UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Kauana Francine Machado Gonçalves Santos Miranda

Explorando tarefas com a Escala Cuisenaire nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Londrina – PR

2019

Kauana Francine Machado Gonçalves Santos Miranda

Explorando tarefas com a Escala Cuisenaire nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª Drª Magna Natalia Marin Pires

Londrina – PR

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

M672 Miranda, Kauana Francine Machado Gonçalves Santos.
Explorando tarefas com a Escala Cuisenaire nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. / Kauana Francine Machado Gonçalves Santos Miranda. - Londrina, 2019.
134 f. : il.
Orientador: Magna Natalia Marin Pires.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Matemática nos Anos Iniciais - Tese. 2. Escala Cuisenaire - Tese. 3. Ensino de Matemática - Tese. I. Pires, Magna Natalia Marin. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

KAUANA FRANCINE MACHADO GONÇALVES SANTOS MIRANDA

Explorando tarefas com a Escala Cuisenaire nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina – PR

____

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina – PR

____

Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – PR

À minha família pelo apoio e dedicação. Em especial à minha mãe Sueli e meu esposo João.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por seu amor tão grande que me sustenta em fé e nunca me desempara. Que está comigo a cada momento, me fazendo superar todos os obstáculos e dificuldades. Agradeço ao Senhor pela oportunidade de aprender mais a cada dia, e pelas pessoas maravilhosas que tem colocado em meu caminho.

Ao meu melhor amigo e companheiro de vida, meu esposo João que sempre acredita mais em mim do que eu mesma, me fazendo acreditar que sou capaz.

Agradeço à minha mãe, minha maior incentivadora que é exemplo de mulher independente e batalhadora, que luta por sua família e não desiste de seus ideais. Obrigada por me apoiar e cuidar de mim o tempo todo.

À minha orientadora, Profª Drª Magna Natalia Marin Pires, obrigada por me guiar neste processo, por todos os ensinamentos, pela paciência e compreensão que sempre teve.

As professoras Drª Regina Luzia Corio de Buriasco e Drª Karina Alessandra Pessoa da Silva, por aceitarem fazer parte da banca e contribuírem para o aprimoramento deste trabalho com suas críticas e sugestões.

Aos participantes do GEAMAI: Magna, Karina, Marilda, Josibeli, Maria, Marli, Andrea, Arthur, Daiana, João Paulo, Divarci, Clea, Ivone, Joyce e Cristina, que me acolheram tão bem no grupo, obrigada por todas as conversas e contribuições que deram a este trabalho.

Aos meus irmãos Pâmela e Marlon, minhas sobrinhas Paloma, Emanuelli e Clara e Elaine, agradeço o companheirismo, apoio e incentivo, por estarem sempre ao meu lado participando e comemorando cada conquista. Gorette e Arnaldo, sou muito grata por todo apoio e cuidado que têm comigo, por me acolherem em sua família e por todos os almoços de sexta-feira durante os dois anos do mestrado.

Guilherme, que mesmo de longe está sempre presente em nossas vidas, obrigada pela amizade, pelas conversas, por me ajudar com tudo relacionado a Matemática. Mirian, obrigada pelo companheirismo, pelas tardes de estudo, lanches compartilhados e caronas durante 5 anos, agradeço a sorte de encontrar uma amiga na matemática que levei para vida. Bruna e Ricardo, obrigada pelo apoio, por me arrumarem um quarto para ficar em Londrina todas as vezes que tinha aulas aos sábados e nas férias.

Aos Professores do PROFMAT, obrigado por compartilharem seus conhecimentos e sempre se disporem a nos ajudar, Paulo, Andrielber, Adeval, Neuza, Ricardo, Ana Marcia, Magna, Tulio, Regina e Ana Lucia.

Aos Colegas do PROFMAT pelo companheirismo nestes dois anos, em especial aos meus colegas Carlos e Marcelo parceiros de estudos e trabalhos.

Aos Professores da UNESPAR que me ensinaram tanto nos quatro anos de graduação, em especial as professoras Leticia Celeste Barcaro Omodei, Rosangela Norvila e professor Mauricio Barbosa.

A todos do Colégio de Aplicação Pedagógica da UEL e da Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca, que nos permitiram aplicar as tarefas desse estudo, aos alunos que se empenharam em realizar as tarefas e aos professores que nos cederam espaço em suas aulas.

MIRANDA, Kauana Francine Machado Gonçalves Santos. **Explorando tarefas com a Escala Cuisenaire nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2019. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de tarefas que utilizem o material manipulável Escala Cuisenaire em diferentes fases do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, para trabalhar diferentes conteúdo da matemática, validadas a partir da aplicação com os professores e alunos que fazem parte dessa fase do ensino. O estudo se deu em três etapas, na primeira foi realizado um estudo teórico a respeito de materiais manipuláveis e a Escala Cuisenaire, na segunda foi feita a elaboração e aplicação das tarefas no Grupo de Estudos de Aula de Matemática dos Anos Iniciais - GEAMAI e em turmas do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, a fim de validar as tarefas e também discutir conceitos matemáticos que cada uma podem explorar. A terceira etapa foi a análise das tarefas e das resoluções apresentadas por alunos e professores participantes do estudo à luz de alguns autores que tratam a respeito dos conceitos matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental - Anos Iniciais. O estudo teórico a respeito de materiais manipuláveis fundamentou a escolha do material, Escala Cuisenaire, e a elaboração das tarefas. As tarefas abordam conteúdos de composição e decomposição de números naturais, sequências, relações de igualdade, as quatro operações fundamentais. Esses conteúdos são abordados de forma a auxiliarem no desenvolvimento do conceito de número e na formação do pensamento algébrico. A análise discute a questão referente a quais conceitos matemáticos podem ser explorados com a utilização da Escala Cuisenaire nos anos iniciais. A partir da elaboração, discussão e aplicação das tarefas, constatou-se que utilizando a Escala Cuisenaire é possível explorar vários conteúdos, que fazem parte do currículo de matemática do Ensino Fundamental – Anos Iniciais.

Palavras-chave: Matemática nos Anos Iniciais. Escala Cuisenaire. Ensino de Matemática.

MIRANDA, Kauana Francine Machado Gonçalves Santos. **Exploring tasks with the Cuisenaire Scale in the Early Years of Elementary School.** 2019. 136 f. Dissertation (Professional Master in Mathematics in National Network) - State University of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

This work aims to present a proposal for tasks that use the Cuisenaire Scale manipulable material in different phases of Elementary Education - Early Years, to work on different mathematical content, validated from the application with teachers and students who are part of this phase of teaching. The study took place in three stages, in the first a theoretical study was carried out on manipulable materials and the Cuisenaire Scale, in the second the elaboration and application of the tasks in the Group of Studies of Mathematics of the Early Years - GEAMAI and in Elementary School classes - Early Years, in order to validate the tasks and also discuss mathematical concepts that each one can explore. The third step was the analysis of the tasks and resolutions presented by students and teachers participating in the study in the light of some authors who deal with the mathematical concepts worked in Elementary School - Early Years. The theoretical study regarding manipulable materials was the basis for choosing the material, the Cuisenaire Scale, and the elaboration of tasks. The tasks cover contents of composition and decomposition of natural numbers, sequences, relations of equality, the four fundamental operations. These contents are addressed in order to assist in the development of the concept of number and in the formation of algebraic thinking. The analysis discusses the question of which mathematical concepts can be explored using the Cuisenaire Scale in the early years. From the elaboration, discussion and application of the tasks, it was found that using the Cuisenaire Scale it is possible to explore various contents, which are part of the mathematics curriculum of Elementary School - Early Years.

Keywords: Mathematics in the Early Years. Cuisenaire scale. Mathematics teaching.

Lista de Ilustrações

Sumário

Introdução

Os materiais manipuláveis têm servido como uma importante ferramenta de apoio para os professores de matemática, uma vez que muitas crianças encontram dificuldades em entender conceitos matemáticos. Com a utilização de materiais manipuláveis, a aprendizagem parte do concreto, de modo que os alunos podem visualizar e manipular um objeto que expresse uma ideia ou conceito, e gradualmente irão passar para um processo de abstração. Muitos autores, na literatura, defendem a ideia de que devemos partir do concreto, sendo assim, com esses materiais a criança tem auxílio de outros sentidos que ajudarão na compreensão de um conceito ou de uma ideia.

Este estudo apresenta uma proposta de tarefas para a utilização de materiais manipuláveis no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. O material escolhido para estudo e elaboração das tarefas foi a Escala Cuisenaire. Para tanto, foram elaboradas tarefas que podem abordar conceitos presentes em diferentes fases dos Anos Iniciais, posteriormente aplicadas em duas escolas públicas do Paraná. Antes de aplicá-las, as mesmas foram levadas ao grupo GEAMAI e discutidas com as professoras dos Anos Iniciais que participam do grupo, a fim de que fossem validadas.

O GEAMAI (Grupo de Estudo de Aulas de Matemática nos Anos Iniciais) é um grupo de estudos realizado uma vez a cada quinzena, às quartas-feiras, em parceria entre a Universidade Estadual de Londrina e a UTFPR de Londrina. Participam dele professoras dos anos iniciais, estudantes da graduação do curso de Licenciatura em Matemática e em Química e também mestrandos do PPGMAT[1] e do PROFMAT. Nesse grupo os participantes realizam estudos a respeito da matemática nos anos iniciais e seu ensino, planejam aulas, aplicam em suas turmas e depois realizam reflexões sobre essas aulas. A partir das experiências vivenciadas no grupo os participantes produzem trabalhos que são apresentados em eventos da Educação Matemática.

O trabalho com alunos dos anos iniciais, permitiu à esta autora perceber que muitos encontram dificuldades com a Matemática, alguns a carregaram durante toda a sua vida escolar e mesmo depois, na graduação, não conseguem sanar suas dúvidas. É importante que os professores do Ensino Fundamental – Anos Iniciais

---

[1] Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

compreendam conceitos matemáticos fundamentais, já que são eles que darão a base para que os alunos construam seus conhecimentos durante toda sua trajetória escolar.

A maioria dos professores dos anos iniciais tem sua formação em Pedagogia, formação exigida para lecionar na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, durante essa Formação Inicial, o tempo para se dedicar ao estudo mais aprofundado da matemática é escasso, normalmente há apenas uma disciplina que trata de alguns conceitos matemáticos e estratégias para ensiná-los, durante todo o curso.

Surge então a dúvida: Como os professores podem aprofundar seus conhecimentos matemáticos?

Uma possibilidade para solucionar essa questão é a Formação Continuada, que trata da participação dos professores em processos de aperfeiçoamento, de formação em serviço; geralmente em formato de cursos, palestras, capacitações, projetos ou pós-graduações. Com frequência, as próprias escolas oferecem cursos para que seus professores participem em contraturno ao horário em que trabalham, com o propósito de trazer elementos teóricos para aperfeiçoar sua prática.

Considerando a Formação Continuada e aliando-a à necessidade de aperfeiçoamento dos professores dos anos iniciais, optamos por desenvolver este estudo em torno da matemática dos Anos Iniciais, elaborando uma proposta de tarefas utilizando o material manipulável Escala Cuisenaire, com a intenção de discutir com professores dos anos iniciais na Formação Continuada, para que depois os professores possam aplicar em suas próprias turmas. Proposta que envolve conceitos de Matemática da Educação Básica e que poderá ter impacto em sala de aula, adequando-se à forma do trabalho de conclusão final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

A autora desse trabalho ingressou no PROFMAT no ano de 2017, na Universidade Estadual de Londrina (UEL), logo após a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), em 2016. No Ensino Médio, cursou Formação de Docentes, e em 2013 começou a trabalhar com os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, experiência que levou a reflexões a respeito da Matemática nos anos iniciais. Como professora do Ensino

Fundamental – Anos Iniciais, tem grande interesse em poder contribuir com o ensino da Matemática neste nível de ensino.

Este trabalho tem como intuito apresentar uma proposta de tarefas que utilizem o material manipulável Escala Cuisenaire em diferentes fases do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, para trabalhar diferentes conteúdo da matemática, validadas a partir da aplicação com os professores e alunos que fazem parte dessa fase do ensino.

Pretende-se responder à questão: **Que conceitos matemáticos podem ser explorados com a utilização da Escala Cuisenaire nos anos iniciais?**

Os objetivos específicos do estudo são:

- realizar um estudo bibliográfico dos materiais manipuláveis e da Escala Cuisenaire;
- elaborar tarefas que auxiliem os professores com a utilização da Escala Cuisenaire e que possam ser trabalhadas em todas as etapas do Ensino Fundamental - Anos Iniciais;
- aplicar as tarefas com os professores do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, na Formação Continuada (grupo GEAMAI) e em turmas dos anos iniciais, a fim de validar e modificar o que se achar necessário.
- discutir as tarefas e os conteúdos matemáticos com base na literatura.

Este estudo se apresenta em quatro capítulos, no Capítulo 1 está descrita a metodologia do trabalho que é qualitativa, apresentam-se os caminhos percorridos desde a escolha do tema até a elaboração e análise das tarefas.

O Capítulo 2 trata da Fundamentação Teórica, um estudo sobre a utilização de materiais manipuláveis no ensino de Matemática e também a respeito da Escala Cuisenaire.

O Capítulo 3 relata como as tarefas foram elaboradas, discutidas no GEAMAI, aplicadas, discutidas novamente e finalmente reelaboradas.

O Capítulo 4 apresenta uma análise final, o objetivo foi revelar como a teoria se mostrou na prática. Por meio das tarefas, discutimos como os conteúdos envolvidos nas tarefas podem ser explorados com a Escala Cuisenaire.

Capítulo 1

Procedimentos Metodológicos

1.1 Estudo Teórico

Esse trabalho tem foco na Matemática dos Anos Iniciais e na utilização de materiais manipuláveis, por considerá-los um recurso para o ensino da Matemática, principalmente nesta fase do ensino em que a criança precisa de apoio para compreender alguns conceitos. Trabalhar conteúdos matemáticos de maneira totalmente abstrata para crianças dificulta seu aprendizado, muitas vezes fazendo com que ela apenas memorize e não que compreenda o conceito.

O primeiro passo para a realização do presente trabalho foi o estudo teórico, que se deu em etapas; no primeiro momento foi feita a escolha dos textos que seriam estudados para a construção da fundamentação teórica, a respeito de materiais manipuláveis; já no segundo momento foi feita a escolha de qual material utilizar. Posteriormente, realizou-se um estudo para conhecimento do material escolhido.

Para compreender a utilização dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática, foi realizado um levantamento de trabalhos no catálogo de teses da CAPES[2], com a intenção de encontrar quais são os principais autores que tratam deste tema. Em uma primeira busca foi pesquisado por "materiais manipuláveis" como palavras-chave do estudo e então adicionados filtros como “grande área de conhecimento”, “área de avaliação”, nome do programa, fornecidos pelo site, no entanto foi constatado que ao adicionar muitos filtros para diminuir a quantidade de resultados que apareciam, os mesmos acabavam fugindo ao tema pretendido, levando a resultados de outras áreas, fora da área da educação.

Optou-se então por uma segunda busca com as mesmas palavras, selecionando apenas o filtro para ano e grande área, os trabalhos anteriores à Plataforma Sucupira[3] não possuem arquivo para baixar no site, por esse motivo foram

---

[2] <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/> Acesso em 12 nov. 2018.

[3] Ferramenta que disponibiliza informações, processos e procedimentos que a CAPES realiza no Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG) para toda a comunidade acadêmica.

selecionados trabalhos datados a partir de 2014. Com essa busca, foram selecionadas trinta dissertações que tratam de materiais manipuláveis e, a partir delas, foram levantados quais são os autores citados e utilizados como referência.

Para poder analisar as trinta dissertações e os autores que mais foram citados foi elaborada um quadro contendo o título da dissertação, autor, orientador e instituição, de cada um dos trabalhos, que se encontra no Apêndice 1 (Quadro 22), os textos foram nomeados de T1, T2, e assim sucessivamente até o T30. A partir da análise do quadro, elencamos os autores que foram utilizados como referência para falar sobre materiais manipuláveis, o Quadro 23 do Apêndice 2 mostra todos os autores relacionando-os com os textos em que foram utilizados como referências. Destes, separamos os dez que foram mais citados, selecionamos esses autores, o título de suas obras, ano de publicação, tipo de texto e fonte de publicação no Quadro 1; estes textos foram escolhidos para orientar o estudo e compor a fundamentação teórica do estudo a respeito de materiais manipuláveis.

Quadro 1 – Textos – Fundamentação Teórica

Título da obra	Autor(es)	Ano de publicação	Tipo de texto	Publicação
Considerations for teachers using manipulative materials	Robert E. Reys	1971	Artigo	The Arithmetic Teacher
Eu trabalho primeiro o concreto	Adair Mendes Nacarato	2005	Artigo	Revista de Educação Matemática
Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática	Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim	1990	Artigo	Boletim da SBEM
Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis	Sérgio Aparecido Lorenzato	2006	Capítulo de livro	Livro: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores
Desenvolvimento e uso de materiais	Rômulo Marinho do Rêgo e	2006	Capítulo de livro	Livro: O laboratório de ensino de

didáticos no ensino da matemática	Rogéria Gaudencio do Rêgo			matemática na formação de professores
Materiais manipuláveis como recurso didático na formação de professores de matemática	Cármen Lucia Brancaglion Passos	2006	Capítulo de livro	Livro: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores
Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática	Claudemir Murari	2011	Artigo	Boletim de Educação Matemática
O Uso De Materiais Manipuláveis como Ferramenta na Resolução de Problemas Trigonométricos	Darcson Capa dos Santos e Helena Noronha Cury	2011	Artigo	Vidya
O Uso De Materiais Manipuláveis e Jogos no Ensino de Matemática	Giselle Costa de Sousa e José Damião Souza de Oliveira	2010	Artigo	X Encontro Nacional de Educação Matemática
Experiential Learning of Mathematics: Using Manipulatives.	Robert Hartshorn e Sue Boren	1990	Artigo	Eric Digests

Fonte – A autora.

No segundo momento foi escolhido o material manipulável que seria utilizado na elaboração da proposta de tarefas. Para auxiliar a escolha foi elaborado também uma lista com os materiais manipuláveis que foram utilizados nas propostas apresentadas nas trinta dissertações que foram retiradas do banco de teses da CAPES. O Quadro 2 mostra quais foram estes materiais.

Quadro 2 – Materiais Manipuláveis

MATERIAIS	TEXTOS
CAIXA DE FUNÇÕES	T 22
QUADRADOS	T6, T27
DOBRADURA	T12, T26, T30
CENÁRIOS AC	T24
JOGOESTIMATIVA	T23
VIRTUAL	T23
GEOPLEXO	T21
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	T5, T11,25
POLIEDROS	T11, T 19, T28, T29
MATERIAL DOURADO	T6, T18
JOGOS NÚMEROS INTEIROS	T15
RÉGUA NUMÉRICA	T15
RÉGUA GRADUADA	T17
ENVELOPES	T13
PALITOS	T13
ÁBACO DE FRAÇÕES	T14
JOGO DA VELHA	T11
CARTESIANO 3D	T11
PRODUTOS NOTÁVEIS DE MADEIRA	T11
TORRE DE HANOI	T11
GEOPLANO	T11
TORRE DE HANOI	T11
TABULEIRO DE PITÁGORAS	T11
TANGRAN	T11
FIGURAS PLANAS	T1, T10, T16
TEODOLITO	T9
OBJETOS PARA MEDIR	T7
ESCALA CUISINAIRE	T5
BLOCOS LÓGICOS	T3, T5
QUEBRA CABEÇA	T20
RÉGUA FRAÇÕES	T20
OBJETOS DA ESCOLA	T2
SOROBAN	T17
ÁBACO	T17

Fonte – A autora.

Após a análise dos materiais apresentados nas dissertações, a Escala Cuisenaire foi escolhida por considerarmos que ela seja um dos materiais que poderia ser utilizado em todas as etapas dos anos iniciais.

Considerando as exigências do PROFMAT para elaboração da dissertação, foi feita uma busca no banco de dissertações do PROFMAT para encontrar dissertações que tratassem do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, com intuito de analisar o que tem sido elaborado nesse curso para esta fase do ensino. Foram encontradas apenas oito dissertações, o que reafirmou a necessidade de desenvolver mais estudos nesta área e a escolha por desenvolver uma proposta que auxilie os professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no que diz respeito ao ensino da Matemática.

O estudo teórico continuou com uma pesquisa a respeito da Escala Cuisenaire, e nesta fase foram encontrados alguns livros[4] do professor Caleb Gattegno, responsável por divulgar o material criado por Georges Cuisenaire (1891-1976). O autor escreveu alguns livros didáticos com o intuito de ajudar professores que querem utilizar o material em suas aulas de matemática. Nesse sentido, realizou-se um estudo de um dos seus livros para fundamentar a elaboração das tarefas e de alguns artigos que tratam do material, e do site *cuisenaire.eu*[5], criado e administrado por Yves Cuisenaire, neto do criador do material.

1.2 Sujeitos participantes do estudo

O grupo GEAMAI desenvolve um projeto de extensão na Universidade Estadual de Londrina em parceria com a UTFPR – Campus Londrina, coordenado pela orientadora deste trabalho e denominado por Estudo de Aula na Formação de Professores que Ensinam Matemática nos Anos Iniciais. Participam do grupo: professoras dos anos iniciais, professoras da UEL e da UTFPR, alunos do curso de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química e alunos do Mestrados (PPGMAT e PROFMAT).

No início de 2019 comecei[6] a participar de todos os encontros do grupo, uma vez que como professora dos anos iniciais já tinha interesse nos assuntos

[4] Coleção Gattegno Mathematics Textbook de 1 a 5.
[5] <http://www.cuisenaire.eu/index.html> Acesso em 12 mar. 2019.
[6] Quando as ações desenvolvidas tratar exclusivamente da autora do trabalho, será utilizada primeira pessoa do singular.

desenvolvidos no projeto, quando decidimos o tema de estudo desta trabalho pensamos que seria interessante poder aplicar as tarefas na formação continuada, o que corrobora para atingir os objetivo do projeto que é “possibilitar uma formação continuada em matemática de professores que atuam nos Ensino Fundamental - Anos Iniciais, a partir da reflexão dos seus conhecimentos na área e da sua prática em sala de aula.”

As tarefas foram aplicadas com alunos dos anos iniciais de duas escolas diferentes, o Colégio de Aplicação Pedagógica da UEL Professor José Aloísio Aragão – EI, EF, EM e Profissional de Londrina e a Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca de Mauá da Serra, sendo está a escola em que a autora desta dissertação trabalha.

O público alvo deste trabalho são principalmente os professores do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como Formação Continuada, e os alunos do Ensino Fundamental – Anos Iniciais. O GEAMAI foi o projeto escolhido para que a aplicação das tarefas fosse realizada, com o intuito de validar as tarefas antes de aplicá-las em sala de aula com os alunos.

1.3 Elaboração das Tarefas

Para elaborar as tarefas apresentadas neste estudo, primeiramente buscamos quais conceitos poderíamos abordar utilizando a Escala Cuisenaire. Optamos por elaborar tarefas que tratassem de conceitos referentes à contagem, sequências, relações de igualdade, composição e decomposição de números naturais, fatos fundamentais da adição e da subtração e fatos fundamentais da multiplicação e da divisão. Depois de escolher os conteúdos que seriam abordados, pensamos sobre quais objetivos referentes a eles poderiam ser alcançados com este material, estes objetivos são elencados nas análises do capítulo 4 e nas Orientações (Apêndice 4).

As tarefas1, 2, 6, 7, 9, 13, 14, 15, 16, 17 foram elaboradas por esta autora, as tarefas 4, 5 e 12 foram adaptadas[7] e as tarefas 3, 8, 10 e 11 foram inspiradas[8] em

---

[7] Tarefas 4 e 5 adaptadas do site <https://br.pinterest.com/pin/435652963933965589/?lp=true> Acesso em 26 mar. 2019. Tarefa 12 adaptada do livro Textbook 2 de Caleb Gattegno. <https://issuu.com/eswi/docs/gattegno-math-textbook-2> Acesso em 02 mai. 2019.

[8] Inspiradas em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_uenp_euzashiguekosugiyama.pdf> Acesso em 13 abr. 2019.

outros autores e materiais disponíveis, e a partir de então foram levadas ao Grupo GEAMAI, para serem apresentadas às professoras participantes. As tarefas abordam diferentes conceitos matemáticos que fazem parte do currículo do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, buscamos elabora-las de forma que haja tarefas para trabalhar em todas as séries dessa etapa do ensino.

Em um dos primeiros encontros de 2019 foi apresentado ao grupo o tema do estudo, e o que havia sido realizado até o momento, bem como o que se pretendia fazer e o material manipulável em questão. A validação das tarefas, realizadas com os participantes do GEAMAI, partiram da análise dos enunciados e dos objetivos que pretendíamos alcançar, verificando também a acessibilidade da linguagem pelos alunos dos anos iniciais.

Em abril de 2019 iniciou-se a aplicação delas em turmas do 1º ao 5º anos das duas escolas. As tarefas foram aplicadas nas turmas conforme foram sendo discutidas no GEAMAI, ou seja, cada tarefa só foi levada a sala de aula com os alunos depois de validadas pelas professoras. No GEAMAI, após todos resolverem as tarefas, abriu-se espaço para discuti-las, foram ouvidas sugestões de modificações e a aplicação em sala foi realizada com a participação de algumas professoras do grupo.

Após realizar esta aplicação voltamos ao grupo GEAMAI e relatamos às professoras que não participaram da aplicação, como foi, o que deu certo e o que deu errado, assim modificamos as tarefas mais uma vez, considerando-as como uma versão final. As 17 tarefas foram aplicadas no período de abril a outubro de 2019.

Ao finalizar a elaboração das tarefas, com base na aplicação tanto no GEAMAI como nas escolas, escrevemos algumas sugestões para os professores que quiserem aplicar essas tarefas em suas turmas, elas se encontram no Apêndice 4 – Orientações. Nessas orientações trazemos os objetivos de cada tarefas, os conceitos que cada uma aborda, assim como os materiais necessários para sua realização.

1.4 Encaminhamento da análise das tarefas

A partir das experiências desenvolvidas com os sujeitos da estudo, professoras e alunos, analisamos como os conceitos matemáticos podem ser explorados em cada tarefa, associando-os com aquilo que alguns autores trazem a respeito destes temas.

Para fazer essa análise, elencamos todos os objetivos que podem ser explorados nas tarefas e estão relacionados aos temas: contagem, sequências, composição e decomposição de números naturais, relações de igualdade, fatos fundamentais da adição e da subtração e fatos fundamentais da multiplicação e da divisão.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Materiais Manipuláveis

Os materiais manipuláveis, chamados por alguns autores de materiais concretos ou materiais didáticos manipuláveis, são utilizados em sala de aula como uma ferramenta para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, principalmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Frequentemente os professores trabalham com os materiais manipuláveis em suas aulas de Matemática com o intuito de chamar a atenção de seus alunos e tornar a aula mais prazerosa, porém, nem sempre refletem a respeito de sua utilização. Nacarato (2005) diz que os professores incorporam um discurso a favor do "concreto", sem fazer uma reflexão mais profunda sobre o que seria "concreto" em Matemática. Portanto, para um melhor aproveitamento deste recurso, primeiro é preciso que o professor compreenda o que é concreto e manipulável.

Lorenzato (2006) afirma que Material Didático (MD) é qualquer instrumento útil aos processos de ensino e de aprendizagem, como giz, papel, calculadora, etc. Já ao que diz respeito do que é concreto o autor traz duas interpretações "uma delas refere-se ao palpável, manipulável, e outra mais ampla, inclui imagens gráficas" (LORENZATO, 2006, p. 18).

Hartshorn e Boren (1990), entendem por "manipulativos" os "objetos que podem ser tocados e movidos pelos estudantes, para introduzir ou reforçar um conceito matemático" (HARTSHORN; BOREN, 1990, p. 2, tradução nossa)[9]. Outra definição trazida por Grossnickle, Junge e Metzner (1951, p. 162) é a de que materiais manipuláveis são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia" (apud REYS, 1971, p. 551, tradução nossa)[10].

---

[9] to objects that can be touched and moved by students to introduce or reinforce a mathematical concept.

[10] "able to feel, touch, handle, and move. They may be real objects which have social application in our everyday affairs, or they may be objects which are used to represent an idea.

