



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

BRUNNA LEONARDI CACIOLATO

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE GEOMETRIA POR  
MEIO DE ORIGAMIS E DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE  
APRENDIZAGEM**

---

Londrina

2020

BRUNNA LEONARDI CACIOLATO

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE GEOMETRIA POR  
MEIO DE ORIGAMIS E DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE  
APRENDIZAGEM**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Neuza Teramon.

Londrina

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

B897 Caciolato, Brunna Leonardi.  
Uma abordagem para o ensino de Geometria por meio de Origamis e da Trajetória Hipotética de Aprendizagem / Brunna Leonardi Caciolato. - Londrina, 2020.  
146 f. : il.

Orientador: Neuza Teramon.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.  
Inclui bibliografia.

1. Ensino de Matemática. - Tese. 2. Geometria. - Tese. 3. Origami. - Tese. 4. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. - Tese. I. Teramon, Neuza. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

BRUNNA LEONARDI CACIOLATO

**UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO  
DE ORIGAMIS E DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE  
APRENDIZAGEM**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Neuza Teramon  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Magna Natália Marin Pires  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_.

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre acreditaram no meu potencial e sempre investiram na minha formação educacional.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço imensamente aos meus pais, pois o presente trabalho só foi possível uma vez que proporcionaram todo o suporte necessário para que eu pudesse ter o devido tempo dedicado aos estudos.

Ao Vinicius por ser compreensivo e estar comigo nos momentos mais difíceis, me incentivando sempre a continuar estudando.

A minha orientadora Professora Doutora Neuza Teramon não somente por todas as opiniões, conselhos e suporte para este trabalho, mas também pela sua amizade.

Aos professores da UEL que sempre me incentivaram a continuar buscando conhecimento.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado.

A Deus por ter me proporcionado perseverança para enfrentar todos os obstáculos que surgiram ao longo do curso.

“O importante é não parar de questionar. A curiosidade tem sua própria razão de existir.”

(Albert Einstein)

CACIOLATO, Brunna Leonardi. **Uma abordagem para o ensino de Geometria por meio de Origamis e da Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. 2020. 146f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## RESUMO

Tendo em vista a dificuldade dos alunos nas aulas de Matemática, propõe-se neste trabalho uma ferramenta diferenciada para o ensino da Geometria: a utilização do Origami, que consideramos um instrumento para atrair a atenção dos alunos e facilitar a aprendizagem. Este trabalho apresentará a história do Origami, os axiomas relacionados às dobraduras, o ensino por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA e tarefas que combinam o Origami e a THA para abordar conceitos e figuras geométricas. A THA possibilita propor tarefas que serão hipoteticamente conduzidas por meio de diálogos que auxiliarão o professor na aplicação das mesmas. Acredita-se que a resolução das tarefas por meio do Origami trará para o aluno algo tangível e a forma como será orientada contribuirá para o desempenho do professor em sua sala de aula.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. Geometria. Origami. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Tarefas.



CACIOLATO, Brunna Leonardi. **An approach to teaching Geometry through Origami and Hypothetical Learning Trajectory**. 2020. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## ABSTRACT

Having in mind the difficulty of the pupils in the Mathematics classrooms, there is proposed in this work a tool differentiated for the teaching of the Geometry: the use of the Origami, which we find an instrument to attract the attention of the pupils and to make easy the apprenticeship. This work will present the history of the Origami, the axioms made a list to the folds, the teaching through the Hypothetical Trajectory of Apprenticeship – THA, and tasks that combine the Origami and the THA to board concepts and geometrical figures. The THA makes it possible to propose tasks that will be hypothetically driven through dialogs that will help the teacher in the application of the same. It is believed that the resolution of the tasks through the Origami will bring to the pupil something tangible and the form as it will be orientated will contribute to the performance of the teacher in the classroom.

Keywords: Teaching of Mathematics. Geometry. Origami. The hypothetical trajectory of Apprenticeship. Tasks.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Axiomas de Huzita-Hatori.....	21
Figura 2: Axioma 1 .....	22
Figura 3: Axioma 2 .....	22
Figura 4: Axioma 3 .....	23
Figura 5: Axioma 4 .....	23
Figura 6: Axioma 5 .....	24
Figura 7: Axioma 6 .....	24
Figura 8: Axioma 7 .....	25
Figura 9: Segmento de reta.....	30
Figura 10: Construção de um segmento de reta: etapa 1 .....	31
Figura 11: Construção de um segmento de reta: etapa 2 .....	31
Figura 12: Construção de um segmento de reta: dobras do aluno.....	32
Figura 13: Construção de um segmento de reta: etapa final.....	32
Figura 14: Construção de um ponto médio: dobra do aluno .....	33
Figura 15: Construção de um ponto médio: resultado da dobra do aluno .....	33
Figura 16: Construção de um ponto médio: passos iniciais .....	34
Figura 17: Construção de um ponto médio: passos finais.....	34
Figura 18: Construção de retas perpendiculares utilizando o ponto médio anterior ..	36
Figura 19: Construção de retas perpendiculares: etapa 1 .....	36
Figura 20: Construção de retas perpendiculares: dobra do aluno.....	37
Figura 21: Construção de retas perpendiculares: etapa 2.....	37
Figura 22: Construção de retas perpendiculares: etapa final .....	37
Figura 23: Construção de retas perpendiculares: construção dos ângulos .....	38
Figura 24: Construção de retas perpendiculares: medição dos ângulos.....	38
Figura 25: Construção de retas paralelas: etapa 1.....	39
Figura 26: Construção de retas paralelas: etapa 2.....	39
Figura 27: Construção de retas paralelas: dobra do aluno.....	40
Figura 28: Construção de retas paralelas: etapa 3.....	40
Figura 29: Construção de retas paralelas: etapa final .....	41
Figura 30: Construção de uma mediatriz: etapa 1.....	42
Figura 31: Construção de uma mediatriz: dobra do aluno.....	42
Figura 32: Construção de uma mediatriz: medição dos segmentos.....	43

Figura 33: Construção de uma mediatriz: etapa 2.....	44
Figura 34: Construção de uma mediatriz: dobra do aluno 2.....	44
Figura 35: Construção de uma mediatriz: etapa 3.....	45
Figura 36: Construção de uma mediatriz: etapa final .....	45
Figura 37: Construção de uma mediatriz: medindo $AP$ e $BP$ .....	45
Figura 38: Construção de uma bissetriz: etapa 1 .....	46
Figura 39: Construção de uma bissetriz: etapa 2 .....	47
Figura 40: Construção de uma bissetriz: etapa 3 .....	47
Figura 41: Construção de uma bissetriz: etapa final .....	48
Figura 42: Construções de polígonos quaisquer .....	50
Figura 43: Desenho de um retângulo .....	51
Figura 44: Construção de um retângulo: etapa 1 .....	52
Figura 45: Construção de um retângulo: etapa 2 .....	53
Figura 46: Construção de um retângulo: etapa 3 .....	53
Figura 47: Construção de um retângulo: etapa 4 .....	53
Figura 48: Construção de um retângulo: etapa final.....	54
Figura 49: Observações obtidas sobre o retângulo.....	55
Figura 50: Continuação das observações .....	56
Figura 51: Desenho de um quadrado.....	57
Figura 52: Construção de um quadrado: etapa 1 .....	57
Figura 53: Construção de um quadrado: etapa 2.....	58
Figura 54: Construção de um quadrado: etapa 3.....	58
Figura 55: Construção de um quadrado: etapa 4.....	59
Figura 56: Construção de um quadrado: etapa 5.....	59
Figura 57: Construção de um quadrado: etapa 6.....	60
Figura 58: Construção de um quadrado: etapa final .....	60
Figura 59: Observações obtidas sobre o quadrado.....	61
Figura 60: Desenho de um triângulo equilátero.....	62
Figura 61: Construção de um triângulo equilátero: etapa 1 .....	63
Figura 62: Construção de um triângulo equilátero: etapa 2.....	63
Figura 63: Construção de um triângulo equilátero: dobra do aluno .....	64
Figura 64: Construção de um triângulo equilátero: etapa 3.....	64
Figura 65: Construção de um triângulo equilátero: etapa 4.....	65
Figura 66: Construção de um triângulo equilátero: etapa final .....	65

Figura 67: Observações obtidas sobre o triângulo equilátero .....	66
Figura 68: Recorte do triângulo equilátero .....	67
Figura 69: Desenho de como recortar os ângulos do triângulo equilátero .....	67
Figura 70: Recorte dos ângulos do triângulo equilátero .....	68
Figura 71: Junção dos ângulos do triângulo equilátero .....	68
Figura 72: Construção de um hexágono regular: etapa 1 .....	69
Figura 73: Construção de um hexágono regular: etapa 2 .....	70
Figura 74: Construção de um hexágono regular: etapa 3 .....	70
Figura 75: Construção de um hexágono regular: etapa 4 .....	71
Figura 76: Construção de um hexágono regular: etapa 5 .....	71
Figura 77: Construção de um hexágono regular: etapa 6 .....	72
Figura 78: Construção de um hexágono regular: etapa 7 .....	72
Figura 79: Construção de um hexágono regular: etapa final.....	73
Figura 80: Observações obtidas sobre o hexágono regular .....	74
Figura 81: Desenho de um quadrado.....	75
Figura 82: Construção de um pentágono regular: etapa 1 .....	75
Figura 83: Construção de um pentágono regular: etapa 2 .....	76
Figura 84: Construção de um pentágono regular: etapa 3 .....	76
Figura 85: Construção de um pentágono regular: etapa 4 .....	77
Figura 86: Construção de um pentágono regular: etapa 5 .....	77
Figura 87: Construção de um pentágono regular: etapa 6 .....	78
Figura 88: Construção de um pentágono regular: etapa 7 .....	78
Figura 89: Construção de um pentágono regular: etapa 8 .....	79
Figura 90: Construção de um pentágono regular: etapa 9 .....	79
Figura 91: Construção de um pentágono regular: etapa 10 .....	80
Figura 92: Construção de um pentágono regular: etapa 11 .....	80
Figura 93: Construção de um pentágono regular: etapa final.....	80
Figura 94: Observações obtidas sobre o pentágono regular.....	81
Figura 95: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 1.....	85
Figura 96: Desenho de um quadrado com vértices marcados .....	85
Figura 97: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 2.....	85
Figura 98: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 3.....	86
Figura 99: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 4.....	86
Figura 100: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 5.....	87

Figura 101: Desenho de um retângulo com os vértices marcados.....	87
Figura 102: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 6.....	87
Figura 103: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 7.....	88
Figura 104: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 8.....	88
Figura 105: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 9.....	89
Figura 106: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 10.....	89
Figura 107: Desenho do quadrilátero formado com os vértices marcados .....	89
Figura 108: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 11.....	90
Figura 109: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 12.....	90
Figura 110: Construção do módulo de base quadrangular: etapa final .....	91
Figura 111: Construção do módulo triangular: etapa 1 .....	91
Figura 112: Desenho de um quadrado com os vértices marcados .....	92
Figura 113: Construção do módulo triangular: etapa 2 .....	92
Figura 114: Construção do módulo triangular: etapa 3 .....	92
Figura 115: Construção do módulo triangular: etapa 4 .....	93
Figura 116: Construção do módulo triangular: etapa 5 .....	93
Figura 117: Construção do módulo triangular: etapa 6 .....	94
Figura 118: Construção do módulo triangular: etapa 7 .....	94
Figura 119: Construção do módulo triangular: etapa 8 .....	95
Figura 120: Construção do módulo triangular: etapa 9 .....	95
Figura 121: Construção do módulo triangular: etapa 10 .....	96
Figura 122: Construção do módulo triangular: etapa 11 .....	96
Figura 123: Construção do módulo triangular: etapa final.....	97
Figura 124: Desenho de um quadrado com os vértices marcados .....	97
Figura 125: Construção do módulo de encaixe: etapa 1 .....	98
Figura 126: Construção do módulo de encaixe: etapa 2 .....	98
Figura 127: Desenho do quadrado menor com os vértices marcados .....	99
Figura 128: Construção do módulo de encaixe: etapa 3 .....	99
Figura 129: Construção do módulo de encaixe: etapa 4 .....	100
Figura 130: Construção do módulo de encaixe: etapa 5 .....	100
Figura 131: Construção do módulo de encaixe: etapa 6 .....	101
Figura 132: Construção do módulo de encaixe: etapa final .....	101
Figura 133: Desenho de um retângulo com os vértices marcados.....	102
Figura 134: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 1 .....	102

Figura 135: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 2 .....	103
Figura 136: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 3 .....	103
Figura 137: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 4 .....	104
Figura 138: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 5 .....	104
Figura 139: Desenho de um hexágono com os vértices marcados .....	105
Figura 140: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 6 .....	105
Figura 141: Desenho do hexágono formado com as abas marcadas .....	105
Figura 142: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 7 .....	106
Figura 143: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 8 .....	106
Figura 144: Desenho do pentágono formado com os vértices marcados .....	107
Figura 145: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 9 .....	107
Figura 146: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 10 .....	108
Figura 147: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 11 .....	108
Figura 148: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 12 .....	109
Figura 149: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 13 .....	109
Figura 150: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 14 .....	110
Figura 151: Construção do módulo de base pentagonal: etapa final .....	110
Figura 152: Construção de um cubo: etapa 1 .....	111
Figura 153: Construção de um cubo: etapa 2 .....	112
Figura 154: Construção de um cubo: etapa 3 .....	112
Figura 155: Construção de um cubo: etapa 4 .....	113
Figura 156: Construção de um cubo: etapa final.....	114
Figura 157: Planificação do cubo .....	116
Figura 158: Construção de um tetraedro: etapa 1 .....	117
Figura 159: Construção de um tetraedro: etapa 2.....	118
Figura 160: Construção de um tetraedro: etapa 3.....	118
Figura 161: Construção de um tetraedro: etapa 4.....	119
Figura 162: Construção de um tetraedro: etapa 5.....	119
Figura 163: Construção de um tetraedro: etapa 6.....	119
Figura 164: Construção de um tetraedro: etapa 7.....	120
Figura 165: Construção de um tetraedro: etapa final I .....	120
Figura 166: Construção de um tetraedro: etapa final II .....	121
Figura 167: Planificação do tetraedro: tentativa do aluno .....	122
Figura 168: Planificação do tetraedro.....	123

Figura 169: Construção de um octaedro: etapa 1 .....	124
Figura 170: Construção de um octaedro: etapa 2 .....	124
Figura 171: Construção de um octaedro: etapa 3 .....	125
Figura 172: Construção de um octaedro: etapa 4 .....	125
Figura 173: Construção de um octaedro: etapa 5 .....	125
Figura 174: Construção de um octaedro: etapa 6 .....	126
Figura 175: Construção de um octaedro: etapa final.....	126
Figura 176: Octaedro desmontado.....	128
Figura 177: Planificação do tetraedro.....	128
Figura 178: Construção de um dodecaedro: etapa 1 .....	129
Figura 179: Construção de um dodecaedro: etapa 2 .....	130
Figura 180: Construção de um dodecaedro: etapa 3 .....	130
Figura 181: Construção de um dodecaedro: etapa 4 .....	131
Figura 182: Construção de um dodecaedro: etapa 5 .....	131
Figura 183: Construção de um dodecaedro: etapa 6 .....	132
Figura 184: Construção de um dodecaedro: etapa 7 .....	132
Figura 185: Construção de um dodecaedro: etapa 8 .....	133
Figura 186: Construção de um dodecaedro: etapa final.....	133
Figura 187: Planificação do dodecaedro .....	135
Figura 188: Construção de um icosaedro: etapa 1.....	136
Figura 189: Desenho da planificação de um icosaedro.....	136
Figura 190: Planificação do icosaedro .....	137
Figura 191: Construção de um icosaedro: etapa 2.....	137
Figura 192: Construção de um icosaedro: etapa 3.....	138
Figura 193: Construção de um icosaedro: etapa 4.....	138
Figura 194: Construção de um icosaedro: etapa 5.....	139
Figura 195: Construção de um icosaedro: etapa 6.....	139
Figura 196: Construção de um icosaedro: etapa final .....	140

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Lados, vértices e ângulos: anotação 1 .....	54
Quadro 2: Lados, vértices e ângulos: anotação 2 .....	56
Quadro 3: Lados, vértices e ângulos: anotação 3 .....	60
Quadro 4: Lados, vértices e ângulos: anotação 4 .....	62
Quadro 5: Lados, vértices e ângulos: anotação 5 .....	65
Quadro 6: Lados, vértices e ângulos: anotação 6 .....	69
Quadro 7: Lados, vértices e ângulos: anotação 7 .....	73
Quadro 8: Lados, vértices e ângulos: anotação 8 .....	74
Quadro 9: Lados, vértices e ângulos: anotação 9 .....	81
Quadro 10: Lados, vértices e ângulos: anotação 10 .....	82
Quadro 11: Notação dos lados, vértices e ângulos .....	82
Quadro 12: Notação dos lados, vértices e ângulos com respostas .....	83
Quadro 13: Elementos dos poliedros: anotação 1 .....	115
Quadro 14: Elementos dos poliedros: anotação 2 .....	122
Quadro 15: Elementos dos poliedros: anotação 3 .....	127
Quadro 16: Elementos dos poliedros: anotação 4 .....	134
Quadro 17: Elementos dos poliedros: anotação final .....	141



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

THA	Trajetória Hipotética de Aprendizagem
RPG	Role playing game

## Sumário

1.	<i>INTRODUÇÃO</i> .....	17
2.	<i>CONHECENDO O ORIGAMI</i> .....	19
3.	<i>OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI</i> .....	22
4.	<i>ENTENDENDO A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM</i> .....	27
5.	<i>PROPOSTA DE TRABALHO</i> .....	29
6.	<i>BLOCO DE TAREFAS 1: CONCEITOS BASICOS DA GEOMETRIA</i> .....	30
6.1	CONSTRUINDO UM SEGMENTO DE RETA .....	30
6.2	CONSTRUINDO O PONTO MÉDIO .....	33
6.3	CONSTRUINDO RETAS PERPENDICULARES .....	35
6.4	CONSTRUINDO RETAS PARALELAS .....	39
6.5	CONSTRUINDO A MEDIATRIZ .....	41
6.6	CONSTRUINDO A BISSETRIZ .....	46
7.	<i>BLOCO DE TAREFAS 2: CONSTRUINDO POLÍGONOS</i> .....	49
7.1	CONSTRUINDO UM POLÍGONO .....	49
7.2	CONSTRUINDO UM RETÂNGULO .....	51
7.3	CONSTRUINDO UM QUADRADO .....	57
7.4	CONSTRUINDO UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO .....	62
7.5	CONSTRUINDO UM HEXÁGONO REGULAR .....	69
7.6	CONSTRUINDO UM PENTÁGONO REGULAR .....	74
8.	<i>BLOCO DE TAREFAS 3: CONSTRUINDO POLIEDROS DE PLATÃO</i> .....	84
8.1	CONSTRUINDO O MÓDULO DE BASE QUADRANGULAR .....	84
8.2	CONSTRUINDO O MÓDULO TRIANGULAR .....	91
8.3	CONSTRUINDO O MÓDULO DE ENCAIXE .....	97
8.4	CONSTRUINDO O MÓDULO DE BASE PENTAGONAL .....	102
8.5	CONSTRUINDO UM CUBO .....	110
8.6	CONSTRUINDO UM TETRAEDRO .....	116
8.7	CONSTRUINDO UM OCTAEDRO .....	123
8.8	CONSTRUINDO UM DODECAEDRO .....	128
8.9	CONSTRUINDO UM ICOSAEDRO .....	135
9.	<i>CONSIDERAÇÕES FINAIS</i> .....	143

## 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho os professores poderão examinar como o aluno pode ser capaz de observar ou manusear alguns elementos da Geometria em sala de aula, uma vez que, se tem por objetivo expor uma proposta de aula, utilizando a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), que será descrita posteriormente, indicando como o Origami, que será apresentado nos primeiros capítulos, pode ser aplicado no ensino da Geometria, e como ele pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo dos alunos. Acredita-se que ao manipular o papel o aluno poderá compreender os conceitos e definições apresentados pelo professor, que muitas vezes, podem ficar vagos ou abstratos aos alunos. Espera-se que o uso de um material manipulável auxilie na compreensão de conceitos e objetos da Geometria e a utilização da THA contribua para a formação do professor.

A ideia de trabalhar com a THA começou em 2016, quando eu era aluna do curso de Licenciatura em Matemática e realizei meu primeiro estágio supervisionado na Universidade Estadual de Londrina - UEL. Durante o estágio, que na época era feito em duplas, nos foi proposto produzir duas oficinas a fim de serem aplicadas, no final do ano letivo, na Rede Pública de Ensino. Tendo em vista que as aulas expositivas são conhecidas pelos alunos, e que é a metodologia mais adotada nas escolas, buscamos por métodos diferenciados na forma de ensino. Ao entrar em contato com nossa orientadora de estágio, ela nos deu a ideia de organizar as oficinas utilizando a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). A partir desse momento, pesquisamos sobre esse recurso metodológico e percebemos que com ele iríamos ter uma facilidade maior em aplicar nossa aula, pois pensaríamos antecipadamente em possíveis encaminhamentos de aula, tipos de soluções das questões, erros que os alunos seriam capazes de cometer, dúvidas que eles poderiam possuir, e já teríamos nos planejado para resolver essas situações.

