o Ensino Médio deve trabalhar. Está em jogo a recriação da escola que, embora não possa por si só resolver as desigualdades sociais, pode ampliar as condições de inclusão social, ao possibilitar o acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho. (BRASIL, 2011apud BNCC do ENSINO MËDIO, 2017, p. 462).

À vista disso, uma forma da escola contribuir no combate das desigualdades sociais, como aponta a DCN, é possibilitando aos alunos – em especial aos do ensino médio – acesso à ciência e à tecnologia. O que faz parte da nossa proposta didática a ser apresentada pela Robótica Educacional. Mas, de fato, este acesso tem ocorrido?

3.1.1 As Tecnologias Digitais nas Escolas Públicas Brasileiras

Do mesmo modo que as contundentes orientações quanto ao uso das tecnologias digitais na BNCC supracitadas, normativas e programas educacionais, com o objetivo de promover tecnologias digitais na educação, são criados no Brasil desde a década de 1980, como o pioneiro EDUCOM, sobre o qual Moraes (2016) afirma o seguinte:

> Em julho de 1983, o Comitê Executivo da CE/IE nº 11/83,aprovou o Projeto Brasileiro de Informática na Educação (Educom),com o objetivo de realizar estudos e experiências nesse setor visando formar recursos humanos para ensino e pesquisa e criar programas informáticos por meio de equipes multidisciplinares. (MORAES, 2016, p. 32)

Para implementação deste programa, foi solicitado às principais Universidades do Brasil, na época, que formulassem e enviassem ao governo federal propostas para criação de centros-piloto nas Universidades. E após a consolidação destes centros, estes seriam estendidos às escolas públicas. Sobre este programa, em 1992, o MEC deu o seguinte parecer:

> Cumpre destacar, em nível de sistema educacional brasileiro, a contribuição do Projeto Educom para a criação de uma cultura nacional de informática na educação, possibilitando a liderança do processo de informatização da educação brasileira centrada na realidade da escola pública”.[...] Na realidade, apesar dos percalços, confirma-se a certeza da opção governamental de iniciar a informatização da educação brasileira a partir do conhecimento acumulado nas universidades e repassá-la, posteriormente, à comunidade em geral e às Secretarias de Educação, em particular.(ANDRADE;LIMA,1993, p. 181).

Porém, mesmo com o parecer, a ampliação do projeto não ocorreu:

> [...] em 1995 (com quase onze anos de Educom), ainda eram reduzidas as escolas públicas que se informatizaram. Dado o sucateamento da Educação, Ciência e Tecnologia no início dos anos 1990, avaliado pela Comissão Parlamentar e Mista de Inquérito (CPMI) do Congresso, os Educoms não se ampliaram, muitos se desarticularam e os centros sobreviventes tornaram-se apenas ilhas de excelência para as pesquisas das próprias universidades envolvidas com a informática educativa, não expandindo, consequentemente, os benefícios alcançados para o restante da sociedade. (MORAES, 1996, p. 150).

Ainda segundo Moraes (2016), a escassez de uma política clara e permanente quanto à informática na educação, quanto a recursos financeiros e programas, ocasionou evasões dos membros das equipes por não transmitirem certa segurança financeira. Como aponta:

> Nossa tese é de que essas dificuldades foram o resultado do paralelismo tecnocrático dessa política de informática educativa desde o seu nascimento oficial, em 1980 até 1996, pois enquanto não houver uma política transparente, os recursos vão oscilar ao sabor dos interesses da cúpula governamental. (MORAES, 2016, p. 49).

E o autor ainda completa que:

> Se na política educacional onde há constitucionalmente recursos e metas claramente definidos, estes são reiteradamente descumpridos, quanto mais não o foram os recursos dessa educação tornada “paralela”. (MORAES, 2016, p. 50).

Logo, sobre o projeto EDUCOM, Moraes (2016) conclui:

> [...] os centros-piloto do Educom ao longo dos seus 11 anos de existência (1984-1995), tiveram seus resultados satisfatórios muito mais promovidos pelo empenho pessoal de educadores, pesquisadores e alunos de diversos níveis junto à própria estrutura das universidades (somado a alguns poucos técnicos ministeriais sensíveis ao projeto) do que pela constância no fomento das agências financiadoras e do MEC. Alguns técnicos empenharam-se, mas esbarraram em entraves superiores intransponíveis, sobretudo após 1990. (MORAES, 2016, p. 50).

E em 1996, com a eleição de Fernando Henrique Cardoso para presidente do Brasil, e a nomeação para Ministro da Educação de Paulo Renato de Souza, conforme Moraes (2016), é encerrado o programa EDUCOM e implantado o PROINFO (Programa de Informática na Educação). Vale ressaltar, ainda, que, segundo Moraes (2016), o Ministro, ao relatar sobre o programa em um livro de sua autoria, a saber, *A Revolução Gerenciada*, (SOUZA, 2005), simplesmente não cita iniciativas anteriores, no Brasil, que tinham como intuito promover a informática na educação, dando a entender que o PROINFO fosse pioneiro na área:

> […] Eram meados dos anos 90, já se sabia que havia um número significativo de boas experiências,em outros países, no uso de computadores na escola, o que permitiu formular, desde logo, um projeto de maior porte, sem a necessidade de um projeto-piloto. (SOUZA, 2005, p. 138).

Ainda neste mesmo livro, o então Ministro da Educação, relata sobre o PROINFO:

> Até o final de 2002, conseguimos implementar efetivamente mais de 50 por cento do projeto.A totalidade da rede formadora dos NTEs estava instalada e havíamos conseguido colocar mais de 53 mil computadores em 4.600 escolas,em todos os estados brasileiros. […] No caso dos professores, foram estabelecidos dois grupos: os professores multiplicadores e os professores de escolas. A seleção dos multiplicadores se deu entre os que tinham nível de formação superior e atuavam na rede pública de educação. A eles era oferecido um curso de nível de pós-graduação, ministrado por universidades brasileiras públicas ou privadas, selecionadas em função do nível de competência na área de uso de tecnologia em educação. Depois de capacitados, os professores atuavam nos NTEs, formando os professores de escolas.[…] até fins de 2002, os programas de capacitação de recursos humanos alcançaram mais de 124 mil pessoas.(SOUZA, 2005, pp. 139-140).

Porém, apesar do discurso otimista do então Ministro, segundo Moraes (2016):

> No entanto, pesquisas empíricas demonstravam [...] que esses multiplicadores e professores não estavam suficientemente preparados para promovera propalada “equidade”, como Souza advogava e os resultados foram pífios [...]. (MORAES, 2016, p. 114).

Desta forma, sobre o PROINFO, Moraes (2016) conclui:

> [...] percebe-se que apesar dos computadores terem e estarem chegando às escolas observa-se que: a) uma parte desses computadores não está sendo utilizada; b) da parte que está chegando, a maioria não está integrada ao projeto político-pedagógico da escola; c) quando ocorre essa formação, ela é feita de forma aligeirada sem ser incorporada organicamente nas atividades escolares mediante a formação continuada. (MORAES, 2016, pp. 100-101).

E, atualmente, vale questionar se esta conclusão de Moraes (2016), sobre a informática na educação brasileira até a década de 90, retrataria ainda a realidade das escolas ou de suas maiorias em pleno o ano de 2020.

Em 23 de novembro de 2017, o então Presidente da República, Michel Temer, via Decreto-lei nº 9.204, instituído no Brasil, cria o Programa de Inovação Educação Conectada, que tem o seguinte objetivo:

> Fica instituído o Programa de Inovação Educação Conectada, em consonância com a estratégia 7.15 do Plano Nacional de Educação, aprovado pela Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014, com o objetivo de apoiar a universalização do acesso à internet em alta velocidade e fomentar o uso pedagógico de tecnologias digitais na educação básica. (BRASIL, 2017, Art. 1)

Ainda conforme o decreto, são princípios do Programa:

> [...]
> II - equidade de condições entre as escolas públicas da educação básica para uso pedagógico da tecnologia;
> III - promoção do acesso à inovação e à tecnologia em escolas situadas em regiões de maior vulnerabilidade socioeconômica e baixo desempenho em indicadores educacionais;
> IV - colaboração entre entes federados;
> V - autonomia de professores na adoção da tecnologia para a educação;
> VI - estímulo ao protagonismo do aluno;
> VII - acesso à internet com qualidade e velocidade compatíveis com as necessidades de uso pedagógico dos professores e dos alunos;
> VIII - amplo acesso a recursos educacionais digitais de qualidade; e
> IX - incentivo à formação de professores e gestores em práticas pedagógicas com tecnologia e para uso de tecnologia. (BRASIL, 2017, Art. 3).

E, de acordo com o site oficial do governo sobre o programa (MEC, 2019), este está sendo implantado da seguinte forma:

> Sua implementação passou por três fases: (1) indução (2017 a 2018) para construção e implantação do Programa com metas estabelecidas para alcançar o atendimento de 44,6% dos alunos da educação básica; (2) expansão (2019 a 2021) com a ampliação

> da meta para 85% dos alunos da educação básica e início da avaliação dos resultados; e (3) sustentabilidade (2022 a 2024) com o alcance de 100% dos alunos da educação básica, transformando o Programa em Política Pública de Inovação e Educação Conectada (MEC, 2019).

Portanto, segundo a meta do programa, já em 2024 teremos 100% dos alunos da educação básica atendidos. Uma meta ousada diante da realidade apontada pelo Censo Escolar de 2018, conforme Tabela 01:

Tabela 01– Disponibilidade (%) de recursos relacionados à infraestrutura nas escolas públicas de ensino fundamental e médio– 2018

Recursos	**Escolas de nível Fundamental**	**Escolas de nível Médio**
Laboratório de Ciências	8,0%	38,8%
Laboratório de Informática	43,9%	82,1%
Internet	63,4%	93,6%
Banda larga	50,7%	81,1%

Fonte: ANUÁRIO BRASILEIRO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (2019).

Com isto, nota-se que, apesar das tecnologias digitais ainda não estarem disponíveis na totalidade das escolas, o governo possui um plano e datas para que esta realidade se concretize, e, mais ainda, que o até então programa passe a ser uma Política Pública de Inovação e Educação Conectada.

E, de acordo com a tabela acima, as escolas destinadas ao nível médio apresentam melhor situação quanto à disponibilidade de recursos ligados às tecnologias digitais quando comparadas com as de nível fundamental, mas, ainda assim, há um muito que se fazer, pois mais de 60% das escolas de nível médio ainda não possuem um laboratório de ciências, que pode ser utilizado para se trabalhar tecnologias digitais ligadas as áreas tanto de matemática quanto de física, como a Robótica Educacional, apresentada a seguir.

3.2 ROBÓTICA EDUCACIONAL

O termo robótica, que se remete a robô, ainda nos transmite a ideia de máquinas muito avançadas e geralmente com aparências humanas, como aponta Santos (2008):

> O que temos percebido é que as pessoas relacionam a robótica ao que vêem no cinema e esta percepção faz com que acreditem que a robótica será de grande utilidade num futuro distante. Ledo engano. A robótica está presente em nossos lares

> e cada um de nós tem vários robôs em casa. O grande problema é que em nossa formação regular, não fomos apresentados a uma disciplina que nos contemplasse com o conhecimento básico que nos permitisse reconhecer e aproveitar melhor o que um robô pode proporcionar. (SANTOS, 2008, p. 1).

Mas, então, qual seria a definição de robô? Segundo Pazos (2002), desde os tempos pré-históricos a sociedade é fascinada pela ideia de seres extraordinários, que tivessem força e habilidades especiais:

> Antigos sacerdotes egípcios construíram os primeiros braços mecânicos, os quais eram colocados em estátuas de deuses que pretendiam estar atuando sob a direta inspiração do deus representado por ela, sem dúvida para impressionar o povo com o poder desse deus (PAZOS, 2002, p. 12).
>
> Na civilização grega, vários séculos depois, existiam estátuas operadas hidraulicamente. Heron de Alexandria construiu mecanismos simples para ilustrar a utilização dessa nova ciência que era a hidráulica. Esses mecanismos não tinham a intenção de duplicar um ser humano, apenas como exercícios didáticos e entretenimento (PAZOS, 2002, p. 12).

À vista disso, essas construções foram evoluindo; em 1770 foi construído o primeiro órgão mecânico, que através de várias peças sob o controle de um relógio produzia sons de ventos; em 1805, Henri Maillardet construiu, em Londres, uma boneca capaz de escrever e desenhar com admirável precisão (PAZOS, 2002).

Então foram estes tipos de criações mecânicas da forma humana, associadas a invenções mecânicas para atender produções industriais, mais propriamente na época da Revolução Industrial, que fomentaram a criação de duas tecnologias que, segundo Pazos (2002), podem ser consideradas os antecedentes da Robótica:

> [...] o comando numérico e o telecomando. O comando numérico é uma tecnologia desenvolvida no final da década de 40 e início de50, baseando-se no trabalho original de John Parsons. Ela é utilizada para controlar as ações de uma máquina operatriz, a qual é programada por meio de números, os quais podem ser introduzidos através de um teclado ou pela leitura de um cartão perfurado. [...] O telecomando trata do uso de um manipulador remoto controlado por um ser humano. O manipulador é um dispositivo, em geral eletro-mecânico, que pode ser uma garra, um braço mecânico ou ainda um carro explorador, que reproduz os movimentos indicados por um operador humano localizado num local remoto. (PAZOS, 2002, p. 13).

Com a interação dessas duas tecnologias, telecomando e comando numérico, têm-se a base do robô moderno. Integração realizada graças a dois cientistas, o inventor britânico Cyril Walter Kenward e o inventor norte-americano George C. Devol, conforme Pazos (2002).

A partir dessa fusão das duas tecnologias, houve a criação de robôs principalmente para atender as produções industriais como também entretenimento. Porém, a utilização de computadores como controladores de operações de robôs ocorreu apenas em meados da década de 70, quando estes tiveram sua velocidade e capacidade aumentadas. Logo, mesmo percebendo, então, a presença de robôs desde a época medieval, o termo robótica, veio a ser utilizado somente mais tarde, conforme Pazos (2002):

> O criador dessa palavra foi o escritor tcheco Karel Capek. Nessa língua, a palavra robota significa trabalhador que exerce um serviço em forma compulsória. Quando traduzida para o inglês, o termo virou robot. Em 1921, Capek escreveu uma peça de teatro chamada R.U.R., iniciais de "Rossum's Universal Robots". A peça conta a história de um cientista brilhante, chamado Rossum, que desenvolve uma substância química similar ao protoplasma. Ele utiliza essa substância para a construção de humanóides, com o intuito de que eles sejam obedientes e realizem todo o trabalho físico. (PAZOS, 2002, p. 14).

Ainda segundo Pazos (2002), Isaac Asimov, um escritor de ciência ficção, é considerado como o primeiro a ter usado a palavra robótica para descrever a ciência que trata de robôs. Para o autor (PAZOS, 2002), existem diferentes definições para o termo, pois o lugar em que o robô atua, ou o ponto de vista sobre ele, podem a mudar. Isso porque a definição de um robô utilizado na indústria, se difere da científica, que, por sua vez, se distingue da teoria de controle. Pazos também aponta ser necessário definir o que é máquina, antes de definir o que viria a ser robô. Segundo ele, máquina é qualquer dispositivo capaz de transformar energia em trabalho útil. Porém, para a definição de robô, esse conceito estaria incompleto, pois quando uma alavanca feita de madeira, por exemplo, auxilia o ser humano em um trabalho, movida pela sua própria força manual, ela também estaria sendo classificada como robô. Então, para robô, estabelece a definição de *máquina automática programável* (PAZOS, 2002, p. 17).

Desta forma, podemos perceber que a presença de robôs no nosso cotidiano é muito maior do que imaginamos. E esta presença pode se apresentar de maneira muito eficiente também no campo educacional. Como afirma Benitti et al. (2009), "*uma forma de viabilizar o conhecimento científico tecnológico e, ao mesmo tempo, estimular a criatividade e a experimentação com um forte apelo lúdico, pode ser proporcionada através da robótica educativa*" (BENITTI et al., 2009,p. 1811). Para Morelato:

> Com o uso da robótica pedagógica, o aprendiz pode desenvolver a sua capacidade de solucionar problemas, utilizar a lógica de forma eficaz e aprender conceitos ligados a matemática e física. Desta forma se coloca em prática conceitos abordados em sala

> de aula apenas de maneira teórica e sem conectividade com o mundo real. A Robótica educacional proporciona um ambiente caracterizado pela tecnologia e criatividade, estimulando o aprendizado de conceitos intuitivos, a exemplo da cinemática em física. Este tipo de ambiente favorece o aprendizado construcionista.(MORELATO et al., 2010, p.81).

Morelato et al. (2010) já não apenas apontam as vantagens na utilização da Robótica como meio pedagógico, como também a associam às ideias construcionistas, que têm como base o construtivismo de Piaget, o qual também é suporte teórico para Zabala (1998) em suas definições de sequências didáticas, utilizadas neste trabalho.

4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Segundo Lima (2013), funções denominadas exponenciais são as que representam situações com taxas de crescimento ou decrescimento constantes de valores, com uma variação proporcional a eles mesmos, determinadas pela função, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x$, sendo a uma constante positiva, diferente de 1.

4.1 APLICABILIDADE DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Partimos, então, para a escolha do conteúdo matemático para nosso trabalho, uma vez que nosso nível de ensino, conforme já citado, ficou determinado ao escolher o tema. Então, levando em consideração a relevância da função exponencial no dia a dia dos jovens, e não apenas isto, mas também por uma afinidade particular minha e de meu orientador com esta função, optamos por ela como tema matemático deste trabalho.

A relevância da função exponencial no dia a dia é apontada com as várias situações que a envolvem ou envolvem funções do tipo exponencial, como citamos algumas a seguir:

- Crescimento populacional. Uma população que cresce a determinada taxa em iguais intervalos de tempo, apresenta um crescimento exponencial, correspondente a formula $P = P_0(1 + i)^t$, onde P representa a população em determinado tempo, P_0 a população inicial a ser considerada, i a taxa de crescimento constante da população e t o intervalo de tempo decorrido.
- Datação de fósseis. Técnica que utiliza do decaimento radioativo, mais especificamente o decaimento radioativo do carbono-14, que se desintegra através da radiação por ele emitida, fazendo, assim, com que, em todos os iguais intervalos de tempo, sua massa se reduza à metade do que era. Isso resulta em uma redução exponencial de sua massa presente nos fósseis, que pode ser representada pela fórmula $M(t) = M_0e^{-kt}$, onde temos a massa M em função do tempo t, M_0 sendo a massa inicial a ser considerada, k uma constante que pode variar de acordo com o elemento químico analisado e também o número irracional e, que está presente em várias situações exponenciais, mas que, por questão de objetivo específico, não será detalhada aqui sua origem ou definição, mas deixamos registrada a importância de um estudo aprofundado sobre este número irracional misterioso.

- Pressão atmosférica. Determinada a uma altura h, em relação ao nível do mar, é representada segundo a Lei de Boyle, pela função $p(t) = p_o e^{-kt}$, em que P_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar e k é uma constante. Com determinada pressão atmosférica p, e utilizando-se de um barômetro, é possível se determinar a altura h.
- Juros compostos. Quando o juro é novamente calculado em uma transação financeira a cada período de capitalização, porém não mais sobre o capital inicial C_0, mas sobre o montante M (capital inicial mais juros) até o respectivo momento t do cálculo. Dessa forma, a função que representa o montante em uma transação financeira no regime de juros compostos corresponde à função do tipo exponencial, $M = C_0(1+i)^t$, onde i é a taxa de juros cobrada a cada intervalo t de duração da transação financeira.
- Lei de resfriamento de corpos. Segundo Newton, a diferença de temperatura, T_0 - t_o, sendo T_0 a temperatura de um objeto qualquer e t_o a temperatura do meio em que este objeto está, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Portanto se trata de um decaimento exponencial, que tem como função $T(t) = t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}$, em que t_0 é a temperatura ambiente, T_0 é a temperatura do objeto no momento em que foi colocado no ambiente, k é uma constante que depende do material que constitui o objeto, e T(t) é a temperatura do objeto no instante t.
- Tempo de detecção de uma doença. Para o cálculo desse tempo, um modelo de equação foi criado no Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI) – um Centro de Pesquisas, Inovação e Difusão (CEPID) financiado pela FAPESP. A equação definida é $q = 10^{t_0}(1 - \frac{1}{r}S)$, onde com q é a fração da população infectada identificada, *r,* o número de pessoas que podem ser infectadas pela doença se tiver contato com pessoas já infectadas, ressalta-se que este número irá variar de acordo com cada enfermidade, e *S,* a fração de indivíduos saudáveis da população. De posse desses dados é possível encontrar o tempo ideal de detecção e diagnóstico de determinada doença t_0.
- A curva Catenária. Catenária (do latim *catena*, corrente) é denominada como a curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso por suas extremidades, sob a ação apenas de seu peso. Seu formato é observado em cabos de sustentação de grandes pontes ou em cabos de alta tensão elétrica ligados por postes. Sua

equação é representada por $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$. Uma equação do tipo exponencial, de base natural, e a uma constante específica do tipo de cabo e tensão com o qual o mesmo está preso e suspenso.

- Intensidade sonora. Calculada pela fórmula, $I = I_0 . 10^{\frac{N}{10}}$, onde I representa a intensidade sonora que se quer mensurar, I_0, a intensidade mínima que o ouvido humano consegue escutar e N, o nível da intensidade de som, geralmente calculado em decibéis.

Como podemos observar, esta função ou funções do seu tipo estão presentes em diversas situações, em campos distintos de aplicabilidade, o que está em conformidade com a primeira competência específica dentre as propostas pela BNCC para a matemática no ensino médio:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 523).

Portanto, nesse contexto, a matemática no ensino médio deve auxiliar na leitura e na interpretação da realidade pelos jovens, além de ter forte participação na integração das demais Ciências da Natureza. Isso corrobora ainda mais pela escolha do tema função exponencial, que tem papel ativo na compreensão de processos em nosso meio, como crescimento populacional e movimentações financeiras, e integração com as demais ciências da natureza, como epidemias na área de Biologia, decaimento radioativo na área de Química ou ainda resfriamento de corpos na área de Física, os quais são apenas alguns exemplos dessa participação.

4.2 O ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NO ENSINO MÉDIO

De acordo com a nova BNCC, já citada em capítulos anteriores, dividida no que tange ao ensino médio em áreas de conhecimento, sendo uma delas, a da Matemática e suas Tecnologias, é orientado o aprendizado de cinco competências gerais, e dentro de cada competência são discriminadas e especificadas as habilidades a serem aprendidas e desenvolvidas durante os três anos do ensino médio. Dentro dessas competências, e consequentemente dessas habilidades, encontra-se o que é esperado do ensino acerca da função exponencial, tema principal de nosso trabalho, mas também se encontram conceitos que utilizaremos em nossa proposta didática, tais como função linear, progressões aritméticas e geométricas, linguagem de programação, relação entre duas grandezas, fator de proporcionalidade, interpretação de gráficos em um plano cartesiano, etc. São elas:

> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações sem diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
>
> HABILIDADE
> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos– Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> HABILIDADES
> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
>
> (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas,determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.
>
> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecera construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
>
> HABILIDADES
> (EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais(domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais,estabelecendo relações entre elas.
>
> (EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

> COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões,experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
>
> HABILIDADES
> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
>
> **(EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.**(BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 533, grifo nosso).

Portanto, no intuito de atender a esses anseios em sua plenitude ou mesmo que parcialmente em relação ao ensino da função exponencial descritos na BNCC. Seguindo os apontamentos positivos quanto ao uso de engrenagens para ensinar conceitos matemáticos de Papert e, isso tudo, fomentado pelo uso da Robótica Educacional. Assim, optamos pela utilização do Kit de robótica educacional, Mindstorms NXT LEGO®, apresentado a seguir.

5 KIT MINDSTORMS NXT LEGO®

Conforme o site oficial do grupo LEGO Group (2010), essa é uma empresa privada fundada em 1932 por Ole Kirk, na Dinamarca, o grupo é atualmente um dos maiores fabricantes de brinquedos e jogos no mundo. Seu brinquedo mais conhecido é o tijolo LEGO®, peças plásticas que se encaixam umas nas outras, possibilitando diversos tipos de combinações.

Mas foi com uma parceria entre o grupo LEGO® e o laboratório de inteligência da MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), que tem como um de seus fundadores Papert, já mencionado neste trabalho, que surge a LEGO® Education. Esta (empresa) representa um ramo do grupo LEGO® voltado especificamente para a área da educação. A parceria é mencionada na linha cronológica da origem e evolução da empresa, disponível em seu próprio "site", a partir do qual destacamos alguns pontos para melhor entendimento de como se deu o grande crescimento desta empresa e a parceria com Papert, através do Media Lab da MIT, que originou posteriormente o kit que iremos utilizar neste trabalho. A história do LEGO Group:

> 1932 – Ole Kirk Kristiansen, mestre carpinteiro e marceneiro, estabelece seu negócio na aldeia de Billund, na Dinamarca. Sua empresa fabrica escadotes, tábuas de passar, banquetas e brinquedos de madeira. Seu filho, Godtfred Kirk Christiansen, começa a trabalhar no negócio com 12 anos de idade.
>
> 1934 – A empresa e os seus produtos agora adotam o nome LEGO, formado pelas palavras dinamarquesas "LEgGOdt" ("brincar bem"). Mais tarde, descobriram que a palavra em latim significa "Eu junto". A empresa tem de 6 a 7 funcionários[Figura 1].

Figura 1 – Primeiros funcionários da empresa LEGO

Fonte: LEGOGroup (2010).

> 1949 – A empresa produz por volta de 200 brinquedos de plástico e de madeira diferentes, incluindo os blocos de encaixe, um antecessor dos blocos LEGO que conhecemos hoje. Eles são vendidos exclusivamente na Dinamarca.

1953 – Os blocos de encaixe ganham um novo nome: "LEGO Mursten" ("Bloco LEGO")[Figura 2]. O nome LEGO é impresso no interior de todos os blocos. O primeiro pedido de registro da marca. O registro dinamarquês é aceito em 1 de maio de 1954.

Figura 2 –Foto dos primeiros brinquedos LEGO produzidos na Dinamarca

Fonte: LEGO Group (2010).

1954 – A palavra LEGO é oficialmente registrada na Dinamarca em 1 de maio. Godtfred Kirk Christiansen viaja para a Inglaterra e encontra um representante de vendas no ferry. Eles conversam sobre brinquedos. O agente acha que faltam sistemas e ideias nos brinquedos. Isto gera a ideia do Sistema LEGO na mente de Godtfred Kirk Christiansen.

1958 – O atual sistema LEGO de encaixe de pinos e tubos é patenteado[Figura 3]. O novo princípio de encaixe deixa os modelos muito mais estáveis. Ole Kirk Kristiansen falece e Godtfred Kirk Kristiansen torna-se presidente da empresa.

Figura 3 – Documento de patente

Fonte: LEGOGroup (2010).

1966 – A gama de produtos compreende 57 conjuntos e 25 veículos. Um total de 706 milhões de elementos LEGO são produzidos durante o ano.LEGO agora é vendido em 42 países.

1980 – O Departamento de Produtos Educacionais é estabelecido.O logotipo do Technic foi desenvolvido pela Papermint.

1984 – A LEGO Brazil é estabelecida.

1985 – [...] É iniciada a colaboração com o Professor Seymour Papert e o Boston M. I. T.

> 1989 – O departamento de produtos educacionais muda de nome para LEGO Dacta. A palavra "dacta" deriva da palavra grega "didático", que significa "o estudo da finalidade, meios e conteúdo de aprendizagem e o processo de aprendizagem". Dr. Seymour Papert torna-se LEGO Professor of Learning Research. O primeiro LEGO Dacta Centre é aberto na LEGOLAND (renomeado TECHNIC LAND após alguns anos). Ole Kirk Kristiansen é introduzido ao Hall da Fama da Indústria de Brinquedos.
>
> 1990 – O LEGO Group é agora um dos 10 maiores fabricantes de brinquedos do mundo – o único na Europa (os restantes são americanos e japoneses). A barreira mágica – um milhão de visitantes em um único ano - é quebrada pela primeira vez na LEGOLAND Billund, em 4 de setembro.
>
> 1997 – [...] O primeiro centro de aprendizagem LEGO MINDSTORMS é aberto no Museu da Ciência e da Indústria em Chicago, EUA. [...].
>
> 1999 – Novidades de produtos 1999–LEGO MINDSTORMS Robotics Invention System 1.5 [...]. Mitchel Resnick, do Massachusetts Institute of Technology (MIT), é nomeado como o novo LEGO Papert Professor of Learning Research.
>
> 2000 – Novidades de produtos 2000. […] LEGO MINDSTORMS Robotics Invention System 2.0 – lançado no Japão.
>
> 2001 – Novidades de produtos 2001. [...] LEGO MINDSTORMS Robotics Invention System 2.0 – lançado no resto do mundo.
>
> 2006 – Novidades de produtos 2006. O MINDSTORMS NXT é lançado – nova e consideravelmente melhorada versão do sistema de robótica LEGO. [...]
>
> 2012 – [...] A LEGO Education torna-se uma subsidiária separada da LEGO A / S.
>
> 2013 – O Grupo LEGO continua seu crescimento e apresenta fortes resultados anuais para 2012,quase triplicando as vendas de 2007.A LEGO MINDSTORMS celebra o seu 15º aniversário e lança a sua 3ª geração:LEGO MINDSTORMS EV3 – alimentado pelo novo EV3 Intelligent Brick.
>
> 2015 – O LEGO Group e a LEGO Foundation firmaram uma parceria de três anos com a UNICEF para proteger os direitos das crianças e mudar a maneira pela qual as crianças aprendem. [...] Os produtos LEGO® agora são vendidos em mais de 140 países. [...].
>
> 2018 – Marca um ano de aniversário, quando o tijolo LEGO® celebra seu 60º aniversário, a LEGOLAND Billund faz 50 anos e a minifigura LEGO celebra seu 40º aniversário. (LEGO GROUP, 2010).

Como podemos notar com os fragmentos apresentados da linha cronológica da LEGO Group, uma empresa que se iniciou apenas com o propósito de construir brinquedos, tomou grandes proporções e direcionou parte de suas linhas de produção para a área educacional, influenciada diretamente pelas ideias construcionistas de Papert (Figura 4), cujo lema vale ser ressaltado: aprender fazendo.

Figura 4 – Seymour Papert (à esquerda) conversa com o proprietário do LEGO Group, Kjeld Kirk Kristiansen, em 1998, quando a empresa dinamarquesa lançou LEGO Mindstorms

Fonte: MIT News (2017).

Segundo MIT Media Lab (2017):

> Seymour mostrou como a programação é um processo muito criativo, semelhante à construção com peças LEGO. As crianças colocam comandos ou tijolos juntos, refletem e avaliam, modificam sua criação e tentam novamente. Eles encontram possibilidades infinitas – e o que eles fazem, está certo. As ideias fortes e atemporais de Seymour sobre crianças, brincadeiras, experimentação e aprendizado ainda estão no centro do que fazemos no The LEGO Group", diz Kjeld Kirk Kristiansen, proprietário do The LEGO Group e membro do conselho da LEGO Foundation. "Assim como Seymour nos inspirou, é importante continuarmos a levar suas ideias adiante para que outros possam se inspirar em seu trabalho. (MIT MEDIA LAB, 2017).

Ainda segundo o MIT Media Lab (2017):

> Papert foi um dos primeiros a reconhecer o potencial revolucionário dos computadores na educação, acreditando que os computadores poderiam proporcionar às crianças novas oportunidades para explorar, experimentar e se expressar. No final dos anos 1960, ele surgiu com a ideia do Logo, a primeira linguagem de programação para crianças. Papert começou a colaborar com a LEGO Company, com sede na Dinamarca, em 1985, no mesmo ano em que o Media Lab foi criado. O produto de robótica LEGO Mindstorms, lançado em 1998, foi nomeado em homenagem ao seu livro seminal de 1980, "Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas".
>
> Quando a LEGO Company dotou uma cátedra no Laboratório de Mídia em 1989, Papert tornou-se o primeiro professor de Pesquisa em Aprendizagem da LEGO.

> Quando ele se aposentou do laboratório, o nome da cadeira foi ampliado em sua homenagem ao LEGO Papert Professor ship. (MIT MEDIA LAB, 2017).

Como é relatado, até mesmo o termo que nomeia a linha educacional LEGO®, "Mindstorms", que em tradução livre seria uma junção de mente e tempestade, foi citado primeiramente por Papert em suas obras, fazendo alusão a uma tempestade de ideias, hipóteses, e pensamentos, formada nas mentes das crianças quando estas interagem com a tecnologia, mas especificamente com computadores e robôs. Com isso, o fato da LEGO® Education utilizar-se desse termo para nomear os kits de sua linha educacional, só reforça a forte ligação e contribuição de Papert ao sistema.

Dentro da linha de kits da LEGO® Mindstorms, nosso trabalho escolheu o NXT. Utilizando a expressão da própria empresa, NXT é um "tijolo inteligente", tijolo pelo seu formato e por ser mais uma peça do kit, famoso pelos seus tijolos encaixáveis, e inteligente por ser o "cérebro" do robô por assim dizer. Trata-se de um bloco eletrônico, por onde serão transmitidas todas as ações a serem executadas pelo robô, a programação pode ser feita no próprio *brick* NXT, como também é chamado, ou desenvolvida no NXT 2.0 Programming, que é um ambiente de programação gráfica, no qual, depois de feito o algoritmo que o computador deve executar, este pode ser transferido para o NXT, através de uma porta USB ou via Bluetooth. O detalhamento de todos os componentes que integram o kit pode ser obtido no site oficial da LEGO®, para fins de objetividade, serão descritos em capítulos posteriores apenas as peças utilizadas especificamente na sequência didática proposta.

6 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Para fundamentar a função exponencial neste trabalho, iremos partir de uma série de conceitos matemáticos para culminar na função exponencial, caminho escolhido para correlacionar cada conceito as partes do câmbio de marchas a ser construído nesta proposta didática. Partindo de conceitos mais simples e os correlacionando entre si, possibilitamos maior entendimento por parte dos alunos, uma vez que o conceito mais complexo não é apenas demonstrado para o aluno em uma única etapa, mas, sim, construído junto ao aluno com o auxílio de conceitos mais simples, de forma que, assim como Papert (2008) mencionou, o aluno "pesque" a ideia do conceito mais complexo, o que, ainda segundo o autor, é muito eficiente quanto à interiorização do conhecimento adquirido.

Dessa forma, os conceitos abordados serão: Proporcionalidade, Função, Função Linear, Composição de Funções, Funções Compostas, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e, por fim, a Função Exponencial. Esses serão, *a priori*, explicitados matematicamente e correlacionados ao câmbio de marchas proposto a ser desenvolvido utilizando-se o kit LEGO®. A fim de se construir esta relação entre os conceitos matemáticos e o câmbio de marchas, os exemplos utilizados para os conceitos matemáticos já serão retirados da própria construção do câmbio. As definições aqui apresentadas foram retiradas do livro Números e Funções Reais, do Professor Elon Lages Lima (LIMA, 2013).

6.1 PROPORCIONALIDADE

Um dos conceitos matemáticos mais difundidos pelo mundo é o da proporcionalidade. Este, conforme a BNCC do Ensino Fundamental, já tem o início de seu ensino no sexto ano do ensino fundamental, chegando até o nível médio, conforme a nova BNCC do ensino médio. No ensino fundamental são as habilidades:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BNCC do ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL, 2017, p. 299).
>
> (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área. (BNCC do ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL, 2017, p. 301).

> (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (BNCC do ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL, 2017, p. 305).
>
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (BNCC do ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL, 2017, p. 315).
>
> (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. (BNCC do ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL, 2017, p. 317).

No ensino médio:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 534).

Portanto, a proporcionalidade deve estar presente nos conteúdos curriculares da disciplina de matemática, tanto no nível fundamental como no médio. E para definir este conceito, embasamos em Lima et al.(2010), que define como duas grandezas proporcionais quando existe uma correspondência $x \rightarrow y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

I. Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \rightarrow y$ e$x' \rightarrow y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
II. Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \rightarrow y$ então$nx \rightarrow ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \rightarrow y$ chama-se, conforme o mesmo autor, uma proporcionalidade. Sendo assim, como exemplo de proporcionalidade, e já relacionando-a ao câmbio de marchas, considere a interação de duas engrenagens dentadas, conforme foto abaixo:

Figura 5 – Engrenagens de 24 dentes, do KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Estas são modelos de engrenagens do KIT LEGO®, ambas são idênticas e possuem 24 dentes cada. Como pode ser facilmente observado, ao girar uma, esta transmite o giro para a outra de maneira uniforme, apesar de em sentidos opostos, pois ambas possuem a mesma quantidade de dentes. Desta forma, considerando o número de voltas da engrenagem à esquerda como x, e o número de voltas da outra como y, temos a correspondência $x \rightarrow y$, na qual quanto maior for x, maior será y, e, ainda, se dobrarmos, ou triplicarmos etc. x, também estará sendo dobrado, ou triplicado etc. y. Constatamos, assim, uma relação de proporcionalidade entre as engrenagens.

A princípio esta é a ideia básica de proporcionalidade, porém, para melhor fundamentação matemática, tem-se o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que será apresentado após Função.

6.2 FUNÇÃO

Segundo Lima (2013), a definição de função é:

> Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma função é uma relação $f: X \rightarrow Y$ em que, a cada elemento $x \in X$,associa-se um e somente um elemento $y \in Y$.
> Além disso,
> (i) Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de *f*, respectivamente;
> (ii) O conjunto $f(X) = \{\, y \in Y; \exists\, x \in X, f(x) = y \,\} \subset Y$ é chamado imagem de *f*;
> (iii)Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de *x*. (LIMA, 2013, p. 3).

Portanto uma função é composta por três elementos: domínio, contradomínio e lei de associação (que é a responsável por associar a cada elemento do domínio um elemento do contradomínio).

6.2.1 Monotonicidade

A Monotonicidade de uma função é o que preserva ou inverte a relação entre duas grandezas associadas em uma função. É por ela que se pode afirmar que aumentando uma das grandezas a outra também irá aumentar ou diminuir consecutivamente. Em se tratando de grandezas proporcionais, temos então: diretamente proporcional, quando ao aumentar uma das grandezas a outra também aumenta, e indiretamente proporcional, que é quando, ao aumentar uma das grandezas, a outra diminui. E de acordo com Lima (2013), uma função pode ser:

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) f é monótona (estritamente) crescente se $x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) f é monótona não decrescente se $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$;

(iii) f é monótona (estritamente) decrescente se $x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$;

(iv) f é monótona não crescente se $x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$;

A definição de monotonicidade de uma função permite demonstrar que a relação entre duas grandezas oscila de maneira linear, pois o simples fato de uma grandeza ao aumentar também aumentar a outra não representa necessariamente uma relação diretamente proporcional. Como exemplo, podemos considerar o perímetro de um quadrado e sua respectiva área, ao aumentarmos seu perímetro, aumentamos também sua área, mas isto não ocorre de forma linear, ou seja, a variação que o perímetro sofre, não resulta na mesma variação da área. Portanto, em relações de grandezas diretamente proporcionais temos tipos específicos de funções monótonas estritamente crescentes, e grandezas inversamente proporcionais temos tipos de funções monótonas estritamente decrescentes.

6.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DE PROPORCIONALIDADE/FUNÇÃO LINEAR

Para definir se uma relação entre grandezas é proporcional, seja direta ou inversa, Lima et al. (2010) definem o Teorema Fundamental de Proporcionalidade:

Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:

1) $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;

2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ com $a = f(1)$. E, assim, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se função linear. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo *x* no número positivo *ax*, logo define por restrição, uma proporcionalidade $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Conclui-se, então, que toda proporcionalidade é uma restrição de uma função linear a $\mathbb{R}^+$, e o coeficiente a chama-se o fator de proporcionalidade, de acordo com Lima (2010).

Em outra obra, Lima (2013), acrescenta-se uma terceira condição:

3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x\ e\ y\ \in \mathbb{R}$.

Portanto, funções que satisfazem as três condições supracitadas são lineares, as quais, por sua vez, nos casos de $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, representam relações proporcionais entre duas grandezas.

6.3.1 Função Linear/Engrenagens

A base de funcionamento do câmbio de marchas a ser construído é a relação entre interações de engrenagens e funções lineares. Retornando ao exemplo já utilizado para representar proporcionalidade, consideremos a interação entre as engrenagens abaixo (Figura 6):

Figura 6 – Engrenagens de 24 dentes, do KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Essa interação que resulta em uma transmissão de giros pode ser representada por uma função linear. Seja a engrenagem à esquerda E_1 e à direita E_2, como ambas possuem 24 dentes, temos a seguinte relação de proporcionalidade:

$$E_1 : E_2 \ \Rightarrow \frac{24}{24} = 1$$

Ou seja, uma volta de E_1 implica uma volta de E_2. Transformando-se essa relação para linguagem de função, onde x representa o número de voltas de E_1:

$$E_1 \to E_2$$
$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to x$$

Ou seja, se $f(x) = x$, uma função linear da forma $f(x) = ax$, com $a = 1$, e *f(x),* o número de voltas de E_2 em função do número x de voltas de E_1. Esse é um caso específico da função linear, denominado função identidade.

Para melhor entendimento e mais enriquecimento da relação, consideremos agora uma interação entre duas engrenagens com números de dentes distintos (Figura 7).

Figura 7 –Engrenagens de 24 dentes e 8 dentes, do KIT LEGO®,
sentido esquerda para a direita

Fonte: O autor.

Seja E_1 a engrenagem à esquerda com 24 dentes, e E_2 a engrenagem à direita com 8 dentes, temos a relação de proporcionalidade em relação ao número de giros:

$$E_1 : E_2 \Rightarrow \frac{24}{8} = 3$$

Ou seja, uma volta de E_1 implica em três voltas de E_2. Transformando essa relação para linguagem de função, onde x representa o número de voltas de E_1:

$$E_1 \to E_2$$
$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to 3x$$

Ou seja, $f(x) = 3x$, uma função linear da forma $f(x) = ax$, com $a = 3$, e *f(x),* o número de voltas de E_2, em função do número x de voltas de E_1. Consideremos ainda um número y de voltas de E_1, logo o número de voltas de E_2 será dado por $f(y) = 3y$. Portanto temos que:

$$E_1 \to E_2$$

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to 3x \Longrightarrow f(x) = 3x$$
$$y \to 3y \Longrightarrow f(y) = 3y$$
$$x + y \to 3(x + y) = 3x + 3y \Longrightarrow f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Demonstra-se, com isso, que interações entre duas engrenagens quaisquer resultam sempre em uma função linear $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ com $a = f(1)$.

6.4 FUNÇÕES COMPOSTAS

Um conceito também pertinente à matemática do ensino médio, as funções compostas fazem parte tanto de problemas especificamente matemáticos assim como de cotidianos. Sempre que temos uma relação entre duas grandezas, na qual uma destas também tem relação consecutiva com uma terceira grandeza, podemos aplicar a esta situação a representação de funções compostas. Em questão de um exemplo prático, consideremos que a cada cliente atendido, 10% do que for pago seja destinado a um garçom e, destes 10%, este garçom tenha combinado com sua filha que metade será dela. Matematicamente transformando esta situação para linguagem de função, consideremos a função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 0{,}1x$, onde x é a quantia total recebida em um dia de trabalho desse garçom de seus clientes atendidos. Dessa maneira, $f(x)$ representa o valor que ele irá receber por estes atendimentos. Agora, seja $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(y) = 0{,}5y$, y representa a quantidade de dinheiro recebida pelo garçom em um dia, referente aos seus 10% de comissão, e $g(y)$ a quantidade que sua filha irá receber. Essa é uma situação que pode ser representada por uma função composta, afinal, a quantia que a filha do garçom recebe dele ao final do dia tem relação com o quanto ele recebeu de comissão, que, por sua vez, tem relação direta com o quanto os clientes atendidos por ele naquele dia pagaram. Sendo assim, a quantidade que a filha recebe também tem relação, ainda que indireta, com a quantidade que os clientes atendidos pelo seu pai pagaram. Tomando a função $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, equivalente à função composta $g \circ f(x)$, temos $g(f(x))$, igual a:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = 0{,}5f(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}1x = 0{,}05x$$

Portanto, $h(x) = 0{,}05x$, representa de forma direta a quantia que a filha irá receber em função da quantia que os clientes que seu pai atendeu pagaram. De maneira prática, a função composta funciona como um atalho.

E de acordo com Neto (2012) e Ribenboim (2012), a função composta é definida por: dadas as funções $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow Z$, a função composta de f e g é a função $gof: X \longrightarrow Z$

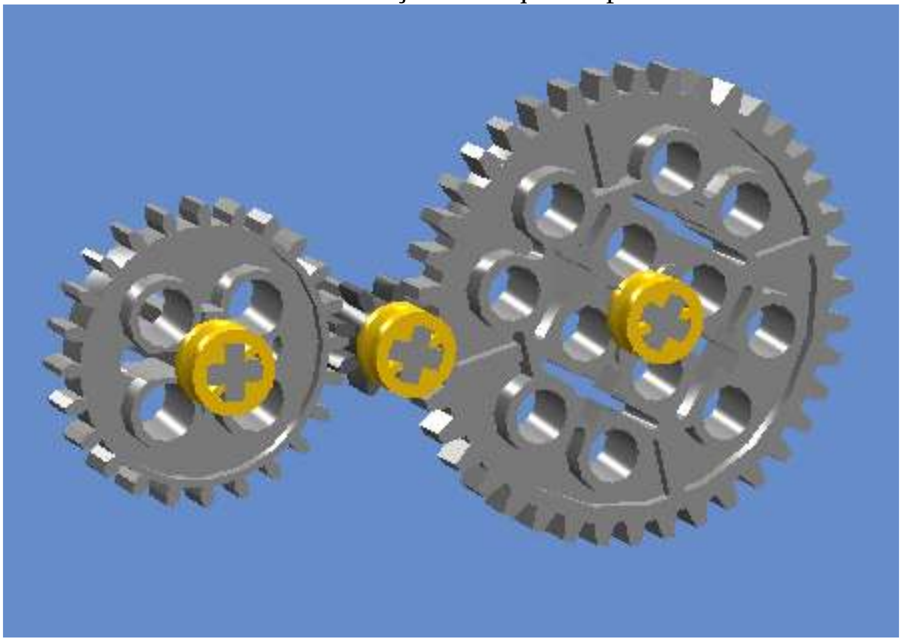
definida, para cada $x \in X$, por: $(gof)(x) = g(f(x))$. Como funções compostas não são o objetivo principal deste projeto, não iremos aprofundar no tema. Particularmente, iremos utilizar a composição apenas de funções lineares já mencionadas da forma $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = ax$.

6.4.1 Funções Compostas / Trens De Engrenagens

Antes de associarmos funções compostas e nosso projeto, é necessário definir alguns conceitos em relação às interações feitas entre engrenagens.

Conforme apresenta Silva (2014), em interações entre engrenagens, teremos três funções distintas, engrenagem motora, movida intermediária e movida de saída, conforme a Figura 8 abaixo. A motora é a que recebe os giros vindos do motor, e é responsável por transmitir às demais engrenagens o movimento. A movida intermediária é a responsável por transmitir o movimento da motora para a movida de saída, neste caso, pode haver quantas engrenagens intermediárias forem necessárias. E, por fim, a engrenagem movida final, é a última engrenagem de um sistema, a última a receber o movimento de giros que iniciou na engrenagem motora, que pode ter sua velocidade e/ou seu sentido alterado(s) ou não em relação ao da motora, pois é nesta engrenagem que se deve avaliar se o objetivo final das interações entre as engrenagens foi alcançado ou não.

Figura 8 –Ilustração de engrenagens: motora de 24 dentes, intermediária 8 dentes e de saída 40 dentes – orientação da esquerda para direita

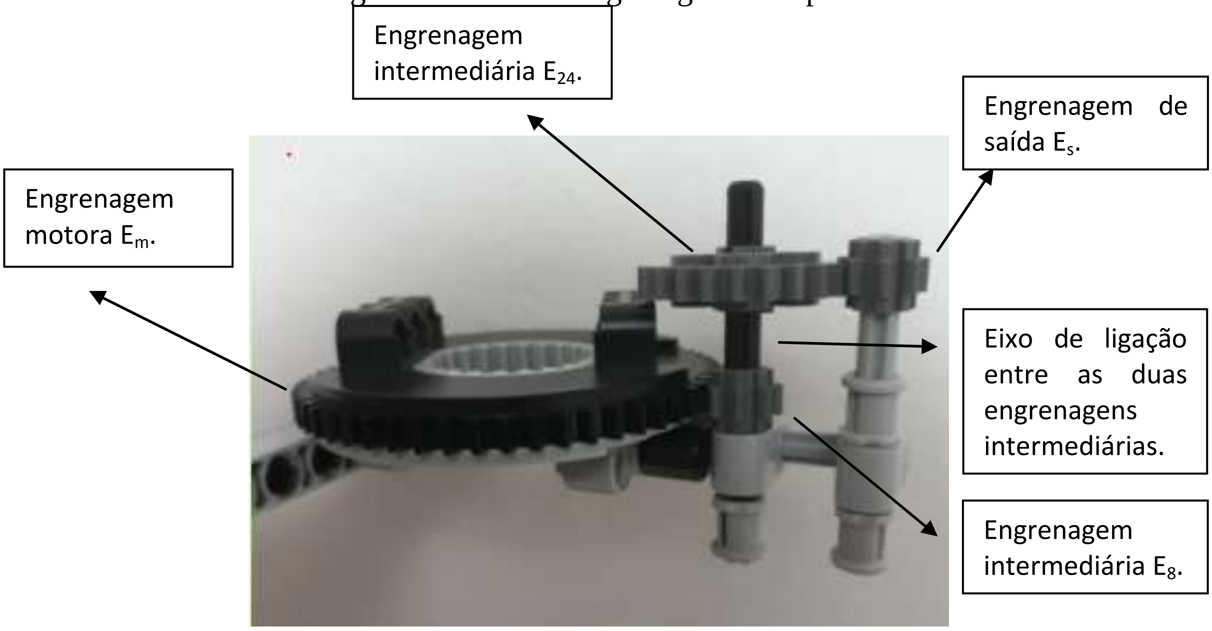


Fonte: O autor.

Ainda segundo Silva (2014), essas interações entre engrenagens podem ser classificadas em dois tipos:

- Simples: quando o acoplamento entre as engrenagens é feito de forma direta, engrenagem com engrenagem, conforme a figura supracitada.
- Composto: quando além de interações diretas entre engrenagens, também há acoplagem entre engrenagens por meio de eixos, nestes casos a transmissão de movimento ocorre de forma angular, e não linear como quando a interação é da forma engrenagem com engrenagem. Esse tipo de interação é utilizado para reduzir ou potencializar a quantidade de giros da engrenagem motora, em resposta à engrenagem de saída, conforme Figura 9.

Figura 9 –Trem de Engrenagens Composto



Fonte: O autor.

Considerando o trem de engrenagem composto da Figura 9, a primeira engrenagem com 56 dentes (no sentido da esquerda para a direita) será considerada a engrenagem motora E_m. Acoplada a ela de forma direta há uma engrenagem intermediária de 8 dentes, que denotaremos por E_8. Acoplada à E_8, via um eixo que saí do seu centro para cima, há outra engrenagem intermediária que denotaremos por E_{24}. E acoplada à E_{24}, temos outra engrenagem de 8 dentes que será considerada a engrenagem de saída E_S. Sendo assim, qual seria a redução ou ampliação (caso haja um dos dois) na quantidade de giros da engrenagem motora, em resposta a engrenagem de saída? Para esse cálculo, utilizamos de composições de funções, mais especificamente, composições de funções lineares.

Quanto à situação na figura acima, podemos representá-la matematicamente da seguinte maneira: dado que: E_m = 56 dentes, E_8 = 8 dentes, E_{24} = 24 dentes e E_S = 8 dentes, temos a seguintes relações de proporcionalidade.

$$E_m : E_8 \Rightarrow \frac{56}{8} = 7$$

Ou seja, 1 volta de $E_m \Longrightarrow$ 7 voltas de E_8.

Em se tratando de E_8 para E_{24}, a ligação entre as duas é feita através de um eixo. Nesse caso, a mesma variação angular sofrida por E_8 também será transmitida para E_{24}, ou seja, as duas engrenagens (E_8 e E_{24}) darão a mesma quantidade de giros. Portanto, essa relação de proporcionalidade, em que o fator é 1, é representada por uma função linear específica, a função identidade. Matematicamente, então, temos que:

$$E_8 : E_{24} \Rightarrow 1$$

Ou seja, 1 volta de $E_8 \Longrightarrow$ 1 volta de E_{24}. Agora, em se tratando da relação entre a engrenagem E_{24} e da engrenagem de saída (de 8 dentes) E_S:

$$E_{24} : E_S \Rightarrow \frac{24}{8} = 3$$

Ou seja, 1 volta de $E_{24} \Longrightarrow$ 3 voltas de E_S. Transformando essas relações para linguagem de função, podemos dizer que o acoplamento: $E_m \longrightarrow E_8 \longrightarrow E_{24} \longrightarrow E_S$ pode ser compreendido do seguinte modo: Considerando-se os pares de engrenagens E_m com E_8, E_8 com E_{24} e E_{24} com E_S, temos que,

$$E_m \to E_8$$
$$f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to 7x$$

Ou seja, $f_1(x) = 7x$.

$$E_8 \to E_{24}$$
$$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to x$$

Logo, $f_2(x) = x$.

$$E_{24} \to E_S$$
$$f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to 3x$$

Isto é, $f_3(x) = 3x$.

Desse modo, para termos a situação $E_m \longrightarrow E_8 \longrightarrow E_{24} \longrightarrow E_S$, basta compor $f_1 o f_2\ o f_3$, que se dá pela multiplicação dos fatores de proporcionalidades de cada função.

$$f_1 \circ f_2 = f_1\big(f_2(x)\big) = 7 \cdot f_2(x) = 7 \cdot x = 7x,\text{e}$$
$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = (f_1 \circ f_2)\big(f_3(x)\big) = 7 \cdot f_3(x) = 7 \cdot 3x = 21x.$$

Portanto, no trem composto da Figura 9, cada volta da engrenagem motora implicará em 21 voltas da engrenagem de saída. Ocorre, neste caso, uma potencialização em relação aos números de giros, originados do motor. Também podemos notar, conforme Silva (2014), que para compor funções lineares, basta-se multiplicar seus fatores de proporcionalidades. Em casos nos quais as engrenagens acopladas uma a outra sejam idênticas ou a acoplagem seja feita via eixo, estas não sofrerão alteração no número de giros, de modo que podem ser representadas matematicamente por funções identidades.

Porém, a questão particular de nosso projeto é qual seria o resultado se estas composições entre funções lineares fossem feitas sempre com funções idênticas. Ou seja, com funções que apresentam a mesma proporcionalidade e ainda, pertinente a nossa área de robótica, composições feitas sempre com os mesmos modelos de trens de engrenagens. O resultado disto é apresentado a seguir.

6.5 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Segundo Lima (2013), uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e pode ser representada pela letra r.

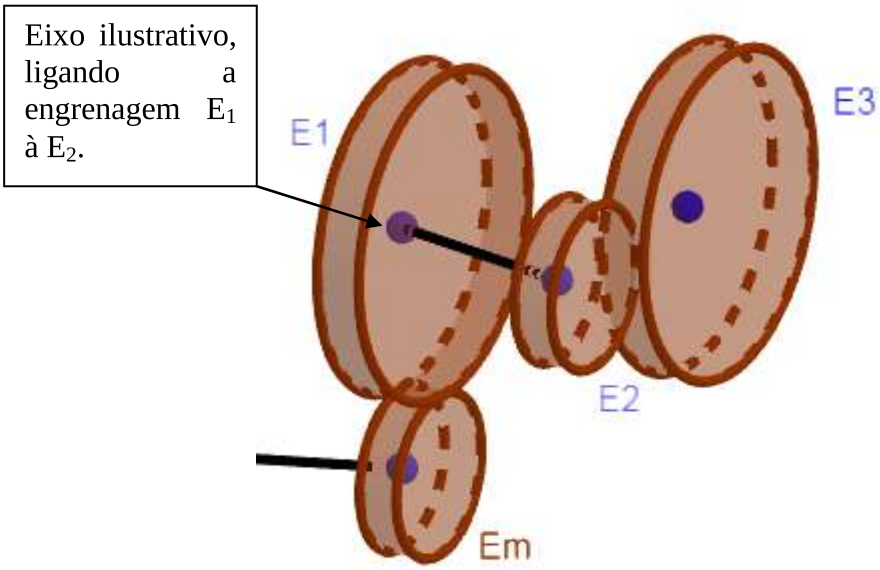
O primeiro termo de uma Progressão Aritmética (que denotaremos apenas por PA) é chamado de a_1, logo, pela definição acima de PA, $a_1 + r = a_2$, onde a_2 é o segundo termo da sequência que representa a PA, e assim por diante. Dessa forma, podemos ter uma PA com n termos, ou até mesmo infinitos termos. Onde a fórmula para calcular termos quaisquer de uma PA é dada por: $a_n = a_1 + (n-1)r$, com a_n representando o termo da referida PA na enésima posição. Em nosso projeto, iremos utilizar de maneira sutil o tema PA, e por isso não iremos aprofundar nele.