Neste estudo consideraremos como materiais manipuláveis objetos que podem ser tocados, movimentados e agrupados pelos alunos, podendo ser materiais construídos especificamente para serem trabalhados em sala de aula (entre outros, Material Dourado, Escala Cuisenaire, Blocos Lógicos) ou objetos do dia-a-dia utilizados para apoiar ou ilustrar alguma ideia matemática (entre outros, palitos, caixas, tampinhas).

Segundo Passos (2006) os professores que atuam no Ensino Fundamental têm a expectativa de que a utilização de materiais manipuláveis possa amenizar as dificuldades de ensino. Para que isso possa acontecer, o professor precisa explorar o material manipulável e todas as suas potencialidades, a forma como o material será utilizado é que poderá trazer o diferencial para a aprendizagem.

Para que a aprendizagem aconteça Lorenzato (2006) diz que se faz necessário não só o manuseio do material manipulável em si, mas a atividade mental, por parte do aluno. O autor também acredita que o material manipulável pode ser um regulador do ritmo de ensino, pois possibilita ao aluno aprender em seu próprio ritmo.

Fiorentini e Miorim destacam ainda que ao aluno

> deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade (FIORENTINI; MIORIM, 1999, p. 6).

Para utilizar o material manipulável em suas aulas, o professor deve ter seus objetivos claros, para que sua utilização colabore com a aprendizagem dos alunos. Murari (2011) ressalta que ao utilizar um material didático é necessário que o professor tenha o cuidado de analisar se ele satisfaz um dos objetivos do processo de ensino e aprendizagem, que é a compreensão dos conceitos estudados.

Antes de optar por um material, Fiorentini e Miorim (1999) afirmam que:

> devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de sociedade que queremos, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno (FIORENTINI; MIORIM, 1999, p. 6).

Tendo os objetivos que quer alcançar, se faz necessário então selecionar quais materiais se adequam melhor a tais objetivos. Assim, ao selecionar os materiais manipuláveis que vai utilizar em sua aula, o professor deve seguir alguns critérios. De acordo com Reys (1971) estes critérios são:

> - os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas;
> - os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
> - os materiais devem ser motivadores;
> - os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos;
> - os materiais devem proporcionar uma base para a abstração;
> - os materiais devem proporcionar manipulação individual (REYS, 1971, p. 553, tradução nossa)[11].

Um aspecto importante ressaltado por Santos e Cury (2011) é que a utilização de materiais manipuláveis propicia o fortalecimento da relação entre professor e aluno, e também a relação dos alunos entre si, criando elos de amizade e respeito entre todos na sala de aula, o que é muito relevante para o processo de ensino e aprendizagem.

A respeito da forma de utilizar os materiais manipuláveis, Nacarato (2005) afirma que o "uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los" (NACARATO, 2005, p. 4). Reys corrobora com essa ideia "não há agora, nunca houve e, espera-se, nunca haverá um verdadeiro substituto para um bom professor que sabe como e o que as crianças precisam aprender e quando precisam aprender" (REYS, 1971, p. 558, tradução nossa)[12].

Fiorentini e Miorim (1999) ressaltam que o professor não deve deixar sua metodologia de ensino a cargo de algum tipo de material por ele ser atraente ou lúdico, os materiais devem estar em segundo plano, pois nenhum deles será válido por si só. Os autores ainda afirmam que em algumas vezes "o mais importante não será o material, mas sim a discussão e resolução de uma situação-problema ligada ao contexto do aluno, ou ainda, a discussão e utilização de um raciocínio mais abstrato" (FIORENTINI; MIORIM, 1999, p. 7).

---

[11] The materials should provide a true embodiment of the mathematical concept or ideas being explored.
The materials should clearly represent the mathematical concept.
The materials should be motivating.
The materials should be multipurpose if possible.
The materials should provide a basis for abstraction.
The materials should provide for individual manipulation

[12] There is not now, never has been, and, it is hoped, never will be a genuine substitute for a good teacher who knows how and what children need to learn and when they need to learn it!

De acordo com Lorenzato (2006) podemos exemplificar duas maneiras distintas de utilização de materiais manipuláveis, em uma delas o professor utiliza o material como um auxílio para apresentar um novo conteúdo, apenas para melhorar a memorização por parte dos alunos e em outra ele utiliza o material durante todo o processo indagando seus alunos, questionando-os e fazendo com que reflitam e formem conjecturas a partir da manipulação. O autor considera que a diferença entre essas duas maneiras ressalta que a eficiência do material depende mais do professor do que do próprio material; e ainda mostra a importância que utilizar corretamente o material manipulável traz para o desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno. Em concordância com outros autores já citados, Lorenzato (2006) afirma:

> Por melhor que seja, o material didático nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica a disposição do professor e do aluno e como tal, o material didático não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor (LORENZATO, 2006, p. 18).

Utilizar o material manipulável em suas aulas não é um trabalho fácil para o professor, exige maior tempo de preparação e estudo do que na preparação de uma aula tradicional, com exposição do conteúdo aos alunos e exercicíos de repetição e fixação.

Uma das grandes dificuldades encontradas por professores que querem utilizar mateirais manipuláveis em suas aulas é justamente a falta de recursos para isso. A construção do material manipulável também pode fazer parte da aula. Com a supervisão do professor, os próprios alunos podem fabricar seus materiais, se assim for possível, o que pode ser a solução para este problema. Nessa direção, Lorenzato (2006), em seu trabalho, ressalta que essa deve ser uma das formas de melhor aproveitamento das potencialidades de um material manipulável, pois é na contrução do mesmo que ocorrem imprevistos que fazem com que os alunos formem conjecturas.

Rêgo e Rêgo (2006) consideram alguns cuidados que o professor deve ter na utilização de qualquer recurso didático, sendo eles:

> I. dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
> II. incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
> III. mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
> IV. realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
> V. planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma

> eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
> VI. sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 54).

Nesta perspectiva, o professor tem papel de mediador do processo, o aluno tem papel ativo na construção de seu conhecimento, e a aprendizagem não depende do objeto em si, mas sim da forma como será explorado. Os autores afirmam ainda que: "Uma vez trabalhado e avaliado em sala de aula um recurso didático pode ser, caso indicado, reestruturado" (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 42).

Não é de hoje que os materiais manipuláveis vêm sendo estudados e utilizados na área da educação, de acordo com Nacarato a utilização de materiais manipuláveis no ensino “foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (NACARATO, 2005, p. 1). Já no século XX, Maria Motessori foi uma das pioneiras ao defender o uso de materiais manipuláveis, ela trabalhava com alunos com necessidades especiais, e nessa direção, Sousa e Oliveira (2010) afirmam que "foi no trabalho com estes alunos que ela enxergou que a partir da manipulação de objetos essas crianças apreendem mais facilmente os conceitos matemáticos" (SOUSA; OLIVEIRA, 2010, p. 5).

No Brasil, os materiais manipuláveis tiveram um discurso a favor de sua utilização a partir de 1920, período em que o ensino da Matemática passava pela tendência empírico-ativista, que de acordo com Muirari (2011) "não se desenvolveu devido, principalmente, ao despreparo dos professores da época" (MURARI, 2011, p. 191).

No entanto, a ideia de que se aprende melhor partindo do concreto já era defendida por outros estudiosos muito antes de se pensar em materiais manipuláveis no ensino. Comenius, Locke, Rosseu, Froebel, Herbart, Dewey, Vygotsky, Piaget foram alguns dos autores que, a seu próprio modo, defendiam esta ideia (LORENZATO, 2006).

Outro defensor da ideia de que ensinar partindo do concreto pode ajudar, principalmente alunos com mais dificuldades, foi o professor belga Georges Cuisenaire, que criou o material manipulável conhecido como Barras de Cuisenaire ou Escala de Cuisenaire, que foi o material escolhido para realização deste estudo.

2.2 Escala Cuisenaire[13]

Georges Cuisenaire (Figura 1) nasceu em 7 de setembro de 1891 em Quaregnon na Bélgica, em 1911, graduou-se na Mons Conservatory of Music e em setembro de 1911 tornou-se professor da escola primária em Thuin também na Bélgica, na Upper Town School. Durante a Primeira Gerra Mundial ele estava envolvido com o serviço de saúde no Yser, retornando para Thuin apenas em 1919.

Foi em 1945 que Cuisenaire começou a imaginar barras de papelão colorido para auxiliar na aprendizagem de um de seus alunos que estavam apresentando dificuldades com a matemática, na escola primária onde lecionava, Ele testou o material por cinco anos e foi aperfeiçoando a ideia, até que em 1950 se tornaram as barras que preservam comprimento e cor. Em 1951 publicou um folheto explicativo denominado "*Les Nombres en couleurs*". A partir de 1953 o método passou a ser difundido, em mais de duas mil conferências para a apresentação em Universidades por todo o mundo. E em 1954 o professor Caleb Gattegno, da Universidade de Londres, fundou a *Cuisenaire Company*, a partir de então o método começou a ser introduzido em países de todo o mundo. Georges Cuisenaire faleceu em 1976 em sua casa em Thuin.

Figura 1- Georges Cuisenaire

Fonte: http://www.cuisenaire.eu. Acesso em 12. mar 2019.

[13] As datas e informações sobre a vida de Cuisenaire foram retiradas do site <http://www.cuisenaire.eu/> Acesso em 12 mar. 2019.

A Escala Cuisenaire é um material estruturado, que preserva comprimento e cor, traz uma representação diferente para o conceito de número, desta forma número não é resultado de uma contagem, uma peça representa um número apenas em relação às outras peças.

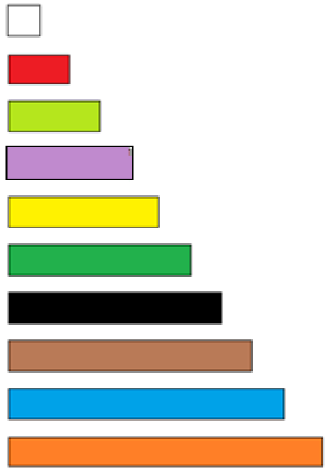
O material é composto por 10 peças, cada uma é diferenciada por sua cor e comprimento que varia uma unidade de uma peça para a próxima, e também pela relação entre elas. A primeira barra possui cor branca e representa uma unidade, o valor numérico que lhe é atribuído determina o valor das outras barras. A Figura 2 mostra uma representação das peças da Escala Cuisenaire, atribuindo o valor numérico um a de cor branca teremos, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez representados respectivamente com as cores branco, vermelho, verde claro, lilás, amarelo, verde escuro, preto, marrom, azul e laranja. De acordo com Gattegno (1961), as barras podem ser separadas em três grupos a partir das cores primárias vermelho, amarelo e azul, e os grupos são amarelo e laranja (5 e 10); verde claro, verde escuro e azul (3, 6 e 9); vermelho, lilás e marrom (2, 4 e 8). A peça branca representa uma unidade e é submúltiplo de todas as outras, e temos também a peça preta que representa o número 7. O autor diz que:

> Veremos que as cores desses grupos familiares se aprofundam à medida que os comprimentos aumentam, e isso, junto com outras características das hastes, deriva do fato de que Cuisenaire foi inspirada por analogias musicais e pensada em termos de acordes e discórdias, e variando profundidades em campo. As hastes quando formadas em uma escada lembram os canos de Pan e parecem formar um teclado (GATTEGNO, 1961, p. 8, tradução nossa)[14].

---

[14] It will be seen that the colors in these family groups deepen as the lengths increase, and this, together with other features of the rods, derives from the fact that Cuisenaire was inspired by musical analogies and thought in terms of chords and dischords, and varying depths in pitch. The rods when formed into a staircase are reminiscent of the pipes of Pan and seem to form a keyboard.

Figura 2 - As cores da Escala Cuisenaire



Fonte: a autora (2019)

Como citado anteriormente, Caleb Gattegno foi responsável por divulgar o material de Cuisenaire por todo o mundo, ele escreveu alguns livros para orientar o desenvolvimento do que ele chama de Método Cuisenaire-Gattegno com a utilização do material criado por Georges Cuisenaire. Seus livros podem auxiliar professores a trabalhar com a Escala Cuisenaire, entre eles há uma coleção de livros didáticos que possui tarefas para introduzir e trabalhar conceitos aritméticos.

De acordo com Gattegno (1961), Cuisenaire afirmava que "Com este material, a *visão* está associada a *fazer, entender, calcular e checar*" (GATTEGNO, 1961, p. 11, grifo nosso, tradução nossa)[15]. Esta pode ser uma forma de distinguir as fases pelas quais os alunos passarão quando trabalharmos com a Escala Cuisenaire, inicialmente será estimulada a visão, e então será realizada a manipulação que levará à compreensão do material, depois disso o aluno realiza cálculos e verifica se estão corretos.

Gattegno (1961) argumenta que a *visão* está relacionada com a estrutura e cor do material por exemplo, as cores de números que são múltiplos um do outro possuem uma relação e, as peças possuem dimensões e cores que ajudam a identificar os números e descobrir as relações entre eles, assim eles são fixados na memória e preparam o caminho para a percepção mental. Na utilização de um material manipulável como a Escala Cuisenaire *fazer* é uma parte fundamental, a ação da

---

[15] With this material, seeing is associated with doing, understanding, reckoning and checking.

criança é uma necessidade, ela pode construir várias combinações com os números, de forma espontânea, o que lhe permitirá diversas decomposições diferentes.

O *ver* e o *fazer* levam à *compreensão*, a imaginação da criança é estimulada e assim a contagem vai tornando-se mais fácil. Além de aumentar a habilidade de calcular das crianças, a manipulação das peças da Escala Cuisenaire também irá despertar seu interesse, e aumentar experiência e conhecimento. Na fase *checar*, o aluno verifica seus próprios cálculos, estimulando a autoconfiança para corrigir seus próprios erros (GATTEGNO, 1961).

O autor afirma que com o uso da Escala Cuisenaire "imagens visuais, musculares e táteis, claramente definidas e duráveis, são criadas" (GATTEGNO, 1961, p. 12, tradução nossa)[16].

A manipulação do material vai ajudando o aluno a compreender as relações existentes entre os números, a fazer decomposições e a utilizar as quatro operações, conforme for estimulado, o que leva gradualmente a aumentar o nível de abstração, quanto mais a criança manipula as peças da Escala Cuisenaire mais domínio terá sobre o material.

Até obter o domínio completo sobre o material, a criança passa por quatro estágios desde o primeiro contato que tem com ele. De acordo com Gattegno (1961) estes estágios são primeiramente e experiência que será adquirida da manipulação, por meio da tentativa e erro o aluno aprende também sobre as limitações de determinadas situações com as quais pode se deparar. O segundo estágio diz respeito à notação, a criança passa a traduzir a experiência com sua própria linguagem, que pode ser palavras, desenhos ou anotações. O terceiro estágio diz respeito à união das duas primeiras, nesta etapa a utilização da notação própria do aluno passa a ser mais dinâmica assim como é a experiência. Após dominar o terceiro estágio é que a criança passa para o quarto, que se refere ao domínio completo da situação, e é neste estágio que o aluno passa a confiar em suas habilidades com o material e constrói uma base para outros desenvolvimentos (GATTEGNO,1961).

Quanto ao papel do professor no processo de utilização do material, Gattegno (1961) afirma que "se os professores só intervierem quando solicitados (...), seu

---

[16] visual, muscular and tactile images, clearly defined and durable, are created.

trabalho será muito mais recompensador e eles serão mais úteis no enfrentamento dos verdadeiros problemas” (GATTEGNO, 1961, p. 29, tradução nossa)[17].

O professor pode deixar que os alunos tenham inicialmente um bom tempo para manipular o material livremente, usar a criatividade para fazer suas próprias composições e também utilizar sua própria linguagem como notação, e mesmo depois de fazer um trabalho mais dirigido é importante deixar que os alunos passem por tentativa e erro e peçam ajuda quando acharem que precisam, assim a criança se torna também mais independente. Enfatizando isso, Gattegno diz que “o sábio professor usará as hastes para longos períodos de jogo livre e não terá pressa em introduzir qualquer traço de direção” (GATTEGNO, 1961, p. 36, tradução nossa)[18].

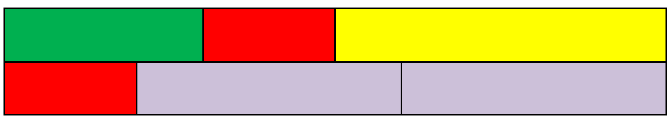
Depois de passar pelo período de manipulação livre do material as crianças passam para a etapa que Caleb Gattegno chama de Fase Qualitativa. Nessa fase eles irão classificar, ordenar e criar padrões com as peças. O trabalho, mesmo sendo orientado pelo professor deve ser feito de forma que pareça mais com um jogo livre para motivar as crianças a explorar o material (CANE, 2017).

Na Fase Qualitativa ou Trabalho Qualitativo, o professor pode incentivar os alunos a construir trens, tapetes, escadas e representações de objetos específicos com as peças da Escala Cuisenaire. Os trens (Figura3) são formados por uma fila de peças na horizontal, já os tapetes (Figura 4) são formados por um conjunto de várias fileiras de peças na horizontal em que todas possuem o mesmo comprimento. Uma escada (Figura 5) pode ser construída colocando as peças na vertical em ordem crescente ou decrescente.

Figura 3 - Trem

Fonte: a autora (2019)

Figura 4 - Tapetes

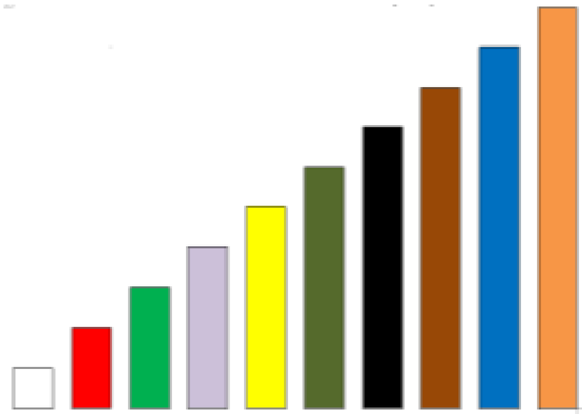


Fonte: a autora (2019)

[17] If teachers only intervene when asked to and watch their classes at work (…) their job will be much more rewarding and they will be more useful in tackling true problems.

[18] the wise teacher will use the rods for long stretches of free play and will be in no hurry to introduce any trace of direction.

Figura 5 - Escada



Fonte: a autora (2019)

Cane (2017) afirma que ao trabalhar com tapetes podemos começar a introduzir o conceito de equivalência, até mesmo para crianças pequenas. O professor pode perguntar, por exemplo: “Quantas peças verde-claras precisamos para formar um trem do comprimento equivalente ao azul?”, ou “Quais peças podemos utilizar para formar um trem de comprimento preto com apenas duas peças?”. A autora afirma que as crianças começam a internalizar os padrões que formaram com os trens e tornam-se capazes de construí-los mentalmente. E ela argumenta que “eles também são rápidos em descartar hastes que não serão equivalentes entre si ou podem "ver" o que falta para completar a lacuna em um padrão sem ter que testá-lo” (CANE, 2017, p. 6, tradução nossa)[19].

Antes de introduzir a ideia de que cada peça do material representa um número, é interessante que o professor leve seus alunos a registrar os padrões que formou com seus trens utilizando suas próprias notações, com desenhos ou símbolos para representar as peças, as crianças podem por exemplo chamar cada peça pela letra inicial da sua cor.

Podemos então introduzir a ideia de que cada peça representa um número, essa é a fase quantitativa do trabalho com a Escala Cuisenaire. Vale ressaltar novamente que cada peça só possui valor com relação as outras. Neste momento, o professor começa o trabalho de comparar todas as peças com a peça branca, para assim atribuir valor a elas, referente à quantidade de peças brancas necessárias para construir um trem com o comprimento de cada uma das outras peças.

---

[19] They are also quick to rule out rods that will not be equivalent to each other or can ‘see’ what the missing gap in a pattern would be without having to test it.

A adição pode ser trabalhada quando os alunos tiverem construído as relações das peças com os números. Para representar uma adição basta formar um trem com as peças que representam as parcelas desta adição, com adições que resultam em números menores que 10, o resultado pode ser obtido encontrando a peça que, sozinha, resulta o comprimento deste trem. Se formarmos vários trens que possuem o mesmo comprimento teremos um tapete (Figura 6).

Figura 6 - Tapete de adição

Fonte: <http://www.cuisenaire.eu> Acesso em 25. mar 2019.

Pode-se trabalhar a decomposição dos números e a soma de parcelas iguais para cada uma das peças de 2 a 10 construindo tapetes de adição. À criança pode ser solicitado que crie tapetes apenas com peças iguais ou com mais de duas peças em cada linha, fazendo isso na forma de jogos.

O trabalho com a subtração pode ser feito de forma semelhante à adição, fazendo uso dos tapetes (Figura 7). A subtração é realizada colocando uma peça abaixo da outra e verificando qual falta para que as duas tenham o mesmo comprimento. Por exemplo, se queremos calcular 8 – 3, pegamos a peça marrom e a peça verde-claro e colocamos uma acima da outra e encontraremos a peça amarela que irá completar o tapete. Se perguntarmos à criança o resultado desta operação e ela responder 6 ou 4 por exemplo ao tentar colocar a peça ela perceberá que ou ela é pequena demais ou grande demais.

Figura 7- Tapete da subtração

Fonte: <http://www.cuisenaire.eu> Acesso em 25. mar 2019.

Calleb Gattegno sugere que, depois que as crianças compreenderam a forma como podem realizar a subtração com a Escala Cuisenaire, o professor pode trabalhar com subtrações equivalentes, abordando o fato de que cada número "é igual a um número infinito de diferenças de pares de números: 1 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 etc" (GATTEGNO, 1961, p. 57, tradução nossa)[20].

A operação de multiplicação pode ser introduzida trabalhando inicialmente com tapetes de adição com parecelas iguais, por exemplo construir um tapete de comprimento 9 utilizando apenas peças iguais, neste caso temos três fileiras, com o próprio nove, 3 peças verde-claro e 9 peças brancas. Posteriormente a criança pode deixar de representar a multiplicação com um tapete e passar a construir retângulos, veja a Figura 8.

Figura 8 - Tapete e retângulo da multiplicação

Fonte: a autora (2019)

[20] is equal to an infinite number of differences of pairs of numbers: 1 = 2 — i = 3- 2 = 4 — 3 etc.

A divisão pode ser trabalhada como a operação inversa da multiplicação. É importante lembrar que cada criança possui seu próprio ritmo, não podemos esperar que todas se desenvolvam ao mesmo tempo e da mesma forma, é necessário estimular todos os alunos a darem seu melhor, mas respeitar o ritmo de cada um e no seu tempo, pode colaborar para a compreensão daquilo que está sendo trabalhado. “O melhor ritmo, e o mais rápido, é o próprio ritmo da criança.” (GATTEGNO, 1960, p. 35, tradução nossa)[21]. Segundo o autor, com a utilização deste material a criança “é gradualmente levada a um certo nível de abstração através da repetida prática ao enxergar mentalmente” (GATTEGNO, 1960, p. 13, tradução nossa)[22].

O trabalho com a Escala Cuisenaire torna possível desenvolver o pensamento matemático e introduzir o conceito de número, de antecessor e sucessor, trabalhar com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, e suas propriedades. Nacarato (2005, p. 4) ainda diz que "a essas possibilidades do material Cuisenaire acrescento ainda o trabalho com frações e volumes" (NACARATO, 2005, p. 4). A autora ainda complementa que muitas vezes as potencialidades deste material são desconhecidas pelos professores que acabam achando que ele serve apenas para o trabalho com a Educação Infantil e o início de alguns conceitos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A Escala Cuisenaire, como qualquer outro material manipulável, possui suas limitações, Gattegno diz que ela pode oferecer uma experiência matemática bem completa, mas que experiências físicas e sociais exigem outro tipo de material. Segundo o autor:

> Os professores sentirão que as hastes Cuisenaire enfatizam principalmente a ideia do comprimento. Isso é verdade, mas também está claro que essas hastes são discretas e podem ser contadas como qualquer outro objeto. Eles são primos e têm área e volume, para que possam também introduzir essas experiências. Como seus comprimentos variam de maneira abrupta, eles não são um material contínuo e não são suficientes para fornecer uma experiência completa de mensuração. Precisamos de materiais que sejam verdadeiramente contínuos, e há muitos à mão: líquidos em vasos, um medidor de fita, materiais de algodão ou seda - tudo pode servir (tradução nossa) (GATTEGNO, 1960, p. 34)[23]

---

[21] The best pace, and the swiftest, is the child's own pace.
[22] is gradually brought to a certain level of abstraction through repeated practice in seeing mentally.
[23] Teachers will feel that the Cuisenaire rods emphasize the idea of length mainly. This is true but it is also clear that these rods are discrete and can be counted like any other objects. They are prisms and have area and volume, so they can serve to introduce these experiences also. As their lengths vary in an abrupt manner *they are not a continuous material* and they do not suffice to give fully the

Capítulo 3

Tarefas

3.1 Discussão das tarefas no GEAMAI

As tarefas em sua versão final se encontram no Apêndice 3. Foram elaboradas dezessete tarefas para trabalhar dentro das Unidades Temáticas: Números e Álgebra. Antes de ser aplicada em sala de aula com as crianças, cada tarefa foi levada ao GEAMAI e explorada com os professores participantes do grupo. Após a discussão com o grupo algumas foram repensadas, principalmente com relação ao seu enunciado.

Depois de realizadas no GEAMAI, as tarefas foram testadas em turmas do 1º ao 5º anos. A aplicação ocorreu no Colégio de Aplicação Pedagógica da UEL Professor José Aloísio Aragão – EI, EF, EM e Profissional de Londrina e na Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca de Mauá da Serra. As tarefas de 1 a 6 foram testadas no 1º ano, de 7 a 9 no 2º ano, de 10 a 13 no 3º ano, 14 e 15 no 4º ano, 16 e 17 no 5º ano. Essa escolha foi feita sem a pretensão de limitá-las por etapas.

As professoras realizaram as tarefas e anotaram suas sugestões, que foram recolhidas para que posteriormente a pesquisadora as analisasse

No primeiro encontro com o GEAMAI foram realizadas as tarefas de 1 a 6. Inicialmente as professoras tiveram um tempo para manipular o material livremente, para que pudessem conhecê-lo melhor. Em seguida foi pedido que separassem as peças em grupos, no intuito de que notassem a diferença de cores e tamanhos (Figura 9), para algumas professoras este foi o primeiro contato com o material.

---

experience of measurement. We shall need materials that are truly continuous, and there are many at hand: liquids in vessels, a tape measurer, materials of cotton or silk—all can serve.

Figura 9 - Participantes do GEAMAI

Fonte: a autora (2019)

Já na realização da tarefa 1 (Quadro 3), percebemos que algumas caixas do material que estávamos utilizando vieram com defeito, as peças não tinham o tamanho exato que deveriam, quando comparávamos as peças vermelhas com as laranjas que equivalem respectivamente a 2 e a 10, por exemplo, notamos que não encaixavam exatamente 5 peças vermelhas ao longo da peça laranja, como deveria. Outro problema estava no tom das cores, a verde claro e a verde escuro estavam com tonalidades muito próximas. Discutimos então a importância de escolher bem o material no momento de sua aquisição.

Para realização da tarefa 1 é necessário que os alunos pintem os desenhos que representam as peças da Escala Cuisenaire, o cubo que equilave a uma unidade é branco, no entanto os materiais o trazem com a cor natural da madeira, então surgiu o problema de que se o enunciado pedia para pintar, como é que os alunos pintariam de branco? Decidimos que os alunos poderiam optar por pintar ou não.

Quadro 3 – Tarefa 1

<table>
<tr><td>Versão inicial</td><td>Versão final</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa[24]: Padronizar a palavra para se referir ao material, trocando barras por peças, nomear os grupos para que os alunos possam responder a terceira pergunta e deixar as imagens que representam as peças com o tamanho correto.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

Foi acrescentado as letras do alfabeto para nomear os grupos, que antes não estavam nomeados, para que os alunos pudessem responder as questões do final da tarefa, e trocado a palavra barra por peças, essa decisão foi tomada com o grupo para utilizar o mesmo nome ao tratar do material. O quadro 3 mostra a versão inicial e a versão final da tarefa, que também foi alterada depois de ser aplicada em sala.