Por fim, após a aplicação da oficina concluímos que a THA teve uma grande contribuição em nossa aula, estávamos muito mais preparadas, pois nenhuma de nós duas tínhamos aplicado uma aula, como professoras regentes, até aquele momento. Por meio do planejamento que tivemos durante o ano, ao preparar nossa trajetória, soubemos como agir nas situações decorrentes, já para aquelas que não foram previstas, estávamos capacitadas para pensar na hora e saber como proceder com determinada situação.

Além disso, a metodologia utilizada neste trabalho é acessível a qualquer professor, tornando uma aula possível de ser aplicada no ensino básico e a forma em que a proposta de trabalho foi desenvolvida, ajuda o professor com as possíveis dificuldades dos alunos e possíveis ações a serem tomadas para sequência da aula, pois a THA tem por objetivo, auxiliar o professor a aplicar sua aula e antecipar prováveis soluções a serem tomadas, antes mesmo que ocorra qualquer imprevisto durante a aplicação dela.

A proposta deste trabalho é descrever tarefas em que podemos construir com dobraduras os seguintes elementos: os conceitos básicos da Geometria plana (tarefa 1), alguns polígonos regulares (tarefa 2) e os poliedros de Platão (tarefa 3). Para tanto, inicialmente apresentamos um pequeno histórico sobre os Origamis e observamos os axiomas de Huzita-Hatori. A ideia é que se o aluno se empenhar e se esforçar para poder dobrar o papel e entender o que aquilo está se tornando, o aluno tem a possibilidade de adquirir estes conhecimentos, podendo compreender os conceitos mais facilmente. Além disso, também apresentamos, no capítulo 4, as bases da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

## 2. CONHECENDO O ORIGAMI

O texto a seguir baseia-se no artigo *Origami* de Rafael (2011), para podermos ter uma pequena introdução sobre o que é o Origami, onde surgiu, e quais são suas aplicações.

Alguns autores relatam que a invenção do papel teve seu início na China por volta de 150 d.C., há um manuscrito com esta data no Museu Britânico, onde um funcionário da corte imperial relatou ao imperador esta invenção. Mas com recentes investigações arqueológicas encontraram pedaços de papel no templo do Imperador Wu, que reinou nos anos 140-84 a.C., então a partir desses fatos não podemos ter certeza qual foi a data exata para a invenção do papel.

O papel chegou ao Japão por volta do século VI d.C. e foi lá que o Origami começou a se desenvolver.

A palavra Origami de origem japonesa é composta por duas outras palavras “ori” e “kami”, em que “ori” vem do verbo “oru” que significa dobrar e “kami” vem de papel, logo juntos formam a palavra Origami. No entanto, além de papel, “kami” pode significar Deus, o que mostra a importância do papel para os japoneses e por isso podemos dizer que Origami é a arte japonesa de dobrar o papel.

Não podemos esquecer de citar um sistema criado por volta de 1950, que é a contribuição mais significativa para a técnica do Origami, que permite a propagação internacional dos vários modelos. Esse Sistema foi criado por duas pessoas: o japonês Akira Yoshizawa, considerado o *pai do Origami moderno* que introduziu uma transformação drástica na técnica de dobrar o papel, e o americano Sam Randlett que criou uma simbologia de instruções para dobrar os modelos. Com a união dessas produções e com as bases sobre a técnica, foi criado o *Sistema Yoshizawa – Randlett*, 1956 que constitui a *Linguagem do Origami*.

Com base no texto de Rafael (2011), podemos afirmar que os fundamentos construídos com a técnica do Origami e Origami Modular tem sido muito utilizados, a técnica modular se baseia em construir vários módulos que são chamados comumente de módulos de Sonobe e com eles criar outras figuras mais complexas, normalmente é o que mais atrai o estudo e a construção de poliedros, pois possibilita a elaboração de figuras em três dimensões.

Esta introdução histórica não poderia terminar sem nos referir a Humiaki Huzita, um matemático que nasceu no Japão, mas viveu grande parte da

sua vida na Itália, descreveu seis operações básicas que podem ser aplicadas nos Origamis e nos permitem caracterizar formalmente todo tipo de construção geométrica que é possível de ser feita com um Origami, essas operações ficaram conhecidas como *Axiomas de Huzita*. Em 2001 Koshiro Hatori acrescentou mais uma operação, o sétimo axioma, obtendo assim os *Axiomas de Huzita-Hatori*. A figura 1 resume os sete axiomas de Huzita-Hatori, mostrando quais as construções geométricas básicas possíveis com dobraduras.

Agora que conhecemos um pouco sobre a história desse material manipulável podemos citar Dias (2015) para justificar seu uso em sala de aula, pois ela afirma que:

A aprendizagem dos conceitos geométricos, muitas vezes, não é significativa, isso se dá pelo fato de que, na maioria das vezes, a geometria é apresentada aos alunos de forma mecanizada. O ensino de Geometria na escola tem se caracterizado por uma ênfase no caráter quantitativo [...]. Pouca ênfase é dada aos conceitos propriamente ditos.

Com base nesses fatos e diante das dificuldades expressas no ensino da geometria, é notória a importância da utilização de recursos materiais. Um recurso de bastante eficácia é o origami. (DIAS, 2015, p. 10-11)

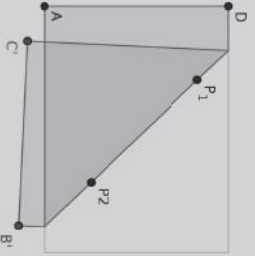
Além desta autora podemos citar também Rafael (2011) que nos revela com sua própria experiência a grande relevância desse material manipulável:

Estudando o vasto mundo do Origami podemos verificar que os seus modelos podem, por um lado, ser alvo de estudo matemático e, por outro, permitem não apenas fazer construções geométricas, mas também estabelecer resultados. [...] pode concluir que o Origami melhora significativamente a comunicação matemática. (RAFAEL, 2011, p.19)

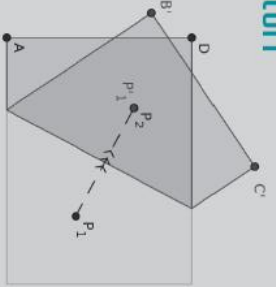
Com base nas autoras podemos afirmar que a utilização de um material manipulável é de grande relevância no ensino da Geometria, especificamente o uso do Origami, visto que, ao provocar a curiosidade no aluno com a utilização das dobras, acarreta no desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos, tornando-se um instrumento pedagógico cativante, pois com base na autora Dias (2015) ele tem sido cada vez mais aceito pelos professores e na maioria das vezes tem bons resultados em sala de aula.

Além disso, o Origami consiste em um material didático que torna o ensino-aprendizagem em uma atividade envolvente e motivadora na qual os alunos podem fortalecer sua experimentação geométrica e a visão espacial. (DIAS, 2015)

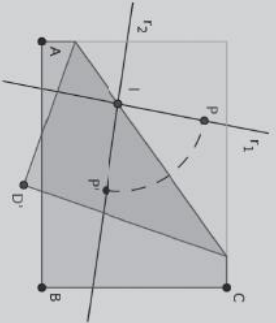
### Axiomas de Huzita-Hatori



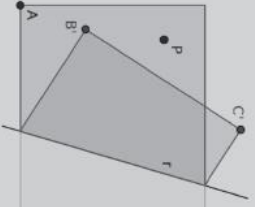
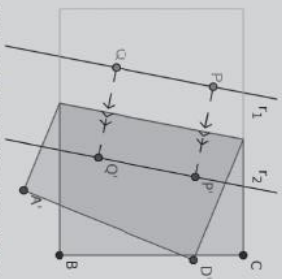
Ax 1.—Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que passa por eles.



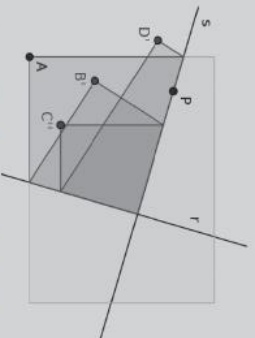
Ax 2.—Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que faz coincidir  $P_1$  com  $P_2$



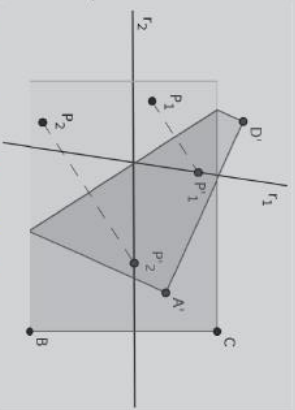
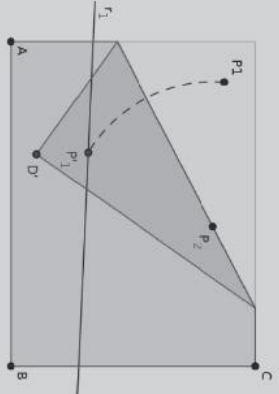
Ax 3.—Dadas as rectas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que faz coincidir  $r_1$  com  $r_2$ .



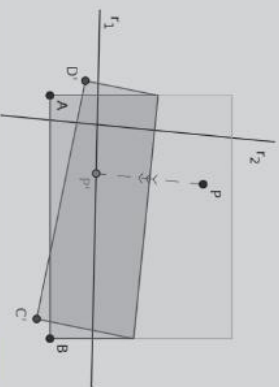
Ax 4.—Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma única dobra que é perpendicular a  $r$  e que passa por  $P$ .



Ax 5.—Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for superior ou igual à distância de  $P_2$  a  $r_1$ , então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $r_1$  e que passa por  $P_2$ .



Ax 6.—Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as rectas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior à distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .



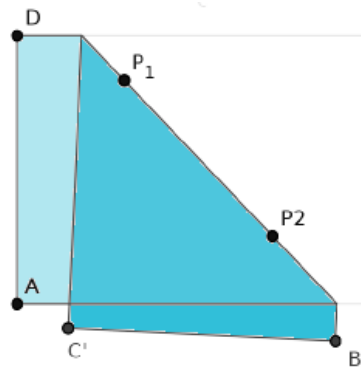
Ax 7.—Dados um ponto  $P$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as rectas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r_1$  e é perpendicular a  $r_2$ .

### 3. OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

Os axiomas de Huzita-Hatori indicam quais os problemas geométricos que podem ser obtidos com dobraduras constituindo os princípios matemáticos do Origami. Os axiomas que tem como referência Rafael (2011) e sua associação com a Geometria, que foram retirados de Pin e Uribe (2016), são descritos a seguir:

**Axioma 1:** *Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que passa por eles.*

Figura 2: Axioma 1

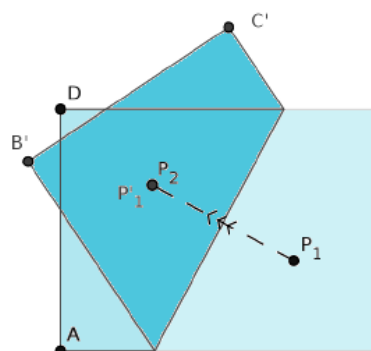


Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.3

Esse axioma está relacionado com o seguinte axioma de Geometria Euclidiana Plana: “dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém” (BARBOSA, 2003 p.1).

**Axioma 2:** *Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que faz coincidir  $P_1$  com  $P_2$ .*

Figura 3: Axioma 2



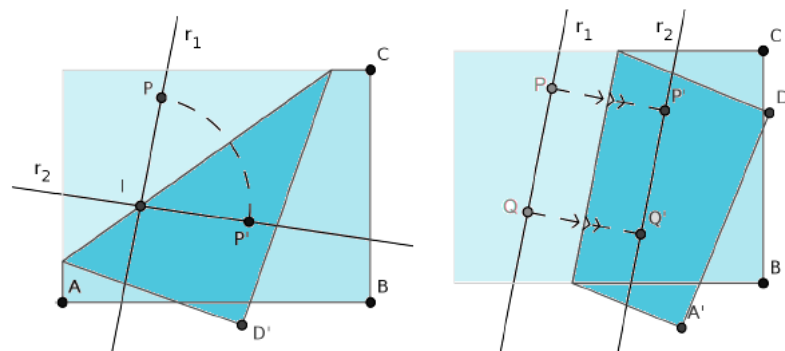
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.3



Este axioma está relacionado à existência e unicidade da mediatriz do segmento  $\overline{P_1P_2}$ . Percebemos que ao dobrar a folha, fazendo com que  $P_1$  incida sobre  $P_2$ , a dobra dividirá o segmento  $\overline{P_1P_2}$  em duas partes, de mesma medida, segundo Pin e Uribe (2016).

**Axioma 3:** Dadas duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que faz coincidir  $r_1$  com  $r_2$ .

Figura 4: Axioma 3

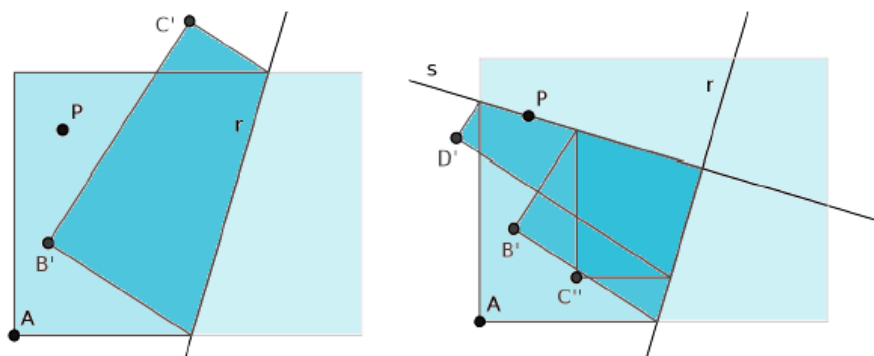


Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.4

O axioma acima está associado às bissetrizes dos ângulos formados pela intersecção das duas retas. As retas que contêm essas bissetrizes são as dobras que fazem  $r_1$  e  $r_2$  coincidirem.

**Axioma 4:** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma única dobra que é perpendicular a  $r$  e que passa por  $P$ .

Figura 5: Axioma 4

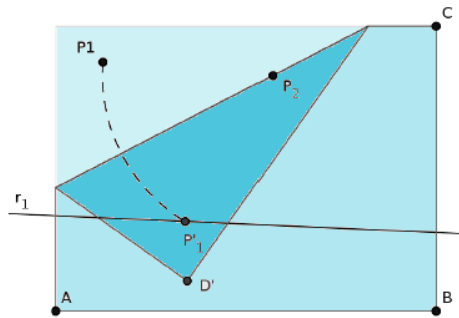


Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.4

O axioma acima está associado à existência e unicidade da reta perpendicular que passa por um ponto.

**Axioma 5:** Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for superior ou igual à distância de  $P_2$  a  $r_1$  então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $r_1$  e que passa por  $P_2$ .

Figura 6: Axioma 5

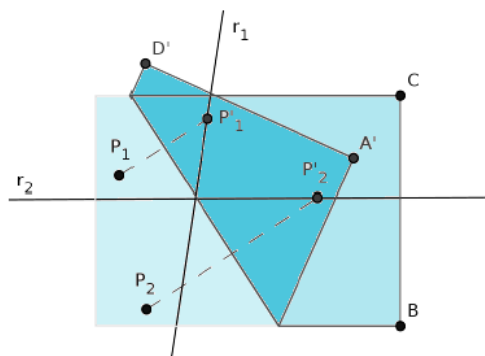


Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.4

De acordo com Furuya (2009), a quantidade de configurações do Axioma 5 pode ser 0, 1 ou 2, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois o problema é equivalente a encontrar a intersecção da reta  $r_1$  com a circunferência de centro  $P_2$  passando por  $P_1$ .

**Axioma 6:** Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior à distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .

Figura 7: Axioma 6

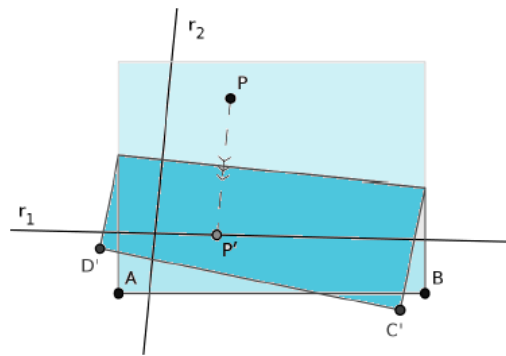


Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.5

Após realizar a dobra, teremos a mediatriz os segmentos  $\overline{P_1P_1'}$  e  $\overline{P_2P_2'}$ , onde  $P_1'$  e  $P_2'$  são os pontos gerados em  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, após a dobra.

**Axioma 7:** Dado um ponto  $P$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r_1$  e é perpendicular a  $r_2$ .

Figura 8: Axioma 7



Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, p.5

Este último axioma Pin e Uribe (2016) dizem que é discutível, pois decorre das construções repetidas do Axioma 4 descrito anteriormente, portanto sua relação com a Geometria fica diretamente relacionada com o axioma 4.

A apresentação destes “axiomas” mostra a relação existente entre os Origamis e a Matemática, pois as dobras não são meramente dobras, elas possuem um caráter matemático que podemos averiguar ao estudar profundamente essas relações lógicas.

Podemos verificar que os axiomas tem uma relação com os c axiomas geométricos tradicionais, pois todas as construções realizadas por meio de dobraduras, são regidas por um corpo axiomático, da mesma forma que os axiomas tradicionais. Os axiomas listados acima, regem todas as construções realizáveis por meio das dobraduras, além disso descrevem a Matemática de dobrar o papel para resolver problemas de construção geométrica, assim o aluno não precisa somente decorar as construções e os passos que farão um após o outro, ao observar as dobras no papel pode compreender a essência dos conceitos de forma lúdica e espontânea. (DIAS, 2015).

Podemos salientar a relevância das dobraduras ao citar Dias (2015) ao afirmar que:

por intermédio do uso das dobraduras de papel, o ensino da geometria passa a favorecer associações entre conteúdos abstratos e problemáticas cotidianas, isto porque na confecção de cada

dobradura tornam-se extremamente necessárias articulações de estratégias geométricas para efetuar tais construções. (DIAS, 2015, p.11)

Dessa forma concluímos que quando o aluno visualiza o que está construindo, começa a controlar o conjunto de operações básicas para a aprendizagem em geometria e conseqüentemente aprende quando passa a elaborar os próprios conceitos. (DIAS, 2015).

#### 4. ENTENDENDO A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Pelas observações feitas ao longo dos anos, pode-se dizer que a Matemática é uma das matérias em que os alunos possuem mais dificuldade por ter uma linguagem bem complexa. É deste ponto que partimos, tomando como hipótese que os alunos possuem diversos obstáculos para o aprendizado em Matemática e isso pode se tornar uma barreira para o educador desta área.

Tendo em vista essa dificuldade que o professor enfrenta na sala de aula iremos propor uma abordagem que pode trazer benefícios à aprendizagem dos alunos e à formação do professor, por isso nos basearemos em Simon (1995) que propôs a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA).

Eu uso o termo "trajetória hipotética de aprendizagem" tanto para me referir à previsão do professor como para a trajetória que possibilitará a aprendizagem. É hipotética, porque a verdadeira trajetória de aprendizagem não é cognoscível de antecedência. Isso caracteriza uma expectativa. (SIMON, 1995 apud ROSSETTO, 2016, p. 23).

De acordo com Rossetto (2016), Simon pensou em um Ciclo de Ensino da Matemática que consiste em se basear nos conhecimentos do professor e a partir deles planejar a THA em que existem três etapas: o objetivo do professor para a aprendizagem, o plano do professor para as tarefas de aprendizagem e hipóteses do professor para o processo de aprendizagem. Tendo passado por essas etapas o professor pode aplicar as tarefas em sala de aula e pode avaliar o conhecimento dos alunos, complementando assim, os conhecimentos do professor, e com essa experiência adquirida pode-se começar todo o ciclo novamente criando uma nova THA refinada. (ROSSETTO, 2016)

Nesse ciclo de ensino da Matemática o professor pode pensar antes da aplicação das tarefas, em como agir no decorrer da aula e desta forma estar preparado para lidar com diferentes situações que aparecem, podendo então fazer o direcionamento dos conteúdos a partir das resoluções apresentadas, dúvidas ou erros dos estudantes.

Sabemos que ao construir a THA não conseguiremos pensar em todas as possibilidades que irão ocorrer. Com isso em vista, obviamente acontecerão imprevistos, e dessa forma o professor poderá fazer modificações no que havia planejado para que possa se encaixar no que esteja acontecendo naquele momento, mas como ele teve a experiência de planejar as possibilidades que podem

acontecer, ele terá maior segurança no momento em que for conduzir essa novidade que ocorreu, tornando-o mais capacitado para resolver situações que possam transcorrer durante a sua aula, de acordo com Rosseto (2016).

Ainda conforme Rosseto (2016) a THA pode ter três aspectos diferentes: em um primeiro momento a parte de elaborar a THA, a qual a autora denomina como “planejamento” da trajetória, um segundo momento que ela caracteriza como “processo”, que seria a aplicação da THA, e o terceiro momento que inclui os conhecimentos obtidos pelo professor para se replanejar e obter uma THA melhorada, onde é chamado de “replanejamento”.

