UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FELIPE PEREIRA GOMES

OS NÚMEROS COMBINATÓRIOS DE CATALAN

PONTA GROSSA

2020

FELIPE PEREIRA GOMES

OS NÚMEROS COMBINATÓRIOS DE CATALAN

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre na Universidade Estadual de Ponta Grossa, Área de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA

2020

Gomes, Felipe Pereira
G633 Os números combinatórios de Catalan / Felipe Pereira Gomes. Ponta Grossa, 2020.
62 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1. Números de catalan. 2. Catalan. 3. Teoria binomial. I. Pereira, Marciano. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

FELIPE PEREIRA GOMES

"OS NÚMEROS COMBINATÓRIOS DE CATALAN"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 31 de Março de 2020.

Membros da Banca:

Dr. Marciano Pereira - (UEPG) – Presidente

Dr. Marcos Calçada - (UEPG)

Dr. Luiz Antônio Ribeiro de Santana - (UFPR)

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles**, **Secretário(a)**, em 24/03/2020, às 19:50, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Calcada**, **Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional**, em 31/03/2020, às 15:50, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Marciano Pereira**, **Professor(a)**, em 31/03/2020, às 15:59, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA**, **Usuário Externo**, em 09/04/2020, às 14:32, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **0194742** e o código CRC **153E1939**.

20.000010650-2 0194742v2

Aos meus pais, Davi e Anadir, obrigado por tudo.

AGRADECIMENTOS

À Deus, criador de todas as coisas, porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas.

Aos meus pais, Davi e Anadir, por todo o incentivo durante a jornada da vida.

À minha noiva Andreia, pelo apoio em todos os momentos.

Aos amigos, em especial aqueles que me apoiaram e ajudaram de todas as formas.

Às amigas Alzenir e Franciane, pelas horas de estudo e descontração durante o curso.

Ao meu orientador, professor Dr. Marciano Pereira, por aceitar o convite para ser meu orientador por todo apoio, dedicação e paciência para a criação deste trabalho.

Aos meus colegas de trabalho na Ferraria São Basílio, pelo auxílio e paciência em meus momentos de ausência.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Consagre ao Senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão 6 bem-sucedidos.
Provérbios 16:3

RESUMO

Presentes em problemas de combinatória, álgebra, ciência da computação, teoria dos grafos e geometria, os números de Catalan são pouco conhecidos no Brasil e possuem pouca literatura na língua portuguesa. Com esta perspectiva, a partir deste trabalho procuramos contribuir com a inserção de bibliografia sobre o tema e incentivar e difundir o estudo deste. Apresentamos uma exploração completa sobre os números de Catalan, expondo seu histórico, incluindo uma breve biografia do matemático belga Eugène Charles Catalan. Exibimos e demonstramos propriedades envolvendo aspectos algébricos e geométricos da sequência numérica. Descrevemos algumas aplicações tais como caminhos reticulados e triangulações de polígonos. Relacionamos os números de Catalan com outros números e arranjos históricos, como o pi e o triângulo de Pascal. Inicialmente, trazemos um resumo da teoria binomial e outros resultados importantes para a apresentação e definição dos números de Catalan. Por fim, propomos uma sequência didática com referencial teórico e uma prática sugerida que pode ser aplicada pelos professores em sala de aula para a exploração dos números de Catalan.

Palavras-chave: Números de Catalan, Teoria Binomial, Aplicações.

ABSTRACT

Present in problems of combinatorics, algebra, computer science, graph theory and geometry, Catalan numbers are little known in Brazil and have little literature in the Portuguese language. With this perspective, from this work we try to contribute with the insertion of bibliography on the theme and to encourage and spread the study of it. We present a complete exploration of Catalan numbers, exposing their history, including a brief biography of Belgian mathematician Eugène Charles Catalan. We display and demonstrate properties involving algebraic and geometric aspects of the numerical sequence. We describe some applications such as lattice paths and polygon triangulations. We relate Catalan numbers with other historical numbers and arrangements, such as Pascal's pi and triangle. Initially, we bring a summary of binomial theory and other important results for the presentation and definition of Catalan numbers. Finally, we propose a didactic sequence with a theoretical framework and a suggested practice that can be applied by teachers in the classroom to explore Catalan numbers.

Keywords: Catalan Numbers, Binomial Theory, Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1751, o notável matemático suíço Leonhard Euler em uma carta destinada ao matemático alemão Christian Goldbach, propôs o seguinte problema: de quantas maneiras podemos dividir um polígono convexo em triângulos, desenhando suas diagonais, de forma que as diagonais não se cruzem? A partir do estudo desse problema surgiu uma sequência numérica muito interessante que demonstrou ser aplicável em diversas áreas. Curiosamente, cerca de 20 anos antes da troca de correspondência entre Euler e Goldbach, o matemático mongol Ming Antu já utilizava a sequência numérica em seus estudos sobre modelos geométricos, mas por seu trabalho estar em chinês, permaneceu por volta de 200 anos sem ser descoberto. Já no século XIX, o matemático belga Eugène Charles Catalan demonstrou muito interesse em estudar e demonstrar as propriedades dessa sequência numérica. Mesmo que sua contribuição não tenha sido crucial para o surgimento dos números, devido ao empenho e divulgação de resultados por Catalan, os números que formam a sequência numérica receberam o nome de Números de Catalan.

Os números de Catalan são definidos por $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, onde n é um número inteiro não negativo. Contudo, no Capítulo 4 veremos outras formas de definir os números de Catalan. Os primeiros seis termos da sequência numérica são 1, 1, 2, 5, 14 e 42.

Assim como os Números de Fibonacci e de Lucas (ver (1)), os números de Catalan aparecem em problemas de Combinatória, Álgebra Abstrata, Ciência da Computação, Teoria dos Grafos e Geometria.

Em (2), o matemático russo Igor Pak descreve os números de Catalan como maravilhosamente onipresentes, pois aparecem em diversas áreas, sendo difícil imaginar uma época em que eles eram desconhecidos ou até mesmo conhecidos, mas sem seu valor reconhecido. Já em (3), Thomas Koshy afirma que os números de Catalan são fascinantes, e como a Estrela do Norte no céu noturno, eles são uma luz bonita e brilhante nos céus matemáticos.

Esses números são pouco conhecidos no Brasil e possuem escassa literatura sobre o tema na língua portuguesa, o que justifica a pequena quantidade de trabalhos, dissertações e teses sobre o assunto, sendo que há apenas duas dissertações do PROFMAT acerca desse conteúdo (veja (4) e (5)). A escolha pelo estudo dessa sequência é dada pela quantidade de aplicações e os resultados que podem ser obtidos através dela. O objetivo é um estudo sobre os números de Catalan, apresentando seu histórico, propriedades, aplicações e também algumas atividades propostas para que outros professores possam explorá-los em sala de aula, além de contribuir como uma forma de bibliografia sobre o assunto.

No segundo capítulo, apresentamos uma biografia de Eugène Charles Catalan, destacando sua vida acadêmica e suas principais publicações e contribuições relacionadas à sequência numérica que leva seu nome.

No terceiro capítulo, apresentamos um pouco sobre a Teoria Binomial, contendo definição, alguns teoremas, as propriedades de divisibilidade de Charles Hermite, que auxiliam na demonstração de alguns resultados sobre os números de Catalan.

No quarto capítulo, definimos os números de Catalan e exibimos os primeiros termos da sequência numérica. Apresentamos duas demonstrações por meio de perspectivas diferentes: a definição geométrica, utilizando como princípio o problema da triangulação de polígonos convexos e a definição recursiva descoberta pelo matemático húngaro Johann Von Segner. Também apresentamos e demonstramos as principais propriedades dos números de Catalan, paridade e primalidade, relacionamos os números de Catalan com o triângulo de Pascal e o número irracional π.

Dentre tantas aplicações possíveis para os números de Catalan, no quinto capítulo deste trabalho destacamos algumas delas, envolvendo problemas de Combinatória, Contagem, Álgebra, Geometria e Teoria dos Grafos.

No sexto capítulo exibimos uma sequência didática, destacando a importância dos números de Catalan serem trabalhados em sala de aula, apresentando uma proposta de ensino sobre esse tema para auxílio dos professores que queiram lecionar sobre o assunto. E por fim, no sétimo capítulo concluímos o trabalho apresentando as considerações finais.

2 EUGÈNE CHARLES CATALAN

Neste capítulo apresentamos a biografia de Eugène Charles Catalan, destacando sua carreira acadêmica e suas principais publicações (6).

Eugène Charles Catalan nasceu em 30 de maio de 1814, na cidade de Bruges, atualmente na Bélgica, porém na época de seu nascimento este território pertencia à França. Catalan, portanto nasceu na França, e naturalmente durante sua vida, se considerou francês. Seu nome foi registrado em sua certidão de nascimento como Eugène Charles Bardin.

Filho de Joseph Victor Étienne Catalan, francês, joalheiro, mas que ganhava recursos com outras atividades como venda de fotografias e perfumes e Jeanne Bardin, francesa, costureira. Eugène Catalan aos dez anos de idade falava e escrevia francês fluentemente e tornou-se um aprendiz de joalheiro, porém tal aprendizado durou apenas três meses, desistindo por não se considerar hábil para tal função. Após a morte de sua mãe, seu pai casou-se novamente e tornou-se arquiteto, decicidindo que seu filho deveria seguir o mesmo caminho. Assim Eugène Catalan entrou na *École Royale Gratuite de Dessin et de Mathématiques em Faveur des Arts Mécaniques*, onde permaneceu matriculado até 1831, inclusive, a partir de 1829, passou a lecionar Geometria para seus colegas, se mantendo nesse posto até 1833.

Enquanto estudava na *École Gratuite de Dessin*, Catalan foi aluno de Louis Lefébure, que ocupava o cargo de examinador de admissões para a *École Polytechinique*, em Paris. Ele notou a aptidão de Catalan para os estudou matemáticos e o encorajou a se preparar para o exame de acesso para a prestigiada universidade em que trabalhava. Assim, em 1833, Catalan foi admitido para estudar na *École Polytechinique*, onde participou de cursos de Matemática, Literatura e História da França.

Em 1834, quando completou seu primeiro ano de estudo na universidade, interrompeu seus estudos por um ano, assim voltando para a casa de seu pai, aproveitando a oportunidade para noivar com Charlotte Augustine Renée Perin, que era dois anos mais velha. Casaram-se em 1835 e passaram o restante de suas vidas juntos.

Em janeiro de 1835, Catalan retornou aos estudos na *École Polytechinique*, onde se formou e passou a trabalhar em serviços públicos, no Departamento de Pontes e Rodovias, mas não era a carreira que gostaria de seguir. Então renunciou ao cargo e tornou-se professor de Matemática no *College de Chalonsseir-Marne* e depois no *College Charlemagne*.

Enquanto estudava na *École Polytechinique*, Catalan foi aluno de Joseph Liouville [1],

[1]Joseph Liouville (1809-1882), foi um matemático francês, professor na *École Polytechinique*, fundador do

que começou a publicar o *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, onde publicou um artigo de Catalan em 1836, chamado *Solution d'un problème de Probabilité reliété au jeeu de rencontre*. Já em 1838, publicou outros artigos criados por Catalan, entitulados *Note over un Problème de combinaisions* e *Note sur une Équation aux différences finies*. A segunda publicação contém os números de Catalan, que aparecem na solução do problema de como dividir um polígono em triângulos por meio de diagonais sem interseção entre elas. Iremos descrever tal problema na segunda seção do capítulo 4.

Catalan desejava voltar a Paris e manifestou interesse em lecionar na *École Gratuite de Dessin*, porém não obteve sucesso. Em 1837, renunciou ao cargo em *Chalonsseir-Marne* e retornou a Paris. Juntamente com Charles-François Sturm e Joseph Liouville, em 1838 fundou a *École Sainte-Barbe*, cujo objetivo era formar alunos para admissão na *École Polytechnique*. No mesmo ano, foi nomeado tutor assistente em Geometria Descritiva na instituição e no ano seguinte passou a exercer a função de vice-examinador. Assim que retornou a Paris, Catalan, foi premiado com um bacharelado duplo e continuou a estudar, recebendo sua licença em Ciências Matemáticas em 1840. No ano seguinte, concluiu seu doutorado em Matemática por sua tese principal em Mecânica da Atração de uma elipsoide homogênea. Em 1845, ele foi premiado com uma licença em Ciências Físicas. Em 1865 tornou-se professor de Análise na universidade de Liége, na Bélgica.