Sendo assim, interessa-nos o seguinte: considere, por exemplo, uma sequência com o primeiro termo igual a 1, e com a diferença entre um termo e seu antecessor, a partir do segundo, igual a 2, dessa forma temos a PA (1, 3, 5, 7, ...), com $a_1 = 1$ e $r = 2$, a qual iremos utilizar posteriormente.

6.5.1 Interação Entre Trens De Engrenagens

Considere uma interação entre uma engrenagem motora E_m de 8 dentes e uma engrenagem movida E_1 de 24 dentes. Como já foi explicitado, essa interação pode ser representada pela função $f_{(m,1)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,1)}(x) = \frac{1}{3}x$. Nela, x = número de giros de E_m e $f_{(m,1)}$ = número de giros de E_1. Agora consideremos que em E_1 seja acoplado um eixo e que, neste eixo, seja acoplada outra engrenagem, E_2, de 8 dentes. Dessa forma, o eixo irá transmitir para E_2 a mesma quantidade de giros que E_1 tenha sofrido. Esse caso é representado pela função $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = x$, sendo x a quantidade de giros sofridos por E_1 e $g(x)$ a quantidade de giros de E_2. Em seguida, seja feita outra interação, agora de E_2 com uma engrenagem, E_3, de 24 dentes, portanto a relação da interação entre E_2 e E_3, isoladamente, é a mesma de E_m e E_1, que neste caso representaremos pela função $f_3: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f_3(x) = \frac{1}{3}x$. A seguir representamos estas interações no trem de engrenagens (Figura 10):

Figura 10 – Engrenagens ilustrativas



Fonte: O autor (elaborada no Geogebra).

Utilizando agora de composições de funções, iremos associar E_m diretamente à E_3. Como já foi observada, a relação entre E_1 e E_2 é representada por uma função identidade, a qual não há necessidade de fazer parte da composição das funções, uma vez que seu giro é o mesmo de E_1, sendo assim, para questão de composição, iremos fazer a relação $E_m \rightarrow E_1 \rightarrow E_3$. Em linguagem de funções teremos:

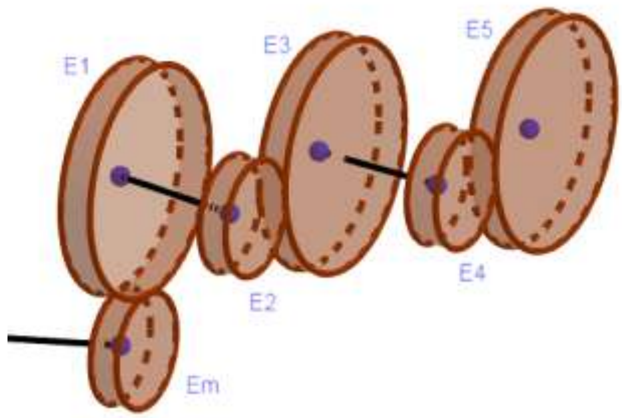
$$E_m \rightarrow E_3$$

$$f_{(m,3)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f_{(m,3)} = f_1 \circ f_3 = f_1\big(f_3(x)\big) = \frac{1}{3} f_3(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{9} x$$

Partindo agora de E_3 e repetindo novamente as mesmas interações ocorridas a partir de E_1, teremos (Figura 11):

Figura 11 – Engrenagens ilustrativas



Fonte: O autor (elaborada no Geogebra).

Como seguimos o mesmo modelo de interações, E_4 tem 8 dentes, E_5 24 dentes, o fator de proporcionalidade da função da interação $E_4 \rightarrow E_5$ também é o mesmo de $E_m \rightarrow E_1$ e $E_2 \rightarrow E_3$, ou seja, $a = \frac{1}{3}$, sendo $f_5: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f_5(x) = \frac{1}{3}x$. Como também E_3 e E_4 estão ligadas por um eixo, essa relação também é representada por uma função identidade, do mesmo modo como $E_1 \rightarrow E_2$. Portanto, para fazermos a relação direta de E_m à E_5, também não precisaremos considerar E_2 e E_4, portanto fica a composição:

$$E_m \rightarrow E_5$$

$$f_{(m,5)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f_{(m,5)} = f_{(m,3)} \circ f_5 = f_{(m,3)}\big(f_5(x)\big) = \frac{1}{9} f_5(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{27} x$$

É importante ressaltar que essa interação poderia ser feita quantas vezes se fizer necessária.

Observemos então apenas as funções que correspondem às interações diretas ou não, da engrenagem motora E_m entre as engrenagens que possuem 24 dentes. Estas são as funções: $f_{(m,1)}$, $f_{(m,3)}$, e $f_{(m,5)}$. Considerando que estas interações podem continuar a se repetir por um número n de vezes, seguindo o mesmo padrão, e que, conforme este, sempre entre duas engrenagens de 24 dentes haverá uma de 8 dentes, podemos concluir que a próxima interação resultaria em $E_m \rightarrow E_7$, representada pela função $f_{(m,7)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, ou seja $f_{(m,7)}$. Portanto, definindo como as funções que representam as interações entre a engrenagem motora E_m e as engrenagens com 24 dentes, a função genérica $f_{(m,k)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$. É fácil observar que os valores de k correspondem à PA citada anteriormente, (1, 3, 5, 7, ...), onde k representa qual engrenagem de 24 dentes está sendo relacionada com a motora, e a posição n, correspondente a cada k na PA, corresponde a quantas interações no modelo seguido foram feitas. Contando-se como interação os pares de engrenagens de 8 e 24 dentes, considerando também a motora, afinal a mesma possui 8 dentes, a fim de exemplificar, ao final de cinco interações, teríamos como função entre a engrenagem motora e a última engrenagem de 24 dentes, $f_{(m,9)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, pois 9 seria o quinto termo da PA (1, 3, 5, 7, 9, ...), ou seja, a nona engrenagem, de 24 dentes, em sequência a partir da engrenagem motora E_m.

6.6 POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

Conforme Lima (2013), considerando um número real positivo a. Para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos que a potência a^n, de base a e expoente n, é o produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não se tem produto de apenas um fator, coloca-se por definição $a^1 = a$. E, assim de maneira indutiva, tem-se a definição de que a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Para m e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, temos a igualdade $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, pois em ambos os lados da igualdade tem-se o produto de $m+n$ fatores iguais a a. Logo, para m_1, m_2, m_3, ... ,m_k, quaisquer em $\mathbb{N}$, vale:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot a^{m_3} \cdot \cdots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k}.$$

Em particular se, $m_1 = m_2 = \ldots, m_k = m$, temos $(a^m)^k = a^{mk}$.

Se $a > 1$, então, multiplicando-se ambos os membros desta desigualdade por a^n, $a^{n+1} > a^n$, logo,

$$a > 1 \Longrightarrow 1 < a < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots.$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Longrightarrow 1 > a > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots,$$

como se pode ver, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto, a sequência cujo n-ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $0 < a < 1$; e constante quando $a = 1$, com todos seus termos iguais a 1.

Agora, para $n \in \mathbb{Z}$, a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ deve sempre ser mantida, e assim temos: para $n = 0$, $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1$, isso implica que $a^0 \cdot a = a$, logo, por definição, $a^0 = 1$; tem-se também que $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, o que implica que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Dessa forma, para estender o conceito de potência do número real a também para expoentes inteiros, é necessário se considerar as seguintes definições: $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prosseguindo agora para a^r, com $r = m/n$, com m e $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, portanto com r sendo um número racional, continua válida a relação fundamental, $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, sendo s também um número racional, dessa igualdade temos:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdots a^r = a^{r+r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Assim,a^r, é o número real positivo cuja n-ésima potência é a^m. Logo, pela definição de raiz, temos que este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única forma de se definir a potência a^r com $r = m/n$, com m e $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ é colocando $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Posteriormente, para definição de função exponencial, será necessária a extensão de definição de potências de expoentes irracionais, a qual é feita na respectiva unidade.

6.7 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Conforme Lima (2013), uma Progressão Geométrica, que denotaremos apenas por PG, é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Para classificar uma PG, como uma sequência numérica crescente, decrescente, constante ou oscilante, devemos levar em consideração o seu primeiro termo, denotado por a_1, e sua taxa, chamada especificamente, no caso de progressões numéricas, de razão, que pode ser representada por q, valor constante que multiplica cada termo da PG a fim de se obter o próximo, isto a partir do segundo termo. E assim temos que:

1. Se $a_1 > 0$, e $q > 0$, ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, a PG é crescente.
2. Se $a_1 \in \mathbb{R}$, e $q = 1$, a PG é constante.
3. Se $a_1 < 0$ e $q > 1$, ou $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, a PG é decrescente.
4. Se $a_1 \in \mathbb{R}$, e $q < 0$, a PG é oscilante.

Em questão de escritas, os termos de uma PG podem ser escritos da forma:

$$PG = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

Como cada termo a partir do segundo é sempre o resultado do anterior multiplicado pela razão q, temos:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Sendo assim, qualquer sequência formada sob as definições de uma PG pode ser escrita segundo a lei de formação: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Em casos onde os termos possam ser enumerados a partir do zero, temos: $a_n = a_0 \cdot q^n$.

6.7.1 Interações entre Trens de Engrenagens

Retornando ao exemplo de interações de engrenagens, onde definimos que as funções que representam as interações entre a engrenagem motora E_m e as engrenagens com 24 dentes é a função genérica $f_{(m,k)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$,e tomando $k = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$, com n sendo o número de interações, temos que:

$$n = 1 \Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow f_{(m,1)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,1)}(x) = \frac{1}{3}x$$

$$n = 2 \Longrightarrow k = 3 \Longrightarrow f_{(m,3)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,3)}(x) = \frac{1}{9}x$$

$$n = 3 \Longrightarrow k = 5 \Longrightarrow f_{(m,5)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,5)}(x) = \frac{1}{27}x$$

$$\vdots$$

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow k = 2n - 1 \Longrightarrow f_{(m,k)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,k)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x$$

Os valores de *k*, como já mostrado anteriormente, seguem uma sequência em forma de PA, analisemos agora, de maneira particular, a sequência formada pelos fatores de proporcionalidades de cada função: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$, é fácil notar que a razão do terceiro pelo segundo é igual à do segundo pelo primeiro, que neste caso é de $\frac{1}{3}$, ou seja, a partir do segundo fator, cada um é encontrado multiplicando o anterior por $\frac{1}{3}$, caracterizando assim uma PG, conforme citado acima. Uma PG com $a_1 = q = \frac{1}{3}$, portanto decrescente, com $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, e de termo geral igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Longrightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Concluímos então que: conforme são feitas as interação de acordo com o modelo citado, os números de interações e as posições das engrenagens de 24 dentes, a partir da engrenagem motora E_m, formam uma PA, e, ao mesmo tempo, os fatores de proporcionalidades das funções lineares de cada interação entre a engrenagem motora E_m com as engrenagens de 24 dentes formam uma PG. Ou seja, enquanto a PA de n $(1, 2, 3, \ldots)$

implica a PA de $k\,(1, 3, 5, \dots)$, implica-se também a PG de a (a indicando os fatores de proporcionalidades) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$.

6.8 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Já definidas as potências com expoentes racionais, é necessário agora sua extensão para expoentes reais, abrangendo, assim, também expoentes irracionais, para que possamos definir a função exponencial com domínio em $\mathbb{R}$. Isto significa que fixado $a > 0$, devemos definir uma função f, com domínio em $\mathbb{R}$, que satisfaça para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$ as propriedades fundamentais, conforme Lima (2013):

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, quando\ a > 1 \\ a^y < a^x, quando\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Como pode ser observado, tal função é estritamente positiva, podendo ser definida como $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, e, ainda, sendo $r \in \mathbb{Q}$,, a função coincidirá com a exponenciação a^r, já definida.

Agora, fixado um $a > 0$ (o caso $0 < a < 1$ é análogo), devido à monotonicidade da exponencial em $\mathbb{Q}$, mostraremos que, dado x irracional, existe um único número real y com a seguinte propriedade:

$$\forall r, s \in \mathbb{Q}, r < x < s \Rightarrow a^r < y < a^s.$$

Assim poderemos definir $a^x = y$, para, então, definir bem uma função f que satisfaça as propriedades 1, 2 e 3.

6.8.1 Potências de Expoentes Irracionais

Portanto, como já mostrado, a sequência numérica $a^r, r \in \mathbb{Q}$ com $a > 0$ fixado, é uma sequência monótona, crescente se $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$. O caso $a = 1$ não se faz necessário considerar por se tratar de uma sequência constante igual ao próprio 1. Desta propriedade resulta que existe apenas uma maneira de definir o valor y, sendo $y = a^x$, e x um número irracional, onde y apresenta as seguintes propriedades:

$$\forall r, s \in \mathbb{Q}, \qquad r < x < s \Rightarrow a^r < y < a^s$$

Isto quer dizer que a^xé um número real cujas aproximações por falta são a^r e, por excesso a^s, existência esta que pode ser admitida devido à completeza do conjunto $\mathbb{R}$, e porque, por outro lado, não podem existir dois números reais distintos com estas propriedades. Caso houvesse, sendo eles A e B, com $A < B$, teríamos que:

$$\forall r,s \in \mathbb{Q},\ r < s \Rightarrow a^r < A < B < a^s.$$

Então, nesse caso, no intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, o que contraria o seguinte lema:

Fixado o número positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência $a^r, r \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Dados $0 < A < B$, devemos achar $r \in \mathbb{R}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[A, B]$, isto é, $A \leq a^r \leq B$. Por simplicidade, suporemos a e A maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais n e M tais que:

$$A < B < a^M \quad e \quad 1 < a < \left(1 + \frac{B-A}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{B-A}{a^M} \quad e \quad 0 < a^M\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < B - A.$$

Logo, se $M \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{m}{n} \leq M$, então

$$0 < a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < B - A \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < B - A.$$

Assim as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{1}{2}}, \dots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimentos menor do que o comprimento $B - A$ do intervalo $[A, B]$. Como $[A, B] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[A, B]$, conforme queríamos demonstrar. Assim enceramos as definições de potências de um número positivo de expoentes reais e podemos agora definir e caracterizar a função exponencial.

6.8.2 Função Exponencial – Definição

Seja a um número real positivo diferente de 1. A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de base a, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades fundamentais. Para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, quando\ a > 1 \\ a^y < a^x, quando\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Pela propriedade 1, onde há a transformação de uma soma em um produto, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, é importante notar que uma função com esta propriedade não pode assumir o valor 0, a não ser que ela seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo, f será identicamente nula.

E, ainda, para uma função com a propriedade 1, e não identicamente nula, teremos $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Portanto, o contradomínio de f tanto pode ser $\mathbb{R}$ quanto $\mathbb{R}^+$, onde a vantagem de se tomar o contradomínio como $\mathbb{R}^+$, é que f passa a ser sobrejetiva, como veremos.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedade 1 e 2, então para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(n) = f(1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n.$$

E como já foi mostrado pela propriedade 1, resulta que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter:

$$f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Então, $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r + s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer r e $s \in \mathbb{Q}$, e $f(1) = a$.

Para a potência a^x, com x irracional, já foi provado que existe apenas um $y = a^x$, cujas aproximações por falta são as potências $a^r, r \in \mathbb{Q}$, e $r < x$, e cujas aproximações por excesso são as potências $a^s, s \in \mathbb{Q}$, e $s > x$, ficando definido assim $a^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$, e, sendo $y = f(x)$, a função exponencial como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$.

Definida a função exponencial nos Reais, apresentaremos a seguir suas outras propriedades:

4. A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$, é *ilimitada superiormente*.

   Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$, segundo o lema: *Fixado o número positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência $a^r, r \in \mathbb{R}$*. Mais precisamente, se a > 1, então a^x cresce sem limites quando x > 0 é muito grande. E se 0 < a < 1, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando x < 0 tem valor absoluto grande.

5. A função exponencial é *contínua*.

   Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e, então, $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, pode-se mostrar que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos. Isto implica que $\lim_{x \to x_0}|a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

6. A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, *é sobrejetiva*.

   Esta afirmação quer dizer que, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a). Para prová-la, usamos o lema referido na propriedade 4 e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$. Portanto, $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente de modo que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

   Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então, pela monotonicidade da função a^x, nos asseguramos de que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$.

Assim, (r^n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante, então, que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. A função exponencial, sendo contínua, garante que $a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$, como queríamos demonstrar.

E, ainda, segundo Lima (2013), fica provado que:

> *Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente, se $a > 1$, decrescente, se $a < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.*

6.8.3 Caracterização da Função Exponencial

A fim de se poder decidir por modelar um determinado problema, ou situação, utilizando uma função exponencial ou não, Lima (2013) apresenta o teorema de Caracterização da Função Exponencial:

> Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), as seguintes afirmações são equivalentes:
>
> 1. $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e$x \in \mathbb{R}$;
> 2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
> 3. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Provaremos $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$. A fim de mostrar que $1 \Longrightarrow 2$, observamos inicialmente que a hipótese 1 acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), tem-se $f(rx) = f(x)^r$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo, $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(1 \cdot r) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $1 \Longrightarrow 2$, suponhamos, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, pelo Lema: *Fixado o número positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência $a^r, r \in \mathbb{R}$*, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$, concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $1 \Longrightarrow 2$. As implicações restantes $2 \Longrightarrow 3$ e $3 \Longrightarrow 1$ são óbvias.

6.8.4 Funções do Tipo Exponencial

Conforme Lima (2013), uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial, então, $x, h \in \mathbb{R}$ os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Sendo a recíproca verdadeira. E assim temos o Teorema de Caracterização das Funções Tipo Exponenciais:

> *Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). Suponhamos que, para quaisquer x eh em $\mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e$a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração do Teorema:

> Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que a função $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo-se, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, f é contínua monótona injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos, assim, que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$. Segue-se, então, do teorema anterior, que $f(x) = a^x$, logo, $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.

6.8.5 Funções do Tipo Exponenciais e Progressões

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}\ ,\ \ f(x_2) = ba^{x_2}\ ,\dots,f(x_n) = ba^{x_n},\dots$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h, pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = ba^{x_n} \cdot a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$, então $f(x_1) = b$, logo, $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

E, assim, segue o Teorema:

> *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, numa progressão geométrica $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, onde $y_n = f(x_n)$, se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração do Teorema:

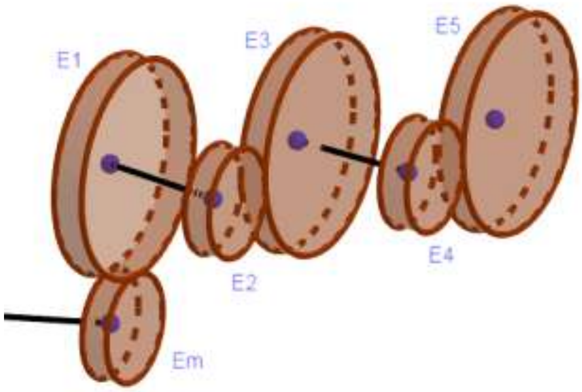
> Seja $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora se tem $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então, seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$.Se $-n$ é um inteiro negativo, então $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fica demonstrado que situações em que uma função transforma elementos de uma PA em elementos de uma PG, esta função é do tipo exponencial. Diante disso, agora iremos associar as interações dos trens de engrenagem à função de tipo exponencial.

6.8.6 Trens de Engrenagens / Função do Tipo Exponencial

Retomando os exemplos das interações anteriores, citados na seção “Interações entre Trens de Engrenagens”, conforme são feitas as interações de uma engrenagem de 8 dentes acoplada a uma de 24, (Figura 12), os números de interações e as posições das engrenagens de 24 dentes, a partir da engrenagem motora E_m, formam uma PA e, ao mesmo tempo, os fatores de proporcionalidades das funções lineares de cada interação entre a engrenagem motora E_m, com as engrenagens de 24 dentes, formam uma PG. Ou seja, enquanto a PA de $n\,(1, 2, 3, \dots)$ implica a PA de $k\,(1, 3, 5, \dots)$, implica-se também a PG de a (a os fatores de proporcionalidades) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$.

Figura 12 – Engrenagens ilustrativas



Fonte: O autor(elaborada no Geogebra).

Portanto, $n = 1$ significa a primeira interação, entre a engrenagem motora E_m de 8 dentes, com a primeira engrenagem de 24 dentes E_1, que implica $k = 1$ e a função $f_{(m,1)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_{(m,1)}(x) = \frac{1}{3}x$, com $x \in \mathbb{R}$ e representando a relação de giros entre a engrenagem motora E_m e E_1; $n = 2$ significa a segunda interação, entre a engrenagem E_2 de 8 dentes (ligada a E_1 por um eixo), com a segunda engrenagem de 24 dentes E_3, que implica $k = 3$, e a função $f_{(m,3)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_{(m,3)}(x) = \frac{1}{9}x$, com $x \in \mathbb{R}$ e, representando a relação de giros entre a engrenagem motora E_m e E_3, matematicamente, temos que:

$$n = 1 \Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow f_{(m,1)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,1)}(x) = \frac{1}{3}x$$

$$n = 2 \Longrightarrow k = 3 \Longrightarrow f_{(m,3)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,3)}(x) = \frac{1}{9}x$$

$$n = 3 \Longrightarrow k = 5 \Longrightarrow f_{(m,5)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,5)}(x) = \frac{1}{27}x$$

$$\vdots$$

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow k = 2n - 1 \Longrightarrow f_{(m,k)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_{(m,k)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x$$

Ou seja, as interações transformam uma PA, seja ela referente às sequências de n ou k, em uma PG referente aos fatores de proporcionalidades de cada função correspondente aos números de giros da engrenagem motora E_m, com as engrenagens de 24 dentes. E, como demonstrado, isto caracteriza uma função de tipo exponencial, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, restrita, neste caso, tanto ao domínio, como ao contradomínio à $\mathbb{R}^+$, e, de maneira ainda mais particular, nota-se que, se na função de tipo exponencial, ocorrer de b ser igual a a, pelas propriedades de potência, essa função pode ser representada como uma função tipicamente exponencial, da forma $f(t) = c^t$, sendo $c = ab$ e $t = x + 1$, pois a PG formada com os fatores de proporcionalidades $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$ possui a_1 e $q = 1/3$, de onde podemos fazer a seguinte relação entre a fórmula do termo geral de uma PG e a função do tipo exponencial:

$$Termo\ Geral\ de\ uma\ PG \ \Longrightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1};$$

$$Função\ do\ Tipo\ Exponencial \ \Longrightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = b \cdot a^x, b\ e\ a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, é fácil notar que a_1 está relacionado à b, assim como q está a a e x à $n - 1$. Isso demonstra que da fórmula geral das interações $f_{(m,k)}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_{(m,k)}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x$, analisada de forma isolada, considerando-se apenas a parte da sequência dos fatores de proporcionalidades, extraindo-se, assim, a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, apesar de originar-se de uma PG, que pelo Teorema representa uma função de Tipo Exponencial, pela especificidade do exemplo proposto, tem-se de fato uma função não apenas de tipo exponencial, mas exponencial, da forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, apenas com a restrição ao domínio natural, o que pelo Teorema não intervém em sua caracterização de função exponencial nos reais para os reais positivos.

Concluímos ser possível modelar os giros das engrenagens de um câmbio de marchas, por uma função exponencial ou do tipo exponencial, onde as razões de proporcionalidades, entre específicas engrenagens no sistema do câmbio, formarão em sequência uma PG que, de acordo com a sequência didática proposta e explicada a seguir, será um câmbio de 4 marchas. Este, com a relação de giros de uma marcha para sua posterior de 1/3 que, ao ser utilizado em sala de aula, apresentar-se-á como ótimo recurso no auxílio do ensino da função exponencial.

7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Conforme Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas são: "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Sendo assim, na educação atual, ainda que de maneira macro, o que deveria fazer parte destes objetivos educacionais?

7.1 CONTEÚDOS DE APRENDIZAGENS

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) devem ser finalidades do ensino médio:

> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (LDB, 1996, Art. 35).

Diante dessas finalidades, a BNCC, embasada na LDB, afirma:

> Para cumprir essas finalidades, a escola que acolhe as juventudes tem de garantir o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, promovendo a educação integral dos estudantes no que concerne aos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais [...]. (BNCC do ENSINO MÉDIO, 2017, p. 464).

Portanto, um dos objetivos educacionais atuais, é a educação integral. Uma educação que não se limite ao desenvolvimento apenas intelectual ou afetivo dos alunos, apenas a conceitos ou práticas ou a atitudes, mas a uma junção de todos estes, para, então, se dizer integral.

E esta preocupação com o desenvolvimento integral dos aprendizes na educação é também compartilhada por Zabala (1998):

> Deste modo, os conteúdos de aprendizagem não se reduzem unicamente às contribuições das disciplinas ou matérias tradicionais. Portanto, também serão conteúdos de aprendizagem todos aqueles que possibilitem o desenvolvimento das

> capacidades motoras, afetivas, de relação interpessoal e de inserção social. (ZABALA, 1998, p. 30).

E, nesse intuito de uma formação integral nas escolas, Zabala (1998) divide o que se deve aprender conforme Coll (1986):

> Portanto, ao responder à pergunta "o que deve se aprender?" deveremos falar de conteúdos de natureza muito variada: dados, habilidades, técnicas, atitudes, conceitos, etc. Das diferentes formas de classificar esta diversidade de conteúdos, Coll (1986) propõe uma que, como veremos, tem uma grande potencialidade explicativa dos fenômenos educativos. Este autor agrupa os conteúdos segundo sejam conceituais, procedimentais ou atitudinais. Esta classificação corresponde respectivamente às perguntas "o que se deve saber?", "o que se deve saber fazer?" e "como se deve ser?", com o fim de alcançar as capacidades propostas nas finalidades educacionais. (ZABALA, 1998, p. 30-31).

Sob essas divisões de conteúdos, Zabala (1998) escreve seu livro *A Prática Educativa, Como Ensinar*. Onde também apresenta os métodos de ensino que devem ser adotados para cada tipo de conteúdo e define sequências didáticas e de conteúdos. Porém, antes de se estabelecer métodos de ensinos, ele analisa como se dão os processos de aprendizagem, sob uma concepção construtivista.

7.2 PROCESSOS DE APRENDIZAGENS NA CONCEPÇÃO CONSTRUTIVISTA

Embasado no construtivismo cognitivo de Piaget, é feita então a relação entre os processos interiores de aprendizagem e o ensino escolar:

> [...] pressupõe-se que nossa estrutura cognitiva está configurada por uma rede de esquemas de conhecimento. Estes esquemas se definem como as representações que uma pessoa possui, num momento dado de sua existência, sobre algum objeto de conhecimento. Ao longo da vida, estes esquemas são revisados, modificados, tornam-se mais complexos e adaptados à realidade, mais ricos em relações. A natureza dos esquemas de conhecimento de um aluno depende de seu nível de desenvolvimento e dos conhecimentos prévios que pôde construir; a situação de aprendizagem pode ser concebida como um processo de comparação, de revisão e de construção de esquemas de conhecimento sobre os conteúdos escolares. (ZABALA, 1998, p. 37).

.

Para que esses processos de aprendizagens ocorram:

> [...] não basta que os alunos se encontrem frente a conteúdos para aprender; é necessário que diante destes possam atualizar seus esquemas de conhecimento, compará-los com o que é novo, identificar semelhanças e diferenças e integrá-las em seus esquemas, comprovar que o resultado tem certa coerência etc. (ZABALA, 1998, p. 37).

No sentido de um ensino que desenvolva de forma integral o aluno, embasado no construtivismo sobre como o conhecimento é adquirido, de como os processos de aprendizagem se desencadeiam, são apresentados os métodos de ensino para cada tipo de conteúdo.

7.3 CONTEÚDOS CONCEITUAIS, PROCEDIMENTAIS E ATITUDINAIS

Zabala, no objetivo de estabelecer métodos de ensino para a escola, encontrou nessa forma de divisão dos conteúdos uma alternativa para generalizá-los independentemente de suas disciplinas, matemática, geografia, história, ciências, etc. Isso porque, caso o contrário, seria necessário um métodos para cada uma, o que tornaria seu trabalho demasiadamente desgastante e extenso. O autor estabeleceu, assim, que conteúdos classificados como conceituais, por exemplo, estão presentes tanto em matemática como nas outras disciplinas, e que seu método de ensino apresentado poderá ser utilizado em qualquer uma das disciplinas.

Por outro lado, ele também ressalta o risco de tal reducionismo nessa classificação de todos os conteúdos. A linha que separa a classificação de um determinado conteúdo quanto a um dos três tipos é tênue. E, ainda, deve-se levar em consideração que, na maioria dos casos, o aprendizado ocorre de forma integral, aprende-se e utiliza-se conceitos, ao se realizar procedimentos que, por sua vez, enquanto são realizados, apontam posições atitudinais. Assim, Zabala (1998), diz que:

> A linha divisória entre umas e outras é muito sutil e confusa. Portanto, [...], a aproximação a uma ou outra [...] é uma opção de quem efetua a análise. Num determinado momento, queremos ensinar ou nos deter no aspecto factual, conceitual, procedimental ou atitudinal do trabalho de aprendizagem a ser realizado. (ZABALA, 1998, p. 40).

Se atentando, então, a estes detalhes e deixando ao critério de quem estará a ensinar as classificações para a escolha do melhor método, Zabala (1998) define que:

> Os conceitos e os princípios são termos abstratos. Os conceitos se referem ao conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns, e os princípios se referem às mudanças que se produzem num fato, objeto ou situação em relação a outros fatos, objetos ou situações e que normalmente descrevem relações de causa-efeito ou de correlação. [...]
>
> Um conteúdo procedimental – que inclui entre outras coisas as regras, as técnicas, os métodos, as destrezas ou habilidades, as estratégias, os procedimentos – é um

> conjunto de ações ordenadas e com um fim, quer dizer, dirigidas para a realização de um objetivo. [...].
>
> O termo conteúdos atitudinais engloba uma série de conteúdos que por sua vez podemos agrupar em valores, atitudes e normas. (ZABALA, 1998, p. 42-46).

E, assim, o autor define os tipos de atividades para o ensino de cada conteúdo.

7.4 TIPOS DE ATIVIDADES PARA CADA CONTEÚDO

Para conteúdos classificados como conceituais:

> Como os conceitos e princípios são temas abstratos, requerem uma compreensão do significado e, portanto, um processo de elaboração pessoal. Neste tipo de conteúdo são totalmente necessárias [...]: atividades que possibilitem o reconhecimento dos conhecimentos prévios, que assegurem a significância e a funcionalidade, que sejam adequadas ao nível de desenvolvimento, que provoquem uma atividade mental, etc. (ZABALA, 1998, p. 81).

Para conteúdos classificados como procedimentais:

> Neste caso, o dado mais relevante é determinado pela necessidade de realizar exercícios suficientes e progressivos das diferentes ações que formam os procedimentos, as técnicas ou estratégias. [...] As atividades devem partir de situações significativas e funcionais, a fim de que o conteúdo possa ser aprendido junto com a capacidade de poder utilizá-lo quando seja conveniente. Por isto é imprescindível que este conteúdo tenha sentido para o aluno: ele deve saber para que serve e que função tem, ainda que seja útil apenas para poder realizar uma nova aprendizagem. [...] atividades que apresentem os modelos de desenvolvimento do conteúdo de aprendizagem. Modelos onde se possa ver todo o processo, que apresentem uma visão completa das diferentes fases, passos ou ações que os compõem, para passar posteriormente, se a complexidade do modelo assim o requer, ao trabalho sistemático das diferentes ações que compreendem. [...] Para que a ação educativa resulte no maior benefício possível, é necessário que as atividades de ensino/aprendizagem se ajustem ao máximo a uma seqüência clara com uma ordem de atividades que siga um processo gradual. [...] São necessárias atividades com ajudas de diferente grau e prática guiada. [...] Atividades de trabalho independente. (ZABALA, 1998, pp. 81-83).

Por fim, para conteúdos classificados como atitudinais, as atividades para esse ensino são mais complexas que as atividades para conceitos e procedimentos, uma vez que, nesses conteúdos, a componente afetividade tem forte influência no processo. E ainda, por se tratar de valores, por exemplo, não se pode limitar ao entendimento das definições de cada valor, até mesmo porque isto seria a área de conteúdos conceituais. Ou seja, o fato de um aluno saber definir com suas palavras o que é cooperação, não é garantia de que ele coopere com a equipe quando se fizer necessário (ZABALA, 1998). Em vista disso, para analisar o tipo de atividades para este ensino, primeiro é necessário definir o que vêm a ser valores, atitudes e normas:

> Entendemos por valores os princípios ou as idéias éticas que permitem às pessoas emitir um juízo sobre as condutas e seu sentido. São valores: a solidariedade, o respeito aos outros, a responsabilidade, a liberdade, etc.
>
> As atitudes são tendências ou predisposições relativamente estáveis das pessoas para atuar de certa maneira. São as formas como cada pessoa realiza sua conduta de acordo com valores determinados. Assim, são exemplo de atitudes: cooperar com o grupo, ajudar os colegas, respeitar o meio ambiente, participar das tarefas escolares, etc.
>
> As normas são padrões ou regras de comportamento que devemos seguir em determinadas situações que obrigam a todos os membros de um grupo social. As normas constituem a forma pactuada de realizar certos valores compartilhados por uma coletividade e indicam o que pode se fazer e o que não pode se fazer neste grupo. (ZABALA, 1998, pp. 46-47).

Apesar das diferentes conceituações, podemos notar que todos estão correlacionados, tendo em comum componentes cognitivos (conhecimento e crenças), afetivos (sentimentos e preferências) e condutuais (ações e declarações de intenções), conforme Zabala (1998).

De maneira geral Zabala (1998) conclui:

> Em termos gerais, a aprendizagem dos conteúdos atitudinais supõe um conhecimento e uma reflexão sobre os possíveis modelos, uma análise e uma avaliação das normas, uma apropriação e elaboração do conteúdo, que implica a análise dos fatores positivos e negativos, uma tomada de posição, um envolvimento afetivo e uma revisão e avaliação da própria atuação. (ZABALA, 1998, p. 48).

E, assim, para atender a estas especificidades das atividades para o ensino de conteúdos atitudinais, Zabala (1998) orienta:

> Adaptar o caráter dos conteúdos atitudinais às necessidades e situações reais dos alunos, levando em conta, ao defini-las, as características, os interesses e as necessidades pessoais de cada um deles e do grupo-classe em geral. [...]
>
> Partir da realidade e aproveitar os conflitos que nela se apresentam tem que ser o fio condutor do trabalho destes conteúdos. Aproveitar as experiências vividas pelos alunos e os conflitos ou pontos de vista contrários que apareçam nestas vivências ou na dinâmica da aula, a fim de promover o debate e a reflexão sobre os valores que decorrem das diferentes atuações ou pontos de vista. [...]
>
> Introduzir processos de reflexão crítica para que as normas sociais de convivência integrem as próprias normas. É preciso ajudar os alunos a relacionar estas normas com determinadas atitudes que se queiram desenvolver [...]
>
> Favorecer modelos das atitudes que se queiram desenvolver, não apenas por parte dos professores, incentivando e promovendo comportamentos coerentes com estes modelos. [...]

> Fomentar a autonomia moral de cada aluno. (ZABALA, 1998, pp. 84-85).

Portanto, partindo da ideia de que para uma educação integral é necessário o desenvolvimento desses três tipos de conteúdo, também se faz necessário que as atividades de uma sequência didática sejam diversificadas, a fim de atender aos três tipos e, assim, favorecer um desenvolvimento integral do objetivo educacional que se deseja.

7.5 ANÁLISE DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Primeiro se tem um objetivo educacional, seja ele ensinar sobre as classificações de um triângulo quanto à medida de seus lados, ou a calcular a área de um triângulo, um exemplo de conteúdo conceitual e um de procedimental respectivamente. A partir daí, a questão é o como fazê-lo e, depois, como avaliá-lo. Todas essas etapas se encontram em uma sequência didática.

Mas como elaborar a sequência didática correta para cada objetivo? A princípio, considerando a divisão dos conteúdos de aprendizagem nas três classificações (conceitual, procedimental, atitudinal), já se tem os modelos de atividades que devem ser seguidos para cada um. Porém, como já foi dito, essa classificação é muito sutil. Por exemplo, retornando ao objetivo de calcular a área de um triângulo, apesar de calcular ser de caráter procedimental, é necessário entender a definição de área, o que já é conceitual. Ainda, se o trabalho será em grupo ou se irão compartilhar materiais para fazer tal cálculo ou conferi-lo, também estaremos trabalhando cooperação, respeito aos colegas, cuidado com os materiais utilizados, conteúdos atitudinais. Percebemos, então, que os três tipos estão interligados, assim, não se poderia apenas preparar atividades de caráter procedimental se, ao mesmo tempo, também estão sendo trabalhados outros e em diferentes intensidades, pois estarão oscilando em relação ao que é exigido em determinado momento.

Dessa forma, Zabala (1998) orienta que, para concluir se uma sequência didática está adequada ao seu objetivo, é necessário analisá-la quanto aos seguintes referenciais, além de seus teóricos específicos: atenção à diversidade e a concepção construtivista. Isso se justifica porque a construção do conhecimento é algo pessoal, onde cada indivíduo utiliza o que já possui de modelo para ler e interpretar o que lhe está sendo proposto. Sendo a assim, ainda que o que se transmite seja de forma coletiva em uma aula, cada leitura disso é pessoal e singular, pois os modelos prévios de cada aluno foram elaborados durante toda a sua trajetória particular e única até estar ali. Então, ainda segundo ao autor, cabe ao professor perceber como a “leitura” está sendo feita por cada um e interferir, quando perceber que esta pode estar sendo feito de forma errônea, e também ajudar, quando ela não estiver fluindo.

Em vista disso, para facilitar estas conclusões, Zabala (1998) indica algumas perguntas a serem feitas antes de validar uma sequência didática para determinado objetivo:

> Na seqüência didática existem atividades:
> a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas?
> c) que possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno?
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
> e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) que estimulem a auto-estima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens? (ZABALA, 1998, pp. 63-64).

Portanto, seguindo essas orientações e análises, é possível concluir se a sequência didática está satisfatória para um aprendizado de forma integral do objetivo educacional proposto ou se ainda é necessário acrescentar itens ou até mesmo reduzir ou excluir alguns.

7.6 SEQUÊNCIAS DE CONTEÚDOS

Para exemplificar a teoria sobre sequências de conteúdos de Zabala (1998), iremos utilizar nosso próprio trabalho. Para chegar à função do tipo exponencial, utilizamos progressões geométricas, que foram formadas mediante composições de funções lineares, as quais, por sua vez, modelam em linguagem de funções as relações de proporcionalidades existentes entre as interações de engrenagens.

Consideramos, então, que o início de nossa sequência didática será a revisão de proporcionalidade, que nesta etapa os alunos terão uma aula expositiva sobre o tema, um momento para levantar dúvidas e resolver exercícios a fim de fixar o conceito específico de proporcionalidade, dando sequência assim, ao tema função linear e a sequência didática.

Porém, mesmo quando a sequência didática estiver em seu final, já tratando de funções do tipo exponencial, devido à maneira de como neste trabalho se chegou a esta função, os alunos ainda estarão utilizando de forma direta e/ou indireta o conceito e os procedimentos relacionados à proporcionalidade. E se, neste momento, alguns alunos ainda apresentarem conhecimento insatisfatório quanto a este tema? O professor, então, para não negligenciar a dificuldade de tais alunos, terá que retornar ao tema, solucionar o que ainda não foi aprendido, para, só assim, dar sequência nas atividades. É sobre esta questão que Zabala (1998) insere as sequências de conteúdos, de modo que as define como:

> [...] o conjunto ordenado de atividades estruturadas e articuladas para a consecução de um objetivo educacional em relação a um conteúdo concreto. Esta unidade de análise, como as seqüências didáticas, está inserida num contexto em que se deverá identificar, além dos objetos didáticos e do conteúdo objeto da seqüência; as outras variáveis metodológicas: relações interativas, organização social, materiais curriculares, etc. (ZABALA, 1998, p. 78).

Este caso em que utilizamos de exemplo o conhecimento sobre proporcionalidades, seria contemplado pela sequência de conteúdo proporcionalidade, que não se esgotaria na primeira etapa da sequência didática, pois estaria presente do início ao término de toda a sequência, visto que é requisito para todo o objetivo educacional proposto. Além disso, Zabala (1998) também atribui às sequências de conteúdos uma forma mais eficiente para se trabalhar os conteúdos procedimentais e atitudinais, por possibilitarem a análise da aprendizagem, ou não, destes, durante todo o processo das unidades didáticas propostas.

Portanto, embasados nestas definições, orientações e análises, será apresentada uma sequência de aulas e conteúdos a ser seguida, com o objetivo de auxiliar no ensino da função exponencial, por meio do KIT LEGO® Mindstorms NXT.

7.7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA – A FUNÇÃO EXPONENCIAL UMA ABSTRAÇÃO DA INTERAÇÃO ENTRE ENGRENAGENS.

A proposta desta sequência didática tem como objetivo principal, abstrair a função exponencial, a partir das interações entre engrenagens, apontadas como excelente recurso no ensino da matemática por Papert, associadas à Robótica Educacional.

Com foco no aprender fazendo, ideia muito associada ao Construcionismo e à Robótica Educacional, construindo o conceito da referida função com a interação do aluno com o câmbio a ser construído, ideia, esta, associada ao Construtivismo, pretende-se que a percepção e diferenciação de uma situação como exponencial, por parte do aluno, seja aprendida e consolidada durante e ao final da construção proposta.

Todavia, sendo a matemática uma ciência contínua, na qual conceitos se entrelaçam formando novos conceitos, para um bom resultado final, é necessário que estejam consolidados, a um nível satisfatório, os conceitos anteriores à função exponencial utilizados aqui no decorrer deste trabalho – sendo estes: Proporcionalidade, Função Linear, Composição de funções (especificamente de funções lineares), PA, e PG – para, só assim, chegar às Funções, Exponencial e do tipo Exponencial.

Especificamente dentro dos conceitos da função exponencial, ou do tipo exponencial, é objetivo que a construção proposta possibilite ao aluno entender a caracterização ou não de um crescimento ou decrescimento exponencial, definir a função destes e, ainda, o quanto os processos – de crescimento ou decrescimento, exponencial – são “explosivos”.

Assim sendo, sobre este crescimento “explosivo” de situações exponenciais, é valido considerar a situação financeira de uma grande maioria de jovens, que ao sair do ensino médio e ingressar tanto em faculdades quanto no mercado de trabalho, têm, então, o início ao acesso a créditos financeiros junto a bancos, por de cartões de crédito e empréstimos, regidos sempre a juros compostos, com crescimentos exponenciais de dívidas em casos de inadimplência. Essa situação ilustra porquê de ser necessário, o entendimento por parte dos alunos de um crescimento exponencial não apenas para assuntos acadêmicos, mas também como preparação para uma vida particular financeira saudável.

Como no decorrer do trabalho os conceitos matemáticos abordados foram sempre exemplificados já com situações inerentes à construção do câmbio de marchas, utilizando as engrenagens LEGO®, nesta parte de detalhamento da proposta didática, no intuito de ser objetivo e pragmático, não serão demonstradas relações matemáticas com o processo de construção. A fim de exemplificar interações entre engrenagens, tais interações já serão representadas por funções lineares, uma vez que esta relação também já foi demonstrada anteriormente.

Portanto, este capítulo será restrito apenas ao necessário para a explanação da Sequência Didática. Quaisquer dúvidas que, por ventura, venham a surgir durante o entendimento do processo da sequência, recomenda-se o retorno ao capítulo pertinente ao assunto em questão.

7.8 SEQUÊNCIA DIDÁTICA – ESPECIFICAÇÕES

Esta sequência tem como público-alvo alunos do primeiro ano do ensino médio, no intuito de ser um auxílio para o ensino da função exponencial. No entanto, claro, a sequência também pode ser utilizada nos demais anos desse nível, como forma de revisão da função, com uma abordagem diferente. Ou ainda, em se tratando apenas do produto final dessa sequência (o câmbio de marchas), este se apresenta como uma ótima opção para trabalhos em feiras de ciências ou matemática, por se tratar da utilização de Kit LEGO® e robótica.

Para a sequência, é estimado um total de 10 aulas, com 50 minutos de duração cada. Sendo necessário um Kit LEGO® NXT para cada grupo, de no máximo cinco alunos, visto que grupos maiores podem gerar ociosidade entre eles, acarretando certa dispersão.

Como já explicado, serão necessários conceitos matemáticos prévios, e a sequência não se comprometerá a ensiná-los, mas apenas a revisá-los. Fica a critério do aplicador da sequência a necessidade ou não de aulas paralelas, para a retomada de forma satisfatória do entendimento destes conceitos. Também a sequência didática não esgotará todas as formas de ensino e tudo que deve ser ensinado para tais conteúdos, sendo assim, uma maneira auxiliar de ensino, não suficientemente exclusiva.

Ao se utilizar, então, da teoria de Zabala (1998), é importante que uma sequência didática contemple atividades que favoreçam o desenvolvimento dos alunos de forma integral, não trabalhando apenas conceitos, ou não trabalhando conceitos, procedimentos e atitudes, porém de forma sempre isoladas. Logo, ao iniciar a sequência, devem ser apresentados aos alunos os conceitos e procedimentos matemáticos e também os conteúdos atitudinais que serão trabalhados. Como exemplo destes: a cooperação, trabalhar em equipe, respeitar as dificuldades e facilidades de cada um, cuidar do material utilizado, como também manter o ambiente em que se está estudando organizado e limpo. O professor deve lembrar sempre aos seus alunos que o direito individual de cada um não se sobrepõe ao do outro, que seus comportamentos durante as atividades sempre devem estar em conformidade com o bem estar coletivo dos que ali estão. Durante e ao final da sequência, é necessário propiciar momentos de reflexão sobre os conteúdos atitudinais que já foram aprendidos, e os quais precisam ser mais trabalhados. A avaliação sobre os conteúdos conceituais e procedimentais fica a cargo do aplicador, levando em consideração que cada escola possui seu projeto político pedagógico e cada professor seu planejamento de distribuição de pontos.

7.9 SEQUÊNCIA DE CONTEÚDOS PROPORCIONALIDADE.

Primeira Aula– Início

Como o conceito de proporcionalidade já é introduzido para o aluno desde os primeiros anos do ensino fundamental (anos finais), não se faz necessário uma introdução profunda e muito técnica do tema. Basta exemplificar situações de proporcionalidades no próprio dia a dia do aluno, como o preço a ser pago por determinado produto vendido pelo seu peso, ou o tempo gasto em uma viagem a uma velocidade média específica e em outra menor ou maior.

Esses exemplos corriqueiros são importantes para que, antes de associar proporcionalidade às interações de engrenagens, que é algo relativamente novo para o aluno, ele perceba a ideia de proporcionalidade e o quanto ela pode ser interpretada de maneira simples em situações comuns de nossos dias. É recomendado, então, nessa etapa, que, após um momento de conversa com os alunos sobre o tema, eles façam algumas atividades envolvendo proporcionalidade, tanto direta quanto indireta, utilizando para resolução o método da regra de três simples ou apenas uma sequência de operações básicas de matemática que ao final cheguem ao resultado esperado. O ideal é que o aluno não foque em um modelo mecânico e formal de resolver problemas de proporcionalidade, pois isto dificulta a abstração do conhecimento e o reconhecimento da ideia de proporção em diferentes situações e contextos.

A quantidade de exercícios relacionados à proporcionalidade fica a critério do aplicador, pois o mesmo deve avaliar em qual nível de entendimento os alunos estão, em sua maioria, em relação ao conteúdo, para somente após considerar este nível satisfatório introduzir a questão das interações de engrenagens. Em casos onde a turma ainda apresente grande dificuldade sobre o tema, é cabível inserir uma aula apenas sobre ele, e postergar a continuidade da sequência didática.

Primeira Aula – Segundo momento

Após o entendimento por parte dos alunos da ideia de proporção, e verificada a capacidade da maioria em resolver problemas pertinentes ao conteúdo, é hora de introduzir as engrenagens e suas interações. A Figura 13 apresenta alguns modelos de engrenagens presentes no Kit LEGO® NXT:

Figura 13 – Modelos de engrenagens, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Como pode ser notado, as engrenagens se diferem umas das outras apenas pelo número de dentes e, consequentemente, pelo raio. Mas o tamanho isolado de cada dente em cada engrenagem é sempre o mesmo. Isto implica que, independentemente de quais engrenagens participem de uma interação, um dente sempre se encaixará e moverá apenas um dente também. Dessa maneira, cria-se as relações de proporcionalidades, entre as quantidades de giros.

Então é neste momento que o aluno deve ter o primeiro contato com as engrenagens. Não é aconselhável apresentar o Kit inteiro ou parcial antes desse momento. Para questão de organização da aula, os alunos devem ser divididos em grupos, mas no máximo cinco por grupo, e, a princípio não entregue todo o Kit para cada grupo, pois a curiosidade para com as demais peças pode gerar grande dispersão. Até então se fazem necessárias apenas as engrenagens a serem utilizadas e as peças que funcionam como eixo e suporte das engrenagens, para que os alunos consigam montar, nesse momento, trens entre duas engrenagens como os modelos de combinações abaixo (Figura 14):

Figura 14 – Modelos de interações entre engrenagens, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Para esse início, as estruturas podem ser bem simples, apenas o suficiente para que os alunos percebam a relação do número de giros entre elas. Observe que nos primeiros exemplos, as interações foram feitas entre duas engrenagens iguais, o que acarretará uma relação de identidade entre o número de giros das duas engrenagens. Porém não devem ser utilizadas, durante essa etapa, funções lineares, o momento deve se limitar apenas ao entendimento numérico da quantidade de giros.

O professor deve fazer com que os alunos percebam que, apesar da quantidade de giros ser a mesma, o sentido do giro será o contrário. Após perceberem isto, peça para que acoplem mais uma engrenagem ao sistema, para que percebam que o sentido da última engrenagem voltou a ser o mesmo da primeira. E assim os conduza à generalização de que, se um sistema apresenta um número par de engrenagens, o sentido da última será o contrário da primeira, e quando este número de engrenagens for ímpar, o sentido da primeira e da última engrenagem será o mesmo.

Terminada esta parte, antes de fazer interações entre engrenagens diferentes, é necessário propor um exemplo cotidiano de proporcionalidade, mas que, posteriormente, possa ser remodelado por interações de engrenagens. Por exemplo: Em uma confeitaria, 24 quilos de uma determinada massa são suficientes para fazer 3 biscoitos. Portanto, para fazer 9 biscoitos, seguindo o mesmo padrão mencionado, serão necessários quantos quilos de massa? Deve-se esperar que os alunos resolvam a questão e, em seguida, mostrar a seguinte interação:

Uma engrenagem de 24 dentes, acoplada a uma engrenagem de 8 dentes (Figura 15). Primeiro pergunta-se, quantas voltas a engrenagem de 8 dentes dará quando a de 24 dentes der uma? Espera-se a resposta correta e, após ela, pergunta-se, então, quantas voltas da engrenagem de 24 dentes serão necessárias para que a de 8 dentes dê 9 voltas? Após receber a resposta correta, instigue os alunos a perceberem a semelhança contida nos dois exercícios, ainda que em contextos totalmente diferentes. E os conduza a perceber que essa semelhança é a proporcionalidade presente, tanto na fabricação de determinado número de biscoitos a partir de uma quantidade específica de massa, como no número de giros sofridos por uma das engrenagens por ação dos giros da outra. Mais importante neste momento que a demonstração do teorema de proporcionalidade ou uma resolução algébrica rigorosamente correta pela perspectiva matemática, é que o aluno adquira em seu pensamento a ideia de proporcionalidade, a qual, se bem destacada pelo professor, em situações corriqueiras cotidianas do aluno, permite que este possa vir a interiorizar o conceito de forma empírica.

Figura 15 – Engrenagens de 24 dentes e 8 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Após a maioria dos alunos ter percebido a proporcionalidade existente nas interações entre engrenagens, propõe-se exercícios para fixação da ideia. É necessário utilizar exercícios nos quais eles descubram determinado número de voltas de uma engrenagem específica, mas também exercícios que, a partir de uma relação de proporcionalidade, eles tenham que montar o trem de engrenagem que a contenha. Por exemplo: Construa um trem de engrenagem simples (com apenas duas engrenagens) de forma que o giro de uma, resulte em 7 giros da outra.

Resposta:

A engrenagem à esquerda, com 56 dentes na parte externa, está acoplada a outra de 8 dentes (Figura 16). Portanto, uma razão de proporcionalidade igual a 7, ou seja, cada volta da primeira corresponde a 7 voltas da segunda.

Figura 16 – Engrenagens de 56 dentes externos e de 8 dentes, KIT LEGO®

Fonte: Silva, 2014.

Para incrementar esse tipo de exercício, deve-se utilizar relações de giros não tão simples, como, por exemplo: Construa um trem de engrenagem simples (com apenas duas engrenagens) de forma que dois giros de uma resulte em 9 giros da outra.

Resposta:

A engrenagem à esquerda possui 36 dentes, enquanto a da direita, 8 dentes. Portanto, uma relação de proporcionalidade de 9/2 (Figura 17).

Figura 17 – Engrenagens de 36 dentes e 8 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Primeira Aula – Terceiro momento

Até o momento apontamos apenas relações em que a quantidade de giros é ampliada, pois a primeira engrenagem a ser analisada sempre apresentava maior quantidade de dentes em relação à segunda. Algo intencional, uma vez que entender essas relações quando a constante de proporcionalidade é maior que 1 é notavelmente mais fácil. Porém o câmbio a ser construído apresentará redução de giros e não ampliação. Portanto, deve-se aplicar exercícios, agora, onde ocorra redução. Como exemplo: Construa um trem de engrenagem simples (com apenas duas engrenagens) de forma que 5 giros de uma, resulte em apenas 1 giro da outra.

Resposta:

A engrenagem à esquerda possui 8 dentes, enquanto a da direita, 40 dentes (Figura 18). Portanto, uma razão de proporcionalidade de 1/5. Ou seja, a cada 5 voltas da primeira, apenas 1 volta da segunda. O câmbio a ser construído por questões de disponibilidade do número de peças, em cada kit, terá reduções de 1/3 de voltas a cada interação de trem de engrenagens, utilizando engrenagem com 8 dentes, acoplada a outra de 24 dentes. É necessário utilizar também esse modelo de redução como exercício, para já facilitar posteriormente o entendimento do funcionamento do câmbio. E aqui se encerra a primeira aula, se possível, deve-se deixar exercícios para os alunos sobre proporcionalidade entre engrenagem, para fixação. Se eles puderem ter contato com o Kit antes da aula seguinte, é interessante deixá-los resolver os exercícios utilizando os próprios Kits, e para registrar as respostas, deixá-los tirarem fotos das interações feitas, abordando mais um recurso tecnológico.

Figura 18 – Engrenagens de 8 dentes e 40 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

7.10 SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO FUNÇÃO LINEAR

Segunda Aula – Primeiro momento

Após o entendimento das relações de proporcionalidades entre as engrenagens, é hora de formalizar o conceito com a ajuda da função linear. Como o propósito é o auxílio na função exponencial, é esperado que os alunos já tenham conhecimentos prévios sobre funções, e funções afins, especificamente a linear. Visto que estas são, de forma oportuna pelo grau de complexidade relativamente simples, os primeiros tipos de funções a serem ensinados. Portanto, já podemos partir para a modelagem da proporcionalidade por função linear de forma mais direta. Como exemplo:

Seja o número de voltas x que determinada engrenagem dê, quando acoplada a outra engrenagem, o número de voltas sofrido por esta será representado por $f(x)$, tendo assim uma função, $f\colon \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, e que por se tratar de uma relação de proporcionalidade, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^{+}$, e, ainda, a sendo ao mesmo tempo a taxa de variação da função linear, como também e por isto, o fator de proporcionalidade entre as engrenagens.

Nesse momento, é relevante explicar o motivo do domínio ser os reais positivos, afinal o número de voltas não poderá ser nulo ou negativo, não necessariamente sendo um número inteiro, ou racional, mas podendo ainda ser até mesmo irracional, para garantia da continuidade de função. E é necessário explicar também o contradomínio e imagem, sendo resposta da interação de giros um número que represente giros positivos e não nulos, racional ou irracional.

