Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Luciano Melo Santana

Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso.

Rio de Janeiro

2013

Luciano Melo Santana

Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Adriano Maurício de Almeida Côrtes

Doutor em Engenharia Civil - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

Santana, Luciano

Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso. / Luciano Santana - 2013

44.p

1.Matemática 2.Geometria Euclidiana 3. Números Construtíveis. I.Título.

CDU 536.21

Luciano Melo Santana

Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 19 de julho de 2013

BANCA EXAMINADORA

Adriano Maurício de Almeida Côrtes

Doutor em Engenharia Civil - UFRJ

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Renata Alves Carvalho Crippa

Mestre em Matemática - UFRJ

Dedico esta obra a minha família.

Resumo

Os problemas de duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo dado usando somente régua e compasso inspiraram e motivaram vários matemáticos da antiguidade até meados do século XIX.

Neste trabalho de conclusão de curso destacamos a evolução histórica na busca de solução para estes problemas assim como a origem dos mesmos. Mostraremos, ainda, relações entre os problemas geométricos e suas respectivas soluções algébricas e a impossibilidade de uma solução baseada somente no uso de régua e compasso.

Abstract

The problems related to the cube's doubling and the trisection of a given angle by using only a ruler and a compass as tools have inspired and motivated many mathematicians since early ages until the middle of the nineteenth century.

In this final project, we highlight the historical evolution in the search for the solution of these problems as well as their origin. Furthermore, it will be pointed out relations between geometric problems and their respective algebraic solutions and also the impossibility of a solution based only on a ruler and a compass as tools.

Agradecimentos

Agradeço a minha família por estar ao meu lado neste período me apoiando em todos os momentos. Aos meus professores da Unirio que comprometidos com o programa tiveram papel fundamental nos meus resultados.As direções do CIEP Henfil e INES que colaboraram em minha liberação para estudo. Aos idealizadores do programa Profmat que com a criação deste mestrado me proporcionou oportunidade de capacitação, ampliando meu horizonte, fazendo eu enxergar mais longe e desta forma melhorar meu oficio que é ensinar matemática para alunos do ensino básico.

Sumário

1 Introdução

Alvo de estudo dos matemáticos gregos e com grande importância no desenvolvimento da matemática, "Os três problemas clássicos de Geometria" despertaram interesse de vários matemáticos e amantes da Geometria. Eles são: os problemas da quadratura do circulo, da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo. Várias foram as tentativas até o século XIX em resolver esses problemas usando régua não graduada e compasso, lembrando que estes são os únicos instrumentos utilizados por Euclides[1] em sua obra *Elementos*, sendo conhecidos portanto como instrumentos euclidianos.

O problema da **duplicação do cubo**, também conhecido como o problema deliano, consiste em construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de outro cubo dado. Já o problema da **trissecção do ângulo** consiste em dividir um ângulo dado qualquer em três partes iguais. Por último, o problema da **quadratura do círculo** consiste em construir um quadrado com área igual a de um círculo dado. Desses não iremos aprofundar o último.

A busca pela solução destes problemas somente com régua (que doravante assumiremos não graduada exceto dito o contrário), e compasso pelos gregos contribuiu e influenciou o estudo da Geometria, levando a descobertas, das quais destacamos as cônicas e várias curvas cúbicas, quadráticas e transcendentes. Como já dito, as tentativas de solução ocorreram até o século XIX, quando finalmente em 1837 o matemático francês Pierre Laurent Wantzel [3][4] provou a impossibilidade da solução somente com régua e compasso, os instrumentos euclidianos. É interessante destacar que o intervalo de tempo entre a concepção dos problemas e a prova da impossibilidade de solução ocorrida no século XIX foi maior que 2000 anos.

Os gregos foram incansáveis na busca de soluções, e mesmo sem conseguir soluções com os instrumentos euclidianos, acharam outras soluções com outros tipos de instrumentos e construções. O que levou os matemáticos gregos, ou o porque, a tentarem resolver tais problemas somente com o uso de régua e compasso não será citado aqui,

[1]Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica.

contudo de acordo com o texto publicado por Pitombeira [5] um aprofundamento do tema pode ser encontrado em Bkouche ET Joelle[6].

No capítulo seguinte serão apresentados algumas soluções (que não usam somente régua e compasso) para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Em seguida, serão definidos **corpos construtíveis** e que números podem ser construídos com régua e compasso, com isso mostraremos a impossibilidade de solução para estes problemas usando instrumentos euclidianos. Por fim, será apresentado uma proposta de prática envolvendo o problema da duplicação do cubo para turmas do ensino médio.

2 Os problemas clássicos

2.1 A duplicação do cubo

A origem deste problema não é certa, e graças a Eutócio de Áscalon[1] possuímos os principais conhecimentos históricos sobre o problema da duplicação do cubo. Existem duas lendas sobre a origem, a primeira diz que o problema surgiu com a insatisfação de um rei com o tamanho do túmulo construído para seu filho. O rei ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado. Tal situação foi descrita por um poeta, que por falta de conhecimento em matemática, induziu o rei que para resolver a questão bastava dobrar cada medida do tumulo. Este absurdo matemático fez com que os geômetras da época buscassem uma solução de como dobrar um sólido mantendo sua forma.

Figura 2.1: Localização geográfica da cidade de Delos na Grécia

A outra diz respeito à duplicação de um altar que em 427 a.C Péricles[2] teria morrido juntamente com um quarto da população de Atenas devido à peste. Ao consultar o Oráculo de Apolo, em Delos (vide figura 2.1), para saber como lidar com essa situação, os atenienses receberam como resposta que deveriam dobrar o tamanho do altar de Apolo que tinha formato de um cubo. Então multiplicaram por 2 as dimensões do altar porém

[1]Eutócio de Ascalon foi um matemático grego que escreveu comentários sobre vários tratados de Arquimedes e sobre a "Cônica"de Apolônio.

[2]Péricles foi um grande estadista da Grécia antiga.

a peste não acabou. Por suposição esse problema caiu na mão de Platão[3] (figura 2.2) que o entregou aos matemáticos.

Independente da origem do problema, o fato é que a duplicação do cubo foi estudada na Academia de Platão. Esta afirmação se baseia em escritos matemáticos ligados a Platão, inclusive com soluções geométricas superiores [4]atribuídas a Eudoxo[5], Menaecmo[6] e ao próprio Platão.

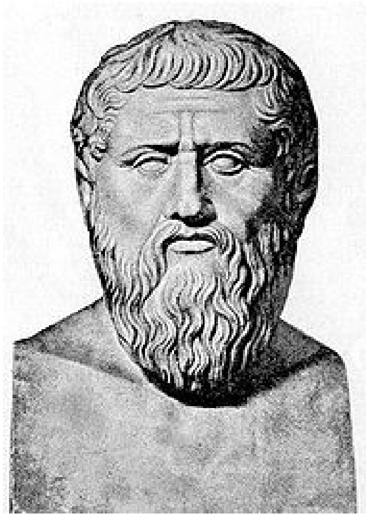


Figura 2.2: Platão

Segundo Horward Eves [7], o primeiro avanço na solução deste problema foi dado por Hipócrates[7] de Quios que reduziu o problema à construção de duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2. Tal solução não agradou aos comentadores da obra matemática grega, pois não fornece solução para o problema original, contudo acabou influenciando várias outras tentativas, que seguiram a mesma linha.

O que Hipócrates afirma é que se dado um cubo de aresta a, encontramos dois segmentos x e y tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

isto é encontramos duas meias proporcionais entre os segmentos a e b, então o cubo de

[3]Platão nasceu em Atenas por volta de 300a.C, estudou filosofia e matemática e criou sua famosa academia

[4]Soluções que utilizavam curvas que não a reta, circunferências e superfícies que não o plano e esfera

[5]Eudoxo era matemático que estudou com Platão e fundou uma escola em Cízico no norte da Àsia menor

[6]Menaceno foi discípulo de Eudoxo, amigo de Platão e inventou âs cônicas

[7]Hipócrates foi matemático geômetra nascido na Grécia antiga por volta de 300a.C

aresta x tem o volume ampliado na razão $\frac{b}{a}$. Meias proporcionais(na linguagem atual) entre duas grandezas é o equivalente ao encontrar a média geométrica, no caso de Hipócrates são duas meias ou seja, de acordo com a proporção mostrada, x seria a média geométrica de a e y, e y a média geométrica de x e b.

A duplicação do cubo é um caso particular, quando $b = 2a$, e procuramos assim x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. De fato, facilmente se deduz das proporções anteriores que $x^3 = 2a^3$, o que prova que o cubo de aresta x tem o dobro do volume do cubo de aresta a, ou seja a razão entre os cubo de arestas a e x respectivamente é de 1 para 2, pois

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{x \cdot x \cdot x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$$

Com efeito, se

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

temos as duas relações,

$$x^2 = y$$

$$xy = 2$$

substituindo a primeira relação na segunda temos que

$$x^3 = 2.$$

No caso geral, se x e y são duas meias proporcionais entre a e b, temos,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

logo,

$$x^2 = ay \text{ e } xy = ab$$

dai observamos que,

$$x^3 = axy = a^2b$$

assim,

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}$$

Existem uma série de soluções baseadas em meias proporcionais entre duas grandezas, que não considera somente construções com régua e compasso. Uma solução de destaque nesta linha foi apresentada por Arquitas (400 a.C) que usou geometria superior[8]. Em sua solução deve-se achar um ponto de intersecção entre um cilindro circular reto, um toro e um cone circular reto. Iremos apresentar duas soluções dentro deste contexto: a de Platão e a de Arquitas.

2.1.1 A solução de Platão

O filósofo grego Platão (viveu por volta de 400 a.C) era um amante da matemática e, de acordo com Heath [8], reprovou as soluções mecânicas por estas destruírem a virtuosidade da geometria. Curioso então que esta solução seja conhecida como máquina de Platão, que é um dispositivo $ACDF$ (figura 2.3), formado por partes rígidas, com AC e FD paralelas e CD perpendicular a ambas. Temos ainda BE é perpendicular a AC e FD podendo deslizar ao longo de ambas.

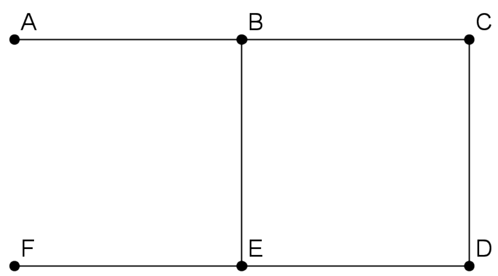


Figura 2.3: Máquina de Platão

O procedimento para encontrar duas meias proporcionais entre $\overline{ON} = a$ e $\overline{OM} = b$ (considerando o caso particular em que $\overline{OM} = \overline{2ON}$ conforme mostrado na

[8]Os 300 primeiros anos da matemática grega podem ser divididos em três linhas de desenvolvimento.A primeira linha é o desenvolvimento material que acabou se organizando em os *Os elementos*,a segunda linha consiste no desenvolvimento de noções relacionadas com infinitésimos e infinitos e a terceira linha é conhecida como **geometria superior** ou de curvas que não a reta,circunferência e superfície que não o plano e esfera. Então soluções que apresentam estes elementos será dito que usou geometria superior

seção anterior), é movimentar $ACDF$ em torno de dois eixos perpendiculares (ver figura 2.4) , fazendo com que o segmento CD passe por M, o ponto C deve estar sobre o eixo horizontal e vamos deslizar BE até que passe por N e que B fique sobre o eixo vertical.