Ainda no ano de 1865, Catalan entrou para a *Académie Royale des Sciences* da Bélgica. Mais tarde, foi eleito para a *Académie des Sciences de Toulouse* e para a *Société des Sciences de Lille*. Foi membro correspondente da Academia de Ciências de São Petersburgo, da Academia de Ciências de Turim, da *Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei*, da Sociedade Matemática de Amsterdã, do Instituto Nacional de Genebra, da *Societé Havraise d'Études Divers e da Societé d ' Agricultura de la Marne*. Ele era membro da Sociedade de Ciências de Liège e da Sociedade Matemática da França. O governo belga homenageou Catalan ao conceder-lhe a Cruz do Cavaleiro da Ordem de Léopold em 1879. Se aposentou em 1884, tornando-se professor emérito, em uma celebração que contou com a participação de muitos de seus amigos, colegas e ex-alunos. Em 1890, o governo da Bélgica elevou o Catalan a um oficial da Ordem de Léopold.

Entre todas as suas publicações, destacam-se *Élements de Geometrié* de 1843, *Traité élémentaire de géométrie* de 1852, *Noions d'astronomie* e *Traité élémentaire des séries* de 1860. Além disso, Catalan publicou numerosos artigos sobre Integrais Múltiplas, Teoria das Superfícies, Análise Matemática, cálculo de Probabilidade e Geometria. Fez intensas pesquisas em Análise de Equações Diferenciais, transformação de variáveis em Integrais Múltiplas, Frações

jornal *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

Contínuas, Séries e Produtos Infinitos.

Eugène Charles Catalan faleceu no dia 14 de fevereiro de 1894, aos 79 anos.

Figura 1: Eugène Charles Catalan

Fonte: DELPERÈE, E. **Le Professeur Eugène Catalan.** Disponível em http://www.wittert.ulg.ac.be/fr/flori/opera/delperee/delperee_portraits.html. Acesso em 31 de agosto de 2019.

3 TEORIA BINOMIAL

Neste capítulo fazemos uma breve revisão de alguns conceitos da teoria binomial, que serão utilizados para demonstração de alguns resultados adiante (para mais informações sobre o assunto, veja (7)). Apresentamos também algumas propriedades de divisibilidade envolvendo números binomiais apresentadas pelo matemático francês Charles Hermite, que auxiliam na demonstração de alguns resultados sobre os números de Catalan.

3.1 COEFICIENTES BINOMIAIS

Sejam n e r inteiros não negativos. O coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ é definido como:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

para $0 \leq r \leq n$. Se $r > n$, então $\binom{n}{r} = 0$ (3). O coeficiente binomial pode ser interpretado como o número de subconjuntos de r objetos de um conjunto com n objetos.

Teorema 3.1. *Sejam n, r números inteiros não negativos. Então o coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ é um número inteiro para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: Por indução sobre n, se $n = 0$, então $r = 0$, logo,

$$\binom{n}{r} = \binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para n, mostraremos que também é válida para $n+1$. De fato, pela relação de Stifel

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

e a hipótese de indução, os coeficientes binomiais $\binom{n}{r-1}$ e $\binom{n}{r}$ são inteiros, assim, concluímos que $\binom{n+1}{r}$ é um número inteiro.

□

Dentre várias identidades combinatórias existentes, destaca-se a seguinte, a qual será útil na demonstração de um teorema mais adiante.

Proposição 3.2. *Para quaisquer que sejam os inteiros não negativos n, r, tal que $0 < r \leq n$, vale a igualdade*

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} &= \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-(r-1))!} \\
&= \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.
\end{aligned}$$

□

Por exemplo, tomando $r = 4$ e $n = 8$, então a seguinte igualdade é válida $\binom{8}{4} = \frac{8}{4}\binom{7}{3}$. Efetivamente, $\binom{8}{4} = 70$ e $\binom{7}{3} = 35$, com efeito, $\binom{8}{4} = 2 \cdot \binom{7}{3}$.

Agora, apresentamos duas importantes propriedades de divisibilidade envolvendo coeficientes binomiais descobertas pelo matemático francês Charles Hermite (1822-1901), que também foram demonstradas e divulgadas por Catalan (3).

Antes, para fixar a notação, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, indicamos por (a, b) o máximo divisor comum entre a e b. Além disso, usamos a notação padrão $a \mid b$, para indicar que a divide b em $\mathbb{Z}$, ou seja, $b = a \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.3. *(Hermite) Sejam $m, n \geq 1$, então:*

i) $\dfrac{m}{(m,n)} \,\Big|\, \dbinom{m}{n}$

ii) $\dfrac{m-n+1}{(m+1,n)} \,\Big|\, \dbinom{m}{n}$

Demonstração: Em *i)*, seja $d = (m, n)$. Pelo teorema de Bézout, temos que existem inteiros r, s, tais que

$$d = r \cdot m + s \cdot n.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\binom{m}{n}$,

$$d \cdot \binom{m}{n} = r \cdot m \cdot \binom{m}{n} + s \cdot n \cdot \binom{m}{n}.$$

Pela Proposição 3.2, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} d \cdot \binom{m}{n} &= r \cdot m \cdot \binom{m}{n} + s \cdot n \cdot \frac{m}{n} \cdot \binom{m-1}{n-1} \\ &= r \cdot m \cdot \binom{m}{n} + s \cdot m \cdot \binom{m-1}{n-1} \\ &= m \cdot \left[r \cdot \binom{m}{n} + s \cdot \binom{m-1}{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Como r,s são inteiros e, pelo Teorema 3.1, $\binom{m}{n}$ e $\binom{m-1}{n-1}$ também são inteiros, então o número resultante das operações dentro dos colchetes é um número inteiro, o qual denotamos por c. Portanto, $d \cdot \binom{m}{n} = m \cdot c$, ou seja, $\binom{m}{n} = \frac{m}{d} \cdot c$. Logo, $\frac{m}{d} \Big| \binom{m}{n}$.

Em *ii)*, seja $d = (m+1,n)$. Novamente pelo teorema de Bézout, temos que existem r,s inteiros tais que

$$d = r \cdot (m+1) + s \cdot n.$$

Somando e subtraindo $r \cdot n$ no lado direito da igualdade acima

$$\begin{aligned} d &= r \cdot (m+1) + s \cdot n + r \cdot n - r \cdot n \\ &= r \cdot (m-n+1) + n \cdot (r+s). \end{aligned}$$

Agora, multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!}$

$$\begin{aligned} d \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!} &= \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!} \cdot (m-n+1) \cdot r \\ &\quad + \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!} \cdot (r+s) \cdot n \\ &= \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)!} \cdot (m-n+1) \cdot r + \\ &\quad \frac{m!}{n \cdot (n-1)! \cdot (m-n+1)!} \cdot (r+s) \cdot n \\ &= \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \cdot r + \frac{m!}{(n-1)! \cdot (m-n+1)!} \cdot (r+s). \end{aligned}$$

Logo,

$$d \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!} = \binom{m}{n} \cdot r + \binom{m}{n-1} \cdot (r+s).$$

Como r,s são inteiros e, pelo Teorema 3.1, $\binom{m}{n}$ e $\binom{m}{n-1}$ também são inteiros, concluímos que o lado direito da igualdade resulta em um número inteiro, que denotamos por a. Assim,

$$d \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n+1)!} = a.$$

Escrevendo $(m-n+1)! = (m-n+1)(m-n)!$, obtemos

$$a = d \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \cdot \frac{1}{m-n+1},$$

ou seja,

$$d \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} = a \cdot (m-n+1),$$

isto é,

$$d \cdot \binom{m}{n} = a \cdot (m-n+1).$$

Portanto,

$$\binom{m}{n} = \frac{m-n+1}{d} \cdot a.$$

Já que $d = (m+1, n)$, $d \mid m+1$ e $d \mid n$, então $d \mid (m-n+1)$. Logo, $\dfrac{m-n+1}{d}$ é um inteiro e, da expressão acima, $\dfrac{m-n+1}{d} \,\Big|\, \dbinom{m}{n}$.

$\square$

Para ilustrar o teorema acima, façamos $m = 8$ e $n = 2$. Para o item (i), temos que $\dfrac{8}{(8,2)} \,\Big|\, \dbinom{8}{2}$. De fato, $\dfrac{8}{(8,2)} = 4$ e $\dbinom{8}{2} = 28$ e com efeito $4 \mid 28$. Já para a parte (ii), novamente considerando $m = 8$ e $n = 2$, obtemos que $\dfrac{8-2+1}{(8+1,2)} = 7$ e $\dbinom{8}{2} = 28$ e efetivamente $7 \mid 28$.

Agora apresentamos dois corolários importantes consequentes do Teorema 3.3 e que nos ajudarão em outros resultados adiante.

Corolário 3.4. *O coeficiente binomial* $\dbinom{2n}{n}$ *é um inteiro par, para todo inteiro* $n \geq 1$.

Demonstração: De fato, tomando $m = 2n$ no Teorema 3.3, item i),

$$\frac{2n}{(2n,n)} \,\Big|\, \binom{2n}{n}.$$

Mas como $2n$ é múltiplo de n, então $(2n, n) = n$, e logo,

$$2 \,\Big|\, \binom{2n}{n}.$$

Assim concluímos que o coeficiente binomial $\dbinom{2n}{n}$ é um número inteiro par.

$\square$

Por exemplo, se $n = 3$, então $\dbinom{6}{3} = 20$.

Corolário 3.5. *Para todo inteiro $n \geq 0$, $n+1 \,\Big|\, \binom{2n}{n}$.*

Demonstração: De fato, fazendo $m = 2n$ no Teorema 3.3, item (ii),

$$\frac{2n-n+1}{(2n+1,n)} \,\Big|\, \binom{2n}{n},$$

mas como $(2n+1,n) = 1$, então

$$n+1 \,\Big|\, \binom{2n}{n}.$$

□

Por exemplo, fazendo $n = 4$, obtemos que $4+1 \mid \binom{8}{4}$, ou seja, $5 \mid 70$.

Note que, pelo Corolário 3.5, a expressão $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ é um número inteiro. No próximo capítulo iremos explorá-la com mais detalhes.

4 NÚMEROS DE CATALAN E SUAS PROPRIEDADES

Neste capítulo apresentamos a definição dos números de Catalan, os números iniciais dessa sequência númerica, o problema da triangulação de polígonos convexos, que deu origem aos estudos desse tema, e também exploramos algumas propriedades correspondentes a esses números. Também relacionamos os números de Catalan com o triângulo de Pascal e o número irracional π.

4.1 NÚMEROS DE CATALAN

Os números de Catalan são definidos por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!},$$

para $n \geq 0$ (3). Repare que, pelo Corolário 3.5, C_n é um número inteiro para $n \geq 0$. Vejamos os primeiros termos da sequência.

- Para $n = 0$, temos $C_0 = \dfrac{(2\cdot 0)!}{(0+1)!0!} = \dfrac{0!}{1!0!} = 1$.
- Para $n = 1$, temos $C_1 = \dfrac{(2\cdot 1)!}{(1+1)!1!} = \dfrac{2!}{2!1!} = 1$.
- Para $n = 2$, temos $C_2 = \dfrac{(2\cdot 2)!}{(2+1)!2!} = \dfrac{4!}{3!2!} = 2$.
- Para $n = 3$, temos $C_3 = \dfrac{(2\cdot 3)!}{(3+1)!3!} = \dfrac{6!}{4!3!} = 5$.
- Para $n = 4$, temos $C_4 = \dfrac{(2\cdot 4)!}{(4+1)!4!} = \dfrac{8!}{5!4!} = 14$.
- Para $n = 5$, temos $C_5 = \dfrac{(2\cdot 5)!}{(5+1)!5!} = \dfrac{10!}{6!5!} = 42$.

Assim, os seis termos iniciais da sequência numérica de Catalan são 1, 1, 2, 5, 14 e 42.