Nessa parte, deve ser proposto aos alunos, resolução de exercícios semelhantes aos já trabalhados pela proporcionalidade, mas, nessa etapa, com modelagem e resolução utilizando-se funções lineares. Na seção **6.3.1 Função Linear/Engrenagem,** já foi demonstrado que tais interações podem ser representadas por funções lineares, pelas interações satisfazerem as condições que essas funções caracterizam. Caso o professor, ou aplicador dessa proposta, considere necessário tal demonstração mais rigorosa, matematicamente, basta retornar ao referido capítulo para se orientar quanto ela. Após tal demonstração feita para os alunos, ou a concordância de que não se faz necessária, deve ser iniciada a aplicação de atividades, semelhantes ao abaixo exemplificado:

1. *Conforme mostrado no modelo de interação entre engrenagens abaixo* (Figura 19). *Uma engrenagem com 8 dentes está acoplada a outra de 24 dentes.*

Figura 19 – Engrenagens de 8 dentes e 24 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Sendo assim, responda:

a. *De acordo com a constante de proporcionalidade, considerando que a engrenagem motora seja a de oito dentes, e a movida a de 24. E ainda, sendo x o número de giros da engrenagem motora e f(x), o número de giros sofridos pela movida. Qual função linear modela esta interação?*

Resolução:

Seja E_8 *a engrenagem motora de oito dentes e* E_{24} *a engrenagem movida de 24. Temos assim, a seguinte relação de proporcionalidade:*

$$\frac{E_8}{E_{24}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Portanto, sendo 1/3 a constante de proporcionalidade, segue-se que:

$$E_8 \to E_{24}$$
$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to \frac{1}{3}x$$

Ou seja, a função linear que modela a interação é, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{3}x, x \in \mathbb{R}^+$.

b. *Utilizando a função linear que modela a interação, responda quantos giros a engrenagem movida sofrerá, quando a motora girar 81 vezes seguidas?*

Resolução:

Seja $x = 81$, *temos:*

$$f(x) = \frac{1}{3}x \implies f(81) = \frac{1}{3} \cdot 81 = \frac{81}{3} = 27$$

Portanto, a engrenagem movida sofrerá 27 giros.

c. *Utilizando a função linear que modela a interação, responda quantos giros a engrenagem motora precisa ter dado para que a engrenagem movida tenha dado 9 giros?*

Resolução:

Seja $f(x) = 9$, *temos:*

$$f(x) = \frac{1}{3}x \Rightarrow 9 = \frac{1}{3} \cdot x \Rightarrow 9 = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{27}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 27.$$

Portanto, a engrenagem motora teria girado 27 vezes seguidas.

Observação: Este exemplo de redução é importante de ser utilizado como exercício, por fazer parte da construção do câmbio.

A seguir devem ser propostos exercícios semelhantes a este, para fixação e melhor entendimento do que foi feito. A princípio, é ideal trabalhar com resultados inteiros para uma compreensão mais fácil, porém, ao notar maior entendimento, é importante trabalhar também com resultados racionais não inteiros e até mesmo irracionais.

Segunda Aula – Segundo momento

Partimos agora para a composição de funções, ressaltando, assim como as funções lineares, a composição também é esperada como conceito prévio dos alunos, afinal serão utilizadas composições apenas entre funções lineares. E esta específica associação de composições de funções e interações entre trens de engrenagens compostos (quando possuem mais de duas engrenagens), já foi demonstrada na seção **6.4.1 Funções Compostas / Trens de Engrenagens**. Portanto, assim como no item anterior, caso o professor ou o aplicador desta sequência didática considere necessária tal demonstração, basta retorna à referida seção. A partir disso então, seja da demonstração ou da concordância de sua ausência, iremos inserir a ideia de interação entre trens de engrenagem para posteriormente associar à composição de funções.

Inicie apresentando para os alunos, duas interações entre duas engrenagens a princípio separadas, como por exemplo:

A interação $E_{24} \rightarrow E_8$ (Figura 20):

Figura 20 – Engrenagens de 24 dentes e 8 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

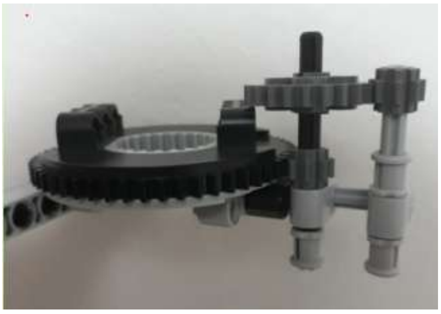
E a interação $E_{56} \rightarrow E_8$ (Figura 21):

Figura 21 – Engrenagens de 56 dentes externos e de 8 dentes, KIT LEGO®

Fonte: Silva, 2014.

Como já estudado, isoladamente a primeira interação $E_{24} \rightarrow E_8$, apresenta uma constante de proporcionalidade 3, consequentemente, modela pela função linear, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 3x, x \in \mathbb{R}^+$. Enquanto a interação $E_{56} \rightarrow E_8$, apresenta a constante de proporcionalidade igual a 7, portanto $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = 7x, x \in \mathbb{R}^+$. Então deve ser proposto aos alunos que acoplem um trem ao outro, ligando, por meio do mesmo eixo, a engrenagem de oito dentes da segunda interação com a engrenagem de 24 dentes da primeira, conforme modelo abaixo (Figura 22):

Figura 22 – Trem composto de engrenagens, KIT LEGO®



Fonte: O autor.

Primeiro, é importante destacar aos alunos que agora a quantidade de giros que a engrenagem de 8 dentes, acoplada a de 56, der, será a mesma que a de 24 dentes dará, por estarem ligadas pelo mesmo eixo, apresentando o mesmo deslocamento angular, não linear. Isto pode ser feito de forma prática mesmo, e se o professor achar ocasional, pode fazê-los perceber que está relação é representada pela função linear identidade.

Após perceberem a ideia acima, deve-se propor o problema: (a princípio de maneira informal) *Quando a engrenagem de 56 dentes der 1 volta completa, quantas voltas a engrenagem de 8 dentes acoplada à de 24 dará?*

A resolução não necessita de formalização matemática, o interessante a ser entendido pelos alunos nesta etapa é que:

Resolução:

Pela constante de proporcionalidade entre as engrenagens de E_{56} *e*E_8 *ser 7, 1 volta de* E_{56}*implicará 7 voltas de* E_8*, por outro lado, como* E_8 *está ligado à* E_{24} *pelo mesmo eixo,* E_{24} *neste momento também dará 7 voltas. E agora pela constante de proporcionalidade entre* E_{24} *e*E_8 *(sendo agora* E_8 *a que esta acoplada à* E_{24}*) ser igual a 3, isto implica que uma volta de* E_{24} *implica 3 voltas de* E_8*, como* E_{24} *dará 7 voltas,* E_8 *dará 7vezes 3 voltas, ou seja, 21 voltas.*

Após isto, deve-se propor mais exercícios associando dois ou mais trens de engrenagens, no intuito de fixar o entendimento. Durante os exercícios é válido tentar instigar os alunos a perceberem que o resultado de voltas é o produto dos fatores de proporcionalidades, para, assim, dar início à associação com composição de funções.

Segunda Aula – Terceiro momento

Para formalizar a relação entre composição de funções e interações de trens de engrenagens compostos, é necessário ressaltar a ideia de que a função composta funciona como um “atalho”, quando temos uma relação entre duas grandezas, uma delas tem relação com outra, então a terceira grandeza tem relação direta com uma das duas primeiras, mas indireta com a outra. Estas relações acontecem nos trens de engrenagens compostos, onde interagem mais de duas engrenagens. A função composta faz a ponte entre estas grandezas que teriam uma relação a princípio indireta. Como exemplo, tomemos o trem de engrenagem composto semelhante ao do exercício anterior (Figura 23):

Figura 23 – Trem composto de engrenagens, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

A engrenagem de 8 dentes tem relação direta com a de 24 acoplada a ela, que, por sua vez, tem relação direta com a de 8, e esta tem relação direta com a de 56 acoplada a ela. Sendo assim, a engrenagem de 8 dentes e a de 24 acoplada à de 8, apesar de não estarem acopladas diretamente, seja pelos dentes ou por um eixo, funcionam de modo que uma transmite ou recebe giros da outra. Portanto, como a engrenagem de 56 dentes, localizada no final, está em função da engrenagem de 8 dentes, a qual, por sua vez, está em função da outra engrenagem de 24, que está em função da engrenagem de 8, temos então uma composição de funções. Para melhor explicação, denotemos por E_S a engrenagem de 56 dentes, acoplada a engrenagem de 8 dentes, a última do trem de engrenagens, considerando o sentido da esquerda para a direita, e assim teremos as três funções:

1ª função: interação entre as engrenagens E_8 e E_{24}, modela como já visto por $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{3}x$.

2ª função: interação feita pelo mesmo eixo entre as engrenagens E_{24} e E_8, como já mencionado, modelada por uma função identidade, sendo $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, g(x) = x$.

3ª função: interação feita entre a engrenagem E_8 e E_S, modelada, por $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, h(x) = \frac{1}{7}x$.

Agora, como já detalhado na seção **6.4.1 Funções Compostas / Trens de Engrenagens**, a composição de funções lineares é feita da seguinte forma:

Primeiro, sendo f' a composta $f \circ g$:

$$f' = f \circ g = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{7} \cdot g(x) = \frac{1}{7}x.$$

Como podemos observar, por se tratar de uma composição envolvendo uma função identidade, a composta $f \circ g$ é a mesma $f(x)$. Agora, sendo h'a composta $f' \circ h$:

$$h' = f' \circ h = f'\big(h(x)\big) = \frac{1}{7} \cdot h(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{21}x.$$

Portanto, a função composta que modela a relação de proporcionalidade entre a primeira engrenagem do trem composto, de 8 dentes, e a última, a de 56 dentes é função $h'\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, h'(x) = \frac{1}{21}x$. De maneira prática, é ideal que os alunos percebam que compor funções lineares nada mais é que ter como resultado no novo fator de proporcionalidade, o produto dos fatores das funções envolvidas na composição.

Em seguida, deve-se fazer mais alguns exercícios envolvendo composição de funções, mas aplicar e ressaltar o próximo exemplo:

Exemplo: *Como percebemos, de forma prática, compor funções lineares é o mesmo que multiplicar os fatores de proporcionalidades das funções envolvidas na composição,* *resultando em um novo fator e consequentemente uma nova função. Mas e se esta composição fosse sempre feita com a mesma função, por exemplo, f(x) composta com ela mesma, e esta composição composta com f(x) novamente e assim sucessivamente? Qual seria o resultado? Considerando a função* $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{3}x$, *que modela a interação abaixo* (Figura 24)*:*

Figura 24 – Engrenagem de 8 dentes e de 24 dentes, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Faça primeiramente uma composição de f(x) com f(x), e depois faça uma segunda interação, entre o resultado da composta $f \circ f$ *com f(x) novamente, encontrando, para cada, a função composta correspondente.*

Resolução:

1ª interação/composição, seja f_1 *a composta* $f \circ f$, *temos:*

$$f_1 = f\big(f(x)\big) = \frac{1}{3} \cdot f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x$$

Portanto, para a primeira interação entre os dois trens de engrenagem, temos a função composta, $f_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_1(x) = \frac{1}{9}x$.

2ª interação/composição, seja f_2 *a composta* $f_1 \circ f$, *temos:*

$$f_2 = f_1\big(f(x)\big) = \frac{1}{9} \cdot f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{27}x$$

Portanto, para a primeira interação entre os dois trens de engrenagem, temos a função composta, $f_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_2(x) = \frac{1}{27}x$.

Este exercício é importante, pois estas reduções são as que serão utilizadas no câmbio de marchas. A saber, a quarta marcha terá o número de giros igual ao número de giros do motor que moverá o câmbio, a terceira terá uma redução de giros em relação ao motor de 1/3, a segunda de 1/9 e a primeira de 1/27, colocando-se, assim, em progressão geométrica as reduções, que serão modeladas por uma função do tipo exponencial. Mais detalhes serão dados no decorrer da sequência na qual explicamos sobre a construção do câmbio. Portanto, devem ser aplicados mais exercícios semelhantes a este, utilizando trens compostos de engrenagens e os modelando por funções compostas, para fixação do conteúdo, e se possível deixar atividades para serem feitas pelos próprios alunos.

7.11 SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Terceira Aula – Primeiro momento

Para esta aula são requisitos: conhecimento sobre PA e PG, sobre PA basta apenas sua identificação pela caracterização de uma, sobre PG é necessário, além de sua identificação, também pela sua caracterização, a interpretação e utilização da sua fórmula do termo geral, a fórmula da soma dos termos de uma PG não será necessária.

A intenção final é a função exponencial, porém a proposta de construção trabalhará apenas com uma relação discreta entre os números de giros das engrenagens, sendo assim, para afirmar que uma relação discreta entre duas grandezas é caracterizada por uma função exponencial, que é definida nos reais para os reais positivos, é necessário recorrer ao teorema (já mencionado e demonstrado anteriormente na seção **6.8.5 Funções Exponenciais e Progressões**) elaborado pelo professor Lima (2013):

> *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$*, numa progressão geométrica* $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$*, onde* $y_n = f(x_n)$*. Se pusermos* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$ *teremos* $f(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

No teorema, ele se remete à função nos reais para os reais, isto porque o teorema se refere especificamente a uma função do tipo exponencial, na qual o valor de b pode assumir valores negativos, porém em casos de uma função do tipo exponencial, na qual a e b são iguais e positivos, esta função também pode ser considerada propriamente exponencial, o que foi explicado na seção deste trabalho, **6.8.5 Funções Exponenciais e Progressões**, conforme um exemplo de exercício apresentado.

Portanto, pelo Teorema, temos que toda função que transforma uma PA em uma PG, ainda que em se tratando de um universo de números discretos, é uma função do tipo exponencial, de reais nos reais. Para mostrar isto aos alunos, primeiro, como já dito, é necessário que eles consigam, a princípio, identificar e diferenciar uma PA de uma PG, então devem ser aplicadas a eles questões simples para verificar esta capacidade, caso haja dúvida. Ciente de que não haja ou sanadas as dúvidas, retoma-se o exemplo do exercício anterior, no qual uma função que modela uma redução de 1/3 no número de giros é composta com ela mesma duas vezes consecutivas. Porém, em seguida, deve ser pedido para que os alunos montem quatro estruturas com o Kit:

1ª. Na primeira estrutura é acoplada uma engrenagem de 24 dentes ao final de um eixo, e no início deste eixo, é acoplado um motor de rotação. Motor que faz parte do Kit LEGO® NXT, como fotos abaixo (Figura 25):

Figura 25 – Motor de rotação, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

Abaixo, a sugestão do modelo de estrutura (Figura 26):

Figura 26 – Motor de rotação com engrenagem acoplada, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

2ª. Na segunda, deve ser acoplada ao eixo que sai do motor uma engrenagem de 8 dentes, e esta acoplada a uma engrenagem de 24 dentes, conforme modelo sugerido abaixo (Figura 27):

Figura 27 – Motor de rotação com engrenagens acopladas, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

3ª. Na terceira, seguindo a ideia da segunda, será acoplada ao eixo da de 24 dentes mais uma engrenagem de oito dentes, que será acoplada em outra engrenagem de 24 dentes. Conforme modelo sugerido abaixo (Figura 28):

Figura 28 – Motor de rotação com engrenagens acopladas, KIT LEGO®

Fonte: O autor.

4ª. Na quarta, seguindo também a ideia da terceira, será acoplada no mesmo eixo da engrenagem de 24 dentes, colocada por último – ou seja, a que corresponde no momento da terceira estrutura a última engrenagem do trem composto – uma engrenagem de 8 dentes, e acoplada a esta haverá outra engrenagem de 24 dentes. Conforme modelo sugerido abaixo (Figura 29):

Figura 29 – Motor de rotação com engrenagens acopladas, KIT LEGO®

Fonte: Próprio autor.

Feitas as estruturas, vale ressaltar que, apesar de em todos os modelos conterem, além da estrutura, o motor de rotação, o motor utilizado pode ser o mesmo para todas, de modo que basta retirá-lo de uma e encaixá-lo na estrutura a ser analisada. Também, posteriormente, iremos analisar as quatro interações em apenas uma estrutura.

Nesse momento, inicia-se a análise de cada estrutura e suas interações. Deve ser acordado com os alunos, que a referência para formular a função linear para as interações de cada uma será sempre a relação entre o número de giros do motor e a última ou única engrenagem de 24 dentes em cada trem composto ou simples. E para cada estrutura se espera as seguintes conclusões:

- Para a primeira estrutura, o aluno deve observar que o número de giros que o motor der será o mesmo número de giros sofridos pela engrenagem de 24 dentes, visto que estão ligados pelo mesmo eixo, portanto, tendo um descolamento apenas angular, em relação ao giro do motor. E esta relação, conforme visto anteriormente, pode ser representada como uma função linear identidade, onde seja *x* o número de giros do motor e *f(x)* o número de giros da engrenagem de 24 dentes, resulta então na função $f_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_1(x) = x$, com fator de proporcionalidade, $a = 1$.
- Para a segunda estrutura, pode se utilizar da mesma ideia da primeira em relação à engrenagem de 8 dentes ligada ao motor pelo mesmo eixo, conforme já visto, esta relação é representada por uma função identidade, e também já foi mencionado neste trabalho que, em se tratando de composições entre funções, quando se trata de uma função identidade, esta não altera a função que está sendo composta com ela, portanto, não se faz necessária a sua consideração nesta e tampouco nas demais estruturas, ao compor as funções. Analisando-se, então, apenas a interação entre a função de 8 dentes e a de 24, temos uma relação de proporcionalidade entre as duas, na qual ocorre uma redução de giros da de 8 para a de 24, visto que o fator de proporcionalidade entre elas é de 1/3. E, assim, a referida interação considerando o giro do motor, que será o mesmo da engrenagem de 8 dentes, e a quantidade de giros sofrida pela engrenagem de 24, é modelada pela função linear, $f_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_2(x) = \frac{1}{3}x$, com fator de proporcionalidade, $a = \frac{1}{3}$.
- Para a terceira estrutura, já será necessário que o aluno utilize de composição de funções, não sendo imprescindível considerar as relações de identidade, mas as

interações ocorridas duas vezes neste caso, entre uma engrenagem de 8 dentes e uma de 24. Portanto, para determinar a função linear que modela a quantidade de giros que a última engrenagem do trem de engrenagem (considerando o sentido partido do motor) sofre, em relação aos giros dados pelo motor, será necessário fazer a composição de duas funções lineares idênticas, de fatores de proporcionalidades iguais a 1/3. E, assim, fazendo-se as devidas composições e denominando como f_3, a função modeladora desta terceira estrutura, teremos a função $f_3\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_3(x) = \frac{1}{9}x$, com fator proporcionalidade, $a = \frac{1}{9}$.

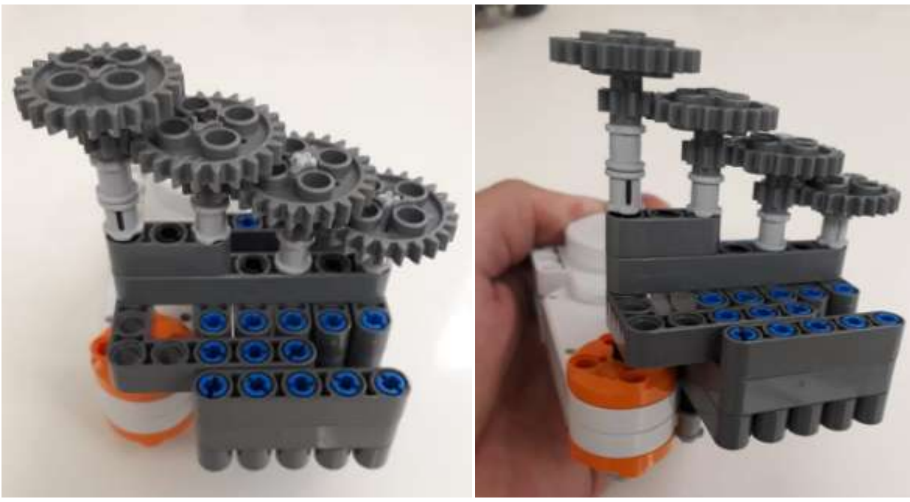
- Para a quarta estrutura, o caminho inicial é o mesmo da terceira, apenas ao final deverá ser feita mais uma composição com a mesma função linear de fator proporcionalidade também igual a 1/3. Denominando-se, então, a função composta que modela a relação da quantidade de giros sofridos pela a última engrenagem de 24 dentes deste sistema, com a quantidade de giros do motor, como f_4, sendo a função, $f_4\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_4(x) = \frac{1}{27}x$, com fator de proporcionalidade, $a = \frac{1}{27}$.

Terminada as modelagens das funções de cada estrutura, devem ser propostos aos alunos exercícios em que utilizem cada uma, para encontrar número de giros, tanto do motor em relação à última engrenagem de 24 dentes da cada estrutura, assim como o inverso.

Terceira Aula – Segundo momento

Após o entendimento das interações em cada estrutura de forma separada, deve-se propor para os alunos a construção de uma única estrutura contendo as quatro interações. É necessário ressaltar que ter construído as quatro de forma separada foi oportuno por facilitar a análise de cada interação e suas modelagens por funções, mas em casos nos quais a maioria dos alunos já apresentem afinidade com construções utilizando Kits da LEGO®, a forma contendo as quatro interações já pode ser construída de forma direta, pois é o objetivo final desta parte da sequência. O modelo sugerido a ser construído, com as quatro interações, segue abaixo (Figura 30):

Figura 30 – Motor de rotação com engrenagens acopladas, perspectivas superior e frontal respectivamente, KIT LEGO®



Fonte: O autor.

De posse da estrutura, deve ser acordado com os alunos que as posições de cada engrenagem de 24 dentes, serão consideradas no sentido do motor, dessa forma, a primeira será a primeira a partir do motor e, assim, sucessivamente. Enumerando então as quatro engrenagens de 24 dentes, formamos a PA (1, 2, 3, 4), com quatro elementos, com primeiro termo e razão iguais a 1. Em seguida deve-se formar outra sequência, colocando para cada engrenagem de 24 dentes, o fator proporcionalidade da função que modela a relação de seus giros em função dos giros do motor. E, desse modo, teremos a sequência (1, 1/3, 1/9, 1/27), uma PG, de primeiro termo igual a 1, e razão 1/3. É importante reforçar para os alunos a correspondência bem definida, entre os termos da PA e da PG, mostrando que a cada interação, em que se adiciona ao trem de engrenagens mais uma de 8 dentes, e a esta, mais uma de 24, o número de giros sofridos pela nova engrenagem de 24, em relação aos giros do motor, é dividido por 3. Por exemplo, seguindo o mesmo modelo de interação, para a quinta engrenagem de 24 dentes, teremos uma redução de giros em relação ao motor de 1/81, e assim por diante. É preciso fazer com que os alunos percebam, também, que essas interações podem ser feitas infinitas vezes, desde que haja peças disponíveis para isto, e que a redução a cada interação se torna mais intensa, uma característica da função exponencial, que apresenta crescimentos ou decréscimos “explosivos”, e ainda, que por mais que se faça sucessivas reduções, nunca será alcançado exatamente o número zero.

E como dito no início, construções de estruturas, mesmo que simples, demandam um considerável tempo e esforço dos alunos, por isso, é aconselhável que nesta aula não se insira outro conteúdo. Se, porventura as construções não tenham demandado bastante tempo e ainda haja tempo suficiente para novas construções, deve ser verificado se nos kits utilizados há engrenagens suficientes para fazer exercícios semelhantes a este, porém com reduções de giros diferentes de 1/3. Como exemplo, se utilizar no lugar das engrenagens de 8 dentes engrenagens de 12 dentes. Para isto, precisa-se apenas de uma adaptação na estrutura de cada sistema, devido ao raio da nova engrenagem.

É necessário também, fazer atividades com os alunos explorando as PAs e PGs, formadas, por exemplo, encontrando-se o termo correspondente da PG para determinado termo da PA, e vice versa, fazendo-se, assim, com que os alunos consigam elaborar a fórmula do termo geral da PG. Quanto ao termo da PA não se faz muito necessário, devido à razão da PA ser 1, mas também não é empecilho caso seja considerado importante. Mesmo que às vezes não haja engrenagens suficientes para montar outro trem como o do exemplo, também é possível simular exercícios, trabalhando a abstração do conceito. Por exemplo: *Caso sejam substituídas todas as engrenagens de 8 dentes do sistema, por engrenagens de 12 dentes, e o sistema passe a ter um total de 7 interações, ou seja, 7 engrenagens de 24 dentes, responda:*

a. A redução de giros de uma engrenagem de 24 dentes para a próxima, neste caso, será na razão de quanto?

Resolução:

Como agora o fator de proporcionalidade é calculado pela fração 12/24, temos assim um fator igual a ½. Ou seja, a razão da redução de giros da engrenagem de 24 dentes para a próxima será de 1/2.

b. Considerando-se, agora, a nova razão de redução de giros e o sistema com 7 engrenagens, qual a PA e a PG agora formadas?

Resolução:

PA (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e PG (1, ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64)

c. Considerando-se a nova PG formada, qual sua fórmula do termo geral?

Resolução:

Forma do termo geral de um PG: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. *Portanto:*

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

E assim por diante, a continuação da exploração deste exercício e/ou a criação de exercícios semelhantes, fica a critério do aplicador.

7.12 SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO FUNÇÃO EXPONENCIAL E DO TIPO EXPONENCIAL

Quarta Aula – Primeiro momento

Como já demonstrado na seção **6.8.5 Funções Exponenciais e Progressões**, uma função que transforma uma PA em uma PG é uma função do tipo exponencial, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ba^x, b = f(0)\ e\ a = f(1)/f(0)$.

Sendo assim, o professor deve retomar com os alunos as interações entres as engrenagens no trem composto trabalhado na aula anterior, construído utilizando as engrenagens de 24 e 8 dentes, e também destacar que a correspondência entre a PA (1, 2, 3, 4) e a PG (1, 1/3, 1/9, 1/27) é feita pelas interações das engrenagens, explicando, com isso, o teorema (caso considerar necessário, o professor pode demonstrá-lo) e mostrando que, neste caso específico, estas interações estão agindo como uma função que está transformando os elementos da PA em elementos de uma PG, temos então, uma abstração da função, o que é parte de nosso objetivo nesta proposta. E ainda, que pelo teorema como tal interação faz essa transformação, pode-se afirmar que esta é modelada por uma função do tipo exponencial. E, neste momento, deve ser definida, junto aos alunos, qual função do tipo exponencial modela o específico trem de engrenagens juntamente com a relação de giros entre o motor e as engrenagens de 24 dentes. Tal definição pode ser feita da seguinte forma:

A relação entre os giros do motor e o giro de cada uma das engrenagens de 24 dentes é representada pela PA (1, 2, 3, 4), que indica com qual engrenagem estamos nos relacionando, e a PG (1, 1/3, 1/9, 1/27), que indica a razão de redução ou não de giros em cada respectiva engrenagem em relação aos giros dados pelo motor. Dessa forma, temos as correspondências:

$$1 \to 1$$

$$2 \to \frac{1}{3}$$

$$3 \to \frac{1}{9}$$

$$4 \to \frac{1}{27}$$

Em linguagem de função pelo teorema temos:

$$f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{27}\}, f(x) = ba^x, bea \in \mathbb{R}^+,$$

$$I. \quad f(1) = b \cdot a^1 = ba \to ba = 1$$

$$II. \quad f(2) = b \cdot a^2 = b \cdot a \cdot a = \frac{1}{3}$$

Por I e II temos:

$$b.a.a = \frac{1}{3} \to 1 \cdot a = \frac{1}{3} \to a = \frac{1}{3}$$

E, desse modo, temos de I que:

$$ba = 1 \to b \cdot \frac{1}{3} = 1 \to b = 3$$

Portanto, a função do tipo exponencial que modela as interações, levando em consideração a redução do número de giros em cada engrenagem de 24 dentes, em relação aos giros do motor, é a função $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\}, f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$. E conforme o teorema apresentado por Lima (2013), podemos estender o domínio e o contradomínio para:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Sendo assim, concluímos o processo utilizando as engrenagens e suas interações, até a modelagem do tipo exponencial. Utilizando agora a própria função, o professor deve propor exercícios que explorem encontrar tanto as reduções nas engrenagens de 24 dentes, a partir da posição que cada uma se encontra no trem de engrenagem, assim como a posição a partir da redução. Também podem ser propostas novas reduções ou ampliações de giros, gerando-se, assim, um amplo leque de possibilidades a serem trabalhadas, como também a representação gráfica da função, uma vez que ela é definida nos reais positivos. O professor deve analisar junto aos alunos também o fato de que a primeira engrenagem de 24 dentes não sofre redução de giros em relação ao motor. Mas é preciso questionar: e se a redução já ocorresse também para esta? Nesse caso, teríamos a PA (1, 2, 3, 4) implicando a PG (1/3, 1/9, 1/27, 1/81), esta sutil diferença resulta na passagem de modelagem de uma função de tipo exponencial para uma tipicamente exponencial, a saber, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Situação que também pode ser utilizada para explicar as diferenças entre uma função exponencial e uma tipo exponencial, trabalhando-se de forma a abstrair do câmbio de marchas também suas caracterizações, por exemplo, na função exponencial, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x$, a necessidade de $f(1) = a$, e logo ao mesmo tempo, $a \neq 1$.

Para a construção do câmbio escolhemos a combinação que gera uma função do tipo exponencial, pois, como pode ser observado na interação modela por exponencial, na quarta interação já temos uma redução de giros na razão de 1/81, o que seria inviável para uma apresentação por tornar a velocidade do giro da engrenagem demasiadamente lenta.

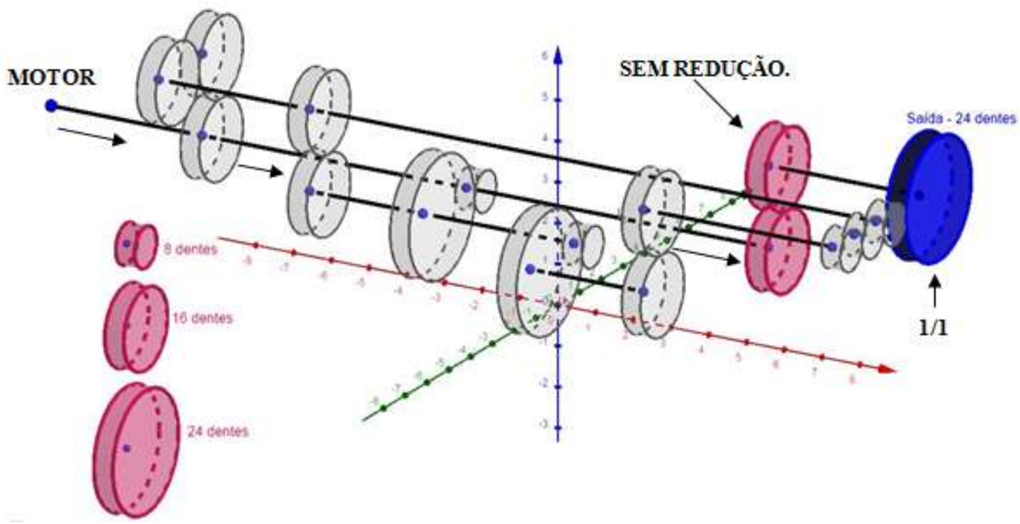
Quarta Aula – Segundo momento

Nesse segundo momento da aula, devem ser apresentadas aos alunos quatro situações de trem de engrenagens. É bom que as interações apresentadas a seguir sejam impressas, pois a atividade será feita extraclasse, a fim de verificar o aprendizado até o momento em questão dos alunos, sem o auxílio de um mediador. Mas, para explicação da atividade, é importante que o aplicador utilize um retroprojetor para apresentar de maneira mais clara as interações. Primeiramente, então, serão explicados os quatro trens de engrenagens e suas interações, e ao final a atividade proposta.

As imagens serão compostas por um bloco cartesiano, com três dimensões, para o que foram produzidos cilindros que irão representar engrenagens e segmentos que irão representar eixos. Sempre haverá apenas três tipos, como mostra a esquerda da figura, engrenagens com 8, 16 e 24 dentes (Figura 31). Porém, devem ser analisadas apenas as engrenagens que estão no trem em tom rosa, e a de saída em tom azul, pois apenas estas estarão participando dos movimentos naquele momento. No início, à esquerda, está um ponto que representa um motor, que levará uma quantidade x de giros por minuto para o sistema, através dos segmentos que representam eixos, e as setas em sequência representam o caminho que a interação está a seguir, e apontam as reduções ou quando não as houve.

Primeiro trem de engrenagem:

Figura 31 – Gráfico ilustrativo de trens de engrenagens



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

Nessa primeira imagem, é possível notar que o motor está ligado por um eixo (segmento) diretamente a uma engrenagem rosa, de 16 dentes. Como a ligação ocorre via eixos, não há uma redução ou ampliação do número de giros advindo do motor. E esta engrenagem, por sua vez, tem acoplada em sua parte superior outra engrenagem também de 16 dentes. Portanto, como a quantidade de dentes é a mesma entre as duas, também não há alteração no número de giros. E, por fim, esta última engrenagem rosa está ligada à engrenagem azul (de saída) por um eixo, o que também resulta em nenhuma alteração na quantidade de giros. Analisando-se a situação proposta, então, de maneira geral, a quantidade de giros do motor é a mesma que chega até a engrenagem de saída (azul), ou seja, nesta combinação não tivemos nenhuma redução de giros. Matematicamente, podemos representar esta relação entre o número x de giros por minuto do motor e a engrenagem de saída como uma função identidade:

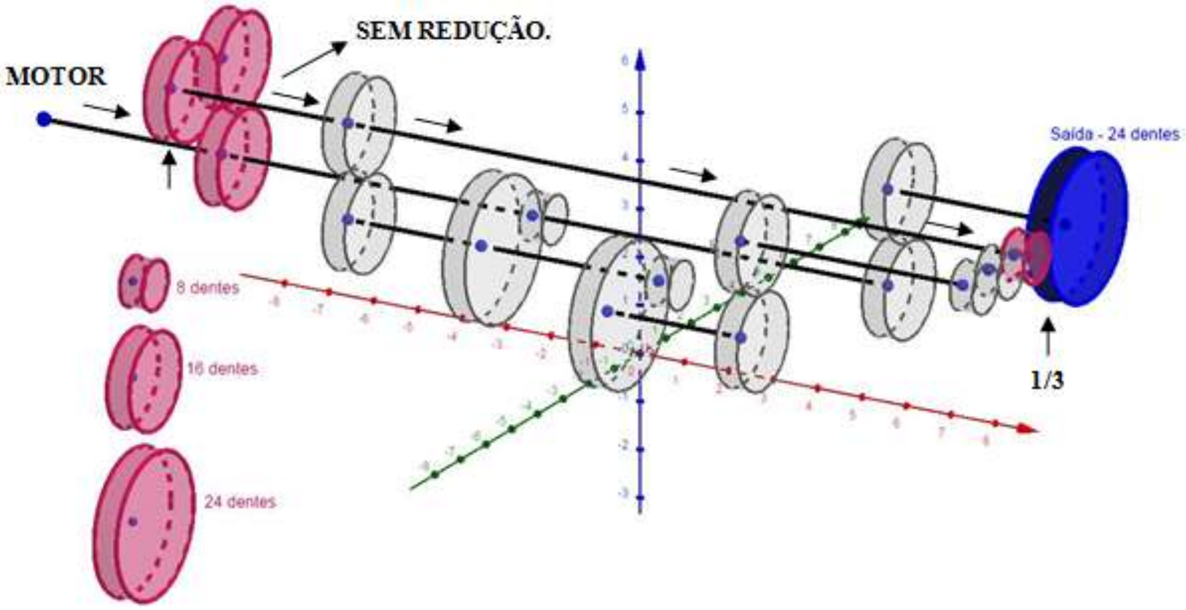
$$f_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_1(x) = x$$

Denotaremos por f_1 por não termos uma relação de redução ainda, considerando esta como a primeira, assim, podendo representar essa primeira combinação de engrenagens e o seu fator de proporcionalidade da função que a representa por: $1 \to 1$.

Importante: matematicamente esta será considerada como primeira das relações, porém, em se tratando apenas de câmbio de marchas, fazendo uma relação com os câmbios dos automóveis, pela relação que teremos entre as quantidades de giros na engrenagem de saída, tal relação, ao final, será considerada a quarta marcha do câmbio, pois, como nas outras haverá reduções de giros, esta será a mais rápida.

Segundo trem de engrenagem (Figura 32):

Figura 32 – Gráfico ilustrativo de trens de engrenagens



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

Nesse, ligada diretamente ao motor por um eixo está uma engrenagem de 16 dentes, acoplada a ela em sua parte superior, outra engrenagem de 16 dentes que, por sua vez, tem ao seu lado, acoplada outra engrenagem também do mesmo tipo (Figura 32). Sendo assim, a quantidade de giros advinda do motor até a terceira engrenagem, não sofreu alteração. A terceira engrenagem está ligada através de um eixo a uma engrenagem de 8 dentes, como a ligação é via eixo, apesar da diferença no número de dentes, também não há alteração no número de giros. Agora, a engrenagem de 8 dentes está acoplada à engrenagem de 24 dentes de forma direta, então, neste momento, sim, temos a primeira redução no número de giros, que, pela relação de proporcionalidade entre as duas, será de um 1/3.

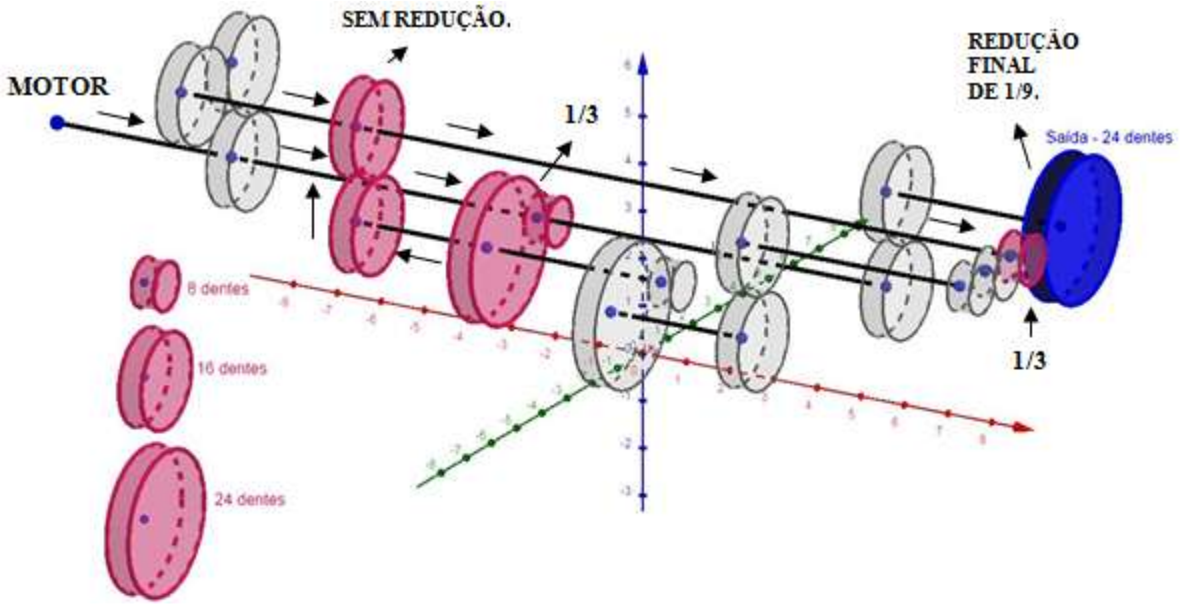
Portanto, matematicamente podemos representar esta relação entre o número x de giros por minuto do motor e a engrenagem de saída pela função:

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_2(x) = \frac{1}{3}x,$$

com a relação, agora, conforme modelo da primeira de $2 \to \frac{1}{3}$. E esta também, conforme convencionado na primeira, será no câmbio a estrutura de funcionamento da terceira marcha.

Terceiro trem de engrenagem (Figura 33):

Figura 33 – Gráfico ilustrativo de trens de engrenagens



Fonte: Elaborado no Geogebra pelo autor.

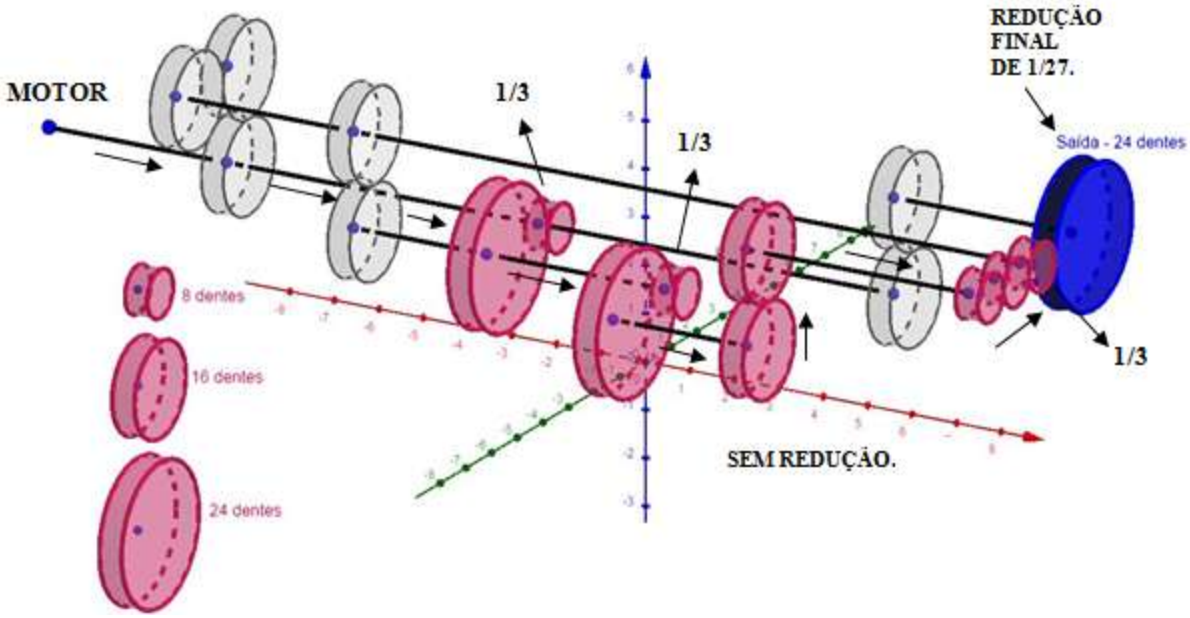
Nesse trem de engrenagens, o motor está ligado via eixo a uma engrenagem de 8 dentes, portanto sem alteração no número de giros (Figura 33). Esta engrenagem está acoplada a uma de 24 dentes em sua lateral, gerando, assim, uma redução no número de giros de 1/3. Esta, de 24 dentes, está ligada a uma de 16 dentes, em sua parte traseira, via eixo, e assim, sem alteração no número de giros. Esta, por sua vez, tem acoplada em sua parte superior uma engrenagem também de 16 dentes, então, novamente, sem alteração do número de giros. A última engrenagem de 16 dentes mencionada está ligada via eixo a uma engrenagem de 8 dentes, então sem alteração no número de giros. Agora, esta engrenagem está acoplada na engrenagem de saída de 24 dentes, então, nesse momento, há mais uma redução de 1/3 no número de giros, resultando, ao final (do motor até a engrenagem de saída), duas reduções de 1/3, ou seja, uma redução total de 1/9, a qual pode ser representada matematicamente (fazendo as devidas composições de funções lineares) da seguinte forma:

$$f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_3(x) = \frac{1}{9}x,$$

com a relação agora de $3 \to \frac{1}{9}$. E esta será a estrutura no câmbio da então considerada segunda marcha.

Quarto trem de engrenagem (Figura 34):

Figura 34 – Gráfico ilustrativo de trens de engrenagens



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

No quarto e último trem de engrenagem a ser apresentado, o motor está ligado via eixo a uma engrenagem de 8 dentes e, assim, sem alteração no número de giros (Figura 34). A engrenagem está acoplada a uma de 24 dentes pela lateral, portanto, com uma redução de 1/3 no número de giros. A engrenagem de 24 dentes está ligada via eixo a outra engrenagem de 8 dentes, em sua parte frontal, portanto, sem alteração no número de giros. Esta engrenagem de 8 dentes mencionada está ligada a outra engrenagem de 24 dentes pela lateral, então tem-se mais uma redução de 1/3 na quantidade de giros. Esta última engrenagem de 24 dentes mencionada está ligada a uma de 16, via eixo, sendo assim, não há alteração no número de giros. Esta engrenagem de 16 dentes tem acoplada em sua parte superior outra engrenagem, também de 16 dentes, sem alteração no número de giros. Esta engrenagem de 16 dentes está ligada via eixo a outra engrenagem de 8 dentes, sem alteração no número de giros. Esta tem acopladas a sua lateral, mais duas engrenagens também de 8 dentes, sem alteração no número de giros. Agora, a última das três engrenagens de 8 dentes em sequência esta acoplada à engrenagem de saída de 24 dentes, então ocorre mais uma redução de 1/3. Portanto, ao final (do motor até a engrenagem de saída), temos três reduções de 1/3 cada, totalizando uma redução de 1/27 no número de giros, o que pode ser representado matematicamente (fazendo as devidas composições de funções lineares) pela a função:

$$f_4: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f_4(x) = \frac{1}{27}x,$$

com relação de $4 \to \frac{1}{27}$. E esta é a estrutura no câmbio de marchas da primeira marcha. Encerramos, assim, os quatro trens de engrenagens que detalham o funcionamento das quatro marchas do câmbio, gerando as seguintes relações (Tabela 02):

Tabela 02 – Fatores de proporcionalidade do número de giros por trens de engrenagens

Trem de engrenagem em sequência	**Fator de proporcionalidade do número de giros**
1	1
2	1/3
3	1/9
4	1/27

Fonte: O autor.

Estas relações já foram vistas no início desta aula, onde foi demonstrado que podem ser modelas pela função:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Vale ressaltar que a progressão aritmética (1, 2, 3, 4) representa os quatro trens de engrenagens apresentados, respectivamente, e a geométrica (1, 1/3, 1/9, 1/27) representa os coeficientes das funções modeladoras de cada um desses trens. Pois, pode ficar como exercício, também para os alunos, substituir a representação da progressão aritmética das sequência dos trens de engrenagens, para realmente as marchas do câmbio, desta forma a relação passaria a ser (Tabela 03):

Tabela 3 – Fator de proporcionalidade do número de giros por marcha

Marcha	**Fator de proporcionalidade do número de giros**
Primeira	$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$
Segunda	$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$
Terceira	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$
Quarta	$1 = \frac{1}{3^0}$

Fonte: O autor.

Assim, utilizando o mesmo processo anterior para encontrar a função modeladora destas relações, encontramos a função:

$$g: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}, g(x) = \frac{1}{81} \cdot 3^{x}$$

Em ambos os casos, funções do tipo exponencial, conforme era um dos objetivos deste trabalho. Ressaltamos também ser importante observar que, no caso acima, se o câmbio apresentasse mais de quatro marchas, a partir da quinta haveria uma potencialização do número de giros na engrenagem de saída, em relação aos da engrenagem motora.

Retornando à aula, a atividade extraclasse consiste em entregar para os alunos os quatro trens de engrenagens e solicitar que eles informem qual será a redução final (quando houver) em relação ao número de giros do motor e à engrenagem de saída. Eles também devem apontar qual a função do tipo exponencial modela estas relações, definindo se irão utilizar como sequência aritmética, os trens de engrenagens ou as marchas, ou até mesmo ambos.

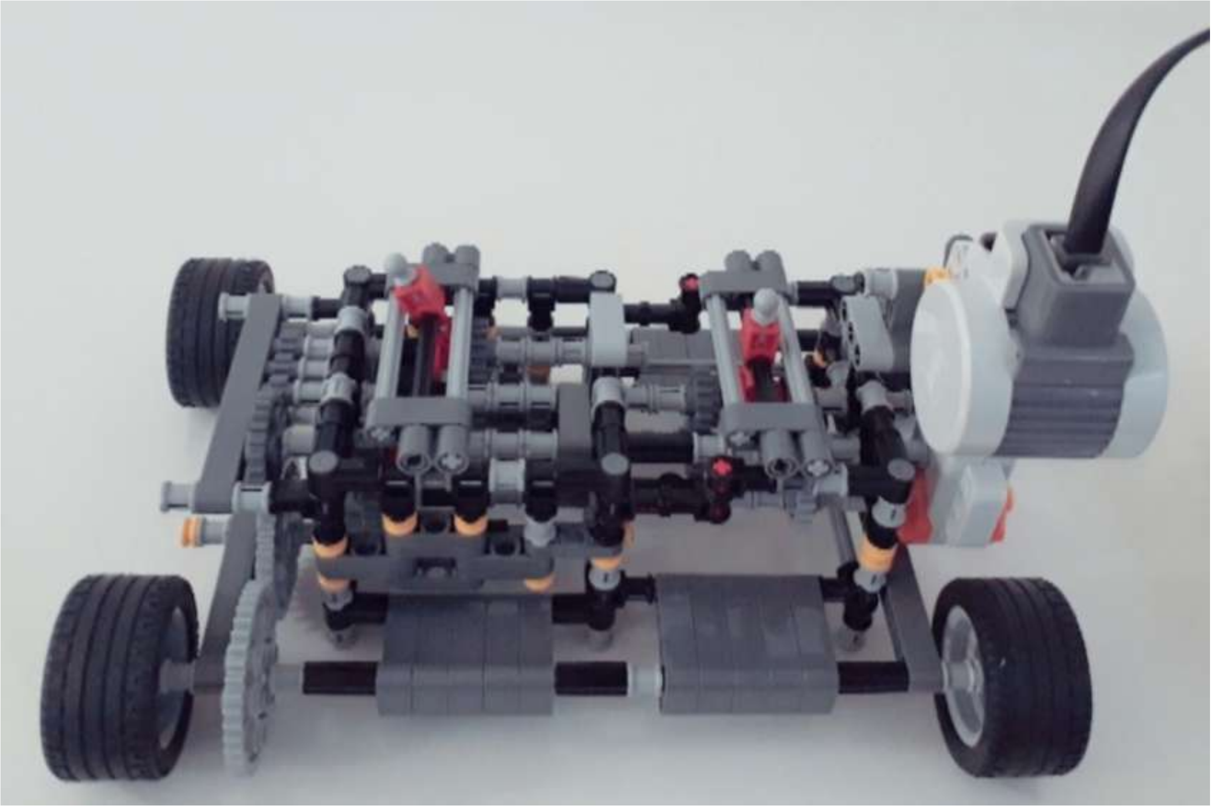
Se possível, os alunos devem ser orientados, quanto às dúvidas e para a execução da tarefa antes da aula seguinte, pois a próxima será a síntese do trabalho, com a apresentação do câmbio e o início de sua construção, logo, é importante que já não haja dúvida quanto ao seu funcionamento e às funções que o modelam.

7.13 SEQUÊNCIA DE CONTEÚDO MONTAGEM DO CÂMBIO DE MARCHAS

Quinta Aula – Primeiro momento

De posse dos quatro trens de engrenagens utilizados na última aula, seja impresso ou em slides, o professor deve, corrigir possíveis erros dos alunos e explicar que cada um daqueles trens de engrenagem representa a estrutura das marchas do câmbio que será construído, o qual, ao final, será deste modelo (Figura 35):

Figura 35 – Câmbio de 4 marchas, produzido por peças do KIT LEGO® Mindstorms NXT



Fonte: O autor.

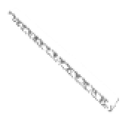
No câmbio foram acrescentadas, rodas, estruturas e engrenagens, mas que não interferiram em seu funcionamento exponencial, apenas contribuíram para um melhor funcionamento, e o tornaram mais atrativo aos olhos dos alunos e professores.

Nesse momento, então, o professor deve apresentar a imagem do câmbio a ser construído, é ideal que o aplicador já o tenha montado anteriormente para sanar qualquer dúvida no processo. Porém, não é recomendada a apresentação do mesmo já montado para os alunos, visto que pode gerar neles grande curiosidade em ver seu funcionamento e estruturas, o que pode dispersá-los do foco da montagem e demandar bem mais tempo que o previsto para o encerramento da sequência didática. E assim, iniciar a montagem, conforme a seguir.