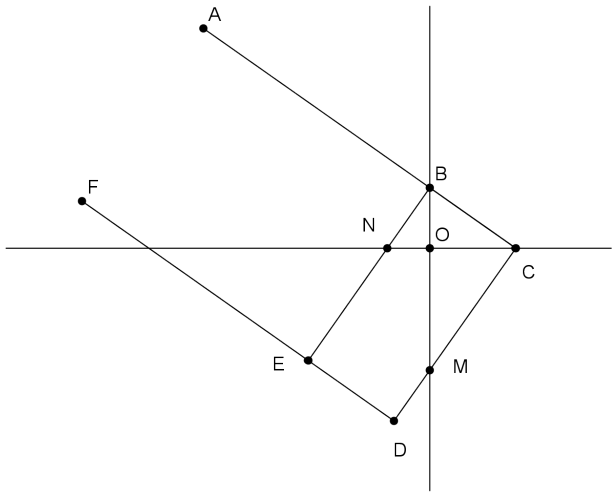


Figura 2.4: Máquina de Platão

Os triângulos MOC e NOB são semelhantes. Dessa forma,

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}}.$$

Igualmente os triângulos NOB e OCB são semelhantes, então

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}.$$

Segue que,

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} \qquad \therefore \qquad \frac{a}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{b = 2a}$$

Observamos então que OB e OC são meias proporcionais entra a e b

Vamos agora construir esta solução usado o esquadro de Platão(ver figura 2.5). De acordo com ESTRADA[9]temos a seguinte definição estre instrumento:"O esquadro de Platão, seria um instrumento constituído por três réguas, duas delas paralelas entre si e uma terceira perpendicular às anteriores, estando esta última fixada a uma das primeiras, mas permitindo a deslocação da outra numa calha. Portanto, duas das réguas seriam fixas, enquanto que a outra deslizaria paralelamente a si mesma."

Devemos traçar duas retas perpendiculares r e s com ponto comum em O e marque dois pontos A e B sobre as retas s e r respectivamente, de modo que $\overline{AO}$ =

$2\overline{OB}$(note que estamos considerando que $\overline{OB} = a$ como sendo a aresta do cubo que queremos duplicar).

Agora, manipulando o esquadro de Platão, vamos ajustar a figura de modo que as duas réguas paralelas passem por A e B, tomando como Y o ponto da régua que está sobre a reta r e como X o ponto de encontro da régua com a reta s, conforme figura 2.6.

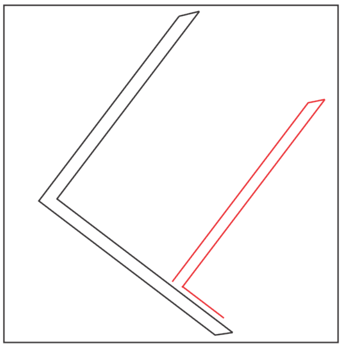


Figura 2.5: Esquadros de Platão

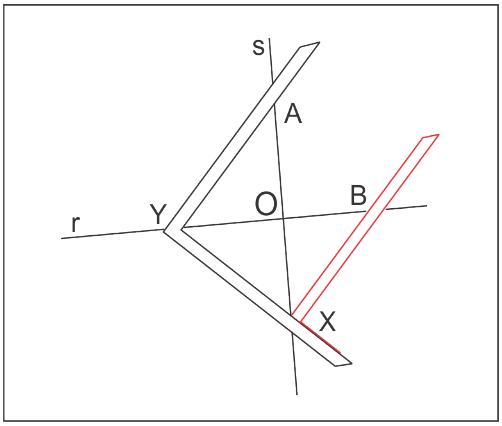


Figura 2.6: Solução da duplicação do cubo com esquadro de Platão

Dessa forma, os segmentos OX e OY são duas meias proporcionais procurados, como provamos anteriormente, sendo OX a aresta do cubo procurado.

Conforme encontramos em Heath([8]), a autoria desta solução mecânica atribuída a Platão tem como base duas teorias. A primeira defende que Platão inventou esta solução mecânica para mostrar como é fácil descobrir tais soluções e a segunda defende que esta solução foi inventada pelos seus discípulos em sua Academia.

2.1.2 A solução de Arquitas

A solução de Arquitas é muito engenhosa e bela pois trata-se de uma construção em três dimensões. Essa solução tem grande interesse histórico, porque é o exemplo mais antigo para o problema da duplicação do cubo (considerando outros recursos além de régua e compasso) da qual temos conhecimento.

A ideia desta construção é encontrar um ponto obtido pela interseção de três superfícies de revolução: um cone reto, um cilindro e um toro. A curva de Arquitas é obtida com a interseção do toro e do cilindro enquanto o ponto procurado é encontrado com a interseção desta curva com o cone.

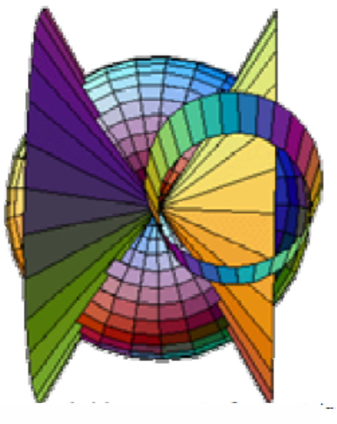


Figura 2.7: Imagem obtida com o Software Mathematica - Fonte: José Miguel Souza

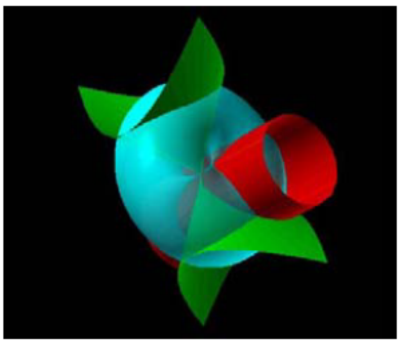


Figura 2.8: Imagem obtida com o Software Graphing Calculator - Fonte: José miguel Souza

Vamos utilizar geometria analítica e computação gráfica para entender a solução de Arquitas. Será representada aqui a solução conforme apresentada no site `http://blog.ricbit.com/2010/10/o-altar-de-apolo.html`. O primeiro passo é construir o segmento com o lado do cubo que queremos duplicar onde iremos chamar de a a medida deste segmento(figura 2.9), de modo que ele fique em cima do eixo x e com uma das suas extremidades na origem dos eixos. Em seguida centrando no vértice do segmento a que não esta na origem, nós desenhamos três círculos perpendiculares de raio a, paralelos a cada um dos eixos coordenados:

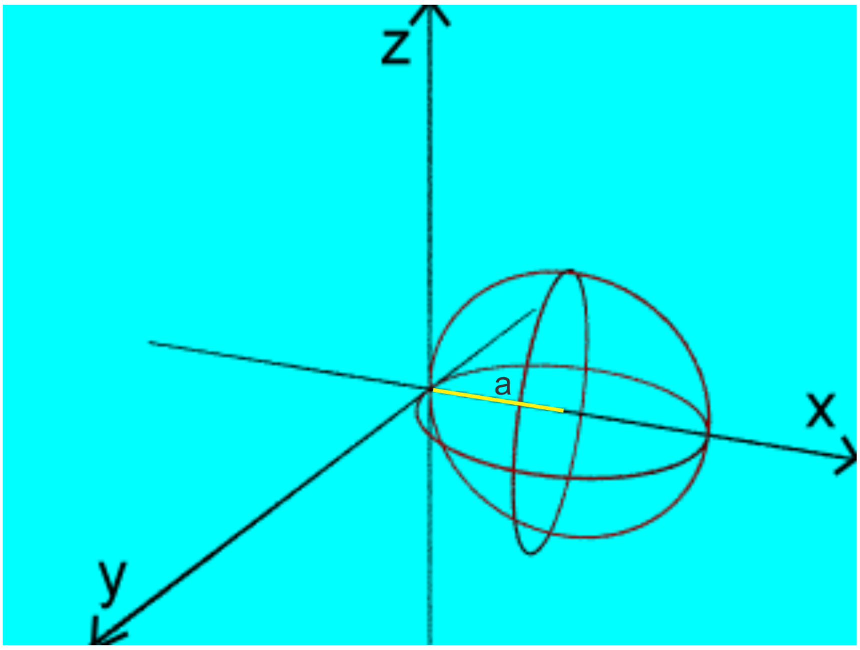


Figura 2.9: Construção dos círculos de raios a - Fonte:Ricardo Bittencourt

Pelo círculo perpendicular ao eixo Ox nós traçamos um cone que parte da origem(figura 2.10).

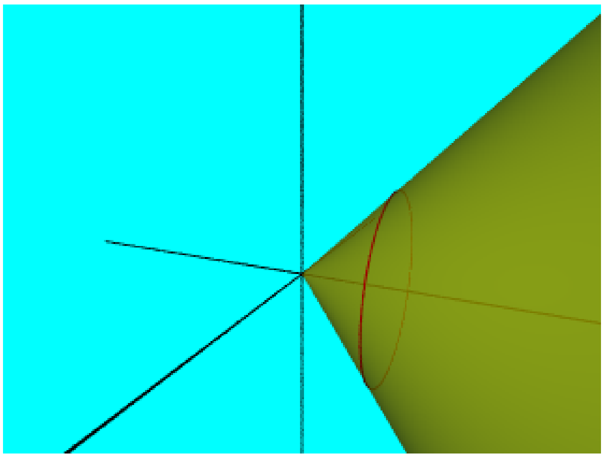


Figura 2.10: Construção do cone - Fonte:Ricardo Bittencourt

Este cone tem como equação $x^2 = y^2 + z^2$.

O próximo sólido a ser construído é o cilindro a partir da circunferência paralela ao plano xy(figura 2.11).

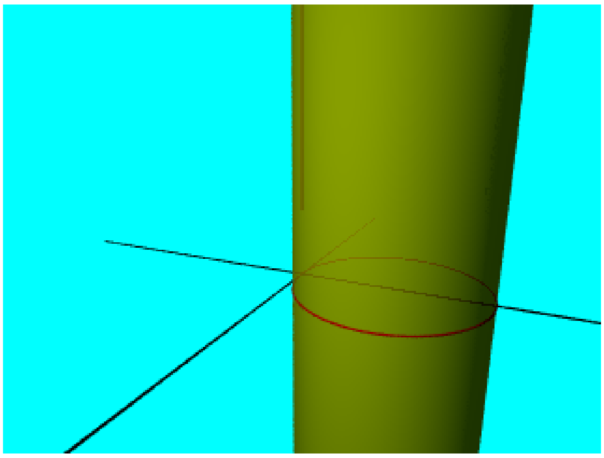


Figura 2.11: Construção do cilindro - Fonte:Ricardo Bittencourt

A equação deste cilindro é $x^2 + y^2 = 2ax$.

Por fim rotacionamos a circunferência que sobrou sobre o eixo Z, gerando um toro. A equação deste toro é $(x^2 + y^2 + z^2)^2$=$4a^2(x^2 + y^2)$.

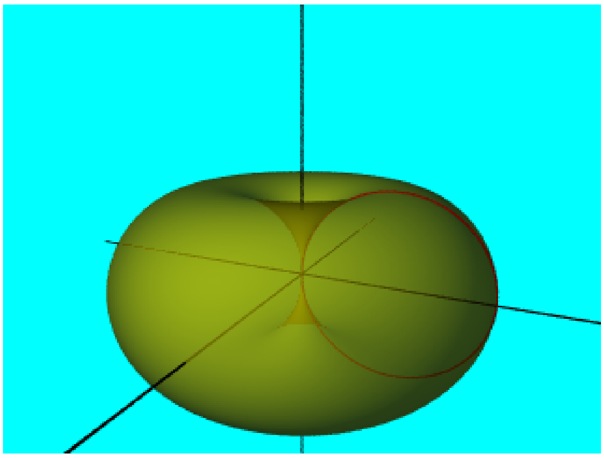


Figura 2.12: Construção do toro em torno de oZ - Fonte:Ricardo Bittencourt

O ponto de interseção destas três superfícies pode ser visualizada na figura 2.13.