Em 1838, o matemático francês Gabriel Lamé, em uma carta destinada a Joseph Liouville apresentou a seguinte expressão para os números de Catalan (que não eram chamados assim na época), utilizando números binomiais, que posteriormente foi publicada e discutida por Catalan (8).

Proposição 4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} - \frac{(2n)!}{[2n-(n-1)]!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+1)(2n)!}{n!n!} - \frac{n(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = C_n.
\end{aligned}$$

□

Além dessa, existem outras expressões equivalentes que também definem os números de Catalan. Em (9) encontramos algumas delas propostas como exercícios, as quais apresentamos abaixo juntamente com suas demonstrações.

Proposição 4.2. *Seja n um número natural,* $n \geq 1$*. Temos que* $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1}$.

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.3. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$*. Então* $C_n = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}$.

Demonstração: De fato,

$$
\begin{aligned}
\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} &= \frac{(2n-1)!}{(2n-1-n+1)!(n-1)!} - \frac{(2n-1)!}{(2n-1-n+2)!(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)(n-2)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)n!(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\left[\frac{n+1-n+1}{(n-1)(n+1)}\right] \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\frac{2}{(n-1)(n+1)} \\
&= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\frac{2n}{(n-1)(n+1)n} \\
&= \frac{(2n-1)!2n}{n!(n-1)(n-2)!(n+1)n} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = C_n.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então* $C_n = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n}$.

Demonstração: De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} &= \frac{1}{2n+1}\frac{(2n+1)!}{n!(2n+1-n)!} \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{(2n+1)(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = C_n.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 4.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então* $C_n = 2\dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n+1}{n}$.

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
2\binom{2n}{n}-\binom{2n+1}{n} &= 2\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}\\
&= 2\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n+1)(2n)!}{n!(n+1)!}\\
&= 2(n+1)\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}-(2n+1)\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\\
&= (2n+2-2n-1)\frac{(2n!)}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=C_n.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.6. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então $C_n = \binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1}$.*

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
\binom{2n+1}{n+1}-2\binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(2n+1-n-1)!}-2\frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-n-1)!}\\
&= \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)!n!}-2\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}\\
&= \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)!n!}-2n\frac{(2n!)}{(n+1)!n!}\\
&= (2n+1-2n)\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=C_n.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.7. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Então* $C_{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$.

Demonstração: De fato,

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!n!(n+1)} - \frac{(2n)!(n-1)n}{(n-2)!(n-1)n(n+2)(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!(n-1)n}{n!(n+2)(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[(n+1) - \frac{(n-1)n}{n+2}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[\frac{(n+2)(n+1)-(n-1)n}{n+2}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[\frac{n^2+n+2n+2-n^2+n}{n+2}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[\frac{2(2n+1)}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{n+2}\frac{(2n)!2(2n+1)}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{n+2}\frac{(2n)!2(2n+1)(n+1)}{n!(n+1)!(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+2}\left[\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right] \\
&= \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = C_{n+1}.
\end{aligned}
$$

□

4.2 A DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS DE CATALAN

Em 1751, em uma carta destinada ao matemático alemão Christian Goldbach, o matemático suíço Leonhard Euler propôs o seguinte problema: *Dado um polígono convexo de $n \geq 3$ lados, de quantas maneiras distintas podemos ligar as diagonais deste polígono de modo que este seja triangulado e as diagonais não se cruzem?*(8)

O objetivo do problema proposto por Euler é traçar diagonais, sem interseção entre elas, de modo que o polígono seja dividido em triângulos.

Nesse problema da triangulação de polígonos convexos, definimos como T_n o número de maneiras em que um polígono convexo de n lados pode ser dividido em triângulos, desenhando suas diagonais sem que haja interseção entre elas, quando $n \geq 3$.

Por exemplo, para $n = 3$, temos $T_3 = 1$, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Existe apenas um triângulo.

Fonte: O autor.

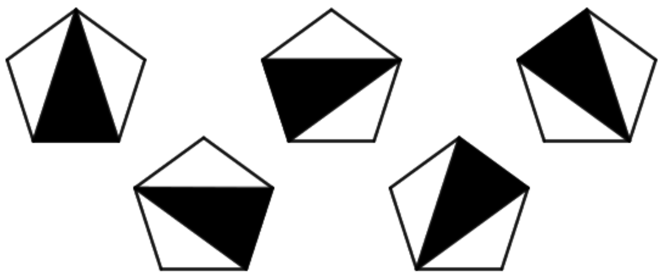
Para $n = 4$, temos $T_4 = 2$, ou seja, duas maneiras de triangular um quadrilátero, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Para o quadrado há 2 maneiras de dividi-lo em triângulos.

Fonte: O autor.

Para $n = 5$, temos $T_5 = 5$, como pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4: Para o pentágono há 5 maneiras de dividi-lo em triângulos.



Fonte: O autor.

Utilizando argumentos indutivos, os quais definiu como *quite laborious*, ou seja, bastante trabalhosos, Euler definiu o número T_n como

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!},$$

para $n \geq 3$. Publicada em 1761 essa fórmula só faz sentido quando $n \geq 3$ (3). Para expandi-la, incluindo os casos onde $n = 0, 1$ e 2, fazemos $k = n - 3$, e então $n = k + 3$. Daí,

$$\begin{aligned} T_{k+3} &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots [4(k+3-10]}{(k+3-1)!} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4k+2)}{(k+2)!}, \end{aligned}$$

para $k \geq 0$. Assim, temos que $T_3 = 1$, $T_4 = 2$ e $T_5 = 5$, que são os números de Catalan C_1, C_2 e C_3, respectivamente, deslocados dois índices para a direita. Então definimos $C_n = T_{n+2}$. Logo

$$\begin{aligned} C_n = T_{n+2} = T_{(n-1)+3} &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot [4(n-1)+2]}{(n-1+2)!} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-6)}{n!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1} \cdot C_{n-1}, \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Quando $n = 1$, $C_1 = C_0$, e como $C_1 = 1$, então definimos $C_0 = 1$.

Enfim, os números de Catalan C_n podem ser definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_n &= \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, a definição recursiva acima pode ser usada para obter explicitamente a expressão utilizada para definir os números de Catalan no início deste capítulo.

Proposição 4.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, temos que* $C_n = \dfrac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$.

Demonstração: Usando sucessivamente a recursão acima e que $C_0 = 1$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} = \frac{(4n-2)}{n+1} \frac{4(n-1)-2}{n} C_{n-2} = \frac{(4n-2)(4n-6)}{(n+1)n} C_{n-2} \\ &= \frac{(4n-2)(4n-6)}{(n+1)n} \frac{4(n-2)-2}{(n-1)} C_{n-3} = \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)}{(n+1)n(n-1)} C_{n-3} \\ &= \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10)}{(n+1)n(n-1)} C_{n-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{(4n-2)(4n-6)(4n-10) \cdots 6 \cdot 2}{(n+1)n(n-1) \cdots 3 \cdot 2} C_0. \end{aligned}$$

Colocando 2 em evidência em cada um dos fatores do numerador,

$$C_n = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1\cdot 2^n}{(n+1)!},$$

e multiplicando e dividindo por $(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2$ e repetindo o argumento anterior no denominador, obtemos

$$C_n = \frac{2^n(2n)!}{2^n(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

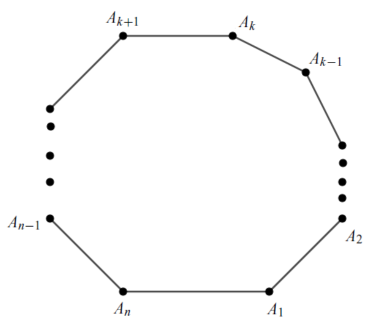
$\square$

4.3 A FÓRMULA RECURSIVA DE SEGNER

Em 1761, o matemático húngaro Johann Andreas Von Segner (1704-1777), utilizando os resultados dos estudos de Euler sobre o problema da triangulação de polígonos convexos, publicou uma segunda relação de recorrência para T_n, onde $n \geq 3$ (10).

Para desenvolver a fórmula de Segner, consideremos um polígono convexo de n lados e vértices $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, onde $n \geq 3$, como mostra a figura 5.

Figura 5: Polígono convexo com n lados

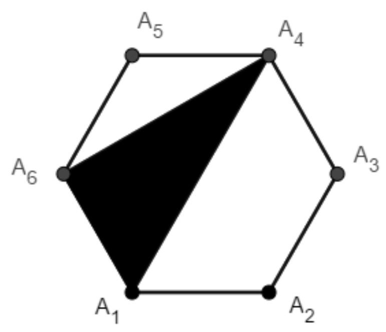


Fonte: O autor

Seja k um número inteiro, tal que $1 < k < n$. Considerando um triângulo de vértices A_1, A_k, A_n, dentro do polígono de n lados, o polígono maior é dividido entre este triângulo e dois outros polígonos menores. Se $3 \leq k \leq n-2$, obtemos um polígono com k lados, de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_k$, situado a direita do triângulo de vértices A_1, A_k, A_n, e um polígono com $(n-k+1)$ lados, de vértices $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n$, situado a esquerda do mesmo triângulo.

Para ilustrar essa situação consideremos um exemplo, no qual o polígono convexo tem $n = 6$ lados. Assim, se $k = 4$, o triângulo central tem vértices A_1, A_4, A_6, ao seu lado direito temos um polígono de 4 lados de vértices A_1, A_2, A_3, A_4, e ao lado esquerdo temos um triângulo, de vértices A_4, A_5, A_6, como mostra a Figura 6.

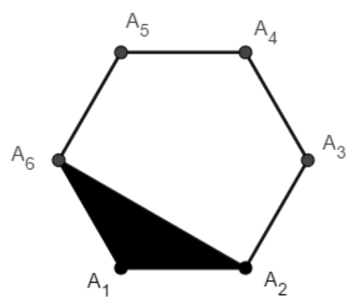
Figura 6: Polígono convexo de 6 lados com $k = 4$



Fonte: O autor

Por outro lado, ao considerarmos o caso em que $k = 2$, não obtemos um polígono situado ao lado esquerdo do triângulo de vértices A_1, A_k, A_n, mas teremos um polígono situado ao lado direito com $(n-1)$ lados, como mostra a Figura 7. Analogamente para o caso em que $k = n-1$.

Figura 7: Polígono convexo de 6 lados, no caso em que k=2



Fonte: O autor

O polígono com k lados pode ser dividido em triângulos sem interseção entre as diagonais de T_k maneiras e o polígono com $(n-k+1)$ lados em T_{n-k+1}. Assim, utilizando o princípio multiplicativo, temos que para cada k o número de triangulações é $T_k \cdot T_{n-k+1}$. Então, quando k varia, ou seja, fazendo $2 \leq k < n$, e usando o princípio aditivo, o número de triangulações possíveis com um polígono de n lados é dado por

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1} \\ &= T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_2, \end{aligned}$$

para $n \geq 3$. Definimos $T_2 = 1$. Agora, relembrando que na seção 4.2 definimos $C_n = T_{n+2}$, obtemos

$$\begin{aligned} C_n = T_{n+2} &= \sum_{k=2}^{n+1} T_k \cdot T_{n-k+3} \\ &= T_2T_{n+1} + T_3T_n + \cdots + T_nT_3 + T_{n+1}T_2 \\ &= C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_0, \end{aligned}$$

ou seja, a **fórmula recursiva de Segner** para C_n, $n \geq 1$, é dada por

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_0,$$

em que $C_0 = 1$.

Por exemplo, para calcularmos C_6, temos

$$\begin{aligned} C_6 &= C_0 \cdot C_5 + C_1 \cdot C_4 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_2 + C_4 \cdot C_1 + C_5 \cdot C_0 \\ &= 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132. \end{aligned}$$

Logo, $C_6 = 132$.

Observamos também que essa relação poder ser representada também como um produto escalar:

$$C_n = (C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \cdot (C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1, C_0)$$

Para ilustrar essa forma, calculamos o valor de C_5

$$\begin{aligned} C_5 &= (C_0, C_1, C_2, C_3, C_4) \cdot (C_4, C_3, C_2, C_1, C_0) \\ &= C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0 \\ &= 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42. \end{aligned}$$

4.4 PARIDADE DOS NÚMEROS DE CATALAN

Nesta seção vamos caracterizar os números de Catalan que são ímpares (11). Para melhor visualização deste tema consideremos o quadro abaixo, que contém os dezoito primeiros números de Catalan.