Uma questão foi levantada por uma professora durante a realização das tarefas: como podemos utilizar o material com alunos daltônicos? Iniciou-se então uma discussão a respeito do assunto e concluímos que eles podem diferenciar as peças apenas pelo tamanho, e outra sugestão para alunos que já são alfabetizados, seria etiquetar as peças com os nomes das cores. De acordo com Gattegno (1960), “crianças daltônicas não estão em desvantagem como se poderia supor. Eles

[24] Os quadros apresentam as justificativas para as tarefas que foram alteradas.

distinguem as varetas (como seus companheiros) pelo comprimento” (GATTEGNO, 1960, p. 36).

Na primeira versão das tarefas estávamos nos referindo ao material como barras, ao realizar a tarefa 2 (Quadro 4) achamos que barras poderiam confundir os alunos, por isso optamos por chamar de peças, barra não está incorreto, mas quando se trata do cubo que é a primeira peça, nos pareceu inadequado. Nos trabalhos estudados os autores usam as palavras barras, peças, escala e até varas. Neste estudo optamos por utilizar a palavra peças, que para o grupo GEAMAI pareceu mais adequado. Com relação à tarefa 2, discutimos a respeito da palavra “fila” utilizada no enunciado. Consideramos mais adequado mudar para “sequência”, assim a tarefa 2 ficou como segue:

Quadro 4 – Tarefa 2

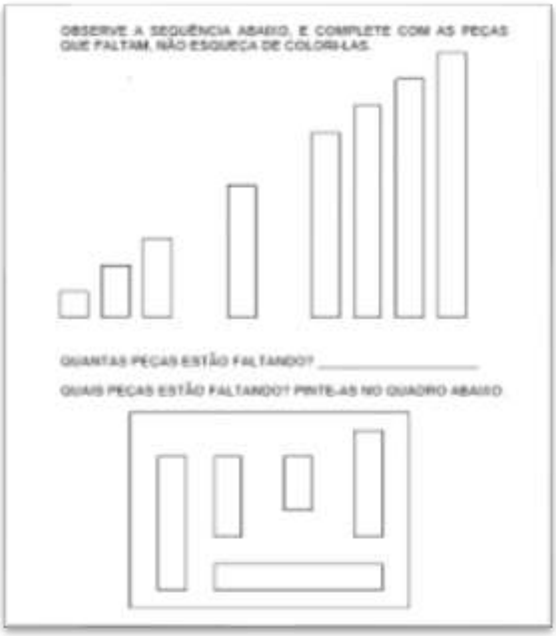
<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
• VAMOS COLOCAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE EM FILA?
AGORA QUE VOCÊ FORMOU A FILA COM O MATERIAL, PINTE A MALHA QUADRICULADA PARA REPRESENTAR UMA FILA DO MENOR PARA O MAIOR.</td><td>
VAMOS ORGANIZAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE DA MENOR PARA A MAIOR.
REPRESENTE, PINTANDO NA MALHA QUADRICULADA, A SEQUÊNCIA QUE VOCÊ FORMOU.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Colocar todos os comandos da tarefa antes do espaço para solução.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

Ao realizar a tarefa 3, as professoras notaram que o desenho que estava em três dimensões e, as peças muito próximas umas das outras estavam dificultando a visualização da sequência, nesta tarefa os alunos devem encontrar a peça que está faltando na sequência, então alteramos o desenho na versão final. Outra questão levantada foi que, na segunda parte da tarefa, os alunos deveriam desenhar as peças que faltavam, no entanto, se a tarefa for direcionada ao 1º ano, o desenho pode ficar muito impreciso. Por isso, decidimos mudar para que só identificassem e pintassem a peça que faltava.

Conforme as tarefas foram realizadas com os alunos do 1º ano, percebemos a grande importância de que cada aluno tenha material suficiente para utilizar durante a realização da atividade, e dessa forma concluímos que o ideal é trabalhar individualmente se a caixa for pequena com 96 peças, e se for da caixa grande (294 peças) no máximo em grupos de quatro alunos, de modo a ter um aproveitamento melhor de cada tarefa.

Quadro 5 – Tarefa 3

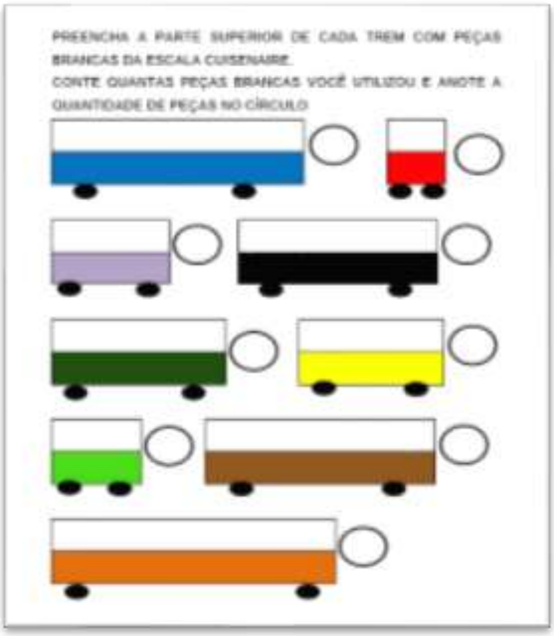
<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Deixar a sequência organizada visualmente para que os alunos percebam que há peças faltando.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A partir da tarefa 4 iniciamos uma introdução da ideia de relacionar as peças com os números, até então os alunos estavam conhecendo o material e trabalhando a sequenciação.

O enunciado da tarefa 4 (Quadro 6) pede que os alunos preencham, a parte do trem que falta com peças brancas e registrem a quantidade no quadrado à frente do trem, o primeiro empecilho foi que a criança pode olhar para o trem e não encontrar nada em falta, por isso trocamos por preencher a parte superior do trem. Uma outra confusão estava ocorrendo com os quadrados, que se misturam visualmente com o trem, trocamos então por círculos, e retiramos o trem branco de uma única peça.

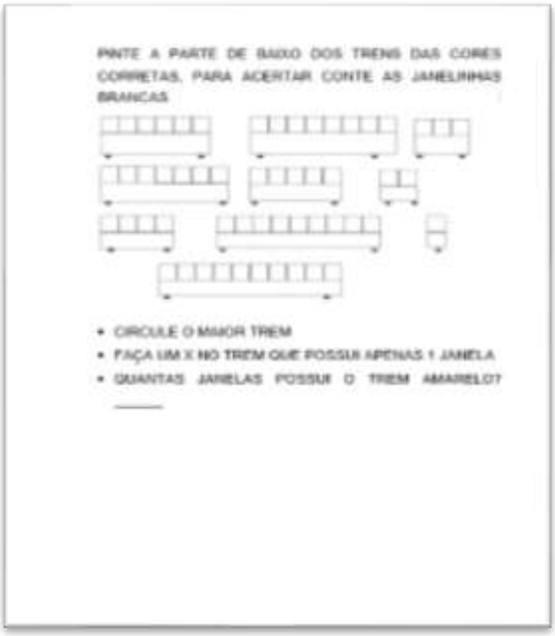
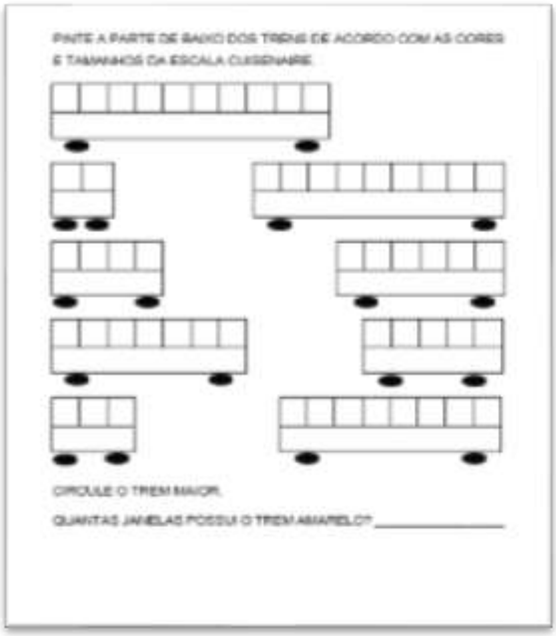
Quadro 6 – Tarefa 4

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Trocar os quadrados por círculo, para não confundir com o trem, e deixar todos os comandos antes da tarefa.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A tarefa 5 (Quadro 7) não teve o enunciado alterado, apenas os desenhos tiveram que ser refeitos, já que na primeira versão não estavam se encaixando adequadamente no tamanho das peças do material.

Quadro 7 – Tarefa 5

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Diminuir as informações do enunciado para que fique mais claro o que deve ser feito. As figuras foram alteradas para proporção correta com o tamanho das peças da Escala Cuisenaire.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A Quadro 16 mostra a tarefa 6, e na realização desta tarefa notamos que inicialmente, no enunciado, foi usada a palavra “equilave” e nas perguntas da sequência à figura, “vale”, decidimos, então, trocar e utilizar equivale em todos os lugares. Na terceira pergunta os alunos devem estipular qual peça vale mais: a marrom ou a verde-escura?, comparando-as com o cubo que equivale a uma unidade.

Quadro 8 – Tarefa 6

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
CONSIDERE QUE A BARRA BRANCA EQUIVALE A 1 UNIDADE.
• QUANTO VALE A BARRA VERDE ESCURO?____
• QUANTO VALE A BARRA AMARELA? ____
• QUAL BARRA VALE MAIS?
MARROM VERDE CLARA
PINTE OS QUADRADINHOS QUE CORRESPONDEM AOS NÚMEROS ABAIXO:
4
7
3
9
2
1
6
8
5
10
LEMBRE DE UTILIZAR AS CORES DAS BARRAS CUISENAIRE CORRESPONDENTE !!!</td><td>
1) CONSIDERE QUE A PEÇA BRANCA DA ESCALA CUISENAIRE EQUIVALE A 1 UNIDADE. QUANTO EQUIVALE AS PEÇAS
A) VERDE ESCURO? ____
B) AMARELA? ____
C) LARANJA? ____
2) ASSINALE A COR DA PEÇA QUE TEM O MAIOR NÚMERO DE UNIDADES?
MARROM VERDE CLARO
3) PINTE OS QUADRADINHOS QUE CORRESPONDEM AOS NÚMEROS ABAIXO.
4
7
3
9
2
8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Separar o que deve ser feito enumerando os comandos, além de alterar o enunciado para deixar apenas os nomes das cores no item 1.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

As tarefas de 7 a 11 (Figura 11) foram realizadas em um segundo encontro. Ao iniciar a realização da tarefa 7 (Quadro 9) as professoras questionaram se a utilização de letras para indicar a ordem das perguntas não iriam confundir os alunos, pensamos em alterar e buscar uma outra alternativa, no entanto constatamos que eles já estão acostumados com tarefas deste tipo, como exemplo temos as tarefas de livros didáticos.

Figura 10 - Participantes do GEAMAI

Fonte: a autora (2019)

Quadro 9 – Tarefa 7

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
COLOQUE AS PEÇAS EM ORDEM CRESCENTE E RESPONDA.
A) QUAL É A COR DA MENOR PEÇA? ____
B) QUAL A COR DA MAIOR PEÇAS? ____
C) QUAIS AS CORES DAS PEÇAS MENORES QUE A VERDE ESCURO? ____
D) QUAIS PEÇAS ESTÃO ENTRE AS PEÇAS AMARELA E PRETA? ____
NO QUADRICULADO ABAIXO, PINTE OS QUADRADINHOS PARA REPRESENTAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE. REGISTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS QUE PINTOU EM CADA PEÇA.</td><td>
1) NO QUADRICULADO ABAIXO, FAÇA O QUE SE PEDE:
A) PINTE OS QUADRADINHOS PARA REPRESENTAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE.
B) REGISTRE O NUMERO DE QUADRADINHOS QUE PINTOU EM CADA PEÇA.
2) SEPARE UMA PEÇA DE CADA COR, COLOQUE-AS EM ORDEM CRESCENTE E RESPONDA:
A) QUAL É A COR DA MENOR PEÇA? ____
B) QUAL A COR DA MAIOR PEÇAS? ____
C) QUAIS AS CORES DAS PEÇAS MENORES QUE A VERDE ESCURO? ____
D) QUAIS PEÇAS ESTÃO ENTRE AS PEÇAS AMARELA E PRETA? ____</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Trocar a ordem das questões já que colocar as peças em ordem ajuda a pensar sobre as questões referentes às características do material.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A tarefa 7 foi organizada em dois tópicos diferentes, inicialmente a proposta era colocar as peças em ordem crescente, responder as perguntas sobre o material e depois registrar as peças no quadriculado, ficou decidido por inverter estes dois tópicos e iniciar a tarefa registrando os números no quadriculado.

Com relação aos enunciados das tarefas decidimos separar o enunciado que pedia aos alunos que pintassem os quadradinhos para representar as peças da Escala Cuisenaire e registrassem o número que pintou, uma vez que havia mais de um comando na mesma frase, o que poderia levar a uma confusão desnecessária por parte dos alunos. Nas perguntas mudamos o enunciado para solicitar que os alunos pegassem uma peça de cada cor, antes de colocar em ordem crescente.

A tarefa 8 (Quadro 10), inicialmente pedia que os alunos construíssem o número 9 no quadriculado de formas diferentes, com uma cor e depois com duas cores.

Quadro 10 – Tarefa 8

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
• CONSTRUA O NÚMERO 9 NO QUADRICULADO DAS SEGUINTES FORMAS:
A)UTILIZANDO 1 PEÇA;
B)UTILIZANDO 2 PEÇAS;
COMPARE SUA SOLUÇÃO COM A DOS COLEGAS;
• COMPLETE COM A COR DA PEÇA QUE MELHOR SE ENCAIXA E REGISTRE OS RESULTADOS.
7 + 0 = 7
3 + __ = 7
6 + __ = 7
2 + __ = 7</td><td>
1) REPRESENTE O NUMERO 9 NO QUADRICULADO UTILIZANDO AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE, DAS SEGUINTES FORMAS:
A) UTILIZANDO 1 PEÇA;
B) UTILIZANDO 2 PEÇAS;
C) COMPARE E DISCUTA SUA SOLUÇÃO COM OS COLEGAS;
2) COMPLETE COM A COR DA PEÇA QUE MELHOR SE ENCAIXA E REGISTRE OS RESULTADOS:
7 + 0 = 7
3 + __ = 7
6 + __ = 7
2 + __ = 7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Separar as tarefas que possuem comandos diferentes, enumerando-as como 1 e 2.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

Na discussão com as professoras optamos por manter o enunciado da forma que estava, no entanto ao aplicar a tarefa em sala notamos que alguns alunos confundiram o que estava sendo solicitado, entenderam que construir o número era montar o algarismo nove com as peças e não formar um trem de comprimento nove.

Foram poucos os alunos que entenderam desta forma, mesmo assim, para evitar esta confusão, optamos por alterar o enunciado, trocando o termo “construir o número nove” para “represente o número nove”.

A tarefa 9 (Quadro 11) se manteve com o mesmo enunciado, optamos por mudar apenas os números que eram solicitados para que os alunos fizessem a representação, mudamos para valores menores para que a escala do quadriculado permanecesse em tamanho real das peças.

Quadro 11 – Tarefa 9

Versão inicial	Versão final
	
Não houve alterações.	

Fonte: a autora (2019)

No terceiro encontro realizamos as tarefas de 10 a 13, que posteriormente foram testadas no 3º ano. Desta vez as professoras receberam as quatro tarefas de uma vez e, em duplas, foram resolvendo e anotando suas dúvidas e sugestões. Depois que todos terminaram as tarefas discutimos o que tinham anotado, principalmente com relação aos enunciados e aos objetivos que pretendíamos alcançar.

Na tarefa 10 (Quadro 12), a primeira questão pedia ao aluno que descrevesse as peças, foi decidido mudar este enunciado para retirar o termo “descreva” utilizado inicialmente, para que a linguagem do enunciado seja mais clara para um aluno do 3º ano, alteramos para “escreva como elas são”.

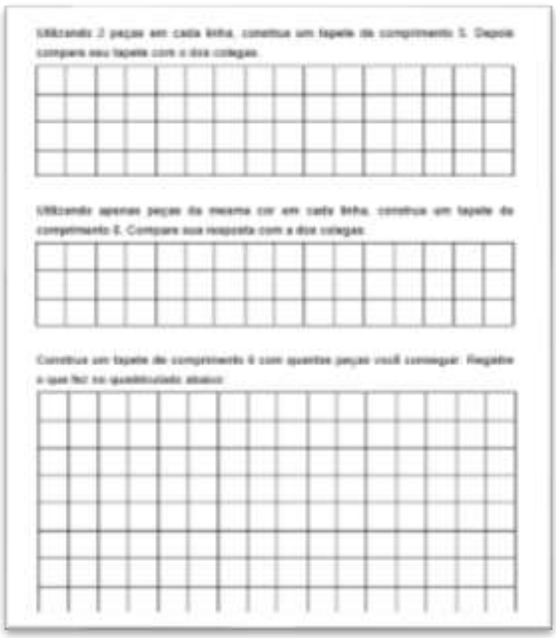
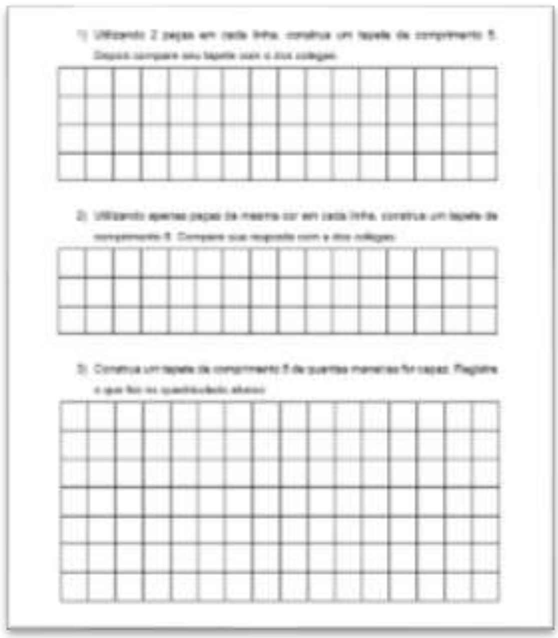
Quadro 12 – Tarefa 10

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
Observe as peças da Escala Cuisenaire e escreva um texto para descrevê-las.
Pegue uma peça de cada cor do material, coloque em ordem crescente e responda:
a) Qual peça está entre a marrom e a laranja?
b) Qual peça ocupa a quinta posição?
c) Qual a diferença de tamanho entre as peças?
d) Se a peça branca equivale a 1 unidade, atribua um número a cada uma das demais peças:
Branca: 1
Vermelha: ___
Verde Claro: ___
Lilás: ___
Amarela: ___
Verde Escuro: ___
Preta: ___
Marrom: ___
Azul: ___
Laranjada: ___</td><td>
1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e escreva como elas são.
2) Pegue uma peça de cada cor do material, coloque em ordem crescente e responda:
a) Qual peça está entre a marrom e a laranja?
b) Qual peça ocupa a quarta posição?
c) Qual a diferença de tamanho entre uma peça e a seguinte?
d) Se a peça branca equivale a 1 unidade, atribua um número a cada uma das demais peças:
Branca: 1
Vermelha: ___
Verde Claro: ___
Lilás: ___
Amarela: ___
Verde Escuro: ___
Preta: ___
Marrom: ___
Azul: ___
Laranjada: ___</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Separar os enunciados com comandos diferentes enumerando-os.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

No que diz respeito à tarefa 11 (Quadro 13) , uma sugestão dada por uma das professoras foi a de explorar as adições que podem ser associadas quando os tapetes são construídos, uma vez que nesta tarefa o aluno deve construir tapetes de determinados comprimentos com duas peças, com peças da mesma cor e depois com as peças que quiser. Não foi solicitado que escrevessem as adições, mas o professor pode explorar as expressões matemáticas pedindo que eles as escrevam e discutindo as possibilidades coletivamente.

Quadro 13 – Tarefa 11

Versão inicial	Versão final
	
Justificativa: Separar os enunciados com comandos diferentes enumerando-os.	

Fonte: a autora (2019)

Na tarefa 12 (Quadro 14) alteramos apenas o enunciado da questão 2 para que fosse mais direto quanto ao que os alunos deveriam fazer.

Quadro 14 – Tarefa 12

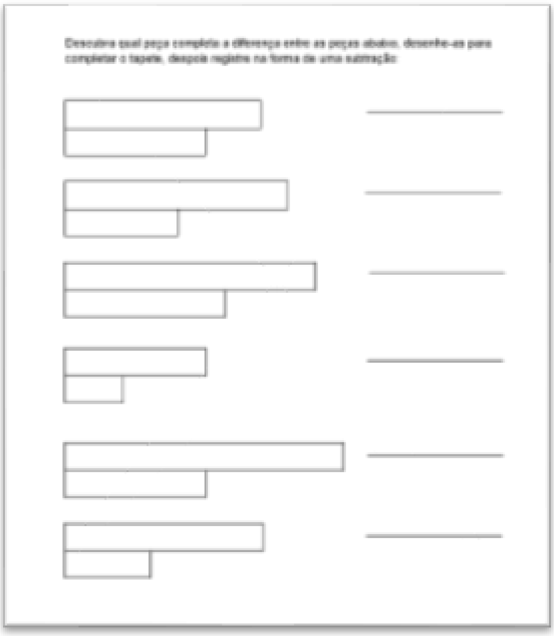
<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa: Separar os enunciados com comandos diferentes enumerando-os e deixar os enunciados mais detalhados.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A tarefa 13 (Quadro 15) pedia que os alunos registrassem com uma subtração a operação que fizeram com as peças da Escala Cuisenaire, ao encontrar a peça que completa a diferenças surgiram dois tipos de subtração diferentes como resposta. O enunciado da questão não estava claro quanto a isso, no entanto já esperávamos que surgiriam expressões diferentes, decidimos mudar no enunciado o termo “subtração” e colocar “expressões matemáticas” pois assim surgirão diferentes respostas que podem ser discutidas com o grupo.

As professoras apresentaram soluções diferentes para a mesma questão, uma das professoras comentou sobre as diferentes ideias presentes na subtração e que as soluções poderiam ser diferentes pois pode-se resolver utilizando a ideia de tirar, completar ou comparar.

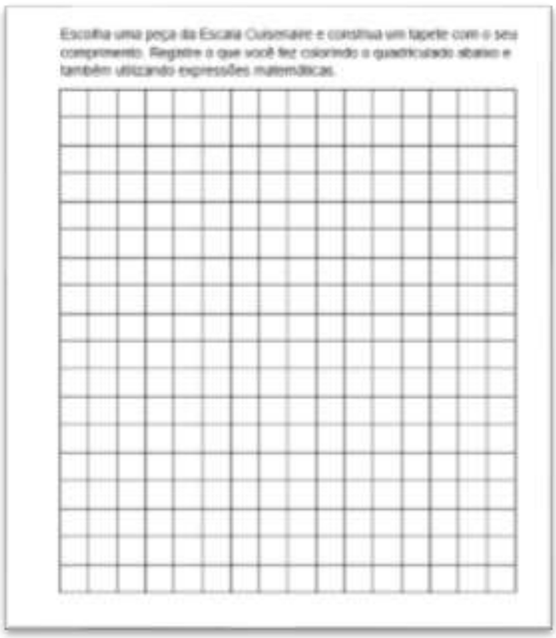
Quadro 15 – Tarefa 13

Versão inicial	Versão final
	
Justificativa: Separar os enunciados com comandos diferentes enumerando-os.	

Fonte: a autora (2019)

As tarefas 14 e 15 foram validadas em um quarto encontro com o GEAMAI, as professoras foram realizando as tarefas e já fomos discutindo os enunciados conforme as dúvidas surgiram. Na tarefa 14 as professoras apresentaram dúvidas quanto à palavra *tapete,* como os alunos poderiam saber o que deveriam fazer, enfatizamos a importância de explicar o que é um *tapete* na utilização da Escala Cuisenaire e, se necessário, o professor pode utilizar alguma das tarefas anteriores para introduzir esta ideia e também construir tapetes como exemplos para os alunos.

Quadro 16 – Tarefa 14

Versão inicial	Versão final
	
Justificativa: Separar os espaços para representar as peças e representar as operações matemáticas.	

Fonte: a autora (2019)

Nessa tarefa também pedimos que os alunos representem cada linha do tapete utilizando expressões matemáticas, inicialmente deixamos a página toda com o quadriculado e pensamos em colocar as expressões à frente da pintura das peças. No entanto para ficar melhor organizado separamos as partes da tarefa: na parte esquerda da folha está o quadriculado para registrar com a pintura representando as peças e do lado direito estão as linhas para escrever as expressões matemáticas.

A tarefa 15 tem por objetivo trabalhar com “subtrações equivalentes”, ou seja, resolver as subtrações reescrevendo-as, subtraindo ou somando a mesma quantidade dos dois termos. A tarefa possui 3 itens, ao resolvê-los algumas professoras sugeriram mudar a ordem em que estavam dispostos. A primeira questão foi trocada de lugar com a terceira, com relação à questão dois mudamos as subtrações para que todas tivessem o mesmo resultado e, dessa maneira, destacar a relação entre elas. O Quadro 17 mostra a versão inicial e o resultado final, depois que as mudanças foram realizadas.

Quadro 17 – Tarefa 15

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Justificativa : Colocar as tarefas em uma ordem que os alunos consigam compreender o que é subtração equivalente primeiro, para então responder a questão 3.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

No quinto encontro com o grupo, discutimos as duas últimas tarefas, que envolvem conceitos de multiplicação e divisão. A tarefa 16 (Quadro8) está dividida em duas questões, as professoras resolveram as questões e depois iniciamos a discussão. No item a da questão 1, questiona-se quantas peças vermelhas são necessárias para formar o comprimento da peça azul. Inicialmente, a escolha dessas peças causou um estranhamento nas professoras, fazendo com que achassem que houvesse algum engano pois, no comprimento da peça azul, não cabe uma quantidade inteira de vermelhas. O objetivo aqui era mesmo escolher peças que não chegariam a um resultado exato e assim gerar discussões a esse respeito.

Uma professora, ao resolver a questão, questionou se deveria responder 4 peças inteiras ou se poderia colocar 4,5; a partir desta pergunta iniciou-se uma discussão sobre como representar meia peça vermelha, se é correto dizer que temos 4,5 vermelhas já que, no manipulável, meia peça vermelha equivale a uma peça branca. O item *a* traz esse desconcerto, já o item *b* ajuda a esclarecer os conceitos que pretendemos abordar.

Quadro 18 – Tarefa 16

<table>
<tr><th>Versão inicial</th><th>Versão final</th></tr>
<tr><td>
1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e responda:
a) Quantas peças vermelhas são necessárias para formar o comprimento da azul de ponta a ponta?
b) É possível fazer isso utilizando apenas peças vermelhas, se não for, qual peça pode ser usada para completar?
c) Registre o que foi feito com as peças da Escala Cuisenaire utilizando uma Expressão Matemática:
d) Compare sua solução com a dos colegas e registre abaixo as que foram diferentes das suas, confira se todas estão certas:
2) Resolva as multiplicações abaixo, se achar necessário utilize a Escala Cuisenaire:
a) 2 x 8 = ____
b) 3 x 3 = ____
c) 5 x 2 = ____
d) 7 x 4 = ____
e) 4 x 4 = ____
f) 7 x 2 = ____
g) 2 x 2 = ____</td><td>
1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e responda:
a) Quantas peças vermelhas são necessárias para formar o comprimento da azul de ponta a ponta?
b) É possível fazer isso utilizando apenas peças vermelhas, se não for, qual peça pode ser usada para completar?
c) Registre o que foi feito com as peças da Escala Cuisenaire utilizando uma Expressão Matemática:
d) Compare sua solução com a dos colegas e registre abaixo as que foram diferentes das suas, confira se todas estão certas:
2) Resolva as multiplicações abaixo, se achar necessário utilize a Escala Cuisenaire:
a) 2 x 8 = ____
b) 3 x 3 = ____
c) 5 x 2 = ____
d) 7 x 4 = ____
e) 4 x 4 = ____
f) 7 x 2 = ____
g) 2 x 2 = ____</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não houve alterações.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora (2019)

A respeito dos decimais, uma professora comentou: “trabalhar essa questão do não inteiro com as crianças, em qualquer série, é uma discussão muito rica.” Observamos que essa questão possibilita iniciar uma discussão que abordará vários conceitos valiosos para formação do pensamento matemático da criança. Ao elaborar a tarefa não tínhamos o objetivo de abordar números decimais, no entanto o professor que desejar pode explorar também este tema. Ao trabalhar a divisão de 9 por 2, por exemplo, pode-se abordar o fato do resto 1 que na expressão pode ser registrado como $9 \div 2 = 4 + \frac{1}{2}$, pois o que sobrou foi uma parte de duas.