Resolvendo o sistema de equações destas superfícies apresentadas teremos:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 (cone) \\ x^2 + y^2 = 2ax (cilindro) \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)(toro) \end{cases}$$

Inserindo na equação do toro as equações do cone e do cilindro teremos:

$$(x^2 + x^2)^2 = 4a^2(2ax)$$

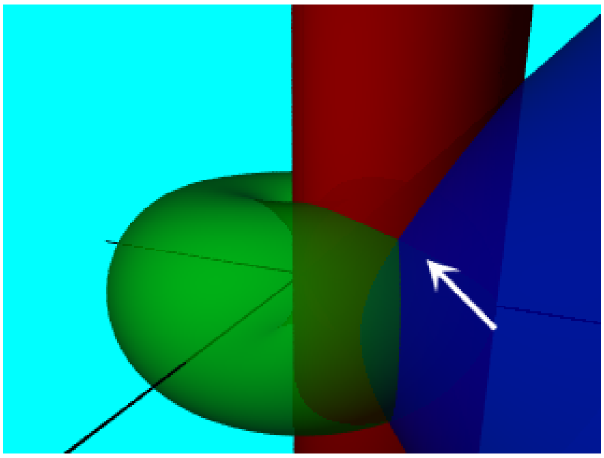


Figura 2.13: Interseção do toro, cilindro e o cone - Fonte:Ricardo Bittencourt

então,

$$4x^2 = 8a^3x$$

segue que,

$$x^3 = 2a^3$$

e por fim o resultado esperado,

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Vamos as deduções de cada equação das superfícies citadas acima. O cone em questão é formado por um contínuo de círculos em planos paralelos ao plano yz. Portanto para cada circulo a equação deve ser:

$$y^2 + z^2 = r^2,$$

mas o circulo em $x = 0$ tem raio igual a zero e em $x = a$ tem raio a. Logo o raio é igual a x e dessa forma:

$$\boxed{x^2 = y^2 + z^2}.$$

O cilindro é um contínuo de círculos em planos paralelos ao plano xy, todos com o mesmo raio a e centrado no ponto $(a, 0, 0)$. O eixo Oz neste caso é qualquer, então a equação é:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \text{ logo}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 2ax}.$$

Afim de demonstramos a equação do nosso toro vamos a algumas considerações preliminares sobre Superfícies de Revolução. Seja C uma curva e r uma reta contidas num plano π .A superfície de revolução S(figura 2.14) de geratriz C e eixo de revolução r é a superfície descrita pela rotação da curva C em torno da reta r.

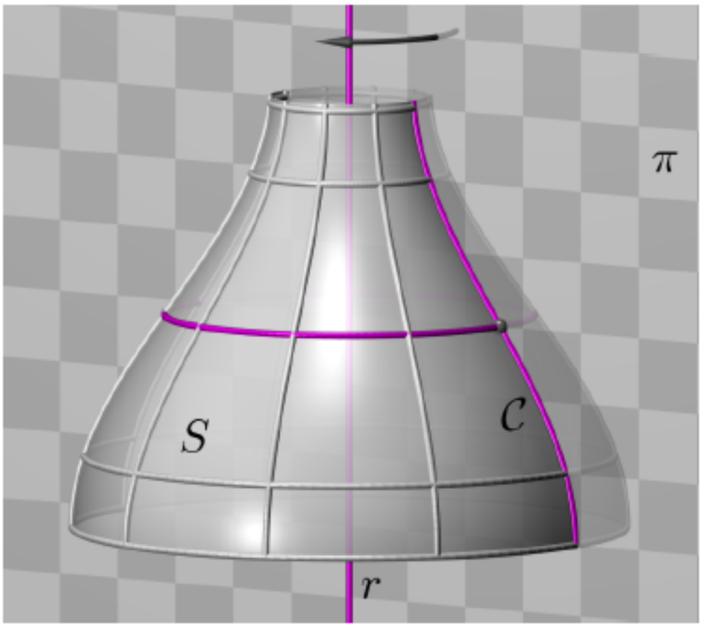


Figura 2.14: Superfície de revolução S, geratriz C e eixo r contidos no plano π - Fonte: K. Frensel - J. Delgado

Veremos agora como determinar a equação cartesiana de uma superfície de revolução S cuja geratriz é uma curva contida no plano YZ, descrita de forma implícita pelas equações:

$$\begin{cases} f(y,z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

. Suponhamos primeiro que o eixo de revolução r é o eixo OZ.

Pela definição, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a S se, e só se, existe um ponto $P' = (0, y', z')$ pertencente a C tal que P e P' estão sobre o mesmo paralelo(figura 2.15).

Como o eixo OZ é o eixo de revolução, este paralelo é um círculo contido no plano π perpendicular ao eixo OZ que contém os pontos P e P'. Logo $z = z'$ e $C = (0, 0, z) = (0, 0, z')$ é o centro do paralelo, pois$\{C\} = \pi \cap r$.

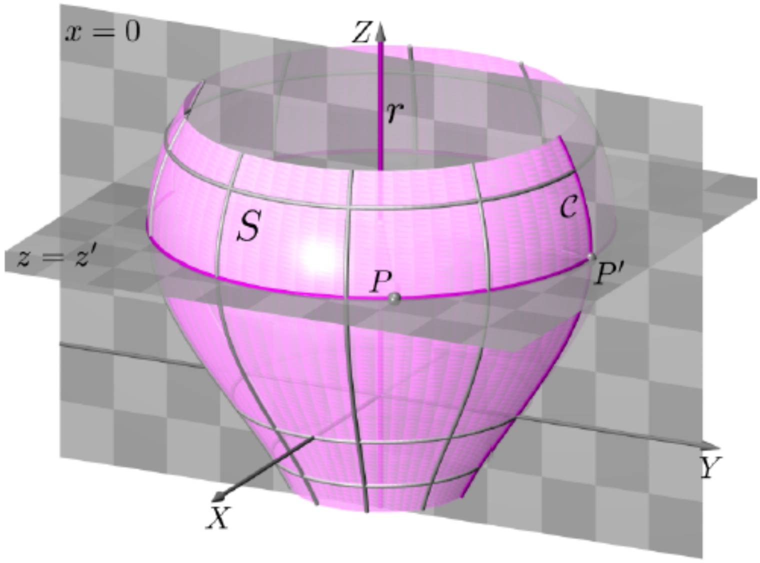


Figura 2.15: Superfície de revolução S e pontos $P \in S$,$P' \in C$ no mesmo paralelo - Fonte: K. Frensel - J. Delgado

Além disso, como P e P' estão sobre um círculo de centro C, o raio deste círculo é $d(P', C) = d(P, C)$, ou seja, $\mid y' \mid = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Como $f(y', z') = 0$, temos que $P(x, y, z)$ pertence a S se, e só se , $f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$, que é a equação cartesiana de S.

De posse deste resultado podemos agora encontrar a equação cartesiana do nosso Toro, que é gerado pela circunferência no plano XZ de raio a com centro em $(a, 0, 0)$, em torno de OZ. Dessa forma a geratriz do toro é o círculo:

$$C : \begin{cases} (x - a)^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Como para todo $P' = (x', 0, z') \in C$, devemos substituir, na equação $f(x', z') = (x' - a)^2 + z'^2 - a^2 = 0$, a variável z' por z e a variável x' por $\sqrt{x^2 + y^2}$, teremos

$$\begin{gathered} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2} + a^2 + z^2 - a^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}, \end{gathered}$$

logo,

$$\boxed{(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)} \text{ é a equação do toro.}$$

A solução de Arquitas nos leva a uma viagem no tempo e faz imaginarmos como seria a reprodução de imagens para ilustrar a solução de Arquitas com instrumentos da época. Nos tempos de hoje contamos com a geometria analítica e com softwares.

2.2 A trissecção do ângulo

Segundo Howard Eves[7], acredita-se que esse problema surgiu em investigações matemáticas realizadas pelos gregos que estavam interessados em construir ângulos de medidas diversas.

Este problema apresenta grande variedade de soluções. Acredita-se que Hípias de Eleis, que viveu no século V a.C, foi o precursor na tentativa de solucionar este problema, usando recursos de construções e curvas que não podem ser efetuadas somente com régua e compasso.

As soluções inicialmente iam na direção da geometria plana, ou seja usavam apenas retas e círculos. Heath(1981)[8] em sua obra destaca esta idéia:

> "Dizem-nos que os antigos tentaram, sem sucesso resolver o problema por geometria plana, ou seja por meio de retas e círculos. Eles falharam pois o problema não é "plano" e sim "sólido"."

Com a evolução da matemática e a descoberta da cônicas, o problema da trissecção do ângulo foi reduzido ao que conhecemos hoje como construção neusis ou "intercalação".

Neusis vem do grego *neuein* que significa incline ou seja, literalmente quer dizer "inclinação". Esse tipo de construção foi amplamente usada por Arquimedes e não se encaixava nos métodos euclidianos, pois usava uma régua graduada. Conforme veremos abaixo, em uma construção por neusis deve-se ajustar um segmento dado entre duas curvas dadas, garantindo que o segmento passe por um ponto dado.

2.2.1 A trissecção do ângulo por Arquimedes

Seja o ângulo $A\hat{O}B$ da figura 2.16 a ser trissectado.

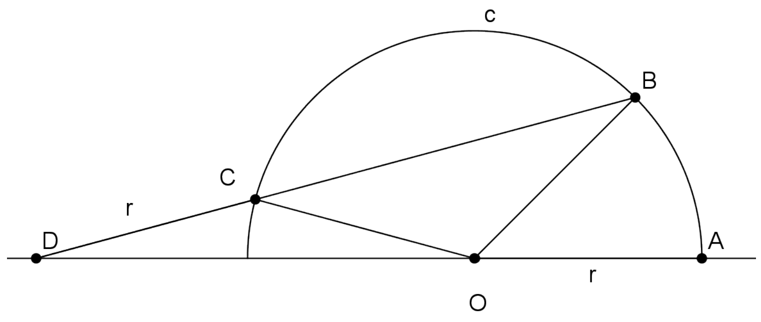


Figura 2.16: Trissecção de Arquimedes

Centrando em O traçar um circulo de raio r igual a medida de $\overline{OA}$. Prolongue o raio $\overline{AO}$ e trace DB de tal forma que $\overline{DC} = r$. O ângulo $A\hat{D}B$ mede um terço do ângulo dado e resolve o problema.

Observe que os triângulos(ver figura 2.17) DCO e COB são isósceles, de maneira que $x = C\hat{D}O = C\hat{O}D$. De modo análogo, $y = B\hat{C}O = O\hat{B}C$

No triângulo COD, pelo teorema da ângulo externo observamos que:

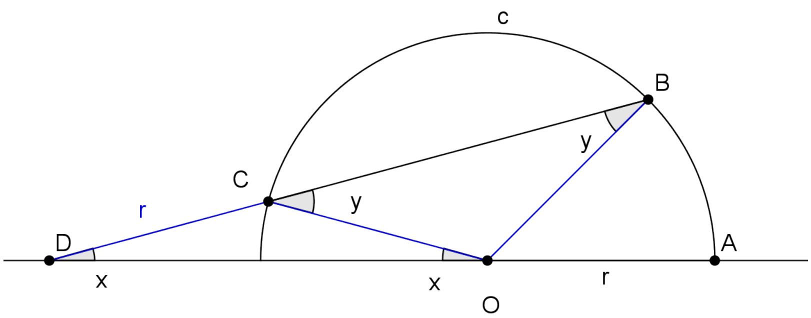


Figura 2.17: Trissecção de Arquimedes

$$B\hat{C}O = C\hat{B}O = 2 \cdot (C\hat{O}D)$$

Usando este mesmo teorema no triângulo BDO, temos que:

$$B\hat{O}A = B\hat{D}O + C\hat{B}O = 3 \cdot (B\hat{D}A)$$

O método de Arquimedes não usa apenas régua e compasso, é necessário ajustar uma reta que contenha os pontos D e C tal que $\overline{DC} = r$, D esteja na reta $\overleftrightarrow{AO}$ e C no círculo.

3 Corpos construíveis com régua e compasso

As construções geométricas aparecem na antiguidade e tem grande valor no desenvolvimento da matemática.

Devemos reforçar que na Geometria Euclidiana as construções geométricas seguem os seguintes procedimentos:

1. Com régua pode-se traçar uma reta de comprimento indefinido que passa por dois pontos dados.

2. Com o compasso pode-se traçar uma circunferência com centro dado num ponto dado passando por outro ponto qualquer dado.