Quadro 1 - Representação dos dezoito primeiros números de Catalan

n	0	1	2	3	4	5
C_n	1	1	2	5	14	42
n	6	7	8	9	10	11
C_n	132	429	1430	4862	16796	58786
n	12	13	14	15	16	17
C_n	208012	742900	2674440	9694845	35357670	129644790

Fonte: O autor.

Note que para $n \leq 17$, os números de Catalan que são ímpares, são aqueles em que $n = 0,1,3,7$ e 15. Observamos que esses números assumem a forma $2^m - 1$, quando $m > 0$. Vejamos:

- para $m = 1$, temos que $2^1 - 1 = 1$;
- para $m = 2$, temos que $2^2 - 1 = 3$;
- para $m = 3$, temos que $2^3 - 1 = 7$;
- para $m = 4$, temos que $2^4 - 1 = 15$.

Os números que podem ser escritos da forma $2^m - 1$, onde m é um número natural, são chamamos de **números de Mersenne**, assim nomeados em homenagem ao francês Marin Mersenne [3].

Antes de enunciar o próximo teorema, vamos utilizar a relação de recorrência de Segner, apresentada na seção 4.3, para analisar os casos em que n é par ou n é ímpar.

Por exemplo, se $n = 4$, temos

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0 \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2); \end{aligned}$$

se $n = 6$, temos

$$\begin{aligned} C_6 &= C_0 \cdot C_5 + C_1 \cdot C_4 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_2 + C_4 \cdot C_1 + C_5 \cdot C_0 \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_5 + C_1 \cdot C_4 + C_2 \cdot C_3). \end{aligned}$$

Assim, para n par temos que $\frac{n}{2} - 1$ e $\frac{n}{2}$ são inteiros e podemos escrever

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}} + C_{\frac{n}{2}} \cdot C_{\frac{n}{2}-1} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 \\ &= 2\left(C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

[3] Marin Mersenne (1588-1648), padre e matemático francês, especialista em Teoria dos Números.

Por outro lado, se $n = 3$ obtemos

$$\begin{aligned} C_3 &= C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0 \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_2) + C_1^2; \end{aligned}$$

para $n = 5$, temos

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0 \\ &= 2 \cdot (C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3) + C_2^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, para n ímpar, segue que $\frac{n-3}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$ são inteiros e podemos escrever

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}} + C_{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{\frac{n-1}{2}} + C_{\frac{n+1}{2}} \cdot C_{\frac{n-3}{2}} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_0 \\ &= 2\left(C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}}\right) + C_{\frac{n-1}{2}}^2. \end{aligned}$$

Logo, pela análise feita acima podemos reescrever a relação de recorrência de Segner da seguinte forma

$$C_n = \begin{cases} 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n}{2}-1} \cdot C_{\frac{n}{2}}), & \text{se } n \text{ é par,} \\ 2 \cdot (C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{\frac{n-3}{2}} \cdot C_{\frac{n+1}{2}}) + C_{\frac{n-1}{2}}^2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

O teorema a seguir nos ajuda a identificar os números de Catalan que são ímpares.

Teorema 4.9. *Para $n > 0$, o número de Catalan C_n é ímpar se, e somente se, n é um número de Mersenne.*

Demonstração: A partir da nova representação da recorrência de Segner obtida acima, temos que se n é par então C_n é par. Por outro lado, se n é ímpar, como a primeira parcela de C_n é par, então C_n é ímpar se, e somente se $C_{\frac{n-1}{2}}$ é ímpar, ou seja,

$$\begin{gathered} C_n \text{ é ímpar se, e somente se, } n \text{ e } C_{\frac{n-1}{2}} \text{ são ímpares} \\ \text{se, e somente se, } \frac{n-1}{2} \text{ e } C_{\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2}} = C_{\frac{n-3}{4}} \text{ são ímpares, ou ainda, se } \frac{n-1}{2} = 0 \\ \text{se, e somente se, } \frac{n-3}{4} \text{ e } C_{\frac{\frac{n-3}{4}-1}{2}} = C_{\frac{n-7}{8}} \text{ são ímpares, ou ainda, se } \frac{n-3}{4} = 0. \end{gathered}$$

Continuando com esse argumento, um número finito de vezes, C_n é ímpar se, e somente se, $C_{\frac{n-(2^m-1)}{2^m}}$ é ímpar, para $m \geq 1$. Mas sabemos que o menor valor de k, para o qual o número de Catalan C_k é ímpar, ocorre quando $k = 0$. Então, para que C_n seja ímpar, temos que $\dfrac{n-(2^m-1)}{2^m} = 0$, ou seja, $n = 2^m - 1$, isto é, n é um número de Mersenne.

$\square$

Para ilustrar o teorema acima, seja $m = 5$ na expressão que define um número de Mersenne, então $n = 2^m - 1 = 2^5 - 1 = 31$. Dessa forma, C_{31} é ímpar. De fato, $C_{31} = \frac{1}{32}\binom{62}{31} =$ 14544636039226909.

4.5 PRIMALIDADE DOS NÚMEROS DE CATALAN

Nesta seção apresentamos um resultado que nos diz quais são os números de Catalan que são primos (11).

Ao observarmos novamente o Quadro 1, que apresenta os primeiros dezoito números de Catalan, notemos outra particularidade: nesses números, apenas dois deles são primos, C_2 e C_3. Curiosamente, esses são os únicos números de Catalan que são primos. O teorema a seguir comprova esse fato.

Teorema 4.10. *Os únicos números de Catalan que são primos são os números $C_2 = 2$ e $C_3 = 5$.*

Demonstração: Pela fórmula recursiva obtida por Euler, $C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$, temos que

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n,$$

o que implica que

$$C_{n+1}(n+2) = C_n(4n+2).$$

Agora, assumindo que C_n é um número primo, para algum n, pela igualdade acima, temos que $C_n | n+2$ ou $C_n | C_{n+1}$.

Contudo, vemos que se $n > 3$, então $C_n > n+2$ e, portanto, $C_n \nmid n+2$ para $n > 3$. Daí, $C_n \mid n+2$ se, e só se, $n \leq 3$. Ou seja, as possibilidades de C_n primo são $C_2 = 2$ ou $C_3 = 5$.

Por outro lado, se $C_n | C_{n+1}$, então, $C_{n+1} = k \cdot C_n$, para algum inteiro positivo k. Assim, pela igualdade acima, temos $k(n+2) = 4n+2$.

Daí, é fácil verificar que somente para $k = 1, 2$ e 3 obtemos os respectivos valores de $n = 0, 1, 4$ tal que $C_n \mid C_{n+1}$. Mas repare que C_0, C_1 e C_4 não são primos.

Logo, os únicos números de Catalan primos são C_2 e C_3.

$\square$

4.6 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DOS NÚMEROS DE CATALAN

Nesta seção nosso objetivo é dar o comportamento assintótico dos números de Catalan. Como sabemos estes são dados em termos do fatorial e, como podemos perceber, têm crescimento muito rápido. Vamos usar a bem conhecida fórmula de Stirling para fazer isso.

Podemos encontrar um valor aproximado para C_n, quando n for grande, usando a chamada fórmula de Stirling (12), que é uma fórmula de aproximação para o fatorial, a qual no diz que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \to \infty,$$

em que

$$A \sim B, \quad x \to \infty,$$

se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1,$$

e essa expressão é lida como "A é assintótico a B".

Então, usando a fórmula de *Stirling* acima,

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\\ &\sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot 2\pi n}\\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.\end{aligned}$$

Assim, uma fórmula assintótica para C_n é dada por

$$\begin{aligned}C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &\sim \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{n\pi}}\\ &\sim \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$C_n \sim \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}},$$

se n for grande.

Além disso, segue da relação de recorrência de Segner, vista na seção 4.3, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4,$$

e assim, quando n é suficientemente grande, obtemos

$$C_{n+1} \sim 4 \cdot C_n.$$

Ou ainda,

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} \sim 4.$$

Por exemplo, para C_{51} e C_{50}, obtemos:

$$\frac{C_{51}}{C_{50}} = \frac{7684785670514316385230816156}{1978261657756160653623774456} = 3.88462 \sim 4.$$

4.7 A FUNÇÃO GERADORA DOS NÚMEROS DE CATALAN

Vimos na seção 4.3 que os números de Catalan são definidos recursivamente pela relação de Segner, como segue:

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \cdot C_0,$$

em que $C_0 = 1$. De outra forma, essa mesma relação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_n &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

Queremos encontrar uma função geradora para a sequência numérica de Catalan. A função procurada tem C_n como coeficiente do termo x^n (8), em outras palavras,

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x^n + C_0. \end{aligned}$$

Do fato que $C_0 = 1$, obtemos

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x^n + 1.$$

Agora, sabemos que se f e g são séries de potências, então $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \cdot g_{n-k} \right) \cdot x^n$, logo:

$$
\begin{aligned}
c(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}\right)\cdot x^n + 1 \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k-1}\right)\cdot x^{n-1} + 1.
\end{aligned}
$$

Nesse caso, fazendo $f(x) = g(x) = c(x)$, assim,

$$
\begin{aligned}
c(x) &= x\cdot c(x)\cdot c(x) + 1 \\
&= x\cdot c^2(x) + 1 \Leftrightarrow x\cdot c^2(x) - c(x) + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Agora, resolvendo a equação do segundo grau em $c(x)$, obtemos

$$
c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.
$$

Dentre as duas funções possíveis, devemos encontrar aquela que representa a sequência de Catalan. Pela definição da série, a função deve satisfazer a seguinte condição, se $x = 0$, então $c(0) = 1$. Assim, devemos calcular o limite de cada uma das funções em $x = 0$, uma vez que ambas são descontínuas nesse ponto. Vejamos:

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty,\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = -\infty,
$$

ou seja, não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Por outro lado,

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{0}{0}
$$

isto é, uma indeterminação. Aplicamos a bem conhecida regra de l'Hôpital, assim obtendo

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-4x})'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1.
$$

Como

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1,
$$

temos a condição $c(0) = 1$ satisfeita e concluímos que **a função geradora para os números de Catalan** é

$$
c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.
$$

4.8 NÚMEROS DE CATALAN E O TRIÂNGULO DE PASCAL

Nesta seção vamos relacionar os números de Catalan com o triângulo de Pascal. Vamos ver que os números de Catalan podem ser obtidos a partir do coeficiente binomial central das linhas pares.

Como sabemos, todos os coeficientes binomiais $\binom{n}{r}$, onde $0 \leq r \leq n$, podem ser organizados no formato de um arranjo triangular, conhecido como Triângulo de Pascal, atribuído ao matemático francês Blaise Pascal, que os apresentou no livro *Treatise on the Arithmetic Triangle*, em 1653 (3), como mostra a Figura 8.

Figura 8: Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \cdots\cdots\ \binom{n}{n}
\end{array}$$

Fonte: O autor

Nas linhas pares do Triângulo de Pascal, o coeficiente binomial que aparece na posição central é conhecido como coeficiente binomial central e definido por $\binom{2n}{n}$.

A partir da fórmula explícita que define os números de Catalan, dada na seção 4.1, segue que todo número C_n pode ser obtido através do Triângulo de Pascal. Para isso, basta dividir cada um dos coeficientes binomiais centrais por $n+1$, ou seja, $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$ (13). Por exemplo:

- Para a linha 0, temos $n = 0$ e o coeficiente binomial central é $\binom{0}{0} = 1$; logo

$$C_0 = \frac{1}{0+1} = 1.$$

- Para a linha 2, temos $n = 1$ e o coeficiente binomial central é $\binom{2}{1} = 2$; logo

$$C_1 = \frac{2}{1+1} = 1.$$

- Para a linha 4, temos $n = 2$ e o coeficiente binomial central é $\binom{4}{2} = 6$; logo

$$C_2 = \frac{6}{2+1} = 2.$$

- Para a linha 6, temos $n = 3$ e o coeficiente binomial central é $\binom{6}{3} = 20$; logo

$$C_3 = \frac{20}{3+1} = 5.$$

- Para a linha 8, temos $n = 4$ e o coeficiente binomial central é $\binom{8}{4} = 70$; logo

$$C_4 = \frac{70}{4+1} = 14.$$

Os números de Catalan podem ser obtidos no triângulo de Pascal através de outras três maneiras (14), demonstradas a seguir.