Outra questão levantada, foi a respeito da importância de levar os alunos a perceberem que a resposta depende da situação, por exemplo: em um resgate de helicóptero, em que 9 pessoas se acidentaram e o helicóptero só pode carregar duas pessoas por vez, a resposta para $9 \div 2$ será 5, pois mesmo que seja para buscar apenas uma pessoa o helicóptero terá de realizar a quinta viagem. Concluímos com esta discussão que é interessante que os professores discutam as diferentes respostas que os alunos possam dar.

O item *b* da questão 1, direciona a criança a utilizar a peça branca para completar o comprimento que falta, uma sugestão dada foi de acrescentar um item que diga para fazer o mesmo com peças vermelhas, direcionando assim o trabalho para os decimais. Para esta dissertação optamos por manter da forma que estava, pois não pretendemos aprofundar o assunto com os decimais e sim trabalhar o quociente e o resto, essa foi uma escolha da autora para trabalhar com divisão.

No item *c*, em que os alunos devem registrar uma expressão numérica que represente o que foi feito com a Escala Cuisenaire o professor pode discutir várias possibilidades, mesmo que elas não tenham partido dos alunos. A questão 2 pede que os alunos resolvam as multiplicações utilizando o material se acharem necessário, alguns alunos vão conseguir fazer sem apoio do material; e mesmo nesses casos, na discussão dessa questão as professoras concluíram que é importante abordar, com todos os alunos, como isso seria feito com a Escala Cuisenaire. Com esse procedimento os alunos podem perceber que 3 peças verdes juntas têm o mesmo tamanho da peça azul de ponta a ponta, pois 3 x 3 = 9. A questão 2 da tarefa 17 também pode ser associada à multiplicação.

Com relação à tarefa 17, discutimos as resoluções e optamos por alterar a apresentação da tarefa, deixamos então a imagem da representação do número 15 formado com a Escala Cuisenaire como comando geral da tarefa e separamos os itens a, b, c e d em questão 1 e os itens e, f e g em questão 2.

Quadro 19 – Tarefa 17

Versão inicial	Versão final
 1) Observe o número que está representado no desenho abaixo utilizando as peças da Escala Cuisenaire: a) Que número é este? ____ b) Se eu fizer este número apenas com peças verde-claro, quantas peças vou utilizar? ____ c) Registre o que você fez com uma divisão: d) Registre o que você fez com uma multiplicação: e) Você consegue representar este número utilizando apenas peças pretas? ____ f) Quantas peças pretas podemos utilizar para chegar mais próximo deste comprimento, e qual outra peça será necessário para completá-lo? g) Registre novamente o que faz utilizando uma divisão:	 Observe o número que está representado no desenho abaixo utilizando as peças da Escala Cuisenaire) Que número é este? ____ a) Se eu fizer este número apenas com peças verde-claro, quantas peças vou utilizar? b) Registre o que você fez com uma divisão: c) Registre o que você fez com uma multiplicação:) Você consegue representar este número utilizando apenas peças pretas? ____ a) Quantas peças pretas podemos utilizar para chegar mais próximo deste comprimento, e qual outra peça será necessário para completá-lo? b) Registre novamente o que faz utilizando uma divisão:
Justificativa: Separar os enunciados com comandos diferentes, enumerando-os.	

Fonte: a autora (2019)

3.2 Aplicação das tarefas nas escolas

Depois que as tarefas foram validadas no GEAMAI, as tarefas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 foram aplicadas em uma turma de 1º ano nas duas escolas, e nos relatos que seguem algumas tarefas descritas são referentes ao Colégio de Aplicação Pedagógica da UEL Professor José Aloísio Aragão – EI, EF, EM e Profissional e outras à Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca. Já no primeiro dia, muitas professoras da escola se interessaram em participar e foram observar a aula; foram levadas três tarefas para que os alunos realizassem naquele dia, as tarefas 1, 2 e 3. Ao iniciar o trabalho foi possível perceber que os alunos se interessaram muito pelo material. No tempo que foi dado para que eles explorassem as peças livremente, os alunos brincaram e fizeram construções de casas e grandes portões por 20 minutos, como mostra a Figura 11, porém para eles o tempo não foi suficiente. Ressaltamos neste ponto, a importância de deixar um tempo maior para que os alunos manuseiem livremente o material, para que depois tenham interesse em realizar as tarefas. Esse fato já tinha sido alertado no estudo dos autores, Rêgo e Rêgo (2006) enfatizam que “dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente)” (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 54) é um dos cuidados que os professores devem ter ao utilizar qualquer material.

Figura 1110 - Brincando com a Escala Cuisenaire

Fonte: a autora (2019)

Como citado anteriormente, algumas professoras da escola foram assistir a aula, uma delas observou que um aluno ao construir a base para uma casa que estava montando com as peças, escolheu peças do mesmo tamanho para que a estrutura da casa não desmoronasse. Até o aluno considerado o mais agitado da sala, de acordo com a professora regente[25], se interessou tanto pelas peças que não quis conversar com ninguém, só queria brincar com o material. Despois de brincar por um tempo foi então iniciada a tarefa 1, antes de começar pedimos que eles separassem as peças que se encontravam em suas mesas em grupos, da maneira que achassem melhor. Neste momento queríamos que percebessem as diferenças de cores e tamanhos, que as mesmas cores possuem os mesmos tamanhos, durante todo o processo a professora passou pelos grupos questionando os alunos, para ajudá-los a compreender diversos conceitos matemáticos, entre eles: maior, menor, ordem crescente e decrescente, observação de padrões e classificação.

[25] Este relato se refere ao Colégio Aplicação.

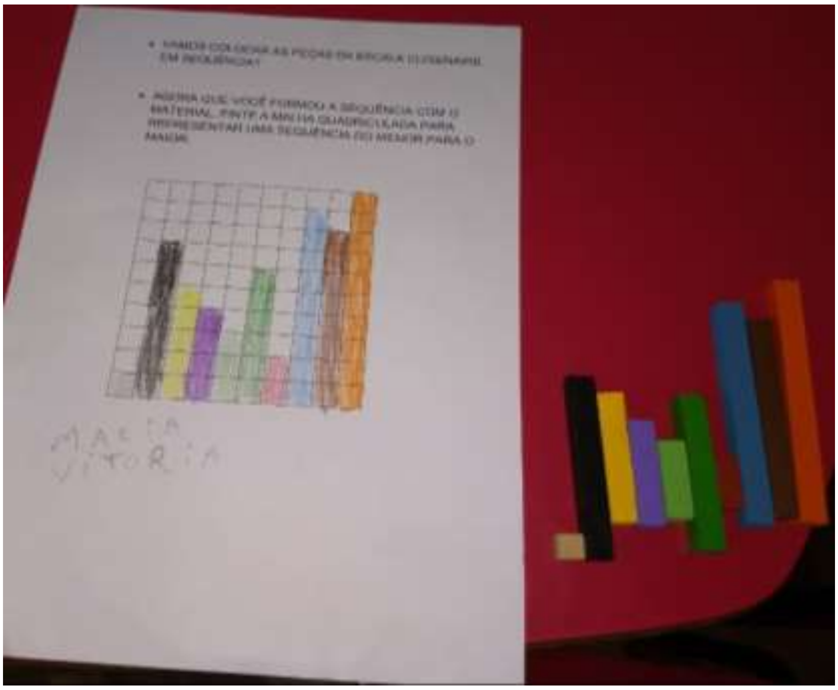
O problema mencionado a respeito das caixas de Material Cuisenaire, que vieram com defeito não foi relevante para os alunos, apenas uma aluna percebeu a diferença no tamanho, então solicitamos que ela buscasse as peças que se aproximava mais do tamanho que ela desejava, e ela resolveu o problema facilmente. Ao realizar a primeira parte da tarefa que pedia que pintassem as peças de cada grupo de acordo com as cores da Escala Cuisenaire, os alunos questionaram a respeito da peça branca, dissemos para deixar branco ou pintar da cor que mais se aproximava da cor de madeira, então cada um decidiu o que fazer.

Depois de realizar a primeira parte da tarefa, foram escritas as perguntas no quadro e feita a leitura para que eles compreendessem o que deveriam fazer, na pergunta que dizia "Qual grupo possui as maiores barras?" um aluno se confundiu, entendendo o termo maiores como mais, assim respondeu que nenhum grupo possuía mais barras, todos tinham 4. É comum nesta fase acontecer este tipo de confusão, e neste momento o professor pode aproveitar a oportunidade para retomar com todos os alunos o significado de maior, menor, mais e menos. Neste primeiro dia os alunos realizaram apenas a primeira tarefa.

Em um outro dia foi aplicada a tarefa 2 , pudemos perceber que conforme foram fazendo as outras tarefas os alunos levavam menos tempo para realizá-las, talvez por estarem mais habituados ao material. Nesta tarefa os alunos deveriam colocar as peças em sequência, em um primeiro momento da maneira que achassem melhor e depois em ordem crescente. Ao colocar em ordem crescente os alunos deveriam pintar a malha quadriculada para representar esta sequência, a maioria não apresentou dificuldade, alguns fizeram a sequência da esquerda para direita outros de cima para baixo. Outros alunos se confundiram e pintaram a malha já na primeira sequência, sem nenhuma ordem, e outros fizeram na ordem crescente, mas deixaram algumas peças de fora. Novamente, neste dia, foi realizada apenas esta tarefa, pois durante todo o tempo a professora ia questionando os alunos.

A Figura 12 traz a resolução de uma aluna do 1º ano do Colégio Aplicação, ao realizar esta tarefa ela colocou as peças em sequências sem estabelecer nenhuma ordem.

Figura 1211 - Resolvendo a tarefa 2



Fonte: registros dos alunos (2019)

A tarefa 3 foi aplicada em um terceiro momento, e nesta tarefa os alunos deveriam encontrar a peça que estava faltando na sequência, eles realizaram a tarefa sem muita dificuldade, apenas na hora de desenhar a peça na sequência é que alguns precisaram de ajuda. O professor deve ler todas as tarefas para os alunos e ajudar sempre que for solicitado, quando não, pode deixar que os alunos tentem resolver a tarefa sozinhos. Até o momento da tarefa 3, nenhum aluno relacionou o tamanho das peças com os números.

A realização das tarefas 4, 5 e 6 se deu no quarto dia, e foi utilizado todo o tempo, do início ao fim da aula, que começa às 13 horas e termina às 17 horas. A tarefa 4 despertou o interesse dos alunos por ser muito colorida, eles realizaram com muita empolgação. Esta tarefa solicitava que os alunos colocassem as peças brancas na parte superior dos trens e contassem quantas utilizavam em cada trem. Algumas crianças optaram por desenhar as divisões para representar as peças brancas para só depois contar.

Na tarefa 5, alguns alunos estavam comparando o tamanho dos trens com as peças da Escala Cuisenaire e encontrando a que melhor se encaixava, como essa não era a proposta desta tarefa foi solicitado que mudassem de estratégia e contassem quantas janelas o trem possuía e tentassem lembrar da tarefa anterior. Depois da aplicação das tarefas ao analisar como foram realizadas, percebi meu erro na condução dessa tarefa, estava esperando que as crianças fizessem de um jeito e acabei direcionando-as a isso e deixando de lado a estratégia delas.

As tarefas 7, 8 e 9 foram testadas em uma turma de 2º ano do Colégio Aplicação e em uma turma de 2º ano da Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca, depois de serem discutidas com as professoras do GEAMAI e reelaboradas. A aplicação foi realizada em dois dias do período das 13 horas às 16 horas. Como era o primeiro contato dessa turma com a Escala Cuisenaire, deixamos a primeira hora apenas para a manipulação livre do material e depois desenvolvemos a tarefa 7. Os alunos foram divididos em grupos de quatro crianças para a realização das tarefas, cada um recebeu uma cópia das tarefas para fazer o registro de maneira individual.

Durante a manipulação, os alunos se mostravam encantados com o material, construíram casas, fogueiras, castelos, celeiros e móveis com as peças. Como combinado com as crianças no início da aula, depois que o tempo para “brincar” terminou, iniciamos a tarefa 7. Pedi que pegassem uma peça de cada cor, para que pudessem observar todas as cores de peças que o material possui.

Todas as questões foram lidas em conjunto porque alguns alunos, nesta série, ainda não estão totalmente alfabetizados, as crianças que encontraram dificuldade em escrever o nome da cor que era a resposta, optaram por pintar para registrar a resposta. Depois de realizarem a segunda parte da tarefa 7 (Figura13), foi feito o registro das cores das peças e dos números de cada uma no quadro e comparado todas com a peça branca para conferir os resultados.

No segundo dia foram aplicadas as tarefas 8 e 9, como já havia se passado 15 dias da aplicação das tarefas 7, deixamos 20 minutos de manipulação livre. No início exploramos novamente o número atribuído a cada peça, primeiro com perguntas para ver de quais eles lembravam, depois comparando as demais peças da Escala Cuisenaire com a branca. Ao realizar a tarefa 8, fui passando nos grupos e as crianças explicaram como estavam fazendo, ao serem questionadas se estava mesmo dando o comprimento nove, as crianças já concluíam que estavam fazendo errado, o objetivo da pergunta era apenas que conferissem suas respostas.

Figura 1312 - Aluna 2º ano

Fonte: a autora (2019)

A maioria dos alunos fez a representação dos números da tarefa 9 utilizando a peça laranja (que representa o 10) e o seu complemento para o número solicitado. Vários alunos apresentaram dificuldade em registrar as adições na horizontal, estavam mais habituados com as operações na vertical.

As tarefas 10, 11, 12 e 13 foram testadas no terceiro ano na Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca, em um único dia das 7h30 às 11h30. Elas também foram trabalhadas no Colégio Aplicação em três dias, isso ocorreu pois o período utilizado em cada dia de uma hora e meia.

Antes de iniciar as tarefas conversamos a respeito do que iríamos fazer. Como foi o primeiro contato destes alunos com a Escala Cuisenaire, no começo foi reservado tempo para manipulação livre. Os alunos foram colocados em grupos com 4 ou 5 crianças, cada grupo recebeu uma caixa grande do material. E durante este primeiro momento de manipulação livre, as crianças fizeram construções, usaram as peças para escrever palavras e dividiram as peças entre si, realizando trocas de acordo com a cor e tamanho. Alguns alunos denominaram a peça branca de “quadradinho”, questionei se isso era realmente um quadrado, eles concluíram que era no formato de uma caixa, discutimos a diferença entre quadrado e cubo.

Ao iniciar a tarefa 10 (Figura 14), os alunos realizaram a leitura individualmente e logo depois fizemos a leitura coletiva, a questão 1 era aberta, o que gerou várias discussões sobre o que deveriam escrever. Cada grupo discutiu entre si, mas cada criança elaborou sua própria resposta, apenas em um grupo os alunos fizeram a resposta coletivamente. Os alunos concluíram que a questão 1 da tarefa 10 era mais difícil que a 2, por isso, alguns deixaram ela por último, foi uma estratégia interessante, pois, ao responderem à questão 2 eles tiveram mais ideias para o texto da questão 1.

Os alunos apresentavam entusiasmo ao realizar a tarefa 11, por exigir que colorissem para representar as peças. Cada grupo elaborou sua própria estratégia para responder, uns foram montando as possibilidades com as peças e já colorindo, enquanto outros montaram todas as possibilidades que encontravam e depois pintaram tudo de uma vez. Alguns apresentaram dificuldades na questão 2 por conta das restrições, a questão 3 foi facilmente respondida, e ao final exploramos as adições que eram representadas no quadro.

Figura 14 - Aluno 3º ano

Fonte: a autora (2019)

A tarefa 12 foi desenvolvida depois do intervalo, os alunos realizaram a primeira parte da maneira independente, sem dificuldades. Para resolver a questão 2, os alunos tiveram mais dúvidas e utilizaram a Escala Cuisenaire como apoio, outros não sentiram necessidade e fizeram os cálculos mentalmente.

No início da tarefa 13 alguns alunos estavam apenas achando as peças que se encaixavam nos retângulos desenhados, e foi necessário ressaltar que era para encontrar a peça que completava, deixando as duas linhas com o mesmo comprimento.

As tarefas 14 e 15 foram aplicadas no 4º ano na Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca, como foi o primeiro contato com a Escala Cuisenaire deixamos um tempo para explorarem o material (Figura 15), mesmo com as crianças maiores a curiosidade quanto ao material é grande, eles demonstraram bastante interesse. Para realizar as tarefas iniciamos explorando o material quanto as cores e tamanhos, depois de comparar as outras peças com as peças brancas foi feito o registro dos números que equivalem a cada peça no quadro, abordamos também como realizar a construção de um tapete.

Novamente, as tarefas foram realizadas em grupos de 4 crianças, cada aluno realizou a leitura da tarefa que também foi feita coletivamente, alguns alunos apresentaram dificuldade com a tarefa 14 ao realizarem o registro das expressões matemáticas. Após algumas perguntas a respeito do número que cada peça representa, a palavra juntar fez com que algum dissessem “mais” e aí escreveram corretamente a expressão.

Figura 13 - Alunos 4º ano

Fonte: a autora (2019)

Na questão 1 da tarefa 15, a letra *a*, foi resolvida facilmente, já para resolver letra *b* foi necessário mais tempo para que discutissem e encontrassem outras peças em que a diferença de tamanho era a peça vermelha. Com a questão 2 conseguiram perceber facilmente que os resultados eram os mesmos, mas apenas dois alunos perceberam que para passar da letra *a* para a letra *b* tínhamos subtraído 2 de cada parcela, exploramos as subtrações dessa questão no quadro e também algumas outras que são equivalentes. Na questão 3 todos conseguiram perceber que a subtração de João estava correta, alguns não conseguiram explicar o porquê, os alunos que responderam à questão foram ao quadro expor aos colegas sua resposta, isso ajudou na compreensão para aqueles que estavam com dificuldades.

A aplicação das tarefas 16 e 17 ocorreu em uma turma de 5º ano da Escola Municipal Professora Sandra Maria Pereira Alves da Fonseca, os alunos ainda não conheciam o material, e por este motivo destinamos meia hora para que manipulassem o material e, antes das tarefas, exploramos as características da Escala Cuisenaire, relacionando cada peça a um determinado número, fazendo a comparação com a peça branca.

A tarefa 16 se iniciou com a discussão de quantas peças vermelhas eram necessárias para completar o comprimento de uma azul, a maioria respondeu 4, alguns colocaram a peça branca para completar. Alguns alunos, ao registrarem as expressões matemáticas, apresentaram dificuldade em escrever as operações na horizontal, alguns escreveram com palavras ao invés de colocar a expressão matemática, estes alunos foram auxiliados individualmente e também exploramos as expressões no quadro, para que todos tirassem suas dúvidas. As crianças optaram por resolver a questão 2 sem o auxílio da Escala Cuisenaire, por isso ao final abordamos a resolução de todas as multiplicações com o material manipulável, para que compreendessem como fazê-lo.

Para resolver a tarefa 17 (Figura 16) os alunos discutiram suas soluções em grupo, não apresentaram dificuldades quanto à questão 1; na questão 2, mesmo que a pergunta a respeito das peças pretas estavam separadas, os alunos confundiram se deveriam escrever a divisão utilizando as pretas ou as verdes (a questão 1 deveria ser feita com as peças verdes e a questão 2 com as peças pretas). No total utilizou-se duas horas para completar todas as tarefas, os alunos se mostraram interessados pelo material e pelas tarefas.

Figura 16 - Alunas 5º ano

Fonte: a autora (2019)

Capítulo 4

Refletindo a respeito das tarefas.

4.1 Contagem

Cebola (2002) faz uma síntese das características associadas ao sentido de número que devem ser exploradas durante o ensino básico, entre elas estão as múltiplas utilizações do número. Uma dessas utilizações é a do número como cardinal, ou seja, como aquilo que permite descrever a quantidade de elementos de um conjunto, e para a autora essa é uma das definições elementares de número (CEBOLA, 2002). Desenvolver tarefas que levem os alunos a compreender a cardinalidade dos números auxiliará na construção do sentido de número, mas quantificar objetos de um conjunto, pelas definições de sentido de número, não é suficiente para desenvolvê-lo.

Cebola (2002) menciona que o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) definiu sentido de número como “uma intuição acerca dos números, traçada a partir de todos os significados que estes possam ter” (CEBOLA, 2002, p. 224).

Para Kammi (1982) “O número é a relação criada mentalmente por cada indivíduo” (KAMMI, 1982, p. 15). A autora cita ainda que para Piaget, o número “é uma síntese de relações que a criança elabora entre os objetos. Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica” (KAMMI, 1982, p. 19). Para realizar a contagem de objetos de um grupo, por exemplo, a criança precisa estabelecer uma ordem em que contará os objetos; antes de estabelecer estas relações, as crianças contam o mesmo objeto duas vezes ou pulam alguns objetos. Já a inclusão hierárquica diz respeito à compreensão de que o número em que ela para a contagem diz respeito ao todo do grupo e não àquele elemento específico em que ela parou.

Os objetivos referentes à contagem de elementos de um determinado conjunto podem ser trabalhados com a Escala Cuisenaire, por meio das tarefas 1, 4 e 5. Na tarefa 1 esta ideia é trabalhada apenas na pergunta “quantas peças há em cada grupo”, cada grupo representado nessa tarefa possui apenas quatro peças. Já na tarefa 4 (Figura 17) esta ideia é mais focada na contagem das peças brancas necessárias para formar as janelas dos trens. Com esta tarefa a criança pode estabelecer as relações de ordem e inclusão hierárquica citadas anteriormente. É importante salientar que as crianças devem preencher o trem de ponta a ponta com as peças brancas pois queremos preencher todo o seu comprimento com as janelas.

Ao iniciar esta abordagem em que os alunos vão relacionar as peças com números naturais de 1 a 10, estamos entrando na fase quantitativa do trabalho com a Escala Cuisenaire, apesar do material enfatizar a ideia de comprimento, ao realizar a comparação das peças maiores com a peça branca, para estabelecer qual número cada uma irá representar, a criança estará realizando uma experiência de contagem, de acordo com Gattegno (1960) as peças são discretas e podem ser contadas.

Figura 1714 - Resolução tarefa 4

Fonte: registro dos alunos (2019)

Na tarefa 5 (Figura 18) os alunos devem contar as janelas (peças brancas) dos trens para associar ao comprimento das outras peças da Escala Cuisenaire e colorir os trens corretamente, as contagens aqui são de números menores do que dez, pois no maior trem (laranja) cabem dez janelas (peças brancas de ponta a ponta).

Figura 18 - Resolução tarefa 5

Fonte: registro dos alunos (2019)

4.2 Sequências

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o primeiro contato dos alunos com a álgebra é no trabalho com sequências. No currículo os conteúdos referentes as sequências fazem parte do primeiro ao quarto anos do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, no primeiro e segundo anos observa-se os padrões figurais e numéricos, sequências recursivas e repetitivas. Já no terceiro ano deve-se trabalhar com a identificação e descrição de regularidades e no quarto ano recomenda-se o trabalho com sequência numérica recursiva formada por múltiplo de um número ou números que deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número natural diferente de zero. Este conteúdo é trabalhado em praticamente todos os anos de escolaridades do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, mas em cada etapa pretende-se alcançar objetivos diferentes que serão necessárias para formação do pensamento algébrico.

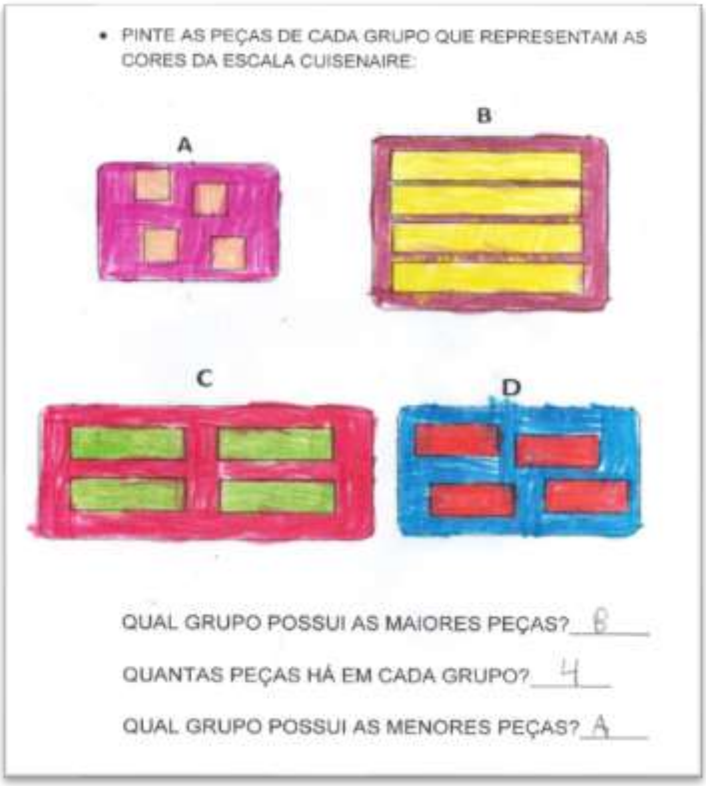
De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009) o trabalho com sequências auxilia no desenvolvimento do sentido de número e na formação de uma base para sua capacidade de generalização. Os autores dizem ainda que “ao longo de toda a escolaridade, a análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínios envolvendo relações” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 40). As tarefas apresentadas neste estudo, preparadas para desenvolver o trabalho com sequências, se enquadram nos objetivos referentes a este conteúdo do 1º, 2º e 3º anos não abordamos aqui o conceito de múltiplos ou mesmo divisão.

Quando falamos sobre sequência, este termo se refere a dar continuidade a algo, em matemática podemos observar sequências numéricas ou figurais, que apresentam regularidades que nos permite saber quais serão os próximos termos. Ao mesmo tempo que desenvolve o pensamento algébrico também ajuda a desenvolver o conceito de número.

As sequências podem ser recursivas ou repetitivas, sequências repetitivas são aquelas que apresentam termos que se repetem em um determinado ciclo. Já as sequências recursivas, são aquelas em que um termo depende do anterior, como as que adicionamos 2 a cada termo ou subtraímos 3 a cada termo, elas podem ser finitas ou infinitas. As tarefas têm por objetivo desenvolver o trabalho com sequências recursivas e finitas. No primeiro ano do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, ao trabalhar com padrões figurais e numéricos, pretende-se: organizar e ordenar objetos familiares de acordo com suas características (cor e tamanho).

Antes de iniciar a tarefa 1 (Figura 19) pedimos que os alunos separassem as peças da Escala Cuisenaire, não foi dada nenhuma orientação sobre como deveriam fazer, e assim pudemos notar quais critérios os alunos utilizariam. Em um segundo momento pedimos que separassem por cor e observassem se havia outras características comuns às peças, e então a tarefa 1 que solicitava que pintassem das cores da Escala Cuisenaire as peças que estavam representadas por figuras. Esta tarefa se encaixa na habilidade referente ao primeiro ano. Os alunos organizaram as peças utilizando atributos como cor e tamanho, mas vale ressaltar que pode também ser trabalhada em outras etapas do ensino, conforme o professor achar necessário.

Figura 19 - Resolução tarefa 1



Fonte: registro dos alunos (2019)

A tarefa 2 (Figura 20) permite alcançar o objetivo: utilizar uma regularidade para construir sequências em ordem crescente ou decrescente. Para completar esta tarefa, os alunos devem utilizar uma peça de cada cor da Escala Cuisenaire para formar uma sequência crescente, alguns inicialmente esquecem-se de alguma cor de peça, mas ao colocá-las em sequência notam que, se uma estiver faltando, a diferença de tamanho entre as peças ficará diferente. Quando as colocamos em ordem crescente, cada peça de 1 a 10 possui a diferença de uma peça branca com a que está ao seu lado.