Quinta Aula – Segundo momento

Para a montagem serão necessárias 371 peças (Quadro 01) do KIT LEGO® Mindstorms NXT, sendo elas, (as imagens foram produzidas no programa LEGO Digital Designer):

Quadro 01 – Peças necessárias para montagem do câmbio de marchas

Brick	**Name**	**Picture**	**Part**	**Color code**	**Quantity**
4634091	RIM WIDE 43,2X26 W 6 HOL.Ø 4.8		56908	194 - Medium Stone Grey	4
6035364	TYRE LOW WIDE Ø56 X 28		41897	26 - Black	4
4297008	Tacho Motor		53787	208 - Light Stone Grey, 199 - Dark Stone Grey, 106 - Bright Orange	1
4208160	TECHNIC 3M BEAM		32523	1 - White	2
4120017	TECHNIC ANG. BEAM 4X2 90 DEG		32140	26 - Black	20
4297202	TECHNIC 9M BEAM		40490	208 - Light Stone Grey	1
4535772	T-BEAM 3X3 W/HOLE Ø4.8		60484	194 - Medium Stone Grey	1
4542578	TECHNIC 15M BEAM		32278	1 - White	2

4211566	TECHNIC LEVER 3M		6632	194 - Medium Stone Grey	18
4239601	1/2 BUSH		32123	24 – Bright Yellow	26
4142865	2M CROSS AXLE W. GROOVE		32062	21 – Bright Red	4
6013938	1 1/2 M CONNECTING BUSH		32002	5 – Brick Yellow	4
4211375	BALL W. CROSS AXLE		2736	194 - Medium Stone Grey	2
4121715	CONNECTOR PEG W. FRICTION		2780	26 - Black	4
4211815	CROSS AXLE 3M		4519	194 - Medium Stone Grey	2
4211622	BUSH FOR CROSS AXLE		6590	194 - Medium Stone Grey	102
4206482	CONN.BUSH W.FRIC./CROSSALE		43093	23 - Bright Blue	2

370526	CROSS AXLE 4M		3705	26 - Black	14
4512360	CROSS AXLE, EXTENSION, 2M		59443	194 - Medium Stone Grey	16
4107081	CATCH W. CROSS HOLE		32039	26 - Black	29
4211639	CROSS AXLE 5M		32073	194 - Medium Stone Grey	4
4210851	CROSS BLOCK 90°		6536	199 - Dark Stone Grey	5
6006140	BEAM 1X2 W/CROSS AND HOLE		60483	26 - Black	1
370626	CROSS AXLE 6M		3706	26 - Black	8
6083620	CROSS AXLE 4M WITH END STOP		87083	199 - Dark Stone Grey	1
4270473	TECHNIC CHANGE-OVER CATCH		6641	21 – Bright Red	2

4211805	CROSS AXLE 7M		44294	194 - Medium Stone Grey	24
4128598	DOUBLE CROSS BLOCK		32184	21 – Bright Red	7
370726	CROSS AXLE 8M		3707	26 - Black	4
4107783	ANGLE ELEMENT, 180 DEGREES [2]		32034	26 - Black	1
4210857	CROSS BLOCK 3M		42003	199 - Dark Stone Grey	1
4535768	CROSS AXLE 9M		60485	194 - Medium Stone Grey	3
373726	CROSS AXLE 10M		3737	26 - Black	2
4107767	ANGLE ELEMENT, 90 DEGREES [6]		32014	26 - Black	10
4210655	TECHNIC CROSS BLOCK 2X1		32291	199 - Dark Stone Grey	4

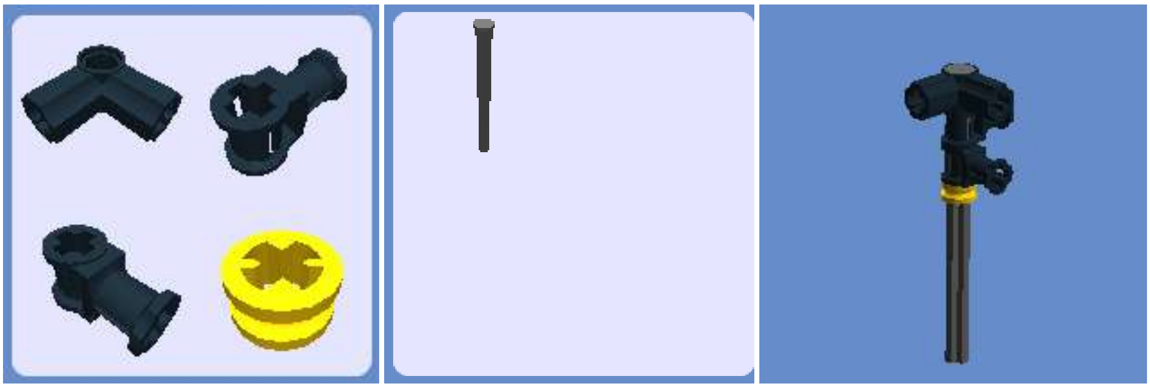
370826	CROSS AXLE 12M		3708	26 - Black	1
4499858	CROSS AXLE 8M WITH END STOP		55013	199 - Dark Stone Grey	6
4538007	CROSS BLOCK 3X2		63869	194 - Medium Stone Grey	7
4278957	DRIVING RING		6539	21 – Bright Red	3
4514559	GEAR WHEEL T=8, M=1		3647	199 - Dark Stone Grey	5
4211563	GEAR WHEEL Z=16, M=1		4019	194 - Medium Stone Grey	1
4640536	GEAR WHEEL Z16		94925	194 - Medium Stone Grey	3
4237267	GEAR WHEEL Z16-Ø4.9		6542	199 - Dark Stone Grey	5
4514558	GEAR WHEEL Z24		3648	199 - Dark Stone Grey	3

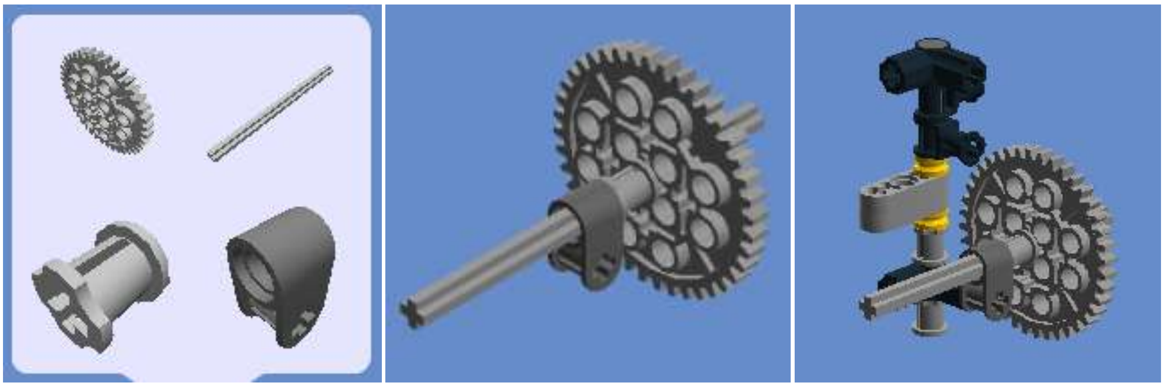
4285634	GEAR WHEEL 40T		3649	194 - Medium Stone Grey	2
Total:					371

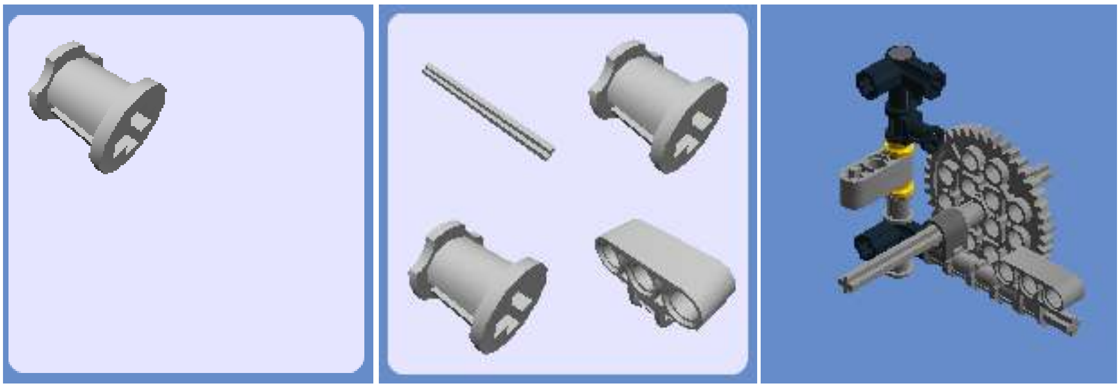
Fonte: O autor (elaborada no Lego Digital Designer).

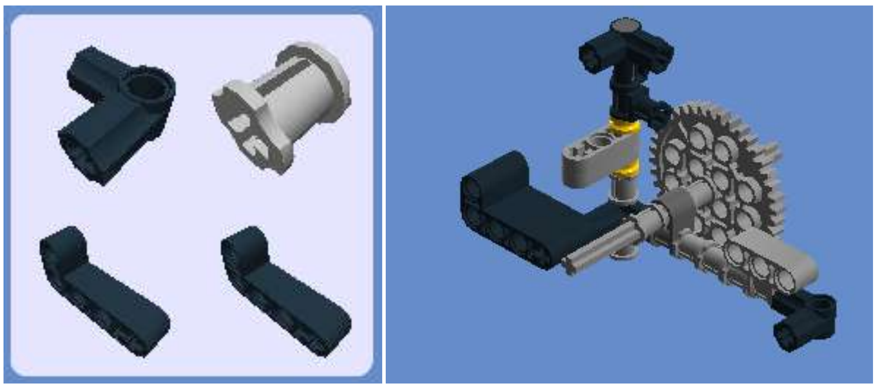
De posse de todas as peças, deve-se iniciar a montagem (Quadro 02). As imagens estão na sequência que deve ser seguida para a construção (no sentido sempre da esquerda para a direita). As imagens com fundo branco indicam as peças a serem utilizadas naquele momento, as de fundo azul indicam a montagem a ser a feita. Toda a montagem deve durar em torno de cinco aulas, não sendo possível mensurar precisamente o número correto de aulas, uma vez que a quantidade será bem relativa em relação à agilidade e a afinidade da maioria dos alunos para com a construção e manipulação das peças.

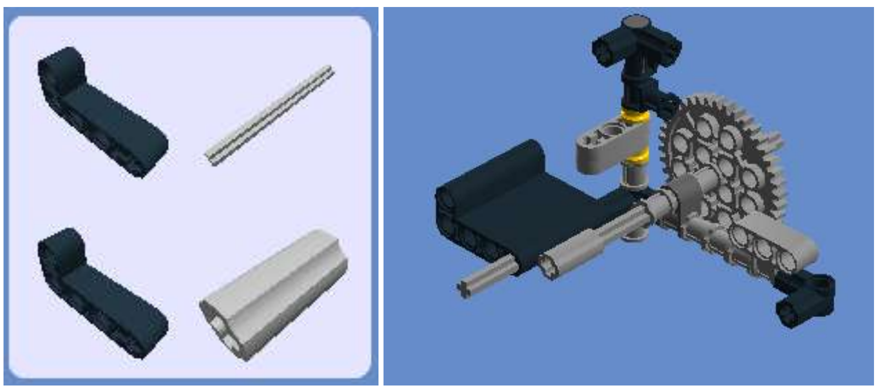
Quadro 02 – Instruções de montagem do câmbio de marchas

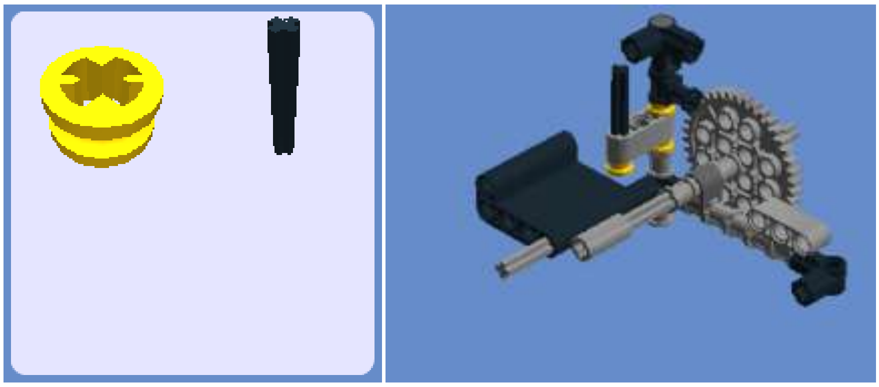


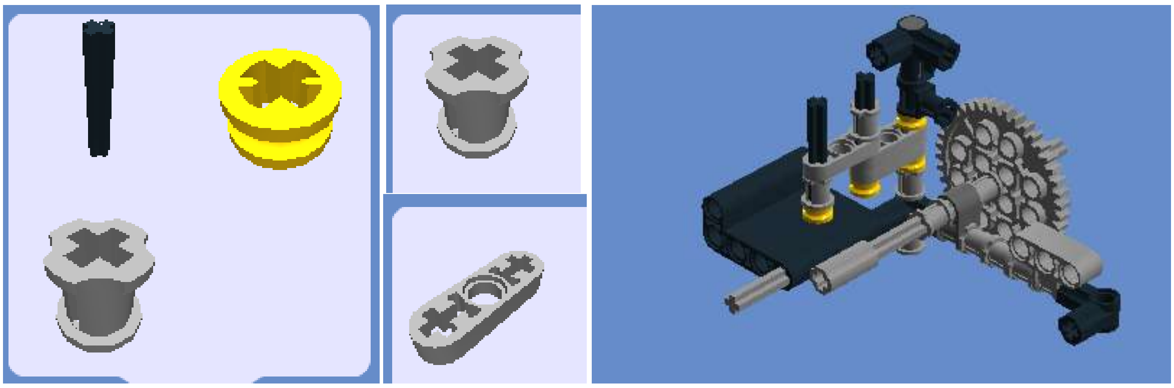


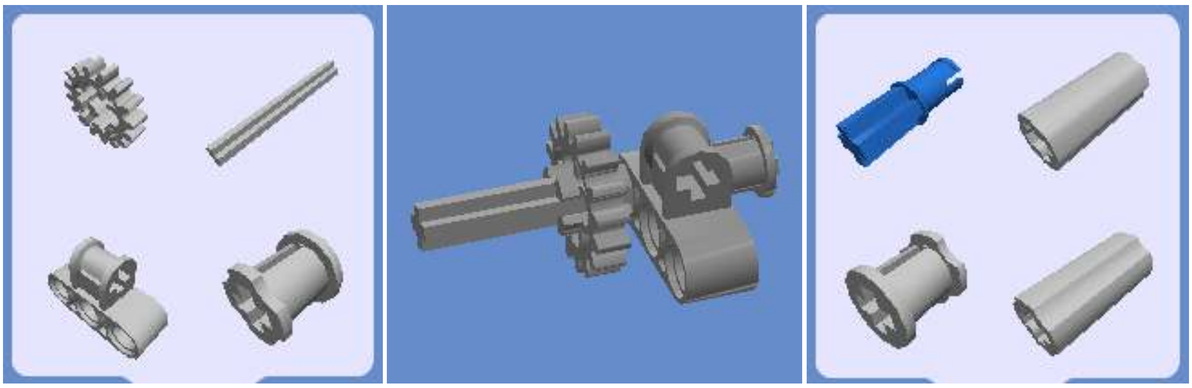


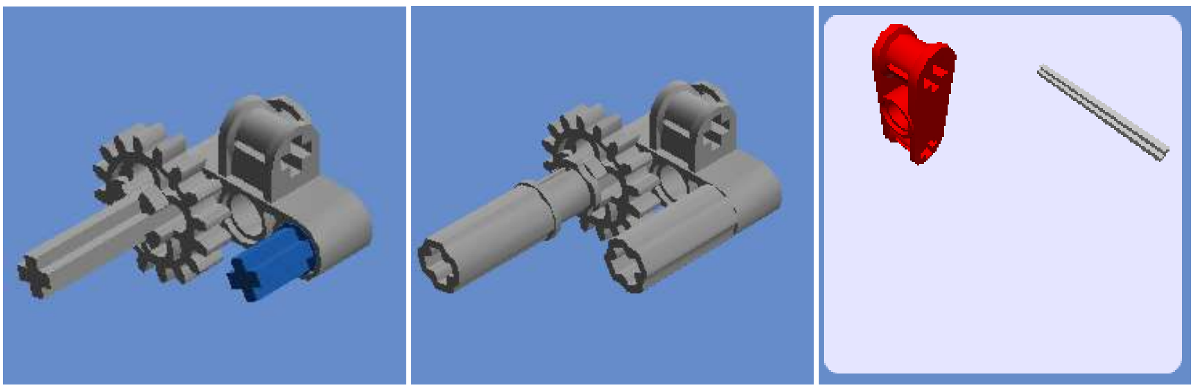


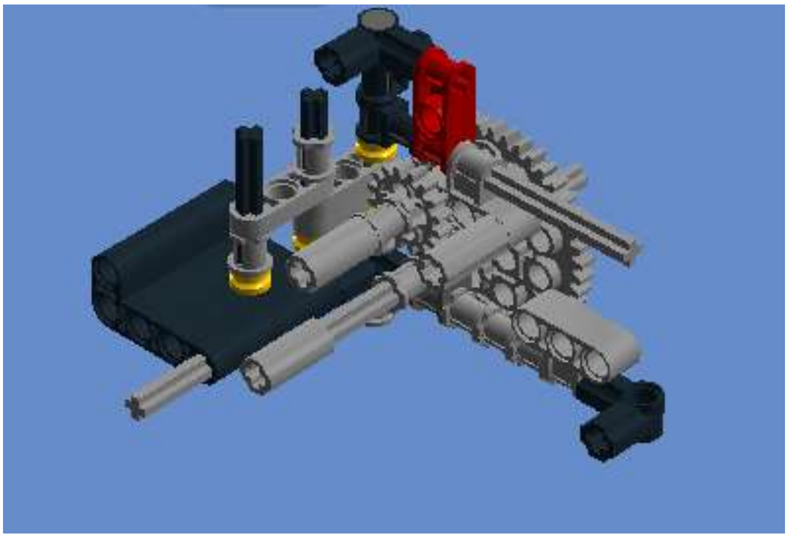
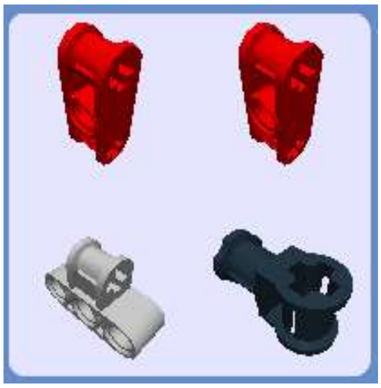