A primeira maneira é a diferença do coeficiente binomial central e o termo adjacente a esquerda na mesma linha $2n$, resulta em um número de Catalan, como mostra a Figura 9, em que os coeficientes binomiais centrais estão circulados e seus adjacentes à esquerda estão sublinhados.

Para a linha 0, temos $C_0 = 1$, já para a linha 2, $C_1 = 2 - 1 = 1$, na linha 4, $C_2 = 6 - 4 = 2$ e assim por diante.

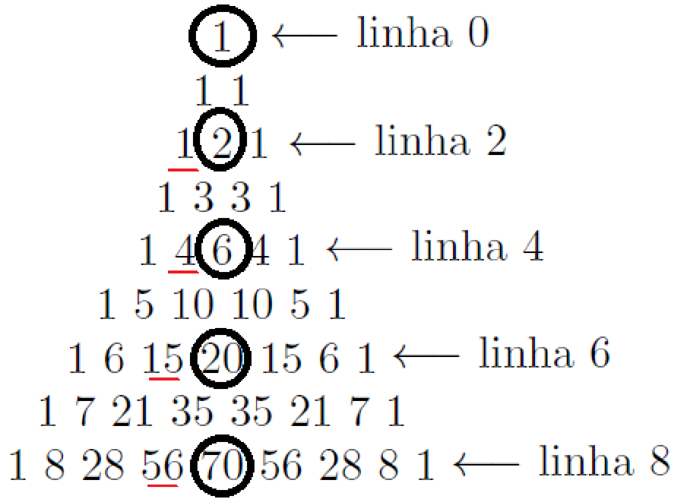
Como visto anteriormente, o coeficiente binomial central é dado por $\binom{2n}{n}$ e o termo adjacente à esquerda é representado por $\binom{2n}{n-1}$, dessa forma, temos que

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

como visto na Proposição 4.1.

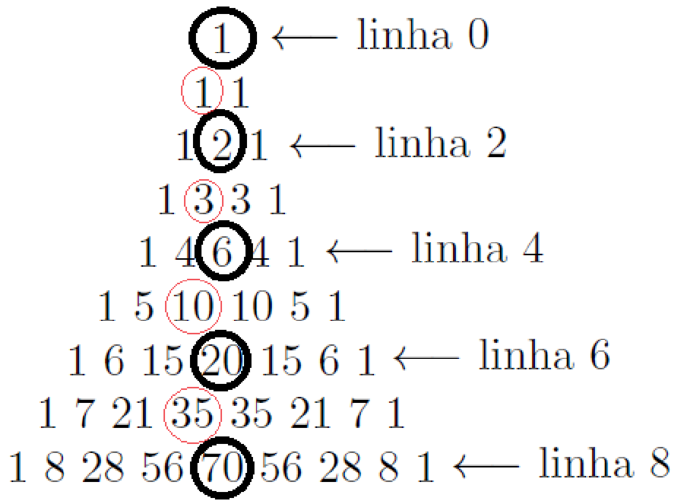
O segundo modo de obter os números de Catalan através do triângulo de Pascal é pela diferença entre o dobro do coeficiente binomial central da linha $2n$ e o coeficiente binomial central da linha abaixo, que se encontra na mesma diagonal, circulado em vermelho na Figura 10.

Figura 9: Triângulo de Pascal com destaque para os coeficientes binomiais centrais e os termos adjacentes a esquerda



Fonte: O autor

Figura 10: Triângulo de Pascal com destaque para os coeficientes binomiais centrais das linhas pares e ímpares que se encontram na mesma diagonal



Fonte: O autor

Por exemplo, na linha 0, temos que $2 \cdot 1 - 1 = 1$, já para a linha 2, $2 \cdot 2 - 3 = 1$ e para linha 4, $2 \cdot 6 - 10 = 2$, que são respectivamente os números de Catalan C_0, C_1 e C_2.

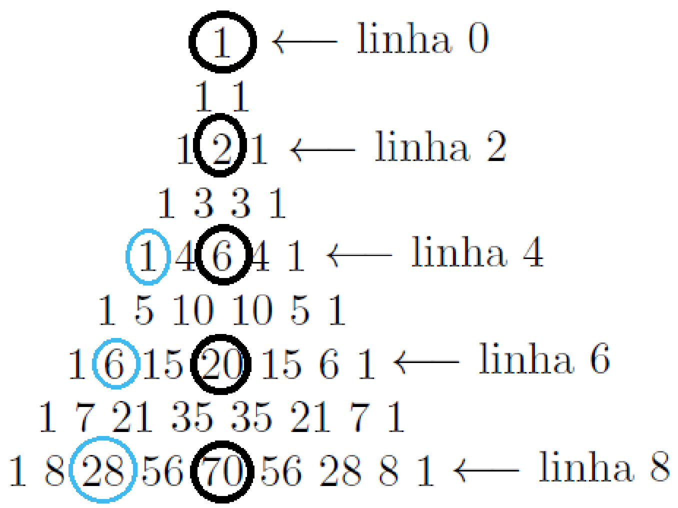
O coeficiente binomial central das linhas pares é representado por $\binom{2n}{n}$ e o coeficiente central das linhas ímpares é representado por $\binom{2n+1}{n}$, então a diferença entre o dobro do coeficiente binomial central das linhas pares e o coeficiente central das linhas abaixo delas é representado por

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n},$$

e como visto na Proposição 4.5, essa diferença é igual a C_n.

Já a terceira forma de extrair os números de Catalan do triângulo de Pascal, é que, com exceção de C_0, todo número de Catalan é a diferença do coeficiente binomial central e o coeficiente binomial deslocado dois espaços a esquerda, na mesma linha, circulados em azul, como mostra a Figura 11.

Figura 11: Triângulo de Pascal com destaque para os coeficientes binomiais centrais e os coeficientes binomiais deslocados dois espaços a esquerda



Fonte: O autor

Por exemplo, na linha 0, $1-0=1$, na linha 2, $2-0=2$, na linha 4, $6-1=5$, que são respectivamente os números de Catalan C_1, C_2 e C_3.

Em outras palavras, essa diferença pode ser escrita como

$$C_{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$$

e como visto na Proposição 4.7, essa diferença resulta em C_n.

4.9 OS NÚMEROS DE CATALAN E O PI

Nesta seção nosso objetivo é relacionar os números de Catalan com o número irracional π. Faremos isso baseados na referência (15). Como sabemos o π é bastante presente não só na matemática, como também em outras ciências. A seguinte representação em série de $1/\pi$, dada por Ramanujan,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{n}\right]^2 \frac{4n^2-1}{2^{4n}(n+1)^2},$$

relaciona os números de Catalan e o número π de uma maneira bastante curiosa. Repare que $\dfrac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{n} = C_{n-1}$. Para obtermos essa representação precisamos de ferramentas do cálculo diferencial e integral, as quais podem ser encontradas na referência (16).

De fato, repare que para $0 \leq x \leq 1$, temos

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{3/2}\right],$$

em que a integral é resolvida pelo método da substituição. Por outro lado, expandindo o integrando usando a série binomial e em seguida integrando termo a termo, obtemos

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}dt = \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n2^{2n-1}}\frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

e fazendo a substituição $k = n+1$, chegamos em

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}dt = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\binom{2k-4}{k-2}}{(k-1)2^{2k-3}}\frac{x^{2k}}{2k}.$$

Agora, igualando as duas expressões obtidas para a integral, temos

$$\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{3/2}\right] = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\binom{2k-4}{k-2}}{(k-1)2^{2k-3}}\frac{x^{2k}}{2k}.$$

Na igualdade acima substituimos x por $\operatorname{sen} x$ e integrando ambos os membros de 0 a $\pi/2$, obtemos

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}\left[1-\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{3/2}\right]dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}dx - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\binom{2k-4}{k-2}}{(k-1)2^{2k-3}}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^{2k} x}{2k}dx.$$

Para para resolver a integral do lado esquerdo procedemos como abaixo, lembrando que $1-$

$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\left[1-\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{3/2}\right] dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 x\right)^{3/2} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\, dx \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\cdot\cos x\, dx \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cdot\cos x\, dx \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\left[\int_0^{\pi/2}\cos x - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\, dx\right] \\ = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\, dx,\end{aligned}$$

e integrando por substituição esta última integral, com $u = \operatorname{sen} x$, obtemos $du = \cos x\, dx$ e

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\left[1-\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{3/2}\right] dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^1 u^2 du = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$$

Ou seja,

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} dx - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\binom{2k-4}{k-2}}{(k-1)2^{2k-3}}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^{2k} x}{2k} dx.$$

Por outro lado, para resolver as integrais do lado direito usamos a fórmula integral de Wallis (16)

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2k} x\, dx = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

e obtemos

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\binom{2k-4}{k-2}\binom{2k}{k}}{(k-1)k2^{4k-4}}.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $n = k-1$ no somatório chegamos em

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}\binom{2n+2}{n+1}}{n(n+1)2^{4k}},$$

mas repare que

$$\begin{aligned}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{2^2(2n+1)(2n-1)}{n(n+1)}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \\ = \frac{2^2(2n+1)(2n-1)}{n(n+1)}\cdot\binom{2n-2}{n-1},\end{aligned}$$

e, assim, obtemos

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \frac{\pi}{8}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}^2}{2^{4n-2}}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\right].$$

Finalmente dividimos por $\pi/8$ e simplificamos para obter

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n} \right]^2 \frac{4n^2 - 1}{2^{4n}(n+1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}^2 \frac{4n^2 - 1}{2^{4n}(n+1)^2},$$

a qual relaciona os números de Catalan com π.

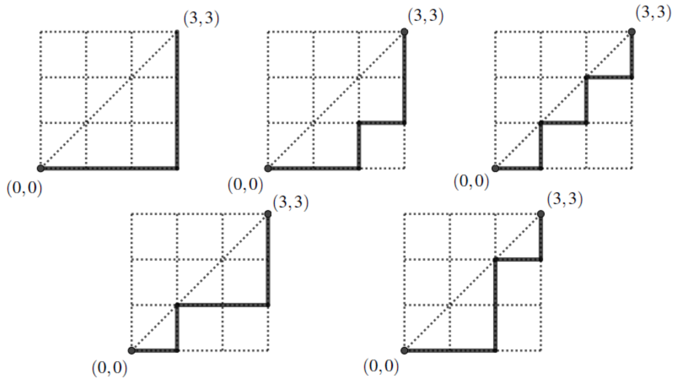
5 APLICAÇÕES DOS NÚMEROS DE CATALAN

Neste capítulo apresentamos diversas aplicações dos números de Catalan, mostrando que os mesmos estão presentes em variados problemas da matemática.

5.1 CAMINHOS RETICULADOS

O objetivo desta aplicação é contar de quantas maneiras distintas podemos, partindo do ponto $(0,0)$ e chegar ao ponto (n,n), em uma malha de dimensões $n \times n$, sendo possível usar apenas passos de comprimento um, nas direções leste (direita) ou norte (cima), sem cruzar a diagonal principal da malha, ou seja, sem cruzar a reta que une os pontos $(0,0)$ e (n,n) (3). Na Figura 12 temos um exemplo de caminhos corretos percorridos em uma malha de 3×3.

Figura 12: Exemplos de caminhos entre os pontos $(0,0)$ e $(3,3)$, sem cruzar a diagonal.



Fonte: O autor.

Repare que os caminhos que levam de $(0,0)$ até (n,n) tem o mesmo número n de passos para o leste e para o norte, assim o número total de passos é $2n$. Como cada uma das direções repetem n vezes, então, pela permutação com repetição, o número total de possibilidades de caminhos entre os pontos é dado por $\binom{2n}{n}$.

Com a restrição de que os caminhos não podem cruzar a diagonal que liga os pontos $(0,0)$ e (n,n), então existe um certo número de caminhos inválidos, que não cumprem o que é exigido no problema.