Estes procedimentos são vistos como regras e restringem o uso da régua e do compasso de acordo com os procedimentos acima.

Vamos definir $\mathcal{C}$ como sendo o conjunto de números reais que podem ser construídos por construção com régua e compasso, através da unidade. Agora de acordo com os procedimentos acima podemos definir números construtíveis, mas antes vejamos algumas construções elementares com dois segmentos de medidas a e b (medidos a partir de um determinado segmento unitário):

a) **Soma**

Para construir $a + b$ (ver figura 3.1) traçamos uma reta e sobre ela marcamos com o compasso a distancia $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, logo $\overline{AC} = a + b$.

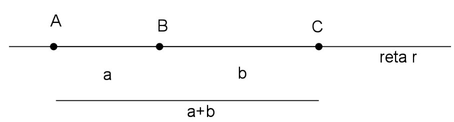


Figura 3.1: Construção da soma de segmentos

b) **Subtração**

Para construir a diferença $a-b$ com $a > b$, traçamos uma reta e sobre ela assinalamos com o compasso a distância $\overline{AB} = a$, e $\overline{AC} = b$, dessa forma temos que a diferença $a - b = \overline{CB} = c$ (ver figura 3.2, que para facilitar a visualização foram construídos retas paralelas a AB onde assinalamos os pontos A,B e C).

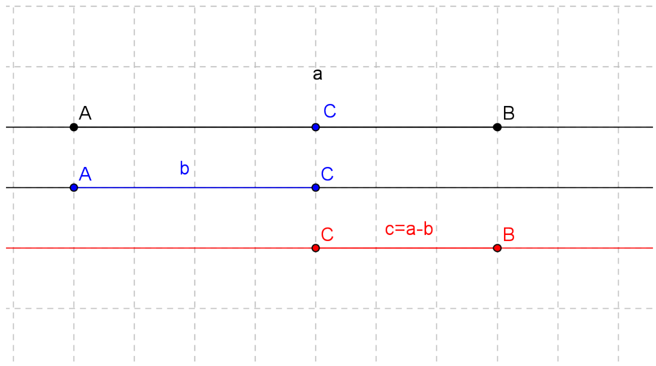


Figura 3.2: Construção da subtração de segmentos

c) **Divisão**

Para construir um segmento de tamanho $\frac{a}{b}$(ver figura 3.3), traçamos um segmento $\overline{OB} = a$, depois traçamos outro segmento $\overline{OA} = b$. Marcamos D em OA tal que $\overline{OD} = 1$ e por fim traçamos um reta paralela a AB por D encontrando OB em C. Dessa forma o segmento $\overline{OC}$ terá o comprimento $\frac{a}{b}$, pois como CD é paralelo a AB, então os triângulos OCD e OAB são semelhantes, dessa forma teremos:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{OC}}{a} = \frac{1}{b} \quad \therefore \quad \overline{OC} = \frac{a}{b}$$

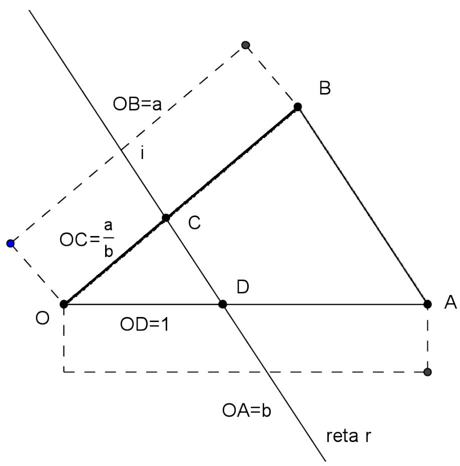


Figura 3.3: divisão $\frac{a}{b}$

d) **Multiplicação**

Trace o segmento $\overline{AB} = a$(ver figura 3.4). Marque C em AB tal que $\overline{AC} = 1$. Trace $\overline{AD} = b$.Trace DC. Trace por B uma reta paralela a CD que irá encontrar o prolongamento de AD no ponto E.

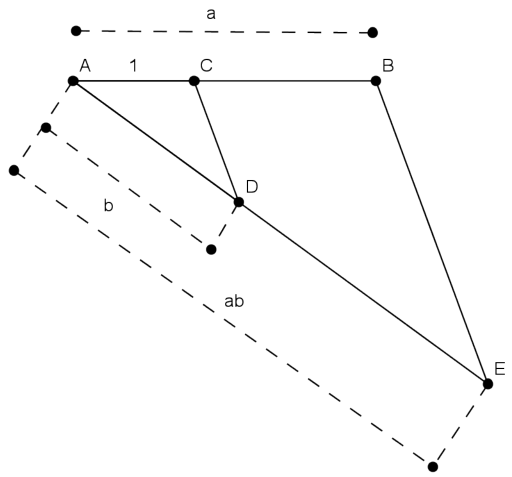


Figura 3.4: Produto ab

Observamos que os triângulos ACD e ABE semelhantes, dessa forma teremos as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \therefore \quad \frac{b}{\overline{AE}} = \frac{1}{a} \quad \therefore \quad \overline{AE} = ab$$

f) **Extração de raiz quadrada**

Em uma reta marcamos $\overline{OA} = a$ e $\overline{AB} = 1$(ver figura 3.5) e desenhamos um círculo de diâmetro OB e construímos uma perpendicular a OB passando por A, que encontra o circulo em C. Dessa forma, o triângulo OBC é retângulo, pois um ângulo inscrito num semicírculo é reto. Observamos que os triângulos OAC e ABC são semelhantes, então tomando $x = \overline{AC}$, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

Agora de posse dos procedimentos de construções euclidianos, definimos número construtível: Dizemos que um número real x é construtível, ou seja, $x \in \mathcal{C}$, se $x = 0$ ou se for possível construir, com régua e compasso, através de um número finito desses procedimentos, um segmento de comprimento igual a $|x|$, a partir de um segmento de reta tomado

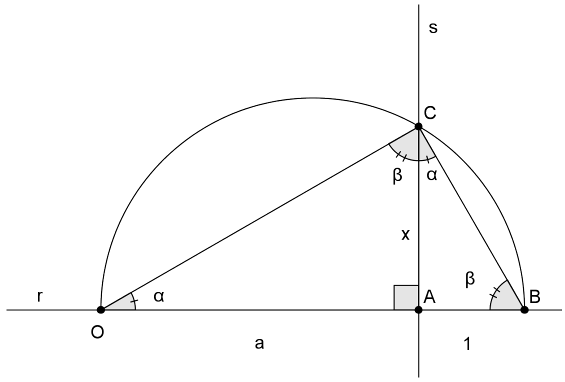


Figura 3.5: Construção de $x = \sqrt{a}$

como a unidade. Portanto, todos os números naturais são construtíveis, assim como todos os inteiros. Sendo a e b construtíveis, então $\dfrac{a}{b}$, com $b \neq 0$, também é construtível ou seja os números racionais são construtíveis.

O conjunto dos números racionais é um corpo numérico. A definição de corpo numérico é de acordo com Richard Courant[11] um conjunto de números tal que quaisquer operações racionais aplicadas a dois ou mais elementos do conjunto produzam como resultado um número do próprio corpo numérico. Isto quer dizer que um Corpo Numérico é "fechado"ou seja a soma, diferença, produto ou divisão(excluindo a divisão por zero) de dois elementos quaisquer do conjunto resulta um número do próprio conjunto. O fato é que qualquer conjunto numérico que seja fechado em relação as quatro operações racionais é um corpo numérico.

A operação de extração de raízes quadradas, que é construtível, permite definir números reais irracionais. Com isso podemos construir vários corpos, que estão entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$(que será mostrado a frente).

Será apresentado de forma simplificada a ideia de extensão de corpos, caso o leitor queira aprofundar neste assunto indicamos livros sobre a teoria de extensão de corpos, como por exemplo[12]. Vamos definir como F_0 o conjunto dos números racionais sendo o primeiro conjunto de números construtíveis. Se tomarmos $x_0 \in F_0$ de tal forma que $\sqrt{x_0} \notin F_0$(ou seja $\sqrt{x_0}$ não é racional), garantimos a saída do corpo F_0, onde formaremos um novo conjunto com números do tipo $a + b\sqrt{x_0}$, em que a e b são racionais. Esse novo conjunto tem F_0 como subconjunto e é fechado em relação as operações fundamentais, logo é um corpo, que chamaremos de F_1. De fato, se tomarmos dois elementos quaisquer deste novo conjunto $a + b\sqrt{x_o}$ e $a_1 + b_1\sqrt{x_0}$ temos que a soma, a diferença, produto e divisão entre eles serão do tipo $a + b\sqrt{x_0}$, como observamos abaixo:

1. Soma: $(a + a_1) + (b + b_1\sqrt{x_0})$

2. Diferença:$(a - a_1) + (b - b_1\sqrt{x_0})$

3. Produto:$(aa_1 + bb_1x_0) + ab_1 + ba_1\sqrt{x_0}$

4. Divisão:$\dfrac{a + b\sqrt{x_0}}{a_1 + b_1\sqrt{x_0}} = \dfrac{aa_1 - x_0bb_1}{a_1^2 - x_0b_1^2} + \dfrac{ba_1 - ab_1}{a_1^2x_0b_1^2}\sqrt{x_0}$

Ao se repetir o procedimento descrito acima, começando pelo Corpo F_1, iremos construir um corpo F_2 de números construtíveis, de tal forma que F_0 e F_1 estão contidos em F_2 e assim podemos construir um corpo F_n com números do tipo $a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{x_{n-1}}$ com a_{n-1} , b_{n-1} e x_{n-1} pertencentes a F_{n-1}

A consequência importante é que todos os números construtíveis são algébricos[1][11], ou seja, são raízes de alguma equação algébrica de coeficientes racionais. Os números do corpo F_1 são raízes de equações quadráticas, os números de F_2 são raízes de equações do quarto grau, e em geral, os números de F_k são ráizes de equações de grau 2^k com coeficientes racionais. Para reforçar esta afirmação, enunciaremos um teorema, cuja demonstração encontra-se em [13]:

Teorema 1. Se um número real x é construtível, então x é algébrico e o grau do polinômio minimo de x sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 2.

Vejamos um exemplo:

Com o objetivo de ilustrar a validade deste teorema para um corpo F_2, vamos considerar o exemplo $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$, temos que: $(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2}$ então $x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x = 3 + \sqrt{2}$ ou $x^2 - 1 = \sqrt{2}(2x + 1)$. Que é uma equação quadrática com coeficientes em F_1. Elevando ambos os lados desta equação ao quadrado, obtemos $(x^2 - 1)^2 = 2(2x + 1)^2$ que é uma equação do quarto grau com coeficientes racionais.

Outro resultado importante (que será citado na seção 3.1) é que uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só terá raízes construtíves se ao menos uma delas for racional.Veremos que as impossibilidades de soluções para os problemas de duplicação do cubo e trissecção de um ângulo giram em torno deste resultado e a ideia de extensão de corpos via adjunção de raízes.

[1]Número algébrico é qualquer número Real ou Complexo que é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros do tipo $a_nx^n + ...a_1x + a_0 = 0$

3.1 Impossibilidade da duplicação do cubo

Seguindo Courant [11], mostraremos que se uma equação cúbica não possui raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível. A prova de que este número x não pode ser construído somente com régua e compasso é indireta.Sejam a, b e c racionais e suponha que a equação $x^3+ax^2+bx+c=0$ tenha uma ou mais raízes construtíveis. Tais raízes devem pertencer a algum corpo F_k com $k>0$, pois por hipótese a raiz construtível não é racional, obtido a partir do corpo racional por extensões sucessivas através da adjunção de raízes quadradas, conforme descrito anteriormente.