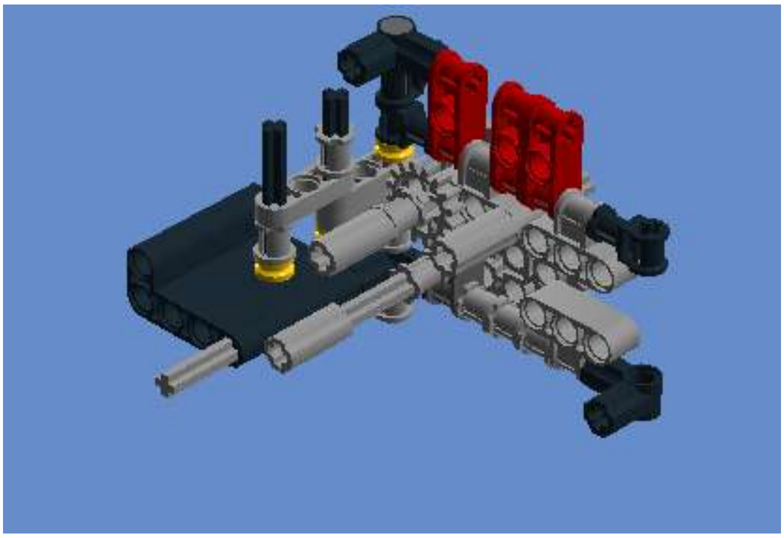


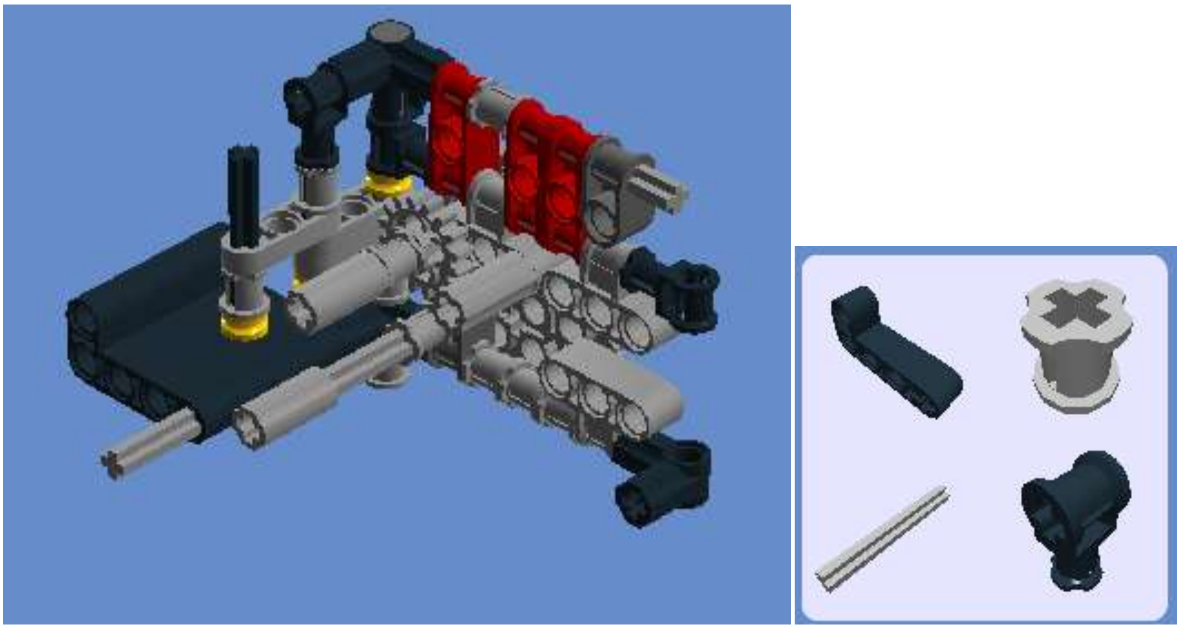


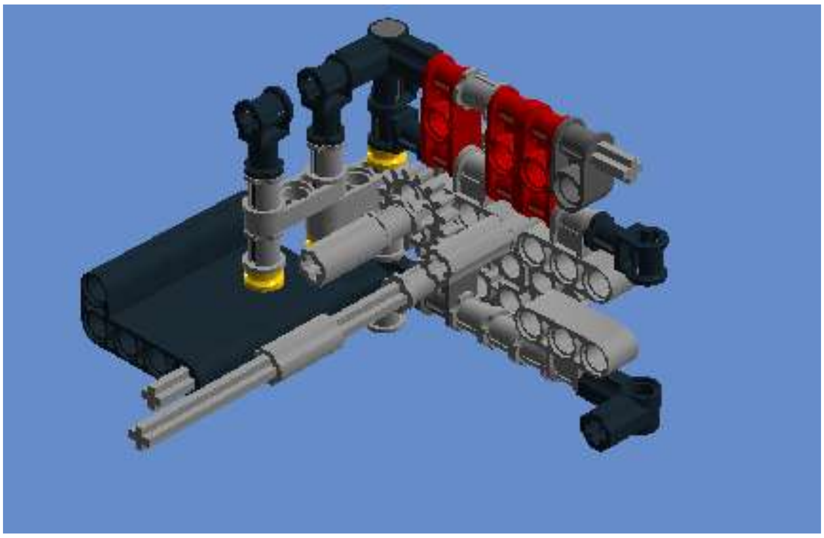


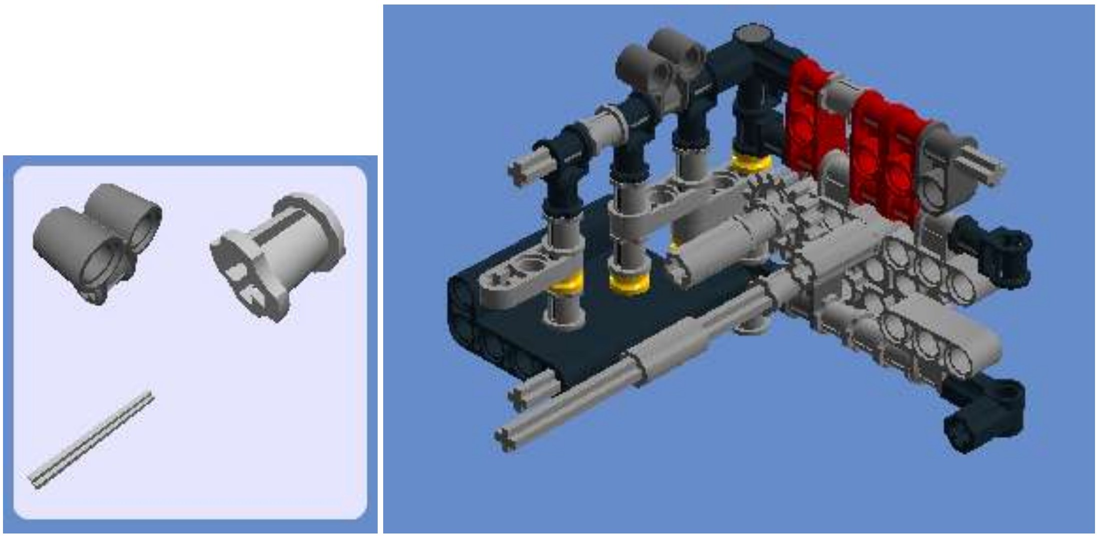


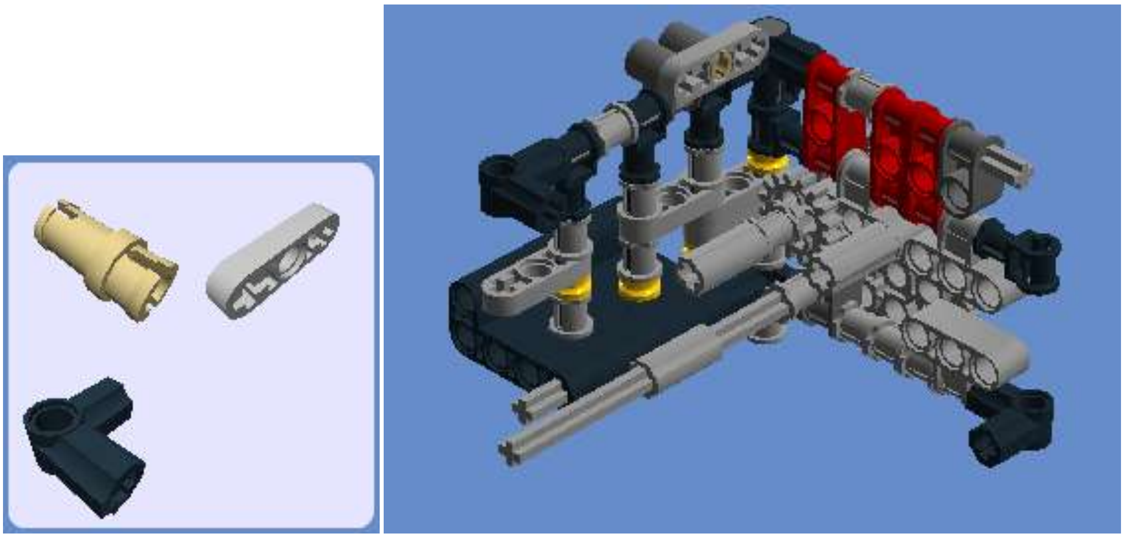



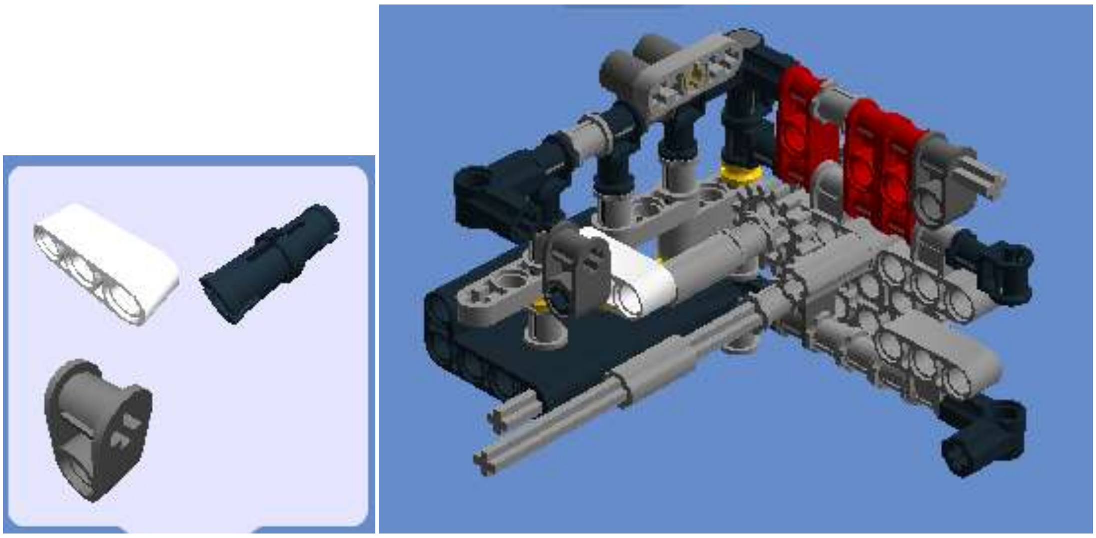


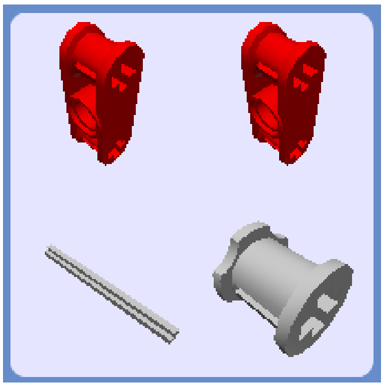



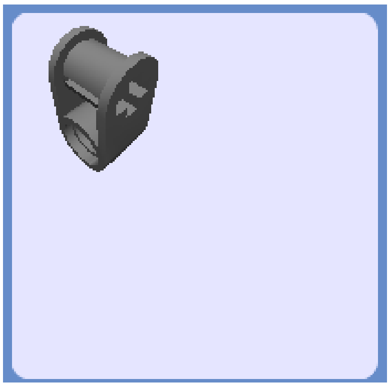


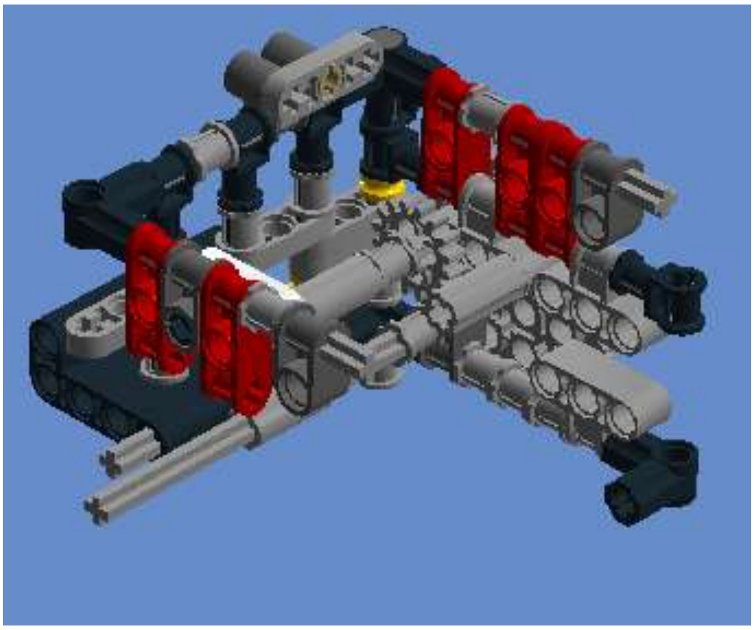


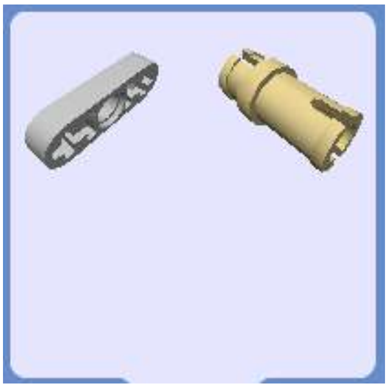


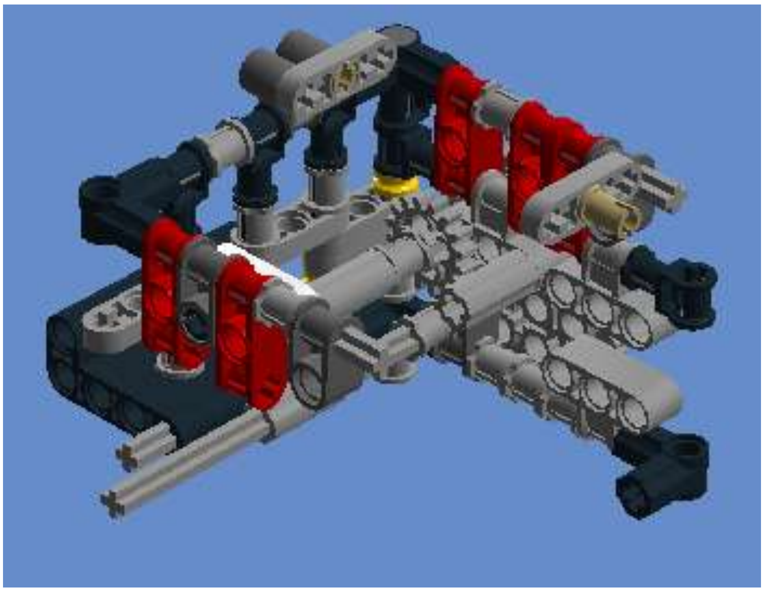


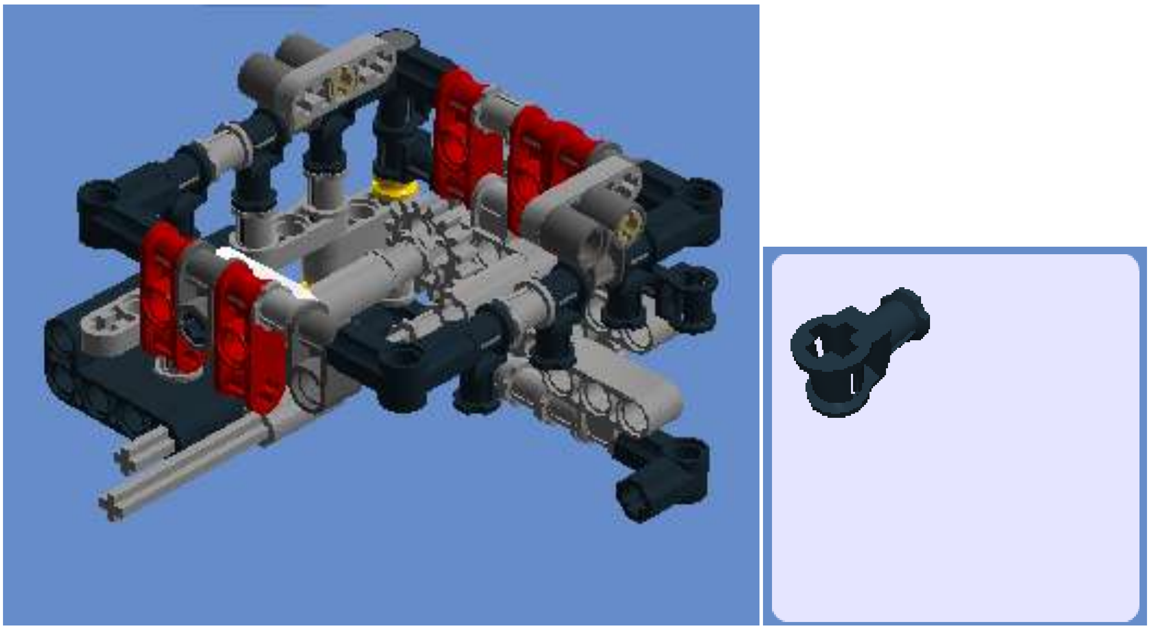


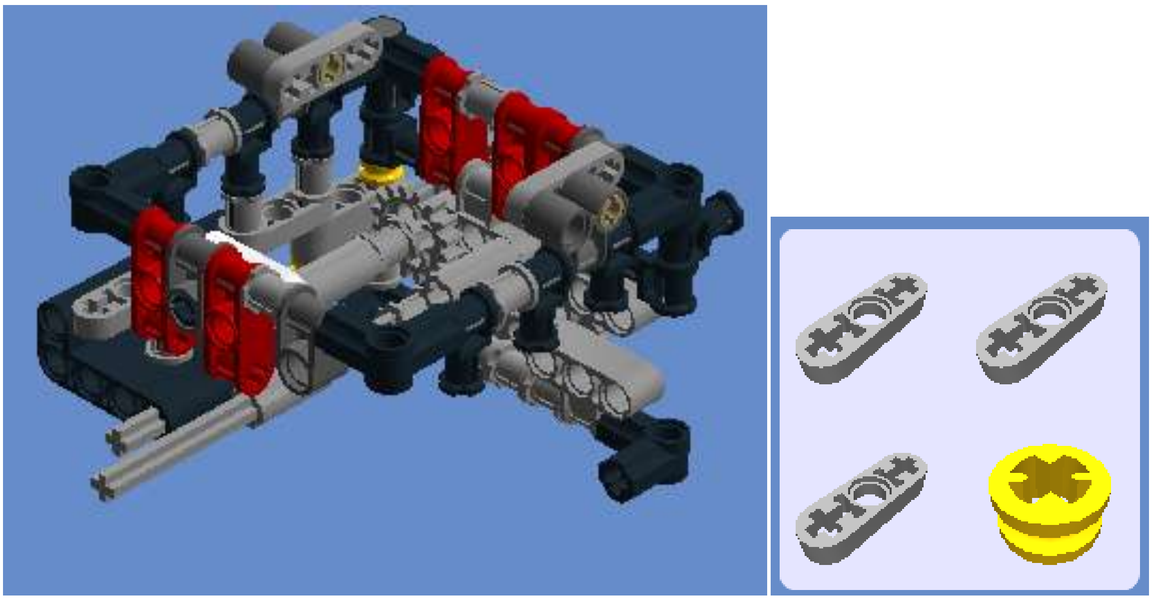


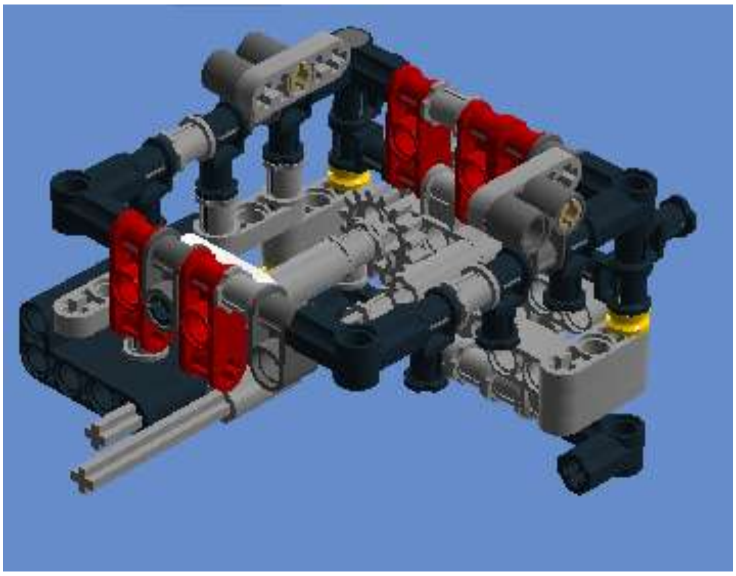


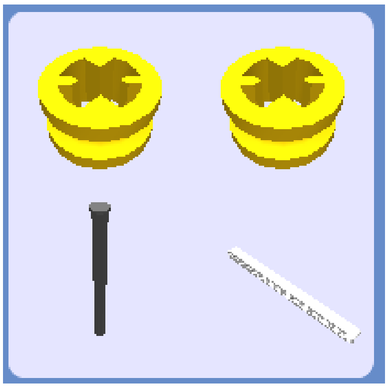


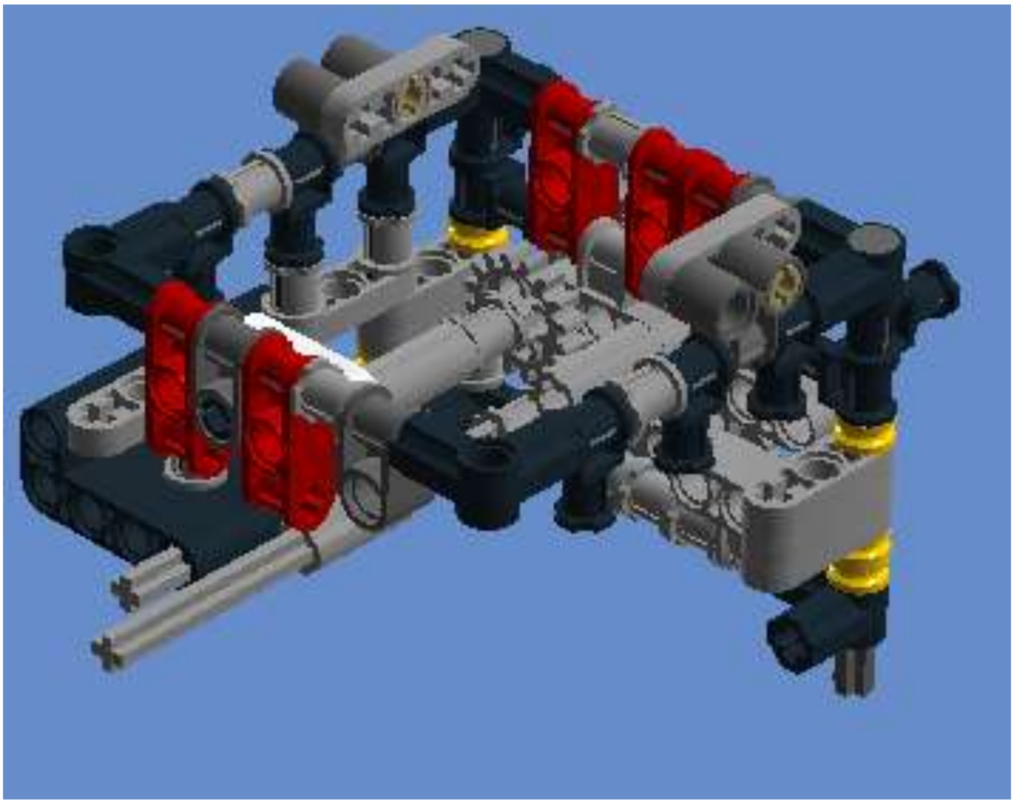


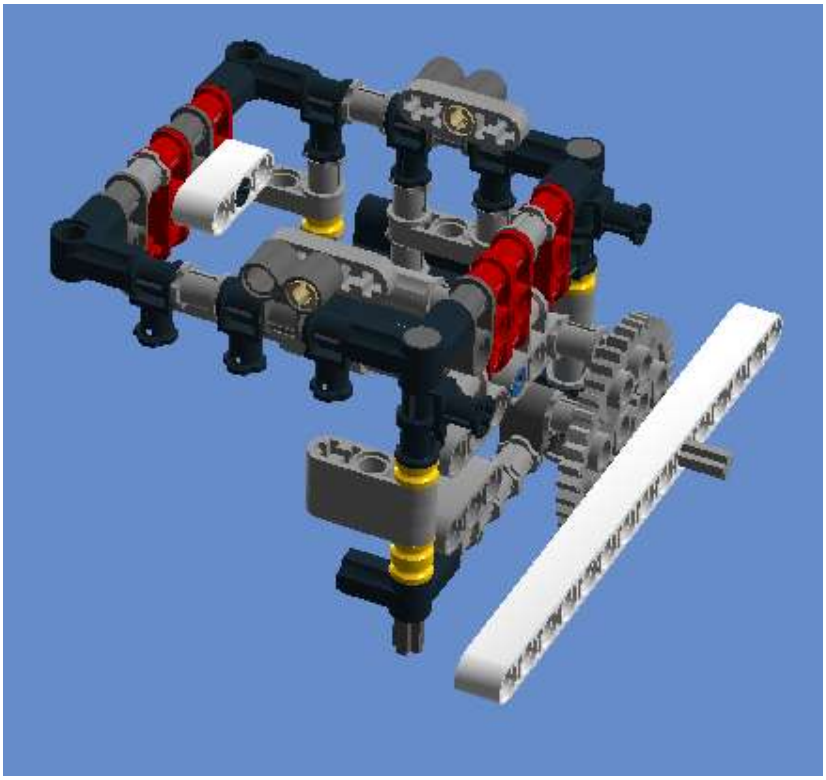


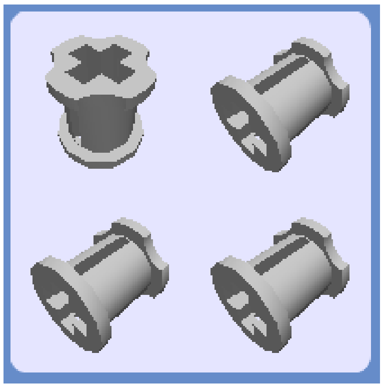


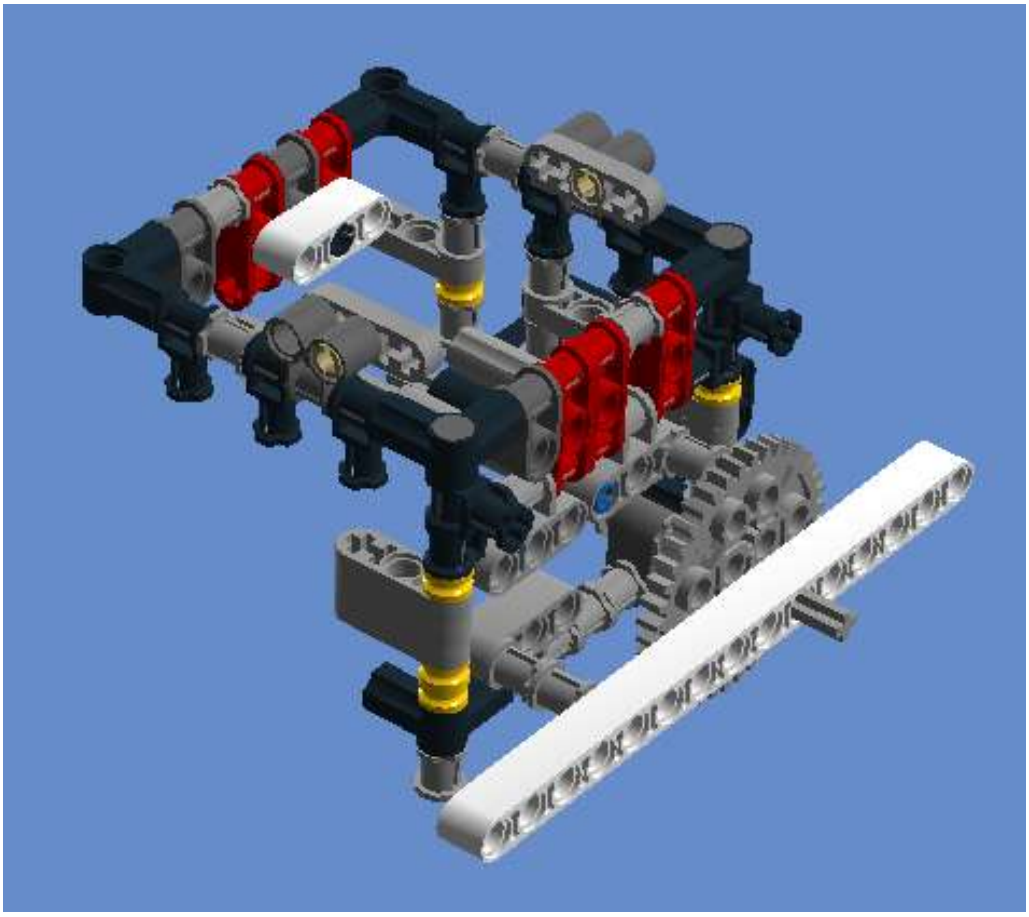


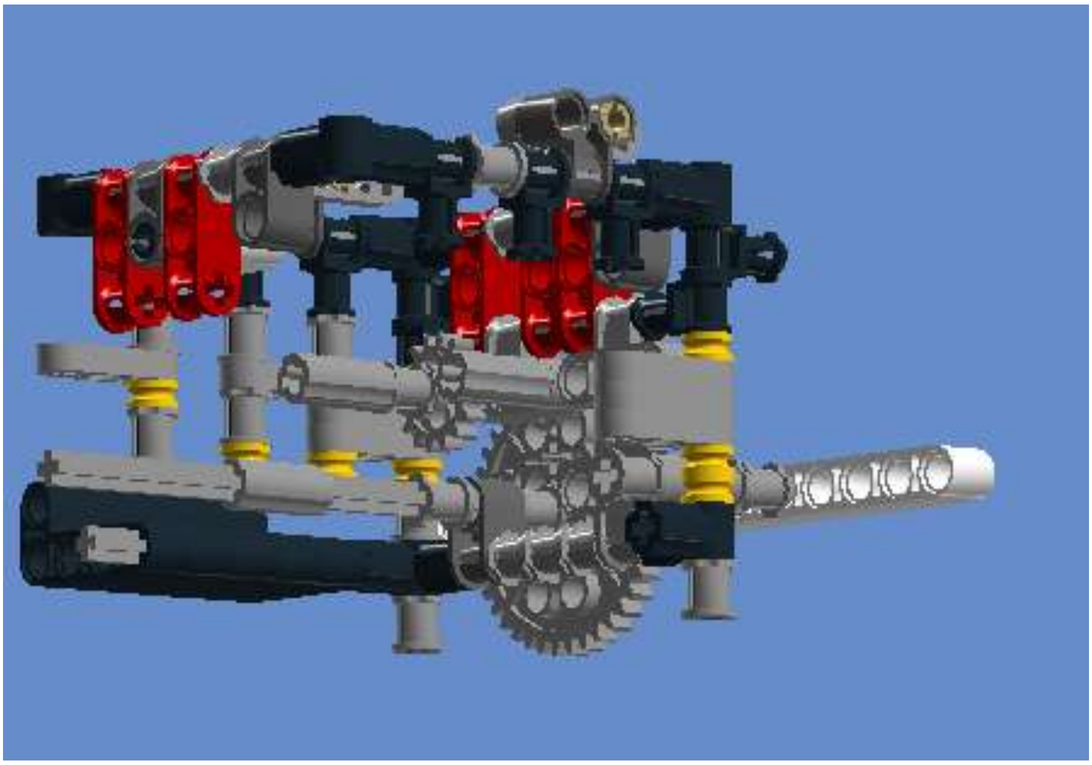


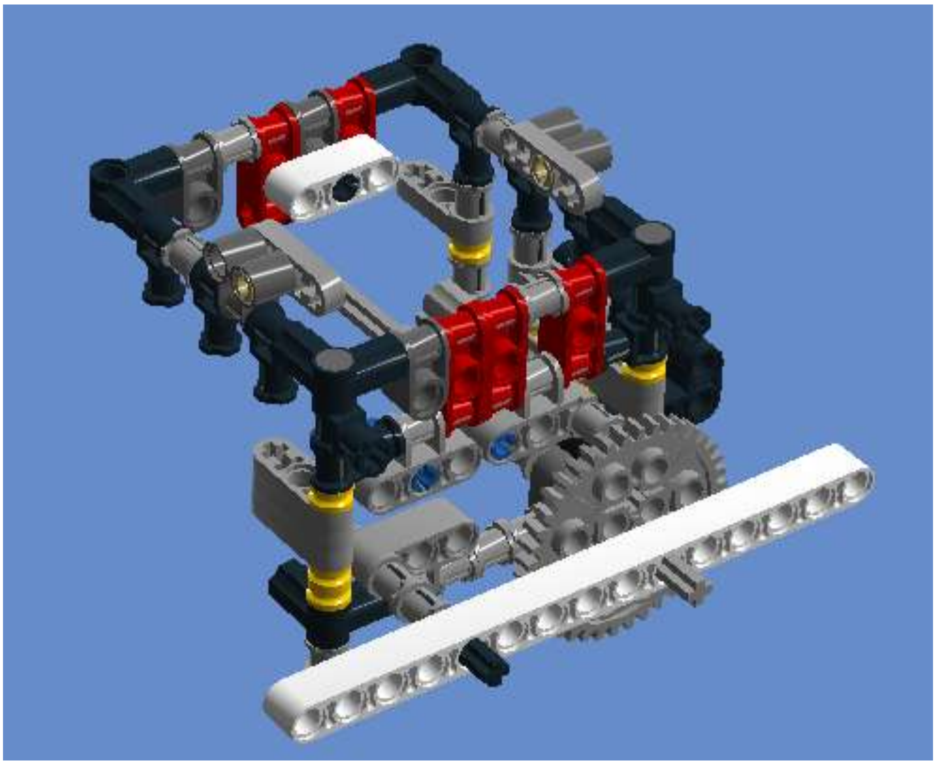


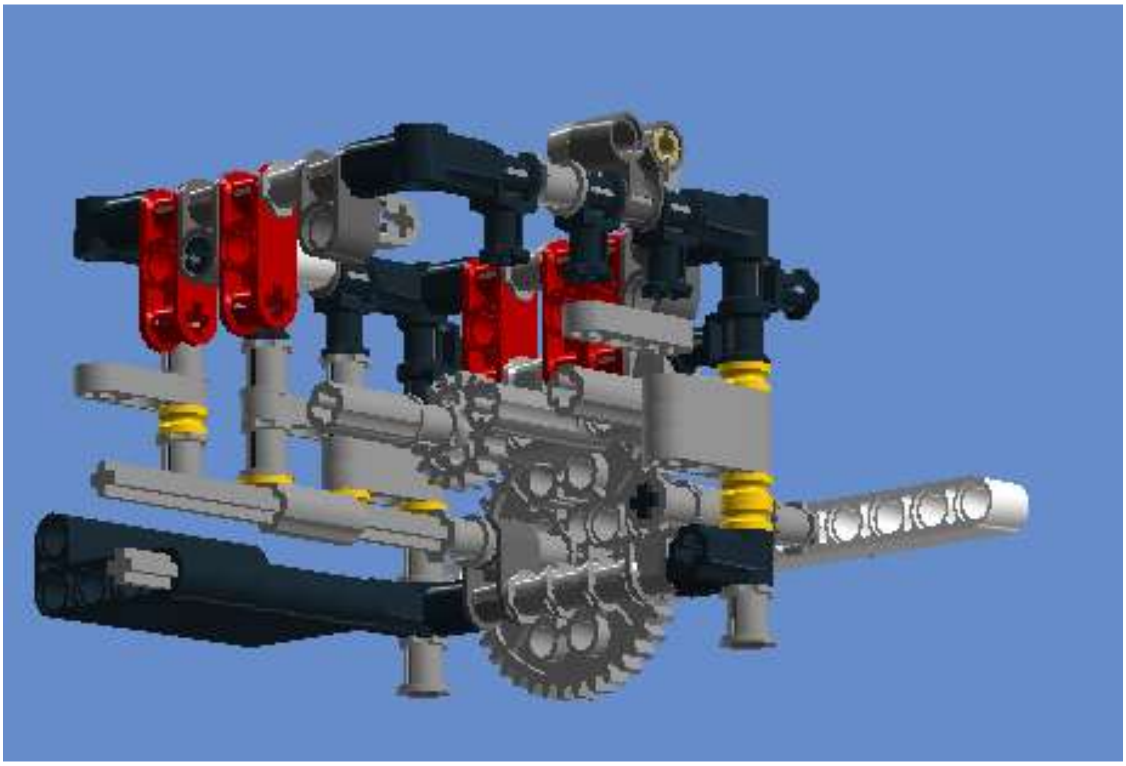


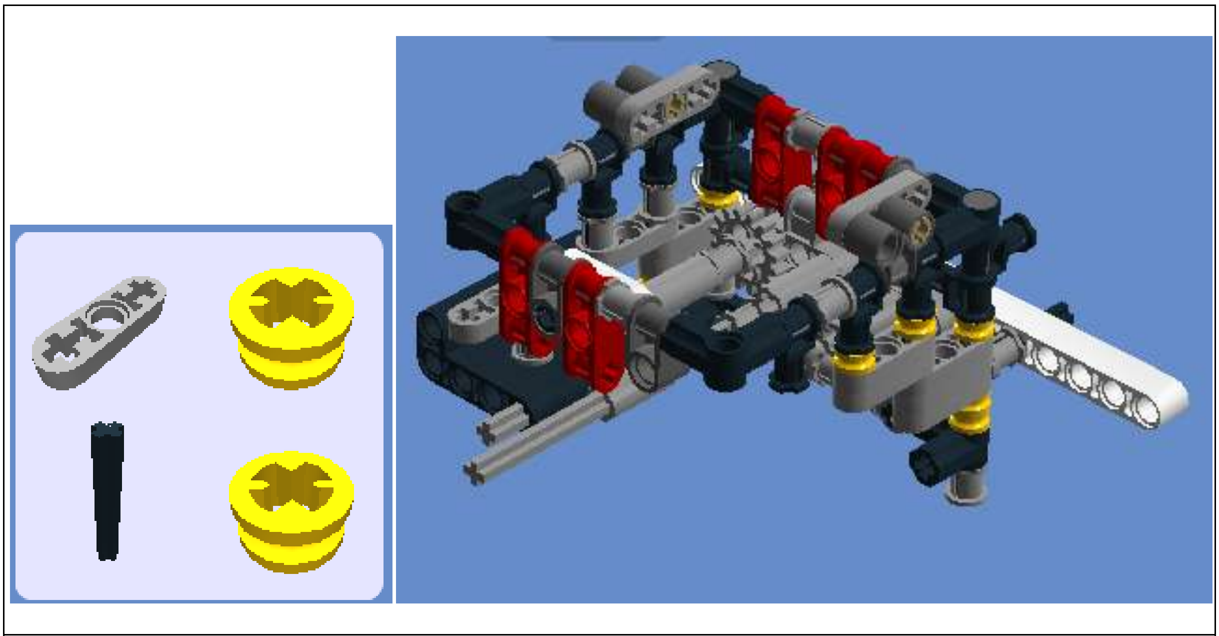


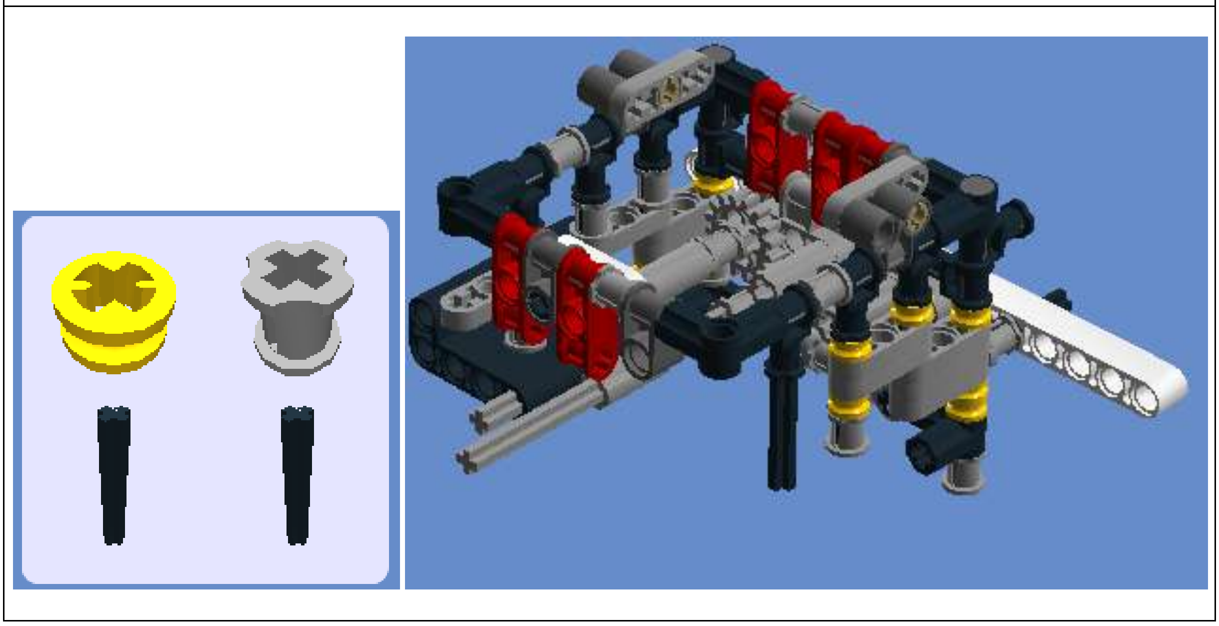


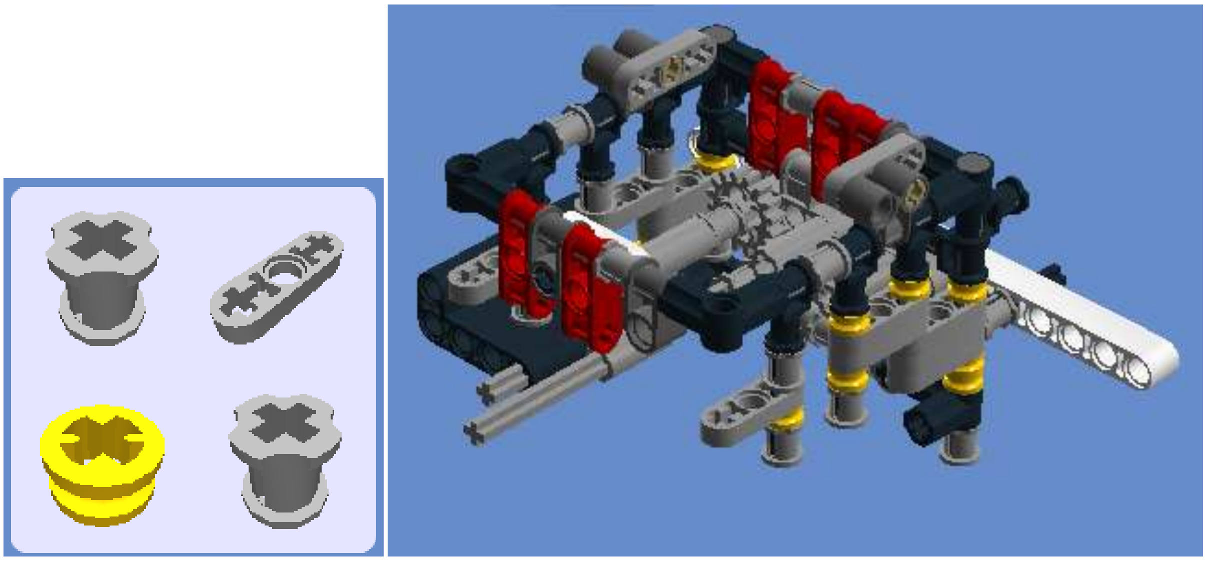


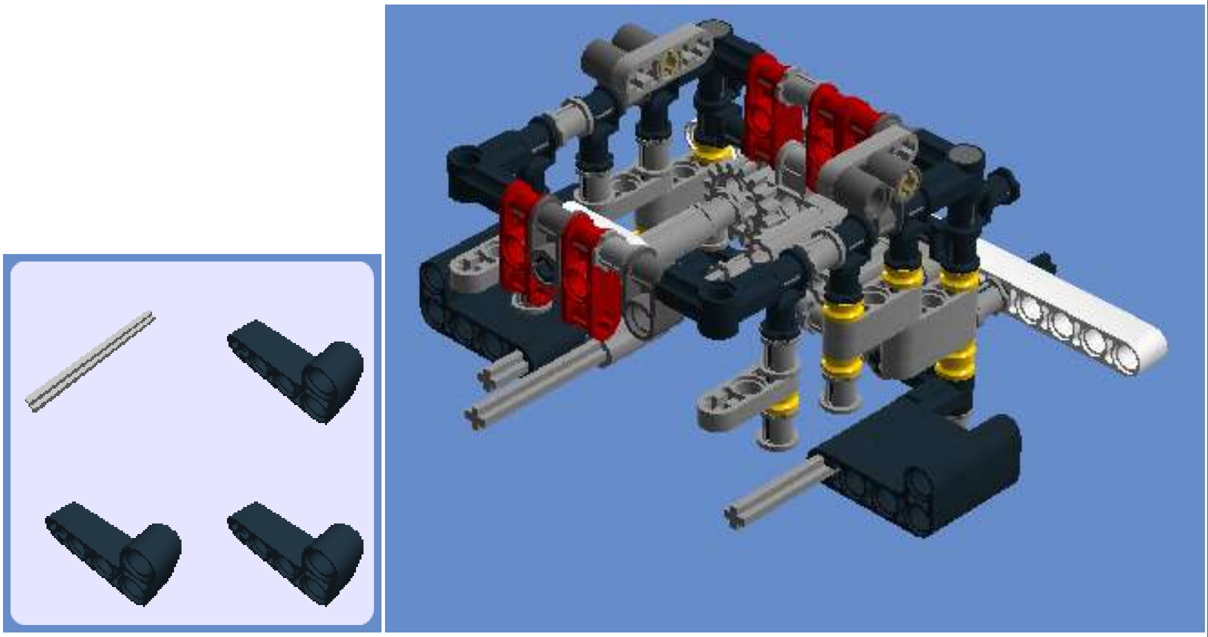


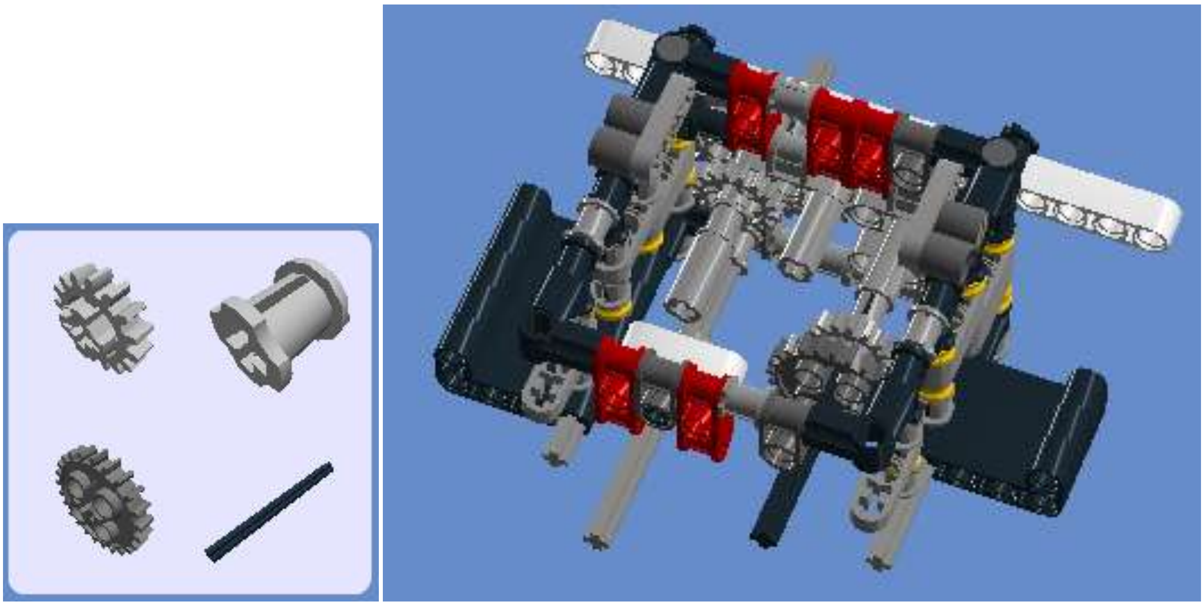


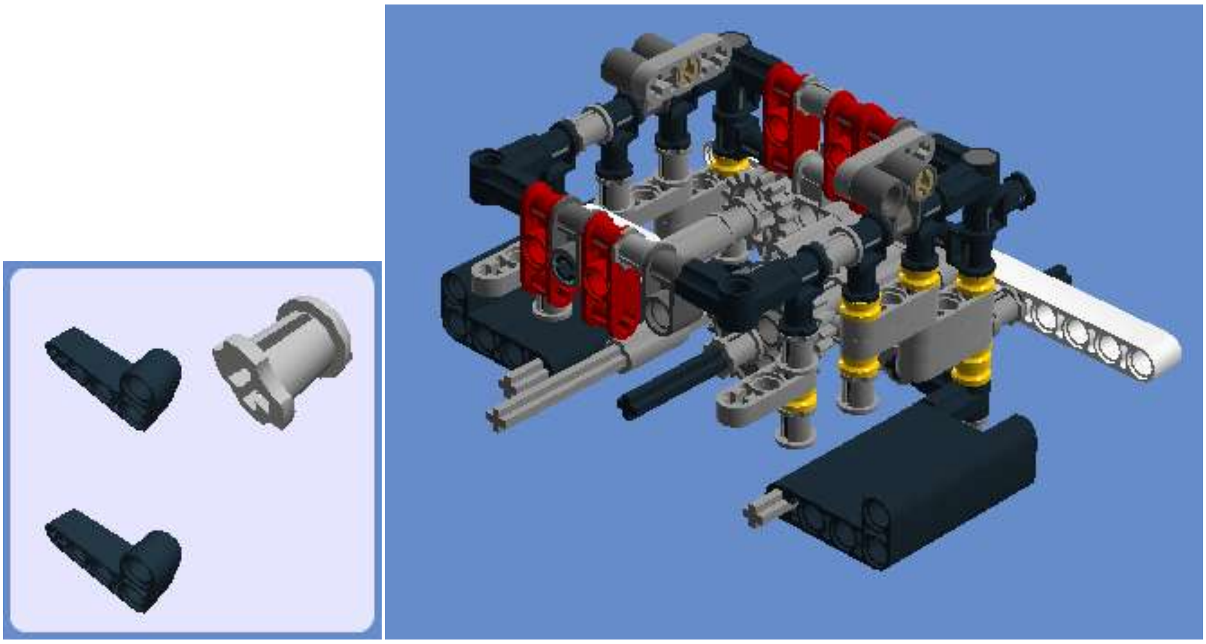


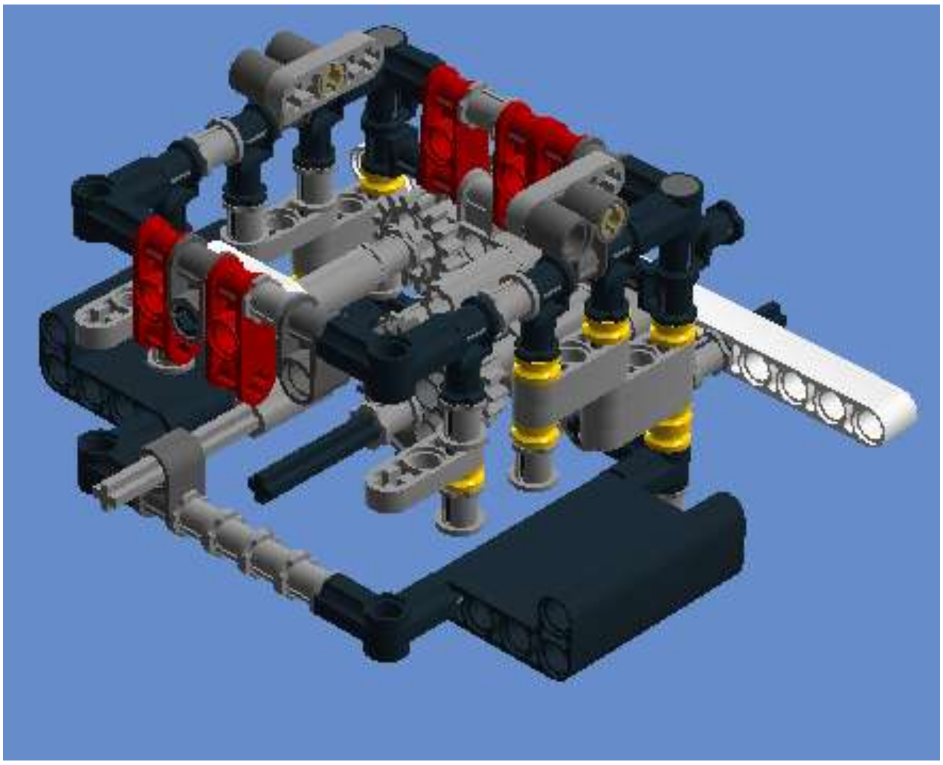


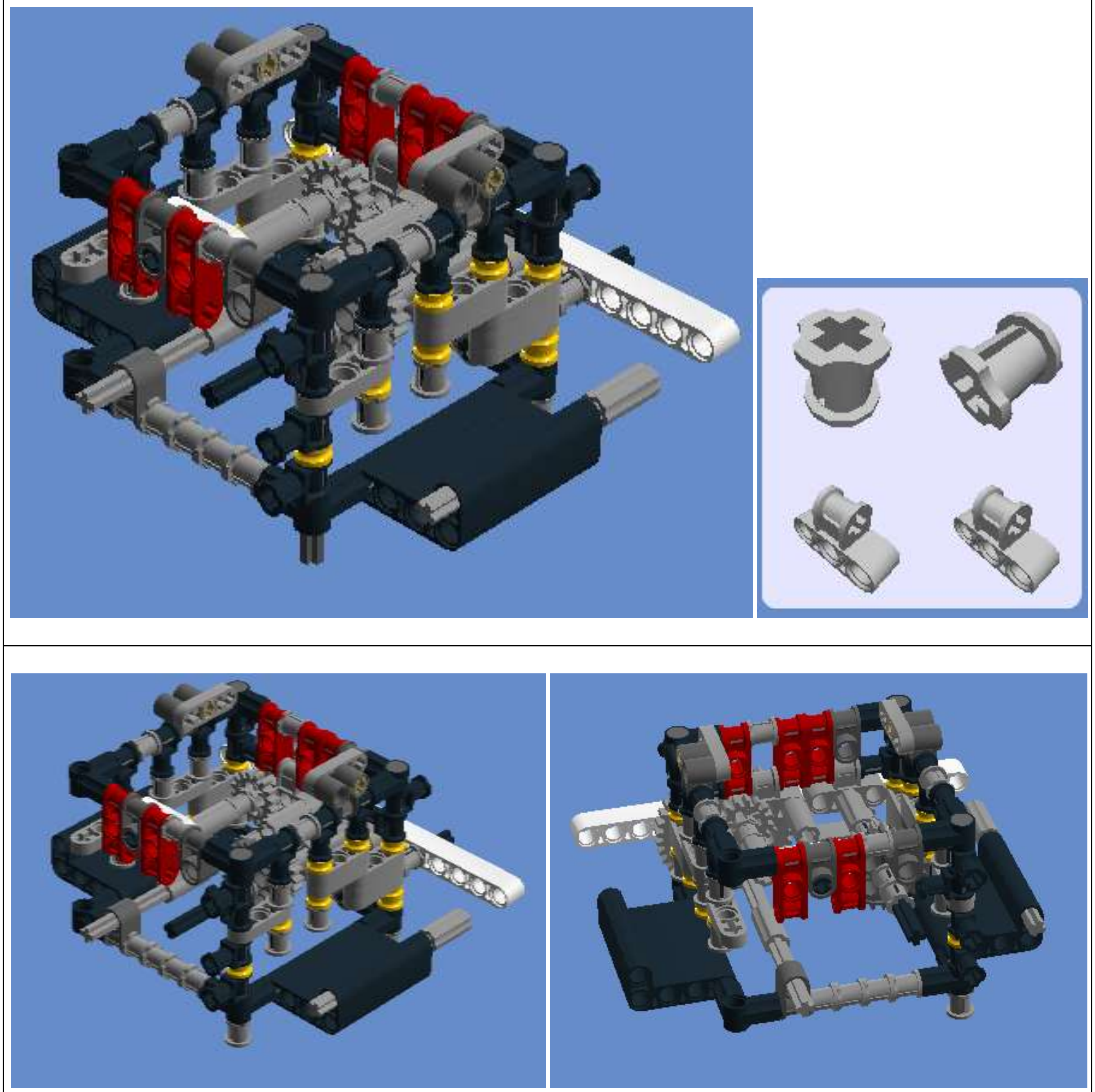


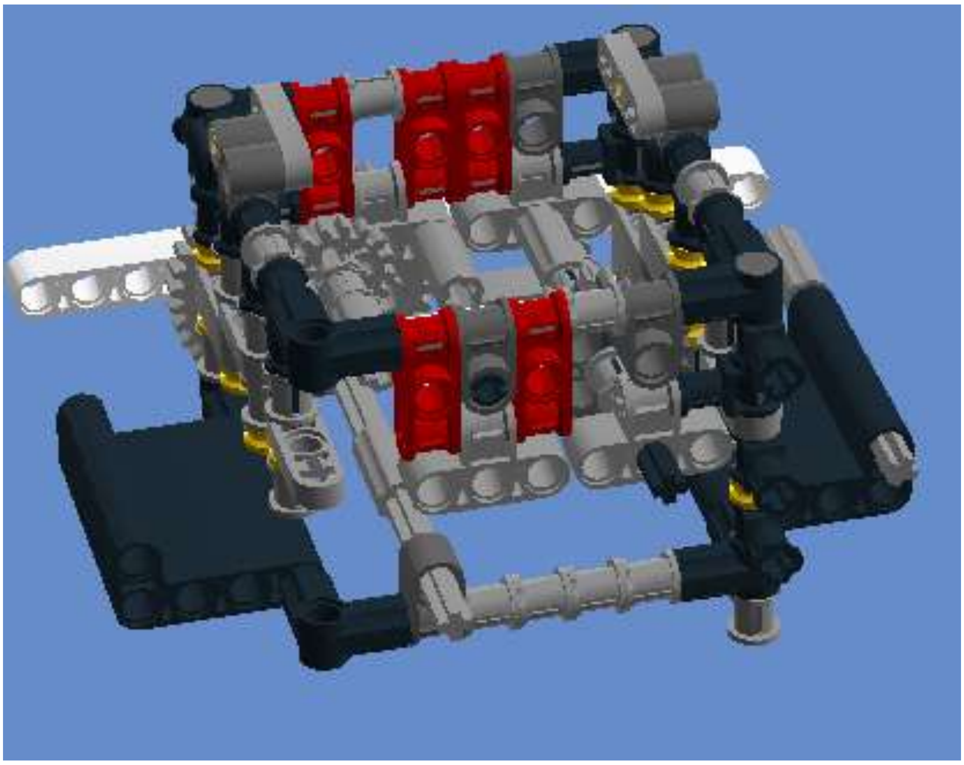


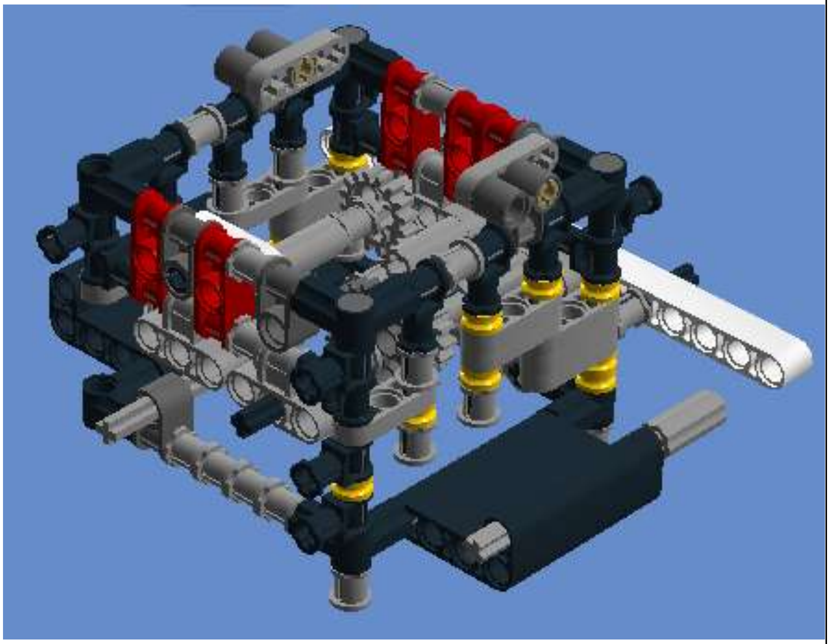


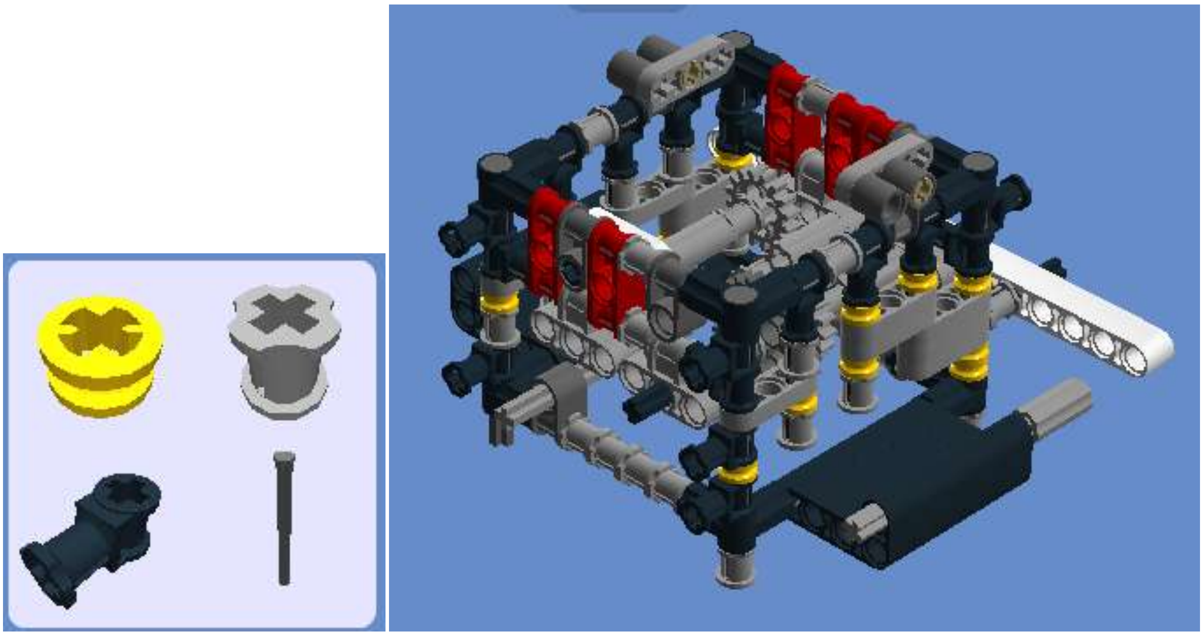


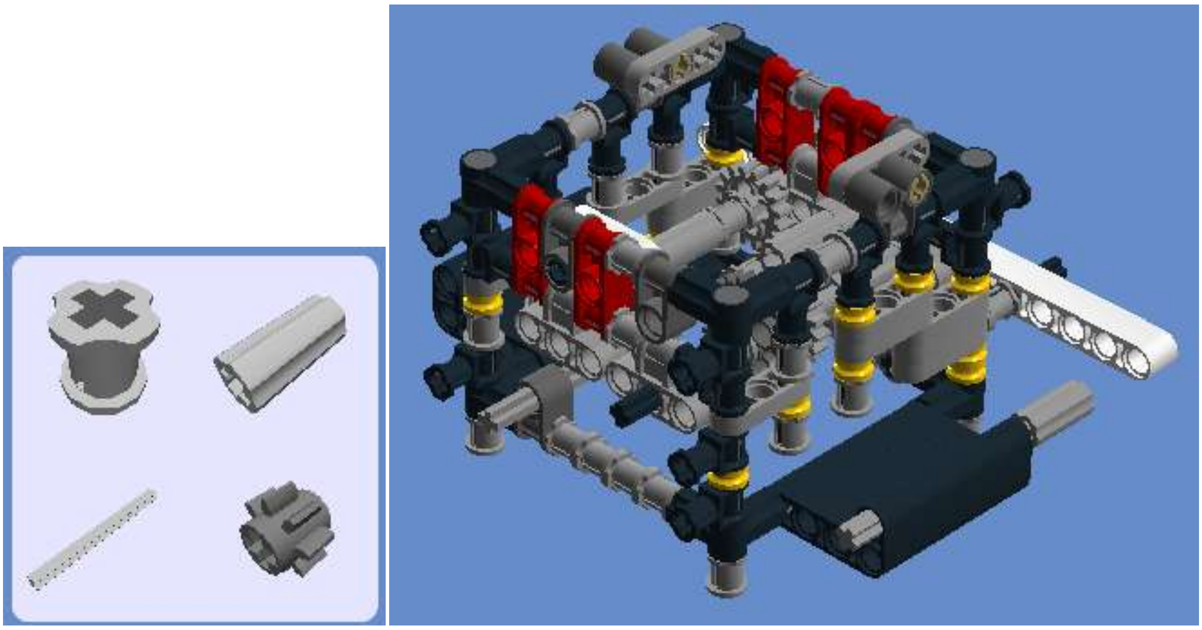


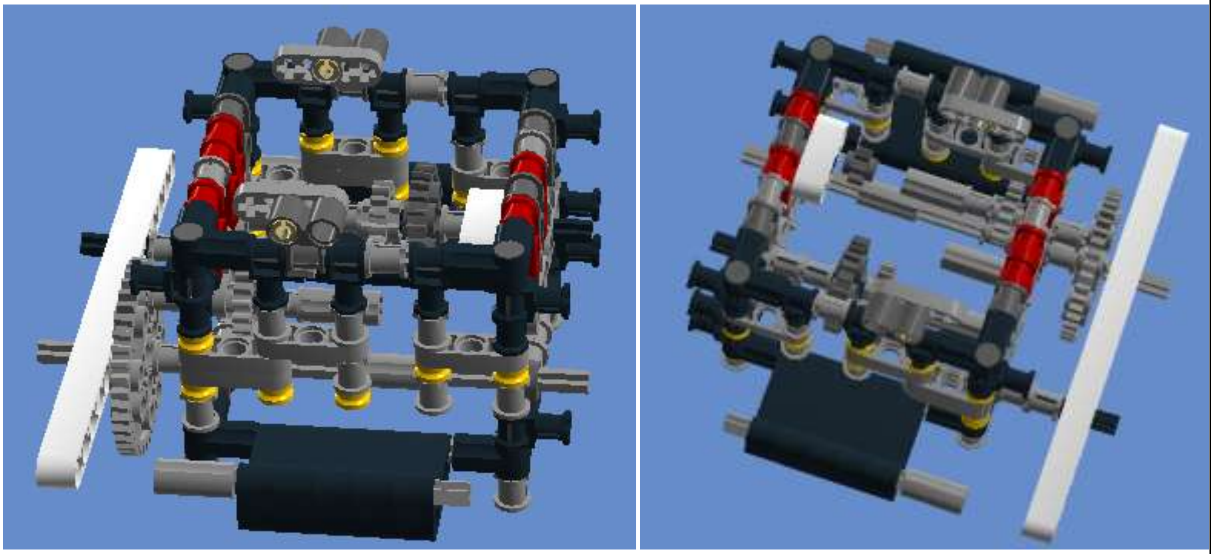


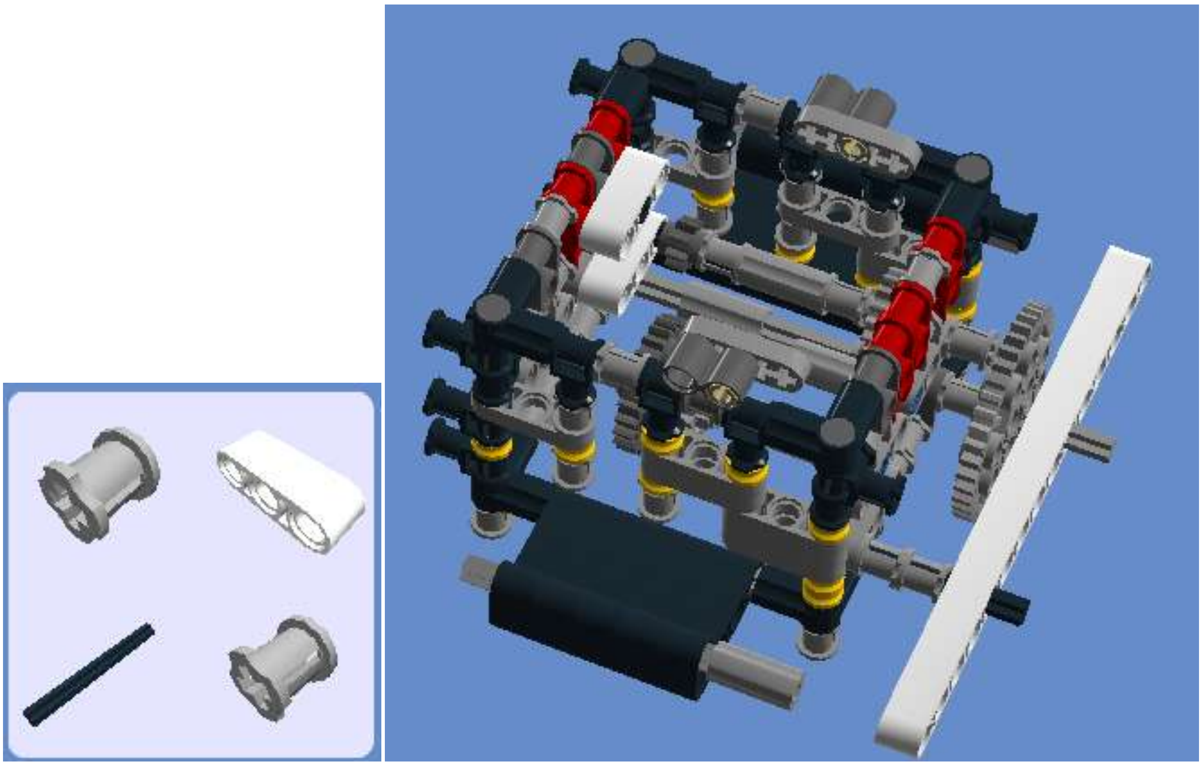


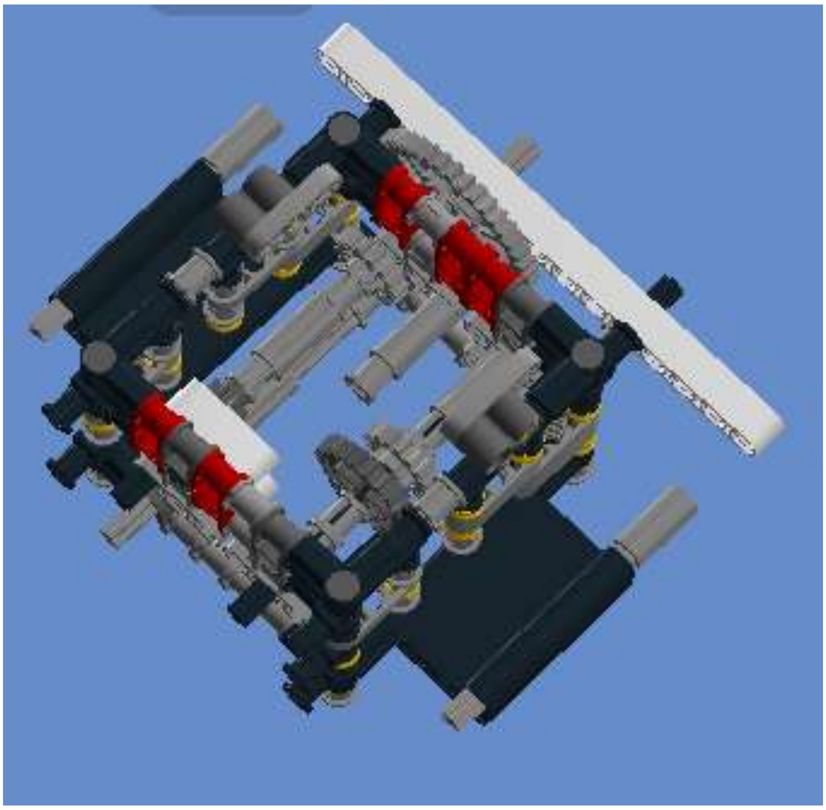


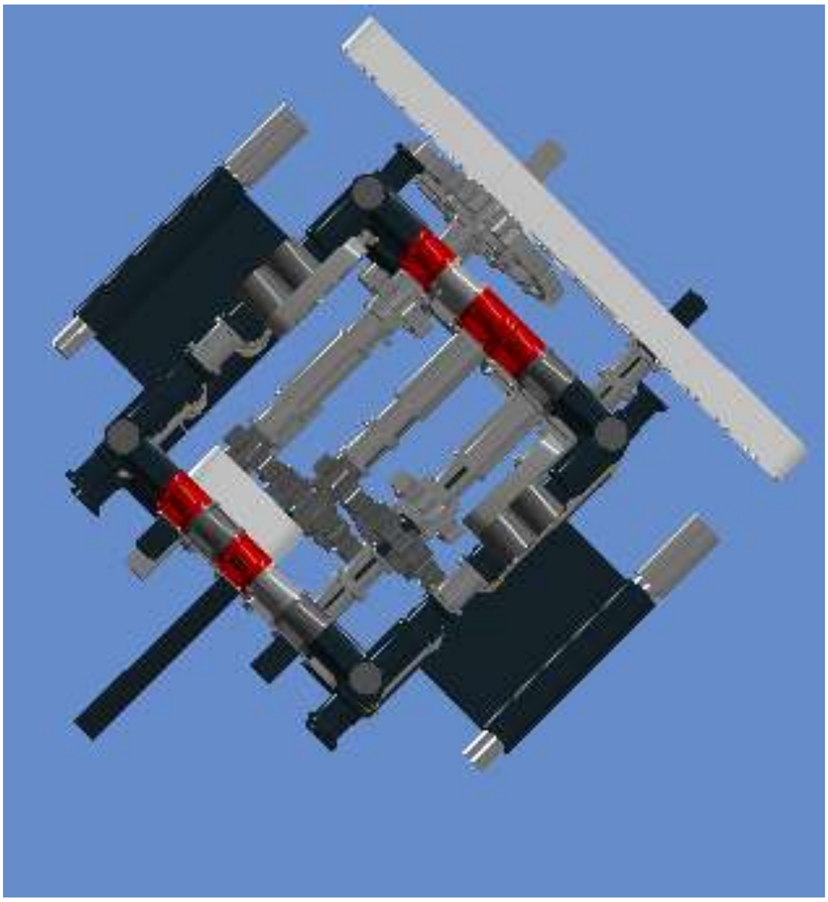


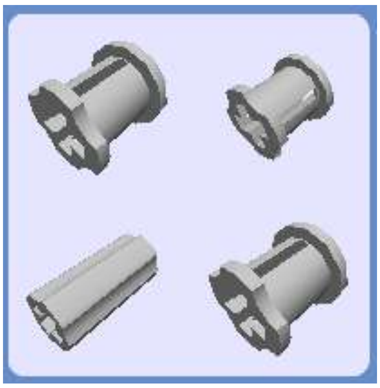


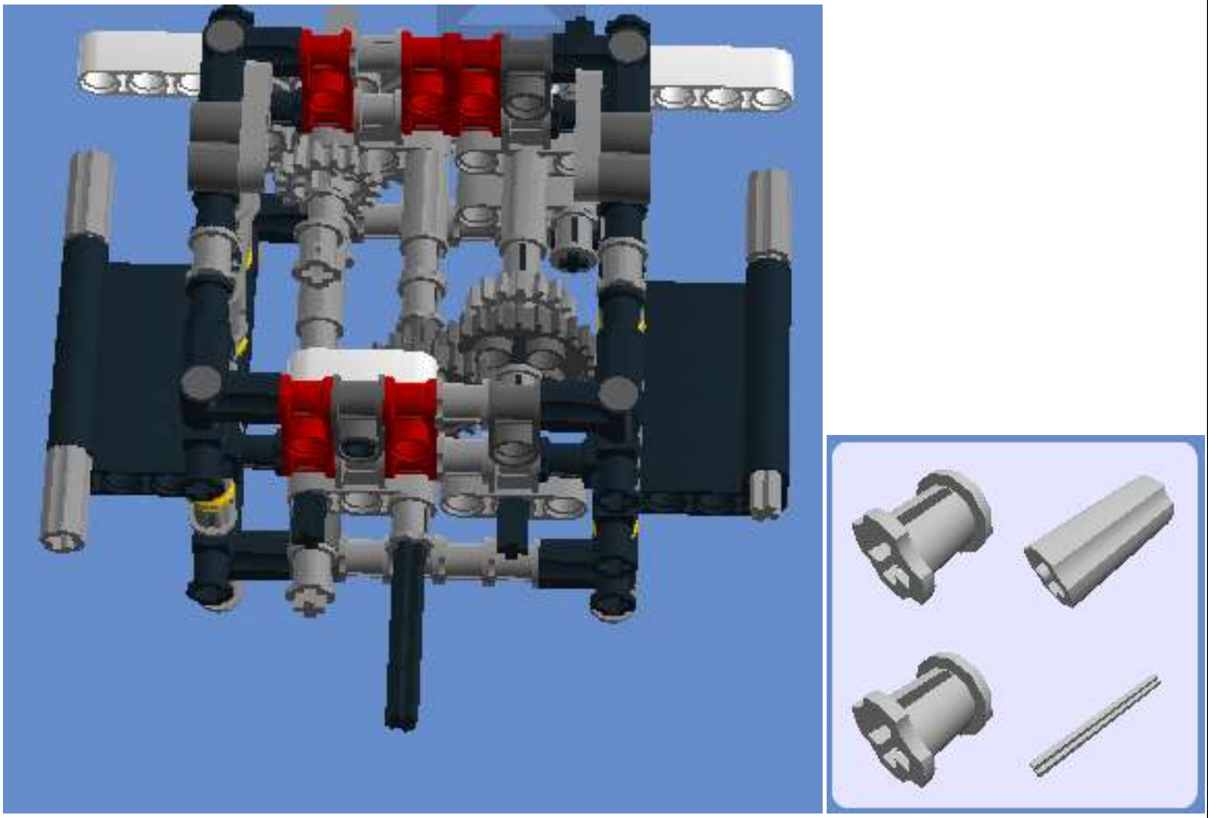


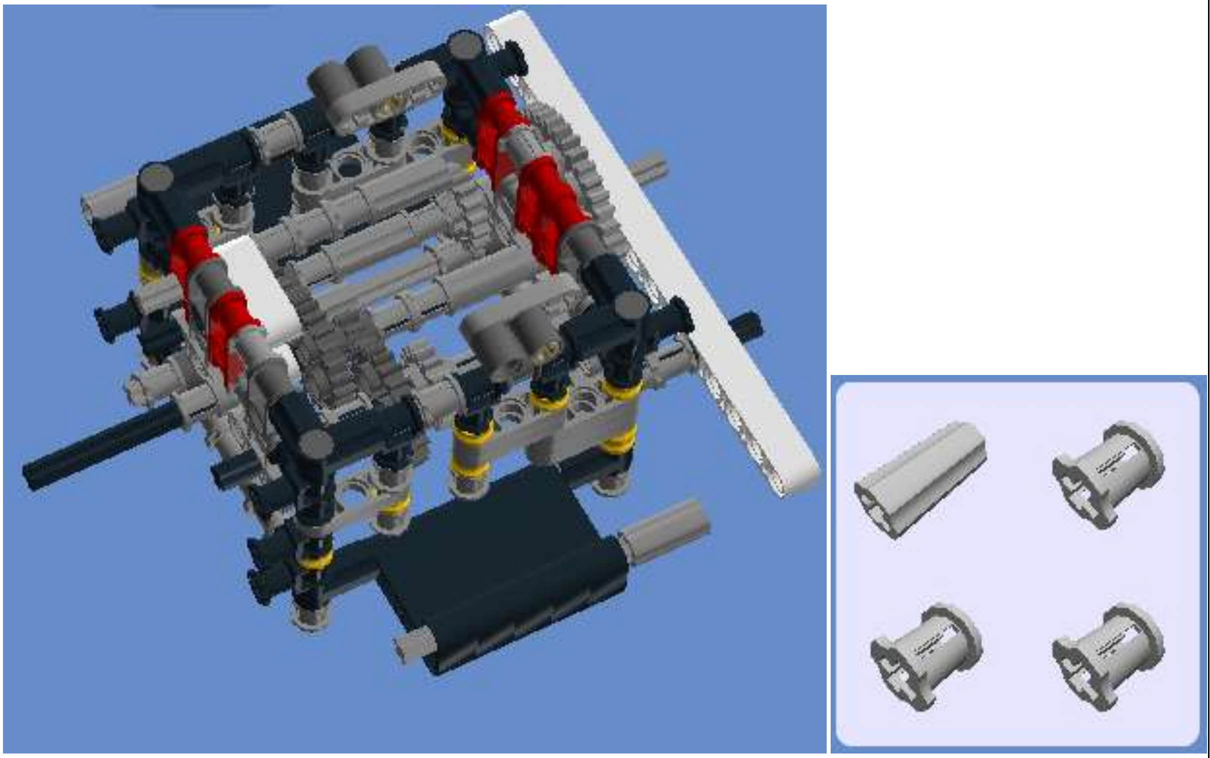


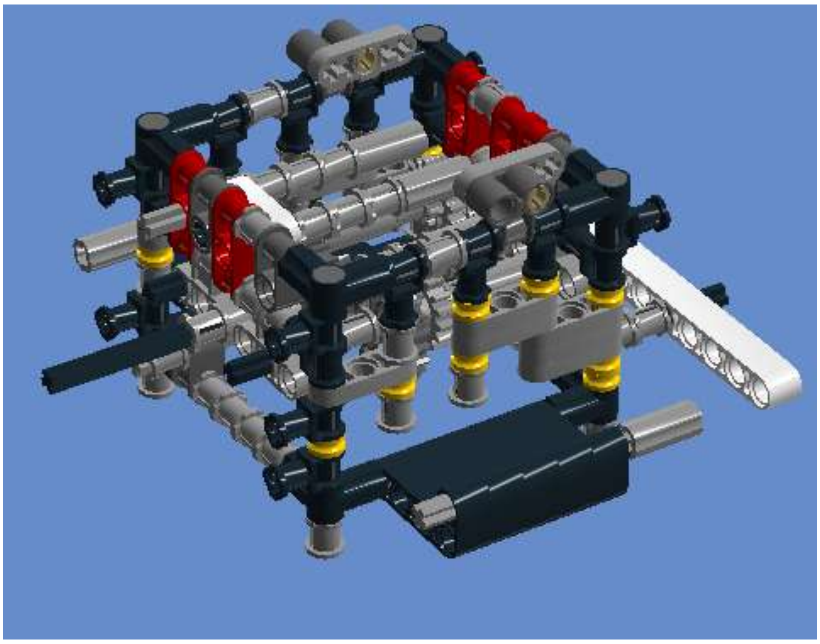
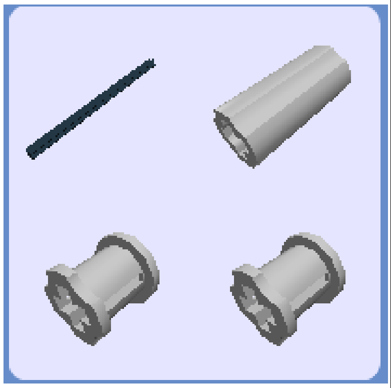


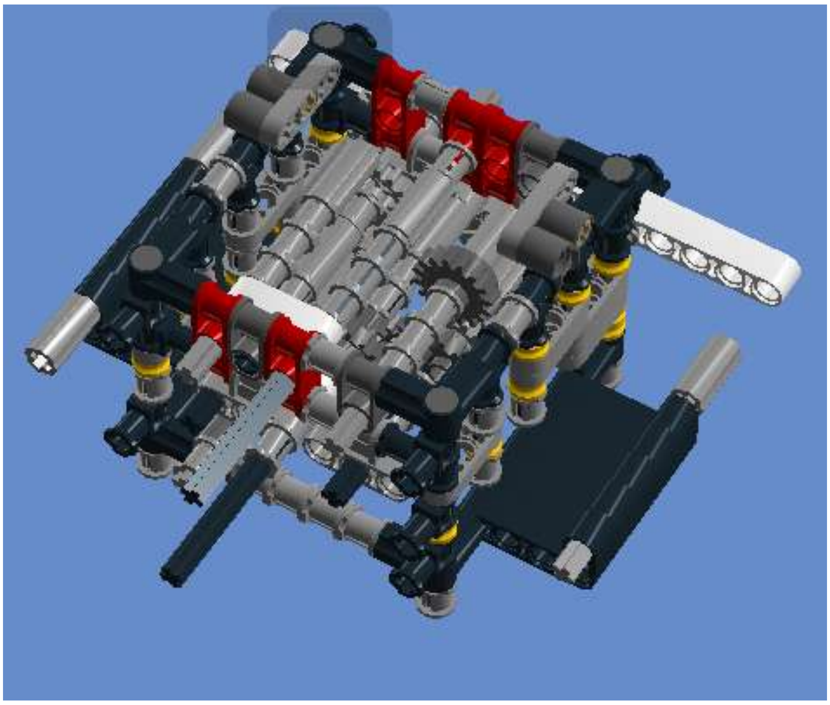


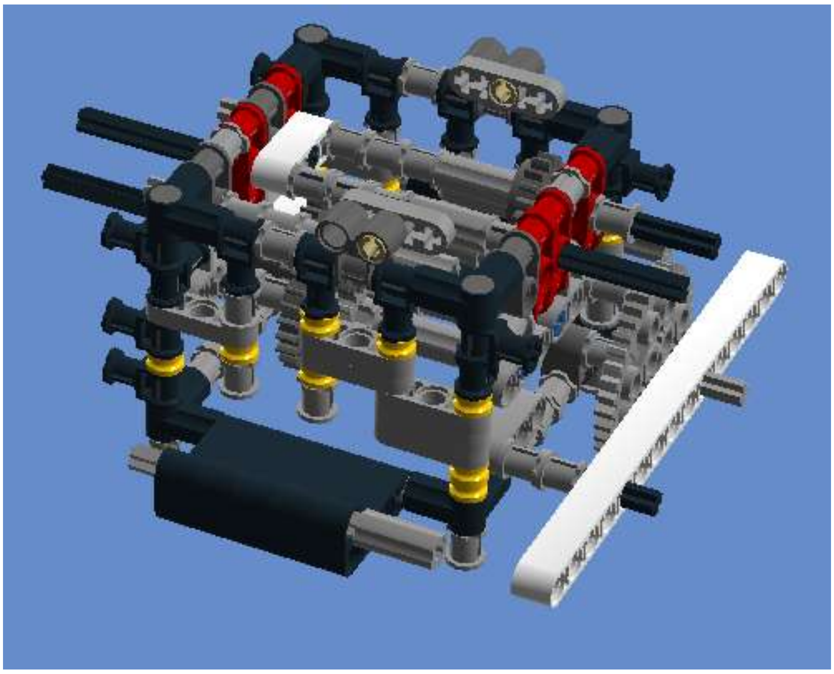


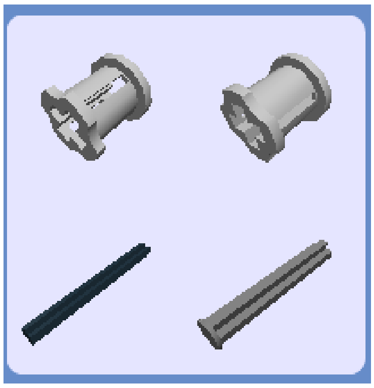


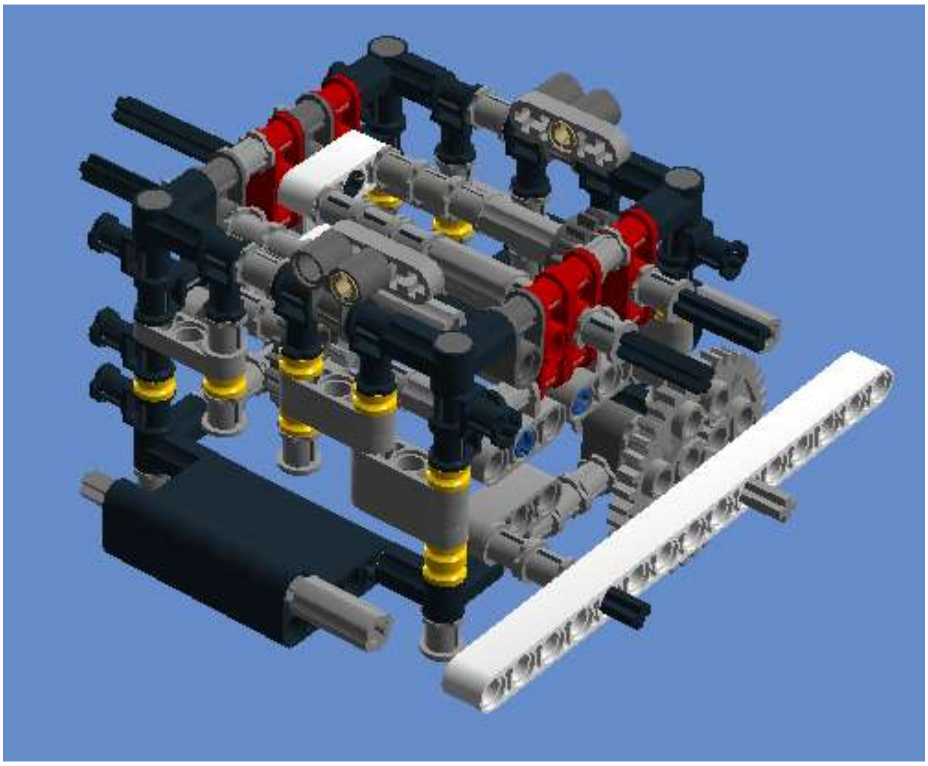


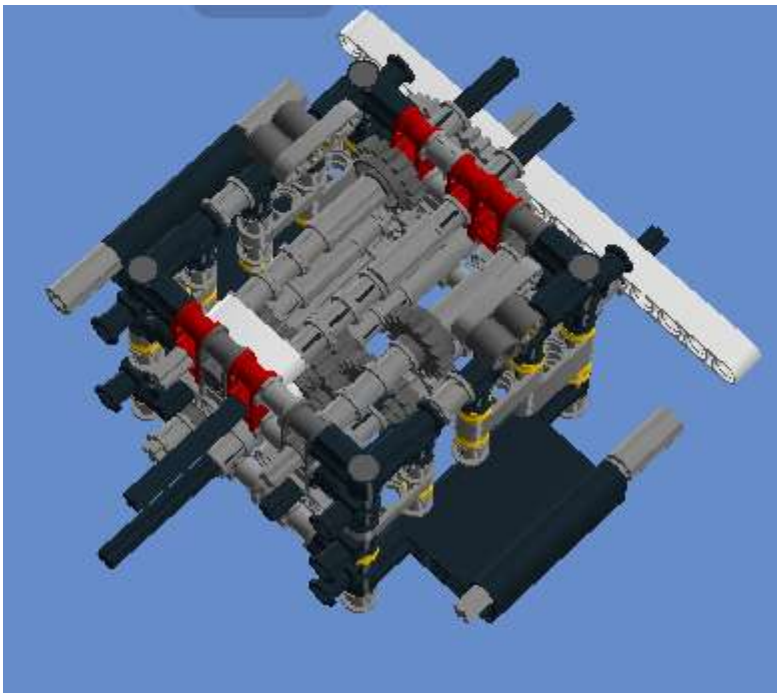



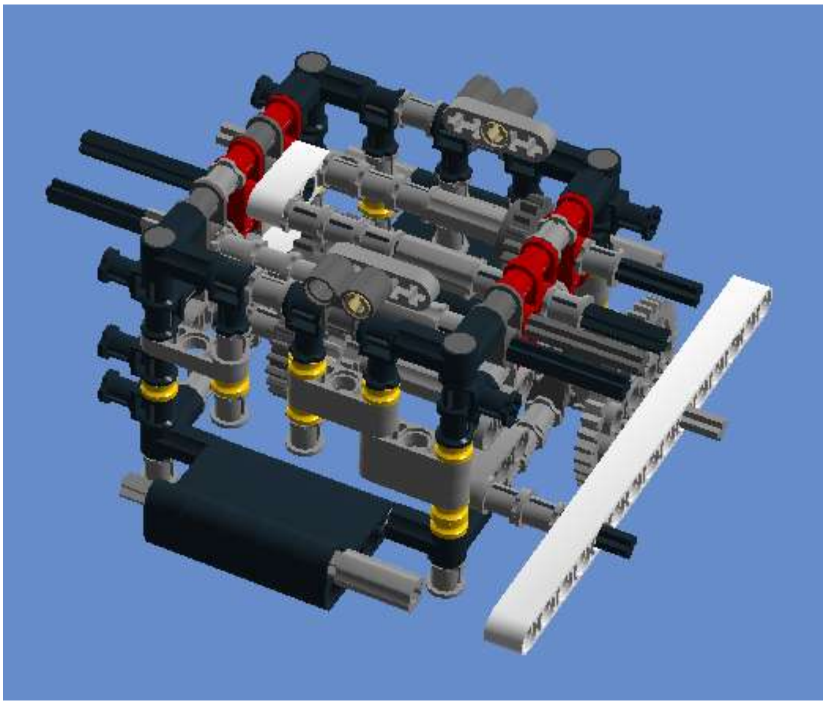


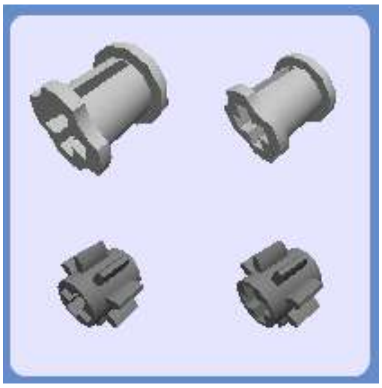



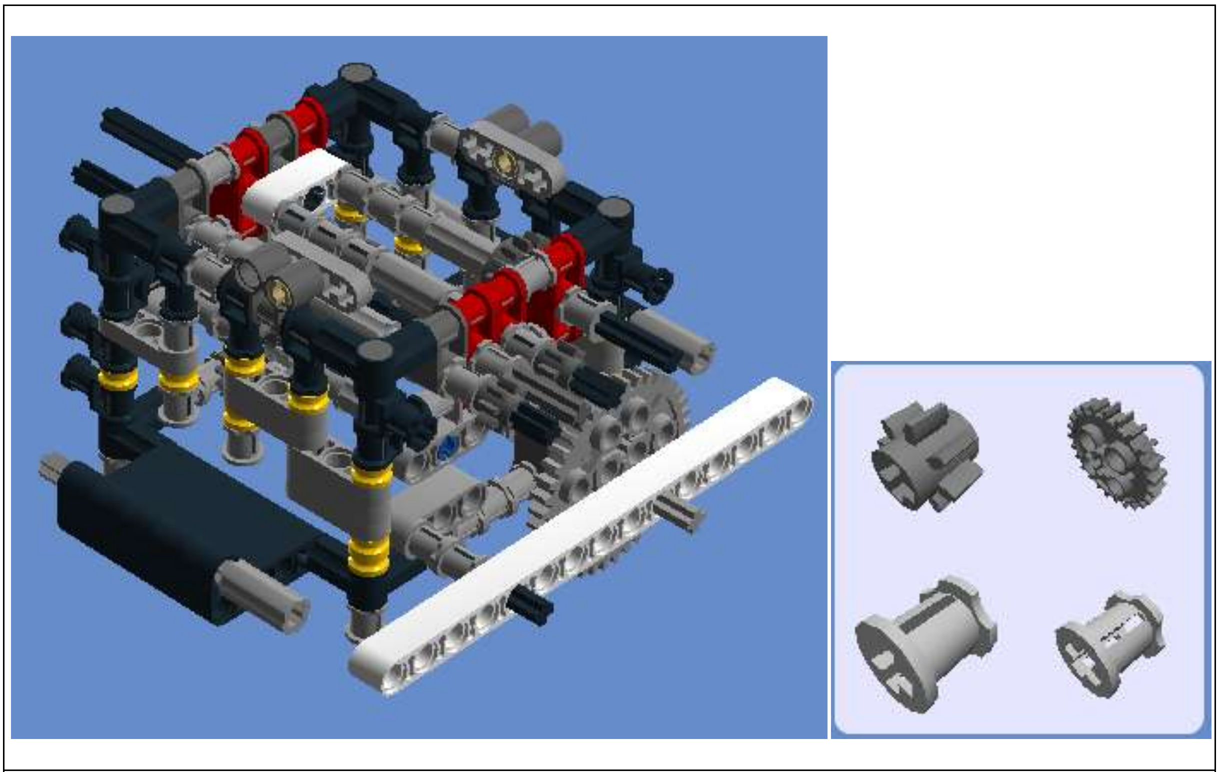


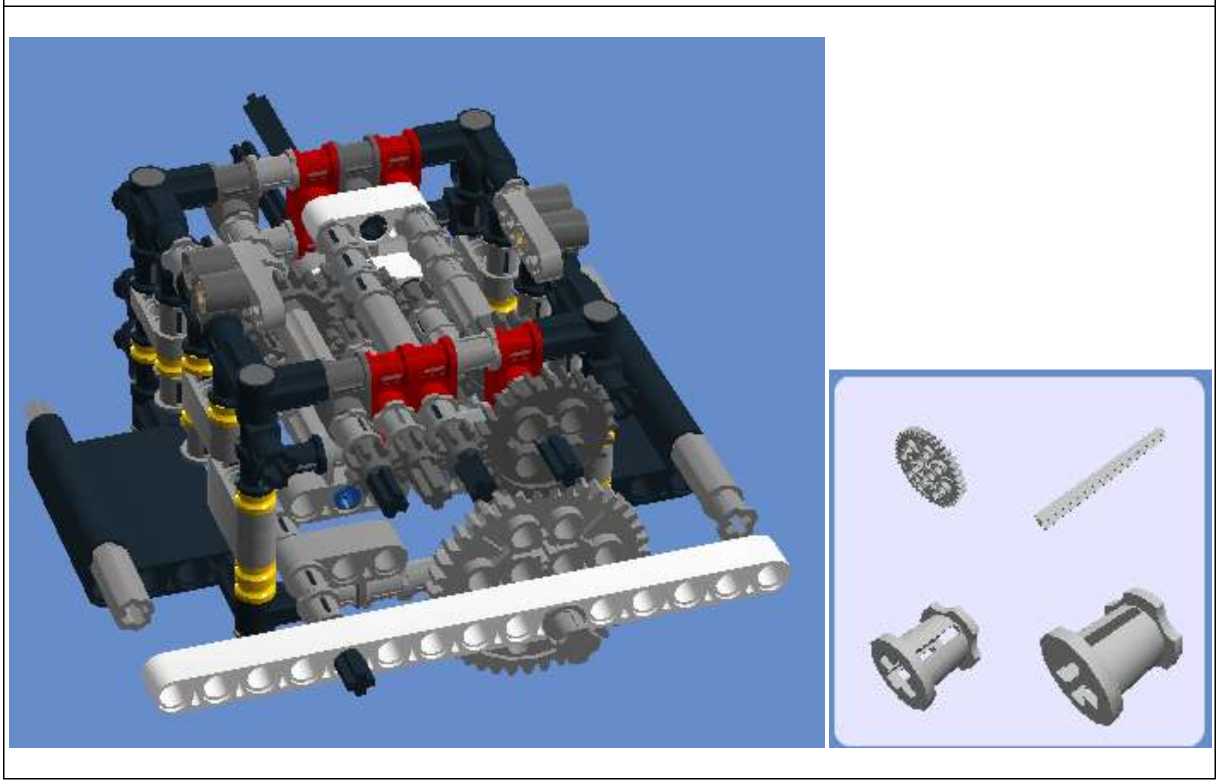


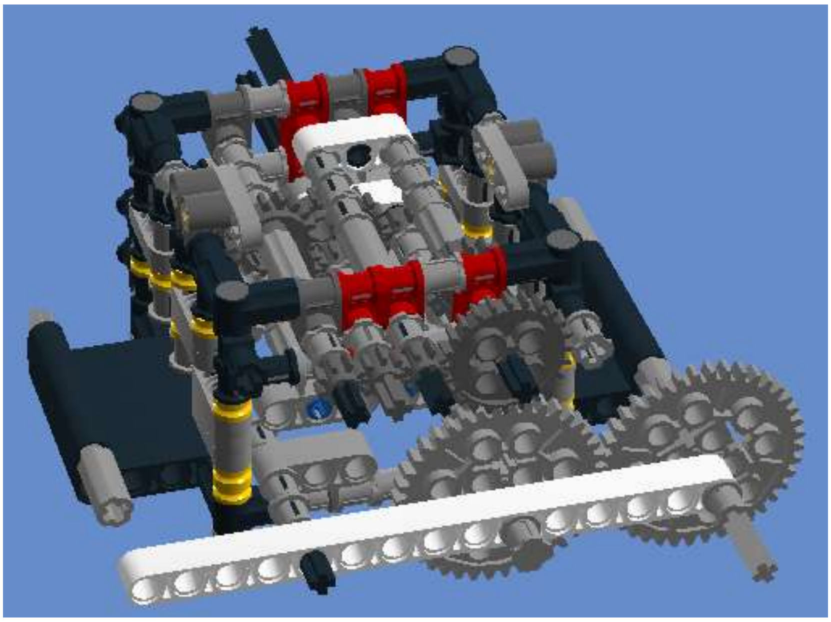
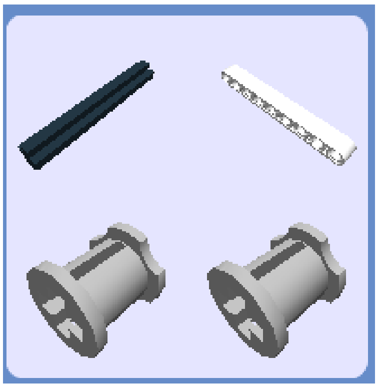