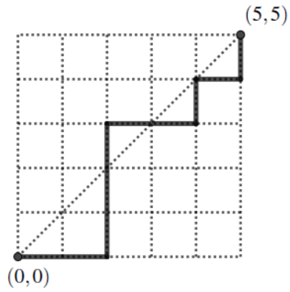
Antes de analisarmos os caminhos inválidos, faremos duas considerações importantes:

- Todo caminho correto começa com um passo para o leste e termina com um passo para o norte;

- Para descrever o caminho percorrido, substituiremos a expressão *passo para o leste* pela letra L e *passo para o norte* pela letra N, ou seja, associaremos o caminho percorrido a uma palavra de tamanho $2n$, na qual são usadas n L's e n N's.

Agora, analisemos duas situações de caminhos inválidos em uma malha 5×5.

Figura 13: Primeira situação de caminho inválido em uma malha 5×5.

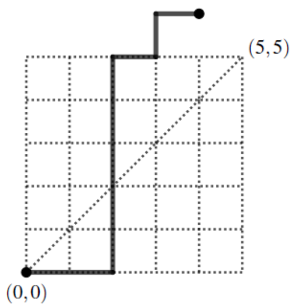


Fonte: O autor.

Nesta primeira situação mostrada na Figura 13, o caminho descrito é $LLNNNLLNLN$. O caminho cruzou a diagonal no quinto movimento: $LLNNN \bullet LLNLN$.

Para a segunda situação, vamos utilizar como base o caminho descrito na primeira situação, porém invertendo as direções a partir do sexto movimento. Desta forma, o caminho descrito se torna $LLNNN \bullet NNLNL$, como mostra a Figura 14.

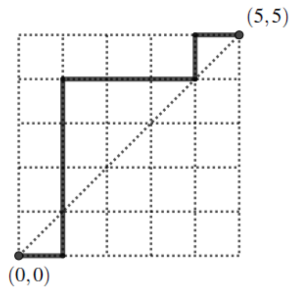
Figura 14: Segunda situação de caminho inválido.



Fonte: O autor.

Neste novo caminho, também inválido, chegando a sair da malha, temos 6 N's e 4 L's. Ou seja, para cada caminho inválido em que trocamos as direções a partir do movimento que cruzou a diagonal principal da malha surge um novo caminho, que sai da malha e tem sempre um movimento a mais para uma das direções e um movimento a menos para a outra.

Figura 15: Outra situação de caminho inválido em uma malha $5x5$.

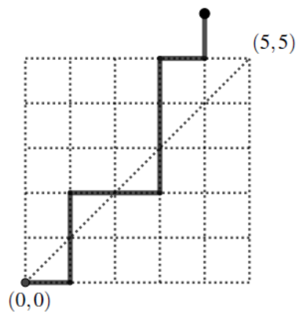


Fonte: O autor

Vejamos outro exemplo para uma malha 5×5, como mostra a Figura 15. Descrevendo o caminho percorrido, temos *LNNNNLLLNL*. Este caminho cruzou a diagonal no terceiro movimento.

Trocando as direções a partir do quarto movimento, o caminho se torna *LNNLLNNNLN*. Ou seja, um caminho que sai da malha e tem 6 "*N*"s e 4"*L*"s, como mostra a Figura 16.

Figura 16: Invertendo as direções do caminho da Figura 15, temos outro caminho inválido.



Fonte: O autor.

Assim, todo caminho inválido ao mudar as direções, a partir do movimento que cruzou a diagonal, gera um novo caminho que se encontra em uma malha de tamanho $(n-1) \times (n+1)$, em que uma direção tem um movimento a mais e um movimento a menos na outra direção. Portanto, existe uma bijeção entre o número de caminhos inválidos e o número de caminhos inválidos em uma malha de tamanho $(n-1) \times (n+1)$. Assim, para calcular o número de caminhos inválidos em uma malha 5×5, temos

$$\frac{10!}{6!4!} = \binom{10}{4} = 210.$$

Como descrito no início da seção, o número total de caminhos possíveis é dado por

$\binom{2n}{n}$. Assim, para o caso que estamos analisando, numa malha 5×5, temos que o total de possibilidades é

$$\binom{2n}{n} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

Podemos concluir então, que o número de caminhos válidos é a diferença entre o número total de possibilidades e o número de caminhos inválidos. Assim, no caso estudado, o número de caminhos válidos é $252 - 210 = 42$.

Estendendo esse resultado para uma malha $n \times n$, temos que o número de caminhos inválidos é igual ao número de permutações de $2n$ direções (L e N), sendo sempre $(n-1)$ direções para leste e $(n+1)$ direções para o norte, assim, $\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dbinom{2n}{n-1}$.

Assim, o número de caminhos válidos é dado por $\dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n-1}$, e que conforme a Proposição 4.1, é igual a C_n.

5.2 SEQUÊNCIAS DE PARÊNTESES

Como descrito no início deste trabalho, o problema algébrico da sequência de parênteses foi publicado por Catalan (17) e procura descobrir de quantas maneiras podemos multiplicar n termos, sempre dois a dois, utilizando parênteses para indicar a ordem em que devem ser feitas as multiplicações (18). Esse número de possibilidades será representado por P_n.

Começamos definindo $P_1 = 1$. A análise dos demais casos é como segue. Para $n = 2$, temos $P_2 = 1$, pois só existe uma multiplicação possível entre dois termos, ab. Já para $n = 3$, temos duas maneiras de multiplicar, $a(bc)$ e $(ab)c$, ou seja, $P_3 = 2$.

Para multiplicar 4 termos, temos as seguintes possibilidades:

$$(ab)(cd), a((bc)d), a(b(cd)), (a(bc))d, ((ab)c)d.$$

E assim, obtemos $P_4 = 5$.

Conhecendo os valores de P_1, P_2, P_3 e P_4, podemos descobrir o valor de P_5, sem exibir as possibilidades. Se temos um produto entre 5 fatores e só podemos multiplicá-los dois a dois, respeitando uma ordem, esse produto tem um dos seguintes formatos:

$$w_1(w_4), (w_2)(w_3), (w_3)(w_2), (w_4)w_1,$$

onde w_j é um produto de j fatores. Então $w_1(w_4)$ representa um fator que multiplica outros 4 fatores, que são multiplicados entre si dentro do parênteses. Sabemos que $P_1 = 1$ e que $P_4 = 5$, então para o produto $w_1(w_4)$, temos $P_1 \cdot P_4 = 5$ possibilidades. Para as formas $(w_2)(w_3)$ e $(w_3)(w_2)$ temos, respectivamente, $P_2 \cdot P_3 = 2$ e $P_3 \cdot P_2 = 2$ possibilidades. Finalmente para a forma $(w_4)w_1$ temos novamente $P_4 \cdot P_1 = 5$ possibilidades. Somando todas as possibilidades obtemos

$$\begin{aligned} P_5 &= P_1P_4 + P_2P_3 + P_3P_2 + P_4P_1 \\ &= 5+2+2+5 = 14. \end{aligned}$$

Portanto, $P_5 = 14$.

O mesmo argumento pode ser utilizado para calcular P_6. Um produto entre 6 fatores tem um dos seguintes formatos:

$$w_1(w_5), (w_2)(w_4), (w_3)(w_3), (w_4)(w_2), (w_5)w_1.$$

Como são conhecidos os valores de P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, então o número de possibilidades para o produto de 6 fatores é dado por

$$\begin{aligned} P_6 &= P_1P_5 + P_2P_4 + P_3P_3 + P_4P_2 + P_5P_1 \\ &= 14+5+4+5+14 = 42. \end{aligned}$$

De uma forma geral, o número de possibilidades de multiplicar n termos, sempre dois a dois, indicando por parênteses a ordem em que as multiplicações dever ser realizadas é dado por

$$P_n = P_1P_{n-1} + P_2P_{n-2} + ... + P_{n-2}P_2 + P_{n-1}P_1.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $P_n = C_{n-1}$, $n \geq 1$, obtemos

$$C_{n-1} = C_0C_{n-2} + C_1C_{n-3} + ... + C_{n-3}C_1 + C_{n-2}C_0,$$

ou ainda

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0,$$

que corresponde ao n-ésimo número de Catalan C_n, dada pela recorrência de Segner da seção 4.3. Enfim, observamos que os números de Catalan surgem naturalmente como a solução do problema da sequência de parênteses.

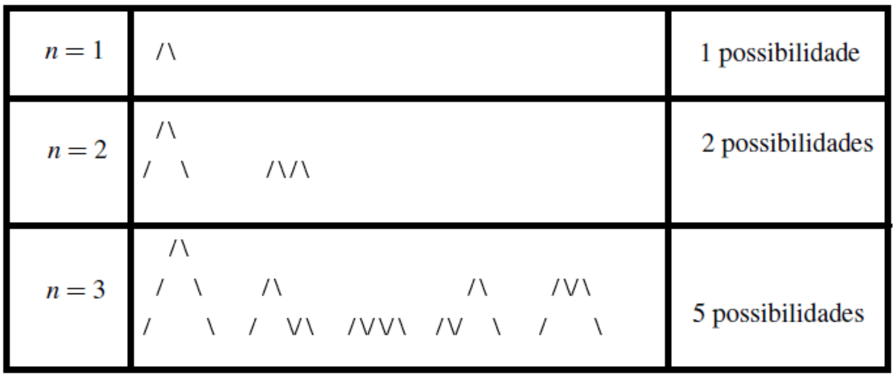
5.3 CADEIAS DE MONTANHAS

Nesta seção vamos resolver o problema que a referência (18) chamou de *cadeias de montanhas*, também chamado de *Dyck paths* em (3). Nesse problema queremos saber quantas cadeias de montanhas pode-se formar com n movimentos de subida, representados por “/”, e

n movimentos de descida, representados por “\”, que se mantém acima da linha horizontal de origem?

Definimos que existe uma única cadeia de montanhas para $n = 0$. Temos na Figura 17 uma representação para os casos onde $1 \leq n \leq 3$.

Figura 17: Cadeias de montanhas para os casos $1 \leq n \leq 3$.



Fonte: O autor.

Notemos que existe uma correspondência entre as cadeias de montanhas e as sequências de parênteses da Seção 5.2, ou seja, o símbolo “/” equivale a “(” e “\” equivale a “)”.

Assim como na interpretação dos caminhos reticulados, apresentada na seção 5.1, desconsiderando se a cadeia de montanhas tem um formato válido ou não, procuramos organizar uma coleção de $2n$ objetos, n “/” e n “\”, tomados n a n. Então, temos um total de $\binom{2n}{n}$ possibilidades.

Agora, para determinar o número de cadeias de montanhas válidas, ou seja, aquelas que possuem caminho que não cruza a linha horizontal de origem da cadeia, subtraímos o número de montanhas com caminhos inválidos do total de possibilidades. Sabemos que os caminhos inválidos em algum momento atravessam a linha horizontal em um determinado ponto, a partir desse ponto, invertendo todos os traços, trocando os movimentos de subida por movimentos de descida e vice-versa, temos que os novos caminhos gerados vão acabar dois passos abaixo da linha, ou seja, são constituídos de $n+1$ movimentos de descida e $n-1$ movimentos de subida. Assim, o número de caminhos inválidos é dado pela quantidade de maneiras em que podemos escolher $n+1$ movimentos de descida entre $2n$ traços totais, dessa forma, tal quantidade é dada por $\binom{2n}{n+1}$ possibilidades.

Então, o número de cadeias de montanhas válidas é dado por:

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{2n!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n+1!)(n-1)!}\\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\ &= C_n\end{aligned}$$

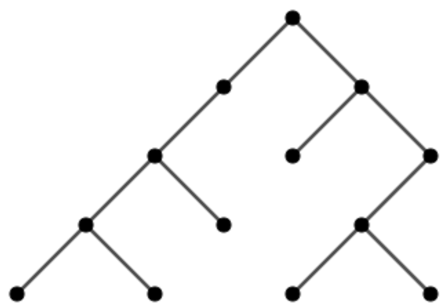
5.4 ÁRVORES BINÁRIAS E OS NÚMEROS DE CATALAN

Uma **árvore binária** T é um conjunto finito de elementos, denominados vértices ou nós, tal que:

- Se $T = \phi$, a árvore é dita vazia;
- T contém um vértice especial, chamado **raiz de** T, e os outros demais vértices são subdivididos em dois subconjuntos distintos, os quais também são árvores binárias, chamados de **sub-árvores**;

Cada vértice em uma árvore binária pode ter até dois descendentes. O vértice que não apresenta nenhum descendente é chamado de folha (3). A Figura 18 apresenta um exemplo de árvore binária.