Vamos supor que k seja o menor inteiro para o qual uma das raízes construtíveis pertence a um corpo F_k. Então a raiz x pode ser escrita da forma,

$$x = p + q\sqrt{w}$$

Onde p , q e w pertencem a algum F_{k-1}, mas $\sqrt{w}$ não. Entrando com $x = p + q\sqrt{w}$ na equação do terceiro grau dada acima e desenvolvendo-se os produtos tem-se:

$$(p^3 + ap^2 + 3pq^2 + w + bp + c) + \sqrt{w}(3p^2q + q^3w + 2apq + bq) = 0$$

Fazendo $(p^3 + ap^2 + 3pq^2 + w + bp + c) = s$ e $(3p^2q + q^3w + 2apq + bq) = t$ temos que:

$$s + t\sqrt{w} = 0$$

Se for possível $t \neq 0$, então $\sqrt{w} = \dfrac{-s}{t}$ e, como s e t pertencem ao corpo F_{k-1} (pois a, b e $c \in \mathbb{Q}$ e p e q estão naquele corpo), $\sqrt{w}$ também pertenceria, o que vai contra a hipótese. Então $t = 0$ o que implica em $s = 0$.

Se $x = p+q\sqrt{w}$ é raiz da equação $x^3+ax^2+bx+c = 0$, vamos demonstrar que $y = p - q\sqrt{w}$ também é. Fazendo a substituição de y na equação, então uma substituição de q por $-q$, teremos a seguinte expressão:

$$y^3 + ay^2 + by + c = (s - t\sqrt{w})^3 + a(s - t\sqrt{w})^2 + b(s - t\sqrt{w}) + c$$

realizando as manipulações algébricas,

$$y^3 + ay^2 + by + c = \underbrace{(p^3 + ap^2 + 3pq^2 + w + bp + c)}_{s} - \sqrt{w}\,\underbrace{(3p^2q + q^3w + 2apq + bq)}_{t}$$

então temos,

$$y^3 + ay^2 + by + c = s - t\sqrt{w}$$

e como encontramos que $t = s = 0$ essa expressão será zero, logo o número $y = p - q\sqrt{w}$ é outra raiz da equação, diferente da raiz x.

Usando a fórmula para soma raízes de uma equação do terceiro grau, temos que na equação proposta a soma é $-a$. Dai concluímos que a terceira raiz $z = -a - (p + q\sqrt{w}) - (p - q\sqrt{w}) = -(a + 2p)$. Como $a \in \mathbb{Q}$, p e q pertence ao corpo F_{k-1}, conclui-se que z também pertence a F_{k-1}, o que é um absurdo, pois contraria a hipótese de que k é o menor inteiro para o qual uma das raízes construtíveis da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ está em F_k.

Dessa forma, uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só terá raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional.

Como a duplicação do cubo depende da solução da equação $x^3 - 2 = 0$, chegamos a conclusão que é impossível construir pois as raízes não são racionais.

3.2 Impossibilidade da trissecção do ângulo

A construção de um ângulo θ implica em poder construir seu cosseno. Da trigonometria temos que:

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Vamos considerar um ângulo $\theta = 20°$, então:

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°) \text{ ou } 8\cos^3(20°) - 6\cos(20°) = 1,$$

Chamando $2\cos(20)° = x$, dessa forma temos que:

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

além disso vimos que as raízes desta equação somente serão construtiveis se pelo menos uma delas for racional.

Vamos supor um número racional $\dfrac{a}{b}$ seja uma raiz, com a e b inteiros e primos entre si. Então:

$$\frac{a^3}{b^3} - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \Rightarrow a^3 - 3ab^2 - b^3 = 0 \Rightarrow \frac{b^3}{a} = (a^2 - 3b^2)$$

Como a e b são inteiros, então $(a^2 - 3b^2)$ também é inteiro, concluímos que a divide $b^3 \Rightarrow a$ divide b. Mas como a e b são primos entre si, temos como alternativas para a os valores $+1$ e -1.

Reescrevendo a equação acima, temos que $a^3 = b^2(b + 3a)$ então b^2 divide a^3 e que b^2 divide a. Mas como a e b são primos entre si, temos como alternativas para b os valores $+1$ e -1.

A conclusão que chegamos é que as soluções racionais da equação dada em x são os números $+1$ e -1, o que com uma simples inspeção observamos que não são raízes. Dessa forma não é possível construir o cosseno do ângulo de 20°, o que implica não ser possível construir o ângulo de 20° então não é possível trissectar o ângulo de 60°. Fica demonstrado a inexistência de um método geral para se efetuar a trissecção de um ângulo qualquer com régua e compasso.

4 Experimento Duplicação do Cubo

Apresentamos uma prática para a duplicação do cubo desenvolvida na UNICAMP licenciada pela Creative Commons, com pequenas adaptações, disponível no portal `http://m3.ime.unicamp.br`.

Nesta atividade, será explorado experimentalmente o problema da duplicação do cubo, aproveitando para introduzir o conceito de número irracional calculando numericamente a sua representação decimal com um determinado número de casas.

Esta prática é voltada para alunos do ensino médio, e tem duração de dois tempos de aulas, abordando os seguintes conteúdos:

- Números
- Conjuntos numéricos
- Geometria métrica
- Geometria espacial

Os objetivos são:

- Experimentalmente, obter a aresta de um cubo, que possui o dobro do volume de um outro cubo de aresta já conhecidas
- Obter numericamente um valor aproximado para $\sqrt[3]{2}$
- Desenvolver a noção de número irracional

Para o desenvolvimento do experimento serão necessários os seguinte materiais:

- Massa de modelar(a massa de modelar pode ser confeccionada com a utilização de farinha de trigo e água)
- Régua
- Lápis

- Calculadora

O uso da massa de modelar desperta o interesse do aluno, estimulado sua participação e contribui para melhor compreensão do conteúdo, enquanto que a calculadora funciona como uma ferramenta auxiliar na obtenção das aproximações do número irracional.

4.1 Etapa 1: apresentação de áudio falando sobre os três problemas clássicos

Antes de iniciar o experimento fica a sugestão de divulgação de áudio sobre os problemas clássicos que pode ser obtido no portal da UNICAMP `http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1259`, afim de familiarizar os alunos com problemas clássicos da geometria grega. De maneira geral(conforme descrito no material disponível do portal), este áudio descreve três problemas geométricos famosos, ao mesmo tempo em que explora suas relações com assuntos diversos, trabalha de maneira multidisciplinar diversos temas ao mesmo tempo, relacionando tópicos de culinária, esportes, história, filosofia e, evidentemente, matemática, a partir de um único tema inicial: os três mais famosos problemas geométricos da Antiguidade. Outra opção é sugerir aos alunos que façam uma pesquisa sobre o tema.

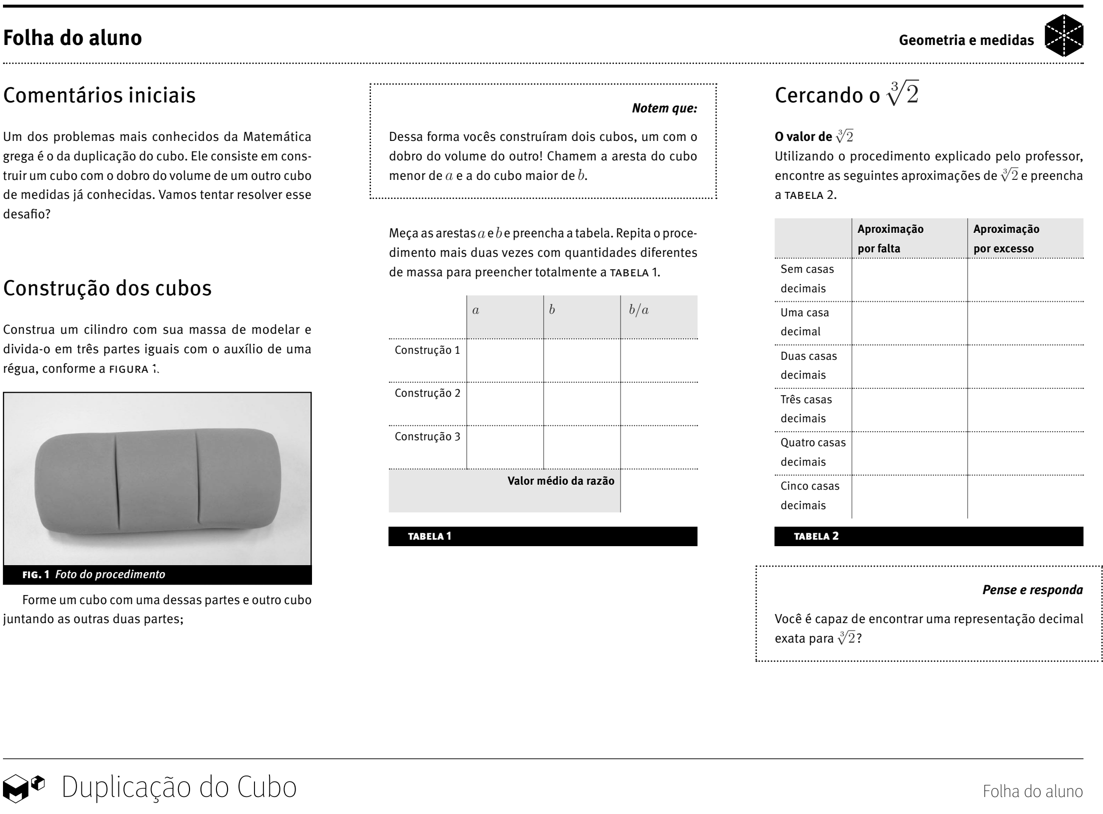
Este áudio tem duração de aproximadamente 10 minutos, podendo o professor apresentá-lo em uma aula de um tempo, de preferência antes da aula que vai ocorrer o experimento, ou se preferir no mesmo dia da aula que ocorrerá o experimento.

4.2 Etapa 2: construção dos cubos

Divida os alunos em pequenos grupos e distribua diferentes quantidades de massa de modelar a cada grupo, assim como a folha do aluno(ver figua 4.1)

O objetivo desta etapa é fazer os alunos perceberem que dados quaisquer pares de cubos, um com o dobro do volume do outro, a razão entre suas arestas será constante. Para isso eles devem construir seus próprios cubos.

Cada grupo deve dividir sua porção de massa em três partes iguais, e para



Folha do aluno

Geometria e medidas

Comentários iniciais

Um dos problemas mais conhecidos da Matemática grega é o da duplicação do cubo. Ele consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo de medidas já conhecidas. Vamos tentar resolver esse desafio?

Construção dos cubos

Construa um cilindro com sua massa de modelar e divida-o em três partes iguais com o auxílio de uma régua, conforme a FIGURA 1.

FIG. 1 *Foto do procedimento*

Forme um cubo com uma dessas partes e outro cubo juntando as outras duas partes;

Notem que:

Dessa forma vocês construíram dois cubos, um com o dobro do volume do outro! Chamem a aresta do cubo menor de a e a do cubo maior de b.

Meça as arestas a e b e preencha a tabela. Repita o procedimento mais duas vezes com quantidades diferentes de massa para preencher totalmente a TABELA 1.

	a	b	b/a
Construção 1			
Construção 2			
Construção 3			
Valor médio da razão			

TABELA 1

Cercando o $\sqrt[3]{2}$

O valor de $\sqrt[3]{2}$

Utilizando o procedimento explicado pelo professor, encontre as seguintes aproximações de $\sqrt[3]{2}$ e preencha a TABELA 2.

	Aproximação por falta	Aproximação por excesso
Sem casas decimais		
Uma casa decimal		
Duas casas decimais		
Três casas decimais		
Quatro casas decimais		
Cinco casas decimais		

TABELA 2

Pense e responda

Você é capaz de encontrar uma representação decimal exata para $\sqrt[3]{2}$?

Duplicação do Cubo Folha do aluno

Figura 4.1: Folha do Aluno - Material do projeto M^3, matemática multimedia da UNICAMP

fazê-los os grupos devem:

1. Modelar um cilindro com suas respectivas massas de modelar e, utilizando uma régua, marcar de modo a dividi-lo em três partes iguais conforme figura abaixo(ver figua 4.1)

2. Cortar o cilindro nas marcações utilizando uma régua

3. Com uma das partes, modelar um cubo e com as outras duas partes modelar um segundo cubo conforme figura 4.2

Faça a observação com seus alunos que o cubo maior possui o dobro do volume do cubo menor devido a divisão efetuada anteriormente. Os grupos devem medir a aresta dos seus respectivos cubos e anotar os dados obtidos na tabela 1 da Folha do Aluno(ver figura 4.1).