Dessa forma, um dos objetivos deste trabalho é utilizar o processo de elaboração de uma THA, com a qual o professor pode observar: as decisões que podem ser tomadas de acordo com as tarefas propostas, a previsão que se pode ter sobre a aprendizagem dos alunos, os diálogos hipotéticos que podem ocorrer durante a aula, as perguntas que podem ser feitas para levar o aluno a refletir e concluir algo sobre o assunto tratado. A parte de aplicação desta trajetória não será feita neste momento, mas pode ser aplicada pelos professores, caso queiram. Desta forma o replanejamento só poderá ser possível após a aplicação.

Portanto, a aplicação das tarefas aqui propostas pode ser feita com mais segurança e as perguntas que o professor fará, auxiliará o aluno em seu aprendizado, apontando uma tentativa de quebrar as barreiras que o professor tanto enfrenta hoje em dia.

## 5. PROPOSTA DE TRABALHO

Neste trabalho propomos 3 tarefas para que possam ser aplicadas no Ensino Fundamental ou Médio, na área de Geometria, com a finalidade de auxiliar os professores a utilizar o Origami como um material de ensino, para cada tarefa e para cada ação do professor, teremos uma THA produzida, com as quais o professor poderá ver as ações que podem ser tomadas, quais são as dúvidas que podem surgir e quais os encaminhamentos que poderá fazer pra lidar com essas e outras situações. Mas deixamos claro que é uma trajetória “hipotética”, ou seja, são apenas algumas suposições desta autora do que pode acontecer na sala de aula no momento em que serão aplicadas as tarefas, portanto não é algo rígido e pode ser alterada da forma que o leitor julgar necessário.

Outro ponto que damos ênfase é que como estamos supondo um diálogo com o aluno, algumas falas não atendem ao rigor matemático, então em alguns momentos podemos observar algumas conclusões singelas.

Para a aplicação das tarefas assumimos em todo o trabalho que o papel e todas as construções dos conceitos matemáticos são representações de plano, reta, segmentos, etc. Além disso tomamos por hipótese que o papel não tem espessura para que essa representação do plano euclidiano seja possível.

A primeira tarefa faz com que o próprio aluno construa, por intermédio das instruções do professor, os principais conceitos da Geometria Plana com o Origami, como: reta, ponto médio, retas paralelas e perpendiculares, mediatriz e bissetriz.

A segunda tarefa, com os passos que o professor irá mostrar, o aluno irá construir alguns dos principais polígonos conhecidos da Geometria. Por meio deste grupo de tarefas, o professor pode dar início ao trabalho com Polígonos, apresentando os elementos de um polígono e retirando informações das construções que fizeram, como também pode utilizar esta tarefa para lembrar o que é um polígono para que possa dar início ao trabalho com Poliedros.

A terceira tarefa os alunos construirão módulos de Sonobe que são as peças que podem ser encaixadas e serem transformadas em poliedros, como tínhamos definido anteriormente e, assim, depois de construídos poderemos estudar as quantidades de vértices, faces e arestas, possibilitando ao aluno a descobrir a relação de Euler.

## 6. BLOCO DE TAREFAS 1: CONCEITOS BASICOS DA GEOMETRIA

A intenção do primeiro bloco de tarefas é trabalhar com os conceitos básicos da Geometria, serão expostas as tarefas e serão feitas perguntas para que o aluno possa construir, por meio do Origami, retas, ponto médio, retas paralelas, retas perpendiculares, mediatriz e bissetriz. As primeiras definições têm como referência Barbosa (2003).

Primeiramente vamos expor aos alunos os conceitos básicos no quadro e assim entregaremos os papéis para cada um e faremos as perguntas, para que eles possam visualizar e construir o que acabamos de definir.

### 6.1 CONSTRUINDO UM SEGMENTO DE RETA

Para esta e para as próximas tarefas estaremos assumindo que a folha de papel representa o plano e dobras na folha de papel podem representar retas ou segmentos de retas, desta forma destacamos que todas as construções obtidas aqui são apenas representações de planos e retas.

Não temos uma definição para ponto, reta e plano, mas podemos pensar que o plano seja representado pela folha de papel e um ponto seja representado por uma pequena marca produzida pela ponta de um lápis, quando pressionada sobre o papel. Sabendo disso, ao desenhar dois pontos  $A$  e  $B$  no plano, um segmento de reta será o conjunto constituído por dois pontos  $A$  e  $B$  e por todos os pontos que se encontram entre  $A$  e  $B$  em uma linha reta. Os pontos  $A$  e  $B$  são denominados extremos ou extremidades do segmento. (BARBOSA, 2003). Escreveremos, neste trabalho,  $\overline{AB}$  para denotar qualquer segmento ou sua medida, o contexto nos permitirá perceber se a notação  $\overline{AB}$  significa o segmento de extremidades  $A$  e  $B$  ou se trata da medida do mesmo.

*Figura 9: Segmento de reta*



*Fonte: o próprio autor*

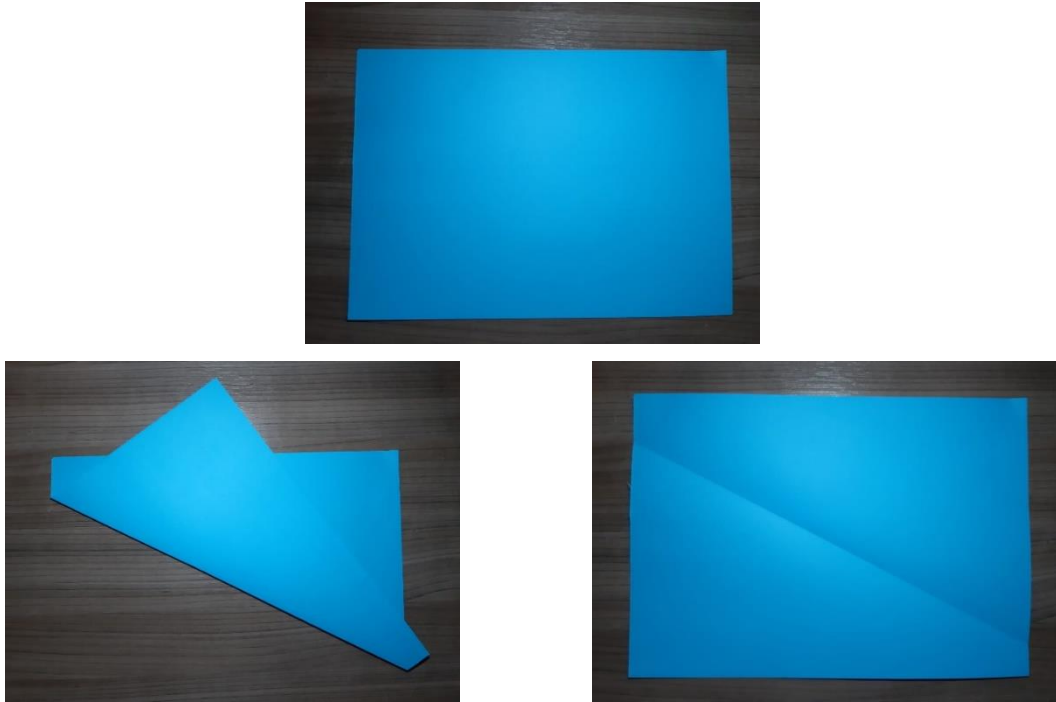
Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem que simulará um possível diálogo entre o professor, representado pela sigla P, e os alunos, representados pela sigla A.



P: Como vocês poderiam tentar construir um segmento de reta nesse papel dobrando-o?

A: Vendo a sua definição e o seu desenho professor, posso fazer uma dobra assim e quando eu abrir terei um segmento de reta.

*Figura 10: Construção de um segmento de reta: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

P: Muito bem! Podemos agora dar nome a esse segmento de reta construído, só precisamos fazer dois pontos nele.

A: Assim?

*Figura 11: Construção de um segmento de reta: etapa 2*

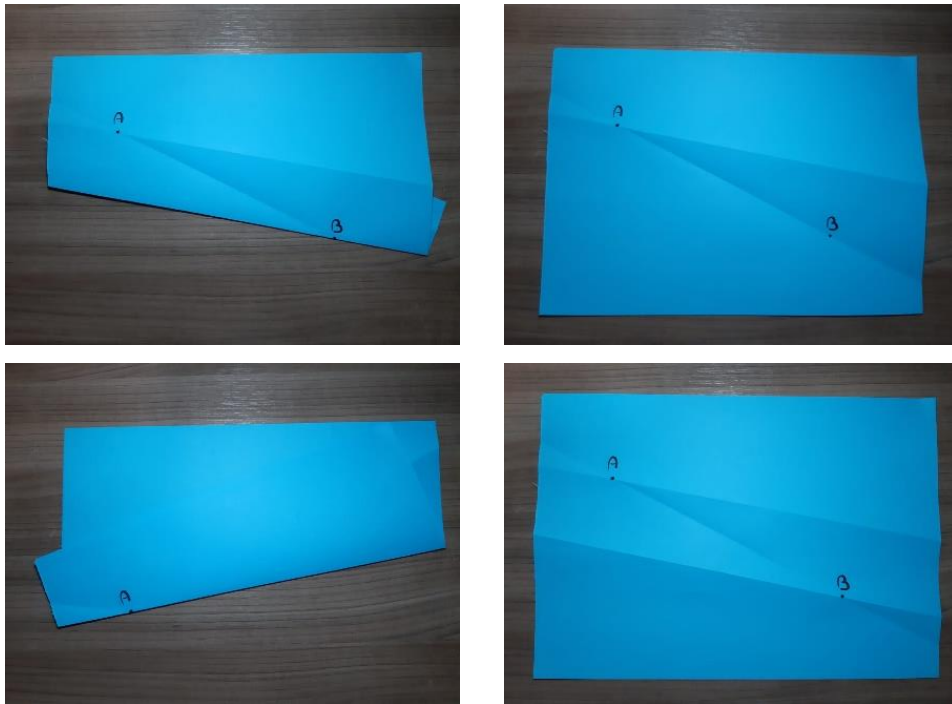


**Fonte:** o próprio autor

P: Isso mesmo! Agora vendo que este segmento de reta passa por estes dois pontos, você acha que é possível a construção de outras retas distintas que passam por  $A$  e  $B$  ao mesmo tempo? Vamos tentar?

A: Não professor, só consigo construir essa reta.

Figura 12: Construção de um segmento de reta: dobras do aluno



Fonte: o próprio autor

P: Então em qual conclusão podemos chegar?

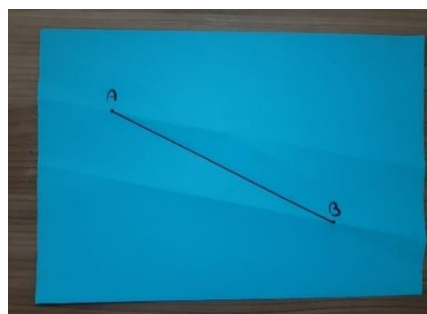
A: Que sobre esses dois pontos só conseguimos passar uma reta?

P: Isso mesmo! Podemos definir então que: Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

P: Podemos ver também que o nosso papel pode representar um plano, e essa dobra que formamos representa um segmento de reta, se quiséssemos construir uma reta teríamos que imaginar que essa folha de papel fosse infinita, e quando a dobrássemos formaríamos um “segmento de reta” infinito, e isso é o que podemos chamar de reta, pois uma reta é uma linha infinita.

A: Posso desenhar assim então?

Figura 13: Construção de um segmento de reta: etapa final



Fonte: o próprio autor

P: Isso mesmo, este é o segmento  $\overline{AB}$

## 6.2 CONSTRUINDO O PONTO MÉDIO

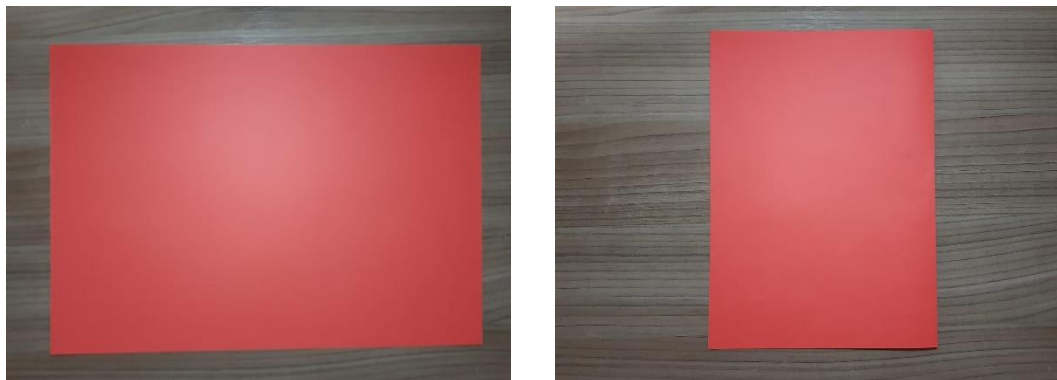
Chamamos ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , a um ponto  $M$  deste segmento tal que, os segmentos  $\overline{AM} = \overline{MB}$ , ou seja, quando os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  são congruentes.

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Sabendo a definição de ponto médio, vocês conseguiriam dobrar o papel e encontrá-lo?

A: Posso somente dobrar a folha no meio e vou encontrar a metade, assim:

*Figura 14: Construção de um ponto médio: dobra do aluno*



**Fonte:** o próprio autor

*Figura 15: Construção de um ponto médio: resultado da dobra do aluno*



**Fonte:** o próprio autor

P: Assim você encontraria o meio do papel todo, mas queremos o ponto médio de um segmento, não precisamos primeiro de um segmento de reta e depois encontrar este ponto?

A: Verdade professor.

A: Então se eu colocar o ponto  $A$  em cima do ponto  $B$  e dobrar, encontrarei o ponto médio?

P: Sim, me mostre na sua folha.

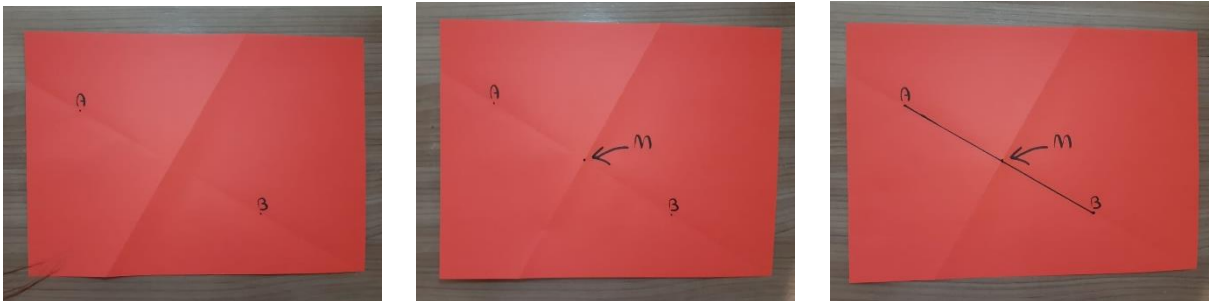
A: Assim:

Figura 16: Construção de um ponto médio: passos iniciais



Fonte: o próprio autor

Figura 17: Construção de um ponto médio: passos finais



Fonte: o próprio autor

P: Muito bem, você conseguiu encontrar o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .

P: Vamos medir os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$ ? O que podemos concluir com isto?

A: Utilizando a régua professor, vejo que  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  tem a mesma medida.

P: Isso mesmo, o ponto médio sempre estará no meio do segmento  $\overline{AB}$ , por isso chamamos os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  de congruentes, pois eles são iguais.

### 6.3 CONSTRUINDO RETAS PERPENDICULARES

Antes de começar o assunto das retas perpendiculares, eu sugiro ao professor fazer perguntas para verificar se os alunos conhecem alguns ângulos ou se for possível, pode-se pedir uma pesquisa para que tragam as definições de cada ângulo, caso eles não saibam ou não seja possível fazer a pesquisa é necessário dizer que o ângulo agudo é aquele com angulação entre 0 e 90 graus, obtuso é aquele que tem angulação de 90 a 180 graus, reto é aquele que tem a angulação exata de 90 graus e raso é aquele que tem angulação exata em 180 graus, assim as retas perpendiculares ficariam mais fáceis de serem definidas.

Também podemos definir as retas concorrentes e perpendiculares:

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo de  $90^\circ$  entre si.

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Após estudarmos os ângulos, sabemos como é um ângulo de  $90^\circ$ , agora olhando para a nossa definição, como podemos formar esse ângulo entre dois segmentos de reta?

A: Não sei professor.

P: Sobre a nossa tarefa anterior, o que você pode dizer sobre a definição de retas concorrentes?

A: Quando encontramos o ponto médio, na tarefa anterior, dobramos um segmento em cima do outro e eles se encontraram em um único ponto, os segmentos serão concorrentes?

P: Sim serão!

A: Então quando fizemos a tarefa anterior, se desenharmos um segmento de reta onde dobramos, também construiremos segmentos de retas perpendiculares?

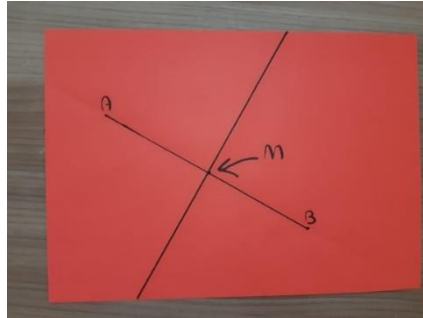
P: Sim, me mostre no papel.

A: Mas eu só preciso desenhar para que forme uma reta perpendicular?

P: Não, ainda aprenderemos como construir uma, mas primeiro me mostre essa.

A: Ok!

Figura 18: Construção de retas perpendiculares utilizando o ponto médio anterior



Fonte: o próprio autor

P: Isso! Consegui construir segmentos de reta perpendiculares, mas que acha de tentarmos construir um que não use o ponto médio?

A: Podemos tentar, por onde começamos?

P: Primeiro vamos construir a representação de um segmento qualquer, e marque um ponto em qualquer lugar da folha.

A: Ok.

Figura 19: Construção de retas perpendiculares: etapa 1

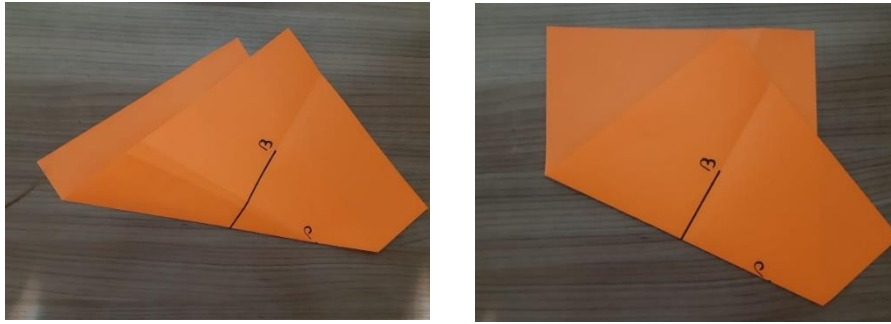


Fonte: o próprio autor

P: Agora tente fazer um segmento de reta que passe por esse ponto  $P$  e seja perpendicular ao segmento anterior.

A: Assim professor?

Figura 20: Construção de retas perpendiculares: dobra do aluno



Fonte: o próprio autor

P: Não, o segmento  $\overline{AB}$  deve continuar em cima dele mesmo, quando fizer a dobra, mas deve passar por  $P$ .

A:

Figura 21: Construção de retas perpendiculares: etapa 2



Fonte: o próprio autor

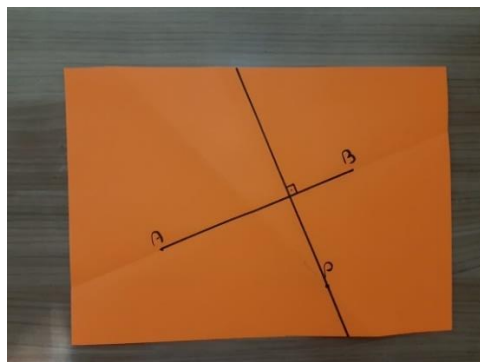
P: Isso mesmo, agora abra e meça com o transferidor, o que você pode concluir?

A: Medi e deu  $90^\circ$  professor.

P: Isso mesmo então os segmentos são perpendiculares, faça-o na sua folha.

A:

Figura 22: Construção de retas perpendiculares: etapa final



Fonte: o próprio autor

P: Muito bem!

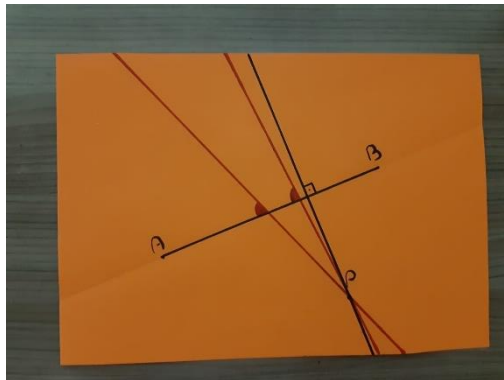
P: Agora gostaria de te mostrar o que aconteceu com as outras dobras que você fez, vamos marcá-las no papel.

A: O que eu preciso fazer?

P: Somente passe a caneta em cima das dobras que fizemos.

A: Ok!