Figura 18: Árvore binária.



Fonte: O autor.

Vamos mostrar que existe uma correspondência entre os números de Catalan e a quantidade de árvores binárias com n vértices: a quantidade de árvores com n vértices é igual ao n-ésimo número de Catalan C_n. Para demonstrarmos essa relação, definimos b_n como sendo o número de árvores binárias com n vértices, onde $n \geq 0$.

Considerando que a árvore vazia é a única árvore binária com zero vértices, definimos $b_0 = 1$. Quando $n = 1$, a árvore é composta apenas pelo vértice raiz, que é único. Desta forma, $b_1 = 1$.

Agora, determinemos uma relação de recorrência para b_n. Para isso, consideremos uma árvore binária T, com n vértices.

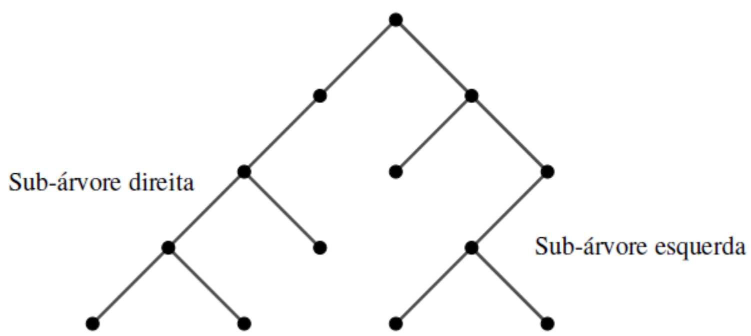
A raiz da árvore possui $n-1$ descendentes. Suponha que tais descendentes são separados da seguinte forma: i descendentes formam a sub-árvore esquerda e $n-i-1$ descendentes formam a sub-árvore direita, onde $0 \leq i \leq n-1$. Por definição, existem b_i árvores binárias com i vértices e b_{n-i-1} árvores binárias com $n-i-1$ vértices. Pelo princípio da multiplicação, existem $b_i b_{n-i-1}$ árvores binárias com i descendentes na sub-árvore esquerda e $n-i-1$ descendentes na sub-árvore direita. Assim, pelo princípio da adição, o número total de árvores binárias com n vértices é dado por

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-i-1} \\ &= b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \ldots + b_{n-1} b_0, \end{aligned}$$

onde $b_0 = 1$. Repare que se fizermos $b_n = C_n$ a relação encontrada é a recorrência de Segner, demonstrada na seção 4.3, e novamente os números de Catalan são a solução do problema.

Então se quisermos saber o número de árvores binárias que possuem 13 vértices, basta calcular C_{13}, ou seja, teremos $C_{13} = \dfrac{1}{14}\dbinom{26}{13} = 742900$ possibilidades de formá-la. Uma delas está representada na Figura 19.

Figura 19: Árvore binária com 13 vértices.



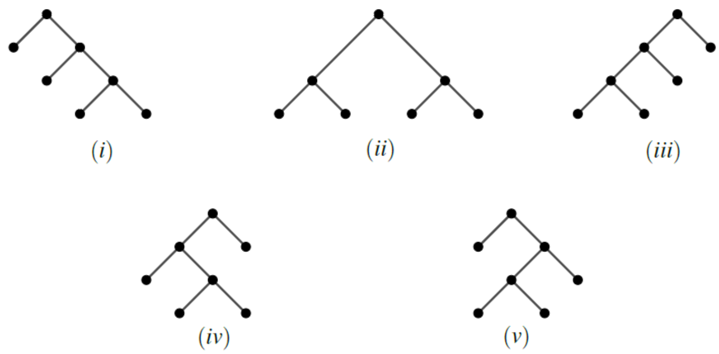
Fonte: O autor.

Agora vamos descrever um outro problema relacionado com árvores binárias, no qual os números de Catalan também aparecem como solução.

Uma **arvore binária plana**, também conhecida como árvore binária plana completa, é uma árvore em que cada vértice é uma folha (não tem descendentes) ou tem dois descendentes.

Aqui o problema é determinar o número de possibilidades de formar árvores binárias planas com $2n+1$ vértices (ou com $n+1$ folhas). Vamos demonstrar que a resposta para esse problema é dada pelo n-ésimo número de Catalan. A Figura 20 ilustra os casos onde $n = 3$.

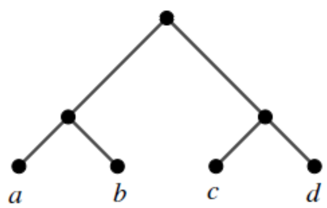
Figura 20: Árvores binárias planas onde $n = 3$.



Fonte: O autor.

Para análise da contagem da quantidade de árvores, vamos considerar como exemplo uma das árvores do caso em que $n = 3$. Primeiramente, vamos nomear as folhas de uma delas, (ii) da Figura 20, pelas letras a, b, c e d, como mostra a Figura 21.

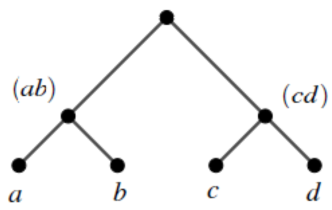
Figura 21: Árvore binária, onde $n = 3$, com as folhas nomeadas.



Fonte: O autor.

Note que as folhas a e b são originadas do mesmo vértice. Então, vamos nomeá-lo como o produto entre essas duas folhas. Assim, esse vértice será denotado por (ab). De maneira análoga, os vértices c e d são originados de um mesmo vértice, o qual denotamos por (cd), como ilustra a Figura 22.

Figura 22: Vértices nomeados que originam duas folhas.



Fonte: O autor.

Agora, como os vértices (ab) e (cd) surgiram do mesmo vértice raiz, denotaremos esse vértice por $((ab)(cd))$. Assim, temos que a raiz da árvore é descrita como $((ab)(cd))$, ou seja, a árvore é equivalente ao produto $((ab)(cd))$. Raciocinando de forma similar, obtemos que os produtos $(a(b(cd)))$, $(((ab)c)d)$, $((a(bc))d)$ e $(a((bc)d))$ são respectivamente equivalentes às árvores (i), (iii), (iv) e (v), representadas na Figura 20.

Logo existe uma bijeção entre as árvores binárias planas com $2n+1$ vértices (ou $n+1$ folhas) e o produto binário de $n+1$ termos. Conforme visto na seção 5.2, o número de possibilidades de multiplicarmos $n+1$ termos, sempre dois a dois, é dado por C_n. Portanto, o número de árvores binárias planas com $2n+1$ vértices, ou $n+1$ folhas, também é dado por C_n.

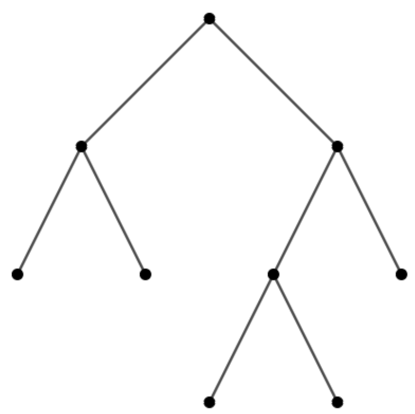
Por exemplo, para $n = 4$, temos $C_4 = 14$ árvores binárias planas com 9 vértices (ou 5 folhas), uma delas está mostrada na Figura 23.

5.5 PONTOS SOBRE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Se $2n$ pessoas estão sentadas em torno de uma mesa circular, de quantas maneiras todas as pessoas podem, simultaneamente, apertar a mão de outra pessoa da mesa, sem que os braços se cruzem sobre ela (18)? Esse problema pode ser reescrito como: Encontre o número de maneiras em que $2n$ pontos em uma circunferência, podem ser unidos por n cordas de tal maneira que as cordas não se cruzam? A Figura 24 representa as situações onde $1 \leq n \leq 3$.

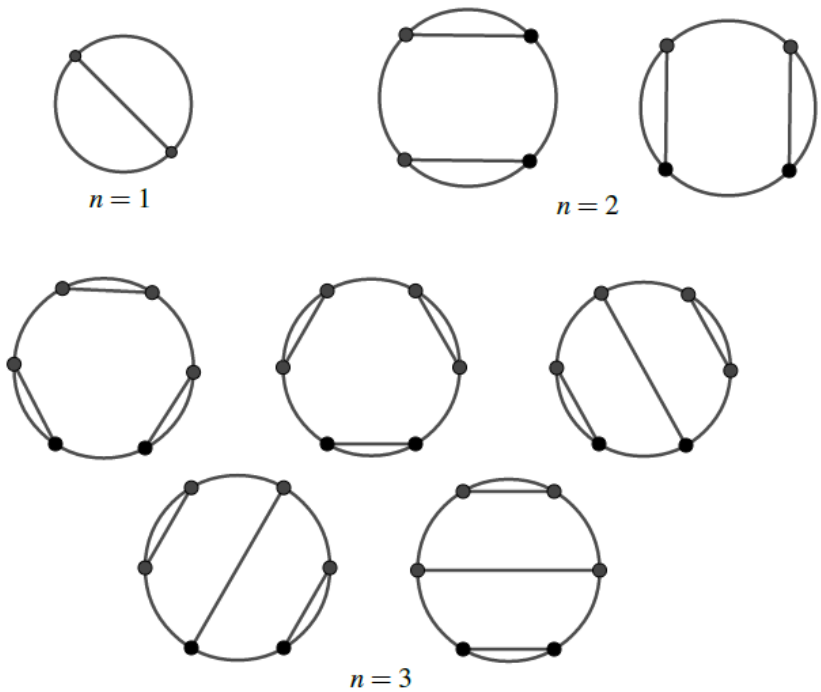
Se houver $2n$ pessoas na mesa e escolhendo uma pessoa qualquer (fixada), essa pessoa vai apertar a mão de alguém. A condição dada no problema, de que os braços não se cruzem,

Figura 23: Exemplo de árvore binária plana com 9 vértices.



Fonte: O autor

Figura 24: Pontos sobre uma circunferência, para $1 \leq n \leq 3$.



Fonte: O autor.

deixa um número par de pessoas para cada lado da pessoa com quem a pessoa fixada aperta a mão.

Dos $n-1$ pares de pessoas restantes, a pessoa escolhida anteriormente pode deixar zero pares a direita e $n-1$ à esquerda, pode deixar um par à direita e $n-2$ pares à esquerda, e assim por diante. Os pares de pessoas restantes podem escolher independentemente qualquer um dos possíveis apertos de mão, então, a contagem C_n para n pares de pessoas é dado por:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + ... + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$$

5.6 OUTRAS APLICAÇÕES

Nesta seção citaremos sem entrar em detalhes, mais situações nas quais os números de Catalan aparecem. Existem muitos outros exemplos que podem ser vistos nas referências (19,20).

5.6.1 SEQUÊNCIA DE NÚMEROS INTEIROS

Os números de Catalan contam de quantas maneiras pode-se formar sequências com n números inteiros, com primeiro termo a_1, tal que $1 \leq a_1 \leq ... \leq a_n$, com $a_i \leq i$ (19). Veja exemplos no Quadro 2.