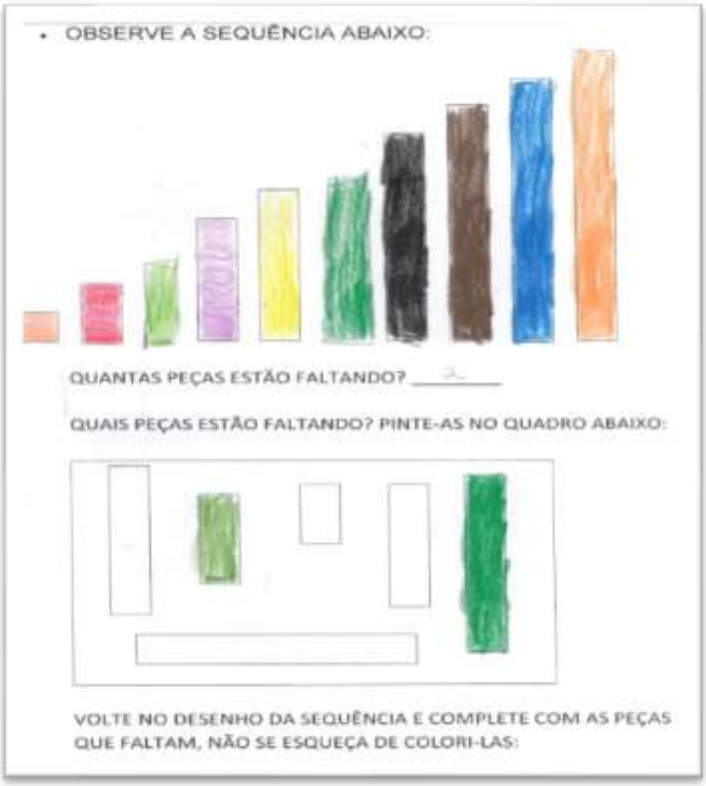
Figura 20 - Resolução tarefa 2

Fonte: registro dos alunos (2019)

Descrever os elementos ausentes em sequências recursivas formadas com as peças da Escala Cuisenaire, é um dos objetivos referentes ao conteúdo: Identificação de regularidades em sequências e determinação de elementos ausentes na sequência, que são elencados para o 2º ano.

Na tarefa 3 (Figura 21) os alunos encontram uma sequência crescente das peças da Escala Cuisenaire representada por figuras, em que duas peças estão faltando. Para identificar as peças que faltam, alguns alunos necessitam montar toda a sequência com o material manipulável, já outros não, mesmo estando fora da sequência, conseguem identificar o tamanho da peça que está faltando, já que ela é uma unidade maior do que a anterior. Nesse caso o aluno já percebeu que a cada peça colocada na sequência crescente, a regularidade é que se aumenta uma unidade (peça branca) ao seu tamanho. Com essas tarefas explora-se a visão e a manipulação do material, ou seja, o ver relacionado com o fazer, como apontado por Cuisenaire, ao perceber a sequência formada com as peças e manipulá-las, a criança é capaz de perceber os elementos que faltam e também as suas diferentes características.

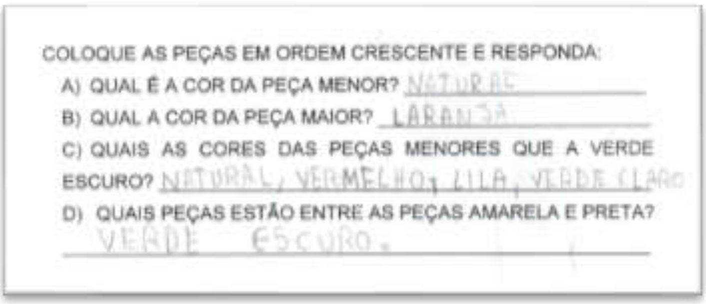
Figura 2115 *- Resolução tarefa 3*



Fonte: registro dos alunos (2019)

Na questão 2 das tarefas 7 (Figura 22) e 10, solicita-se que os alunos coloquem as peças em ordem crescente e respondam algumas perguntas. As duas questões são similares.

Figura 22 - Resolução tarefa 7 (questão2)



Fonte: registros dos alunos (2019)

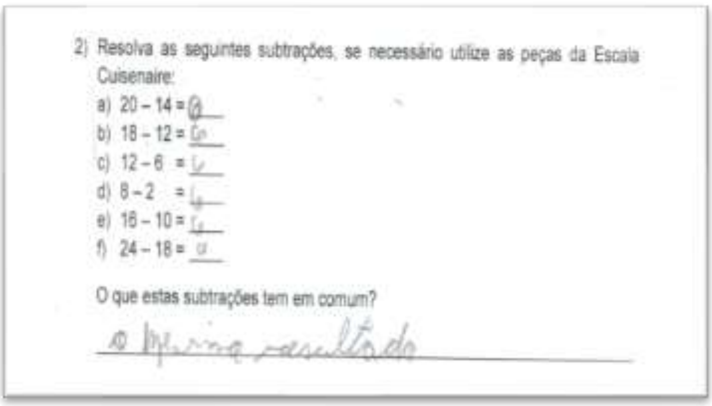
A tarefa 7 pode estar mais voltada para alunos de 1º ou 2º anos e a tarefa 10 pode ser utilizada com 3º, 4º ou 5º anos para iniciar o trabalho com a Escala Cuisenaire quando os alunos ainda não conhecem o material. Na tarefa 10 há uma pergunta em que os alunos devem registrar qual é a diferença de uma peça para a seguinte se colocarmos em ordem crescente, a Figura 23 mostra a estratégia de uma aluno do 3º ano para resolvê-la. Com estas tarefas o aluno pode reconhecer uma regularidade em sequências recursivas e descreve-las. Ao explorar as características da Escala Cuisenaire, como se faz na tarefa 7 e também nas 1 e 10, estamos na fase qualitativa do trabalho com a Escala Cuisenaire, essa fase é importante para desenvolver a visão e preparar o caminho para a percepção mental.

Figura 23 - Estratégia para responder a tarefa 10

Fonte: registro dos alunos (2019)

A tarefa 15 (Figura 23) pode ser trabalhada no 3º, 4º ou 5º anos, o professor decidirá com quais alunos desenvolvê-las, dependendo das necessidades de sua turma. Nesta tarefa, em geral, se propõe o trabalho com subtrações equivalentes, no entanto especificamente na questão dois, os alunos devem observar as regularidades do que está acontecendo com as subtrações.

Figura 24 *- Tarefa 15*



2) Resolva as seguintes subtrações, se necessário utilize as peças da Escala Cuisenaire:

a) 20 – 14 = 6

b) 18 – 12 = 6

c) 12 – 6 = 6

d) 8 – 2 = 6

e) 16 – 10 = 6

f) 24 – 18 = 6

O que estas subtrações tem em comum?

o mesmo resultado

Fonte: registro dos alunos (2019)

Pretende-se que os alunos observem que além de todas as subtrações terem o mesmo resultado, foi adicionada ou subtraída a mesma quantidade dos dois termos da subtração. Por exemplo, para passar do item *a* para o item *b* foi subtraído 2 de cada termo, obtendo assim o mesmo resto nas duas operações. As subtrações em si não formam uma sequência pois de um item para o outro não foi somado ou subtraído sempre o mesmo valor, mas aqui os alunos podem perceber a cada dois itens a recursividade que foi aplicada para obter a próxima subtração.

4.3 Composição e Decomposição de números naturais

A Escala Cuisenaire pode ajudar a compor e decompor números por meio de diferentes adições. Esse objetivo se refere à Composição e Decomposição de números naturais, grande parte das tarefas desse estudo colaboram nesse sentido. Este tópico é abordado do 1º ao 4º anos do Ensino Fundamental - Anos Iniciais.

A palavra composição diz respeito à constituição de um todo, ou seja, quando falamos em composição de números naturais esse todo é o número, e sua constituição tem como base as partes. Quando resolvemos a expressão 5 + 2, por exemplo, e concluímos que é equivalente a 7, estamos realizando a composição deste número. Já quando tratamos da decomposição de números naturais, partimos do todo e separamos as partes que o formaram, partindo do número 7 podemos realizar sua decomposição de diversas formas e uma delas é utilizando a expressão 5 + 2. Ou seja, quando resolvemos a operação de adição estamos compondo e decompondo este número, escrevendo este mesmo número de maneiras diferentes.

Ao falar do sentido de número e suas representações Cebola (2002) define a decomposição como “o modo de expressar um número de diferentes formas, todas elas equivalentes, e que resultam de reconhecer como esta nova notação facilita a operação com os números recompostos” (CEBOLA, 2002, p. 226).

Podemos compor e decompor um número em fatores primos, na base dez e também em outras bases, com multiplicações, soma de potências ou simplesmente de uma maneira que seja pertinente para ajudar na resolução de um problema. Ao trabalhar com este objeto de conhecimento, está presente o conceito de equivalência e representação. Ponte (2006) afirma que decompor números é uma capacidade necessária para desenvolver o sentido de número.

No que diz respeito ao desenvolvimento desses objetivos temos as tarefas 8, 9, 11, 12 e 14, que podem ser utilizadas em diferentes níveis da aprendizagem. Na tarefa 8, item1 (Figura 25), pede-se que o aluno represente, com a utilização das peças da Escala Cuisenaire o número 9, primeiro com uma peça e depois com duas, a representação é feita por meio da pintura do quadriculado que é proporcional ao tamanho de uma das faces das peças. Naturalmente surgirão diferentes formas de compor o número nove utilizando duas peças diferentes, como o espaço no quadriculado é grande, um mesmo aluno pode fazer isto de formas diferentes.

Figura 25 - Resolução tarefa 8 (questão1)

Fonte: registro dos alunos (2019)

Já no item 2 (Figura 26) da mesma tarefa, os alunos devem completar com a peça que está faltando e compor o número 7. Neste item são formadas todas as composições possíveis para este número utilizando duas peças, trabalhamos o 3 + 4 uma única vez, mas como a adição é comutativa, isso é equivalente a 4 + 3. Em todas as tarefas que os alunos constroem tapetes com a Escala Cuisenaire eles estão decompondo o número que utilizaram como base para o comprimento do mesmo.

Figura 2616 - Resolução tarefa 8 (questão2)

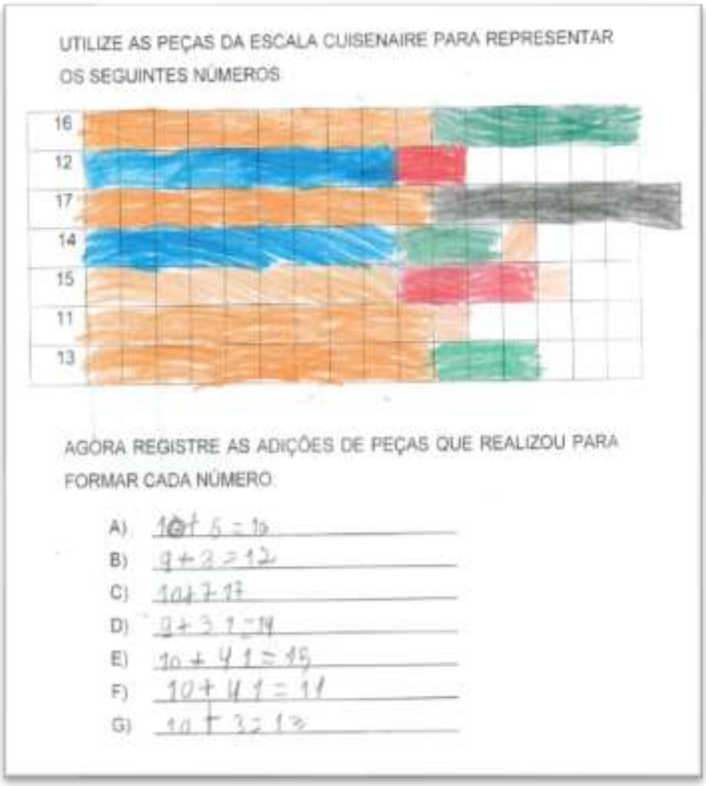
Fonte: registro dos alunos (2019)

A tarefa 9 traz a possibilidade que o material tem de trabalhar com números maiores do que dez, como as peças vão de 1 a 10, podemos explorar de diversas formas estes números, mas podemos também utilizar as diferentes peças para compor números maiores. Lembrando que as peças representam estes números quando atribuímos o 1 à peça branca.

Nesta tarefa as crianças devem compor alguns números maiores que dez e menores que vinte, como já estão habituadas ao sistema de numeração decimal, algumas já utilizaram a peça do número 10 (laranja) para todos os números, neste momento podemos retomar a base dez e também explorar as decomposições feitas com peças diferentes destas.

A Figura 27 mostra a solução de um aluno do 2º ano para esta tarefa, ele não utilizou a peça laranja apenas nos números 12 e 14. Ao realizar o registro das expressões matemáticas, quando utilizada mais de duas peças, por exemplo no 14, ele não utiliza mais um sinal de mais para separar os termos da soma, ficando 9 + 3 1 = 14, pode ser que isso tenha ocorrido porque alunos estejam mais habituados a escrever adições na vertical, quando fazemos dessa forma não precisamos colocar dois sinais de mais. Nesta tarefa a visão está relacionada com o fazer e com o calcular, além disso o trabalho com as notações, sejam elas por meio dos desenhos, pinturas ou das expressões matemáticas, fazem parte dos quatro estágios, que segundo Gattegno, as crianças passam até adquirirem domínio completo sobre o material. A junção da experiência, por tentativa e erro e o domínio das notações, caracterizam o terceiro estágio, as tarefas 9, 12 e 13, são exemplos de tarefas que devem ser trabalhadas com alunos que estejam nesse estágio.

Figura 27 - Resolução tarefa 9

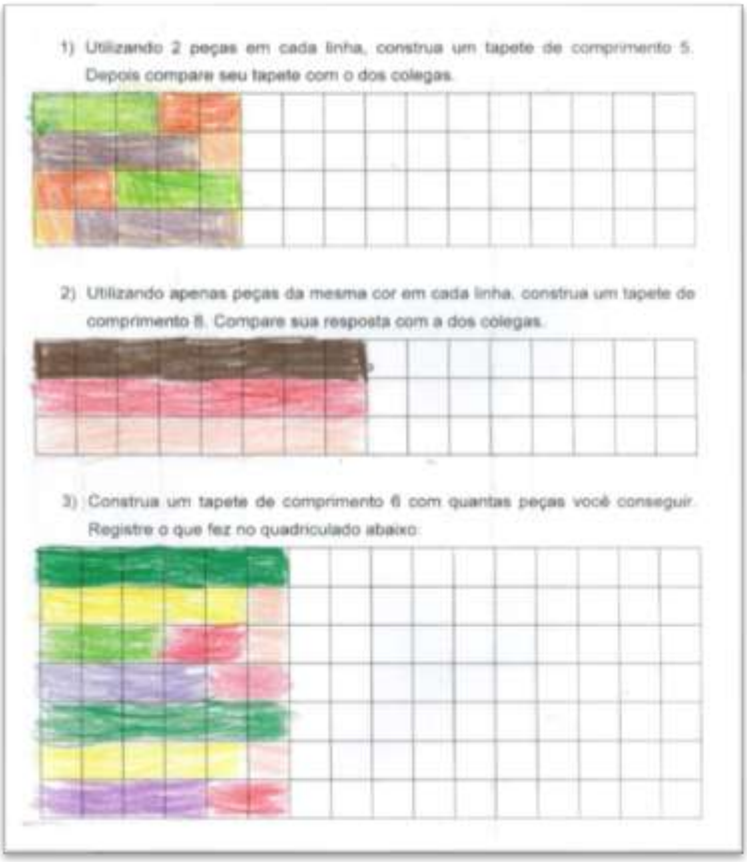


Fonte: registro dos alunos (2019)

As tarefas 11 e 14 desenvolvem a habilidade de compor e decompor de modo bem semelhante, no entanto na primeira exploramos comandos específicos (quantidade de peças, número a ser decomposto e cores a serem utilizadas); nela as expressões matemáticas são exploradas apenas no coletivo, para que as crianças conseguissem ver as possibilidades, diferentes da sua, que foram feitas por seus colegas. Na tarefa 14, a representação matemática é mais explorada e o número que será decomposto é diferente para cada grupo de criança, além de não haver restrições quanto à quantidade de peças a ser utilizada. Como o enunciado ficou em aberto quanto ao comprimento do tapete a ser construído, sugerimos que o professor designe um número para cada grupo para que os alunos não escolham apenas números pequenos, pois nestes as possibilidades diferentes são poucas.

Na resolução apresentada na Figura 28 a criança escreveu todas as possibilidades para a questão 1, 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1, essa tarefa foi aplicada em uma turma de 3º ano, abordamos o fato de a adição ser comutativa. O mesmo ocorreu na questão 2, as possibilidades possíveis são, 8 = 4 + 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, já na questão 3 fez apenas 4 decomposições diferentes e para preencher as linhas até o final, repetiu algumas.

Figura 28 - Resolução tarefa 11



Fonte: registro dos alunos (2019)

A composição é abordada no item 1 da tarefa 12 (Figura 29), em que se deve juntar as cores solicitadas e descobrir qual foi o número formado com essa adição. A malha quadriculada em que os alunos vão representar as peças já não é proporcional ao tamanho das mesmas, os alunos já devem estar habituados com o número que cada peça representa e colorir a quantidade de quadradinhos de acordo com este número. Aqui reforçamos a ideia de representação, tanto ao colorir o quadriculado quanto ao registrar a expressão matemática que mostra o resultado daquilo que foi feito.

Figura 2917 - Resolução tarefa 12 (questão1)

Fonte: resolução dos alunos (2019)

4.4 Relações de Igualdade

Desde o primeiro ano do Ensino Fundamental o aluno tem contato com relações de igualdade. No início esse contato se faz presente por meio de comparações, sem utilizar símbolos matemáticos para representá-las. O tema relações de igualdade, se encontra no currículo do 3º, 4º e 5º anos com os conteúdos: relações de igualdade, propriedades de igualdade e noção de equivalência.

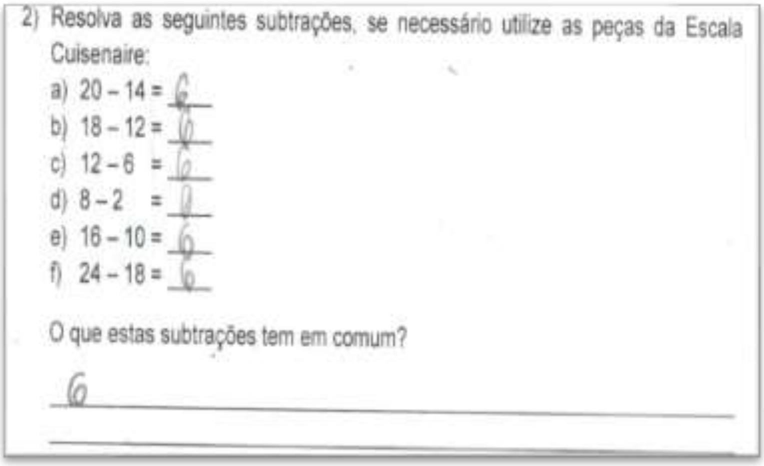
“Em Matemática, a noção de igualdade desempenha um papel fundamental, tendo um significado muito mais próximo de “equivalência” do que de “identidade” (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 19). Quando o autor se refere à identidade, trata-se de coisas idênticas, já a equivalência diz respeito a uma propriedade específica. As relações de igualdade possuem as propriedades de simetria, reflexividade e transitividade. Exemplificando a simetria com as peças da Escala Cuisenaire, se a peça verde equivale a 3, então 3 equivale a peça verde, isso relativa à propriedade que uma peça representa um determinado número quando atribuímos uma unidade a peça branca e comparamos o comprimento das outras com ela. É reflexiva pois amarelo = amarelo para todas as peças amarelas. A transitividade, se 2 vermelhos = 1 lilás e 1 lilás = 4 brancos então 2 vermelhos = 4 brancos.

O sinal de igual nos primeiros anos é utilizado normalmente para indicar uma operação matemática a ser realizada, é o que ocorre em algumas de nossas tarefas, por exemplo, tarefa 12 (item 1) e tarefa 15 (item 2). Há outras tarefas relacionadas às operações matemáticas, mas nestas, ao invés de “resolver” uma operação os alunos devem utilizar uma expressão matemática que envolvem as quatro operações para representar o que fez na manipulação do material.

Ponte, Branco e Matos (2009) salientam que não devemos perder o sentido mais geral do sinal de igual que é de estabelecer uma equivalência entre duas expressões. Os autores afirmam ainda que os alunos “podem investigar as diferentes decomposições dos números, usando expressões numéricas para as representar e observando a estrutura dessas expressões” (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 20). Este tipo de investigação é a abordagem das tarefas 9 e 14, nelas os alunos fazem a decomposição de alguns números de diferentes formas utilizando as peças da Escala Cuisenaire e depois representam o que fizeram com expressões matemáticas. Nas tarefas 8 e 11 é realizada a decomposição, mas não o registro das expressões matemáticas que as representam. Nas sugestões destas tarefas, sugerimos ao professor que explore as expressões coletivamente, mas nada impede que ele se aprofunde nesta discussão, se achar necessário, e até altere a tarefa como preferir. Com estas tarefas de decomposição, podemos compreender a ideia de igualdade para ser capaz de escrever expressões envolvendo adições e subtrações equivalentes.

O objetivo: reconhecer que ao somar ou subtrair a mesma quantidade a cada um dos termos de uma igualdade, a relação de equivalência permanece, é abordado na tarefa 15, questão 2, nas quais os alunos realizam várias subtrações e obtêm o mesmo resultado. Pretendemos aqui que os alunos percebam que o resultado não se altera devido ao fato de adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade de ambos os termos. A Figura 30 mostra a resolução de um aluno para essa questão, os resultados foram encontrados sem dificuldades, e foi fácil para eles perceberem que o que todas tinham em comum eram os resultados, na resolução deste aluno podemos notar que ele não identificou outras coisas em comum, como o fato de que de uma questão para a seguinte foi subtraído ou somado a mesma quantidade de cada parcela. Esta tarefa possibilita ao professor abordar propriedades das relações de igualdade, como a da transitividade, se $20 - 14 = 6$ e $24 - 18 = 6$ então podemos concluir que $20 - 14 = 24 - 18$.

Figura 30 - Resolução tarefa 15 (questão2)

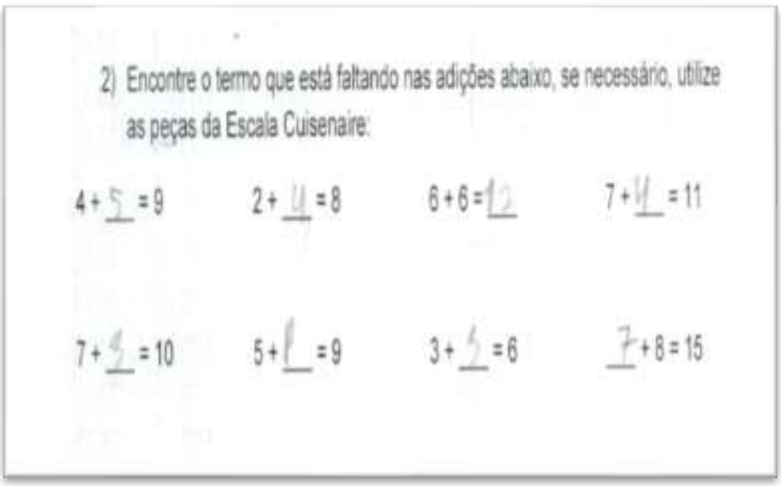


Fonte: resolução dos alunos (2019)

Com a questão 2 da tarefa 12 (Figura 31), os alunos podem determinar o termo desconhecido que torna a igualdade verdadeira, envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais. Na figura vemos que o aluno resolveu corretamente, no entanto na escrita ainda espelha alguns algarismos. Esta tarefa aborda o sentido mais geral de equivalência citado, aqui trabalhamos com equações matemáticas, o sinal de igual assume o papel de identificar "uma possível equivalência entre expressões para certos casos, ou seja, coloca a pergunta se as expressões dadas nos dois membros podem ser equivalentes, para algum valor de *x*" (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 22).

Ao ser capaz de realizar essa tarefa sem o auxílio do material, quando antes necessitava do mesmo como apoio, a criança já adquiriu domínio completo sobre o material, e é capaz de construir os padrões mentalmente.

Figura 31 - Resolução tarefa 12 (questão2)



Fonte: resolução dos alunos (2019)

4.5 Adição e subtração

As quatro operações fundamentais, adição, subtração, multiplicação e divisão são abordadas em todos os anos do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, no 1º ano ocorre o primeiro contato formal dos alunos com essas operações. Elencamos algumas objetivos que podem ser desenvolvidas com as tarefas utilizando a Escala Cuisenaire, e que estão relacionadas aos objetos de conhecimento que se referem as operações de adição e subtração: Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração, procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração e propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.

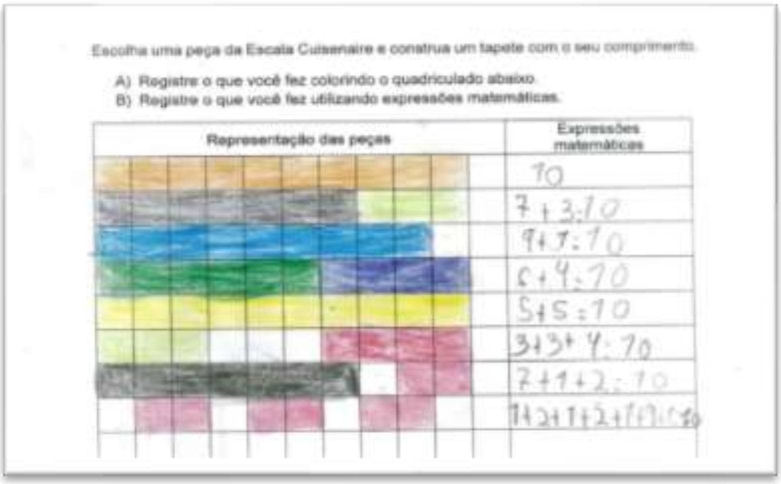
No 2º e 3º anos do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, pretende-se que os alunos realizem cálculo mental e escrito envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais. Pires e Gomes (2009) afirmam que "o trabalho com as quatro operações, nos anos iniciais, deve privilegiar os diferentes significados de cada uma delas e as relações entre as mesmas." (PIRES, GOMES, 2009, p. 81).

De acordo com as autoras, na adição estão presentes as ideias de "juntar" e "acrescentar", a diferença entre as duas é difícil de se notar, ela fica mais evidente quando observamos os procedimentos utilizados pelas crianças para resolverem uma adição (PIRES; GOMES, 2009). Quando realiza a operação juntando as partes, o aluno representa as duas parcelas e as contam sequencialmente, já quando acrescentam, eles iniciam a contagem partindo da quantidade que já tem na primeira parcela continuam até completar com a segunda para encontrar o resultado.

Outros objetivos relacionados a essa operação que podem ser desenvolvidos com estas tarefas são: Utilizar as relações entre a adição e a subtração e suas propriedades, a fim de ampliar suas estratégias de cálculo; reconhecer que a adição e a subtração são operações inversas.

As tarefas 8, 9, 11, 12 e 14 abordam a operação de adição, nestas tarefas já discutimos também a composição e decomposição de números naturais e as relações de igualdade que estão ligadas a esta operação.