Figura 23: Construção de retas perpendiculares: construção dos ângulos

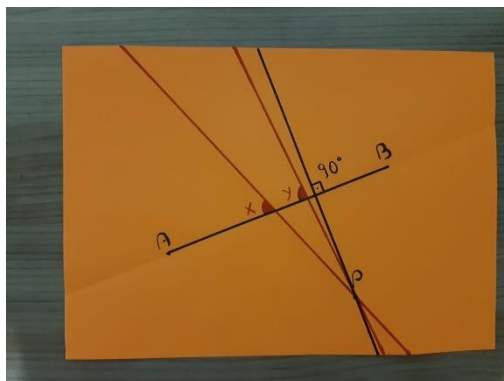


Fonte: o próprio autor

P: Meça com transferidor esses ângulos que foram formados com o segmento  $\overline{AB}$  o que você pode perceber?

A: Percebi que as outras dobras fizeram ângulos diferentes com o segmento  $\overline{AB}$ .

Figura 24: Construção de retas perpendiculares: medição dos ângulos



Fonte: o próprio autor

P: Isso mesmo, quando fazemos a dobra exatamente em cima do segmento  $\overline{AB}$  ele terá  $90^\circ$ , mas quando não fica exatamente em cima, somente formamos um ângulo qualquer.



## 6.4 CONSTRUINDO RETAS PARALELAS

Partindo da definição “Duas retas que não se interceptam são ditas paralelas” temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

A: Professor o que é interceptam?

P: Interceptar quer dizer cortar, se cruzar, então as retas paralelas nunca tocam uma na outra, que é o contrário das retas concorrentes que acabamos de estudar, pois as concorrentes é quando as retas se tocam em algum ponto.

A: Entendi professor.

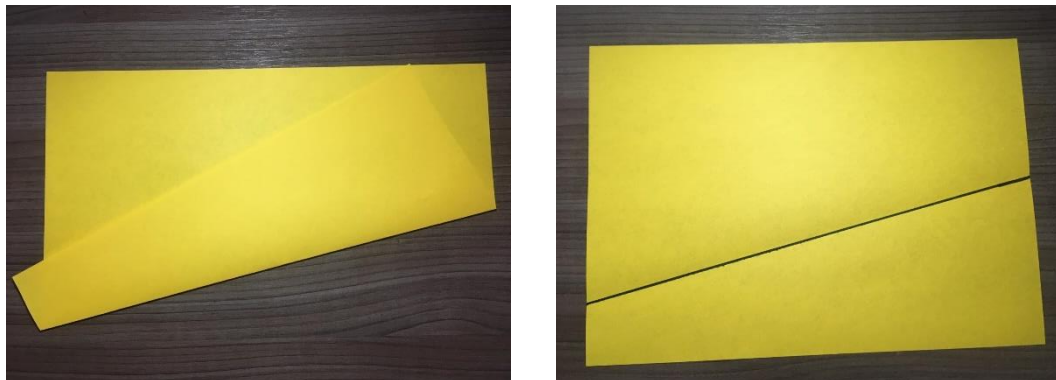
P: Bom agora vamos construir essas retas que não se cortam. Primeiramente o que deveríamos fazer?

A: Fazer uma reta professor?

P: Isso mesmo!

A: Aqui está!

*Figura 25: Construção de retas paralelas: etapa 1*

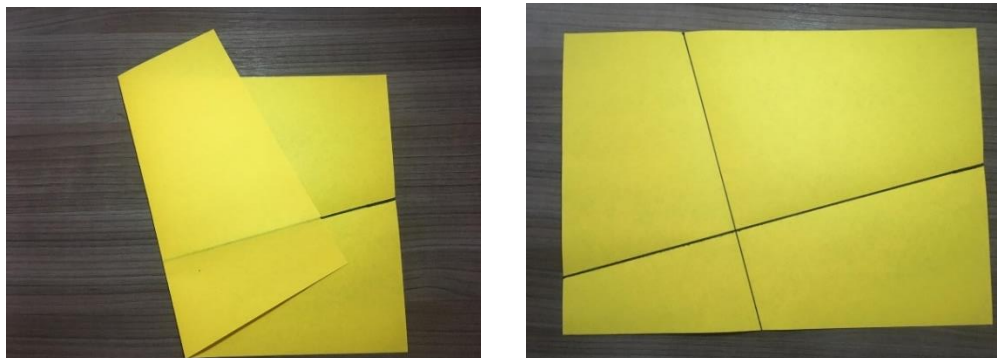


**Fonte:** o próprio autor

P: Bom depois de construirmos nossa primeira reta devemos construir uma reta perpendicular à essa primeira, que estudamos na tarefa anterior.

A: Essa eu já sei fazer!

*Figura 26: Construção de retas paralelas: etapa 2*

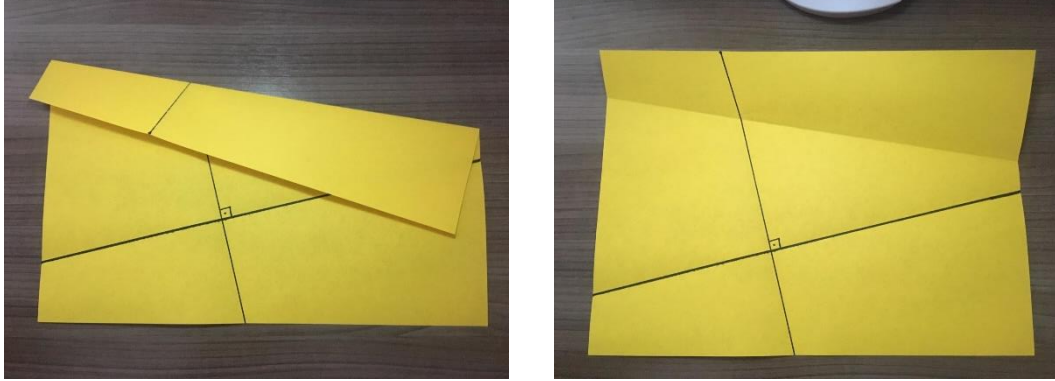


**Fonte:** o próprio autor

P: Ótimo! Agora vamos pensar em como faríamos uma reta que não vai atravessar a nossa primeira reta.

A: Posso fazer assim professor:

*Figura 27: Construção de retas paralelas: dobra do aluno*



**Fonte:** o próprio autor

P: Então, esta reta que você fez parece não tocar na primeira, mas lembra quando fizemos a tarefa do segmento de reta?

A: Lembro professor!

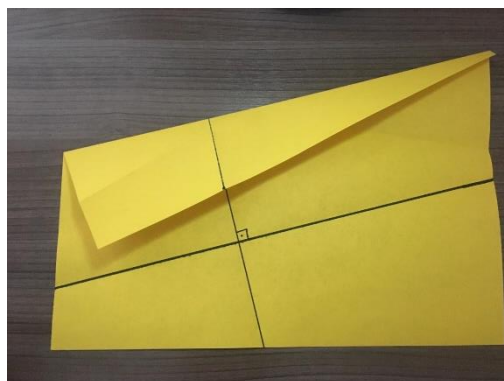
P: Pois bem, nessa folha não conseguimos ver que elas se tocam, mas temos que imaginar que essa folha de papel seja muito grande e assim, como as retas são infinitas em algum momento elas irão se cruzar, então temos que pensar em uma outra maneira de construir essa reta paralela.

A: Ok.

P: Consegue imaginar como faria uma outra reta perpendicular a primeira reta que fizemos?

A: Consigo assim professor:

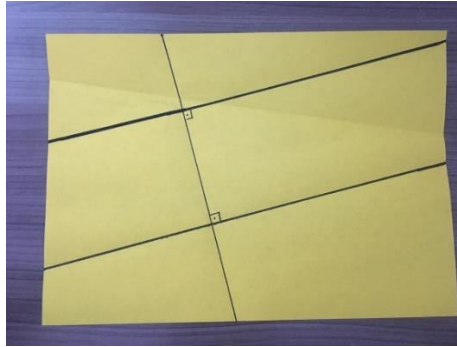
*Figura 28: Construção de retas paralelas: etapa 3*



**Fonte:** o próprio autor

P: Isso mesmo! Como fizemos outra reta também perpendicular a primeira, não terá como elas se encontrarem em outro lugar, vamos abrir e ver como ficou!

*Figura 29: Construção de retas paralelas: etapa final*



**Fonte:** o próprio autor

P: Muito bem! Para construir a reta paralela, é só construir qualquer outra reta que seja perpendicular à segunda reta que construímos.

Sugestão de encaminhamento.

Neste momento o professor pode explicar que quando são formadas retas paralelas cortadas por outra reta os ângulos recebem nomes diferenciados, como os alternos internos e alternos externos. Após isso ainda pode explorar a seguinte propriedade:

- Ângulos colaterais internos são suplementares, assim como os ângulos colaterais externos.

Dessa forma, como foram formadas as retas paralelas usando o conceito de retas perpendiculares fica fácil de mostrar que a soma desses ângulos é  $180^\circ$ .

Além disso o professor pode também sugerir aos alunos que façam uma dobra qualquer que intercepte as duas retas paralelas, criando assim uma reta transversal, desta forma poderá explorar os outros pares de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Uma sugestão é pedir aos alunos que, após construída a reta transversal, meçam com transferidor os ângulos que foram formados e descubram a relação entre eles, assim poderão observar quais são os ângulos que possuem a mesma medida, apenas com as orientações do professor.

## 6.5 CONSTRUINDO A MEDIATRIZ

“A mediatriz de um segmento  $\overline{AB}$ , é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $A$  e  $B$ . É uma reta perpendicular ao segmento e que passa pelo ponto médio de  $\overline{AB}$ .” (DIAS, 2015, p.29)

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Vamos tentar construir a mediatriz do nosso segmento  $\overline{AB}$ ?

A: Claro professor!

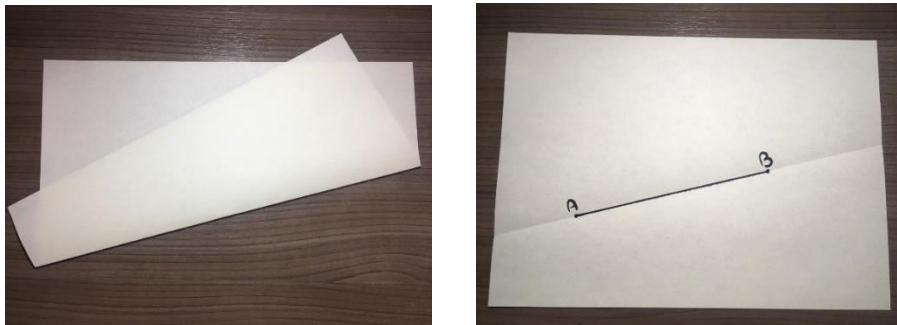
P: Olhando para a definição qual seria a primeira coisa que deveríamos construir na nossa folha?

A: Um segmento de reta?

P: Isso mesmo!

A: Esse é fácil!

*Figura 30: Construção de uma mediatriz: etapa 1*



*Fonte: o próprio autor*

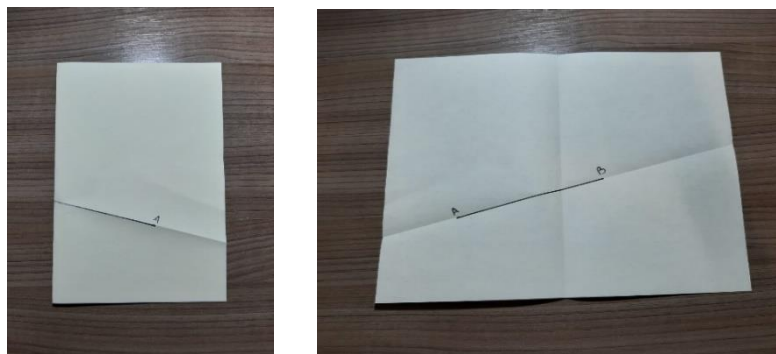
P: E agora qual o próximo passo?

A: A definição diz que a mediatriz passa pelo ponto médio, devemos então encontrar esse ponto?

P: Sim! Me mostre.

A: Assim?

*Figura 31: Construção de uma mediatriz: dobra do aluno*



*Fonte: o próprio autor*

P: O ponto que você encontrou é um ponto que está dentro do segmento  $\overline{AB}$ , mas você tem certeza de que ele é ponto médio?

A: Eu acho que sim.

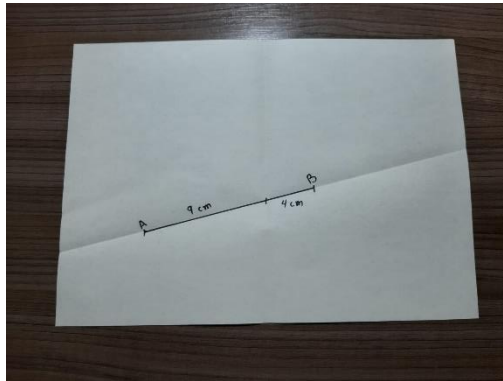
P: Vamos relembrar a definição de ponto médio?

A: “Chamamos ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , a um ponto  $M$  deste segmento tal que, os segmentos  $\overline{AM} = \overline{MB}$ , ou seja, quando os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  são congruentes.”

P: Vamos medir os segmentos que você encontrou

A:

*Figura 32: Construção de uma mediatriz: medição dos segmentos*



**Fonte:** o próprio autor

P: Você lembra o que significa congruentes?

A: Sim, que são iguais.

P: Isso, e os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MB}$  que você encontrou são congruentes?

A: Não professor.

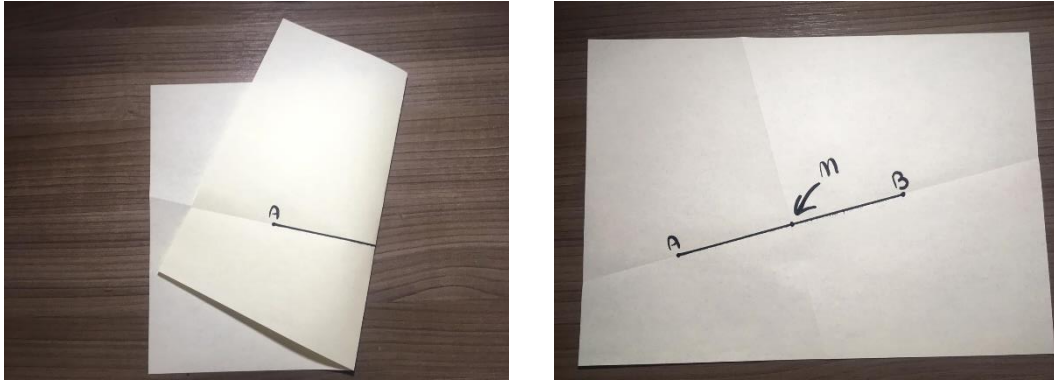
P: Então teremos que encontrar o ponto onde os segmentos fiquem congruentes.

A: Ok, como faço isso?

P: Lembre que quando for dobrar o ponto  $A$  deve chegar exatamente em cima do ponto  $B$ .

A: Entendi!

Figura 33: Construção de uma mediatriz: etapa 2



Fonte: o próprio autor

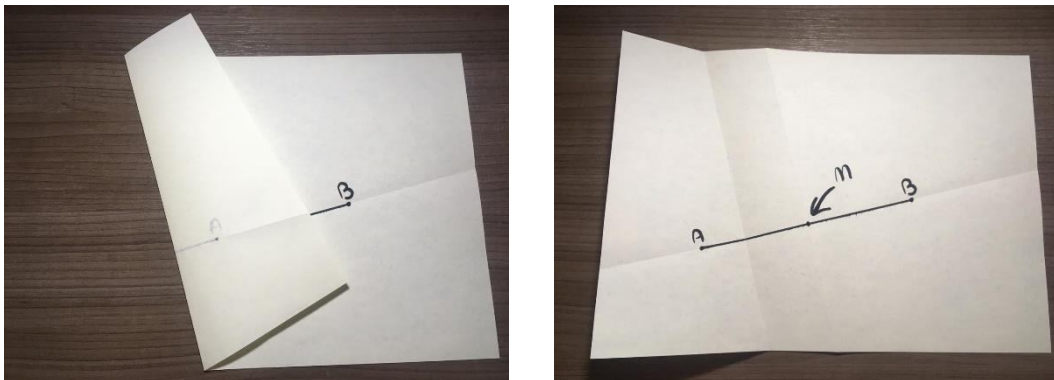
P: E agora, como poderíamos continuar para encontrar a mediatriz?

A: Olhando a definição devemos fazer uma reta perpendicular?

P: Isso mesmo!

A: Assim?

Figura 34: Construção de uma mediatriz: dobra do aluno 2



Fonte: o próprio autor

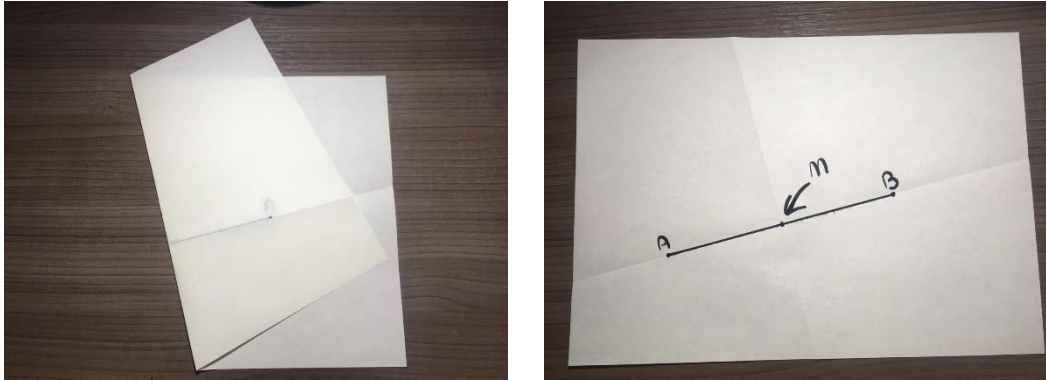
P: Você construiu uma reta perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ , mas ela não é a mediatriz, pois a mediatriz tem que passar exatamente no ponto médio que construímos, se não ela não será equidistante aos pontos  $A$  e  $B$ .

A: Entendi, então a dobra que fizemos para encontrar o ponto médio já encontra a mediatriz?

P: Sim encontra!

A: Então farei assim:

Figura 35: Construção de uma mediatriz: etapa 3



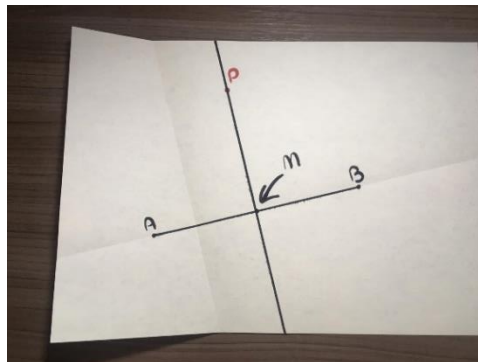
Fonte: o próprio autor

P: Muito bem!

P: Para ficar claro vamos fazer um ponto em qualquer lugar da nossa mediatriz.

A: Ok!

Figura 36: Construção de uma mediatriz: etapa final

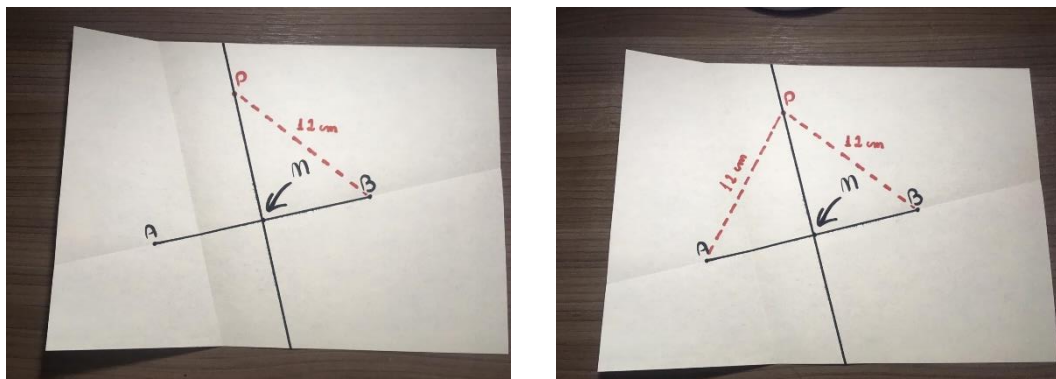


Fonte: o próprio autor

P: Agora vamos pegar uma régua e medir a distância desse ponto até  $A$  e desse ponto até  $B$ , que medidas encontraram?

A:

Figura 37: Construção de uma mediatriz: medindo  $AP$  e  $BP$



Fonte: o próprio autor

A: As duas medidas são iguais professor!

P: Isso mesmo, por isso na definição é dita que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $A$  e de  $B$ .

## 6.6 CONSTRUINDO A BISSETRIZ

“A bissetriz de um ângulo, é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes”. (DIAS, 2015, p.31)

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Sabemos então que a bissetriz “corta” um ângulo ao meio, como podemos então formar qualquer ângulo para que possamos dividi-lo em 2?

A: Se eu fizer duas retas que se cruzam, formarão um ângulo, certo?