Quadro 2 - Sequências com n números inteiros

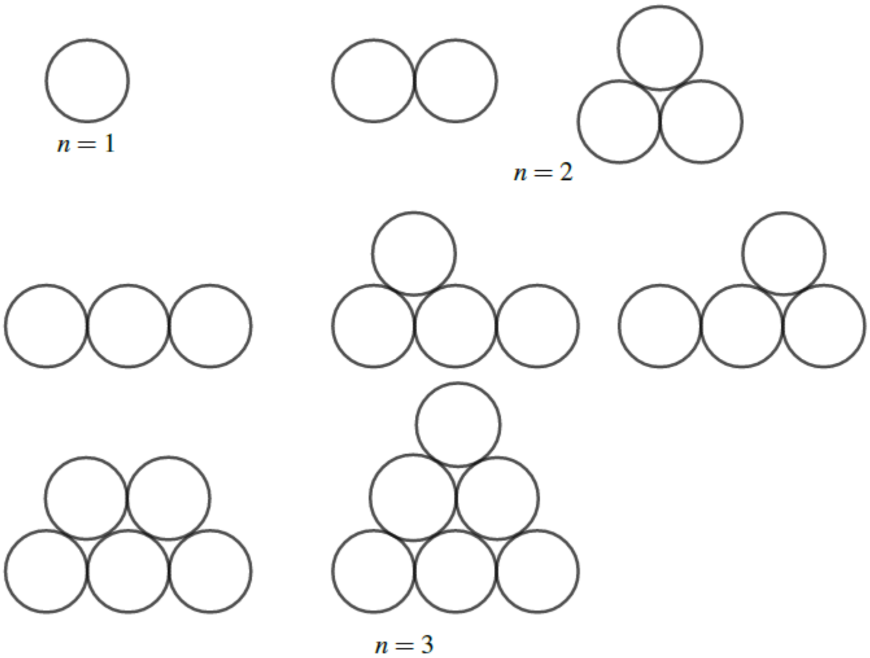
$n = 1$	1
$n = 2$	11 ; 12
$n = 3$	111 ; 123 ; 112 ; 113 ; 122
$n = 4$	1111 ; 1112 ; 1113 ; 1114 ; 1122 ; 1123 ; 1124 1133 ; 1134 ; 1222 ; 1223 ; 1224 ; 1233 ; 1234

Fonte: O autor

5.6.2 EMPILHAMENTO DE MOEDAS

Em uma superfície plana, são colocadas n moedas consecutivas sobre uma linha. Quantas maneiras existem para empilhar outras moedas sobre elas, sendo que o número de moedas da linha de cima é inferior ao número de moedas da linha de baixo (19)? O número de pilhas de moedas é contado pelos Números de Catalan, para $n = 1$ temos uma possibilidade, para $n = 2$ temos 2 possibilidades, para $n = 3$ temos 5 possibilidades, e assim por diante, como mostra a Figura 25.

Figura 25: O número de possibilidades de empilhamento de moedas é dado por C_n.



Fonte: O autor.

6 NÚMEROS DE CATALAN PARA A SALA DE AULA

Neste capítulo apresentamos um guia didático relacionado aos números de Catalan, apresentando argumentos para motivar seu estudo e propondo algumas atividades que podem ser aplicadas por outros professores. Neste capítulo fomos inspirados pelas referências (21) e (22).

6.1 POR QUE TRABALHAR OS NÚMEROS DE CATALAN?

Os números de Catalan possuem propriedades e aplicações que podem ser utilizadas por professores em sala de aula, em turmas do ensino médio ou até mesmo em cursos de formação de professores. Argumentos a favor disto são:

- O estudo básico dos números de Catalan não necessita de conhecimentos aprofundados da matemática, por isso são acessíveis a turmas do ensino médio.
- Os números de Catalan aparecem como solução de diversos problemas matemáticos, que ao serem discutidos com os alunos, podem revelar ligações entre diferentes situações.
- Durante o processo de estudo dos números de Catalan e de suas propriedades, novas técnicas e métodos de raciocínio matemático podem ser adquiridos para resolver outros problemas.

6.2 COMO MOTIVAR O ESTUDO DOS NÚMEROS DE CATALAN

No início do trabalho sobre o tema, em sala de aula, para instigar os alunos, o professor pode recorrer ao histórico dos números de Catalan, citando uma sequência de números que desempenhou um papel importante na história da matemática e que continua a aparecer em diferentes áreas da pesquisa moderna.

Recorrendo ao histórico, para melhor entendimento do tema, sugere-se ao professor propor aos alunos, para que trabalhem em grupos ou individualmente, o mesmo problema proposto por Euler à Goldbach: dado um polígono convexo de $n \geq 3$ lados. De quantas maneiras distintas podemos ligar as diagonais deste polígono de modo que este seja triangulado e as diagonais não se cruzem. Justificando a eles o fato de que um triângulo só tem uma forma de ser triangulado, ou seja, a sua forma original, e deixando os alunos encontrarem as soluções do problema para o quadrado, pentágono e hexágono.

Na sequência, o professor pode expor aos alunos que para os outros polígonos com número de lados maior do que seis, não é necessário desenhar o polígono e testar as possibilidades de triangulação, pois, Euler obteve uma fórmula que determina a quantidade de maneiras distintas que um polígono de n lados pode ser divido em triângulos, sendo $n \geq 3$:

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-10)}{(n-1)!}, n \geq 3.$$

No primeiro contato, os alunos podem sentir dificuldade em entender tal expressão, mas o professor pode argumentar que essa foi a primeira forma de encontrar a solução desse problema e que com o passar dos anos, a matemática se desenvolveu e novos métodos foram descobertos para responder a questão.

Para fazer com que os alunos compreendam a fórmula, o docente pode expandir os primeiros resultados, substituindo na fórmula os valores para $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$, conferindo os valores obtidos pelos alunos.

6.3 APRESENTANDO OS NÚMEROS DE CATALAN

Após os estudos da parte história dos números de Catalan, o professor pode apresentá-los aos alunos, argumentando que os valores obtidos na atividade anterior formam uma sequência e são denominados números de Catalan. São assim chamados em homenagem ao matemático belga Eugène Charles Catalan, responsável pela demonstração e divulgação de diversos resultados sobre essa sequência, mas que o seu descobrimento se divide entre Euler e o matemático mongol Ming Antu.

Como vários matemáticos contribuíram significativamente para o desenvolvimento dos estudos acerca dos números e da sequência formada por eles, surgiram diversas formas de definir os números de Catalan, mas que uma delas aparece com mais frequência em livros e artigos e é dada por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, n \geq 0.$$

Tal expressão apresenta algumas notações de conteúdos que os alunos já devem conhecer, como o fatorial e os números binomiais, não exigindo que tenham um conhecimento aprofundado da matemática. Caso seja necessário, para facilitar, o professor pode expandir os cálculos para os primeiros termos, fazendo o mesmo para a fórmula de Euler, ou revisar os conteúdos de números fatoriais e binomiais.

Com relação a essa representação dos números de Catalan, o professor pode fazer uma relação com os números de Fibonacci e de Lucas, mostrando que a sequência numérica de Catalan tem crescimento mais rápido que as outras duas, pois trata-se de uma expressão que apresenta fatorial e não somente a operação de adição como nas outras sequências citadas.

6.4 ONDE APLICAR OS NÚMEROS DE CATALAN?

A fim de demonstrar a importância dos números de Catalan, o professor pode citar algumas das áreas em que a sequência numérica é aplicada, como por exemplo, na resolução de problemas matemáticos envolvendo análise combinatória, geometria, teoria dos grafos, na ciência da computação, entre outras.

Com o objetivo de despertar a curiosidade dos alunos, o professor pode executar uma atividade lúdica envolvendo uma das aplicações dos números de Catalan, descritas na seção 5.6.1, utilizando moedas ou tampas de garrafa pet, empilhando os objetos circulares sobre uma linha, desde que o número de objetos da linha de cima seja inferior ao número de objetos da linha de baixo, fazendo com que os alunos anotem o número de possibilidades que conseguiram e relacionando-os com os números de Catalan.

Tendo em vista o pouco tempo de trabalho que o professor pode ter em sala de aula, esta atividade pode ser rapidamente organizada, dividindo os alunos em grupos, e não necessita de muitos recursos, precisando apenas de uma certa quantidade de pequenos objetos circulares.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista os argumentos apresentados, refletimos sobre o quanto os números de Catalan são importantes para a matemática. Durante o decorrer deste trabalho discutimos sobre vários aspectos dos números de Catalan, desde sua definição, passando por suas principais propriedades, do ponto de vista algébrico e geométrico, e também mostrando algumas de suas principais aplicações em problemas de combinatória, geometria e teoria dos grafos.

Nesse sentido, percebemos que os números de Catalan são muitos úteis para a resolução de diversos problemas matemáticos e que essa sequência numérica é bastante interessante e muito importante, assim como o são as de Fibonacci e de Lucas, por exemplo. Desta forma, cremos que o ensino dela em sala de aula pode contribuir significativamente para o desenvolvimento matemático do aluno, pois as diferentes formas de apresentação dos números de Catalan podem fazer com que os professores retomem alguns conteúdos de forma diferente ou até mesmo com que os alunos adquiram outras estratégias de cálculo e raciocínio. Algumas da aplicações descritas nesse trabalho podem ser utilizadas pelos professores a fim de expor o conteúdo de uma maneira mais prática e lúdica, sendo atividades de rápida organização e com uso de poucos recursos materiais.

Por fim, sendo este tema pouco conhecido no Brasil, acreditamos que esse trabalho possa contribuir com a inserção de bibliografia sobre o tema em língua portuguesa e com isso incentivar e difundir o estudo dos números de Catalan.

REFERÊNCIAS

1 SILVA, B. A.. **Números de Fibonacci e números de Lucas**, São Carlos, Dissertação de Mestrado, ICMC - USP, 2017.

2 PAK, I.. **History of Catalan Numbers**, Cambridge, Cambridge University Press, 2005.

3 KOSHY, T.. **Catalan Numbers with Applications.** New York: Oxford University Press, 2008.

4 SILVA, E. M.. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros.**, Curitiba, Dissertação de Mestrado, UTFPR, 2018.

5 TEIXEIRA, M. A. G.. **Aspectos algébrico e combinatório dos números de Pell e Catalan**, Dourados, Dissertação de Mestrado, UFGD, 2018.

6 O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F.. **Eugene Charles Catalan**. Disponível em http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Catalan.html . Acesso em 17 de janeiro de 2019.

7 MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P.; PITOMBEIRA, J. B.. **Análise Combinatória e Probabilidade.** São Paulo: SBM, 2016.

8 JUNIOR, N.G.B.. **Bijeções Envolvendo os Números de Catalan**, Campinas, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2014.

9 KOSHY, T.. **Elementary Number Theory with Application: Second Edition** Boston: Elsevier Science, 2007.

10 SEGNER, J. A.. **Enumeratio modurum quibus figurae planae rectiliniae per diagonales dividuntur in triangula.** Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, vol. 7, 1761.

11 KOSHY T; SALMASSI M.. Parity and Primality of Catalan Numbers, **The College Mathematics Journal**, v. n. 37, p 52-53, 2006.

12 FULKS, W.. **Advanced Calculus.** New York: John Wiley & Sons, 1969.

13 KOSHY, T.. **Discrete Mathematics with Applications.**, San Diego: Elsevier, 2004.

14 KOSHY, T.. **The Ubiquitous Catalan Numbers.** The Mathematics Teacher, Vol. 100, No 3, p. 184-188, 2006.

15 EWELL, J. A.. **The Catalan Numbers and Pi.** Mathematics Magazine, Vol. 65, No 1, p. 36-37, 1992.

16 COURANT, R.. **Differential and Integral Calculus.** v. 1. New York: Interscience Publishers, 1957.

17 ROMAN, S.. **An Introduction to Catalan Numbers.** Birkhäuser, 2015.

18 DAVIS, T.. **Catalan Numbers**. Disponível em http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf. Acesso em 13 de maio de 2019.

19 STANLEY, R. P.. **Exercises on Catalan and Related Numbers.** Retirado de *Enumerative Combinatorics, vol. 2*. Cambridge University Press, 1998.

20 STANLEY, R. P.. **Catalan Numbers.** Cambridge Universiy Press, 2015.

21 COFMAN, J.. Catalan Numbers for the Classroom?. **Element der Mathematik**. Basel, v. n. 52, p. 108 - 117, 1997.

22 KOKER, J.; KUONZI, N.; OKTAÇ, A.; CARMONY, L; LEIBOWITZ, R.. **An Investigation of the sequence of Catalan numbers with activities for prospective teachers.** School Science and Mathematics, vol. 8, 1998.