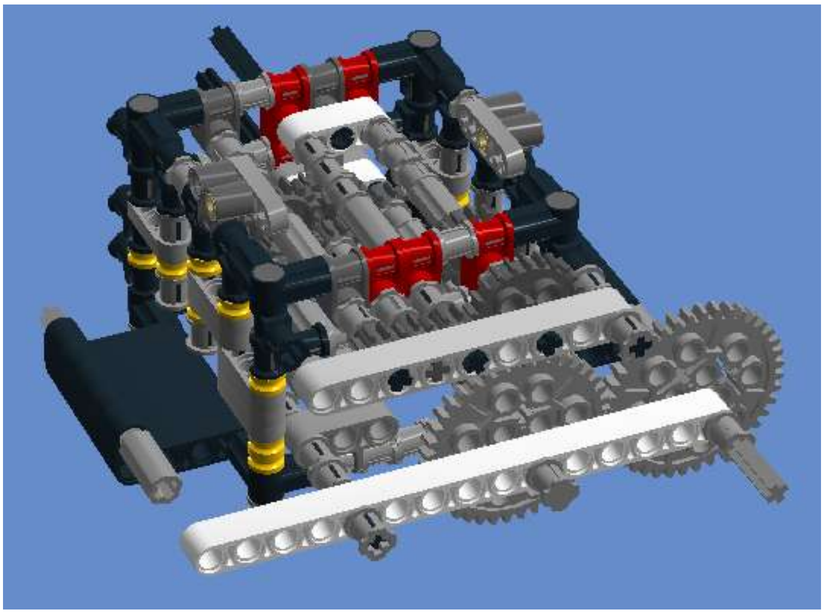
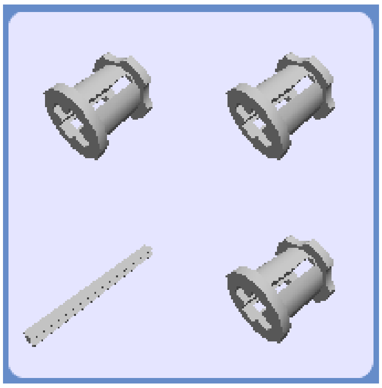