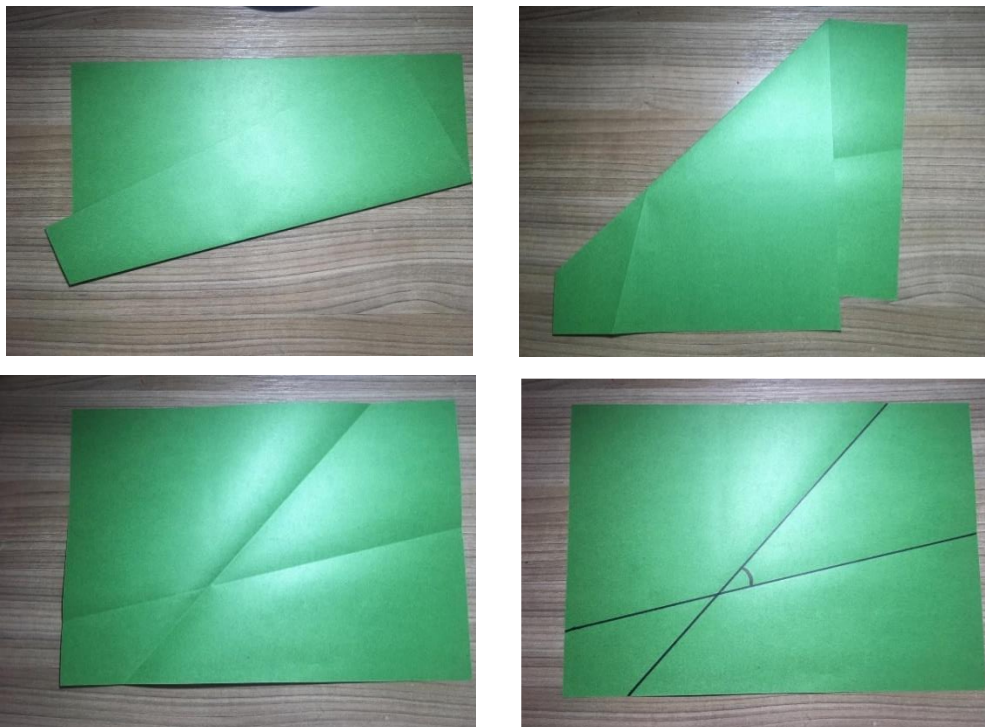
P: Sim isso mesmo e como se chamam essas retas que se cruzam?

A: Concorrentes.

P: Ótimo então vamos construir duas retas concorrentes, elas podem formar qualquer ângulo que quiserem

A: Fiz!

*Figura 38: Construção de uma bissetriz: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor



P: Pronto agora que temos as retas devemos localizar o ângulo que queremos dividir, então daremos nome a ele.

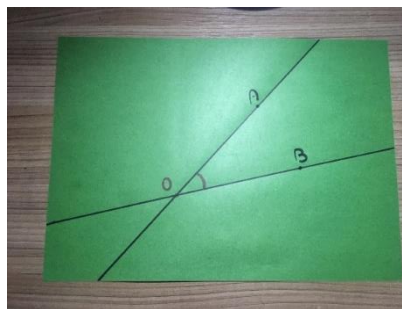
P: Um ângulo necessita sempre de duas semirretas e um vértice, para que possamos localizá-lo, então nomearemos o vértice com a letra  $O$  e uma letra em cada uma das semirretas que formam o ângulo que queremos

A: Pode ser  $A$  e  $B$ ?

P: Claro

A:

*Figura 39: Construção de uma bissetriz: etapa 2*

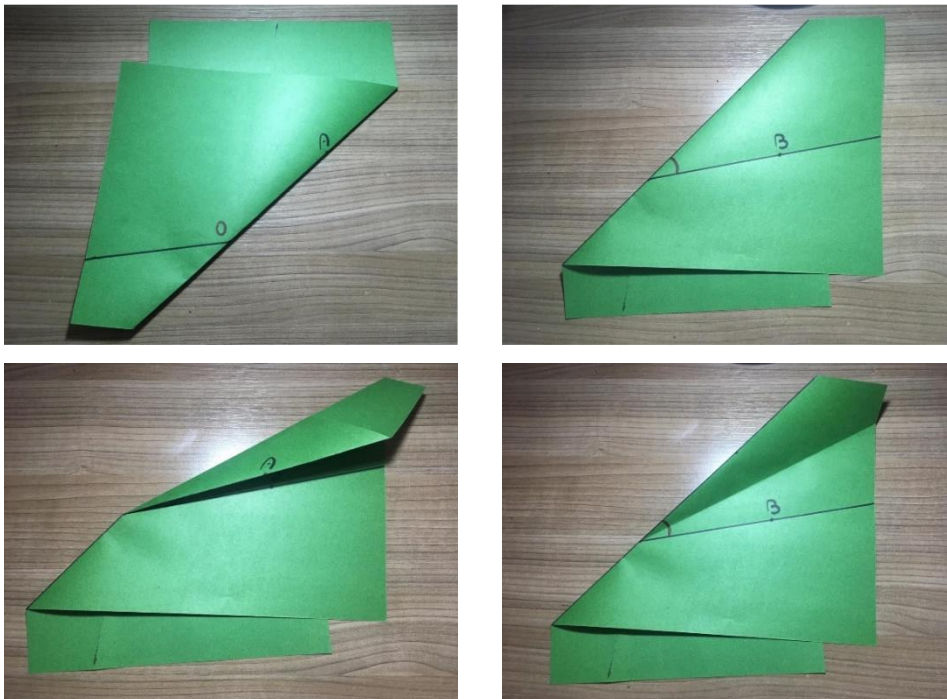


**Fonte:** o próprio autor

P: Agora só temos que dobrar a folha em cima do segmento  $\overline{AO}$ , e após isso colocar o segmento  $\overline{AO}$  em cima do segmento  $\overline{BO}$ .

A:

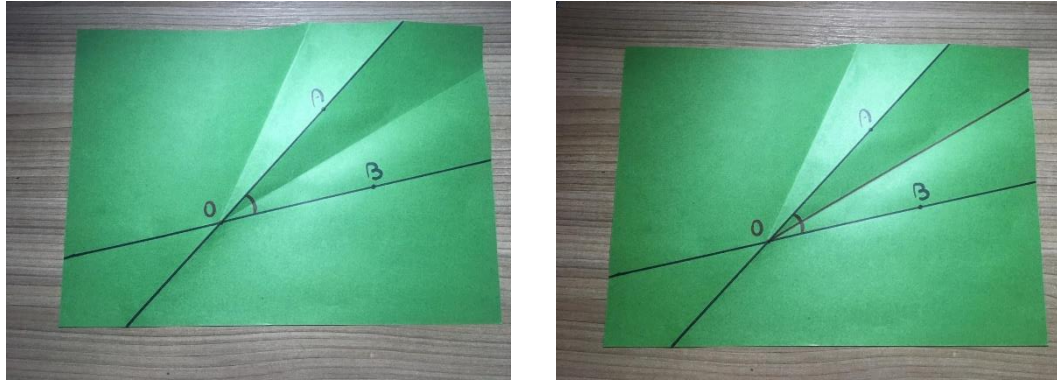
*Figura 40: Construção de uma bissetriz: etapa 3*



**Fonte:** o próprio autor

P: Isso, agora só abriremos o papel e teremos a bissetriz formada  
A:

Figura 41: Construção de uma bissetriz: etapa final



Fonte: o próprio autor

Todos os conceitos que foram abordados nas dobraduras acima, serão de grande importância para as próximas duas tarefas, pois poderão ser utilizados muitos momentos. Além disso, todos eles são muito relevantes para a Geometria Plana, pois sempre são aplicados em diversos tipos de problemas, e acredita-se que aprender estes conceitos desta forma diferenciada e dinâmica, com a atuação do aluno, possibilitará ao aluno construir a ideia por si só e ficará compreensível ao estudante os conceitos da geometria.

## 7. BLOCO DE TAREFAS 2: CONSTRUINDO POLÍGONOS

Neste segundo bloco de tarefas gostaríamos que o aluno utilizasse os conhecimentos construídos anteriormente para construir, junto com o professor, os principais polígonos regulares que conhecemos, serão expostas as tarefas e os passos de construção e desenhos para guiar o aluno, após isso serão feitas perguntas para que o aluno possa construir, por meio do Origami, um retângulo, um quadrado, um triângulo equilátero, um hexágono regular e um pentágono regular. As definições tem como referência Dante (2008) e Dante (2010).

Primeiramente vamos expor aos alunos as definições de cada polígono no quadro, descreveremos os passos de construção e assim entregaremos os papéis para cada um e faremos as perguntas, para que eles possam visualizar o que acabamos de definir.

Ao final desta tarefa os alunos terão construído cada polígono com as orientações do professor dessa forma, poderão enxergar outras propriedades dos mesmos, além das apresentadas pelo professor, dando margem a uma investigação onde o aluno poderá tirar suas próprias conclusões sobre o assunto trabalhado nesta tarefa.

### 7.1 CONSTRUINDO UM POLÍGONO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem que simulará um possível diálogo entre o professor, representado pela sigla P, e os alunos, representados pela sigla A.

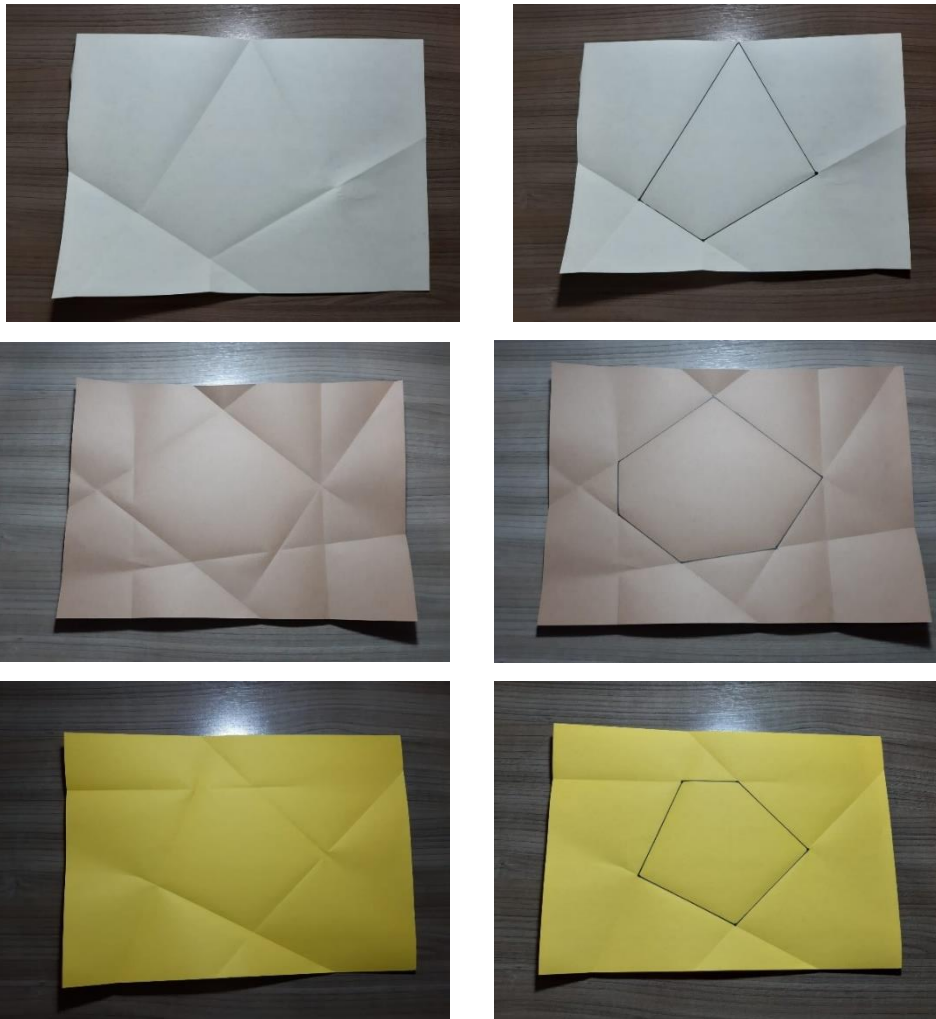
P: “Um polígono é um contorno formado apenas por segmentos de reta que não se cruzam.” (DANTE, 2010)

A: Então se fizermos vários segmentos de reta dobrando o papel que se encontrarem e formarem um desenho fechado ele vai ser chamado de polígono?

P: Sim, construam para mim um polígono.

A:

Figura 42: Construções de polígonos quaisquer



**Fonte:** o próprio autor

P: Muito bem, todas as formas que construíram podem ser chamadas de polígonos, pois estão de acordo com a definição que eu tinha dado anteriormente. Iremos aprender alguns polígonos que recebem nomes específicos por conterem características próprias. Alguém saberia o nome de algum desses polígonos formados?

A: Não sei professor, não reconheço nenhum deles.

P: E se tentasse observar a quantidade de segmentos de retas que os formam poderia tentar dizer algum nome?

A: O primeiro polígono é formado tem 4 segmentos de reta, mas não sei o seu nome.

P: Ele é um quadrilátero!

A: Ah! Ele tem esse nome porque tem 4 lados?

P: Sim! podemos definir um quadrilátero da seguinte forma:

P: “Quadriláteros são polígonos de quatro lados e, por isso, de quatro vértices e quatro ângulos internos.” (DANTE, 2008).

P: Dessa forma, poderiam tentar me dizer o nome dos outros polígonos que vocês construíram?

A: Professor o segundo polígono tem 6 lados, então ele é um hexágono?

P: Sim isso mesmo! E o último que fizeram?

A: Ele tem 5 lados, então o nome dele é pentágono.

P: Muito bem! Mas observe, os lados deles tem a mesma medida?

A: Não professor, todos os lados tem medidas diferentes.

P: Nas próximas tarefas aprenderemos alguns polígonos que possuem todos os lados com medidas iguais.

A: Que legal!

## 7.2 CONSTRUINDO UM RETÂNGULO

P: Nesta tarefa iremos construir um polígono que se chama retângulo, alguém saberia me dizer o que é um retângulo?

A: Sei que consigo ver sua forma quando olho pra uma caixa de papelão, e ele tem dois lados maiores e dois menores.

P: Muito bem! Vamos defini-lo.

P: Um retângulo é um polígono que tem dois pares de lados paralelos e os quatro ângulos internos iguais a  $90^\circ$ . (DANTE, 2008)

Nesse momento professor, desenhe um retângulo no quadro para que o aluno possa visualizar a sua definição.

*Figura 43: Desenho de um retângulo*



**Fonte:** o próprio autor

P: Observando a definição e o desenho o que teremos que construir no nosso Origami para que forme um retângulo?

A: Como ele tem os lados paralelos, devemos fazer segmentos de retas paralelas?

P: Sim isso mesmo! Mas ele tem somente um par de lados paralelos?

A: Não, ele tem os dois pares!

P: Mas ele tem todos os lados de mesma medida?

A: Não, pelo que vejo no desenho os dois segmentos horizontais são iguais e os dois segmentos na vertical são iguais, mas o da horizontal com a vertical são diferentes.

P: Muito bem, os lados com medidas diferentes são retas paralelas ou concorrentes entre si?

A: Como os lados se tocam elas são concorrentes.

P: Isso mesmo! E pela definição qual o ângulo formado por essas retas concorrentes?

A:  $90^\circ$  professor.

P: Ótimo, e como chamamos as retas que são concorrentes, mas formam um ângulo de  $90^\circ$ ?

A: Perpendiculares!

P: Perfeito! Agora vamos ver os passos de construção já que sabemos o que terá que conter nesse retângulo.

P: Vamos fazer uma dobra qualquer na folha para ser o lado maior, me mostre:

A: Assim:

*Figura 44: Construção de um retângulo: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

P: Vamos fazer uma reta perpendicular, para começar a fazer o lado com medida diferente.

A: Assim:

Figura 45: Construção de um retângulo: etapa 2



Fonte: o próprio autor

P: Isso! Agora faremos o mesmo do outro lado da primeira reta, para ter duas retas perpendiculares a primeira e serem os dois lados na vertical.

A: Pronto!

Figura 46: Construção de um retângulo: etapa 3



Fonte: o próprio autor

P: Agora faremos uma reta paralela a primeira que fizemos, ou seja, ela será perpendicular as duas outras que construímos por último, pois todas as retas tem que ter o ângulo de  $90^\circ$  entre elas para formarmos um retângulo.

A: Não estou conseguindo professor, pode me ajudar?

P: É só fazer a outra extremidade do papel se alinhar com as duas retas perpendiculares assim:

Figura 47: Construção de um retângulo: etapa 4



Fonte: o próprio autor

P: Agora abra o papel e desenhe.

A: Abri e desenhei.

*Figura 48: Construção de um retângulo: etapa final*



*Fonte: o próprio autor*

A: Esse é o retângulo professor?

P: Isso mesmo! Agora, pegue seu caderno e anote para mim quantos lados, vértices e ângulos esse polígono possui.

A:

*Quadro 1: Lados, vértices e ângulos: anotação 1*

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos
Retângulo	4	4	4

*Fonte: o próprio autor*

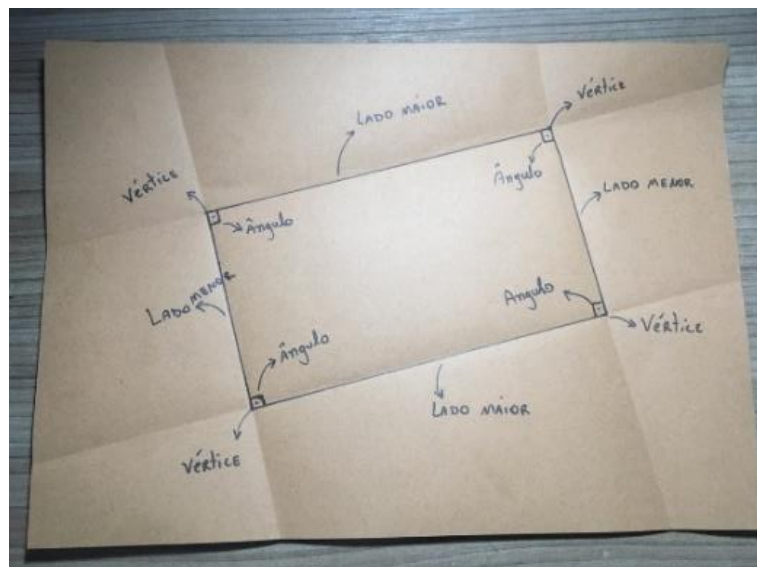
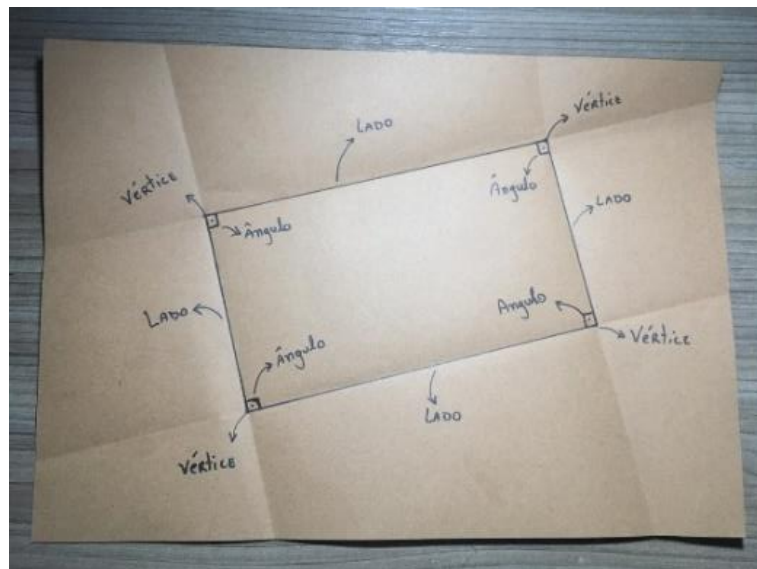
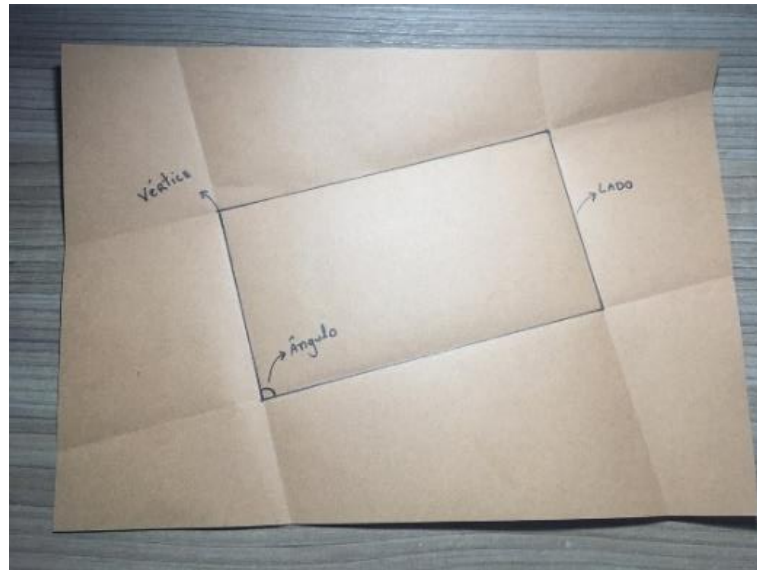
P: Agora indique para mim no desenho tudo que você pode observar desse polígono. Utilize o transferidor e régua para tirar mais conclusões sobre os lados e ângulos deste polígono.

Nesta parte deixe-os livre para indicarem todos os elementos que já aprenderam, podem aparecer várias soluções diferentes, peça à alguns alunos que apresentem aos colegas os diferentes elementos que observaram, assim podem surgir questionamentos e o professor poderá encaminhar e definir algum outro conceito que surgir.