Figura 3218 - Resolução tarefa 14



Fonte: resolução dos alunos (2019)

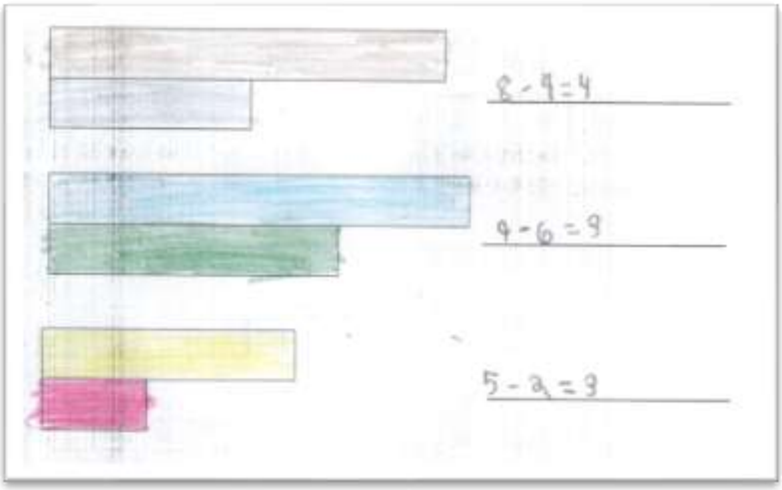
A tarefa 14 (Figura 32) trazia várias possibilidades para os alunos realizarem a decomposição dos numerais, no caso acima foi escolhido o número dez, na resolução o aluno fez algumas possibilidades que conseguiu pensar com 2, 3 ou mais parcelas. Ao realizar esta tarefa as crianças utilizam a ideia de acrescentar da adição, a cada linha eles escolhem uma peça e vão acrescentando outras até completar o comprimento da laranja. Na segunda linha por exemplo, ao colocar a peça preta a aluna acrescentou a verde para chegar ao dez, poderíamos escrever todas essas linhas do tapete utilizando também subtrações, no entanto ao testar a tarefa nenhum aluno pensou nesta possibilidade. Na última linha nota-se um padrão feito com as peças brancas e vermelhas, no entanto na hora de registrar 1 + 2 + 1 + 2 + 1+ 2 + 1 = 10 a criança se confundiu e registrou 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 9 + 1 = 10, isso pode ter acontecido porque, nessa parcela, a soma estava em nove.

Ao trabalhar com estas operações, abordamos algumas das ideias fundamentais como a equivalência, proporcionalidade, variação e representação. Pires e Gomes (2009) dizem que a operação de subtração envolve três ideias, a ideia de tirar, de comparar e de completar.

Ao trabalhar com a Escala Cuisenaire devemos explorar todas essas ideias, realizando discussões com os alunos sobre elas, Fiorentine e Miorim (1999) defendem que essas discussões são a parte mais importante ao se utilizar um material manipulável.

Com a Escala Cuisenaire podemos explorar as três ideias, a tarefa 13 (Figura 33) traz o desenho representando as peças do material uma abaixo da outra e solicita que os alunos encontrem a peça que completa o comprimento de uma para que fique com o mesmo comprimento da outra. Apesar de utilizar a palavra completar, não é apenas essa ideia que se pode explorar com essa tarefa, o aluno pode interpretar como comparar o tamanho das duas peças e encontrar a diferença, no caso da Figura 33 esse foi o raciocínio seguido. Outro que também pode aparecer (mas não foi o caso nas turmas de crianças em que testamos, isso foi verificado com as professoras do GEAMAI), é a ideia de tirar quando, ao registrar a expressão numérica escreve-se 9 – 3 = 6, estamos tirando a parte que ficou sobrando do material e ficando apenas com o comprimento que sobrou. Quando trabalhamos essa tarefa depois de ter abordado as decomposições e composições feitas em outras tarefas, de acordo com Cane (2017) as crianças que já tiverem internalizado os padrões serão capazes de perceber qual peça falta sem precisar colocá-las no espaço para testar.

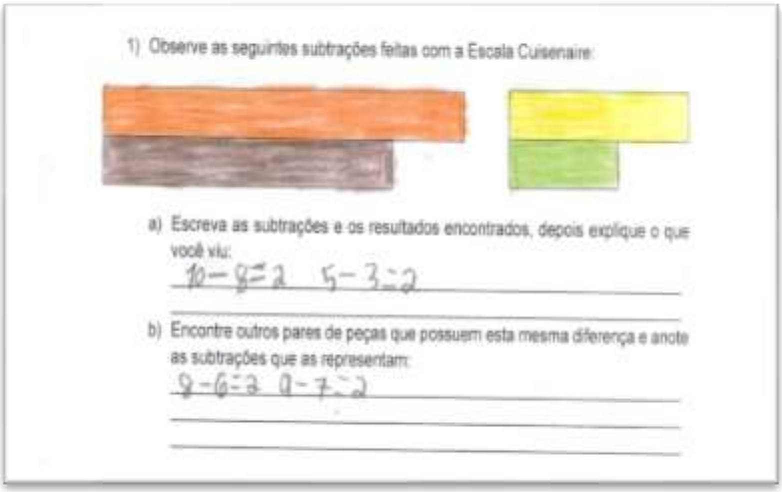
Figura 33 - Resolução tarefa 13



Fonte: resolução dos alunos (2019)

A tarefa 15 (Figura 34) tem por objetivo trabalhar com subtrações equivalentes. Para realizar a questão 1 item *b*, os alunos utilizaram a comparação das peças, na resolução da Figura 34, por exemplo, o aluno pegou a peça marrom e comparou com outras para ver qual delas tinha exatamente a peça vermelha como diferença de tamanho com relação a marrom. Ainda não pensaram em subtrair ou somar alguma quantidade as parcelas das subtrações do item a.

Figura 34 - Resolução tarefa 15 (questão1)


1) Observe as seguintes subtrações feitas com a Escala Cuisenaire:

a) Escreva as subtrações e os resultados encontrados, depois explique o que você viu:

10 − 8 = 2 5 − 3 = 2

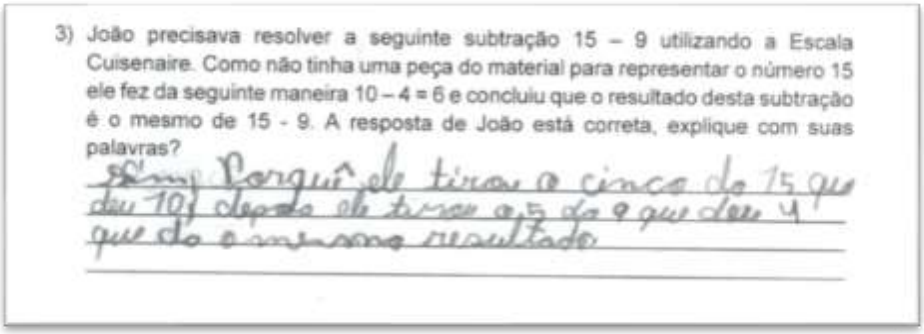
b) Encontre outros pares de peças que possuem esta mesma diferença e anote as subtrações que as representam:

8 − 6 = 2 9 − 7 = 2

Fonte: resolução dos alunos (2019)

A questão 2 (Figura 35) já foi discutida anteriormente quando tratamos de sequências e relações de igualdade, com uma mesma questão podemos explorar vários conceitos, ao trabalhar com subtrações equivalentes pretendemos que os alunos desenvolvam outras estratégias de cálculo que desenvolvam o cálculo mental. Depois de explorar a questão 2, as subtrações equivalentes ficaram mais claras para os alunos, que conseguiram compreender que poderiam somar ou subtrair a mesma quantia das parcelas e ainda obter o resultado correto da subtração, assim resolveram a questão 3 com facilidade, compreendendo que a subtração que João realizou estava correta, cada um escreveu com suas palavras a justificativa para isso. As tarefas com a operações envolvem o ver, o fazer, o calcular e o checar, nessa tarefa o aluno utiliza sua própria linguagem para descrever como checou que o cálculo feito por João estava correto.

Figura 35 - Resolução tarefa 15 (questão3)


3) João precisava resolver a seguinte subtração 15 − 9 utilizando a Escala Cuisenaire. Como não tinha uma peça do material para representar o número 15 ele fez da seguinte maneira 10 − 4 = 6 e concluiu que o resultado desta subtração é o mesmo de 15 - 9. A resposta de João está correta, explique com suas palavras?

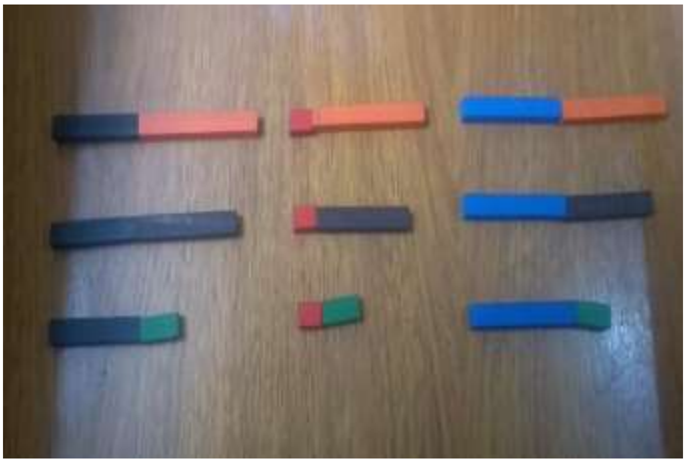
Sim Porquê ele tirou o cinco do 15 que deu 10, depois ele tirou o 5 do 9 que deu 4 que da o mesmo resultado

Fonte: resolução dos alunos (2019)

4.6 Fatos fundamentais da multiplicação e da divisão

A multiplicação está relacionada a pelo menos duas ideias, a da soma de parcelas iguais e a de combinatória. As tarefas 16 e 17 abordam a ideia da soma de parcelas iguais, é desenvolvido esse trabalho com a composição de um determinado número utilizando apenas peças da Escala Cuisenaire da mesma cor, essa ideia é trabalhada também na tarefa 11 (questão 2), no entanto não é muito aprofundada a questão de que isso representa uma multiplicação. Apesar de nenhuma tarefa abordar a ideia de combinatória, é possível fazer isso com as peças também, realizando diferentes combinações (Figura 36) para formar números, pode-se desenvolver problemas do tipo: Quantos números diferentes podemos formar combinando as peças vermelha, azul e preta com as peças verde-claro, marrom e laranja?

***Figura 3619** – Combinações*

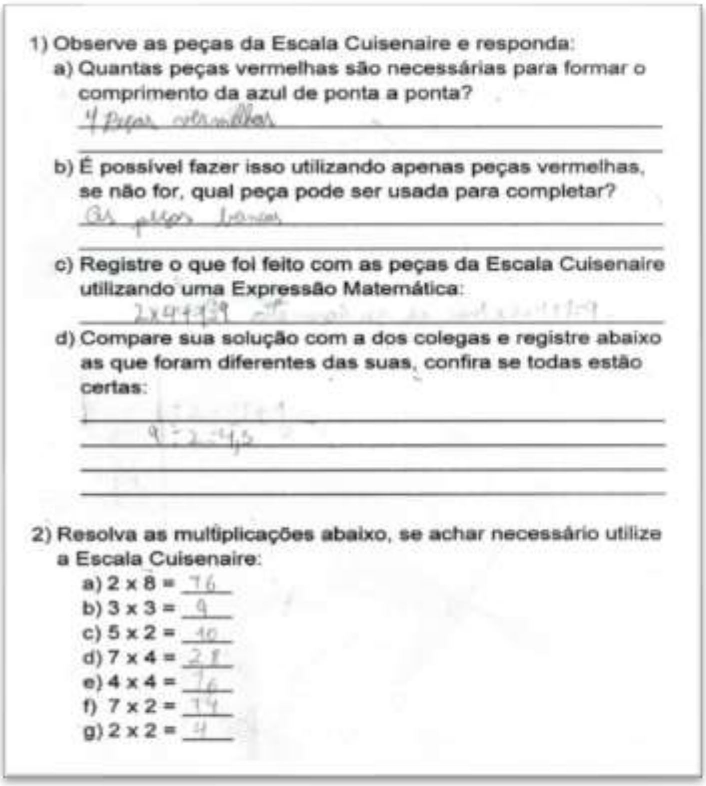


Fonte – a autora (2019)

Já a operação de divisão envolve as ideias de repartir e a de medir, sendo que a mais abordada é a de repartir em partes iguais.

As tarefas com a Escala Cuisenaire possibilitam desenvolver a ideia de medir, essa ideia diz respeito a quantas vezes um número “cabe” em outro. Com as peças é exatamente isso que o aluno irá utilizar para resolver a divisão, *quantas peças amarelas cabem no comprimento da laranja?* Ao responder a essa pergunta, está respondendo 10 ÷ 5 = 2, para responder ele precisa contar quantas peças utilizou, ou em outras situações que não envolvam o material, quantos grupos de 5 formou. Pires e Gomes (2009) discutem os dois métodos para resolver uma divisão e afirmam que para resolver esse tipo de divisão, que envolve a ideia de medir, podemos utilizar o método de fazer sucessivas estimativas, conhecido como “método americano”, que é pouco utilizado em nossas escolas.

Figura 3720 - Tarefa 16

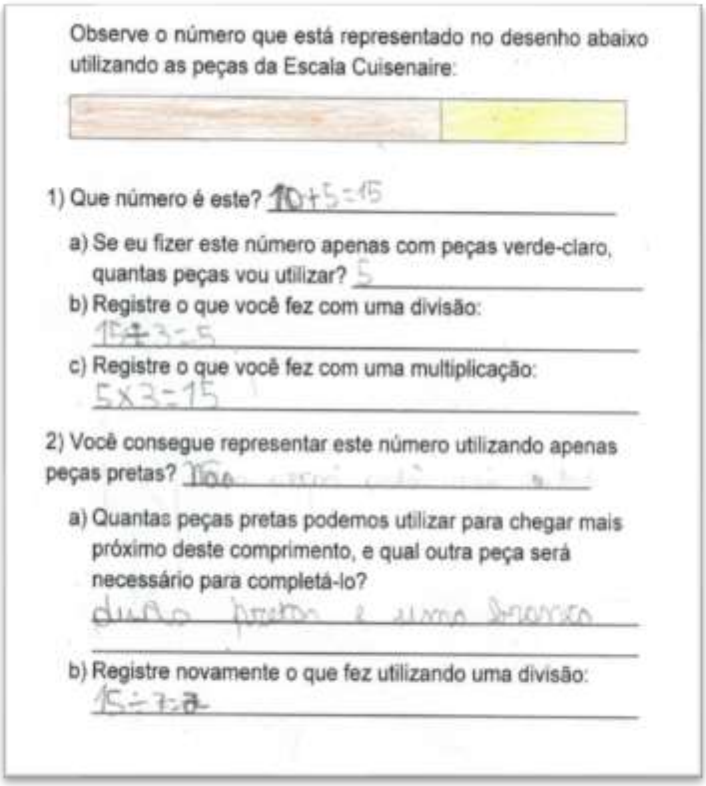

1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e responda:
a) Quantas peças vermelhas são necessárias para formar o comprimento da azul de ponta a ponta?
4 peças vermelhas
b) É possível fazer isso utilizando apenas peças vermelhas, se não for, qual peça pode ser usada para completar?
c) Registre o que foi feito com as peças da Escala Cuisenaire utilizando uma Expressão Matemática:
d) Compare sua solução com a dos colegas e registre abaixo as que foram diferentes das suas, confira se todas estão certas:

2) Resolva as multiplicações abaixo, se achar necessário utilize a Escala Cuisenaire:
a) 2 x 8 = 16
b) 3 x 3 = 9
c) 5 x 2 = 10
d) 7 x 4 = 28
e) 4 x 4 = 16
f) 7 x 2 = 14
g) 2 x 2 = 4

Fonte: resolução dos alunos (2019)

A tarefa 16 (Figura 37) possibilita o desenvolvimento do objetivo, que trata das operações de multiplicação e divisão como inversas, pois o aluno pode registrar a expressão numérica tanto como uma divisão, quanto com uma multiplicação, na tarefa anterior por exemplo, o aluno registrou como uma expressão envolvendo multiplicação e adição (2 x 4 +1 = 9) e na letra d a divisão. Ao resolver a questão 2 com as peças da Escala Cuisenaire, estamos abordando a ideia da multiplicação como a soma de parcelas iguais. Apesar do objetivo desta tarefa não ser trabalhar com números decimais, esta ideia pode ser abordada devido ao resto da divisão. Ressaltamos o argumento de Passos (2006) a respeito de materiais manipuláveis, que defende que o mesmo só auxiliará na aprendizagem se todas as suas potencialidades forem exploradas. Mesmo que o material não seja feito especificamente para abordar números decimais, ele pode proporcionar uma discussão sobre o tema, e o professor pode explorar isso, porque será mais uma oportunidade para a aprendizagem.

Figura 3821 - Tarefa 17



Observe o número que está representado no desenho abaixo utilizando as peças da Escala Cuisenaire:

1) Que número é este? 10+5=15

a) Se eu fizer este número apenas com peças verde-claro, quantas peças vou utilizar? 5

b) Registre o que você fez com uma divisão:

15÷3=5

c) Registre o que você fez com uma multiplicação:

5x3=15

2) Você consegue representar este número utilizando apenas peças pretas? Não

a) Quantas peças pretas podemos utilizar para chegar mais próximo deste comprimento, e qual outra peça será necessário para completá-lo?

duas pretas e uma branca

b) Registre novamente o que fez utilizando uma divisão:

15÷7=2

Fonte: resolução dos alunos (2019)

Com a tarefa 17 (Figura 38) além de trabalhar as duas operações como inversas, abordamos a divisão com a ideia de medir, quantas peças verde-claro cabem no desenho das peças da Escala Cuisenaire que representa o número 15. Para indicar que este número é o quinze, o aluno registrou a soma das peças que foram utilizadas para fazer a composição. Na questão 2, exploramos também a questão do resto, os alunos fazem a divisão por sete, ou seja, confere quantas peças pretas cabem no número 15, mas percebem que não cabe mais uma peça inteira e que a peça que completa esse comprimento que faltou é a branca, logo essa divisão deixa resto 1. Discutir a respeito das questões, explorar todas as respostas possíveis e deixar que os alunos exponham suas ideias é o que auxiliará no processo de ensino e de aprendizagem. Apenas utilizar o material manipulável sem realizar esse tipo de discussão não aproveitará todas as suas potencialidades. Nacarato (2005) denomina isso como o uso inadequado e pouco exploratório do material, e a experiência com as tarefas aplicadas ressalta essa ideia.

Os quadros que seguem apresentam uma síntese da análise feita no capítulo quatro, relacionando os conteúdos com os objetivos e as tarefas que tornam possíveis alcançá-las fazendo uso da Escala Cuisenaire. A última coluna mostra um pouco da discussão que justifica como essas tarefas se relacionam com os objetivos. A Quadro 20 diz respeito a Números e a Quadro 21 a Álgebra, com elas pretendemos responder à pergunta do estudo: **Que conceitos matemáticos podem ser explorados com a utilização da Escala Cuisenaire nos anos iniciais?**

Quadro 20 – Números

Conteúdos	Objetivos	Tarefas	Discussão
Contagem	Contar de maneira exata ou aproximada e utilizar os números naturais para indicar as quantidades, além de reconhecer situações em que os números não indicam contagem e nem ordem.	Tarefa 1	Esta ideia está presente na questão: "Quantas peças há em cada grupo?" A criança pode estabelecer as relações de ordem e inclusão hierárquica.
		Tarefa 4	Realizar a contagem das peças brancas necessárias para formar as janelas dos trens e registrar a quantidade no círculo. A criança pode estabelecer as relações de ordem e inclusão hierárquica.
		Tarefa 5	Contar as janelas (peças brancas) dos trens para associar ao comprimento das outras peças da Escala Cuisenaire e colorir os trens. As crianças devem comparar as quantidades de janelas nos trens para definir qual é o maior.
Composição e Decomposição de números naturais	Compor e decompor números por meio de diferentes adições com o apoio da Escala Cuisenaire.	Tarefa 8	As crianças farão a composição e decomposição de diferentes números em adições de duas ou mais parcelas, analisando as possibilidades.
		Tarefa 9	
		Tarefa 11	
		Tarefa 12	
		Tarefa 14	

Fatos Fundamentais da Adição e da Subtração	Realizar Cálculo mental e escrito envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais.	Tarefa 8	A adição é abordada juntamente com a composição e decomposição de números naturais.
		Tarefa 9	
		Tarefa 11	
		Tarefa 12	
		Tarefa 13	Nesta tarefa podem surgir as ideias de completar, comparar e tirar da subtração.
		Tarefa 14	É explorada a ideia de acrescentar.
		Tarefa 15	Utilizar expressões matemáticas para representar o que é mostrado com a configuração das peças no desenho.
	Reconhecer que a adição e a subtração são operações inversas.	Tarefa 13	As crianças que já tiverem internalizado os padrões trabalhados na composição e decomposição serão capazes de perceber qual peça falta sem precisar coloca-las no espaço para testar
		Tarefa 15	
		Tarefa 12	A criança deve encontrar o termo que falta em cada adição, em algumas poderá realizar a subtração para descobrir.
	Utilizar as relações entre a adição e a subtração e suas propriedades, a fim de ampliar suas estratégias de cálculo.	Tarefa 15	Ao encontrar as subtrações equivalentes, somando ou subtraindo a mesma quantidade de cada parcela os alunos estão desenvolvendo estratégias que auxiliarão no cálculo mental.
Fatos Fundamentais da Multiplicação e da Divisão	Realizar Cálculo mental e escrito envolvendo as operações de multiplicação e divisão de números naturais.	Tarefa 16	Abordam a multiplicação com a ideia da soma de parcelas iguais, as crianças devem compor um determinado número utilizando apenas peças da Escala Cuisenaire da mesma cor. E a divisão com a ideia de medir, quantos 2
		Tarefa 17	
	Utilizar as relações entre a multiplicação e a divisão e suas propriedades, a fim de ampliar suas estratégias de cálculo.	Tarefa 16	
		Tarefa 17	

			cabem em 8, por exemplo.
	Reconhecer que a multiplicação e a divisão são operações inversas.	Tarefa 16	Com as duas tarefas é possível abordar a multiplicação e a divisão como operações inversas, mas a tarefa 17 possui questões mais direcionadas a esse propósito.
		Tarefa 17	

Fonte – A autora

Quadro 21 – Álgebra

Conteúdos	Objetivos	Tarefas	Discussão
Sequências	Organizar e ordenar objetos familiares de acordo com suas características (cor e tamanho).	Tarefa 1	Separar as peças de acordo com as cores.
		Tarefa 2	Pegar uma peça de cada cor e colocar em ordem crescente.
	Descrever os elementos ausentes em sequências recursivas formadas com as peças da Escala Cuisenaire.	Tarefa 3	Observar as peças em ordem crescente e reconhecer a que está faltando.
	Utilizar uma regularidade para construir sequências em ordem crescente ou decrescente.	Tarefa 2	Cada peça colocada em ordem crescente representa um número de 1 a 10.
	Reconhecer uma regularidade em sequências recursivas e descreve-las.	Tarefa 7	Explorar as características da Escala Cuisenaire, observando a sequência formada por elas em ordem crescente ou decrescente.
		Tarefa 10	
		Tarefa 15	Na questão dois, os alunos devem observar as regularidades do que está acontecendo com as subtrações.

<table>
<tr><td rowspan="4">Relações de Igualdade</td><td rowspan="2">Compreender a ideia de igualdade para ser capaz de escrever expressões envolvendo adições e subtrações equivalentes.</td><td>Tarefa 9</td><td rowspan="2">Nas tarefas 9 e 14, os alunos “podem investigar as diferentes decomposições dos números, usando expressões numéricas para as representar e observando a estrutura dessas expressões” (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 20).</td></tr>
<tr><td>Tarefa 14</td></tr>
<tr><td>Reconhecer que ao somar ou subtrair a mesma quantidade a cada um dos termos de uma igualdade, a relação de equivalência permanece.</td><td>Tarefa 15</td><td>Na questão 2, os alunos realizam várias subtrações e obtêm o mesmo resultado.</td></tr>
<tr><td>Determinar o termo desconhecido que torna a igualdade verdadeira, envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais.</td><td>Tarefa 12</td><td>Esta tarefa aborda o sentido mais geral de equivalência citado, aqui trabalhamos com equações matemáticas, o sinal de igual assume o papel de identificar uma equivalência.</td></tr>
</table>

Fonte – A autora

Considerações Finais

A realização desse estudo, desde as leituras até a elaboração e análise das tarefas, mostrou que a utilização do material manipulável, Escala Cuisenaire, pode ser um recurso valioso no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos com as crianças do Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Fiorentini e Miorim (1999) afirmam que, antes de utilizar um material manipulável em suas aulas, o professor deve refletir a respeito de sua prática. Levamos essa proposta ao GEAMAI para que essas reflexões fossem feitas com professoras dos anos iniciais, que buscam aprimorar sua prática por meio da formação continuada.

O estudo de autores que realizam pesquisas a respeito de materiais manipuláveis serviu como base para elaboração da fundamentação teórica desta dissertação, fundamentou também a escolha da Escala Cuisenaire e a elaboração das tarefas. Com este estudo e a experiência vivenciada tanto com a dissertação, quanto como professora dos anos iniciais, percebemos que não basta levar o material manipulável para sala de aula para que tenhamos uma aula mais dinâmica, é necessário refletir sobre nossa prática e preparar as aulas de maneira a aproveitar ao máximo as potencialidades daquele material.

As recomendações remetem a explorar o material, deixar que os alunos formem suas próprias conjecturas. Nesse contexto o aluno tem um papel ativo na sua aprendizagem, e o professor, como mediador deve instigá-lo e questioná-lo para que pense a respeito de determinadas situações, sem dar respostas prontas.

Ao escolher o material que utilizaríamos na elaboração das tarefas me interessei inicialmente pela Escala Cuisenaire pois não conhecia o material e, depois das aplicações das tarefas, notei que algumas escolas têm o material guardado, e que muitos professores sequer o conhecem. Para realizar essa escolha, recorremos aos critérios estabelecidos por Reys (1971) no que diz respeito ao que devemos levar em consideração ao escolher um material manipulável. A Escala Cuisenaire é um material motivador, desperta o interesse dos alunos, é apropriado para ser utilizado em diferentes anos de escolaridade e para trabalhar diferentes conceitos matemáticos que auxiliam na compreensão do conceito de número, de conteúdos relacionados a aritmética e também na formação do pensamento algébrico. Porém, só após o final da recolha de dados e das análises, foi possível confirmar que o material pode permitir uma representação clara destes conceitos e proporciona uma base para abstração deles.

Por escolha da pesquisadora, as tarefas propostas abordam os conceitos de sequenciação, composição e decomposição de números naturais, relações de igualdade, contagem e as quatro operações, no entanto o material pode ser utilizado também para abordar outros conceitos, alguns relacionados a Geometria, por exemplo. As tarefas foram elaboradas com a intenção de ser um meio para refletir nas potencialidades do material, contudo elas podem ajudar professores que querem utilizar a Escala Cuisenaire em suas aulas, elas poderão servir como base para que o professor conheça o material e tenha alguns exemplos de como abordar alguns conceitos matemáticos com esse material.

Após as reflexões que esse estudo permitiu, chegamos à conclusão de que, para aproveitarmos o potencial do material, é necessário pensar a respeito das questões que estão envolvidas nas tarefas e discutir sobre os conceitos que estão por trás de cada uma, e acreditamos que essas discussões geram oportunidades de aprendizagem.

As discussões no GEAMAI foram uma parte fundamental para elaboração desta dissertação. Cada tarefa foi realizada pelas professoras que, aliando sua experiência, deram grandes contribuições, percebemos nos encontros com o grupo a importância de se pensar na elaboração dos enunciados das questões, para adequá-los aos objetivos da tarefa, pudemos discutir diferentes ideias matemáticas a partir das questões. As tarefas passaram por um processo de refinamento até chegarem à versão apresentada aqui, foram elaboradas ou adaptadas e depois discutidas com os participantes do GEAMAI, aplicadas em sala de aula com alunos de todos os anos do Ensino Fundamental – Anos Inicias em duas escolas e depois, de volta ao GEAMAI, discutimos a prática e finalizamos a última versão, que é fruto das contribuições dadas pelos participantes durante as discussões.

Quanto à manipulação é importante se certificar de que há material disponível para que todos os alunos possuam peças suficientes para realizar as tarefas. O objetivo de se trabalhar as tarefas em grupos, é que os alunos possam discutir e compartilhar suas soluções com os colegas. Outro fato essencial quando utilizamos material manipulável, é dar tempo de manipulação livre para que as crianças conheçam o material, com relação a isso apenas confirmamos na prática o que já tínhamos visto na teoria.

A análise das tarefas foi realizada a partir dos conceitos matemáticos abordados por alguns autores, pelas resoluções apresentadas pelas crianças e, também, das discussões que foram realizadas no GEAMAI. Com a análise buscamos responder à pergunta deste estudo: Que conceitos matemáticos podem ser explorados com a utilização da Escala Cuisenaire nos anos iniciais?