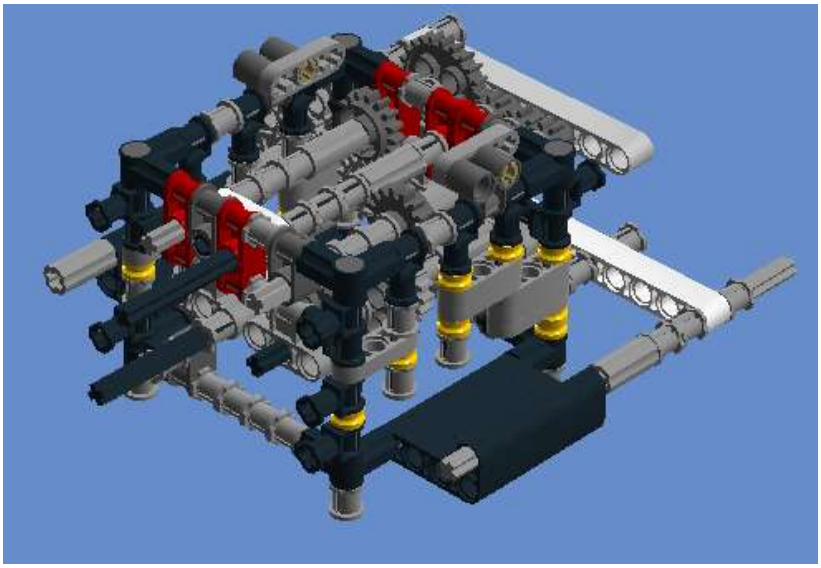


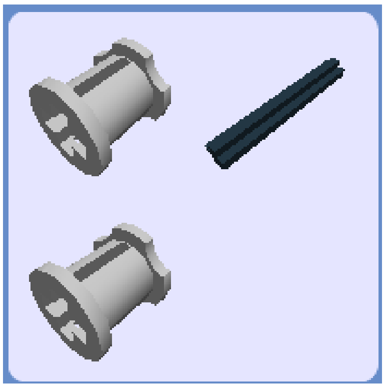


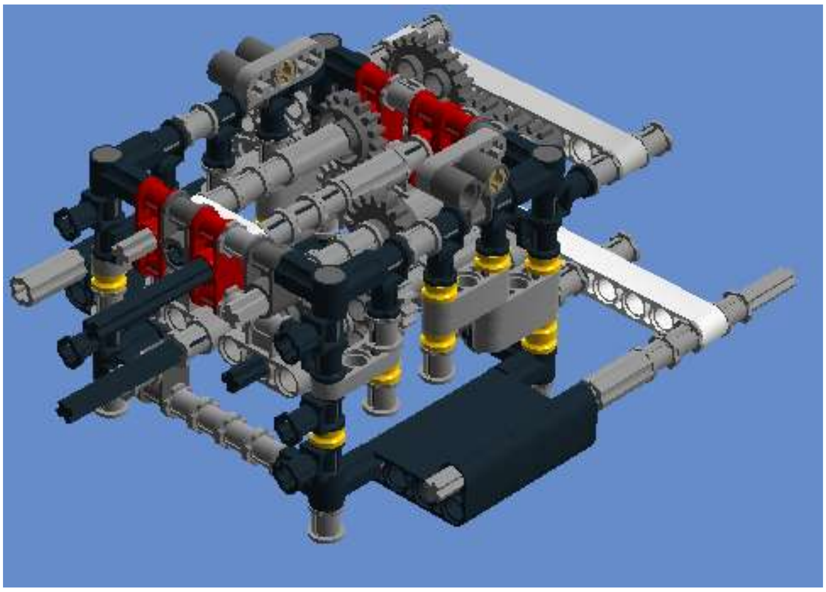


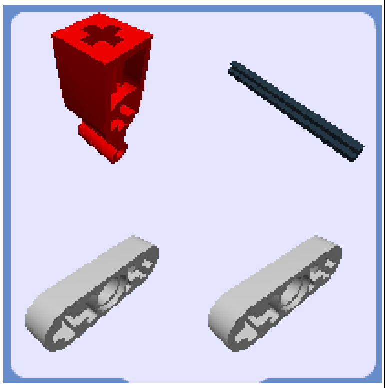



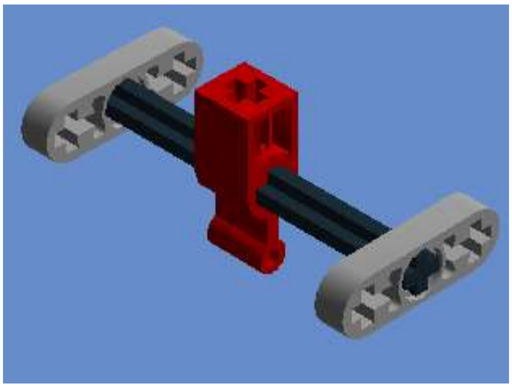



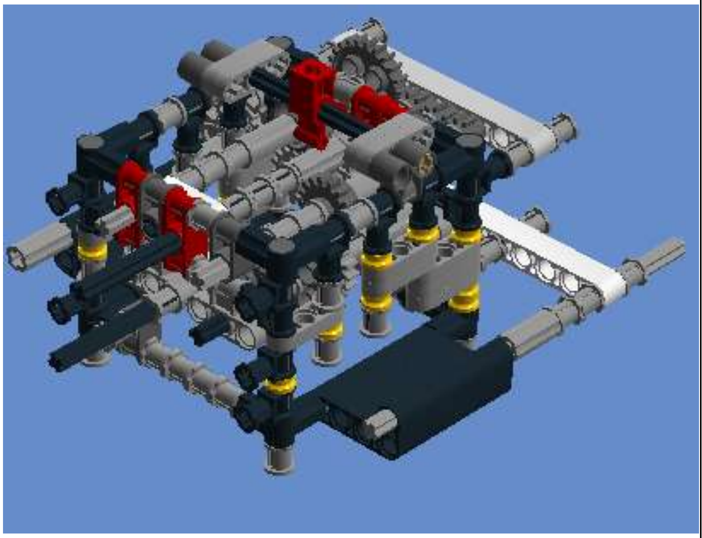


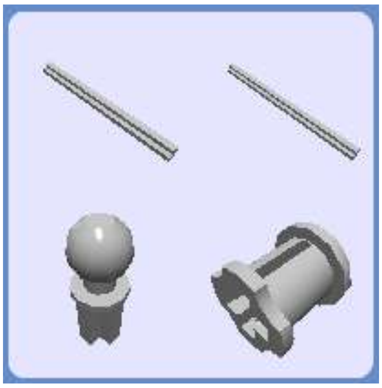


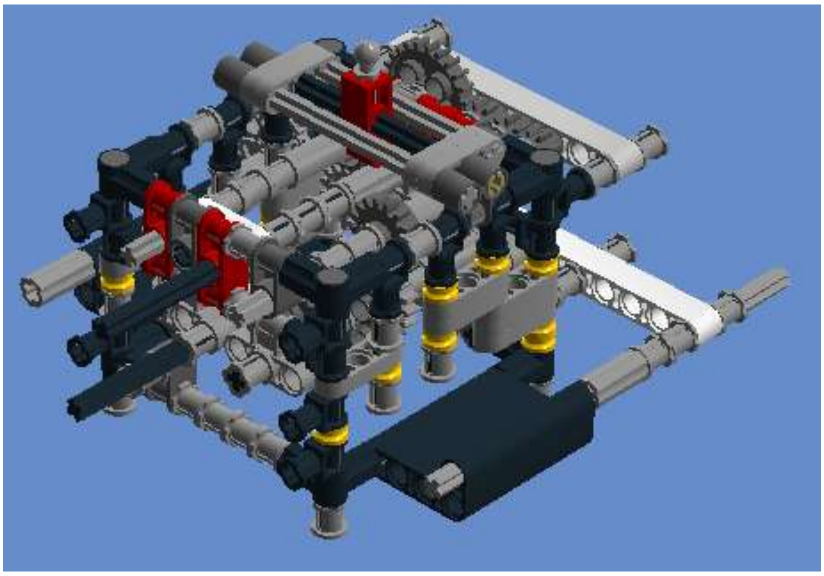


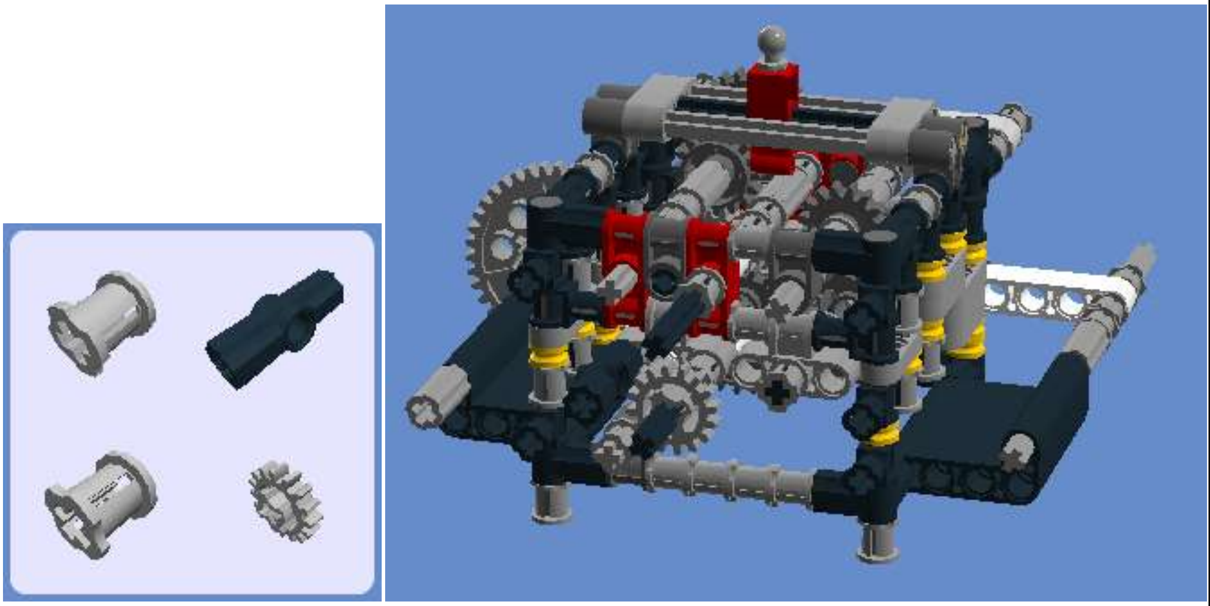


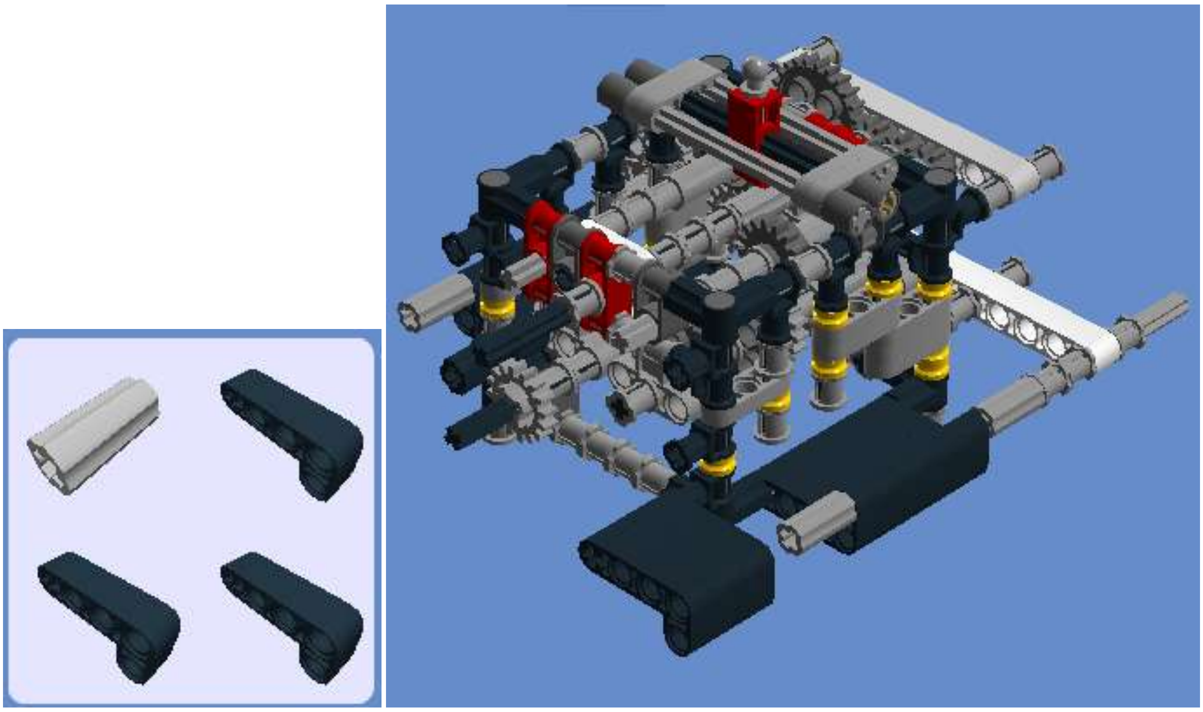


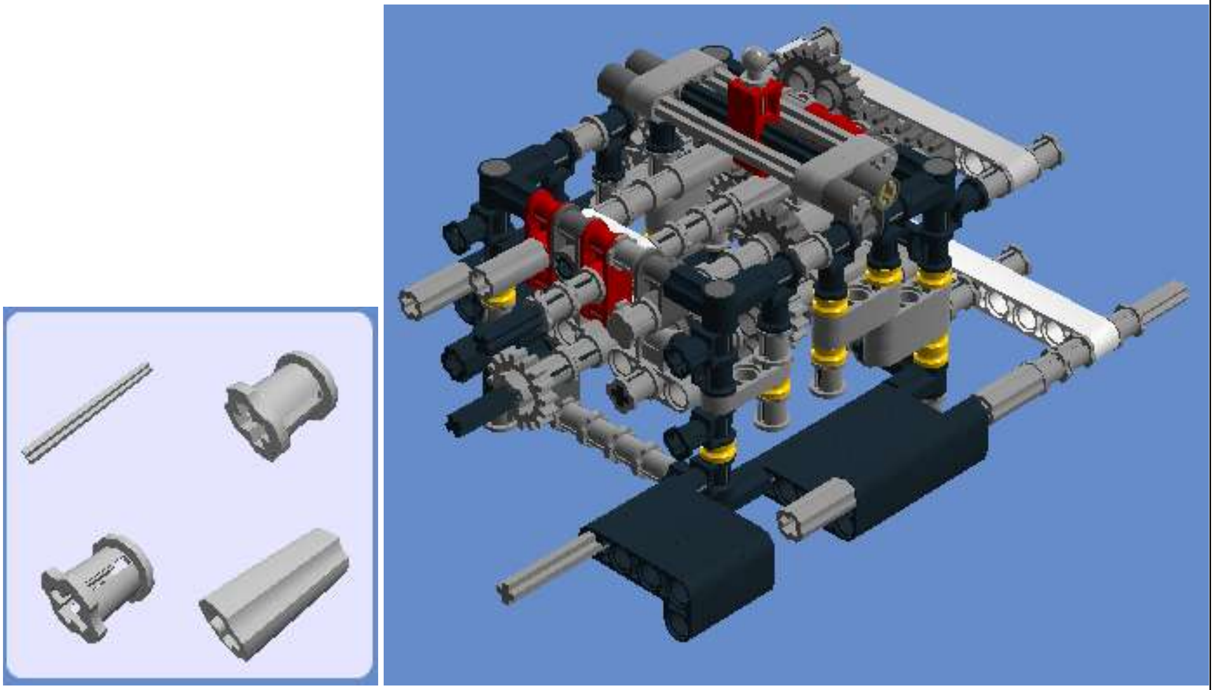


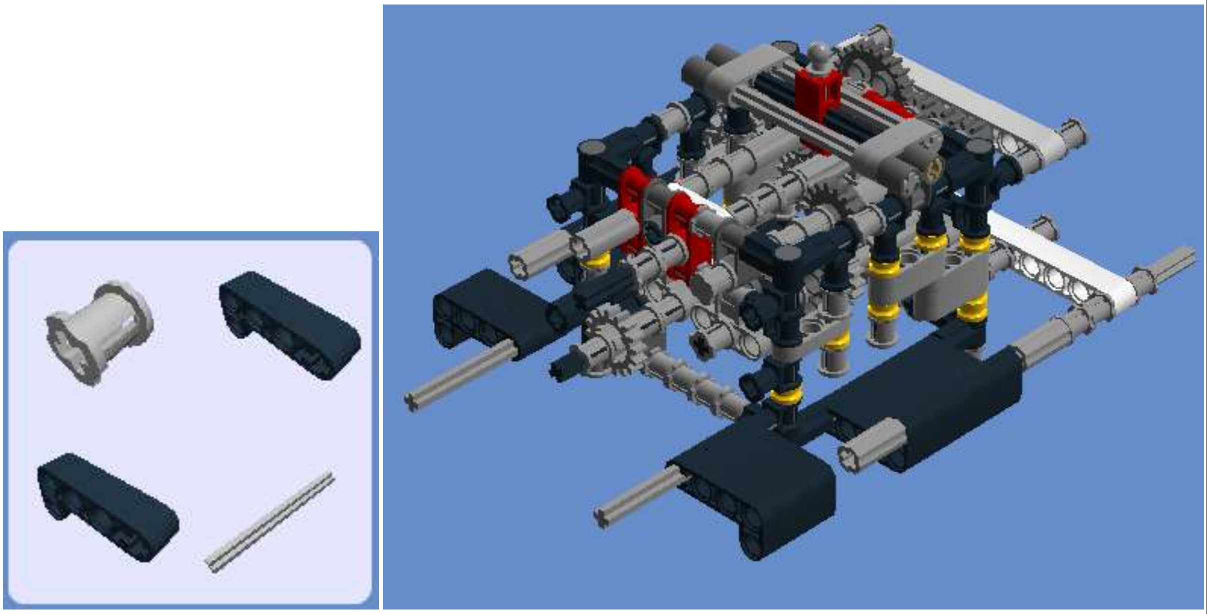


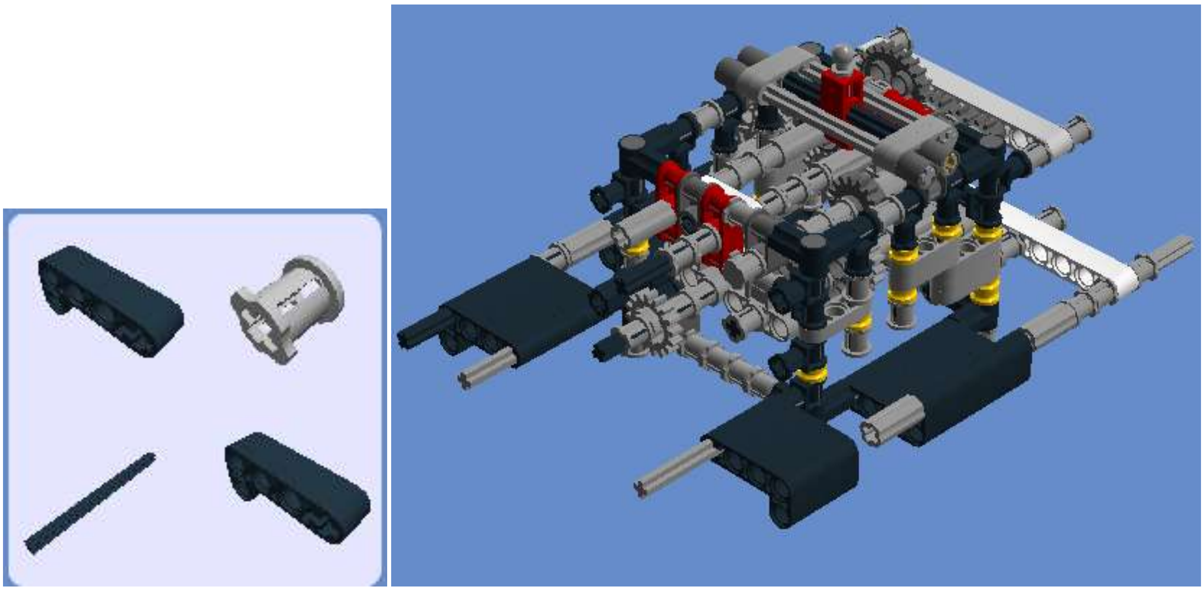


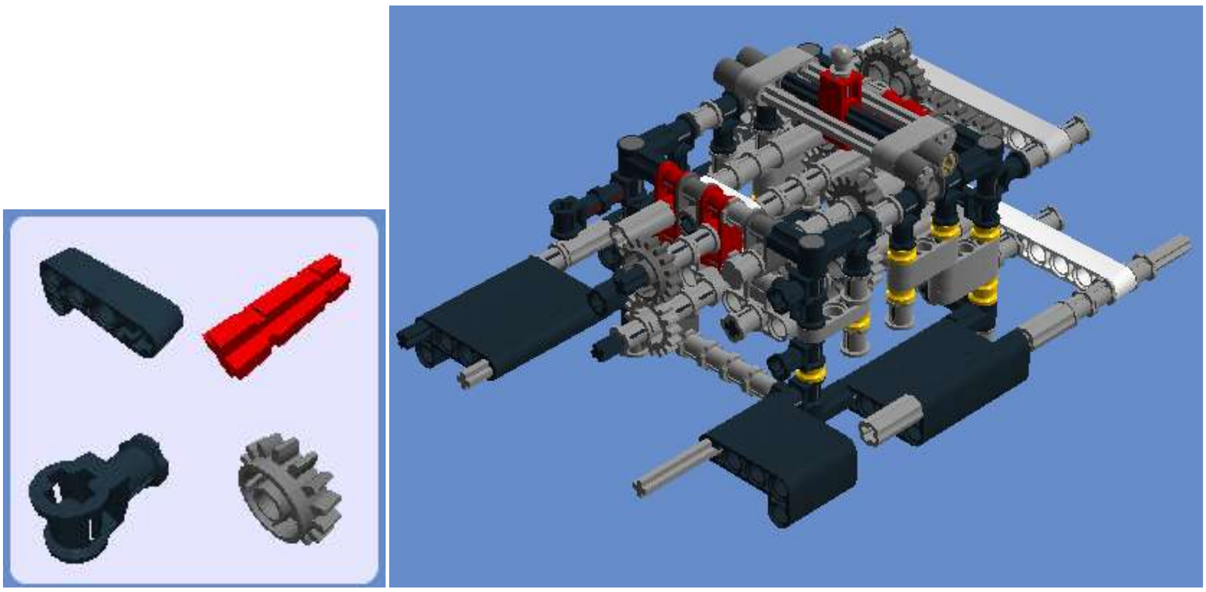


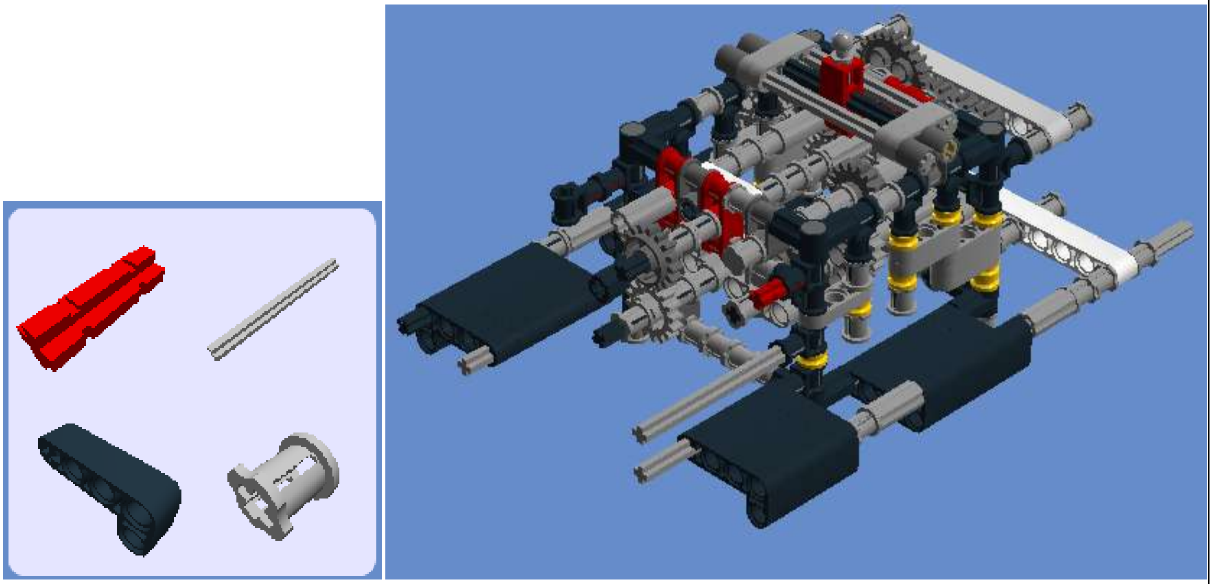


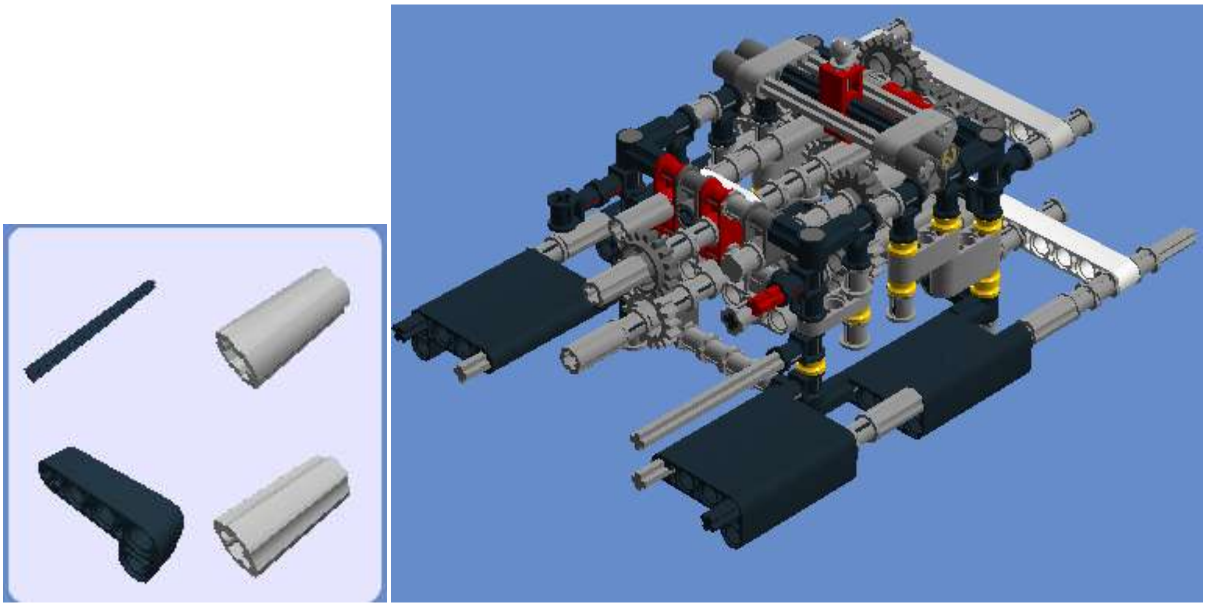


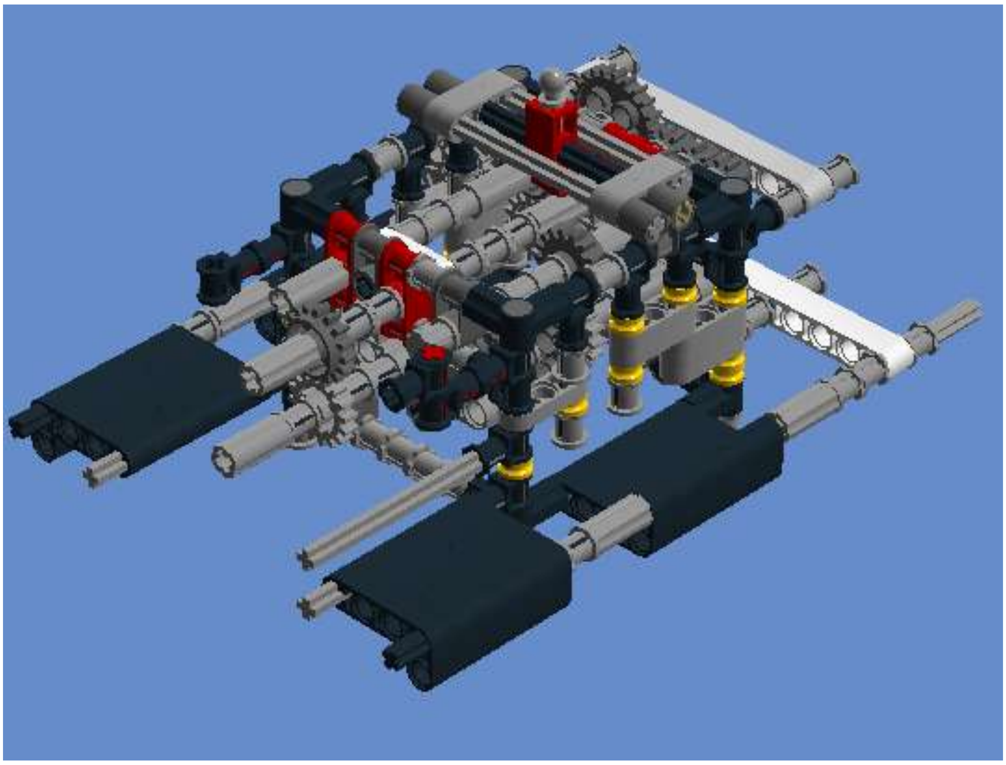


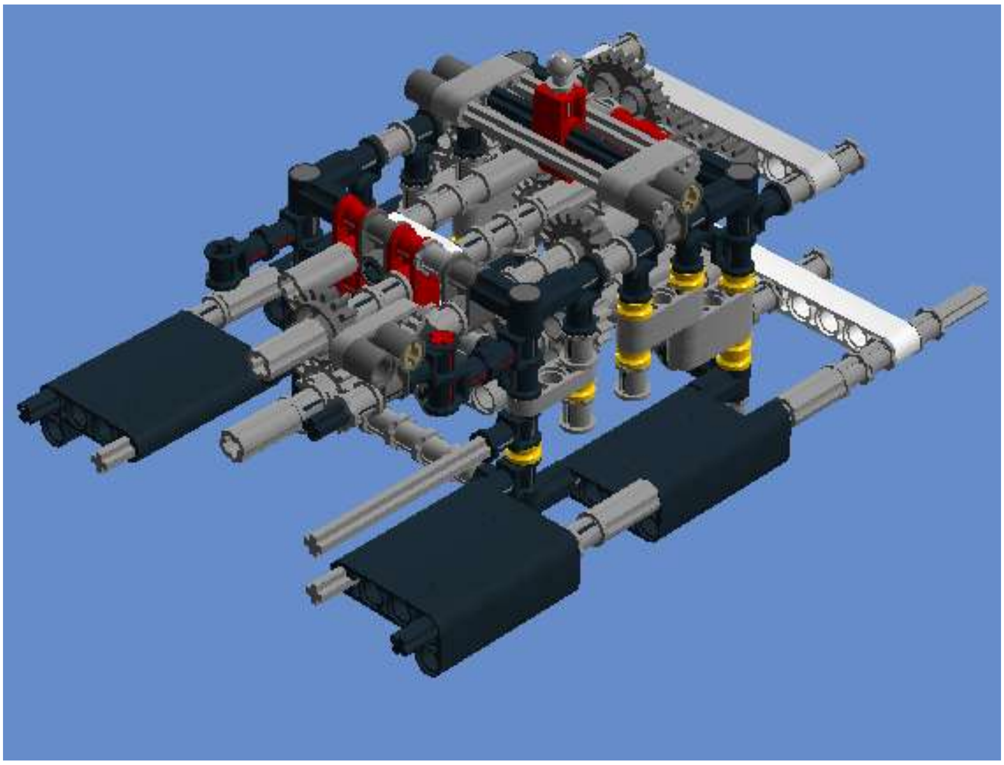


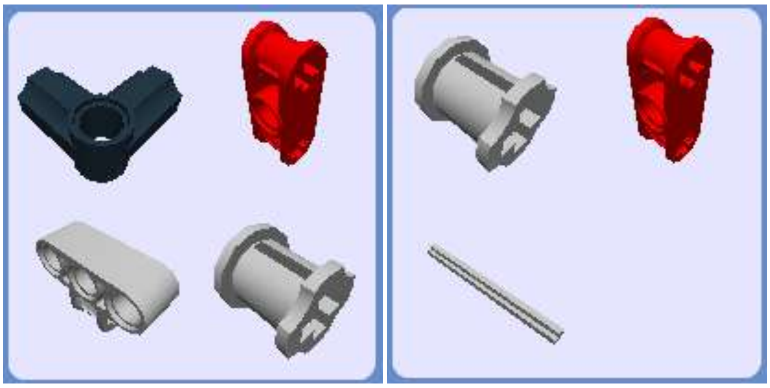


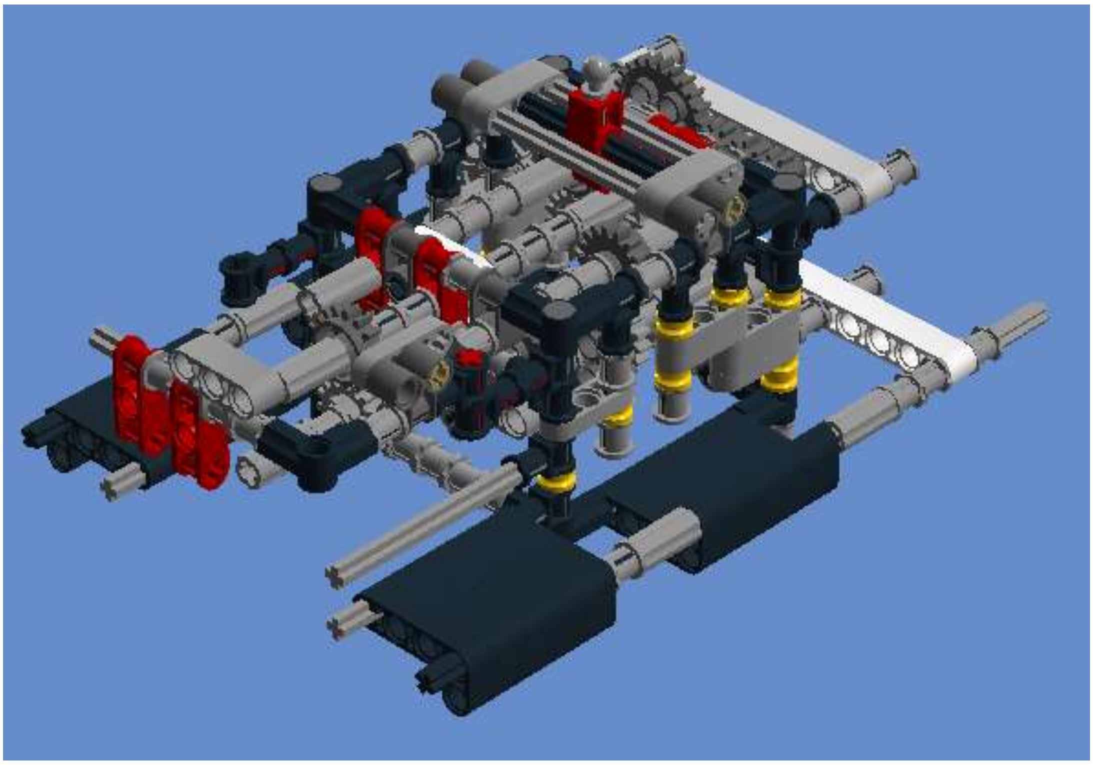


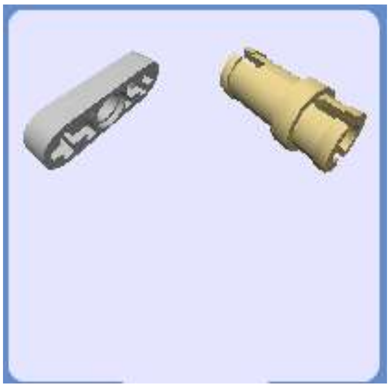


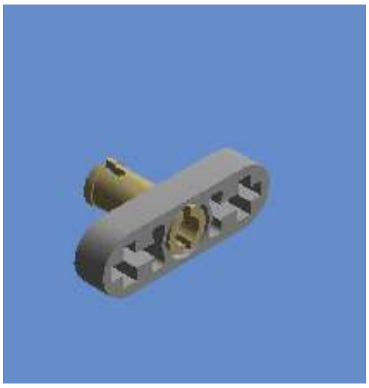


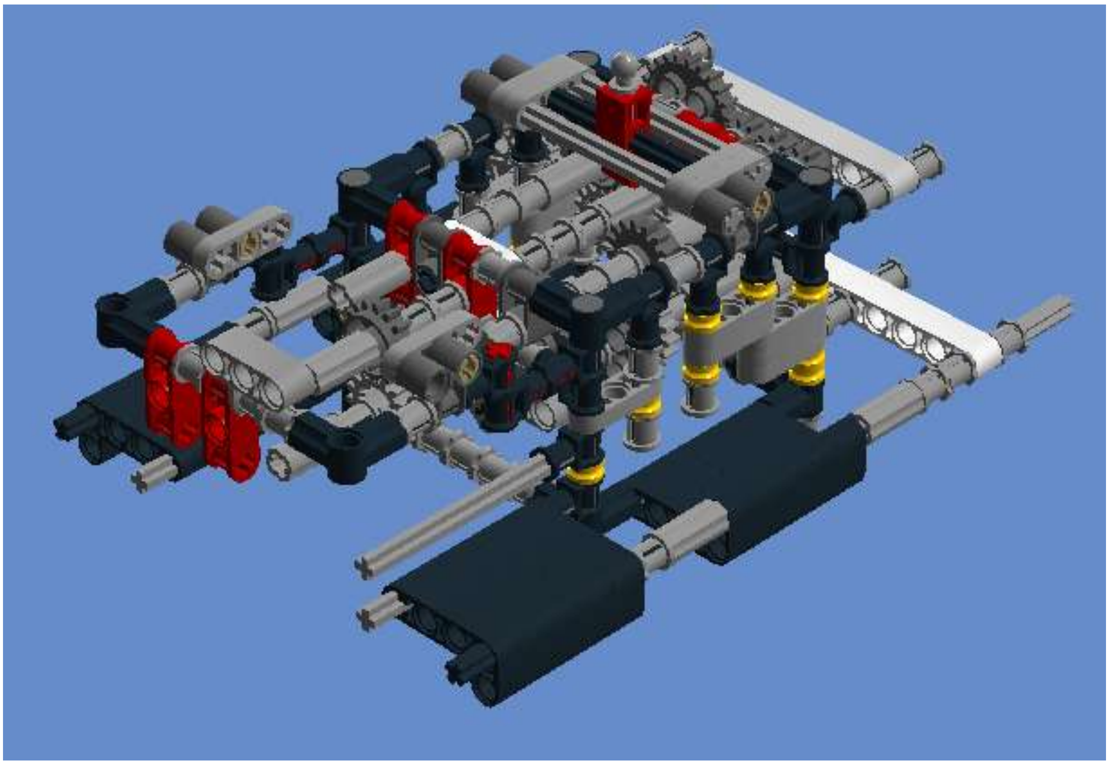


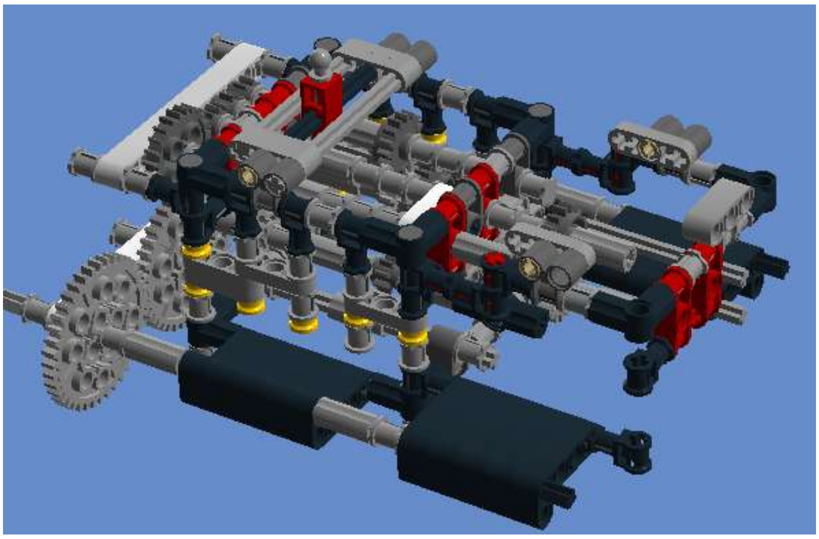


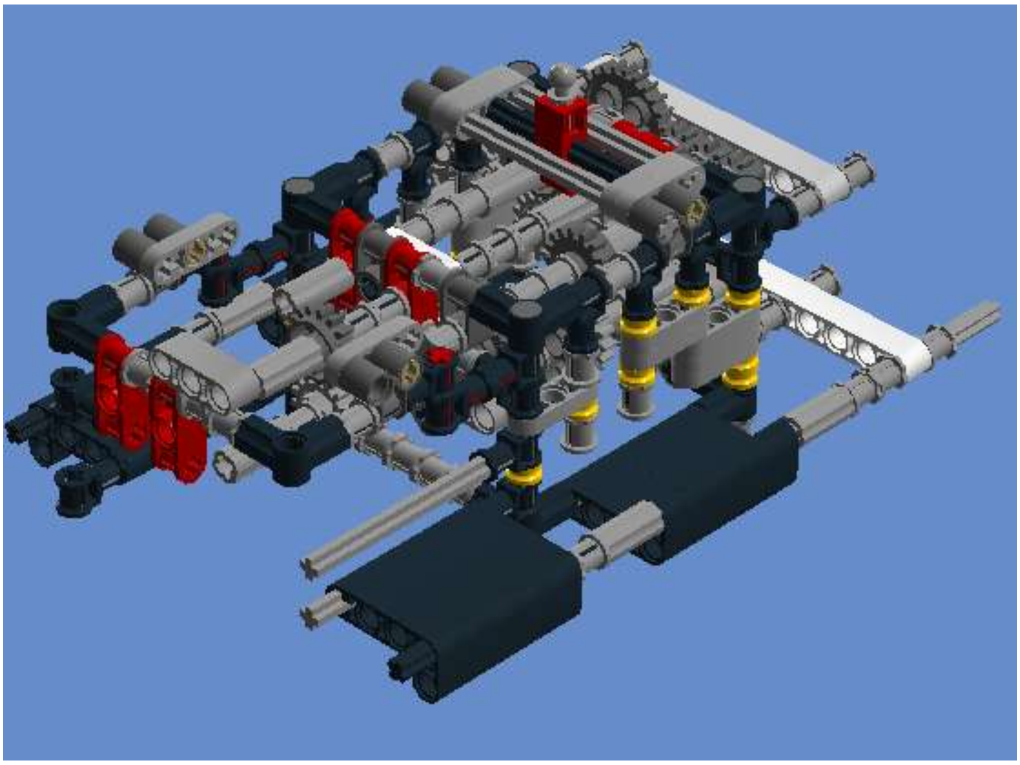


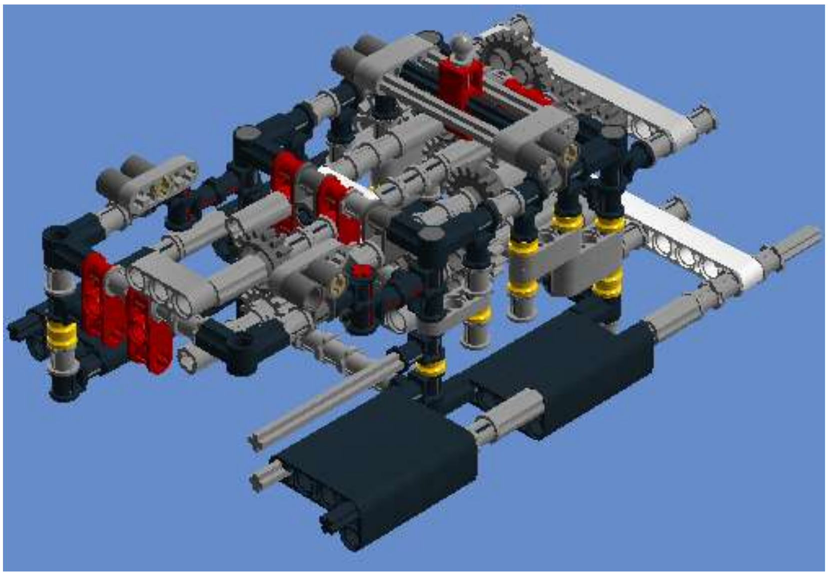


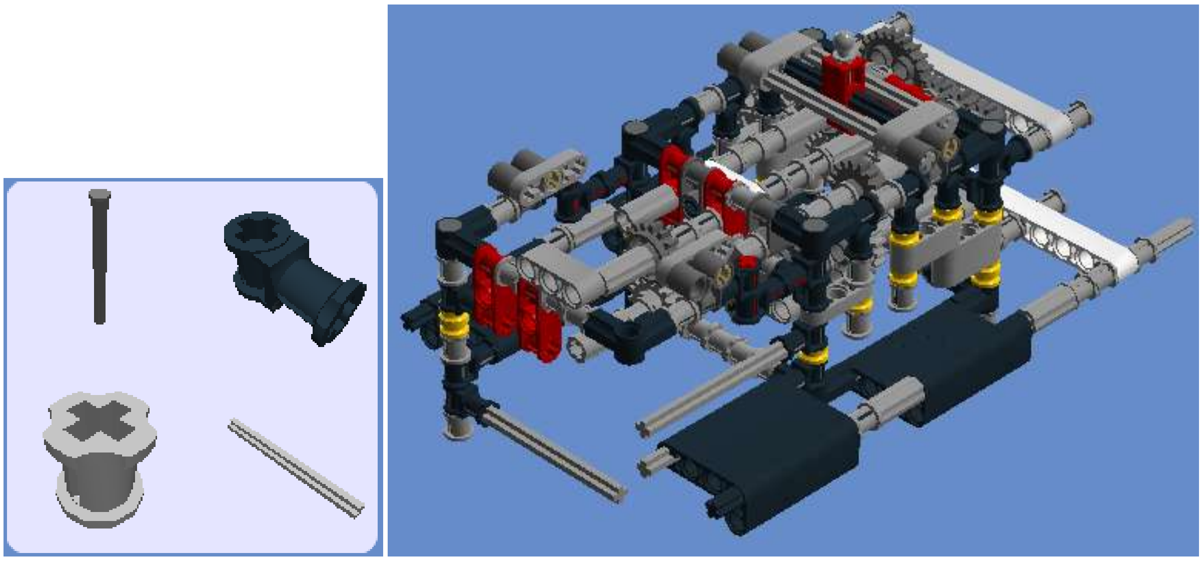


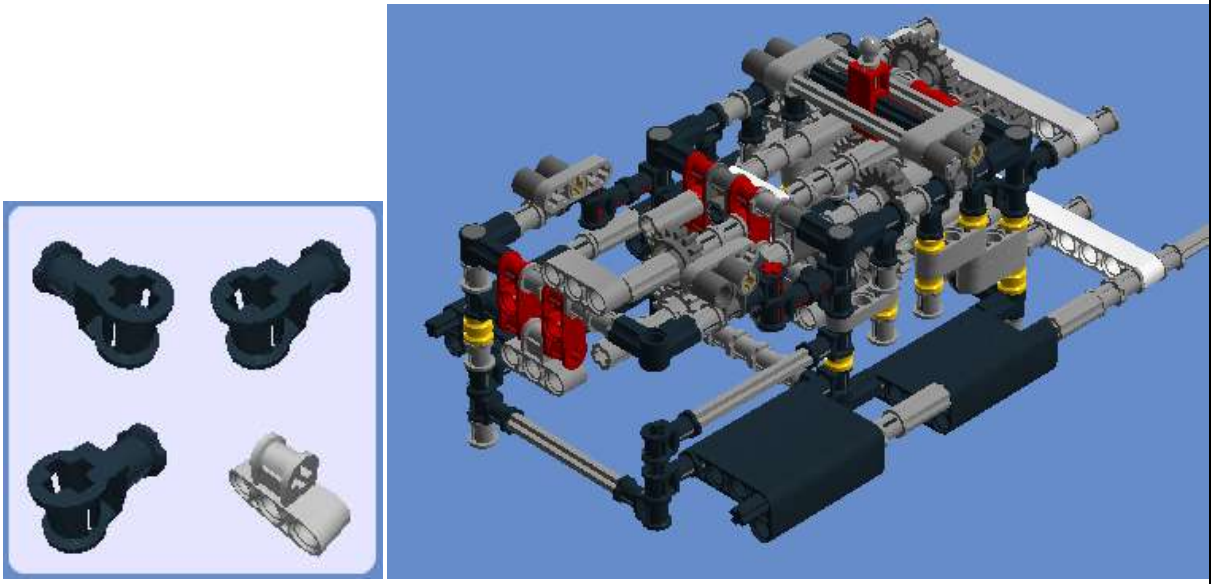


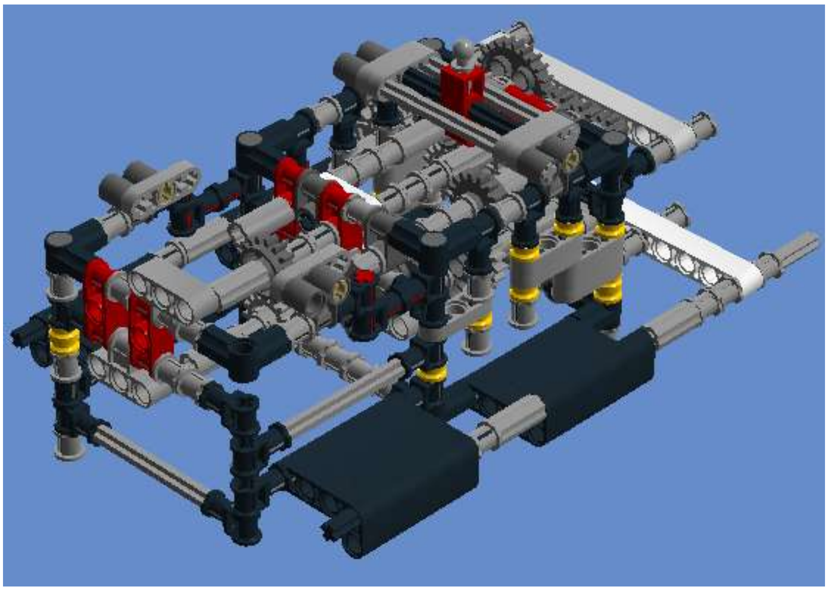


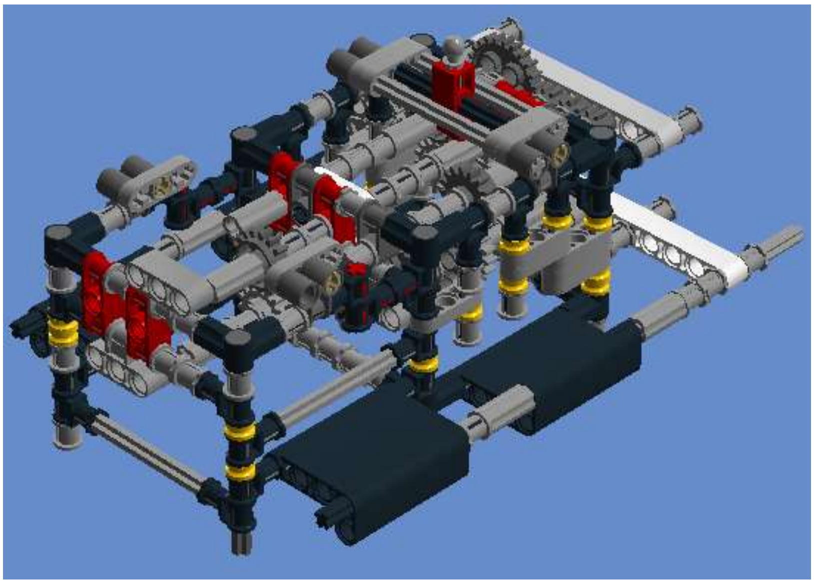


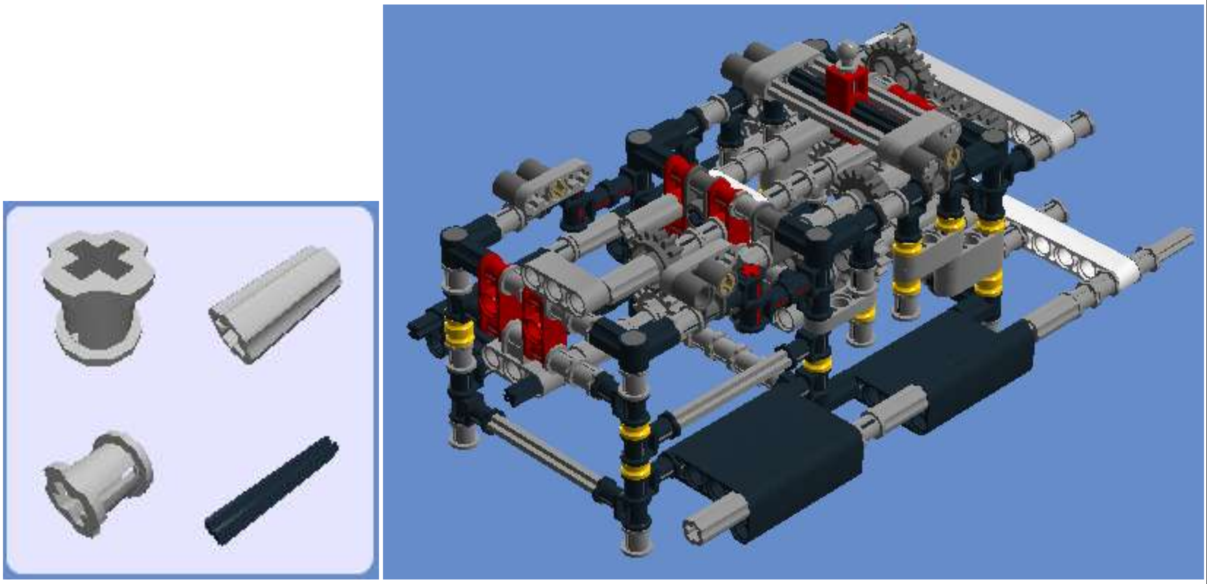


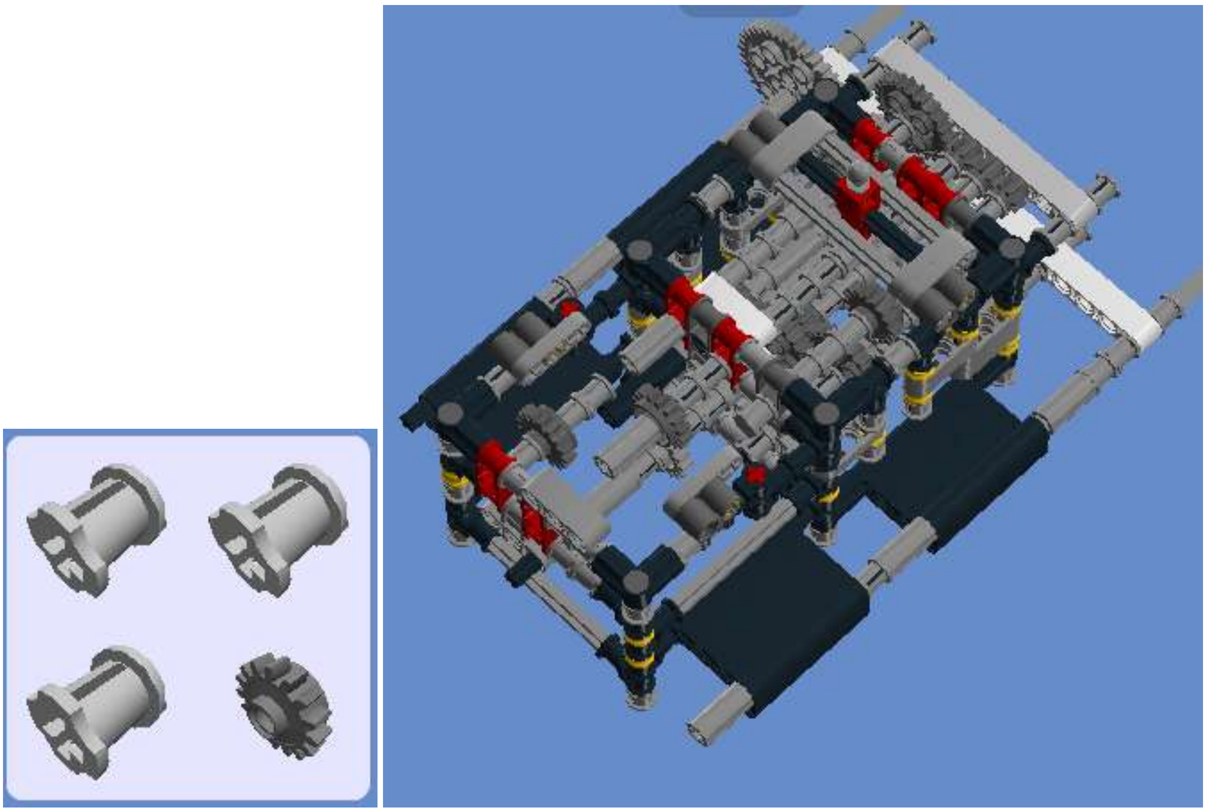


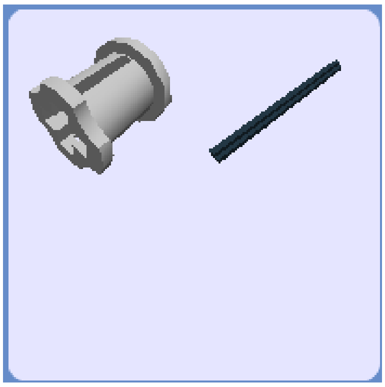


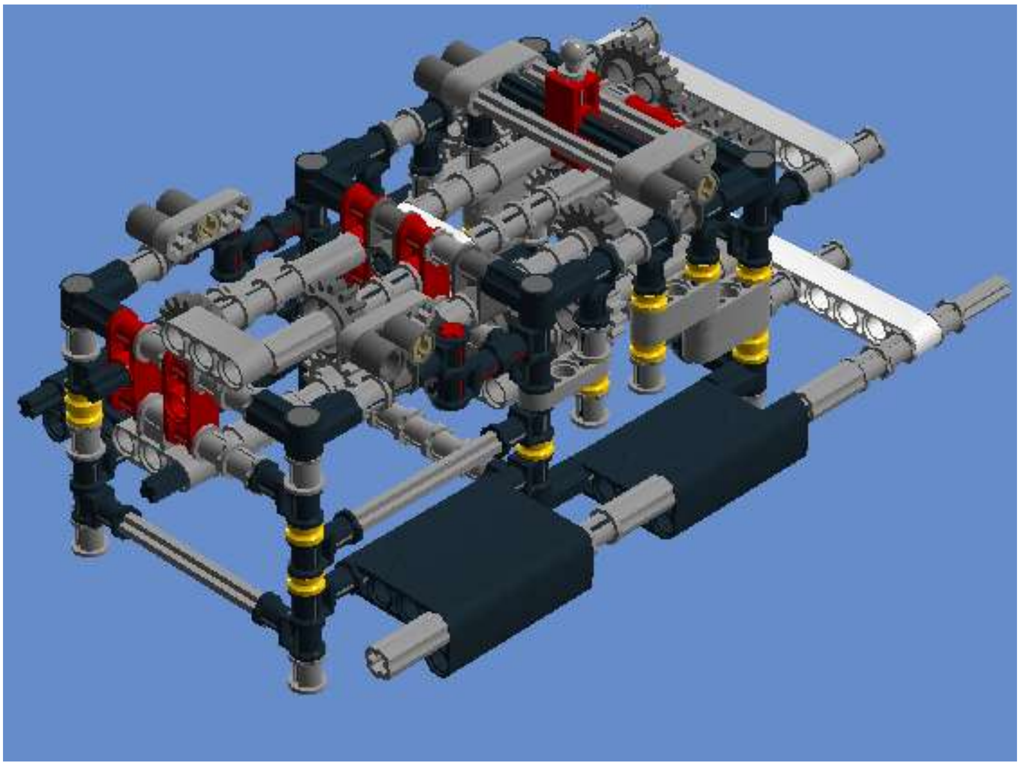


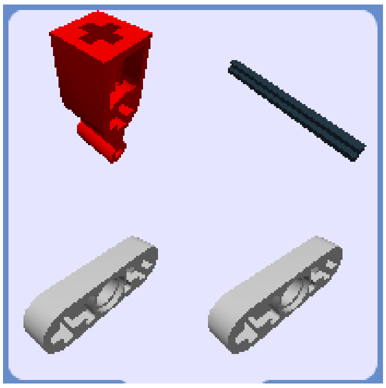


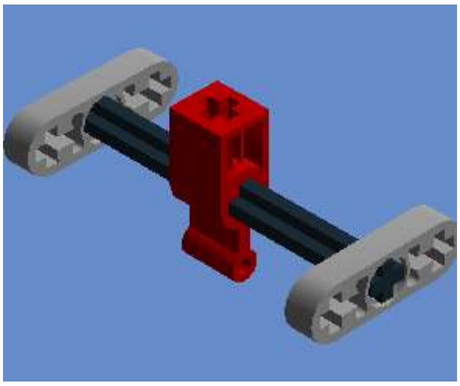


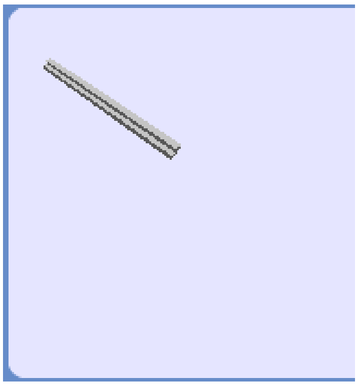


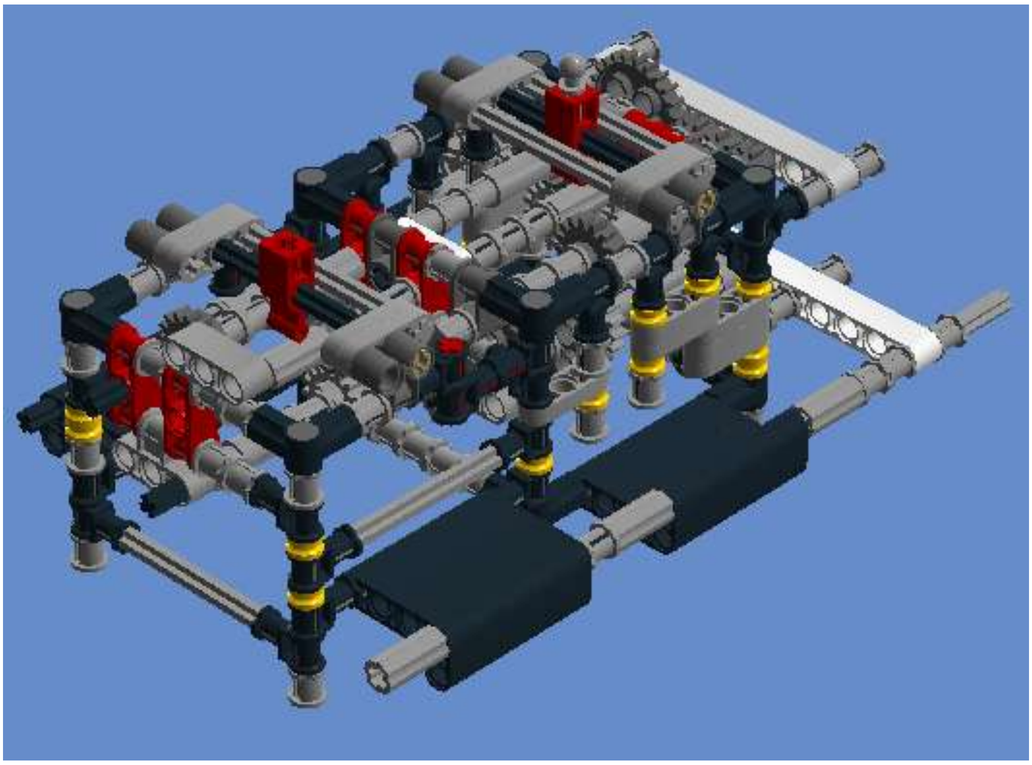


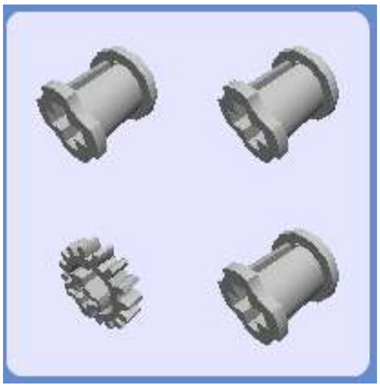


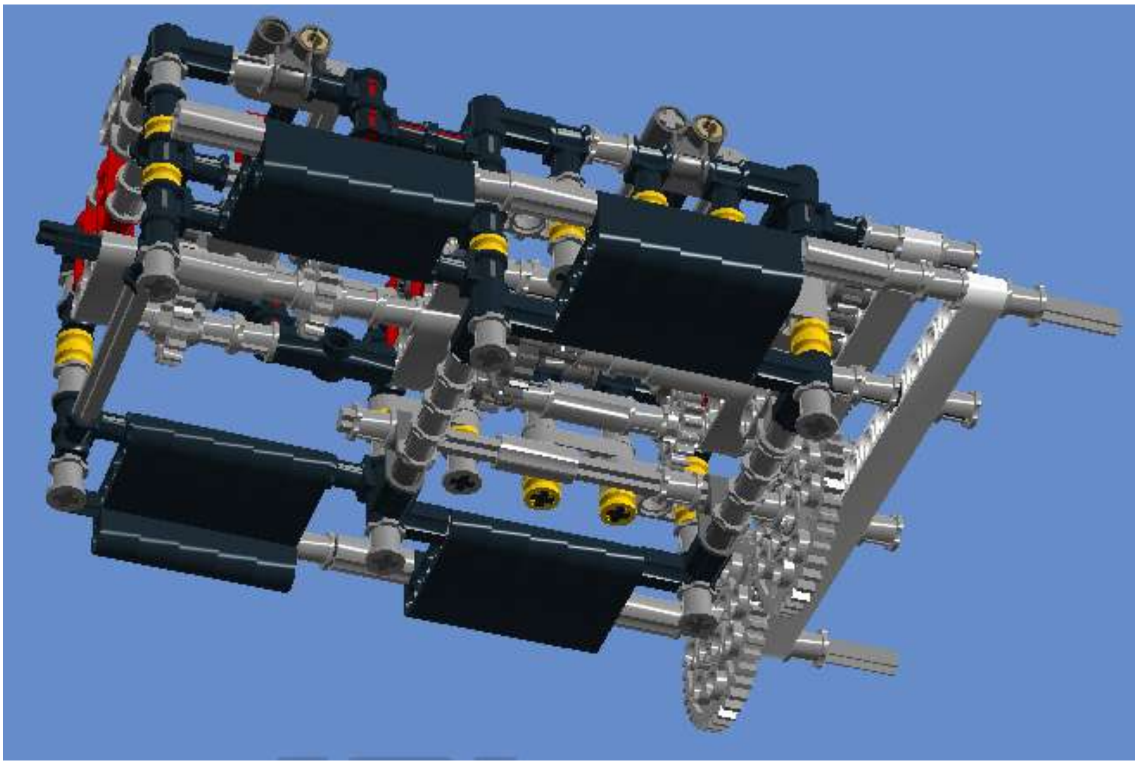


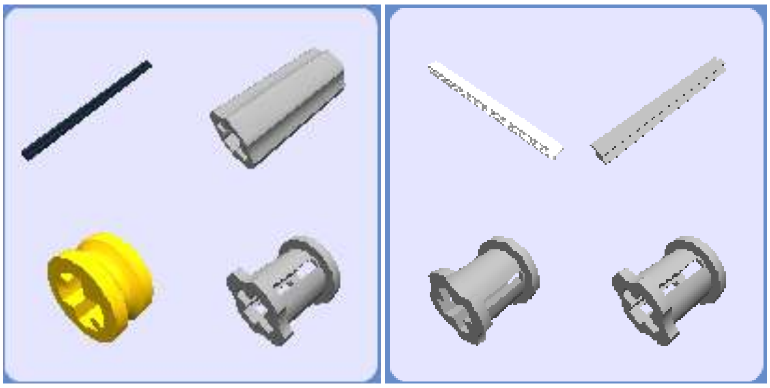


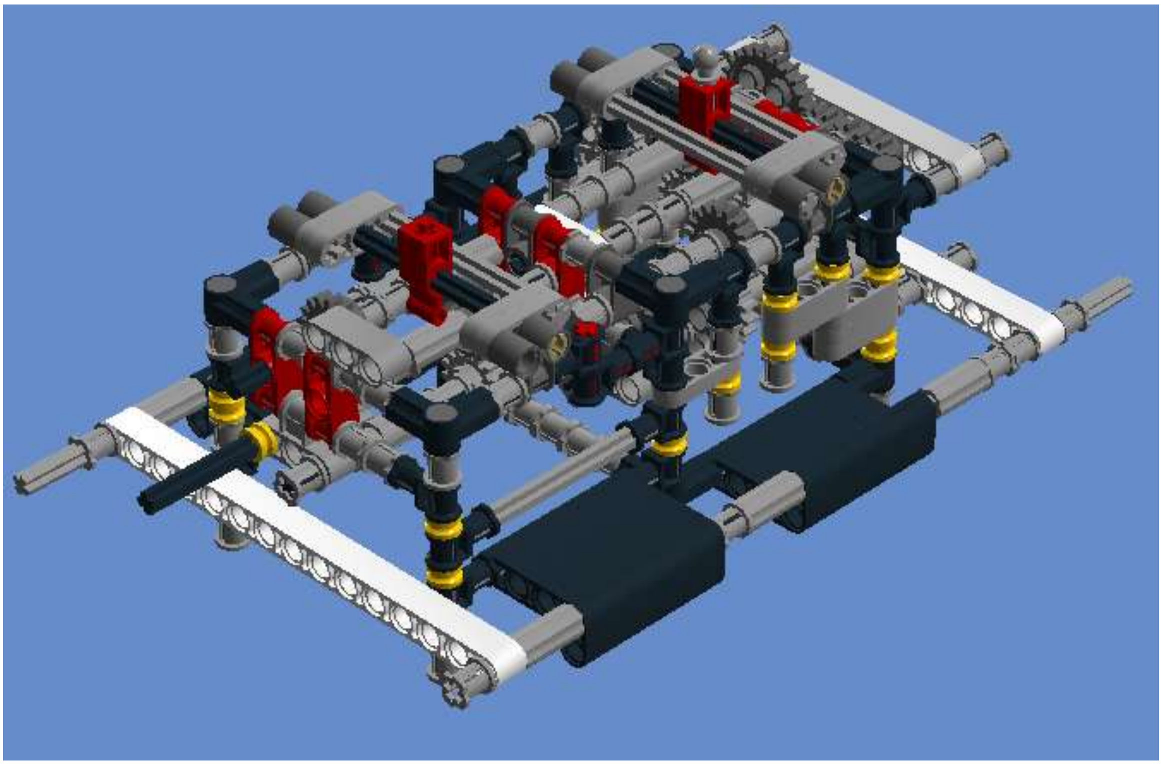


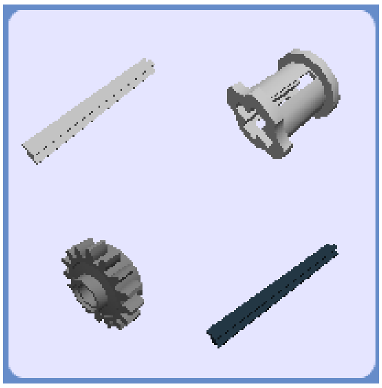


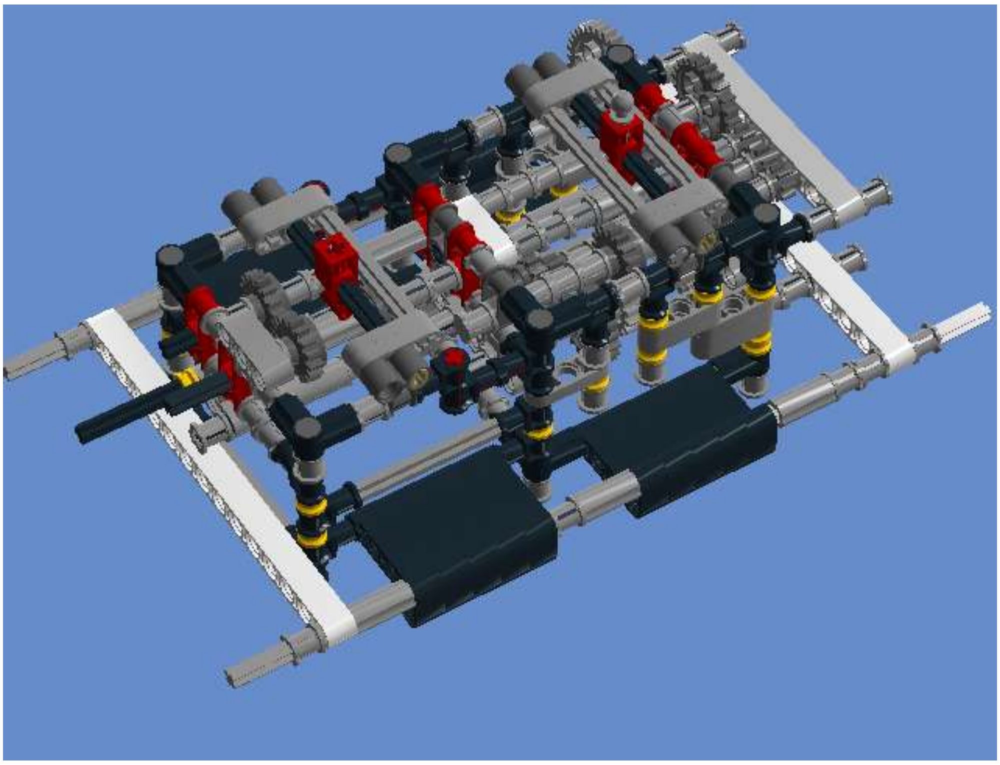


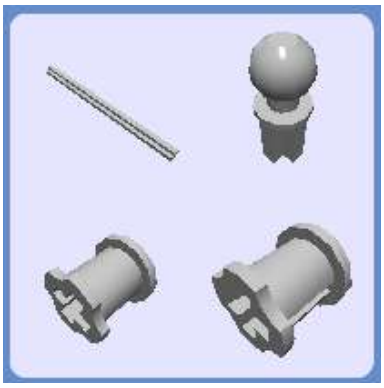


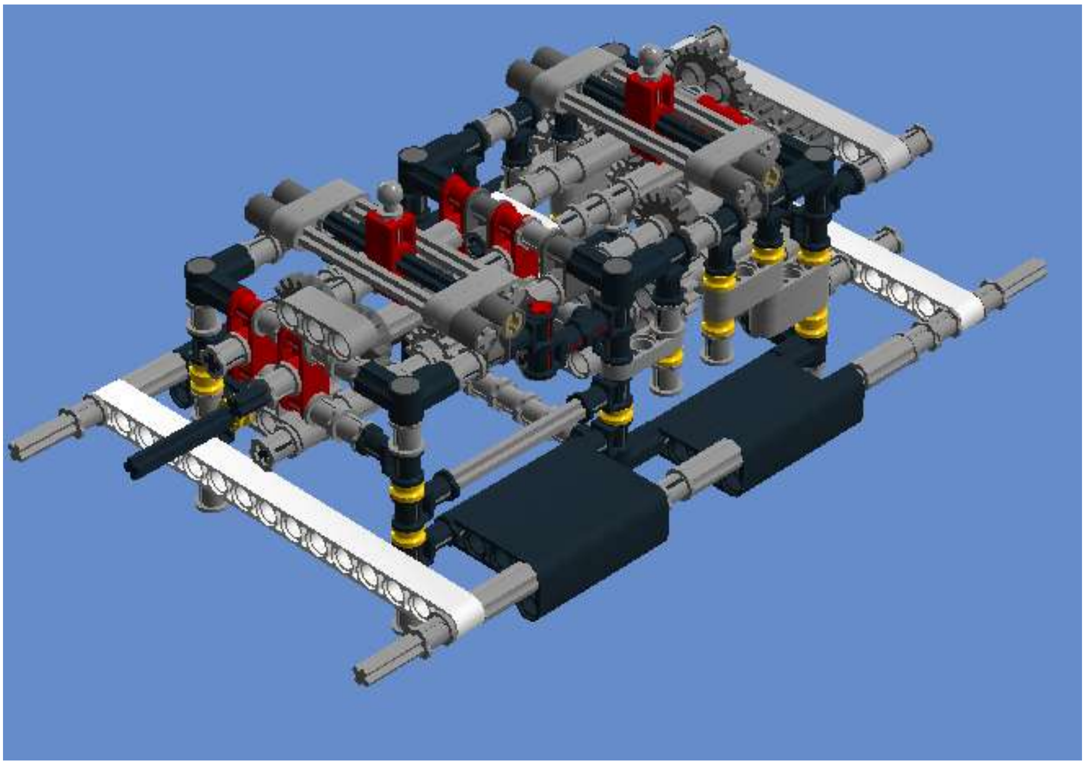


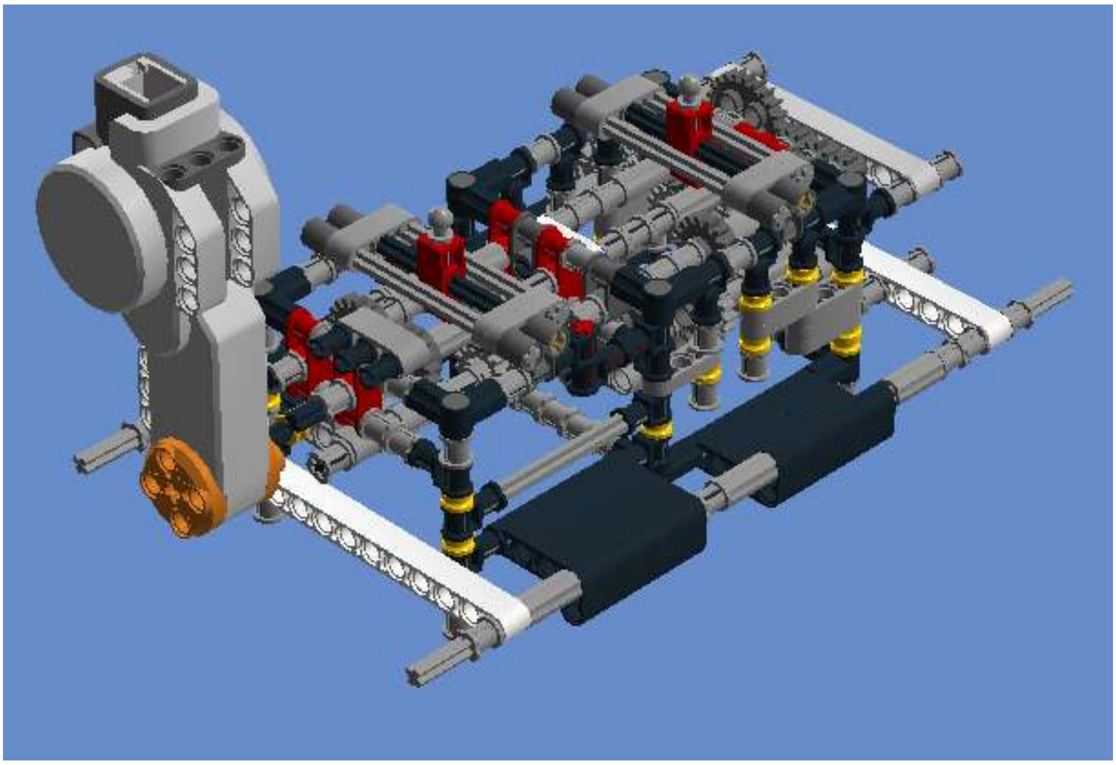


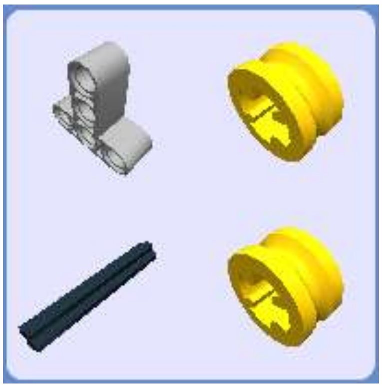


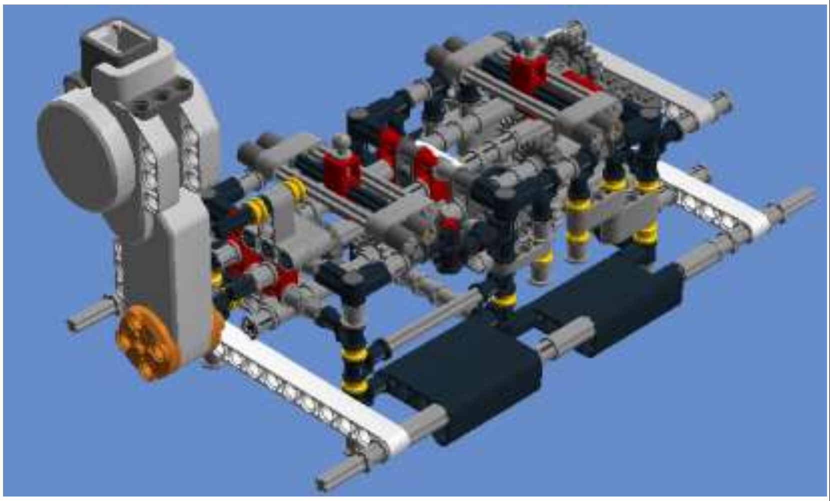


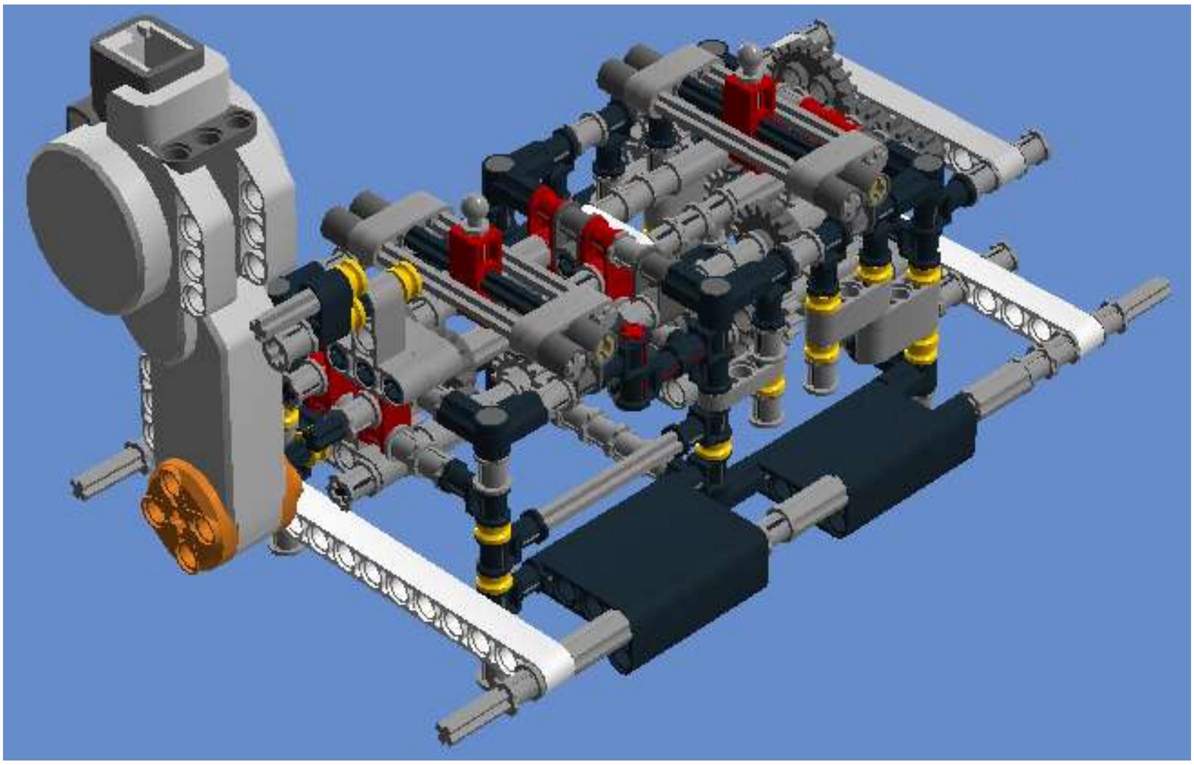


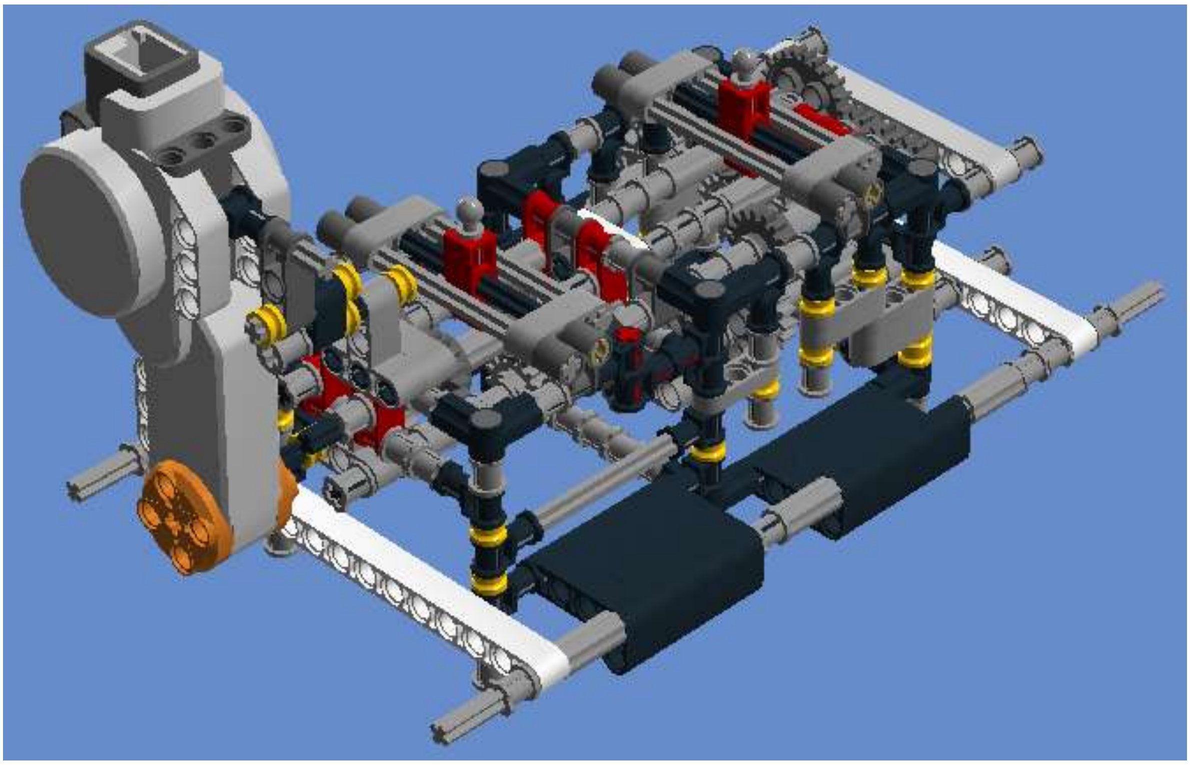


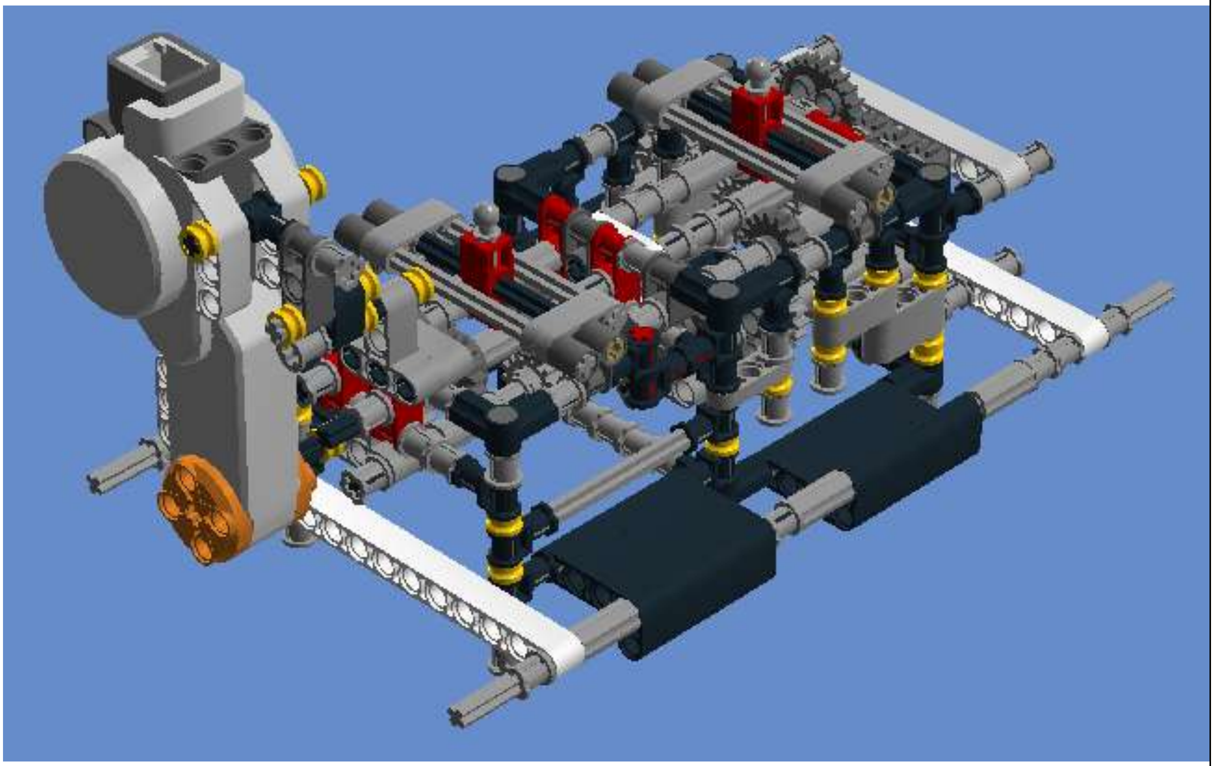


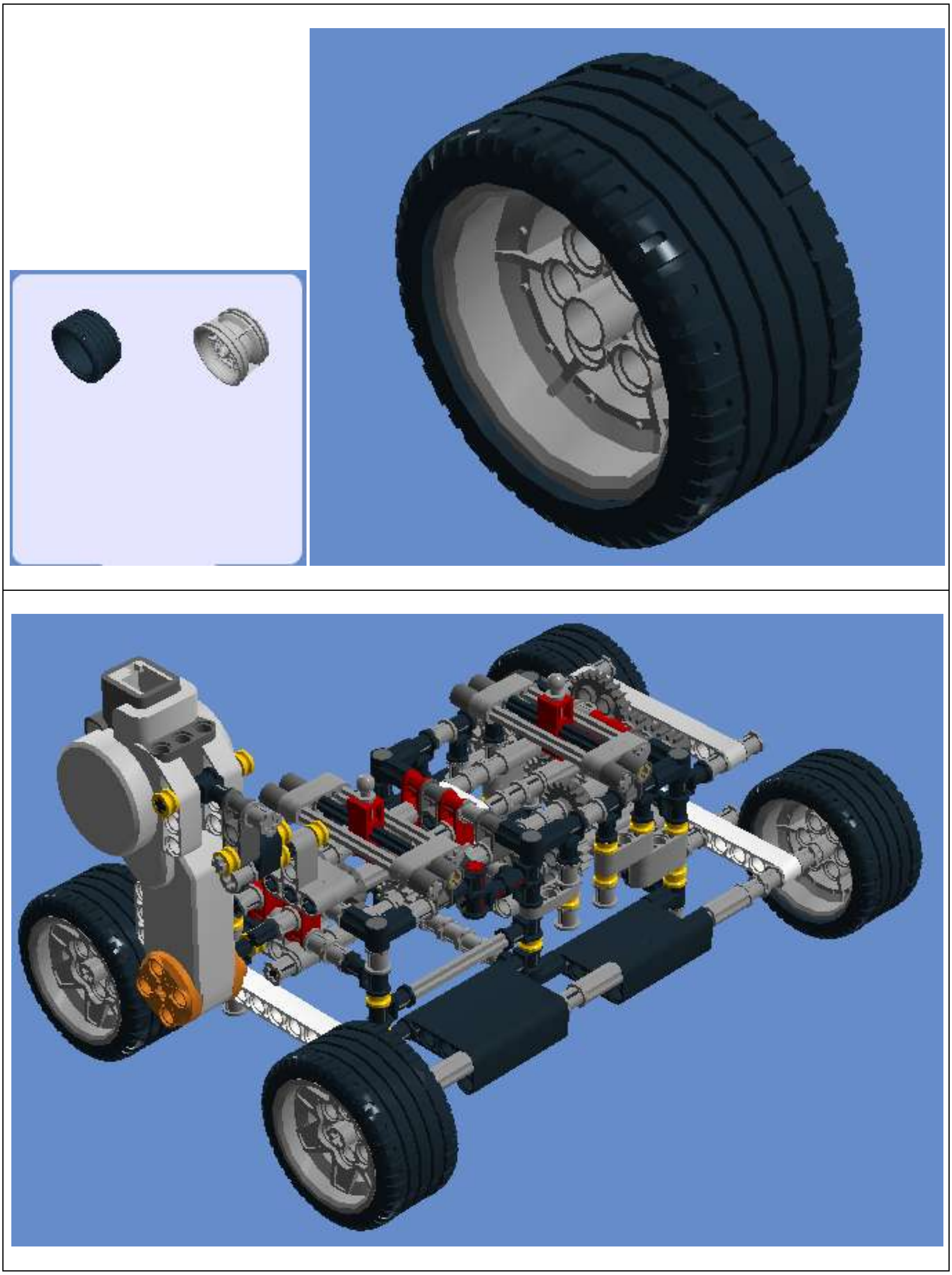












Fonte: O autor.

E aqui está concluída a montagem do câmbio de 4 marchas. Para trocar as marchas, o câmbio conta com dois sistemas de alavancas. Um situado na parte superior da imagem acima e outro mais ao meio, conforme verificamos abaixo (Figura 36):

Figura 36 – Ilustração da alavanca do câmbio das marchas primeira e quarta

Fonte: O autor (elaborado no Lego Digital Designer).

Este câmbio, situado mais acima, será o câmbio responsável pelas marchas: 1ª – que apresenta uma redução do giro do motor de 1/27; e 4ª que não apresenta redução em relação ao número de giros por minuto do motor. A quarta marcha será acionada quando a peça que representa o câmbio de um carro estiver acionando a peça abaixo de seu eixo na posição superior do câmbio (considerando como referência a posição do câmbio conforme a imagem final da construção). E a primeira marcha será acionada quando esta mesma peça estiver acionando a outra peça abaixo de seu eixo, porém, no sentido oposto ao da quarta.

As marchas, segunda e terceira, serão acionadas no outro câmbio, conforme a ilustração abaixo (Figura 37):

Figura 37 – Ilustração da alavanca do câmbio das marchas segunda e terceira

Fonte: O autor (elaborado no Lego Digital Designer).

Neste câmbio, a terceira marcha, que apresenta uma redução de 1/3 em relação ao número de giros do motor por minuto, será acionada quando o câmbio acionar a peça situada abaixo de seu eixo, na posição mais acima, considerando, ainda, como sentido do câmbio, o mesmo da última imagem da construção. E a segunda marcha, que apresenta uma redução de 1/9 quanto ao número de giros, será acionada quando o câmbio acionar a peça ao lado da acionada para a terceira, localizada, assim, na parte mais inferior do câmbio.

Quando nenhuma das marchas estiver acionada por um dos câmbios, o motor funcionará no sentido de neutro, não acionando nenhuma engrenagem que movimente toda a estrutura. É importante ressaltar que, em nenhum momento, deve haver duas marchas acionadas, pois isto danificará a estrutura e o funcionamento do câmbio.

Para esse funcionamento, a fim de demonstrar a velocidade proporcionada por cada marcha a toda estrutura montada, não é necessário uma programação específica, o simples giro constante do motor é suficiente, uma vez que o que irá alterar a velocidade com que a estrutura se locomove serão as reduções ocorrentes ou não em cada marcha. Portanto, o próprio *brick* de comandos do KIT é suficiente para as aulas, sendo necessário apenas conectá-lo ao motor e acionar o comando responsável pelo giro dos motores.

Encerrada então a montagem, considerando que tenham sido necessários cinco módulos de aula, a última aula desta sequência, neste caso a 10ª, será destinada ao desenvolvimento de atividades envolvendo os câmbios de marchas montados e a função exponencial.

Décima Aula – Primeiro momento

É importante neste encerramento da sequência didática que os alunos percebam as grandes alterações ocorridas nas velocidades de locomoção das estruturas à medida que são alteradas as marchas, e que, neste caso em específico, essas alterações sempre ocorrem em função de uma potência de três, seja multiplicando ou dividindo o número de giros, o tempo gasto para percorrer determinada distância ou a distância percorrida em determinado tempo. Os alunos, também devem associar, agora com o câmbio em mãos, a função que modela o seu funcionamento e o seu real deslocamento. Para tais objetivos, serão apresentados alguns exercícios, que podem ser aplicados ou utilizados como modelos para desenvolvimento de outros.

Observação: antes de iniciar os exercícios utilizando na prática o câmbio de marchas, o professor deve ressaltar aos alunos que questões como: atrito entre as rodas da estrutura e o piso em que elas se locomovem, variações, ainda que sutis na rotação dos motores, alguns possíveis mínimos travamentos entre as engrenagens ou qualquer outro fator que influencie na exatidão do funcionamento de toda a estrutura do câmbio, podem levar a pequenas variações nos cálculos de tempo gasto ou distância percorrida. Sendo assim, é sempre importante manter, ainda que pequena, uma margem de desvio, mas que não deve ser levada em consideração para as modelagens e análises a serem feitas em cada exercício, pois não descaracterizam todo o processo.

Primeiro exercício: o professor deve pedir para que cada grupo de alunos engate a primeira marcha em seus carrinhos (a partir de agora, iremos denotar como carrinho o câmbio de marchas com as rodas acopladas) e conecte seus motores ao *brick*. Determinado um ponto de partida para cada carrinho, é necessário que o professor solicite ao grupo utilizar um cronômetro (podem ser utilizados os presentes em celulares mesmo), para que o carrinho percorra um caminho em linha reta a partir do ponto determinado durante 162 segundos, e que o grupo marque, de alguma forma, a posição em que o carrinho parou. Em seguida, deve-se pedir para que todos os participantes desengatem a primeira marcha e engatem a segunda. Então, aos alunos deve ser perguntado qual será o tempo necessário para que o carrinho percorra a mesma distância marcada, mas, desta vez, na segunda marcha. Após chegarem à resposta, é necessário pedir para que verifiquem-na com o próprio carrinho.

Resposta: *Como a redução no número de giros do motor sempre é de um terço de uma marcha para outra, basta dividir 162 por 3, e assim o tempo necessário para percorrer a distância determinada será de 54 segundos. (Vale lembrar que pode haver uma pequena variação quanto à posição, devido aos fatores já mencionados).*

Continuação: os mesmos procedimentos devem ser feitos com a terceira marcha, e depois com a quarta. Portanto, ao final, ter-se-á a seguinte relação da quantidade percorrida com as marchas utilizadas e o tempo gasto (Quadro 03):

Resposta:

Quadro 03 – Tempo gasto por marcha

Marchas	Tempo gasto (segundos)
1ª	162
2ª	54
3ª	18
4ª	6

Fonte: O autor.

É importante destacar aos alunos que as relações apresentadas no quadro formam uma PA e uma PG, e que, conforme já estudado, quando uma função leva uma PA a uma PG essa função é do tipo exponencial. Sendo assim, aos alunos deve ser pedido que encontrem a função que modele essas relações.

Resposta: Seja $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{162, 54, 18, 6\}, f(x) = b \cdot a^x$, sendo b, a constantes reais positivas, temos pelas relações que:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$$\text{I.} \qquad f(1) = b \cdot a^1 = ba = 162$$

$$\text{II.} \qquad f(2) = b \cdot a^2 = ba \cdot a = 54$$

De I e II, temos que:

$$ba \cdot a = 54 \rightarrow 162 \cdot a = 54 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

E assim:

$$ba = 162 \rightarrow b \cdot \frac{1}{3} = 162 \rightarrow b = 486$$

Portanto, a função do tipo exponencial que modela a relação das marchas e o tempo gasto para percorrer o determinado espaço é:

$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{162, 54, 18, 6\}, f(x) = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Porém, embasando-nos no teorema apresentado e demonstrado por Lima (2013), o qual afirma, por meio deste teorema, que toda função monótona injetiva, que transforma uma PA em uma PG, posto $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$, tem-se $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, podemos concluir o domínio e a imagem da função como sendo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Segundo exercício: utilizando a função encontrada no exercício anterior e supondo que o câmbio, seguindo o mesmo modelo exponencial de funcionamento, tivesse seis marchas ao invés de quatro, temos a seguinte pergunta: Qual seria o tempo gasto para que o carrinho percorresse o mesmo trajeto determinado no exercício anterior, mas, desta vez, se estivesse com a sexta marcha engatada?

Resposta: Utilizando a função, como a variável independente x representa a marcha que está engatada, e $f(x)$ o tempo gasto em segundos. Para a resolução, basta encontrar o valor de $f(6)$, sendo este:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}, f(x) = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

$$f(6) = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6} = 486 \cdot \frac{1}{729} = \frac{2}{3}$$

Portanto, caso a marcha engatada fosse a sexta, o tempo gasto para percorrer a determinada distância seria apenas de dois terços de segundo.

Terceiro exercício: Ainda em relação ao primeiro exercício, se o tempo gasto fosse de 2 segundos, qual marcha estaria engatada?

Resposta: Neste exercício para se ter o $f(x)$ é necessário encontrar o valor de x. Sendo:

$$f(x) = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 2 \to \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = \frac{1}{243} \to \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \to x = 5$$

Portanto, se o tempo gasto for de 2 segundos, a marcha que estaria engatada seria a quinta marcha.

Observação: conforme Lima (2013), pelo teorema:

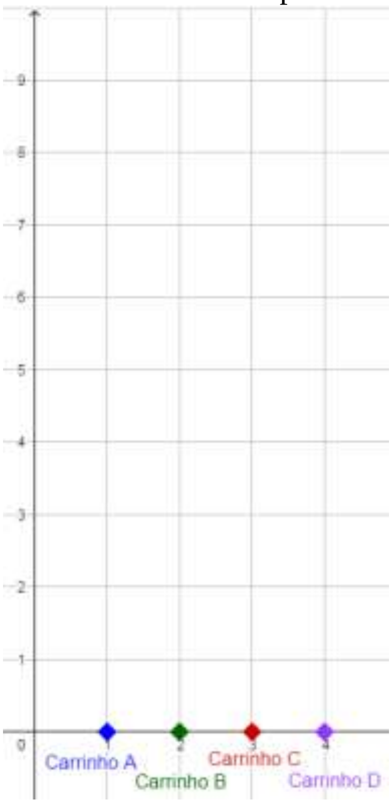
Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, onde $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$, teremos $f(x) = ba^{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos definir o domínio da função nos reais, mesmo que a sequência das marchas apresente uma sequência numérica de números inteiros positivos, devido ao teorema apresentado por Lima (2013). Por outro lado, para inserir exercícios que utilizem resultados para o domínio, assim como para imagem, não inteiros, é necessário que os alunos já tenham conhecimento da matéria de logaritmo, uma vez que as propriedades apenas de potenciação não serão sempre suficientes para encontrar tais resultados.

Quarto exercício: na própria sala de aula, ou em outro espaço que seja plano, deve ser representado, no chão ou em mesas alinhadas, um plano cartesiano, onde o eixo das abscissas tenha no mínimo o intervalo de 0 a 4, e o das ordenadas, no mínimo de 0 a 9. A unidade de medida entre as abscissas precisa ser uma que comporte, com certa folga, um carrinho na horizontal, pois irão ficar alinhados, já para a unidade entre as ordenadas, é necessário encontrar uma distância média que os carrinhos percorram durante nove segundos engatados na quarta marcha e a dividir por nove. Deve ser utilizado este resultado ou sua melhor aproximação como medida.