Sugestões de respostas:

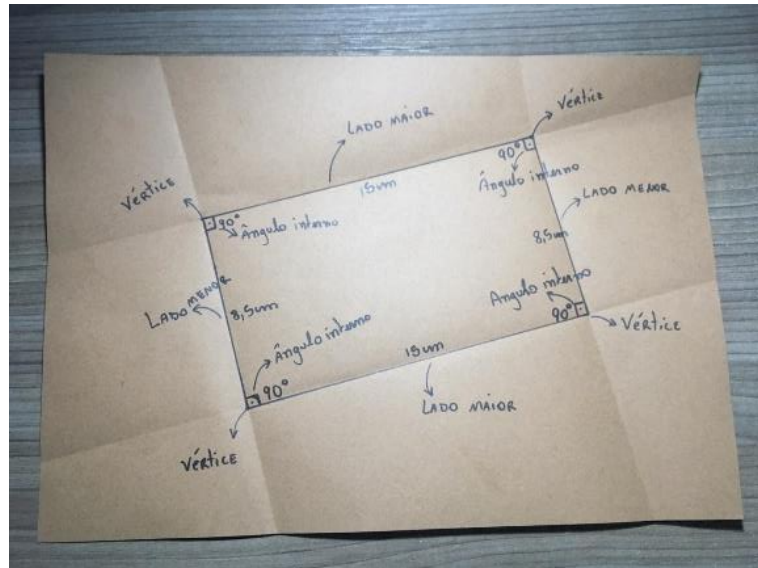
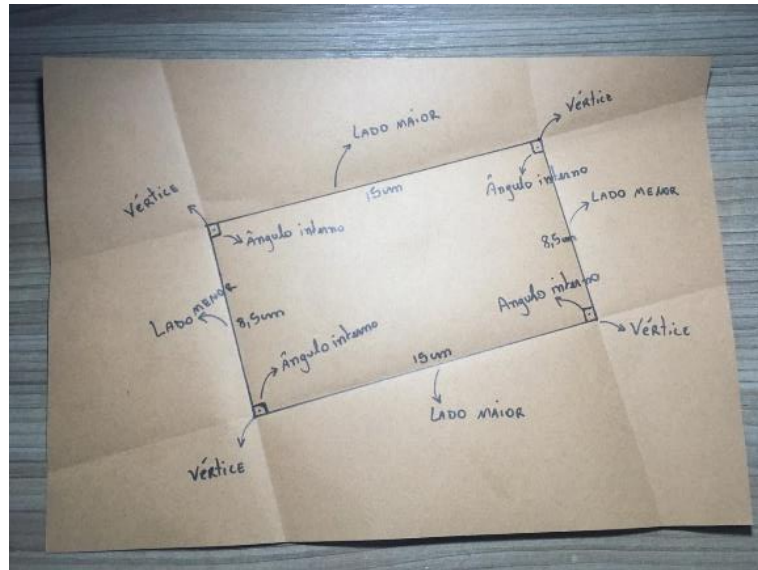


Figura 49: Observações obtidas sobre o retângulo



Fonte: o próprio autor

Figura 50: Continuação das observações



Fonte: o próprio autor

Ao observar as respostas dos alunos, outra sugestão de encaminhamento que se pode fazer é pedir que completem um quadro semelhante ao que segue, pedindo aos alunos que meçam os ângulos com transferidor.

Quadro 2: Lados, vértices e ângulos: anotação 2

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos
Retângulo	4	4	4	90°	360°

Fonte: o próprio autor

### 7.3 CONSTRUINDO UM QUADRADO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Nossas próximas construções serão polígonos que terão um nome especial. Veja a definição.

P: “Os polígonos regulares recebem esse nome porque têm todos os lados com medidas iguais (congruentes) e também todos os ângulos internos com medidas iguais (congruentes).” (DANTE, 2010)

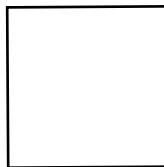
A: Legal! E qual será o nome do próximo polígono que iremos construir?

P: Será quadrado! Alguém saberia me dizer o que é um quadrado?

A: É um quadrilátero que tem todos os lados com a mesma medida?

P: Sim isso mesmo, vamos defini-lo: Um quadrado é um polígono regular que tem dois pares de lados paralelos, tem os quatro lados com medidas iguais e os quatro ângulos internos iguais a  $90^\circ$ . (DANTE, 2008).

*Figura 51: Desenho de um quadrado*



**Fonte:** o próprio autor

P: Podemos ver que um quadrado é muito parecido com o retângulo, mas ele tem todas as medidas iguais, então para começarmos pedirei que façam uma dobra qualquer também.

A:

*Figura 52: Construção de um quadrado: etapa 1*

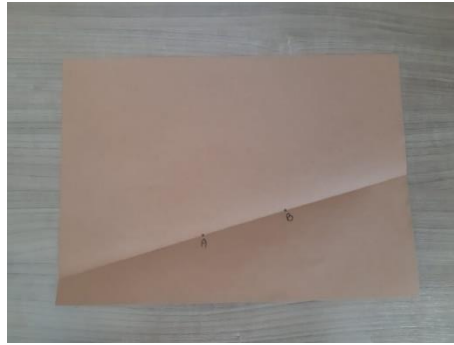


**Fonte:** o próprio autor

P: Agora faremos os pontos  $A$  e  $B$  para determinar nosso primeiro lado do quadrado.

A: Pronto!

*Figura 53: Construção de um quadrado: etapa 2*



**Fonte:** o próprio autor

P: Agora faremos os mesmos passos do retângulo, mas sempre prestando atenção nos pontos que fizemos. A primeira reta perpendicular tem que passar pelo ponto  $A$  e a segunda deve passar pelo ponto  $B$ .

A:

*Figura 54: Construção de um quadrado: etapa 3*



**Fonte:** o próprio autor

P: Agora que temos as retas vamos abrir e dobrar novamente o segmento  $\overline{AB}$ , mas agora para trás, para nos ajudar nas próximas dobras.

A:

Figura 55: Construção de um quadrado: etapa 4



Fonte: o próprio autor

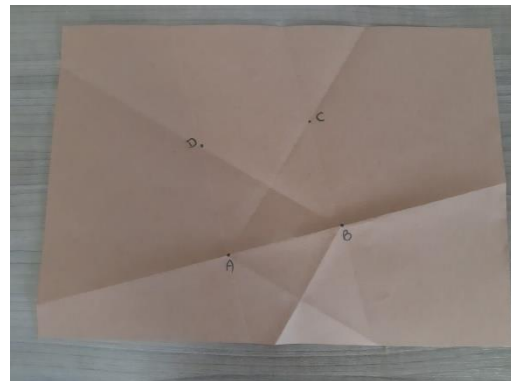
P: Agora marcaremos os pontos  $C$  e  $D$  para construir o quadrado, mas para isso devemos levar o ponto  $A$  e o ponto  $B$  nas perpendiculares que acabamos de construir, para que todos os lados fiquem com a mesma medida

A: E como eu faço isso professor?

P: Dobre de forma que o segmento  $\overline{AB}$  fique em cima de cada perpendicular, e onde os pontos  $A$  e  $B$  tocarem as perpendiculares marcaremos os pontos  $C$  e  $D$ .

A: OK!

Figura 56: Construção de um quadrado: etapa 5

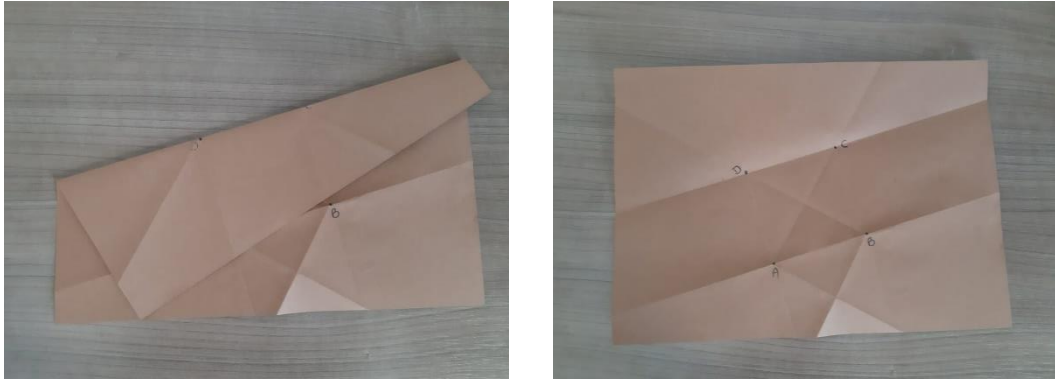


Fonte: o próprio autor

P: Agora pelos pontos  $C$  e  $D$  passaremos uma reta que é paralela ao segmento  $\overline{AB}$  e perpendicular aos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .

A:

Figura 57: Construção de um quadrado: etapa 6

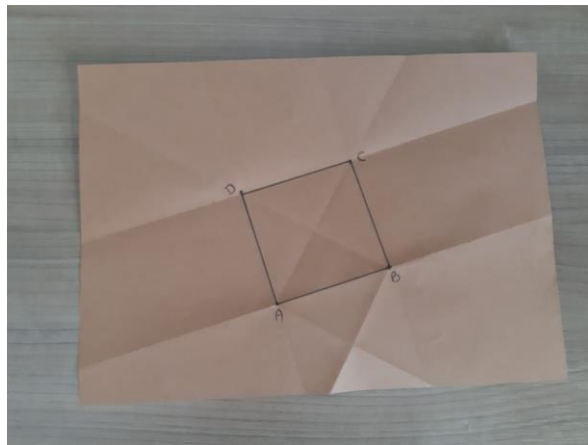


Fonte: o próprio autor

P: Agora só falta riscar os segmentos para visualizar melhor e está pronto o nosso quadrado! Agora, pegue seu caderno e anote para mim quantos lados, vértices e ângulos esse polígono possui.

A:

Figura 58: Construção de um quadrado: etapa final



Fonte: o próprio autor

A: Anotei.

Quadro 3: Lados, vértices e ângulos: anotação 3

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos
Retângulo	4	4	4
Quadrado	4	4	4

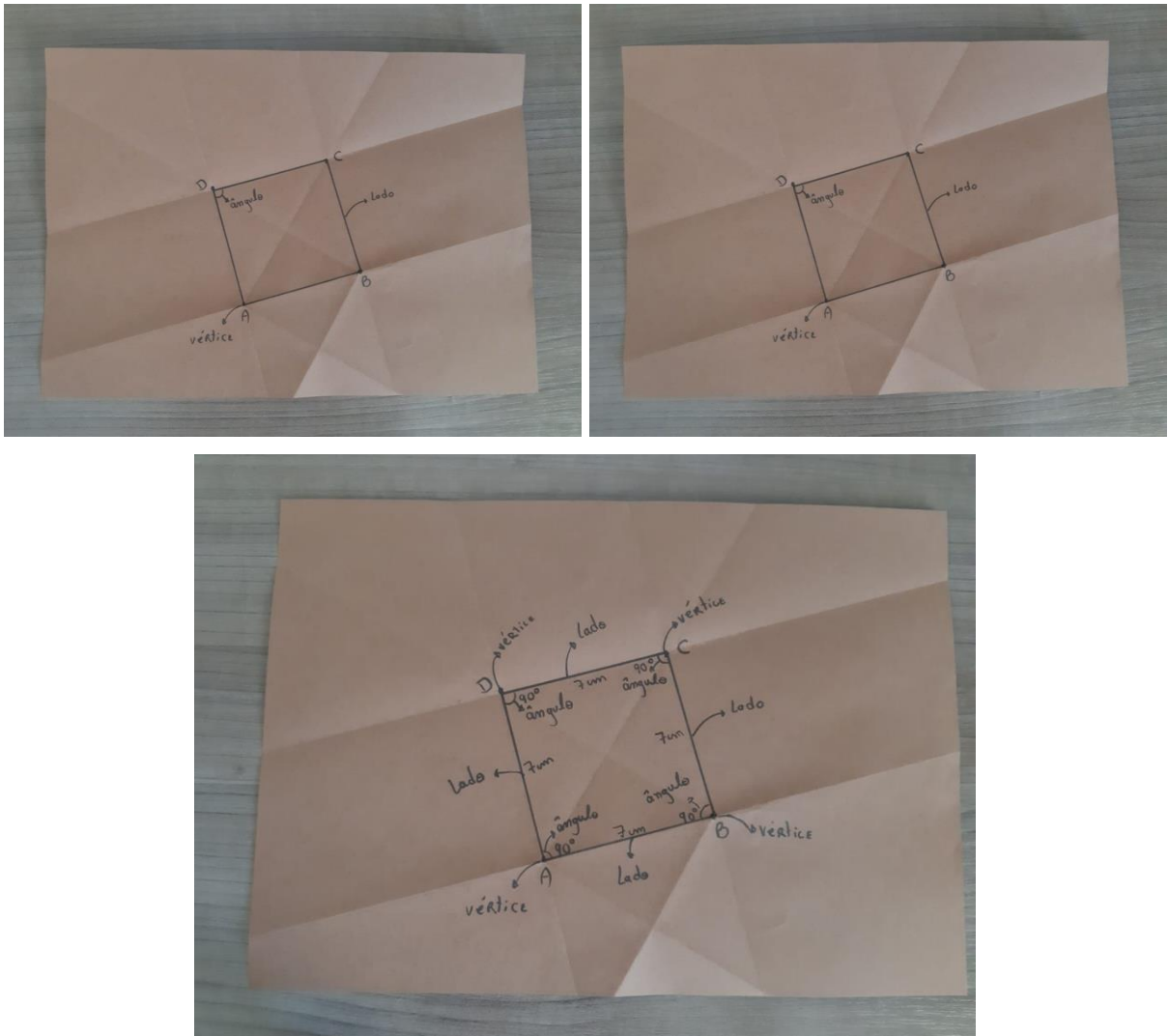
Fonte: o próprio autor

P: Agora indique para mim no desenho tudo que você pode observar desse polígono. Utilize o transferidor e régua para tirar mais conclusões sobre os lados e ângulos deste polígono.

P: Nesta parte deixe-os livre para indicarem todos os elementos que já aprenderam, podem aparecer várias soluções diferentes, peça à alguns alunos que apresentem aos colegas os diferentes elementos que observaram, assim podem surgir questionamentos e o professor poderá encaminhar e definir algum outro conceito que surgir.

A:

Figura 59: Observações obtidas sobre o quadrado



Fonte: o próprio autor

Ao observar as respostas dos alunos, outra sugestão de encaminhamento que se pode fazer é pedir que completem um quadro parecido com este, pedindo que os alunos meçam os ângulos com transferidor.

Quadro 4: Lados, vértices e ângulos: anotação 4

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos
Retângulo	4	4	4	90°	360°

*Fonte: o próprio autor*

#### 7.4 CONSTRUINDO UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: O próximo polígono que iremos construir não é mais um quadrilátero, ele será um triângulo.

A: Triângulo é aquele que tem três lados?

P: Sim ele mesmo, mas temos uma definição para ele, olhe:

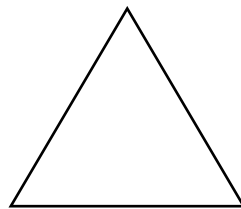
P: Triângulos são polígonos de três lados e, por isso, de três vértices e três ângulos internos. (DANTE, 2008)

P: Mas como eu disse anteriormente, como vamos construir polígonos regulares o triângulo que faremos aqui receberá um nome diferente.

A: Como será o nome e a definição dele?

P: Será triângulo equilátero. Um triângulo equilátero é um triângulo que possui três lados com medidas iguais. (DANTE, 2010)

*Figura 60: Desenho de um triângulo equilátero*



*Fonte: o próprio autor*

P: Como o triângulo que iremos construir tem todos os lados de mesma medida iremos utilizar o que já aprendemos na primeira tarefa que será ponto médio e mediatriz, vocês lembram como constrói?

A: Sim professor

P: Então primeiro iremos fazer uma dobra qualquer e marcar um segmento AB na folha.

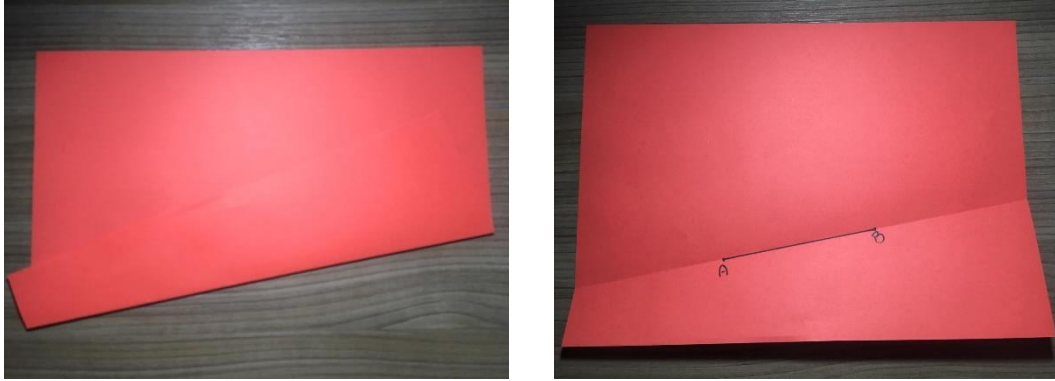


A: Pode ser qualquer tamanho?

P: Não muito grande.

A: Assim:

*Figura 61: Construção de um triângulo equilátero: etapa 1*



*Fonte: o próprio autor*

P: Isso mesmo. Agora vamos relembrar, como fazemos o ponto médio entre  $A$  e  $B$ ?

A: temos que dobrar a folha até que o ponto  $A$  fique em cima do ponto  $B$ .

P: Isso mesmo, faça na folha.

A:

*Figura 62: Construção de um triângulo equilátero: etapa 2*



*Fonte: o próprio autor*

P: E quando encontramos o ponto médio o que encontramos junto com ele nessa dobra?

A: A mediatriz?

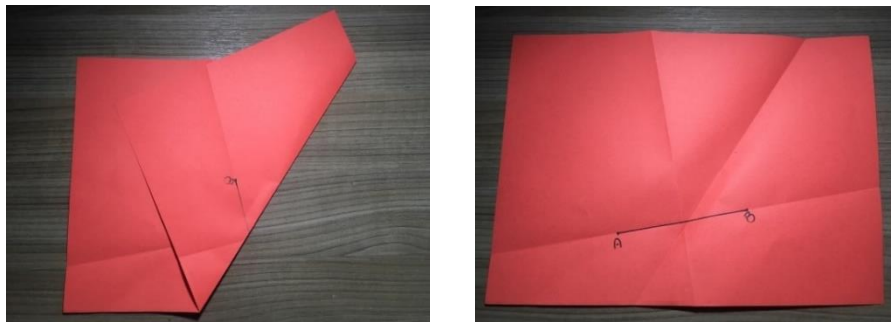
P: Isso! Essa dobra que fizemos é a nossa mediatriz, agora faremos assim, como o segmento  $\overline{AB}$  é um dos lados no triângulo equilátero, queremos que esse triângulo tenha todos os lados com mesma medida, então vamos levar o ponto  $B$  até a mediatriz, passando por  $A$ , para que o segmento  $\overline{AB}$  vá para o outro lado da folha, mas como iremos colocar na mediatriz o ponto  $B$ , sabemos que qualquer ponto na mediatriz é equidistante dos pontos  $A$  e  $B$ , então a medida que levaremos será igual a distância de  $A$  e  $B$ .

A: Então dobro o ponto  $B$  até encontrar a mediatriz?

P: Sim

A:

*Figura 63: Construção de um triângulo equilátero: dobra do aluno*



**Fonte:** o próprio autor

P: Você fez a dobra, mas ela não passou por  $A$  portanto dessa forma não temos o lado do triângulo, vamos arrumar essa dobra para que ela fique em cima do ponto  $A$  e da mediatriz ao mesmo tempo, dobre o segmento  $\overline{AB}$  para traz para facilitar sua próxima dobra.

A: Assim?

*Figura 64: Construção de um triângulo equilátero: etapa 3*

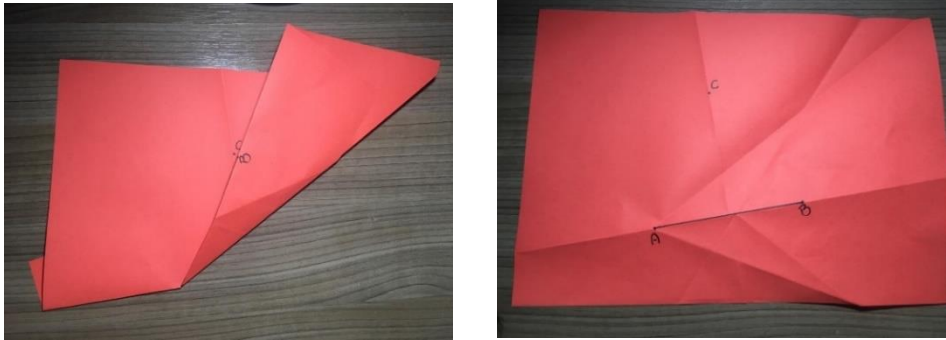


**Fonte:** o próprio autor

P: Isso mesmo, agora onde o ponto  $B$  encostou na mediatriz vamos marcar um ponto  $C$ .