Os grupos devem repetir este procedimento três vezes com quantidades diferentes de massas e completar a tabela.

Figura 4.2: Cubos modelados com massa de modelar - vista de frente

Figura 4.3: Cubos modelados com massa de modelar - vista de cima

A seguir o professor deve socializar os dados de cada grupo na louça conforme a tabela sugerida na figura 4.4.

Cabeça da Tabela	**Média dos valores b/a**
Grupo 1	
Grupo 2	
Grupo 3	
Grupo n	

Figura 4.4: Tabela sugerida para socializar dados obtidos pelo alunos em suas construções

O professor deve chamar atenção para as aproximações das razões $\frac{b}{a}$, destacando que os valores diferentes se devem a imprecisão dos cálculos devido a erros na modelação dos cubos e na medida das arestas.

4.3 Etapa 3: O valor da razão

O professor deve provar que a razão $\dfrac{b}{a}$ é constante e igual a $\sqrt[3]{2}$. Segue a sugestão de prova.

O volume de um cubo de aresta a é a^3. Considerando um segundo cubo de aresta b com o dobro do volume de primeiro, então $b^3 = 2a^3$.

Ao extrair a raiz cúbica de ambos os lados obtemos $b = a\sqrt[3]{2} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.

Esta constante pertence ao conjunto dos números irracionais, ou seja, não pode ser escrito na forma $\dfrac{m}{n}$ com m e n números inteiros e n diferente de zero. Dessa forma sua representação decimal é uma dízima não-periódica com infinitas casas decimais. Uma parte dessa representação é:

$$\boxed{\sqrt[3]{2} = 1,25912104989487316...}$$

As raízes obtidas pelos grupos devem estar próximas deste número, salvo casos em que tenham ocorrido grandes erros de medida.

4.4 Etapa 4: Aproximação para $\sqrt[3]{2}$

Nesta etapa os grupos devem encontrar uma aproximação com quatro casas decimais para $\sqrt[3]{2}$ e preencher a tabela 2 da Ficha do Aluno(ver figura 4.1).O procedimento sugerido para encontrar o valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ é:

1. Peça para que os alunos forneçam dois números tais que um deles elevado ao cubo seja menor que dois e o outro número seja maior.Vamos supor que os alunos sugiram os números 1 e 2 (se eles fornecerem outros números, o procedimento será o mesmo)

2. Numa reta real, divida o intervalo (1;2) em dez partes iguais, marcando os números 1,1;1,2;1,3;...;1,91,2;1,2;1,3;...;1,91,2;1,91,2;1,2;1,3;...;1,9(ver figura 4.5). Calcule o cubo de todos esses números partindo do 1,1 em ordem crescente até que esse cubo seja maior que 2. Isso acontecerá em 1,3. Marque esse número e o imediatamente anterior, o 1,2 no caso. Agora sabemos que $\sqrt[3]{2}$ está entre 1,2 e 1,3 já que $(1,2)^3 < 2 < (1,3)^3$.

3. Divida o intervalo (1,2;1,3) em dez partes iguais (1,21;1,22;...;1,29) e eleve esses valores ao cubo até o primeiro momento em que o resultado for maior que 2. O novo intervalo terá como extremidades esse número e o imediatamente anterior: (1,25;1,26), pois $(1,25^3) < (1,26^3)$.

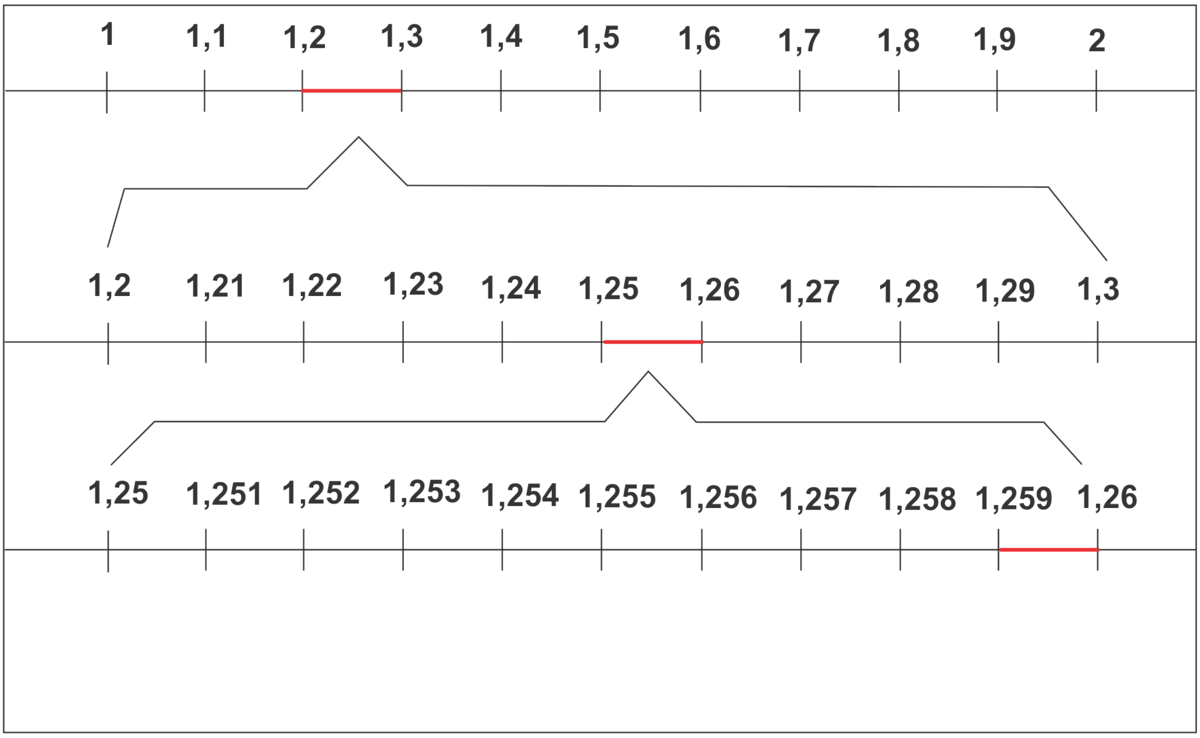


Figura 4.5: Aproximação decimal para $\sqrt[3]{2}$

4. Analogamente, divida o novo intervalo em dez partes, encontre os dois valores que cercam $\sqrt[3]{2}$ e repita o procedimento no novo intervalo. Com mais 3 repetições, os alunos chegarão ao intervalo [1,25992;1,25993].

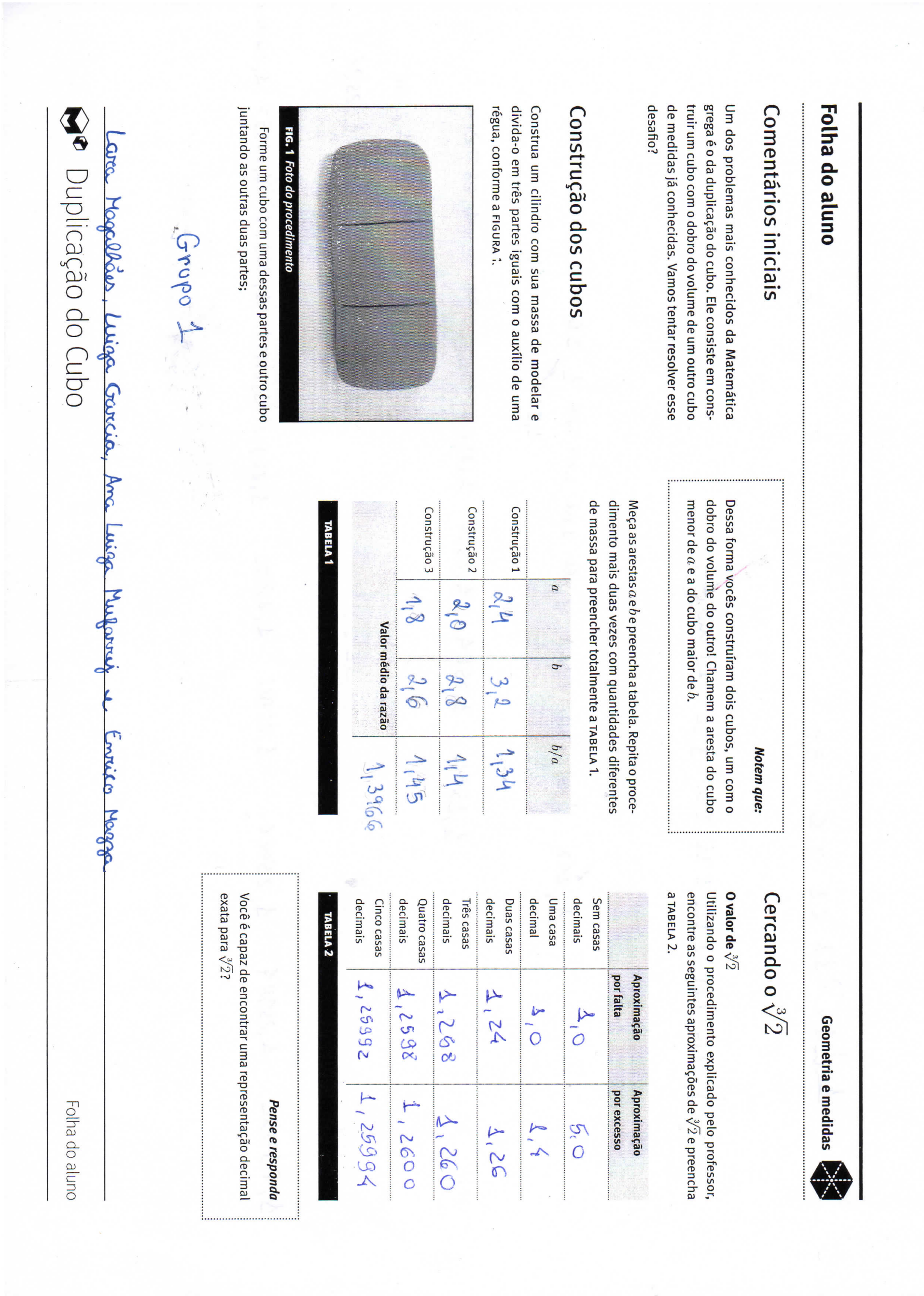
5. Desse modo, os alunos encontram duas aproximações para $\sqrt[3]{2}$ com 5 casas decimais de precisão, a saber, 1,25992 e 1,25993. O menor número é chamado de aproximação por falta e o maior de aproximação por excesso.

Os dois valores não são representações exatas de $\sqrt[3]{2}$ seu erro pode ser medido através do número de casas decimais de precisão, no nosso caso o erro é menor do que 0,00001.

4.5 Relato de aplicação deste experimento

Este experimento foi aplicado em uma turma do terceiro ano do ensino médio do colégio Padre Antônio Vieira, localizado no bairro Humaitá no Rio de Janeiro.A turma do 3º ano foi dividida em 4 grupos de 4 alunos cada. Cada grupo recebeu um pote de 50g de massa de modelar e a folha do aluno(ver figura 4.1). A prática teve ótima aceitação, o áudio teve papel fundamental para o contexto do experimento, auxiliando na contextualização e interdisciplinaridade, porém percebi que a falta de imagens dispersa a turma. Foi observado que manipular massa de modelar é empolgante para os alunos e ajuda a manter a atenção, facilitando o processo de aprendizagem. O desenvolvimento do experimento ocorreu sem problemas, porém observei dificuldade na compreensão da demostração de que $\sqrt[3]{2}$ é irracional, tal fato não teve como ser investigado para saber a causa, contudo não afetou o objetivo da prática.Segue algumas imagens(ver figuras4.6) do desenvolvimento da prática assim como as Folhas do Aluno respondidas por cada grupo e o rascunho para o preenchimento da tabela 2 da Folha do Aluno. Os grupos 2 e 3 não utilizaram rascunho, entenderam a lógica do algoritmo e somente com a calculadora desenvolveram a etapa 4 do experimento.