Para esta atividade é interessante que se tenham montado pelo menos quatro carrinhos, pois eles ficarão posicionados sobre o eixo das abscissas, um carrinho na coordenada (1,0) engatado na primeira marcha, outro carrinho na (2,0), engatado na segunda marcha, outro na (3,0), engatado na terceira, e outro na (4,0), engatado na quarta marcha. Conforme ilustração abaixo (Figura 38):

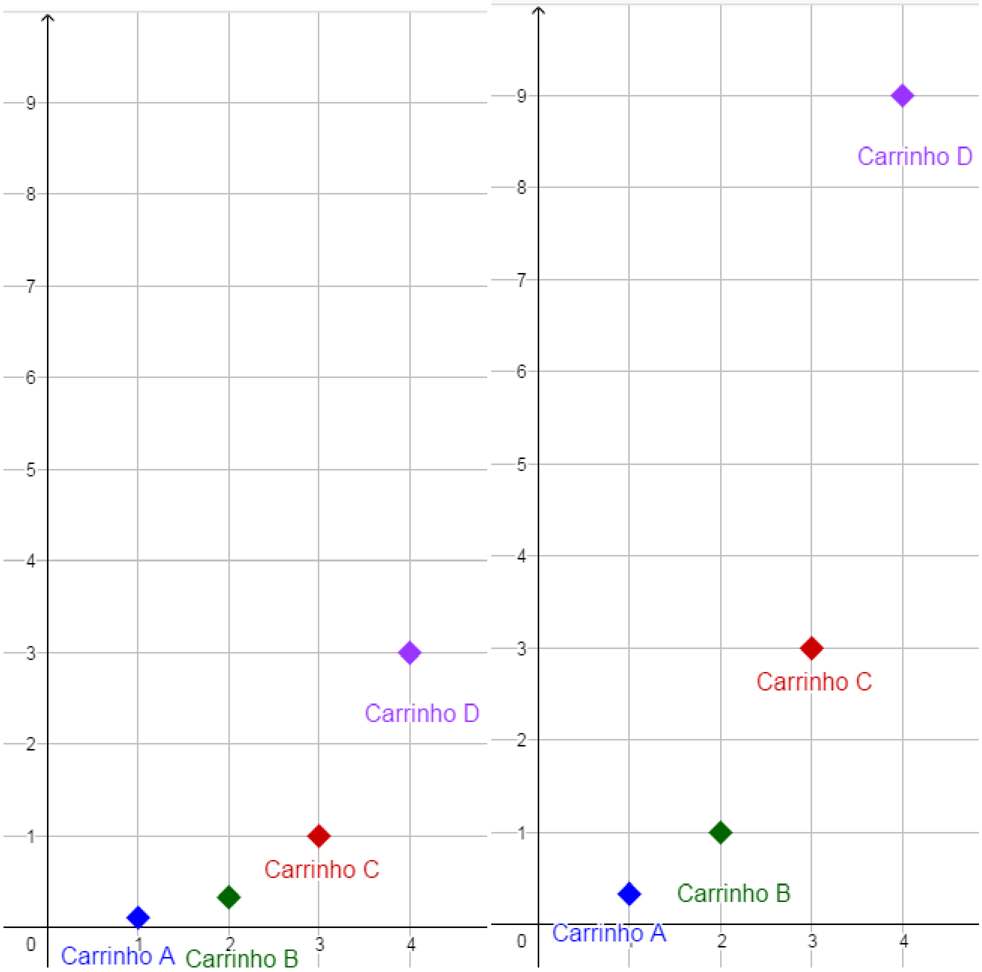
Figura 38 – Gráfico deslocamento exponencial dos carrinhos



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

Portanto, o eixo das abscissas representará a marcha engatada em cada carrinho, enquanto o eixo das ordenadas representará os segundos, após acionar o motor simultaneamente nos carrinhos. Devido às diferentes reduções ou não das marchas, à medida que o tempo *t*, em segundos, aumenta, cada carrinho vai ocupando uma posição ainda mais diferente do outro. Para iniciar a atividade, deve-se pedir para que, primeiro, todos os carrinhos fiquem ligados simultaneamente durante 3 segundos. Após isto, é necessário que os alunos anotem as posições de cada um e confiram se estão de acordo com as reduções ou não de cada carrinho. Depois, eles (os alunos) devem retornar os carrinhos para a posição inicial e acionar os motores simultaneamente novamente, agora por nove segundo, e anotar novamente as posições. Os alunos devem montar, então, dois quadros, um para o tempo t = 3 com suas posições e outro com t = 9. De maneira precisa as posições dos carrinhos em cada instante serão (Figura 39):

Figura 39 – Gráficos de deslocamento exponencial dos carrinhos, nos instantes 3 e 9 segundos



Instante de 3 segundos. Instante de 9 segundos.

Fonte: O autor (elaborados no Geogebra).

Observando as posições no eixo das ordenadas, um exemplo de quadro a ser feito pelos alunos pode ser o seguinte (Quadro 04):

Quadro 04 – Posições no eixo das ordenadas

Carrinhos	**No instante de 3 segundos**	**No instante de 9 segundos**
Carrinho A	1/9	1/3
Carrinho B	1/3	1
Carrinho C	1	3
Carrinho D	3	9

Fonte: O autor.

Em seguida, os alunos devem ser direcionados a observar que, à medida que o tempo foi multiplicado por 3, as posições também foram, pois apresentam uma relação linear. Desta, forma deve lhes ser pedido que montem um quadro das posições em relação a um tempo *t* qualquer. Fica como resposta e sugestão de quadro, o Quadro 05, a seguir:

Quadro 05 – Posições no eixo das ordenadas, no instante de *t* segundos

Carrinhos	**Posições**
Carrinho A	$\frac{1}{27}t$
Carrinho B	$\frac{1}{9}t$
Carrinho C	$\frac{1}{3}t$
Carrinho D	$1t$

Fonte: O autor.

Em seguida, analise junto aos alunos, que, enquanto as marchas de cada carrinho em sequência representam uma PA, as posições no eixo das ordenadas representam uma PG, e, assim, novamente podemos representar essa relação por uma função do tipo exponencial, dessa vez, com mais um importante detalhe, com a PG estando em função do tempo decorrido em segundos *t*. Deve ser proposto, então, que os alunos encontrem a função que modela a relação.

Resposta:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

III. $$f(1) = b \cdot a^1 = ba = \frac{1}{27}t$$

IV. $$f(2) = b \cdot a^2 = ba \cdot a = \frac{1}{9}t$$

De I e II, temos que:

$$ba \cdot a = \frac{1}{9}t \to \frac{1}{27}t \cdot a = \frac{1}{9}t \to a = 3$$

Assim:

$$ba = \frac{1}{27}t \to b \cdot 3 = \frac{1}{27}t \to b = \frac{1}{81}t = \frac{t}{81}$$

Portanto, a função do tipo exponencial que modela a relação do tempo *t* decorrido e a posição do carrinho em relação ao eixo das ordenadas é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}, f(x) = \frac{t}{81} \cdot 3^{x}, t \in \mathbb{R}^{+},$$

onde x representa a marcha engatada em cada carrinho juntamente com sua posição na horizontal e $f(x)$ a posição em que o carrinho estará a cada instante *t* de segundos decorridos.

Quinto exercício: utilizando a função que modela a posição de cada carrinho em relação ao eixo das ordenadas do exercício três, o aluno deve calcular primeiramente, no caderno, qual a posição de cada um dos quatro carrinhos no instante de 6 segundos e, depois de feito isso, confira as posições utilizando os próprios carrinhos, cronometrando o tempo de seis segundos.

Resposta: Seja a função que modela tal relação:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}, f(x) = \frac{t}{81} \cdot 3^{x}, t \in \mathbb{R}^{+}$$

Para o instante $t = 6$ temos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}, f(x) = \frac{6}{81} \cdot 3^{x}$$

Desta forma, a posição de cada carrinho será:

Carrinho A – Primeira marcha: $f(1) = \frac{2}{27} \cdot 3^{1} = \frac{6}{27}$.

Carrinho B – Segunda marcha: $f(2) = \frac{2}{27} \cdot 3^{2} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

Carrinho C – Terceira marcha: $f(3) = \frac{2}{27} \cdot 3^{3} = \frac{54}{27} = 2$.

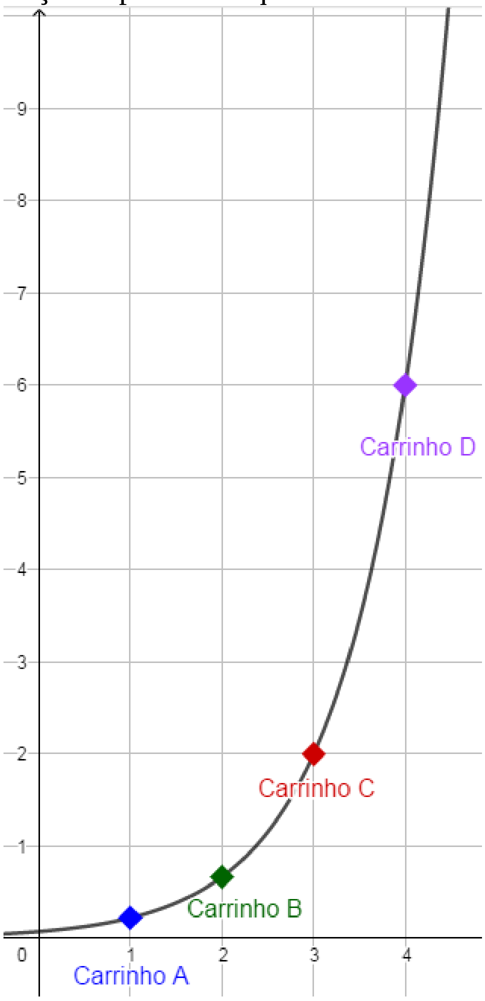
Carrinho D – Quarta marcha: $f(4) = \frac{2}{27} \cdot 3^{4} = \frac{162}{27} = 6$.

A seguir, os alunos devem conferir com os próprios carrinhos as respectivas posições, decorridos os seis segundos.

Exercício sexto: o aluno deve esboçar o gráfico da função encontrada no exercício quatro e indicar nele a posição de cada carrinho no instante de seis segundos (Figura 40).

Resposta:

Figura 40 – Gráfico da função exponencial que modela o deslocamento dos carrinhos



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

Com o término desta sequência didática, é esperado que os alunos tenham assimilado – utilizando como modelos as interações entre engrenagens, e o carrinho – a caracterização de uma função exponencial e do tipo exponencial, como também, o seu tipo de crescimento e decréscimo, e que, funções injetivas que transformam uma PA em uma PG, ainda que de forma discreta, são funções exponenciais ou do tipo exponenciais. Também, é esperada uma melhora quanto às atitudes relacionadas ao trabalho em equipe, como cooperação e respeito.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início, ainda na idealização deste trabalho, o intuito de associar a robótica educacional, através de interações entre engrenagens LEGO®, com o ensino da função exponencial, foi nosso ponto de partida.

Fomos motivados pela grande aplicabilidade desse tipo de função, não somente na matemática, mas também em física, biologia, economia, com a modelagem matemática prática e poderosa existente entre as interações de engrenagens, conforme aponta Papert (1985):

> Você pode ser a engrenagem, você pode entender coma ela se movimenta projetando seu próprio corpo em seu lugar e girando com ela. E essa dupla relação – tanto abstrata quanto sensorial – é que dá à engrenagem o poder de suscitar inúmeras ideias matemáticas na mente. (PAPERT, 1985).

Pelo trabalho já elaborado na área de interações entre engrenagens, de Silva (2014), que as utilizou para o ensino da função linear.

> Conseguimos modelar as funções que descrevem os giros dados pelas engrenagens do relógio Classic-Clock, repercutindo no sincronismo existente no ponteiro dos segundos, minutos e horas. Melhor que isso, na busca em como fazer essa descrição, descobrimos um meio de ensinar função linear utilizando as peças do Kit NXT e pudemos apresentar uma proposta metodológica para abordar a temática em sala de aula, tendo como auxílio o Kit de robótica educacional da NXT. (SILVA, 2014, p. 67).

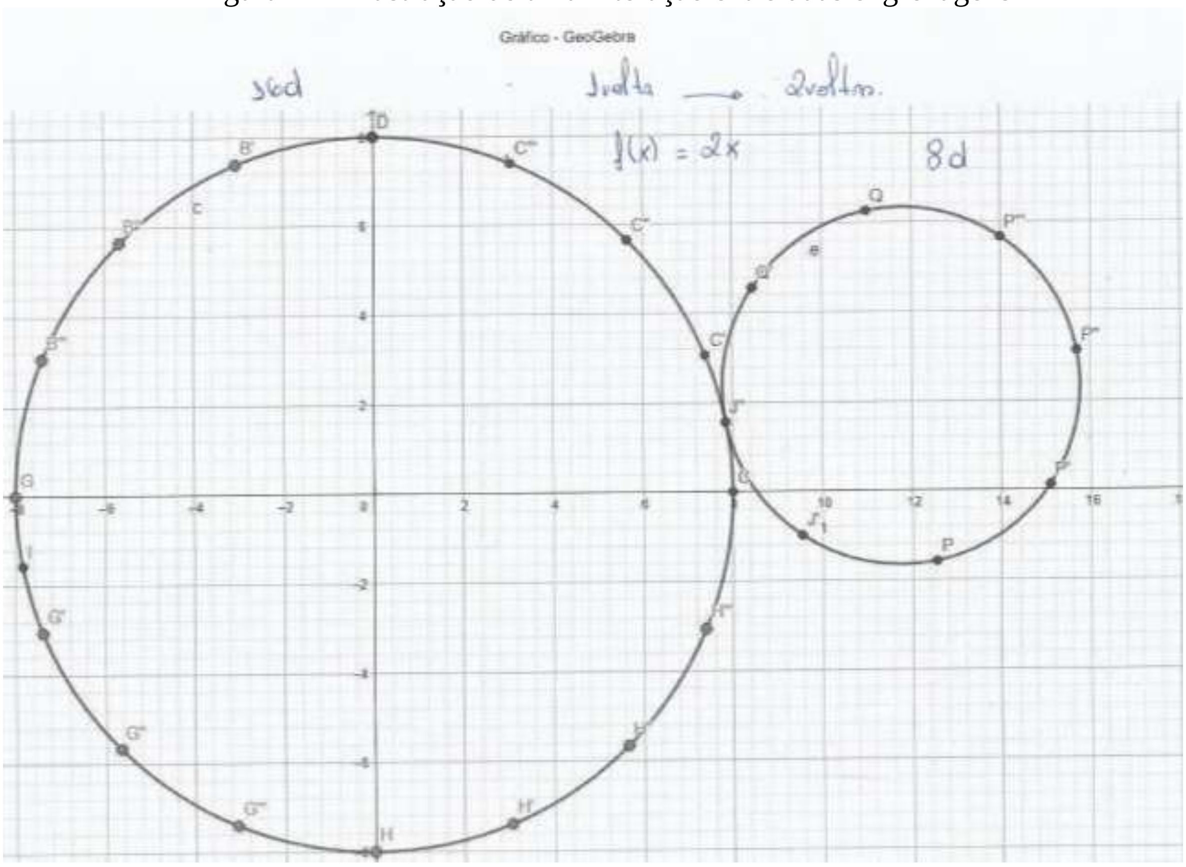
E pela forma de construir conhecimento através de interações entre indivíduos e objetos. Conforme aponta Palangana (2001, p. 21), sobre a teoria construtivista de Piaget: "*É somente na troca do organismo com o meio que se dá a construção orgânica das referidas estruturas*". A saber, estruturas cognitivas, que permitem que a criança tenha a capacidade de elaborar relações de inclusão, de ordem, de correspondência etc. Isso tudo nos deixou confiantes na possibilidade de um ótimo trabalho. Porém, ainda havia muito a ser estudado sobre como fazê-lo, pois não tivemos conhecimento de trabalhos já existentes, nesse momento, que faziam esta relação: função exponencial e interações entre engrenagens.

Iniciando os estudos de como seria possível abstrair a função exponencial de interações entre engrenagens, nos deparamos com vários desafios. Encontrávamos possibilidades fragmentadas, como câmbios de marchas produzidos com peças LEGO®, porém, que não podiam ser modelados por funções do tipo exponencial, como também trabalhos que relacionavam progressões geométricas e função exponencial, contudo, não associadas a interações de engrenagens, e muitos trabalhos desenvolvidos sobre proporcionalidade e funções lineares com interações entre engrenagens, mas não com exponencial. Mas foi com todos estes estudos fragmentados, que conseguimos idealizar de como poderia vir a ser a nossa construção.

O meu conhecimento, em particular, sobre o Kit LEGO® era superficial, então iniciei pesquisas sobre o Kit, suas peças, sua programação e suas formas de combinações para construções. Com isso, também surgiram novos desafios e, ao mesmo tempo, definições de como o trabalho deveria se desenvolver, por exemplo, as possibilidades de engrenagens a serem utilizadas.

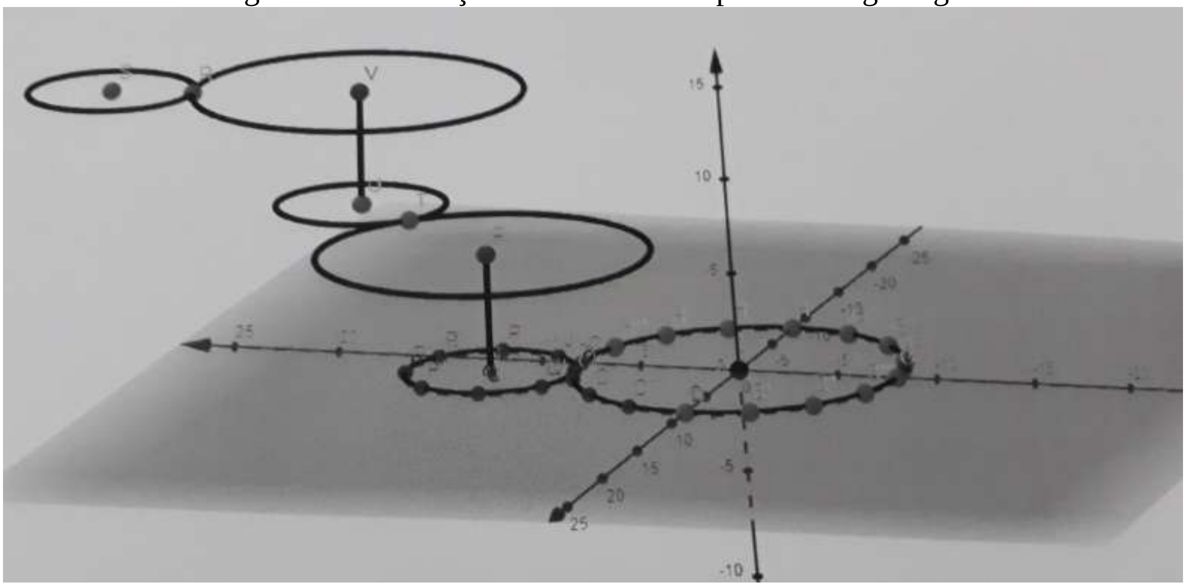
De início, imaginávamos utilizar uma redução ou ampliação entre os números de giros de uma marcha para a outra, na razão de ½ ou 2 respectivamente, na falta do Kit, iniciei meus estudos utilizando o Geogebra, conforme as imagens abaixo (Figura 41 e 42):

Figura 41 – Ilustração de uma interação entre duas engrenagens



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

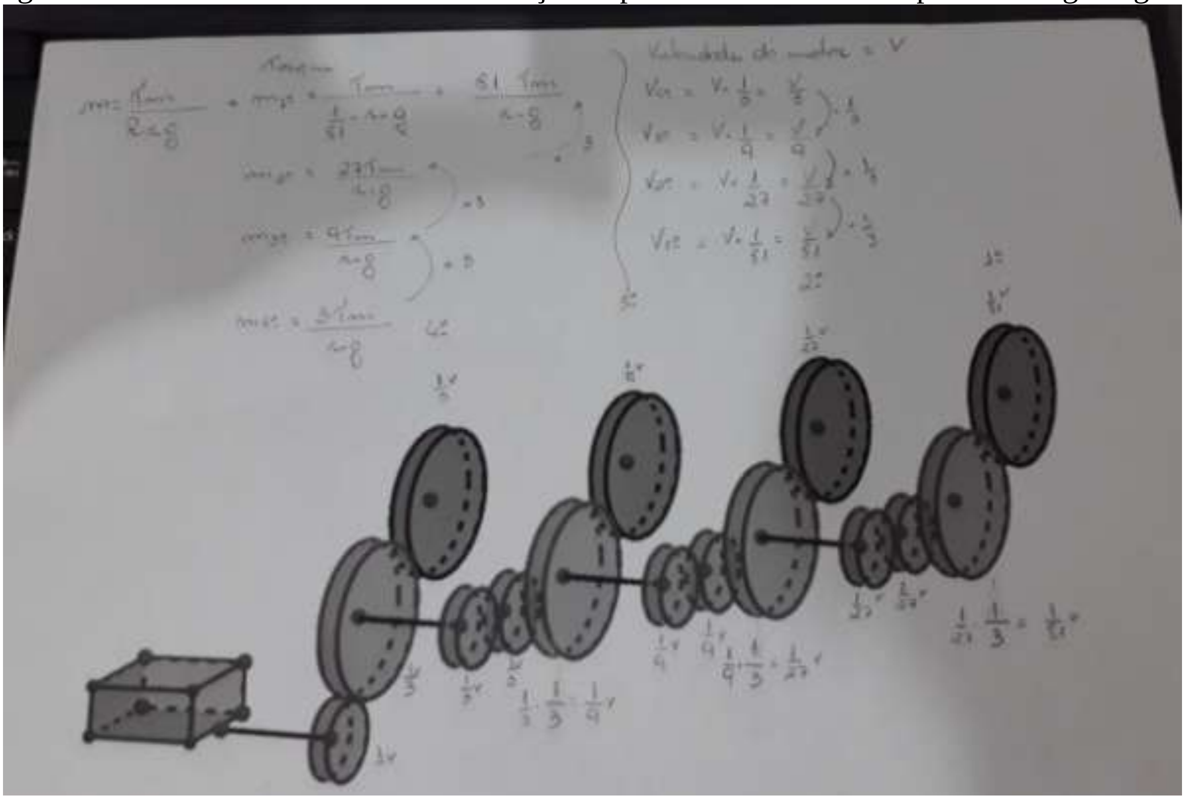
Figura 42 – Ilustração de um trem composto de engrenagens



Fonte: O autor (elaborado no Geogebra).

Porém, ao ter contato pela primeira vez com um Kit (cedido por uma escola particular de minha cidade, Patrocínio/MG) percebi, que para melhor funcionamento, deveríamos utilizar engrenagens com 8 e 24 dentes, desse modo, nossa constante de variação seria de 1/3 ou 3, diferente, então, da pensada inicialmente. Percebemos também, nessa etapa, que apenas um Kit não seria suficiente, pois apesar de que não necessitaríamos de vários tipos diferentes de peças, necessitaríamos de muitas peças do mesmo tipo, não encontraríamos essa quantidade em apenas um Kit. Com isso, continuei meus estudos sob o auxílio do Geogebra, conforme foto abaixo (Figura 43):

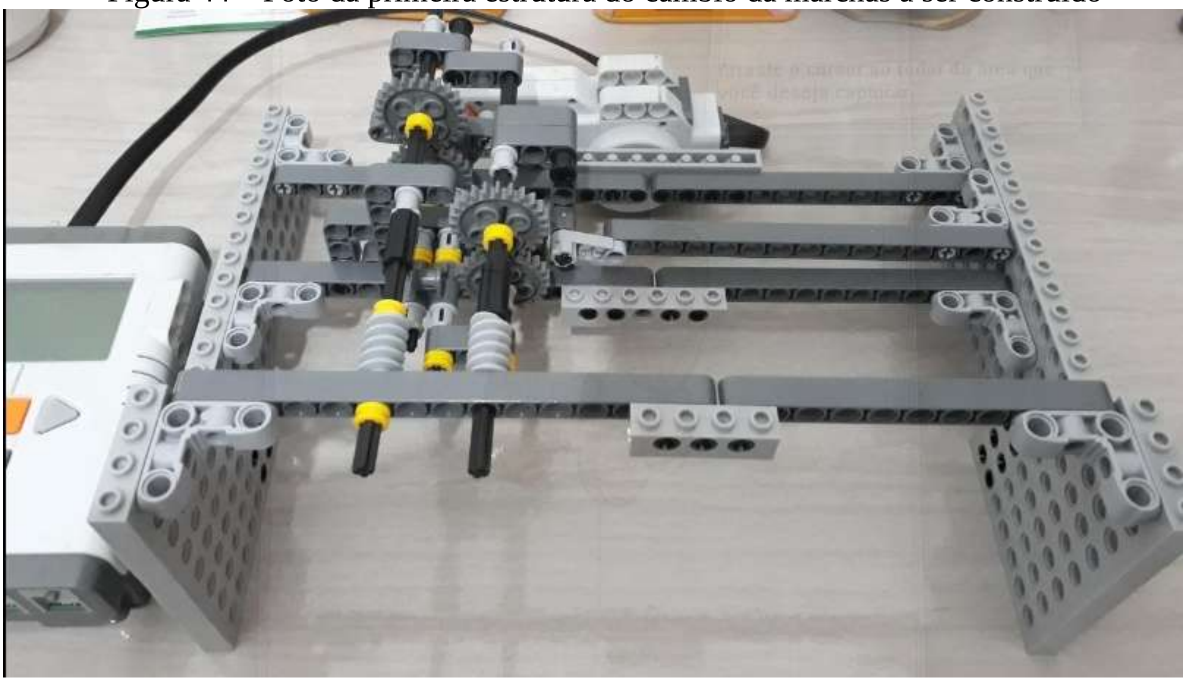
Figura 43 – Rascunho de cálculos e ilustração impressa de um trem composto de engrenagens



Fonte: O autor.

De posse de dois kits emprestados de um colega, iniciei as construções já com as peças, conforme foto abaixo (Figura 44):

Figura 44 – Foto da primeira estrutura do câmbio da marchas a ser construído



Fonte: O autor.

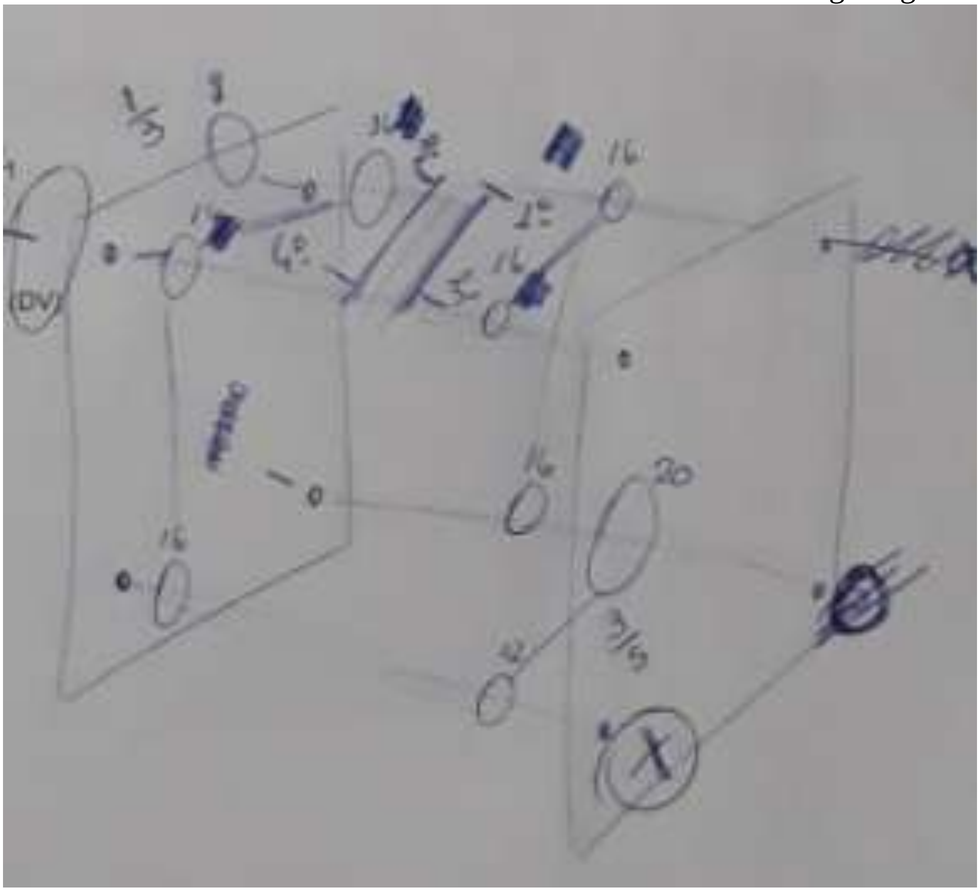
A princípio, fui colocando em prática ainda de forma bem inexperiente, com dificuldades, como em imaginar a estrutura a ser montada para o câmbio, ou quais peças apresentavam melhor funcionamento para determinado objetivo, como pode ser observado na foto, com a presença de duas peças, roscas-sem-fim, situadas na parte inferior da estrutura, na tentativa de colocar alguma coisa sendo içada. Ainda não sabia como a variação exponencial entre as marchas poderia ser percebida pelos alunos, até neste momento não havia tido a ideia de fazer o carrinho propriamente. Mas, como aponta Barbosa (2011):

> Brincar, manipular, construir carrinhos e robôs é resgatar o interesse por aprender, a curiosidade dos alunos, é despertar a criatividade para superar os problemas, os desafios diversos que foram impostos no projeto que em algum momento da vida daqueles participantes será útil (BARBOSA, 2011, p. 152).

No trecho acima, de Barbosa (2011), ele se refere a alunos, mas, qual professor não seria também um aluno? Ao aprender algo novo, que o desafia a adquirir novos conhecimentos, para depois ser capaz de ensinar, ou mediar seu aprendizado, todo professor se coloca, primeiro, na posição de aluno. E nada mais importante que "*resgatar o interesse por aprender*", daquele que já está a tanto tempo a ensinar.

E, assim, testando várias formas de como fazer o câmbio, superando os desafios com criatividade e análises, buscando trabalhos semelhantes, o projeto foi tomando forma. Mas, ainda com a dificuldade de colocar o funcionamento de forma exponencial, pois alguns vídeos, publicados na internet de forma livre, mostram câmbios construídos com kits LEGO®, com variação nas velocidades entre as marchas, porém, não exponencial. Então, analisei o funcionamento destes câmbios, conforme foto abaixo (Figura 45):

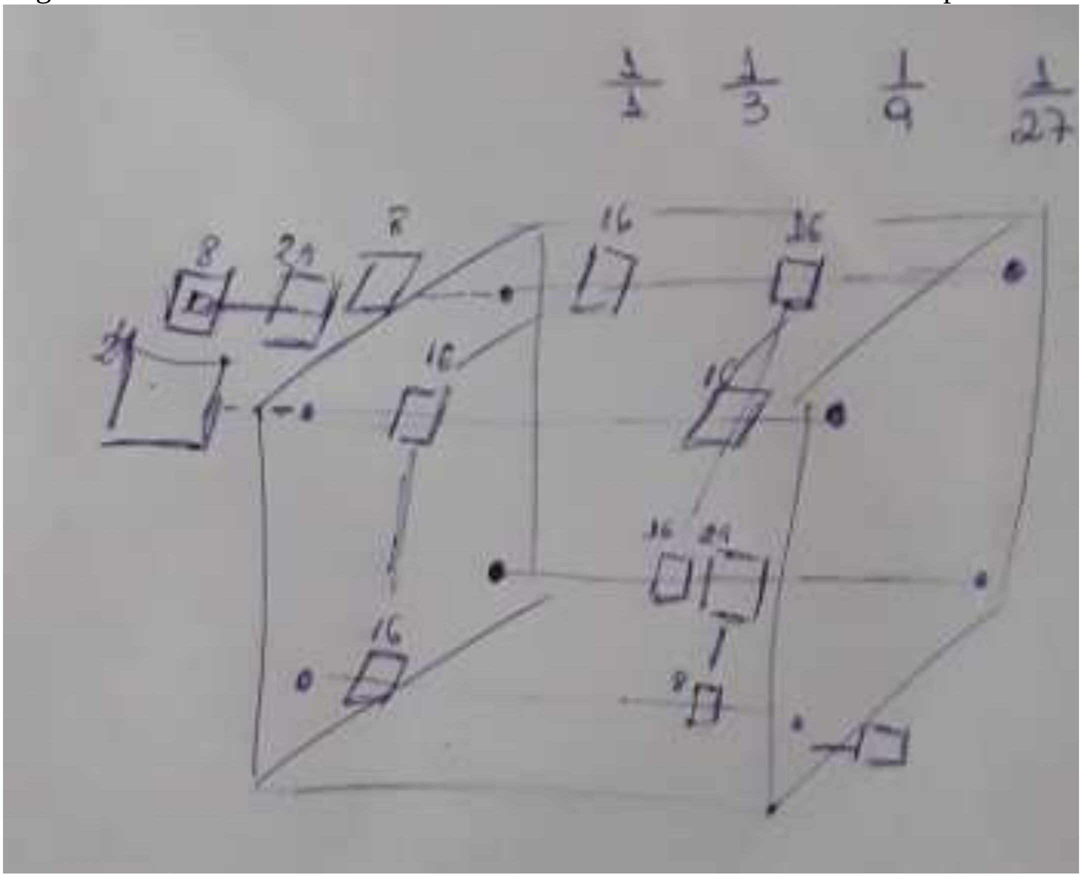
Figura 45 – Rascunho da análise do funcionamento de um câmbio de engrenagens LEGO®



Fonte: O autor.

Com isso, consegui fazer o primeiro rascunho de como deveria ser a estrutura do câmbio, para que este pudesse ser modelado de forma exponencial, conforme foto abaixo (Figura 46):

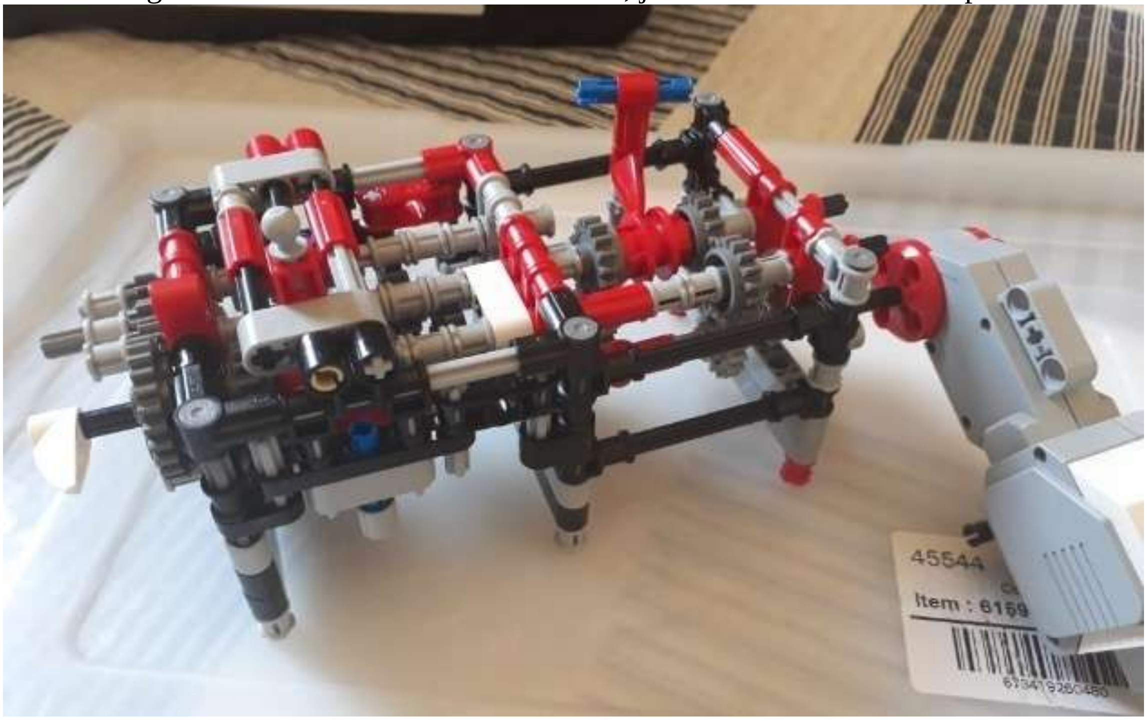
Figura 46 – Primeiro rascunho do funcionamento do câmbio de forma exponencial



Fonte: O autor.

Com a estrutura do câmbio já esboçada, o próximo desafio foi a sua real construção. A foto abaixo é da primeira tentativa (Figura 47), ainda com as peças dos kits emprestados por um colega:

Figura 47 – Primeira estrutura montada, já com funcionamento exponencial

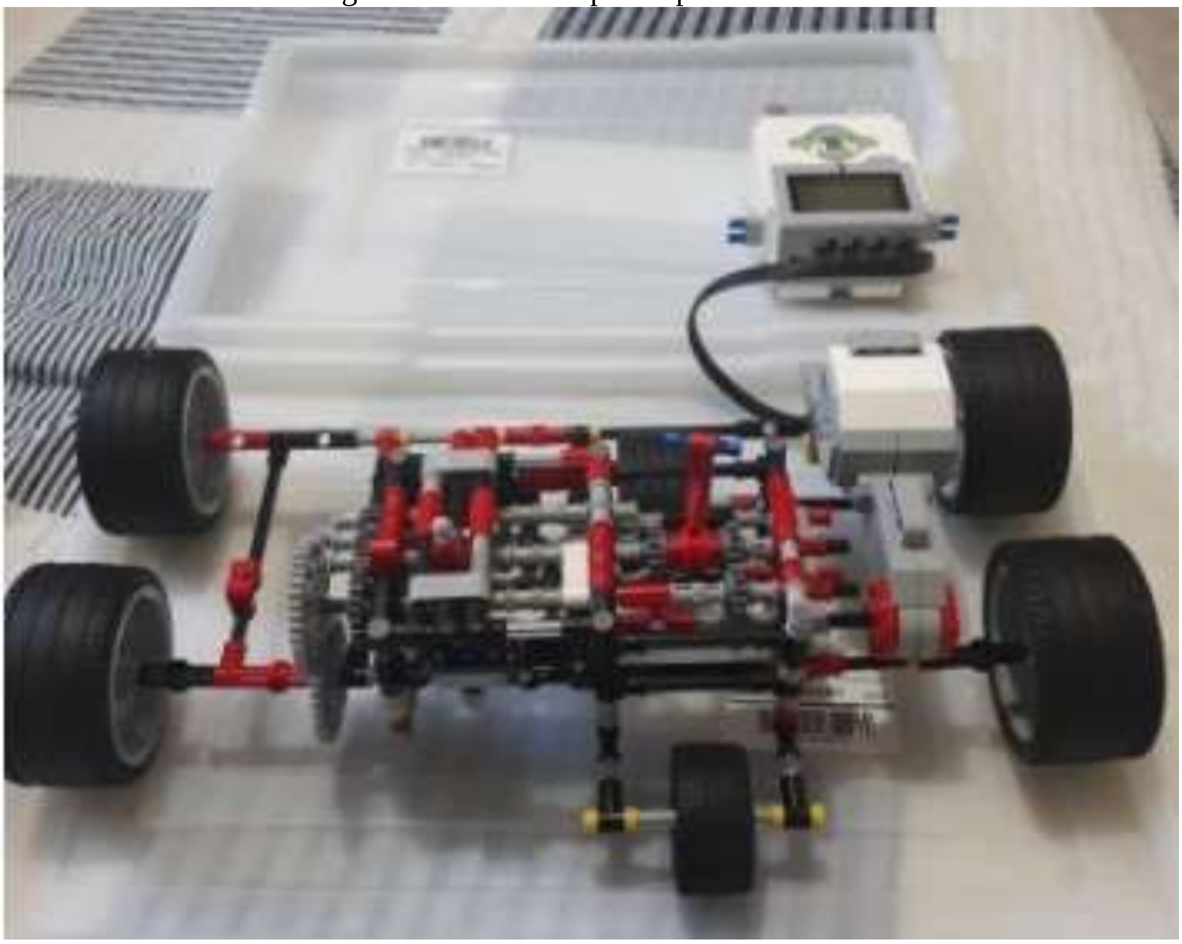


Fonte: O autor.

Nessa etapa, dois desafios merecem destaque, o primeiro é a falta de peças específicas, visto que estava em posse de apenas dois kits, o que precisou de algumas adaptações de peças, e muita criatividade; o segundo foi que, conforme a foto mostra, o câmbio necessitou ser separado em duas caixas de marchas, por questões de torque. À esquerda, na Figura 47, a caixa de marchas da primeira e quarta, e à direita da segunda e terceira marchas.

Com o câmbio nesta etapa já funcionando de forma exponencial, a questão era como passar esta sensação de variação exponencial para os alunos, de forma que esta não lhes fosse apenas demonstrada por meio de cálculos algébricos de maneira abstrata, mas que eles pudessem perceber a variação da forma mais concreta possível. Então, veio a ideia de acoplar ao câmbio rodinhas e fazer dele um carrinho, conforme a Figura 48, para que, assim, ao perceber a diferença da velocidade que o carrinho se move em cada marcha, o aluno entendesse o acentuado crescimento ou decréscimo existente em variações exponenciais.

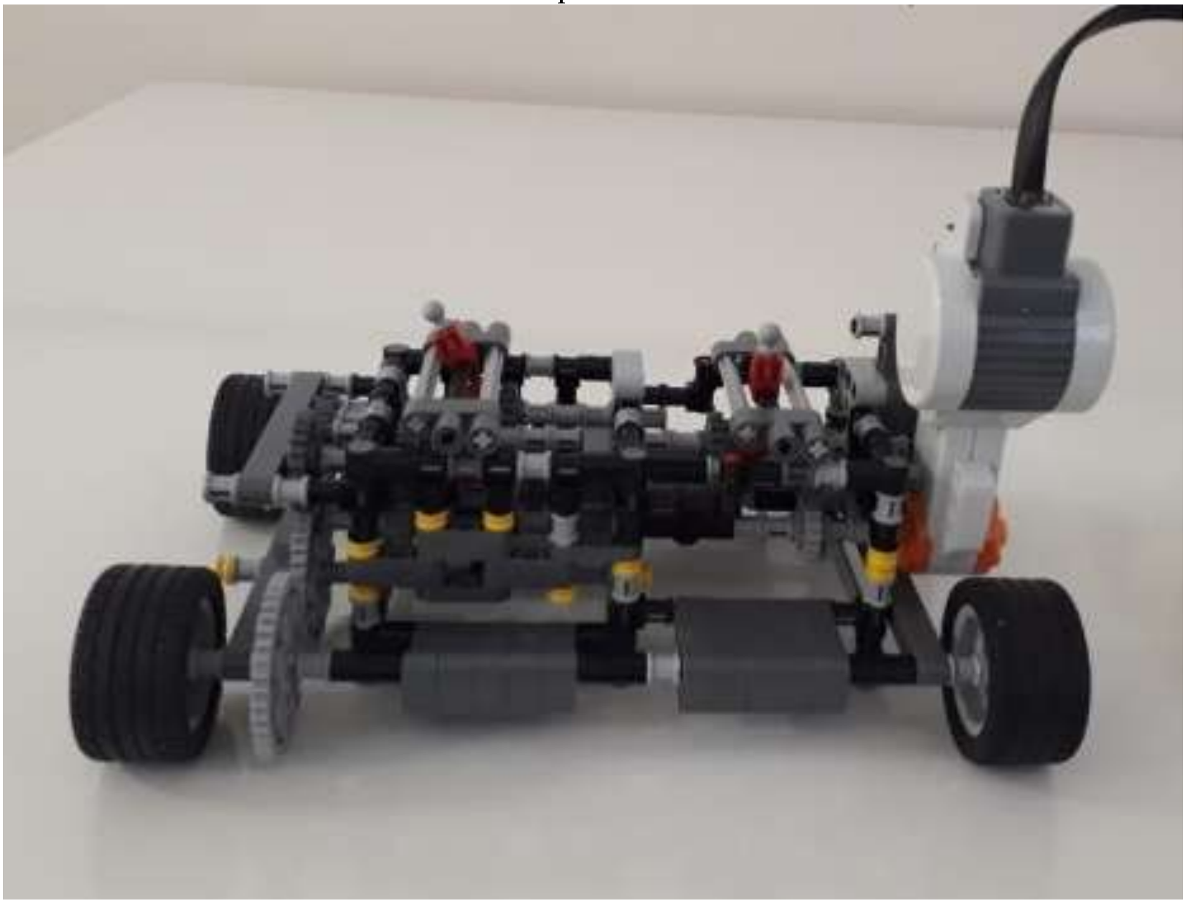
Figura 48 – Primeiro protótipo do carrinho



Fonte: O autor.

Este primeiro protótipo já funcionou com uma variação exponencial na razão de redução de 1/3 entre as marchas, da quarta para a primeira. Porém, com a falta de algumas peças, houve muita adaptação e improvisação, o que não possibilitava uma boa estabilidade da estrutura do carrinho quando este estava em movimento, e também uma apresentação estética não muito satisfatória. Assim, desta vez, com as peças cedidas pela então Universidade Federal de Goiás, campus Catalão, que estava nesta época em fase de desmembramento para se tornar a UFCat – Universidade Federal de Catalão, foi montada a versão final do câmbio, bem mais compacta, estável e esteticamente harmoniosa, conforme foto abaixo (Figura 49):

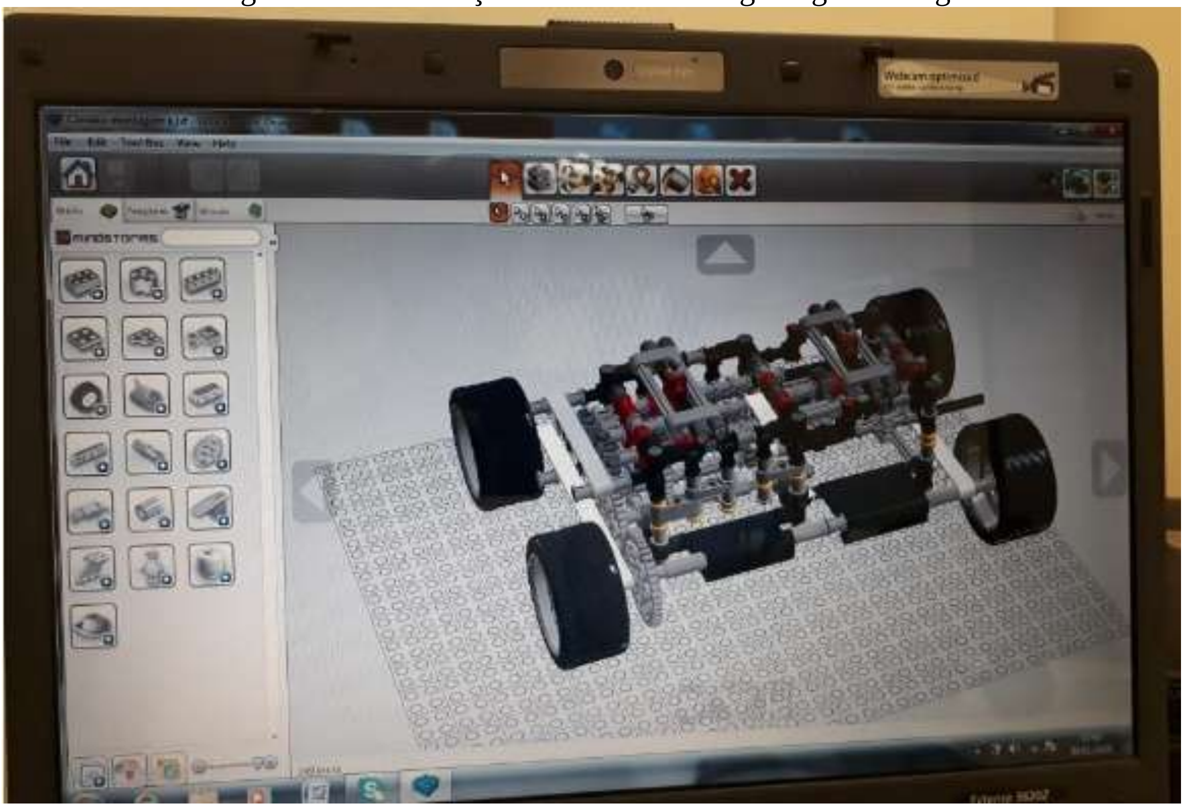
Figura 49 – Versão final do carrinho, com câmbio de 4 marchas modelado pela função exponencial



Fonte: O autor.

Mesmo com o carrinho já construído, seu funcionamento já modelado pela função exponencial graças à variação entre a velocidade de cada uma das quatro marchas, os desafios não se cessaram ali. Como poderiam ser registrados e repassados os passos da construção? Visto que a intenção não era apenas a de criar um objeto para estudo da função exponencial, mas a própria construção do objeto, também era o objetivo, afinal, o aprender fazendo, era um dos focos da nossa proposta. Então, por intermédio do Prof. Dr. Fernando da Costa Barbosa, tivemos ciência do *software* Lego Digital Designer, que possibilita montagens digitais fidedignas às peças reais, gerando também um passo a passo da montagem feita. Utilizando essa ferramenta, implementamos à sequência didática o passo a passo da montagem, conforme foto abaixo (Figura 50):

Figura 50 – Construção do câmbio no Lego Digital Designer



Fonte: O autor.

Assim, passamos para a elaboração da sequência didática, pois, neste momento, sim, tivemos a confirmação da resposta positiva quanto à nossa pergunta norteadora, se seria possível abstrair a função exponencial de interações entre engrenagens LEGO® e com essas interações construir um câmbio de marchas que pudesse ser objeto de estudo em uma sequência didática para auxílio no ensino da função exponencial.

Apesar de não ter ocorrido a aplicação da sequência didática deste trabalho, esta ficará como um trabalho futuro bastante promissor, pois toda a experiência adquirida durante a construção do câmbio, a solução dos desafios apresentados para se chegar ao objetivo final, e o entendimento de toda matemática presente entre as interações de engrenagens foram fantásticas, difíceis até de serem mensuradas. Isso porque, quando nos propomos a modelar algo concreto como um câmbio de marchas, por conceitos matemáticos abstratos, aproximamos a matemática presente no mundo teórico para a presente no mundo real, o que nos faz interiorizar de uma forma sólida tais conhecimentos. Como corrobora Piaget (1978), utilizamos modelos já interiorizados em nosso intelecto para assimilar e acomodar novos modelos advindos da relação com objetos do meio. E quando esta interiorização é acompanhada de afetividade, ela é efetivamente significativa (PAPERT, 1985).

Portanto, concluímos que as engrenagens e, suas interações, como apontou Papert (1985), são ótimas para serem modeladas por conceitos matemáticos, e mediante a referida abstração, excelentes objetos de estudos a serem utilizados no ensino destes conceitos abstraídos. E, que trabalhar com a Robótica Educacional além do desenvolvimento de protótipos,*" é um estímulo à criatividade"* (BARBOSA, 2011, p. 152).

E claro, que, ao conseguir aproximar a matemática teórica – até então muitas, as vezes, imaginada pelos alunos, presente apenas ali no quadro, na ponta do giz, na cabeça do professor – da matemática prática, existente no mundo real, estamos tratando de uma aproximação a um mundo não feito apenas de conceitos ou aprendizagens ou atitudes, mas, como afirmara Zabala (1998) da integração dos três. Logo, a Robótica Educacional é um recurso promissor para alcançar o esperado (pela BNCC) desenvolvimento integral dos alunos, pois proporciona atividades que exigem simultaneamente conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais, envolvidos, por exemplo, na construção de um protótipo.

No entanto, ainda assim, mesmo com todos esses benefícios apontados, por este e por diversos trabalhos sobre a robótica educacional, também é fato que dificuldades, como a falta de recursos tecnológicos digitais nas escolas, falta de conhecimento da operacionalidade dessas tecnologias, e a falta até no momento de políticas públicas eficientes para essa integração de tecnologias digitais e educação, ainda são desafios a serem vencidos por todos os professores que se colocarem dispostos a mergulhar nesse mundo das tecnologias para imergir na escola pública.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Pedro F.; LIMA, Maria Cândida M. A. **Educom**. Brasília: MEC, OEA, 1993. v. 1 e 2.

ANUÁRIO BRASILEIRO DA EDUCAÇÃO BÁSICA, 2019, 8 Ed. São Paulo: Editora Moderna, 2019.

BARBOSA, F. C. **Educação e robótica educacional na escola pública: as artes do fazer**. 2011. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Uberlândia. 2011.

BENITTI, F. B. V. et al. **Experimentação com robótica educativa no ensino médio: ambiente, atividades e resultados.** Blumenau: Departamento de Sistemas e Computação Universidade Regional de Blumenau, 2009. Disponível em: http://robolab.inf.furb.br/robolab/artigos/robolab/wie2009.pdf. Acessado em: 22 out. 2018.

BNCC, **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino infantil e fundamental. 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc. Acessado em: 10 ago. 2019.

BNCC, **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acessado em: 02 out. 2019.

BRASIL. Decreto-lei n° 9.204 2017. Institui o Programa de Inovação Educação Conectada e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 24 nov. 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9204.htm. Acessado em: 28 fev. 2020.

CHIAROTTINO, Z. R. **Em Busca do Sentido da Obra de Jean Piaget**. São Paulo: Ática, 1984.

Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acessado em: 26 Nov. 2018.

FGV. FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS. Pesquisa Anual do Uso de TI nas Empresas. **GVcia**, FGV-EAESP, 29ª edição, 2018. Disponível hein: https://eaesp.fgv.br/sites/eaesp.fgv.br/files/pesti2018gvciappt.pdf. Acessado em: 01 set. 2019.

FREITAG, B. **Sociedade e Consciência:** um estudo piagetiano na favela e na escola. São Paulo: Cortez, 1986.

IDEB. Índice de Desenvolvimento da Educação Básica. Disponível em: http://ideb.inep.gov.br/resultado/. Acessado em: 04 out. 2018.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias**: O novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus, 2007.

LEGO GROUP. **Linha cronológica da origem e evolução da empresa**. 2010. Disponível em: https://www.lego.com/pt-br/aboutus/lego-group/thelegohistory. Acesso em: 01 nov. 2019.

LIMA E. L., CARVALHO P. C. P., WAGNER E., MORGADO A. C. **Temas e Problemas**. Sociedade Brasileira de Matemática, 3. Ed. Rio de Janeiro-RJ, 2010.

LIMA, E.L. **Números e Funções Reais**. 1. Ed. Coleção PROFMAT SBM. Rio de Janeiro-RJ. 2013.

MACEDO, T. E. **As Tecnologias da Informação e Comunicação como ferramenta de enriquecimento para a Educação**. Artigo para o Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), 2007. Paraná – Universidade Estadual de Ponta Grossa.

MEC. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Programa Educação Conectada**. 2019. Disponível em: http://educacaoconectada.mec.gov.br/o-programa/sobre. Acessado em: 10 jan. 2020.

MIT MEDIA LAB. **Massachusetts Institute of Technology Site**. 2017. Disponível em: https://www.media.mit.edu/. Acesso em: 18 fev. 2020.

MIT NEWS. Fundação LEGO doa bolsas do Media Lab em homenagem a Seymour Papert. **Site de comunicação da MIT, Instituto de Tecnologia de Massachusetts**. 2017. Disponível em: http://news.mit.edu/2017/lego-foundation-endows-media-lab-fellowships-honoring-seymour-papert-0126. Acessado em: 03 nov. 2019.

MORAES, R. A. **A política de informática na educação brasileira:nacionalismo ao neoliberalismo**. Campinas, 1996. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas.

MORAES,R. A. **Informática educativa no Brasil**: **das origens à década de 1990**. Uberlândia: Navegando Publicações, 2016.

MORELATO,L. A. et al. Avaliando diferentes possibilidades de uso da Robótica na Educação. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, REnCiMa, v. 1,n. 2, p. 80-96, 2010.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: **introdução à análise funcional**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática).

PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky**: a relevância do social.3. Ed. São Paulo: Summus, 2001.

PAPERT, S. **A Máquina das Crianças**: **Repensando a Escola na Era da Informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPERT, S. **A família em rede**: **ultrapassando a barreira digital entre gerações**. Trad. Fernando José Silva Nunes e Fernando Augusto Bensabat Lacerda e Melo. Lisboa: Relógio D Água, 1997.

PAPERT, S. **LOGO:Computadores e Educação**. Trad. José Armando Valente, Beatriz Bitelman, Afira Vianna Ripper. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

PAZOS, F. **Automação de Sistemas & Robótica**. Axcel Books do Brasil. 2002.

PIAGET, J. **Epistemologia Genética**: **Sabedoria e Ilusões da Filosofia e Problemas de Psicologia Genética**.In: Os pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

PIAGET, J. **Psicologia e Epistemologia**. Rio de Janeiro: Forense Unicersitária, 1978.

RIBENBOIM, P. **Funções, Limites e Continuidade**. 1. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. p. 215. (Coleção Textos Universitários).

SANTOS, F. Robótica Educacional: Geometria da direção de triciclos com drive governor. **Revista eletrônica TECCEN**, Vassouras, v. 2, n. 1, p. 1-7, out.-dez. 2008.

SILVA, A. A. **O Ensino de Funções Lineares: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do Kit LEGO® Mindstorms**. 2014. 61 f. Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.

SOUZA, P. R. **A Revolução Gerenciada**. **Educação no Brasil**. 1995-2002. São Paulo: Financial Times, Prentice Hall, 2005.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** Trad. Ernãni E da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.