A:

Figura 65: Construção de um triângulo equilátero: etapa 4



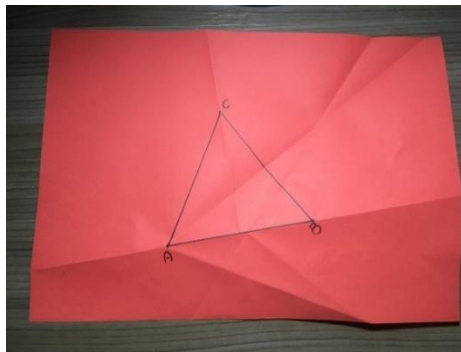
Fonte: o próprio autor

A: Agora é só eu desenhar os segmentos entre  $A$ ,  $B$  e  $C$ ?

P: Sim!

A:

Figura 66: Construção de um triângulo equilátero: etapa final



Fonte: o próprio autor

P: Portanto construímos o triângulo com lados de mesma medida, chamado equilátero. Agora, pegue seu caderno e anote para mim quantos lados, vértices e ângulos esse polígono possui.

A:

Quadro 5: Lados, vértices e ângulos: anotação 5

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos
Retângulo	4	4	4
Quadrado	4	4	4
Triângulo equilátero	3	3	3

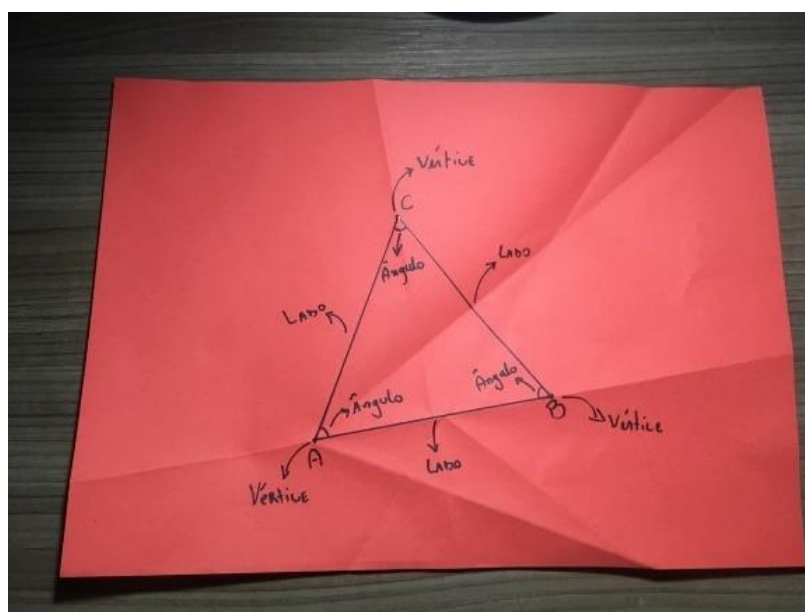
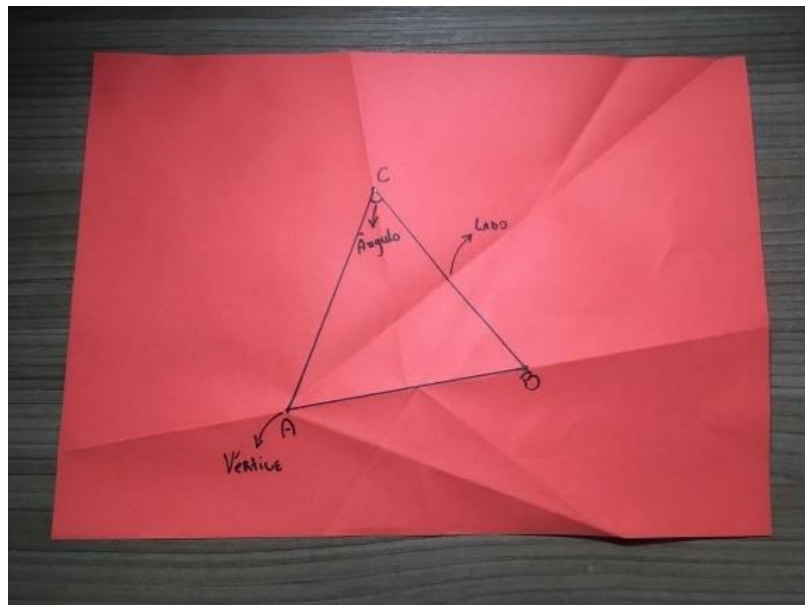
Fonte: o próprio autor

P: Agora indique para mim no desenho tudo que você pode observar desse polígono. Utilize o transferidor e régua para tirar mais conclusões sobre os lados e ângulos deste polígono.

P: Nesta parte deixe-os livre para indicarem todos os elementos que já aprenderam, podem aparecer várias soluções diferentes, peça à alguns alunos que apresentem aos colegas os diferentes elementos que observaram, assim podem surgir questionamentos e o professor poderá encaminhar e definir algum outro conceito que surgir.

A:

Figura 67: Observações obtidas sobre o triângulo equilátero



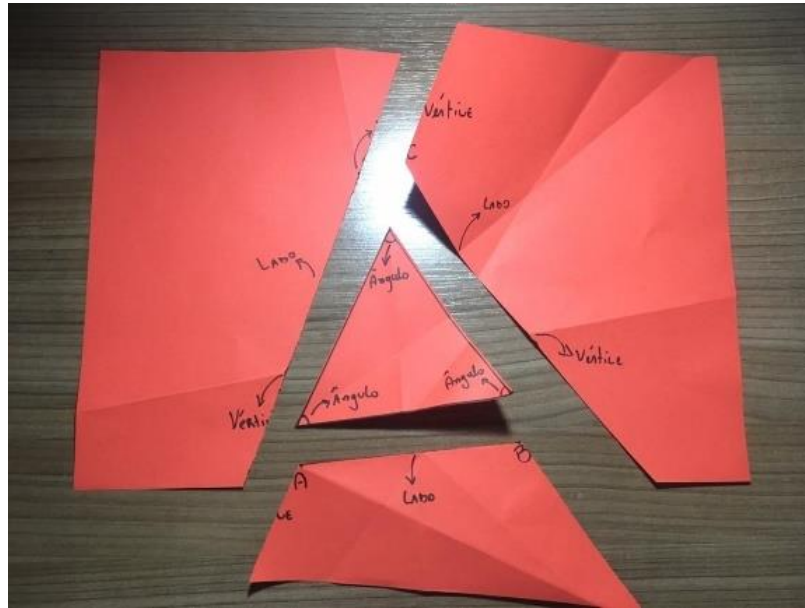
Fonte: o próprio autor

A: Mas professor não estou conseguindo medir os ângulos do triângulo, como posso descobrir sem usar o transferidor?

P: Vamos fazer assim, recorte nas dobras que deixamos destacadas.

A: Assim?

Figura 68: Recorte do triângulo equilátero

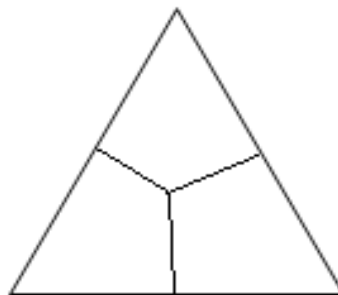


Fonte: o próprio autor

P: Isso, agora recorte a figura formada em três pedaços de modo que os ângulos fiquem um em cada pedaço. (o professor pode nesse momento desenhar no quadro um jeito em que eles possam cortar para não ter erros nessa parte).

P:

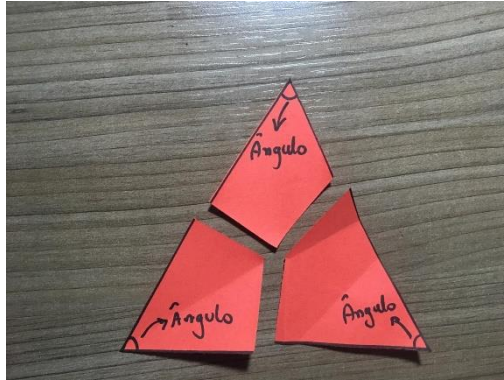
Figura 69: Desenho de como recortar os ângulos do triângulo equilátero



Fonte: o próprio autor

A:

Figura 70: Recorte dos ângulos do triângulo equilátero



**Fonte:** o próprio autor

P: Agora junte todas as pontas do seu triângulo e veja o que forma.

A:

Figura 71: Junção dos ângulos do triângulo equilátero



**Fonte:** o próprio autor

A: Parece que formou um ângulo de  $180^\circ$ .

P: Isso mesmo, então com essa construção podemos dizer que a junção de todos os ângulos internos de um triângulo forma  $180^\circ$ .

A: Que legal, mas ainda não sei quanto vale cada ângulo do triângulo.

P: Lembra quando disse que iríamos construir polígonos regulares?

A: Sim!

P: Essa é a vantagem, num polígono regular, nesse caso, no triângulo equilátero, todos os lados e ângulos são iguais, então se a soma deles é  $180^\circ$  quanto vale cada ângulo?

A: Ah vale  $60^\circ$  cada um!

P: Isso mesmo! Agora pode completar seu quadro com as informações que você encontrou.

Quadro 6: Lados, vértices e ângulos: anotação 6

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos
Retângulo	4	4	4	90°	360°
Quadrado	4	4	4	90°	360°
Triângulo equilátero	3	3	3	60°	180°

Fonte: o próprio autor

### 7.5 CONSTRUINDO UM HEXÁGONO REGULAR

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Construiremos agora um hexágono regular.

P: Um hexágono regular é um polígono de seis lados de mesma medida seis ângulos internos com mesma medida. (DANTE, 2008)

P: Para poder construir um hexágono regular, primeiro teremos que construir um triângulo equilátero bem parecido com o que fizemos anteriormente, mas agora com o segmento  $\overline{AB}$  sendo a largura da nossa folha. Marque os pontos  $A$  e  $B$  nos cantos da folha e faça a mediatriz.

A: Para fazer essa mediatriz é só dobrar a folha ao meio?

P: Sim!

A:

Figura 72: Construção de um hexágono regular: etapa 1



Fonte: o próprio autor

P: Ótimo agora faça o ponto  $C$  igual fizemos na tarefa anterior.

A: Como era mesmo?

P: Tinha que levar o ponto  $B$  até a mediatriz passando por  $A$ .

A: É mesmo!

A:

Figura 73: Construção de um hexágono regular: etapa 2



Fonte: o próprio autor

P: Prestem atenção a dobra que fizemos tocou a mediatriz em um outro lugar, esse será o centro do nosso hexágono regular. Marquem nesse lugar o ponto  $O$ .

A: Assim:

Figura 74: Construção de um hexágono regular: etapa 3



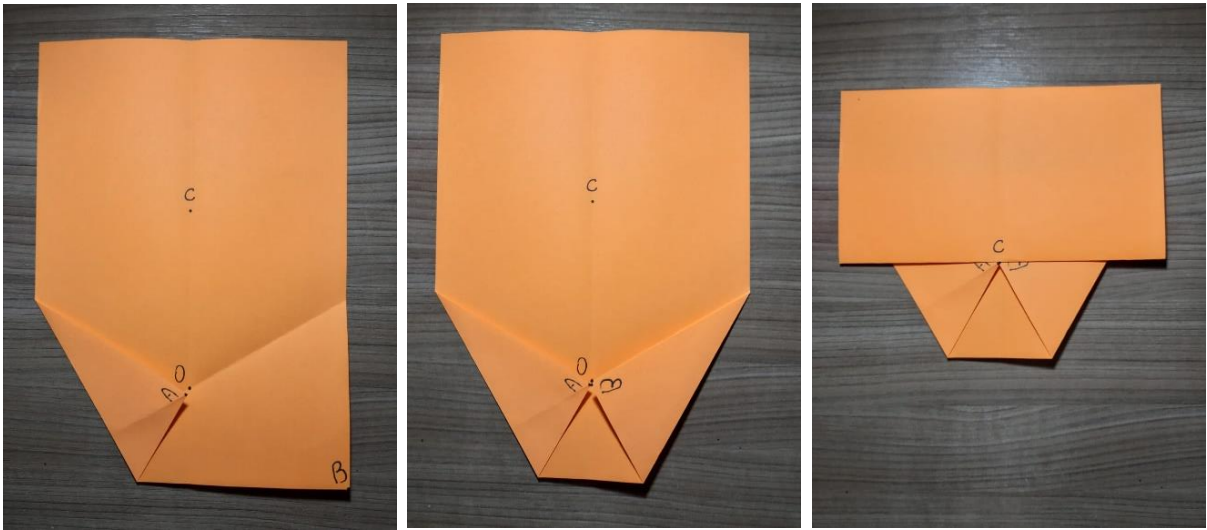
Fonte: o próprio autor

P: Ótimo, agora, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  serão dobrados até chegar no ponto  $O$ .



A: Assim:

Figura 75: Construção de um hexágono regular: etapa 4

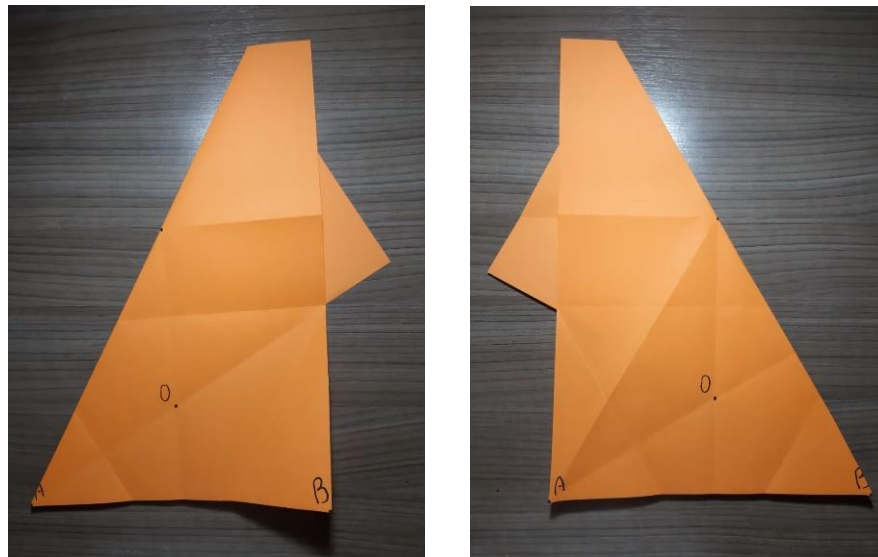


Fonte: o próprio autor

P: Nosso próximo passo é dobrar a folha formando os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ .

A:

Figura 76: Construção de um hexágono regular: etapa 5



Fonte: o próprio autor

P: Abra a folha e observem atentamente dentro do triângulo equilátero que tínhamos formado anteriormente.

A: Eu acho que foi formado um polígono ali dentro, mas não estou conseguindo distinguir

P: Olhe atentamente

A: Vou tentar.

Figura 77: Construção de um hexágono regular: etapa 6



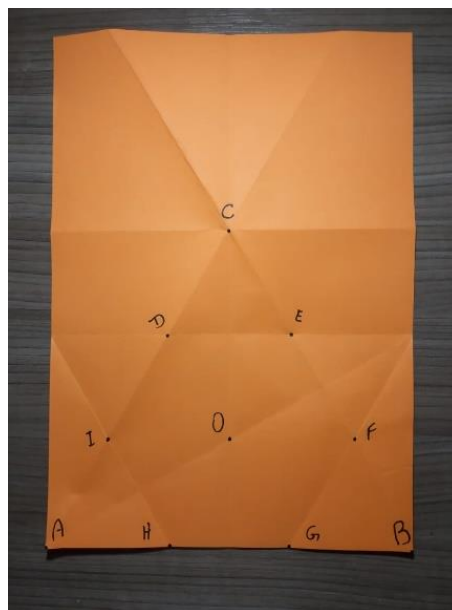
Fonte: o próprio autor

A: Há um polígono lá dentro mesmo!

P: Sim e onde as dobras tocaram o triângulo equilátero marcaremos os pontos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  que são os vértices do hexágono regular.

A:

Figura 78: Construção de um hexágono regular: etapa 7



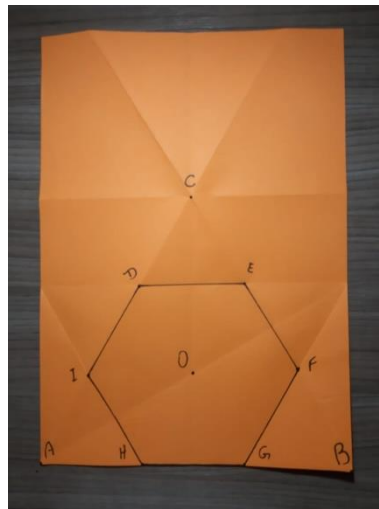
Fonte: o próprio autor

A: Posso desenhar o hexágono?

P: Claro!

A:

Figura 79: Construção de um hexágono regular: etapa final



Fonte: o próprio autor

P: Agora, pegue seu caderno e anote para mim quantos lados, vértices e ângulos esse polígono possui.

A:

Quadro 7: Lados, vértices e ângulos: anotação 7

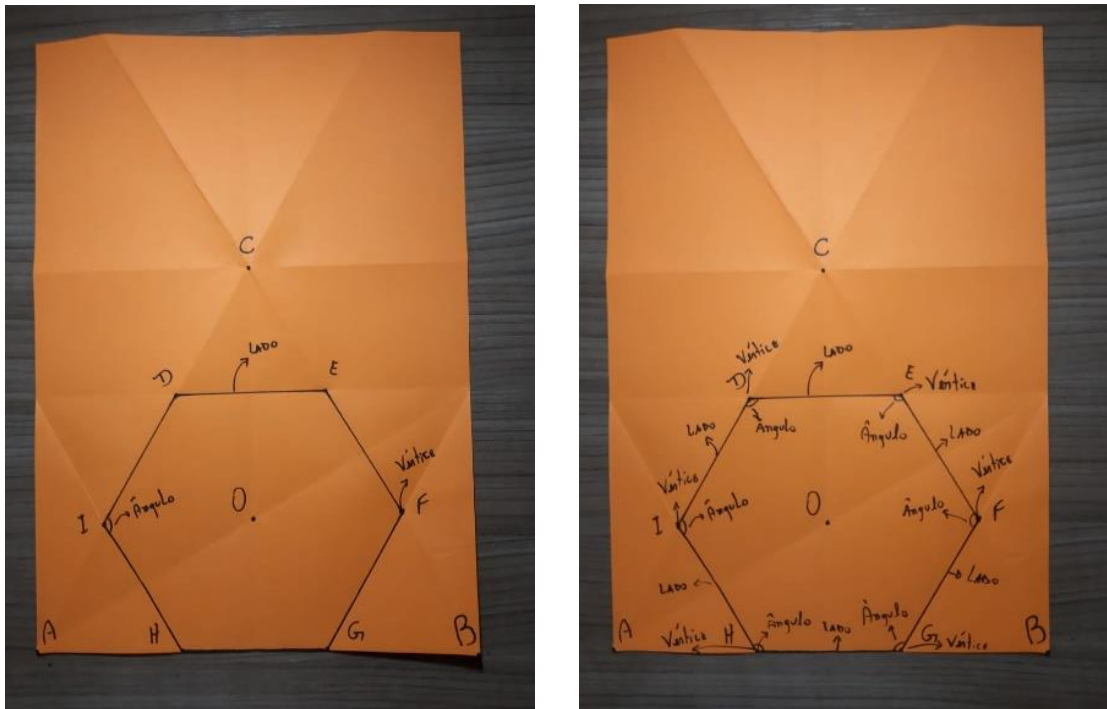
Polígono	Lados	Vértices	Ângulos
Retângulo	4	4	4
Quadrado	4	4	4
Triângulo equilátero	3	3	3
Hexágono regular	6	6	6

Fonte: o próprio autor

P: Agora indique para mim no desenho tudo que você pode observar desse polígono. Utilize o transferidor e régua para tirar mais conclusões sobre os lados e ângulos deste polígono.

Nesta parte deixe-os livre para indicarem todos os elementos que já aprenderam, podem aparecer várias soluções diferentes, peça à alguns alunos que apresentem aos colegas os diferentes elementos que observaram, assim podem surgir questionamentos e o professor poderá encaminhar e definir algum outro conceito que surgir.

Figura 80: Observações obtidas sobre o hexágono regular



Fonte: o próprio autor

Ao observar as respostas dos alunos, outra sugestão de encaminhamento que se pode fazer é pedir que completem um quadro parecido com este, pedindo que os alunos meçam os ângulos com transferidor.

Quadro 8: Lados, vértices e ângulos: anotação 8

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos
Retângulo	4	4	4	90°	360°
Quadrado	4	4	4	90°	360°
Triângulo equilátero	3	3	3	60°	180°
Hexágono regular	6	6	6	120°	720°

Fonte: o próprio autor

## 7.6 CONSTRUINDO UM PENTÁGONO REGULAR

P: Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Construiremos agora um pentágono regular.

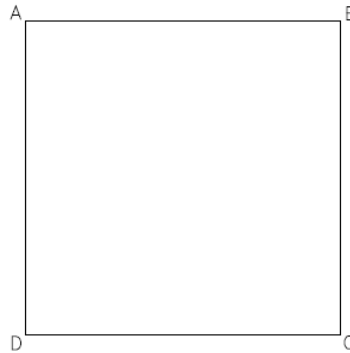
P: Um pentágono regular é um polígono de cinco lados de mesma medida e cinco ângulos internos com mesma medida. (DANTE, 2008)

P: Para poder construir um pentágono regular teremos vários passos que vimos anteriormente então vamos prestar atenção

A: Sim professor!