Com a Escala Cuisenaire é possível abordar conceitos relacionados tanto a Aritmética quanto a Álgebra, como contagem, sequências, composição e decomposição de números naturais, relações de igualdade e as quatro operações, ao analisar as tarefas percebemos que:

- uma mesma tarefa pode abordar conteúdos diferentes, o professor pode escolher em qual quer dar maior ênfase;
- um mesmo conteúdo pode ser abordado por diferentes tarefas, elas podem desenvolver objetivos diferentes, referentes ao mesmo conceito, mas em diferentes níveis;
- para as dezessete tarefas elaboradas relacionamos os objetivos para ser desenvolvido no 1º, 2º, 3º e 4º anos do Ensino Fundamental – Anos Iniciais; esses objetivos são referentes aos conteúdos que dizem respeito aos conceitos relacionados a sequenciação, composição e decomposição de números naturais, relações de igualdade, contagem e as quatro operações;
- todas as tarefas fazem parte das unidades temáticas Números e Álgebra, nessa fase do ensino as duas possuem uma relação bastante evidente.

Ao aplicar as tarefas e analisá-las, pudemos perceber como o ver estava relacionado com o fazer, entender, calcular e checar, na utilização da Escala Cuisenaire, como citado por Gattegno (1960), e também pode-se perceber as crianças passando pelas quatro etapas, também elencadas pelo autor: a experiência, a notação, a junção da manipulação com a notação e o domínio completo sobre o material.

Esperamos que os professores que se interessarem por aplicar essas tarefas em suas aulas, as modifiquem e as aprimorem, adequando-as às necessidades de sua turma, inicialmente a intenção era separar as 17 tarefas por ano, mudamos de ideia quando percebemos que essa adequação depende muito de cada turma e também do professor.

Nem sempre há material disponível para todos na escola, ele é um material estruturado e muitas vezes inacessível, por conta do preço, e isto é uma das dificuldades para sua utilização. Uma solução para essa situação é fabricar o próprio material fazendo uso de objetos reciclados. Por exemplo, canudos, os pais ou os alunos maiores podem ajudar na fabricação, medindo, cortando e colorindo os canudos, assim podem produzir material suficiente para todos.

Assim como qualquer outro material, a Escala Cuisenaire possui muitas potencialidades, mas também algumas limitações, quando discutimos os números decimais, por exemplo, podemos encontrar outros materiais que abordam os números decimais de uma maneira mais completa, por isso optamos por não direcionar as tarefas a essa questão. Para os conceitos abordados aqui, penso que uma das limitações é a impossibilidade de trabalharmos números de três, quatro e mais ordens.

A elaboração deste estudo foi parte importante da minha formação. O Programa de Mestrado – PROFMAT, mestrado profissional, tem uma ênfase forte nos conteúdos matemáticos na fase do curso das disciplinas, porém a fase de estudos e escrita da dissertação me oportunizou uma experiência com a pesquisa e mais, enquanto professora permitiu que eu entendesse a necessidade da reflexão em cada ação.

Referências

CANE, J. **Mathematical journeys:** Our journey in colour with Cuisenaire rods. In:, Working with rods and why an ATM open resource, 2017. Disponível em : <https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Resources/Cuisenaire_Rods_and_Why_book.pdf>. Acesso em 13 abr. 2019.

CEBOLA, G. Do número ao sentido do número. In: PONTE, J. P. COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores.** Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 257-273)

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, SBM/SP, 1999. Disponível em : <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf>. Acesso em 24 out. 2018

GATTEGNO, C. **Arithmetic**: A Teachers Introduction To The Cuisenaire-Gattegno Methods Of Teaching Arithmetic. Educational Solutions Worldwide Inc,1960.

HARTSHOR, R.; BOREN, S. **Experiential learning of mathematics: using manipulatives.** 1990. Disponível em: < http://www.ericdigests.org/ pre-9217/math.htm>. Acesso em 05 nov. 2018.

KAMMI, C. **A criança e o número:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junta a escolares de 4 a 6 anos. 11. ed. São Paulo: Papirus, 1990.

LORENZATO, S. Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MURARI, C. **Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática**. Boletim de Educação Matemática [On-line] 2011

NACARATO, A. M. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista de Educação Matemática, São Paulo, v.9, n. 9/10, p. 1-6, 2005. Disponível em:<https://pactuando.files.wordpress.com/2014/08/eu-trabalho-primeiro-no-concreto.pdf>. Acesso em 24 out. 2018

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de matemática na formação de Professores.** São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PIRES, M. N. M.; GOMES, M. T. Ideias das quatro operações fundamentais. In: CARVALHO, A. M. F. T. de.; PIRES, M. N. M.; GOMES, M. T. **Fundamentos Teóricos do Pensamento Matemático.** Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009. p. 81-94.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Vila Nova de Gaia: Fundação Manuel Leão, 2009.

RÊGO, R.; RÊGO, R. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

REYS, R. **Considerations for teaching using manipulative materials. Arithmetic Teacher**. The Arithmetic Teacher, v. 18, n. 8, pp. 551-558, dez., 1971.

SANTOS, D. C. dos.; CURY, H. N. **O Uso de Materiais Manipuláveis como Ferramentas na Resolução de Problemas Trigonométricos**. Vidya, Santa Maria, v. 31, n. 1, p. 49-61, jan./jun., 2011.

SBM. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**-PROFMAT**,** de 21 de novembro de 2016**.** Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/>. Acesso em 30 jan. 2019.

SOUSA, G. C. de; OLIVEIRA, J. D. ao Souza de. **O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática**. Salvador: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010.

Apêndices

Apêndice 1 – Quadro 22

Quadro 22 – Teses e Dissertações sobre Materiais Manipuláveis

Identificação	Título	Autor	Orientador	Instituição
T1	FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA COM DOCENTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	CELSO EDUARDO BRITO	SERGIO MOTA ALVES	UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
T2	HOMOTETIA E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO MATERIAIS CONCRETOS E MANIPULÁVEIS	EDSON SOARES FILHO	ROBERTO ANTONIO CORDEIRO PRATA	UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
T3	PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NO ENSINO FUNDAMENTAL	ALICE PONTES BARRETO	LILIANA ANGELINA LEON MESCUA	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
T4	ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	MARCIANO MAURO PAGLIARINI	FREDY MAGLORIO SOBRADO SUAREZ	UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
T5	ATIVIDADES ALGÉBRICAS NO 6O ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS	LUCIANA PINTO FREITAS	LILIANA ANGELINA LEON MESCUA	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
T6	ÁLGEBRA NO 8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: PRÁTICA PEDAGÓGICA COM A UTILIZAÇÃO DE MATERIAL MANIPULADA	MAURICIO MAILAN LANGE	MARCOS ANTONIO ANCIUTI	INSTITUTO FEDERAL DE EDUC., CIÊNC. E TECN. SUL-RIO-GRANDENSE

T7	COMPRIMENTO, MASSA E CAPACIDADE: UMA ABORDAGEM A PARTIR DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS	ALINE DE SOUZA VIEIRA	OSCAR ALFREDO PAZ LA TORRE	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
T8	A MOBILIZAÇÃO E A AQUISIÇÃO DE SABERES POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA AO VIVENCIAREM EXPERIÊNCIAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS.	NALDIA PAULA COSTA DOS SANTOS	JOSE AUGUSTO DE CARVALHO MENDES SOBRINHO	FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
T9	A INFLUÊNCIA DAS AULAS TEÓRICO-PRÁTICAS, DESENVOLVIDAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS E AUDIOVISUAIS, FORA DO AMBIENTE ESCOLAR, COMO ESTRATÉGIA PARA FORMAÇÃO DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	MUSTAFA GONCALVES SAHID	JOSE RONALDO MELO	UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
T10	ENSINO DE ÁREAS DE POLÍGONOS E CÍRCULO POR MEIO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS	TIAGO FERNANDO DOS REIS	RITA DE CASSIA PAVANI LAMAS	UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO (SÃO JOSÉ DO RIO PRETO)
T11	O USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS E JOGOS ATRAVÉS DE OFICINAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA	ANTONIO FRANCISCO CANUTO DO NASCIMENTO RODRIGUES	MARIO GOMES DOS SANTOS	FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

T12	ENSINANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DE RECURSOS MANIPULÁVEIS	VIVIANE GUERRA GUIMARAES	MERCIO BOTELHO FARIA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
T13	O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS	VANILDO DOS SANTOS SILVA	ERICA VALERIA ALVES	UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
T14	REFORÇO ESCOLAR: O USO DE JOGOS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE FRAÇÕES	EDSON CARLOS DA CUNHA	APARECIDA AUGUSTA DA SILVA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
T15	SUGESTÕES DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS A FIM DE DIMINUIR OS OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS	PATRICIA FANTINI	ESTHER PACHECO DE ALMEIDA PRADO	UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (SÃO CARLOS)
T16	O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS PARA O ENSINO DE QUADRILÁTEROS NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	DEIZIANE COUTINHO DE MIRANDA	ALEXANDRE RAMALHO SILVA	UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
T17	MATERIAIS MANIPULÁVEIS: UMA INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA PARA A DIVISÃO EUCLIDIANA.	. VALERIA REGO HADDAD	EDUARDO WAGNER	ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
T18	ESTUDO DE CONCEITOS DE ÁLGEBRA COM O AUXÍLIO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS	MATEUS ANTONIO VARGAS FERRO	ELENI BISOGNIN	UNIVERSIDADE FRANCISCANA

T19	O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E APLICAÇÕES COM O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL	ANDREA MARIA MANO AMAZONAS	RITA DE CASSIA DE JESUS SILVA	UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
T20	UMA SEQUENCIA DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES COM USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS	VANESSA DA SILVA CHAVES MORAIS	HELENA NORONHA CURY	CENTRO UNIVERSITÁRIO FRANCISCANO
T21	GEOPLEXO: UM MATERIAL MANIPULÁVEL PARA O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	ALEXANDRE ADRIANO BERNARDI	FREDY MAGLORIO SOBRADO SUAREZ	UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
T22	CAIXA DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA COM MATERIAL CONCRETO E MANIPULÁVEL	SERGIANA ALVES CANGUSCU MIRANDA	JULIO CESAR DOS REIS	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
T23	MATERIAL MANIPULÁVEL E MANIPULÁVEL VIRTUAL PARA O ENSINO DE ESTIMATIVA DE PROPORÇÃO POPULACIONAL NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES	CAROLINE SUBIRA PEREIRA	GUATACARA DOS SANTOS JUNIOR	UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
T24	EXPLORANDO CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	ANELISE HODECKER	VIVIANE CLOTILDE DA SILVA	UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
T25	O CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO -	DANIVALTON FERNANDES DE OLIVEIRA	ROQUE MENDES PRADO TRINDADE	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

	APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA			
T26	MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES: A COMPREENSÃO MATEMÁTICA DE ESTUDANTES	VIVIANE FERREIRA	LEONIA GABARDO NEGRELLI	UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
T27	ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NO SEXTO ANO DA EDUCAÇÃO BÁSICA UTILIZANDO MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL	FRANCISCO ALVES BEZERRA NETO	MARIA GILVANISE DE OLIVEIRA PONTES	UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
T28	ENSINO DE GEOMETRIA PARA ESTUDANTES CEGOS: AVALIAÇÃO, ANÁLISE E USO DE UM MATERIAL MANIPULÁVEL POR PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	MAYRA DARLY DA SILVA	LILIANE MARIA TEIXEIRA LIMA DE CARVALHO	UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
T29	A FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS GEOMÉTRICOS	SAMILLY ALEXANDRE DE SOUZA	KATIA MARIA DE MEDEIROS	UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA

T30	UMA REFLEXÃO SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA E A ARTE DAS DOBRADURAS COMO FERRAMENTA DE ENSINO	DENIS DE SOUSA MELO	MARCELO DE OLIVEIRA REGO	FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

Fonte – A autora

Apêndice 2 –Quadro 23

Quadro 23 – Autores Referenciados

Autores	Textos em que foram citados
ALMEIDA	T27
ALVES	T12
ARAGÃO	T13
ARAUJO	T7
BATISTA e SPINILLO	T20
BAZERRA	T24
BORDIN	T20
BOTAS e MOREIRA	T7
BRITO	T28
CALDEIRA	T25
CARVALHO	T9, T12, T18
CAVALCANTE	T11
FIORENTINI MIORIM	T1,T2,T4,T5,T7,T13,T14,T16,T19,T21,T22,T24,T25,T26, T27,T30
FLEMMING	T3
FLEMMING, D. M.; MELO, A. C.	T3
GRANDO	T7, T8
GROSSNICKLE, F. E.; JUNGE, C.; METZNER, W	T5
GUEDES	T18
HARTSHOR e BOREN	T4
JANUARIO	T20, T22
LAMAS, OLIVEIRA, ANTUNES e RODRIGUES	T10
LORENZATO	T2,T5,T7,T9,T11,T12,T13,T14,T16,T17,T18,T20, T21,T22,T23,T24,T25,T26,T27,T29,T30
MARSHAL	T24
MATOS SERRAZINA	T1, T9
MENDES	T7, T8
MENEGHETTI e BEGA	T15
MIORIM	T8, T13
MORAES	T12
MOURA	T8
MOYER	T25
MURARI	T8, T11
NACARATO	T7,T8,T9,T13,T15,T20,T21,T24,T25,T26,T27
OLIVEIRA	T13
PASSOS	T7, T18, T23, T27

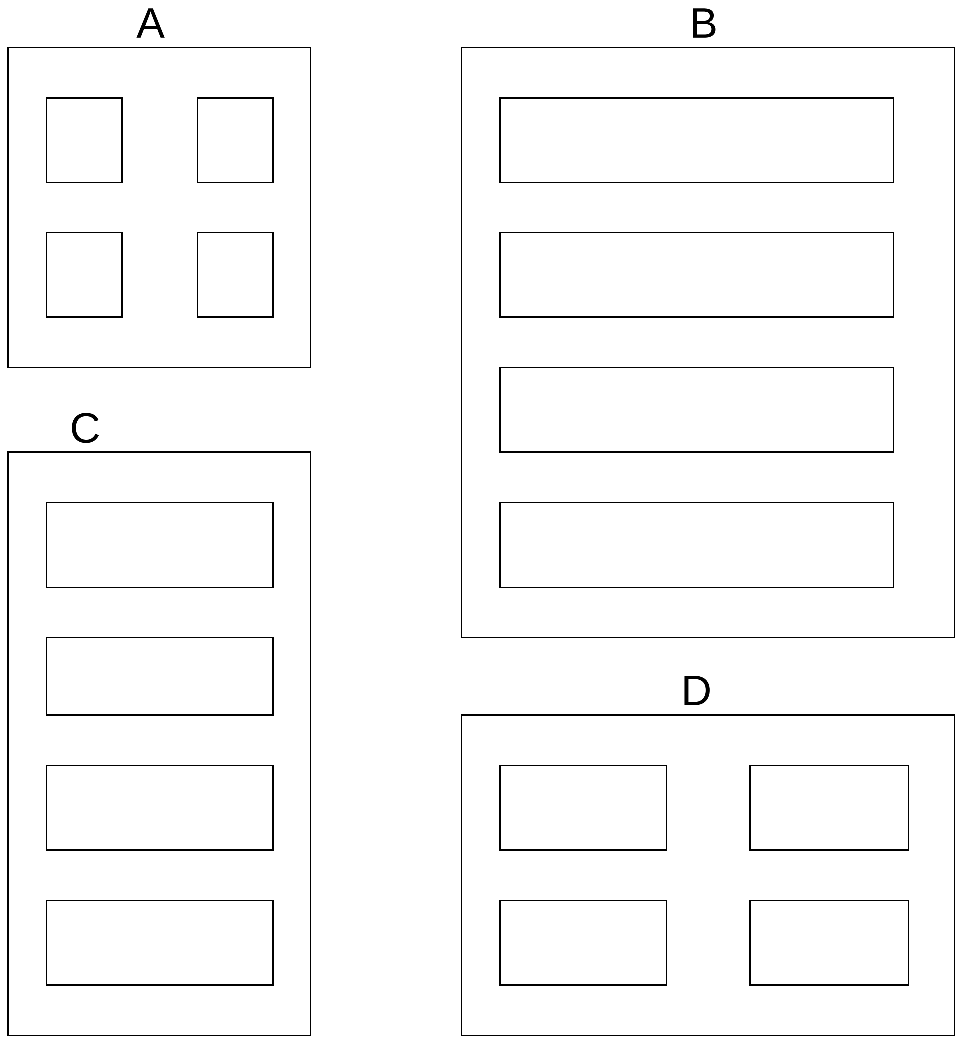
PASTELLS, A. A. I.	T5
PAULO e PINHEIRO	T26
PCN	T3, T6, T7
PESTALOZZI	T9
PIAJET	T1
RÊGO, R.; RÊGO, R.	T5, T10, T11, T12, T19, T27, T29, T30
REIMER e MOYER	T23
REYS	T2, T8, T9
RIBEIRO, E. C	T4
RODRIGUES E GAZIRE	T16, T18, T24, T25
RODRIGUES, A. F. C. do N	T3, T16
SANTOS D. C.	T14, T20, T25
SANTOS P. C. A.	T20
SILVA, M. J. de C	T3
SILVA, P. M. T.	T3
SMOLE, DINIZ e MILANI	T3
SOUSA e OLIVEIRA	T3, T15, T18, T21
SOUZA e MORAES	T12
TRINDADE	T13
TURRIONI e PEREZ	T5, T6, T12
VALE	T7

Fonte – A autora

Apêndice 3- Tarefas

TAREFA 1

PINTE AS PEÇAS DE CADA GRUPO COM AS CORES DA ESCALA CUISENAIRE:



QUAL GRUPO POSSUI AS PEÇAS MAIORES? ____________

QUANTAS PEÇAS HÁ EM CADA GRUPO? _______________

QUAL GRUPO POSSUI AS PEÇAS MENORES? ___________

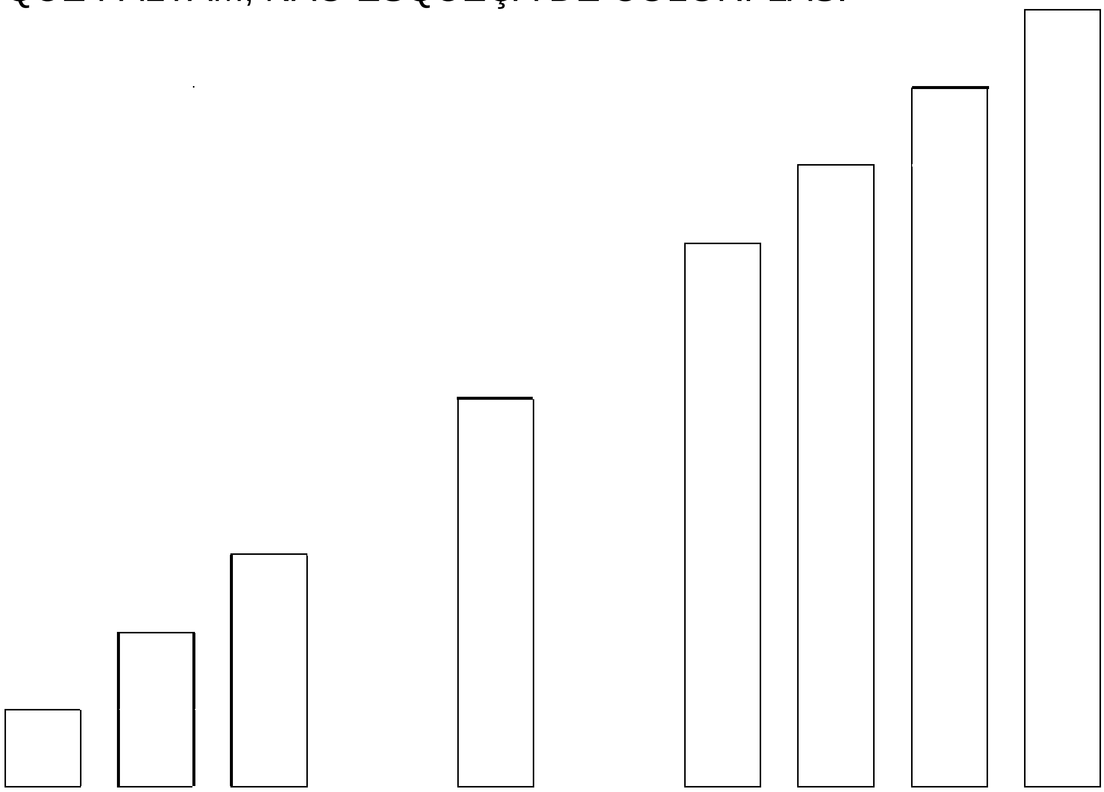
TAREFA 2

VAMOS ORGANIZAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE DA MENOR PARA A MAIOR.

REPRESENTE, PINTANDO NA MALHA QUADRICULADA, A SEQUÊNCIA QUE VOCÊ FORMOU.

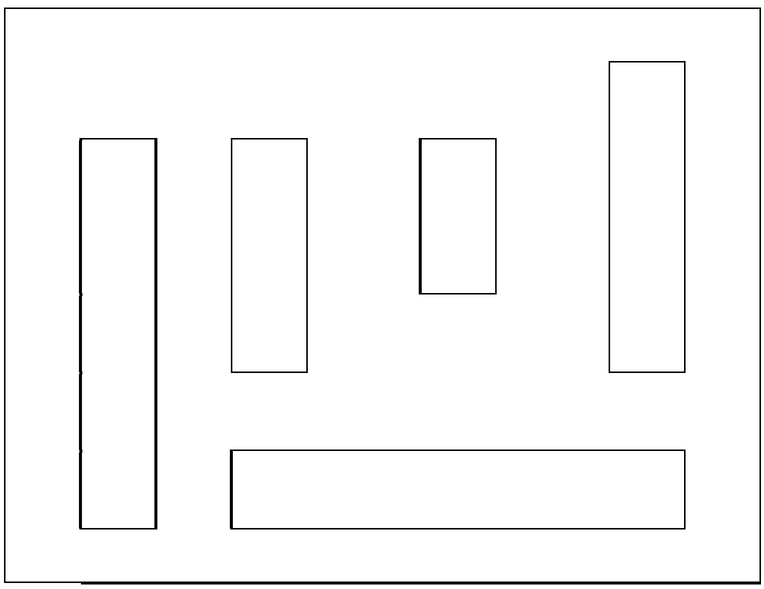
TAREFA 3

OBSERVE A SEQUÊNCIA ABAIXO, E COMPLETE COM AS PEÇAS QUE FALTAM, NÃO ESQUEÇA DE COLORI-LAS.



QUANTAS PEÇAS ESTÃO FALTANDO? ______________________

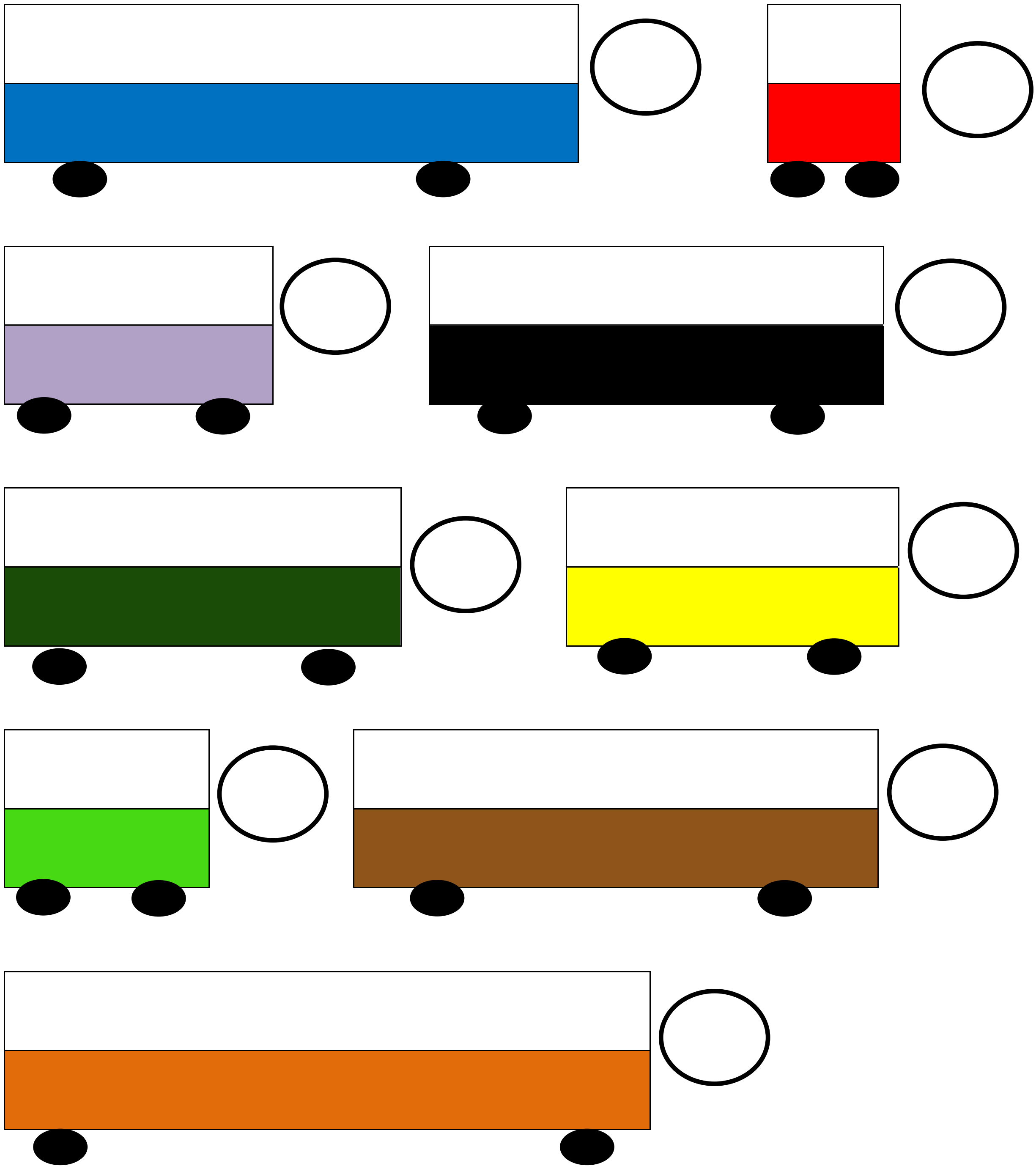
QUAIS PEÇAS ESTÃO FALTANDO? PINTE-AS NO QUADRO ABAIXO.