Figura 4.6: Imagens da aula prática no colégio Padre Antônio Vieira(Rio de Janeiro-RJ), turma do 3º ano do ensino médio de 2013



Folha do aluno

Geometria e medidas

Comentários iniciais

Um dos problemas mais conhecidos da Matemática grega é o da duplicação do cubo. Ele consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo de medidas já conhecidas. Vamos tentar resolver esse desafio?

Construção dos cubos

Construa um cilindro com sua massa de modelar e divida-o em três partes iguais com o auxílio de uma régua, conforme a FIGURA 1.

FIG. 1 *Foto do procedimento*

Forme um cubo com uma dessas partes e outro cubo juntando as outras duas partes.

Notem que:

Dessa forma vocês construíram dois cubos, um com o dobro do volume do outro! Chamem a aresta do cubo menor de a e a do cubo maior de b.

Meça as arestas a e b e preencha a tabela. Repita o procedimento mais duas vezes com quantidades diferentes de massa para preencher totalmente a TABELA 1.

TABELA 1

	a	b	b/a
Construção 1	2,4	3,2	1,34
Construção 2	2,0	2,8	1,4
Construção 3	1,8	2,6	1,45
		Valor médio da razão	1,3966

Cercando o $\sqrt[3]{2}$

O valor de $\sqrt[3]{2}$

Utilizando o procedimento explicado pelo professor, encontre as seguintes aproximações de $\sqrt[3]{2}$ e preencha a TABELA 2.

TABELA 2

	Aproximação por falta	Aproximação por excesso
Sem casas decimais	1,0	5,0
Uma casa decimal	1,0	1,4
Duas casas decimais	1,24	1,26
Três casas decimais	1,268	1,260
Quatro casas decimais	1,2598	1,2600
Cinco casas decimais	1,25992	1,25994

Pense e responda

Você é capaz de encontrar uma representação decimal exata para $\sqrt[3]{2}$?

Grupo 1

Lara Magalhães, Luiza Garcia, Ana Luiza Mufarrej e Enrico Magga

Duplicação do Cubo

Folha do aluno

Figura 4.7: Folha do aluno - Grupo 1

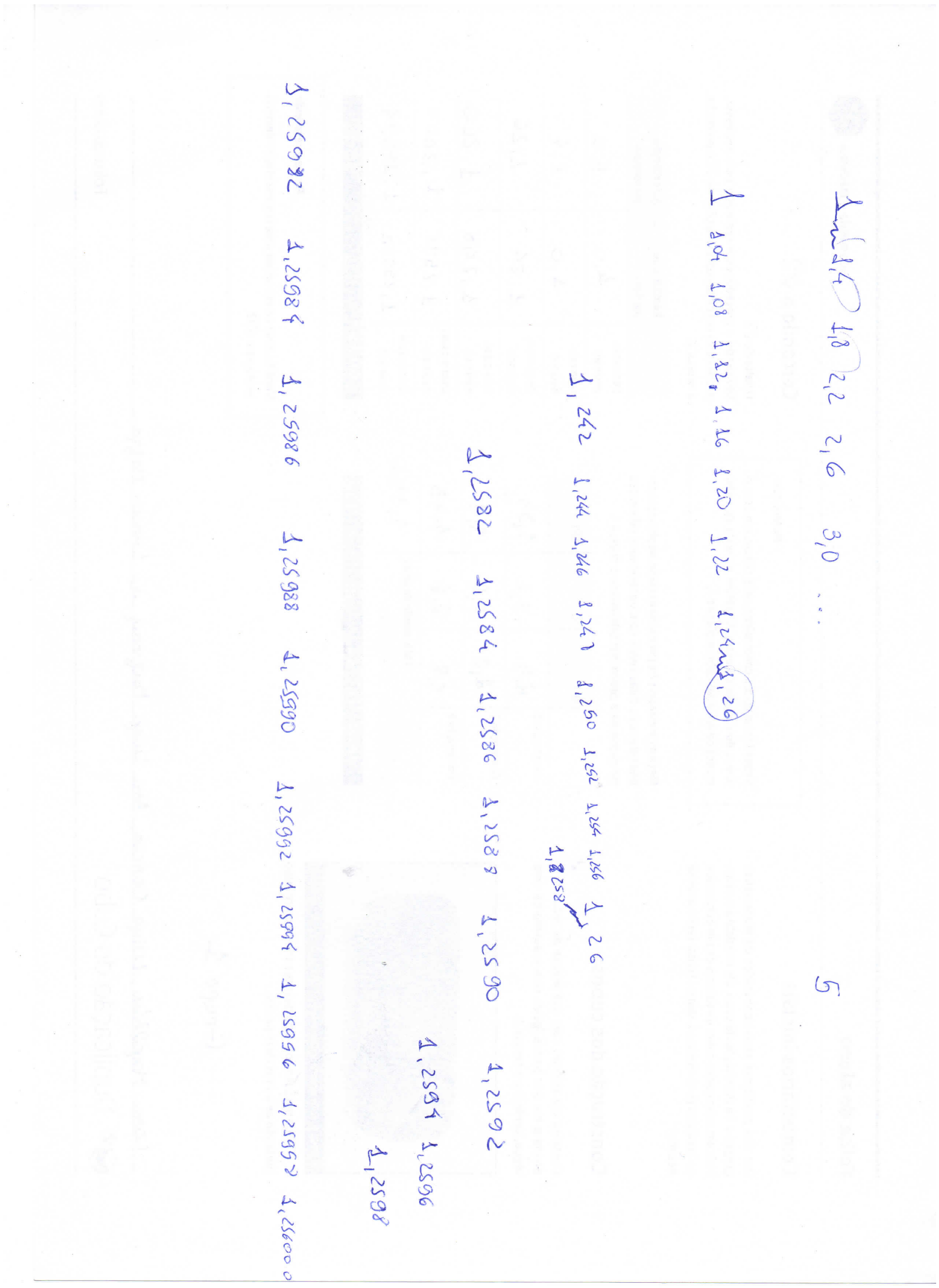


Figura 4.8: Rascunho do grupo 1 utilizado para completar a tabela 2 da folha do aluno

Folha do aluno

Geometria e medidas

Grupo 2 -

Comentários iniciais

Um dos problemas mais conhecidos da Matemática grega é o da duplicação do cubo. Ele consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo de medidas já conhecidas. Vamos tentar resolver esse desafio?

Construção dos cubos

Construa um cilindro com sua massa de modelar e divida-o em três partes iguais com o auxílio de uma régua, conforme a FIGURA 1:

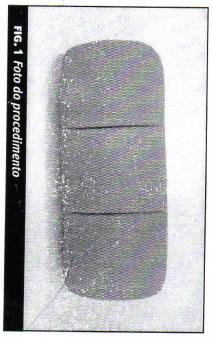


FIG. 1 *Foto do procedimento*

Forme um cubo com uma dessas partes e outro cubo juntando as outras duas partes;

Notem que: Dessa forma vocês construíram dois cubos, um com o dobro do volume do outro! Chamem a aresta do cubo menor de a e a do cubo maior de b.

Meça as arestas a e b e preencha a tabela. Repita o procedimento mais duas vezes com quantidades diferentes de massa para preencher totalmente a TABELA 1.

TABELA 1

	a	b	b/a
Construção 1	1,5 ~~3,375~~	2 ~~8~~	1,33
Construção 2	1,9	2,3	1,210...
Construção 3	1,5	2,3	1,533
Valor médio da razão			1,35666...

Construção 1 - João P. Nunes

Construção 2 - Rafael V. Lima

Construção 3 - Bruno Botta

Cercando o $\sqrt[3]{2}$

O valor de $\sqrt[3]{2}$

Utilizando o procedimento explicado pelo professor, encontre as seguintes aproximações de $\sqrt[3]{2}$ e preencha a TABELA 2.

TABELA 2

	Aproximação por falta	Aproximação por excesso
Sem casas decimais	0	2
Uma casa decimal	1,2	1,4
Duas casas decimais	1,25	1,26
Três casas decimais	1,258	1,259
Quatro casas decimais	1,2586	1,2587
Cinco casas decimais	1,2586[illegible]9	1,25[illegible]90

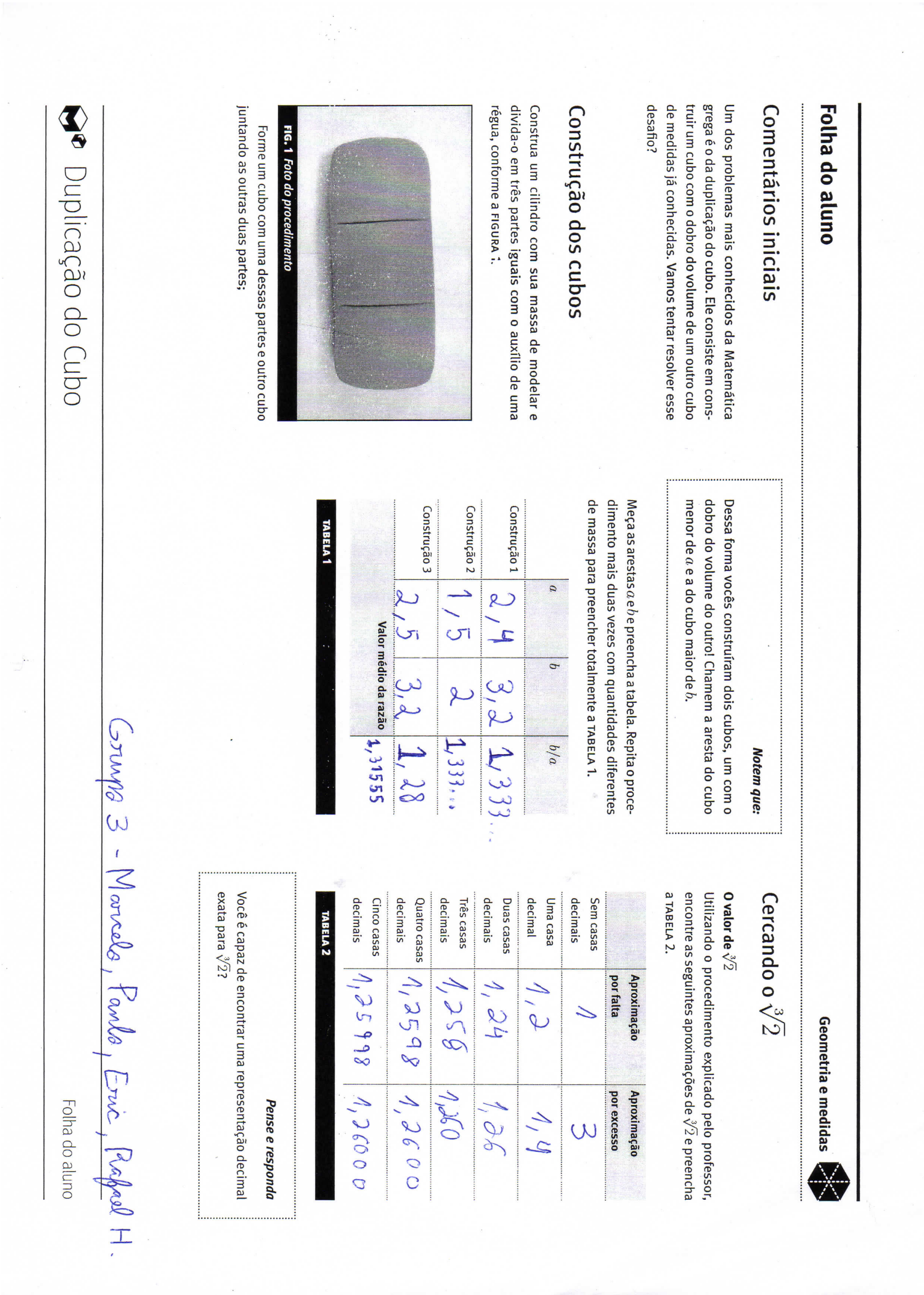
Pense e responda

Você é capaz de encontrar uma representação decimal exata para $\sqrt[3]{2}$?

Duplicação do Cubo

Folha do aluno

Figura 4.9: Folha do aluno - Grupo 2



Folha do aluno — Geometria e medidas

Comentários iniciais

Um dos problemas mais conhecidos da Matemática grega é o da duplicação do cubo. Ele consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo de medidas já conhecidas. Vamos tentar resolver esse desafio?

Construção dos cubos

Construa um cilindro com sua massa de modelar e divida-o em três partes iguais com o auxílio de uma régua, conforme a FIGURA 1.

FIG. 1 *Foto do procedimento*

Forme um cubo com uma dessas partes e outro cubo juntando as outras duas partes;

Notem que:

Dessa forma vocês construíram dois cubos, um com o dobro do volume do outro! Chamem a aresta do cubo menor de a e a do cubo maior de b.

Meça as arestas a e b e preencha a tabela. Repita o procedimento mais duas vezes com quantidades diferentes de massa para preencher totalmente a TABELA 1.

	a	b	b/a
Construção 1	2,4	3,2	1,333...
Construção 2	1,5	2	1,333...
Construção 3	2,5	3,2	1,28
		Valor médio da razão	1,31555

TABELA 1

Cercando o $\sqrt[3]{2}$

O valor de $\sqrt[3]{2}$

Utilizando o procedimento explicado pelo professor, encontre as seguintes aproximações de $\sqrt[3]{2}$ e preencha a TABELA 2.

	Aproximação por falta	Aproximação por excesso
Sem casas decimais	1	3
Uma casa decimal	1,2	1,4
Duas casas decimais	1,24	1,26
Três casas decimais	1,258	1,260
Quatro casas decimais	1,2598	1,2600
Cinco casas decimais	1,25998	1,26000

TABELA 2

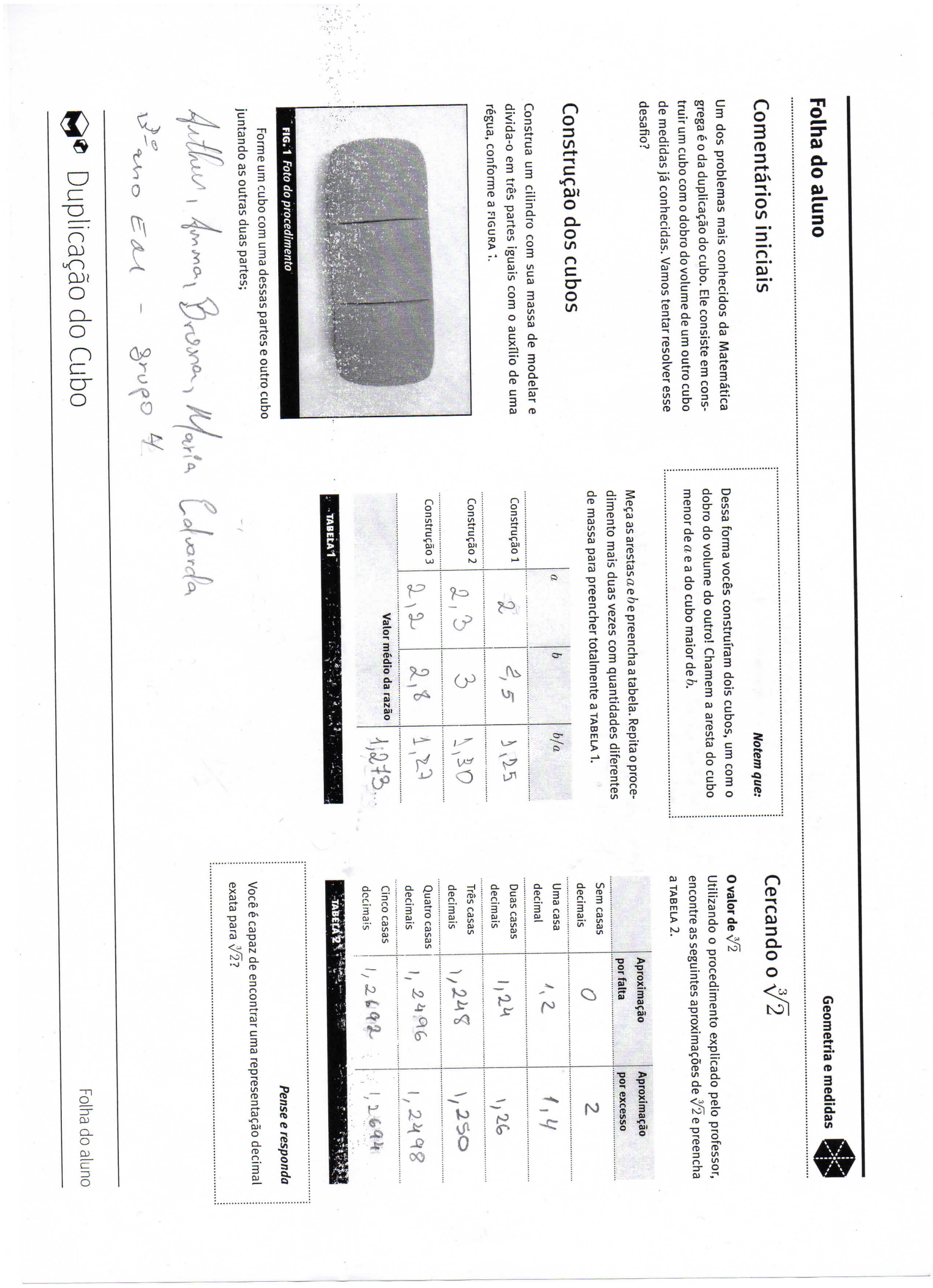
Pense e responda

Você é capaz de encontrar uma representação decimal exata para $\sqrt[3]{2}$?

Grupo 3 - Marcelo, Paulo, Eric, Rafael H.

Duplicação do Cubo — Folha do aluno

Figura 4.10: Folha do aluno - grupo 3



Geometria e medidas

Folha do aluno

Comentários iniciais

Um dos problemas mais conhecidos da Matemática grega é o da duplicação do cubo. Ele consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo de medidas já conhecidas. Vamos tentar resolver esse desafio?

Construção dos cubos

Construa um cilindro com sua massa de modelar e divida-o em três partes iguais com o auxílio de uma régua, conforme a FIGURA 1.

FIG. 1 *Foto do procedimento*

Forme um cubo com uma dessas partes e outro cubo juntando as outras duas partes;

Arthur, Anna, Bruna, Maria Eduarda

3º ano EM - grupo 4

Notem que:

Dessa forma vocês construíram dois cubos, um com o dobro do volume do outro! Chamem a aresta do cubo menor de a e a do cubo maior de b.

Meça as arestas a e b e preencha a tabela. Repita o procedimento mais duas vezes com quantidades diferentes de massa para preencher totalmente a TABELA 1.

	a	b	b/a
Construção 1	2	2,5	1,25
Construção 2	2,3	3	1,30
Construção 3	2,2	2,8	1,27
		Valor médio da razão	1,273...

TABELA 1

Cercando o $\sqrt[3]{2}$

O valor de $\sqrt[3]{2}$

Utilizando o procedimento explicado pelo professor, encontre as seguintes aproximações de $\sqrt[3]{2}$ e preencha a TABELA 2.

	Aproximação por falta	Aproximação por excesso
Sem casas decimais	0	2
Uma casa decimal	1,2	1,4
Duas casas decimais	1,24	1,26
Três casas decimais	1,248	1,250
Quatro casas decimais	1,2496	1,2498
Cinco casas decimais	1,2692	1,2694

TABELA 2

Pense e responda

Você é capaz de encontrar uma representação decimal exata para $\sqrt[3]{2}$?

Duplicação do Cubo

Folha do aluno

Figura 4.11: Folha do aluno - grupo 4

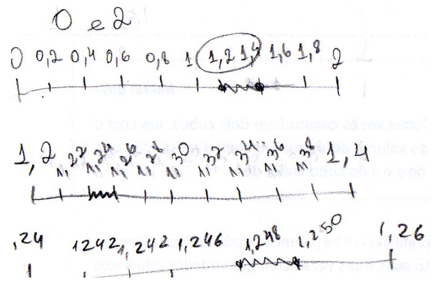


Figura 4.12: Rascunho utilizado pelo grupo 4 para completar a tabela 2 da folha do aluno

5 Considerações Finais

Sou um amante da geometria e da informática. Queria um tema em eu pudesse juntar estes assuntos e que principalmente tivesse aplicação com alunos do ensino básico. Após algumas leituras e sugestões apresentadas ao meu orientador, o mesmo sugeriu falar sobre os problemas clássicos da geometria grega, apresentando soluções por origami. A mim coube dar um panorama histórico dos problemas, apresentar soluções que não utilizavam somente régua e compasso, mostrar o que pode ser construído com régua e compasso, mostrar a impossibilidade de solução com elementos euclidianos, enquanto para o Ângelo Sabatinno e o Bruno Amaro(outros mestrandos que desenvolveriam o conteúdo) ficaram a axiomatização e as soluções por origami. Mas faltava na minha parte o que eu considerava principal, como aplicar este trabalho em sala de aula com meus alunos do ensino básico. Para mim não fazia sentido um trabalho de conclusão do Profmat onde pelo menos uma aplicação fosse apresentada. O tempo sugerido para elaboração do TCC não ajudou para que eu conseguisse criar um experimento inédito sobre o tema, pois demandaria um tempo muito grande para trabalho de campo, o que na prática era inviável. Então parti para uma solução "pronta"criada pela Unicamp(`http://m3.ime.unicamp.br`), que caiu como uma luva no meu TCC e desta forma consegui elaborar meu TCC com os requisitos exigidos pelo meu orientador e pelo meu desejo de ter um experimento. O experimento foi feito somente com um dos problemas clássicos,que foi a duplicação do cubo, com ótima aceitação por partes dos alunos.

O importante é que este tema serviu de inspiração para que outros experimentos sobre este e outros temas da geometria sejam criados por mim e contribuam para a melhoria da minha prática docente.

Referências Bibliográficas

[1] Tatiana ROQUE. *História da matemática: uma visão critica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

[2] Eduardo WAGNER. *Uma introdução as construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[3] Pierre WANTZEL. *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se resoudre avec règle et compas*. Journal de Mathématiques, 1837.

[4] João Paulo Carneiro BARBOSA. *Investigação histórica referente à base algébrica das construções geométricas com régua e compasso: o trabalho de Pierre Laurent Wantzel*. RECIFE: Dissertação de Mestrado.Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

[5] João Pitombeira de CARVALHO. *Os 3 Problemas Clássicos da Matemática Grega*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[6] Rudolf BKOUCHE; Joëlle DELATTRE. *"Pourquoi la règle et le compas"*. Comission Inter-IREM. Histoire de problèmes, Histoire des Mathématiques. Paris: Ellipses, 1993.

[7] Howard EVES. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

[8] Thomas L. HEATH. *A history of Greek mathematics, 2 v. [13] KATZ, Victor J. A History of Matematics – an introduction*. New York:Dover, 1981.

[9] M. ESTRADA, M. SÀ, J. QUEIRÓ, M. SILVA, and M. COSTA. *História da matemática*. Lisboa:Universidade Aberta de Lisboa, 2000.

[10] Francisco Gomes TEIXEIRA. *Traité des courbes spéciales planes et gauches, vol III*. Paris: Jacques Gabay, 1995.

[11] Herbert COURANT, Richard; ROBBINS. *What is mathematics?* New York:Oxfordo University Press, 1996.

[12] A. GONCALVES. *Introdução a Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[13] Luis Pereira da Silva JUNIOR. *Construções Geométricas por régua e compasso e Números Construtíveis*. Campina Grande:Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado.Universidade Federal de Campina Grande., 2013.