TAREFA 4

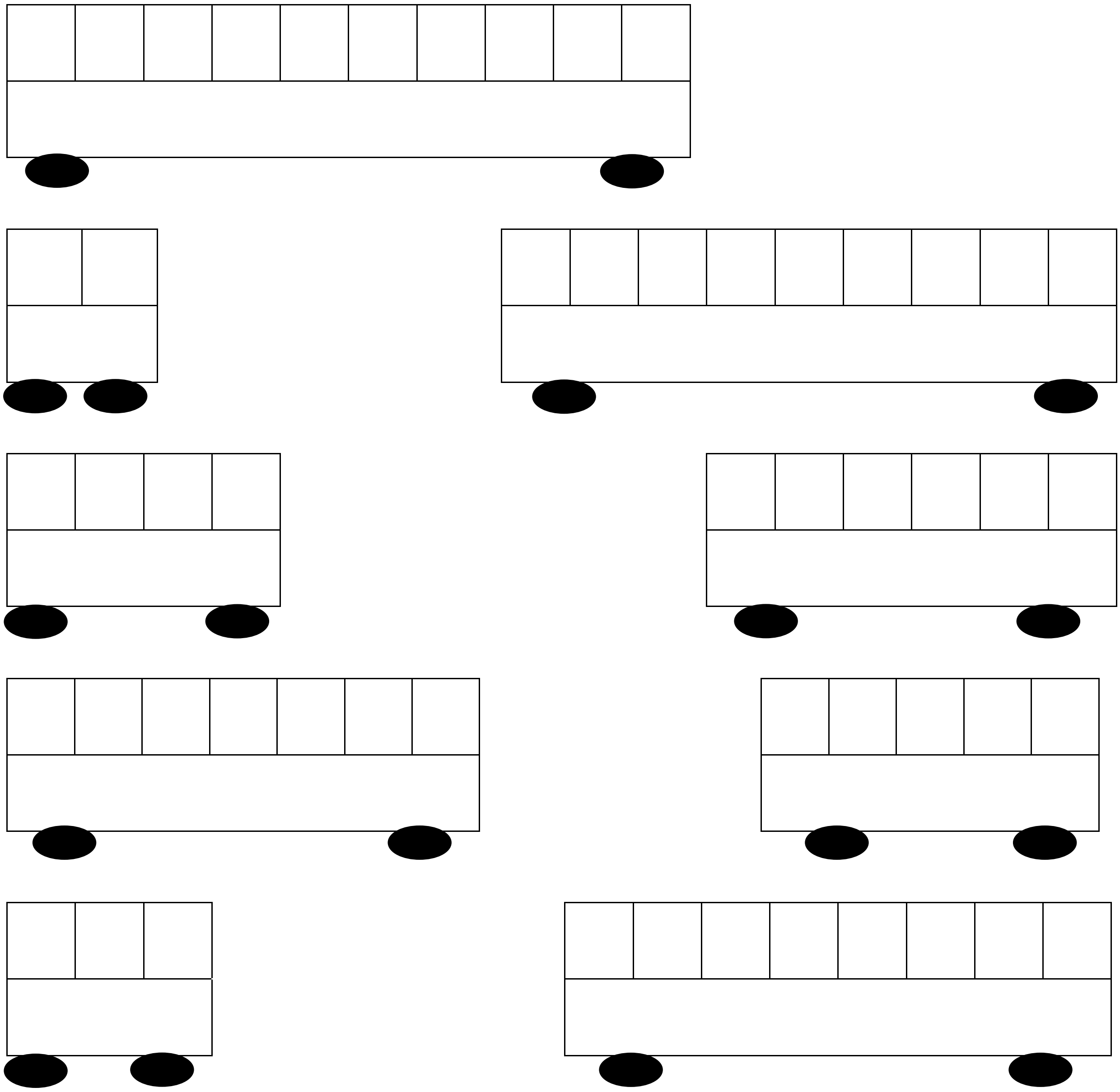
PREENCHA A PARTE SUPERIOR DE CADA TREM COM PEÇAS BRANCAS DA ESCALA CUISENAIRE.

CONTE QUANTAS PEÇAS BRANCAS VOCÊ UTILIZOU E ANOTE A QUANTIDADE DE PEÇAS NO CÍRCULO.



TAREFA 5

PINTE A PARTE DE BAIXO DOS TRENS DE ACORDO COM AS CORES E TAMANHOS DA ESCALA CUISENAIRE.



CIRCULE O TREM MAIOR.

QUANTAS JANELAS POSSUI O TREM AMARELO? ____________________

TAREFA 6

1) CONSIDERE QUE A PEÇA BRANCA DA ESCALA CUISENAIRE EQUIVALE A 1 UNIDADE.QUANTO EQUIVALE AS PEÇAS:

A) VERDE ESCURO? ________________

B) AMARELA? ______________________

C) LARANJA? _______________________

2) ASSINALE A COR DA PEÇA QUE TEM O MAIOR NÚMERO DE UNIDADES?

MARROM VERDE CLARO

3) PINTE OS QUADRADINHOS QUE CORRESPONDEM AOS NÚMEROS ABAIXO,

4										
7										
3										
9										
2										
8										

TAREFA 7

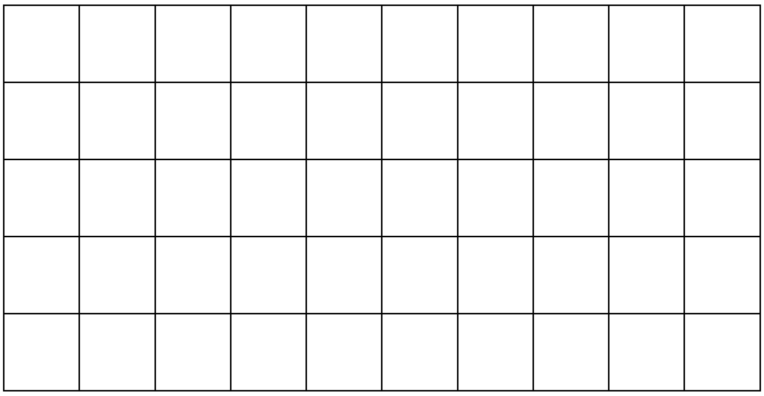
1) NO QUADRICULADO ABAIXO FAÇA O QUE SE PEDE:
   A) PINTE OS QUADRADINHOS PARA REPRESENTAR AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE.
   B) REGISTRE O NÚMERO DE QUADRADINHOS QUE PINTOU EM CADA PEÇA.

2) SEPARE UMA PEÇA DE CADA COR, COLOQUE-AS EM ORDEM CRESCENTE E RESPONDA:
   A) QUAL É A COR DA MENOR PEÇA? ___________________________
   B) QUAL A COR DA MAIOR PEÇAS? ____________________________
   C) QUAIS AS CORES DAS PEÇAS MENORES QUE A VERDE ESCURO? ____
   D) QUAIS PEÇAS ESTÃO ENTRE AS PEÇAS AMARELA E PRETA?

   ____

TAREFA 8

1) REPRESENTE O NÚMERO 9 NO QUADRICULADO UTILIZANDO AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE, DAS SEGUINTES FORMAS:
   A) UTILIZANDO 1 PEÇA;
   B) UTILIZANDO 2 PEÇAS;



   C) COMPARE E DISCUTA SUA SOLUÇÃO COM OS COLEGAS;

2) COMPLETE COM A COR DA PEÇA QUE MELHOR SE ENCAIXA E REGISTRE OS RESULTADOS:

7 + 0 = 7

3 + __ = 7

6 + __ = 7

2 + __ = 7

TAREFA 9

UTILIZE AS PEÇAS DA ESCALA CUISENAIRE PARA REPRESENTAR OS SEGUINTES NÚMEROS:

16																
12																
14																
15																
11																
13																

AGORA REGISTRE AS ADIÇÔES DE PEÇAS QUE REALIZOU PARA FORMAR CADA NÚMERO:

A) ______________________________________

B) ______________________________________

C) ______________________________________

D) ______________________________________

E) ______________________________________

F) ______________________________________

TAREFA 10

1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e escreva como elas são.
____
____
____
____
____
____
____

2) Pegue uma peça de cada cor do material, coloque em ordem crescente e responda:

a) Qual peça está entre a marrom e a laranja? ______________________________
b) Qual peça ocupa a quinta posição? ____________________________________
c) Qual a diferença de tamanho entre uma peça e a seguinte?
____
____
____
d) Se a peça branca equivale a 1 unidade, atribua um número a cada uma das demais peças:
Branca: 1
Vermelha: ____
Verde Clara: ____
Lilás: ____
Amarela: ____
Verde Escura: ____
Preta: ____
Marrom: ____
Azul: ____
Laranjada: ____

TAREFA 11

1) Utilizando 2 peças em cada linha, construa um tapete de comprimento 5. Depois compare seu tapete com o dos colegas.

2) Utilizando apenas peças da mesma cor em cada linha, construa um tapete de comprimento 8. Compare sua resposta com a dos colegas.

3) Construa um tapete de comprimento 6 de quantas maneiras for capaz. Registre o que fez no quadriculado abaixo:

TAREFA 12

1) Represente as adições abaixo no quadriculado, utilizando as peças da Escala Cuisenaire e despois registre, nas linhas o resultado utilizando expressões matemáticas:

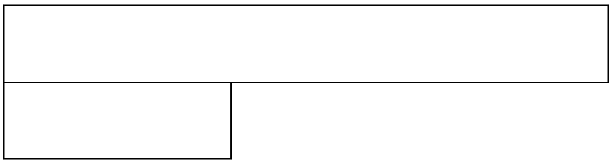
Amarelo + Verde claro =														
Preto + Lilás =														
Vermelho + Azul =														
Verde Escuro + Marrom =														
Laranja + Vermelho =														
Azul + Lilás =														
Verde Escuro + Amarelo =														
Preto + Preto =														

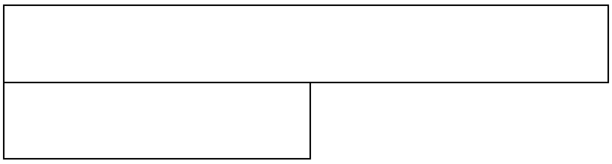
2) Encontre o termo que está faltando nas adições abaixo, se necessário, utilize as peças da Escala Cuisenaire:

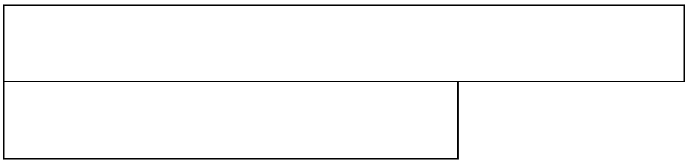
4 + ___ = 9	2 + ___ = 8	6 + 6 = ___	7 + ___ = 11
7 + ___ = 10	q 5 + ___ = 9	3 + ___ = 6	___ + 8 = 15
___ + 5 = 12	___ + 3 = 7	6 + ___ = 10	2 + ___ = 9

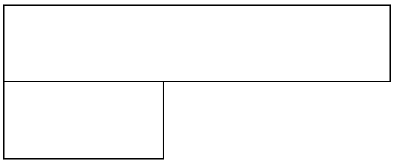
TAREFA 13

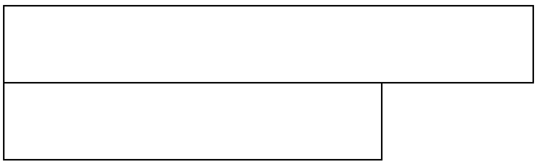
Qual peça falta em cada dupla de peças, para que elas tenham o mesmo tamanho? Registre uma expressão matemática que represente o que você pensou:

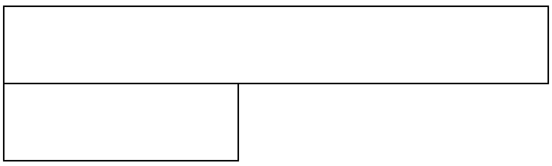
1)  ______________________

2)  ______________________

3)  ______________________

4)  ______________________

5)  ______________________

6)  ______________________

TAREFA 14

Escolha uma peça da Escala Cuisenaire e construa um tapete com o seu comprimento.

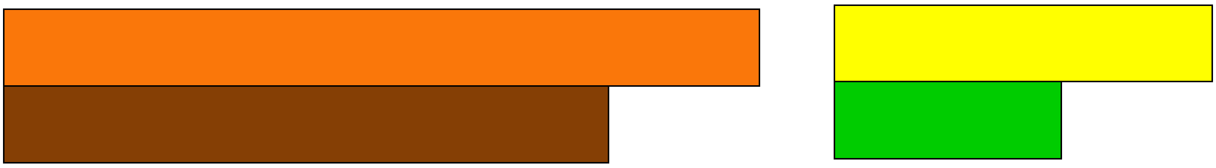
A) Registre o que você fez colorindo o quadriculado abaixo.

B) Registre o que você fez utilizando expressões matemáticas.

Representação das peças											Expressões matemáticas

TAREFA 15

1) Observe as seguintes subtrações feitas com a Escala Cuisenaire:



a) Escreva as subtrações e os resultados encontrados, depois explique o que você viu:

b) Encontre outros pares de peças que possuem esta mesma diferença e anote as subtrações que as representam:

2) Resolva as seguintes subtrações, se necessário utilize as peças da Escala Cuisenaire:

a) 20 – 14 = _____
b) 18 – 12 = _____
c) 12 – 6 = _____
d) 8 – 2 = _____
e) 16 – 10 = _____
f) 24 – 18 = _____

O que estas subtrações tem em comum?

3) João precisava resolver a seguinte subtração 15 – 9 utilizando a Escala Cuisenaire. Como não tinha uma peça do material para representar o número 15 ele fez da seguinte maneira 10 – 4 = 6 e concluiu que o resultado desta subtração é o mesmo de 15 - 9. A resposta de João está correta, explique com suas palavras?

TAREFA 16

1) Observe as peças da Escala Cuisenaire e responda:
   a) Quantas peças vermelhas são necessárias para formar o comprimento da azul de ponta a ponta?
   ____
   ____
   b) É possível fazer isso utilizando apenas peças vermelhas, se não for, qual peça pode ser usada para completar?
   ____
   ____
   c) Registre o que foi feito com as peças da Escala Cuisenaire utilizando uma Expressão Matemática:
   ____
   ____
   ____
   d) Compare sua solução com a dos colegas e registre abaixo as que foram diferentes das suas, confira se todas estão certas:
   ____
   ____
   ____

2) Resolva as multiplicações abaixo, se achar necessário utilize a Escala Cuisenaire:
   a) 2 x 8 = ____
   b) 3 x 3 = ____
   c) 5 x 2 = ____
   d) 7 x 4 = ____
   e) 4 x 4 = ____
   f) 7 x 2 = ____
   g) 2 x 2 = ____

TAREFA 17

Observe o número que está representado no desenho abaixo utilizando as peças da Escala Cuisenaire:

1) Que número é este? ____

a) Se eu fizer este número apenas com peças verde-claro, quantas peças vou utilizar?

b) Registre o que você fez com uma divisão:

c) Registre o que você fez com uma multiplicação:

2) Você consegue representar este número utilizando apenas peças pretas? ______

a) Quantas peças pretas podemos utilizar para chegar mais próximo deste comprimento, e qual outra peça será necessário para completá-lo?

b) Registre novamente o que fez utilizando uma divisão:

Apêndice 4- Orientações

Materiais necessários para a realização de todas as tarefas: caixas da Escala Cuisenaire; lápis de cor com as cores de todas as peças da Escala Cuisenaire; lápis de escrever; borracha.

Conteúdos:

- Contagem de rotina.
- Contagem ascendente e descendente.
- Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação.
- Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.
- Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).
- Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.
- Composição e decomposição de números naturais.
- Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração.
- Construção de fatos fundamentais da multiplicação e da divisão.
- Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.
- Relações entre adição e subtração, e entre multiplicação e divisão.
- Relação de igualdade.
- Propriedades da igualdade.
-

Objetivos

- Contar de maneira exata ou aproximada e utilizar os números naturais para indicar as quantidades, além de reconhecer situações em que os números não indicam contagem e nem ordem.
- Organizar e ordenar objetos familiares de acordo com suas características (cor e tamanho).
- Utilizar uma regularidade para construir sequências em ordem crescente ou decrescente.
- Descrever os elementos ausentes em sequências recursivas formadas com as peças da Escala Cuisenaire.
- Reconhecer uma regularidade em sequências recursivas e descreve-las.
- Compor e decompor números por meio de diferentes adições com o apoio da Escala Cuisenaire.

- Compreender a ideia de igualdade para ser capaz de escrever expressões envolvendo adições e subtrações equivalentes.
- Reconhecer que ao somar ou subtrair a mesma quantidade a cada um dos termos de uma igualdade, a relação de equivalência permanece.
- Determinar o termo desconhecido que torna a igualdade verdadeira, envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais.
- Realizar cálculo mental e escrito envolvendo as operações de adição e subtração de números naturais.
- Utilizar as relações entre a adição e a subtração e suas propriedades, a fim de ampliar suas estratégias de cálculo;
- Reconhecer que a adição e a subtração são operações inversas.
- Realizar cálculo mental e escrito envolvendo as operações de multiplicação e divisão de números naturais;
- Reconhecer que operações de multiplicação e divisão são inversas;
- Utilizar as relações entre a multiplicação e a divisão, assim como suas propriedades, para ampliar as estratégias de cálculo.

Sugestões: Antes de iniciar a aplicação das tarefas certifique-se de que há material suficiente para todos, a Escala Cuisenaire é vendida em caixas pequenas (individuais) mas, se necessário, podem ser utilizadas em duplas; e caixas grandes com 294 peças, que podem ser divididas em grupos maiores, certifique-se também de fornecer lápis de cor para as crianças. Deixe um tempo livre para que os alunos manipulem o material livremente, para que as tarefas possam ser exploradas depois, nessa brincadeira eles conhecem as peças do material, suas semelhanças e diferenças. As tarefas podem ser realizadas todas em grupos, porém é importante que cada criança tenha o seu registro individual, assim uma ajuda a outra a conferir suas respostas. A duração de cada tarefa pode variar, mas leva em média uma hora para que os alunos consigam concluí-la. Antes de realizar as tarefas converse com os alunos sobre as características do material (cores e tamanhos das peças).

Tarefa 1: Antes de aplicar a tarefa 1 peça aos alunos que separem as peças da maneira que acharem melhor, e em seguida questione-os sobre a forma como separaram as peças:

Por que você separou dessa forma?

É possível fazer de outro jeito?

Os grupos que você fez possuem peças iguais ou diferentes?

Então, peça que separem por tamanho e depois por cor, e se algum aluno já tiver feito, aproveite e peça para mostrar aos outros colegas, pergunte se há diferença entre separar por cor ou por tamanho, as peças das mesmas cores possuem o mesmo tamanho?

Leia todo o enunciado da tarefa 1, e responda se tiverem alguma dúvida, nesta tarefa eles devem colorir os desenhos com as cores da Escala Cuisenaire.

Professor, em todas as tarefas em que hajam desenhos para os alunos colorirem devemos lembrar que são apenas representações do material em uma de suas dimensões. Questione os alunos se nestes grupos de peças que estão colorindo há todas as cores de peças da Escala Cuisenaire, no grupo da peça branca pode-se deixar que o aluno escolha não pintar ou pintar da cor mais próxima à madeira. A segunda parte desta tarefa se refere às perguntas:

Qual grupo possui as peças maiores?

Quantas peças há em cada grupo?

Qual grupo possui as peças menores?

Se necessário escreva estas questões no quadro para ajudar os alunos a localizarem onde escrever suas respostas.

Tarefa 2: Se for realizar as tarefas em dias diferentes, antes de começar, deixe pelo menos 10 ou 15 minutos para que eles brinquem com as peças.

Leia o enunciado da tarefa e, se os alunos não entenderem o que é uma sequência, aproveite este momento para relembrar. Deixe que façam várias sequências diferentes para depois formarem a sequência solicitada que é do menor para o maior. A cada sequência que a criança formar você pode questioná-lo sobre como fez, se seguiu alguma regra.

Tarefa 3: Nesta tarefa temos a intenção que o aluno perceba o padrão da sequência e encontre as peças que faltam para completá-las. Caso os alunos ainda não estejam alfabetizados, leia o enunciado da tarefa para as crianças. Deixe que eles façam testes com as peças e encontrem sozinhos a que está faltando, você pode escrever a pergunta sobre quantas estão faltando no quadro. Os alunos devem desenhar a peça que falta na sequência para isso eles podem utilizar a própria peça e realizar o contorno.

Tarefa 4: Nesta tarefa, o espaço superior do trem deve ser preenchido totalmente; por meio desta atividade eles poderão começar a relacionar a extensão das peças e suas cores com os números que representam. Lembre-se que cada peça só equivale a um número se comparado com outra, por exemplo a peça amarela equivale a 5, pois consideramos a branca como uma unidade e cabem 5 brancas na amarela.

Esta tarefa está dividida em três etapas que os alunos devem concluir. Oriente os alunos a contarem as peças brancas e registrarem no círculo que está à frente de cada trem, ao final discuta os valores que registraram para que eles associem as cores dos trens com os números. O tempo para realização de cada tarefa pode diminuir depois que os alunos estiverem mais habituados com o manuseio do material.

Tarefa 5: Para realizar esta tarefa alguns alunos irão recorrer às peças coloridas para ver qual se encaixa na parte inferior dos trens, assim pode ser que eles descubram rapidamente a cor com a qual devem pintar. É interessante que a tarefa 4 e 5 sejam realizadas no mesmo dia, assim o número de peças brancas para cada peça colorida auxiliará o aluno na memorização das cores com os respectivos números. Se os alunos ainda não tiverem memorizado o número relacionado a cada peça, solicite que eles comparem quantas peças brancas são necessárias para completar o mesmo comprimento de cada uma das outras cores, registre no quadro se necessário.

Tarefa 6: Para realizar esta tarefa assim como já foi mencionado nas anteriores, tire ao menos 10 minutos para que os alunos manipulem o material sem orientações, depois comece questionando-os sobre quantas peças brancas são necessárias para formar uma verde-escuro, por exemplo. Depois peça para que as crianças leiam cada pergunta e indique o lugar onde devem registrar suas respostas, é importante lembrálos de colocar as peças na horizontal porque eles podem colocar na vertical e pintar apenas um quadradinho para cada peça.

Ao final também pode-se mudar as perguntas, por exemplo, começar com: Como podemos formar o lilás utilizando duas peças? Essas tarefas são apenas o começo do trabalho, a partir daqui o professor pode continuar trabalhando números maiores e também iniciando conceitos básicos de adição e subtração.

A tarefa é uma forma de registro, oralmente e com a manipulação, o professor pode abordar diversos conceitos, ao iniciar com a adição no primeiro ano pode-se deixar que os alunos utilizem uma malha quadriculada e façam seus próprios registros sem introduzir inicialmente o algoritmo.

Tarefa 7: O objetivo da tarefa é que os alunos conheçam melhor a Escala Cuisenaire, compreendam que cada peça que tem a mesma cor também tem o mesmo tamanho, e entendam que, se atribuirmos o número 1 à peça branca, cada uma das outras peças também representará um número de 2 a 10.

Tarefa 8: Ao representar o número nove, no quadriculado, surgirão diferentes possibilidades, depois da realização da parte 1 desta tarefa pode-se explorar todas as possibilidades no quadro e escrever as adições de dois números que resulta no 9, isso auxiliará na compreensão da segunda parte da tarefa.

Caso algumas crianças realizem a tarefa utilizando mais de duas peças, o professor pode pedir que registre apenas a de dois, mas pode discutir com todos as possibilidades feitas desta forma. O item 2 da tarefa 2 solicita aos alunos que completem o tapete de comprimento 7 da melhor maneira possível, depois de realizar a tarefa para o 8, o professor pode explorar outros números com os alunos formando diversos tapetes diferentes.

Tarefa 9: Ao realizar esta tarefa a maioria dos alunos utilizam a peça laranja (dez) mais a peça que completa o comprimento do número solicitado, é interessante instigá-los a explorar também as demais possibilidades, inclusive as que utilizam mais de duas peças da Escala Cuisenaire.

Depois de representar com as peças, os alunos deverão registrar o que fizeram na forma de uma adição, alguns alunos podem apresentar dificuldades neste momento, mas deixe que pensem e façam as possibilidades que pensaram, depois ajude-os, se possível, sempre fazendo perguntas e não dando respostas.

Tarefa 10: Essa tarefa está dividida em duas questões, para realização da primeira questão é necessário que inicialmente os alunos recebam as peças do material todas misturadas, assim eles observarão o material e irão escrever suas características. O trabalho em grupo pode ser de muita ajuda neste momento; as crianças poderão compartilhar suas dúvidas e discutir soluções umas com as outras. Depois de responder à questão 1, peça que compartilhem suas respostas com os colegas, assim poderão discutir as diferenças em suas respostas.

Para responder à questão 2 os alunos devem pegar uma peça de cada cor do material e colocar em ordem crescente, enfatize que eles devem fazer isso colocando a base de todas as peças na mesma reta para que possa compará-las.

Tarefa 11: Antes de realizar essa tarefa, será necessário explorar com os alunos como fazer um tapete com a Escala Cuisenaire. Um tapete é formado com peças de diferentes cores colocando uma peça abaixo da outra, de forma que todo o comprimento da peça da primeira linha seja preenchido de ponta a ponta nas próximas linhas, utilizando peças menores que a primeira e completando com outras também menores, formando um retângulo no final.

Veja na figura a seguir um exemplo de tapete:

***Figura 39** – tapete*

Fonte: a autora (2019)

Depois de explorar a ideia do tapete e construir alguns exemplos com os alunos, eles serão capazes de resolver a tarefa, o professor pode explorar as diferentes adições formadas pelos tapetes feitos pelos alunos, as três questões abordam a decomposição de números naturais, principalmente na questão 3 surgirão várias decomposições diferentes.

Tarefa 12: Nesta tarefa, o quadriculado não está na mesma escala das peças do material, fizemos isso intencionalmente, para que os alunos associem o número que cada peça representa com a quantidade de quadradinhos que deve colorir. Por exemplo, para colorir o quadriculado e representar a peça preta ele deve fazer isso com 7 quadradinhos.

As adições realizadas na questão 1 podem ser abordadas de forma coletiva, neste momento quem ficou com dúvida poderá perguntar, os próprios alunos podem vir a frente e mostrar as suas soluções aos colegas. A questão 2 solicita que os alunos encontrem os termos que estão faltando em algumas adições e utilizem a Escala Cuisenaire se acharem necessário, o professor pode explorar a resolução das adições com a Escala Cuisenaire mesmo que alguns alunos tenham feito sem utilizar o material, assim algumas ideias podem ficar mais claras.

Tarefa 13: Nesta tarefa o aluno pode pensar em diferentes expressões matemáticas para representar o que fez, utilizando adição ou subtração, dependendo da sua interpretação da figura. No número 1, por exemplo, pode registrar 3 + 5 = 8 ou 8 = 5 + 3, é importante explorar expressões em que o total está do lado esquerdo do sinal de igual para os alunos se acostumarem com diferentes notações, ou também com a subtração, que é o que queremos abordar com essa tarefa, 8 – 3 = 5 ou 8 – 5 = 3, a forma de registrar vai depender se o aluno está vendo as peças como uma forma de comparar os tamanhos ou de tirar uma parte de outra.

Tarefa 14: Essa tarefa envolve conceitos de composição e decomposição de números naturais, relações de igualdade e adição de números naturais, para realizá-la é importante que os alunos entendam como construir um tapete com as peças da Escala Cuisenaire, o professor pode fazer alguns como exemplo.

A turma deve ser dividida em grupos e o professor pode definir uma peça diferente para cada grupo fazer o tapete, é interessante que o professor escolha, já que se os alunos escolherem peças muito pequenas, como a amarela, haverá poucas possibilidades diferentes. Como cada grupo fará a tarefa com peças diferentes, ao final podem apresentar suas soluções aos colegas dos outros grupos.

Tarefa 15: Caso a turma em que o professor for aplicar essa tarefa não tenha utilizado a Escala Cuisenaire antes, pode-se utilizar algumas das tarefas anteriores para que eles se familiarizem com o material e com a forma de utilizá-lo para realizar as operações.

Na questão dois é importante explorar a recursividade que ocorre de um item para o outro, ou seja, os termos da letra *b* foram definidos partindo dos termos da letra *a* e subtraindo 2 de cada um deles.

Tarefa 16: Podemos iniciar essa tarefa resolvendo alguns cálculos que envolvam as quatro operações utilizando as peças da Escala Cuisenaire. No item *a*, da questão 1 o professor pode questionar os alunos sobre quantas peças vermelhas inteiras cabem no comprimento da azul, ou pode explorar a questão dos números decimais e questionar os alunos de forma que eles representem a parte que falta com uma fração da peça vermelha. No caso da letra *d*, se não surgirem expressões matemáticas por parte dos alunos, o professor deve abordar outras possibilidades. Com relação à questão 2, é interessante que o professor direcione os alunos para que resolvam as multiplicações com a Escala Cuisenaire, para que explorem a multiplicação com o material e vejam as possibilidades de 3 x 5 que é o comprimento de 3 peças amarelas juntas na horizontal ou a área do retângulo de altura 3 e largura 5, que pode ser formado com 3 peças amarelas também.

Tarefa 17: A tarefa 17 explora as relações entre a multiplicação e a divisão, já que uma mesma manipulação da Escala Cuisenaire pode ser interpretada tanto como multiplicação como divisão, quando encontramos a quantidade de peças iguais que são necessárias para completar um determinado comprimento. Os alunos precisarão ficar atentos à interpretação das questões.

Na questão 2, questiona-se sobre a possibilidade de representar o número 15 utilizando apenas peças pretas, a palavra *apenas* faz toda a diferença aqui, pois só com peças pretas não é possível, a não ser que cortemos um pedaço da terceira para completar o pedaço que falta.