P: Primeiro vamos pegar uma folha no formato quadrado, e nomear os vértices de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  como nesse desenho:

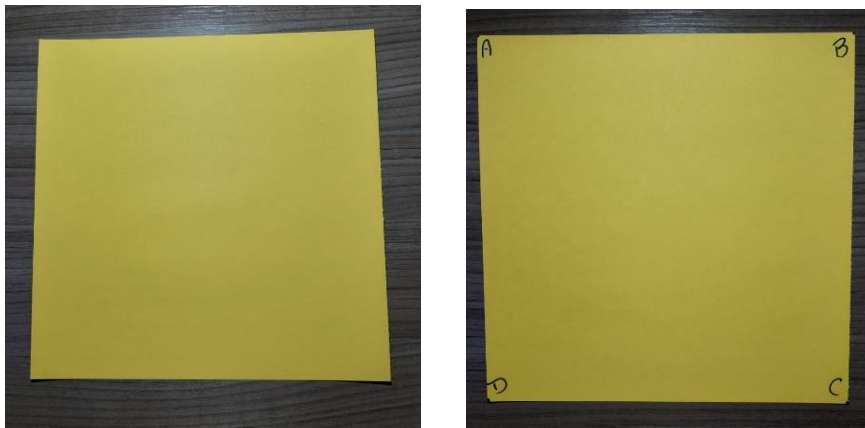
Figura 81: Desenho de um quadrado



**Fonte:** o próprio autor

A:

Figura 82: Construção de um pentágono regular: etapa 1

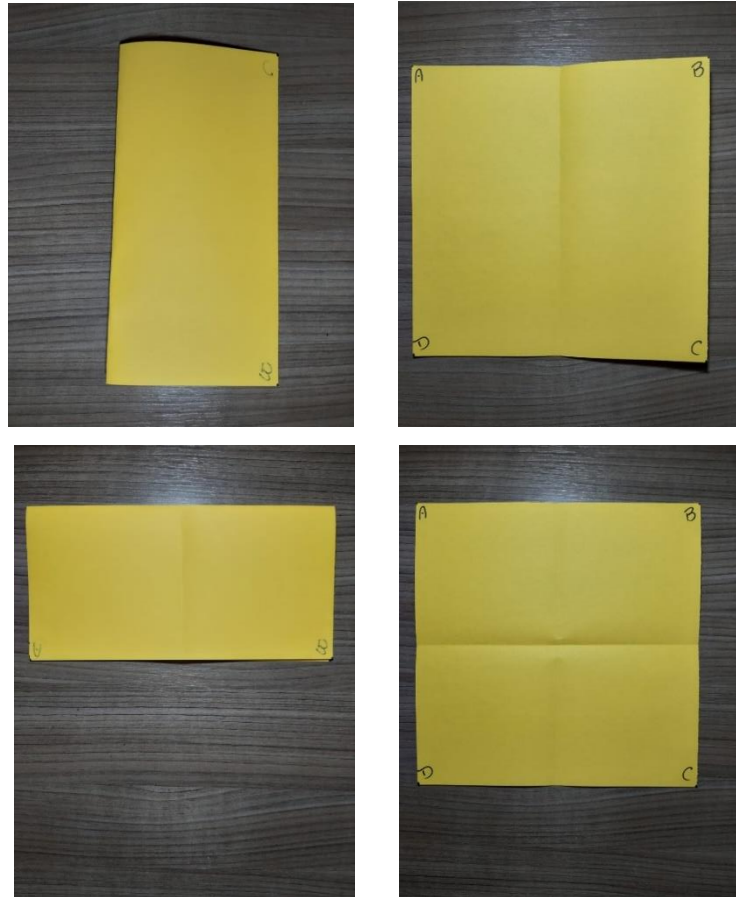


**Fonte:** o próprio autor

P: Depois disso iremos encontrar os pontos médios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ .

A:

Figura 83: Construção de um pentágono regular: etapa 2

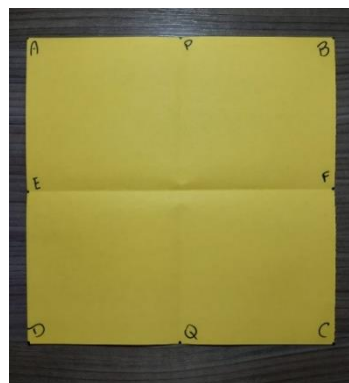


Fonte: o próprio autor

P: Ao abrir a folha vamos dar nomes aos pontos que fizemos, onde a dobra tocou  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  chamaremos de  $E$  e  $F$ , respectivamente e onde a dobra tocou  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  chamaremos de  $P$  e  $Q$ , respectivamente.

A:

Figura 84: Construção de um pentágono regular: etapa 3

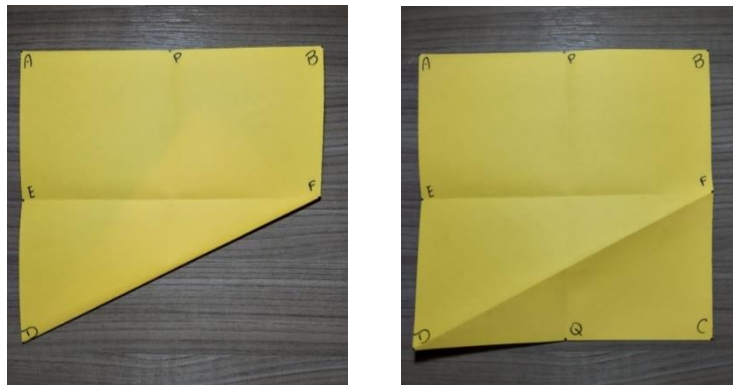


Fonte: o próprio autor

P: Agora vamos fazer uma dobradura que passe pelos pontos  $D$  e  $F$  ao mesmo tempo, ou seja, vamos construir o segmento  $\overline{DF}$

A:

Figura 85: Construção de um pentágono regular: etapa 4



Fonte: o próprio autor

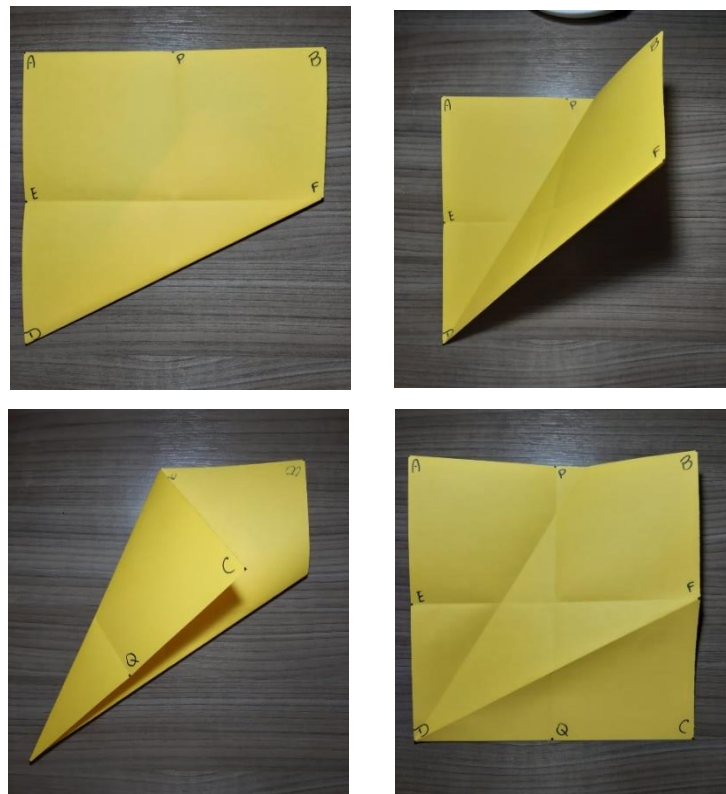
P: Agora podemos ver que conseguimos fazer o segmento  $\overline{DE}$  e  $\overline{DF}$ , mas  $\overline{DE}$  já é metade do lado do quadrado então não precisamos construir. Assim como temos esses dois segmentos vamos relembrar como construímos a bissetriz, e faremos a bissetriz do ângulo entre  $\overline{DE}$  e  $\overline{DF}$ , ou seja, no ângulo  $E\hat{D}F$ .

A: Só precisamos colocar um segmento sobre o outro?

P: Sim isso mesmo!

A:

Figura 86: Construção de um pentágono regular: etapa 5

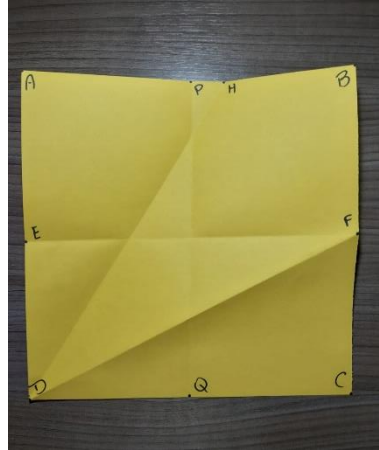


Fonte: o próprio autor

P: Agora onde a bissetriz tocou o segmento  $\overline{AB}$  vamos chamar de  $H$ .

A:

Figura 87: Construção de um pentágono regular: etapa 6

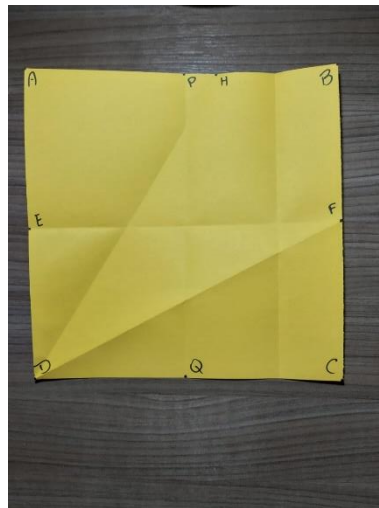
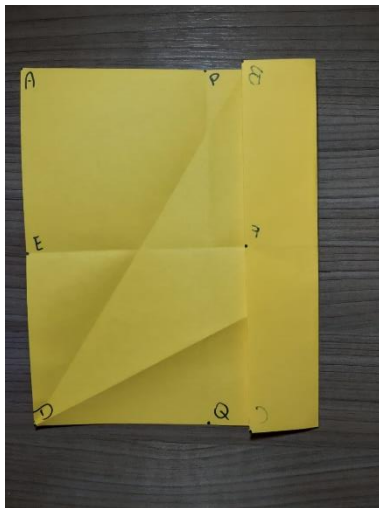


Fonte: o próprio autor

P: Agora precisamos levar o ponto  $B$ , sobre o ponto  $H$  que acabamos de construir, fazendo assim uma dobra que leva o lado do quadrado todo para dentro, e onde a dobra tocar o lado  $\overline{DC}$  faremos o ponto  $I$ .

A:

Figura 88: Construção de um pentágono regular: etapa 7



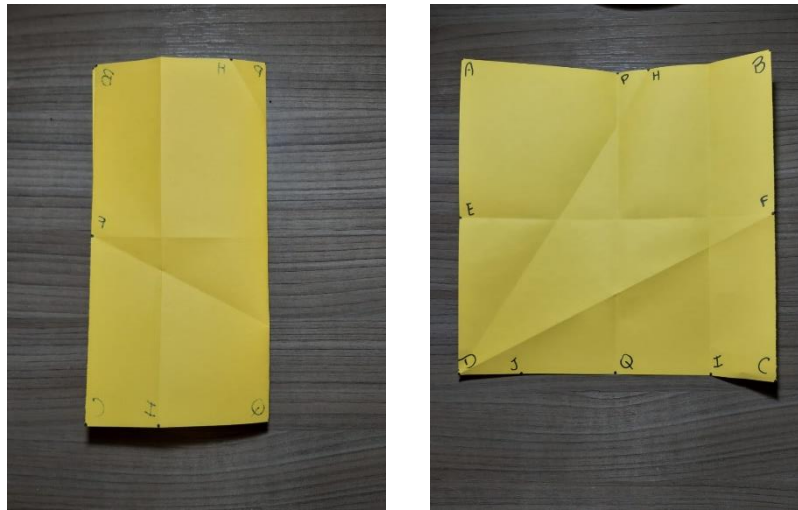
Fonte: o próprio autor

P: Vamos dobrar o lado  $\overline{BC}$  para que encontre o lado  $\overline{AD}$ , fazendo assim que o ponto  $I$  chegue do outro lado, e onde ele chegar faremos o ponto  $J$ .

A:



Figura 89: Construção de um pentágono regular: etapa 8

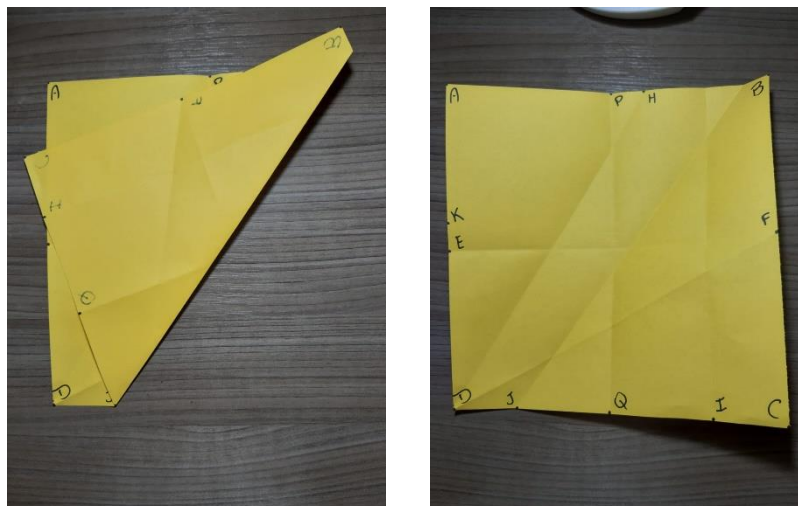


Fonte: o próprio autor

P: Agora teremos uma dobra mais difícil, levaremos o ponto  $I$  até o segmento  $\overline{AD}$ , mas a dobra deve passar por  $J$ , e onde o  $I$  tocar  $\overline{AD}$  chamaremos de  $K$ .

A:

Figura 90: Construção de um pentágono regular: etapa 9

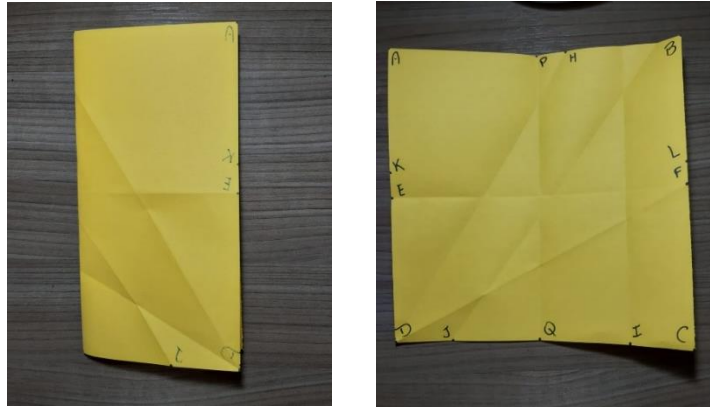


Fonte: o próprio autor

P: Vamos levar o ponto  $K$  até o outro lado, portanto temos que levar o segmento  $\overline{AD}$  sobre  $\overline{BC}$ , e onde  $K$  tocar  $\overline{BC}$  faremos o ponto  $L$ .

A:

Figura 91: Construção de um pentágono regular: etapa 10

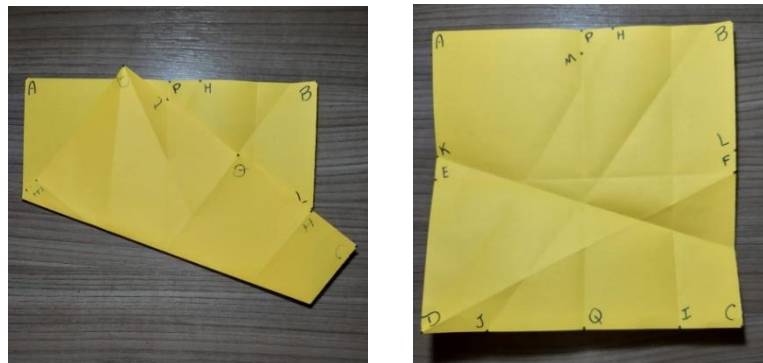


Fonte: o próprio autor

P: Agora para o nosso último passo, teremos que levar o ponto  $J$  até o segmento  $\overline{PQ}$ , mas a dobra tem que passar por  $K$ , e onde  $J$  tocar  $\overline{PQ}$  chamaremos de  $M$ .

A:

Figura 92: Construção de um pentágono regular: etapa 11

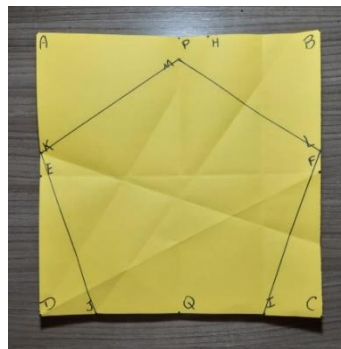


Fonte: o próprio autor

P: Pronto, as letras  $I, J, K, M,$  e  $L$  formam os vértices do pentágono, agora é só dobrar a folha e desenhar os segmentos.

A:

Figura 93: Construção de um pentágono regular: etapa final



Fonte: o próprio autor

P: Agora, pegue seu caderno e anote para mim quantos lados, vértices e ângulos esse polígono possui.

Quadro 9: Lados, vértices e ângulos: anotação 9

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos
Retângulo	4	4	4
Quadrado	4	4	4
Triângulo equilátero	3	3	3
Hexágono regular	6	6	6
Pentágono regular	5	5	5

Fonte: o próprio autor

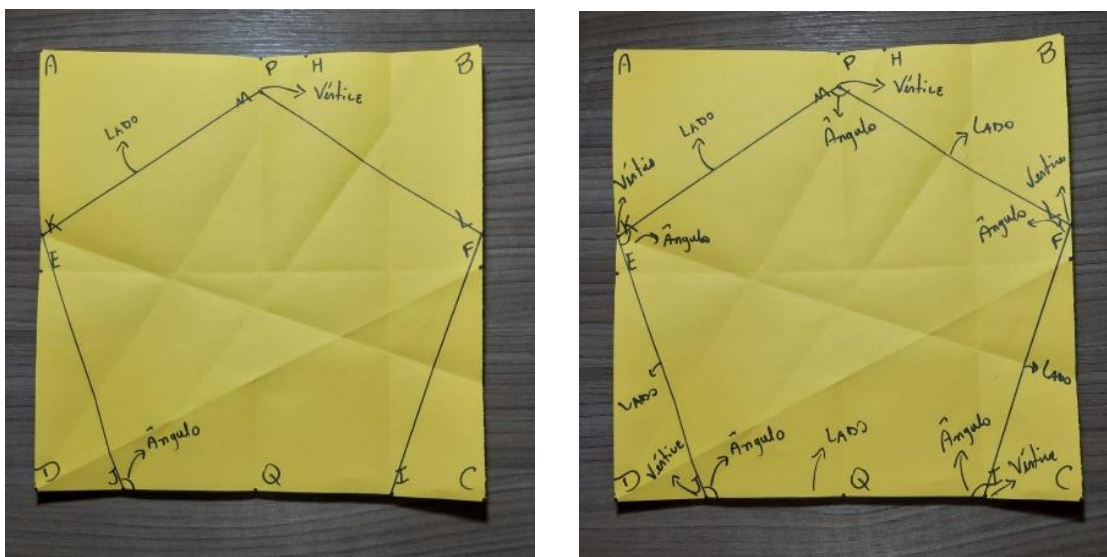
#### Sugestão de encaminhamento

P: Agora indique para mim no desenho tudo que você pode observar do pentágono. Utilize o transferidor e régua para tirar mais conclusões sobre os lados e ângulos deste polígono.

Nesta parte deixe-os livre para indicarem todos os elementos que já aprenderam, podem aparecer várias soluções diferentes, peça à alguns alunos que apresentem aos colegas os diferentes elementos que observaram, assim podem surgir questionamentos e o professor poderá encaminhar e definir algum outro conceito que surgir.

A:

Figura 94: Observações obtidas sobre o pentágono regular



Fonte: o próprio autor

A: Indiquei os lados os vértices e os ângulos que eu encontrei professor.

P: Muito bem!

Ao observar as respostas dos alunos, outra sugestão de encaminhamento que se pode fazer é pedir que completem um quadro parecido com este, pedindo que os alunos meçam os ângulos com transferidor.

Quadro 10: Lados, vértices e ângulos: anotação 10

Polígono	Lados	Vértices	Ângulos	Medida do ângulo interno	Soma dos ângulos internos
Retângulo	4	4	4	90°	360°
Quadrado	4	4	4	90°	360°
Triângulo equilátero	3	3	3	60°	180°
Hexágono regular	6	6	6	120°	720°
Pentágono regular	5	5	5	108°	540°

Fonte: o próprio autor

Um próximo encaminhamento que se pode fazer é pedir que os alunos façam em seu caderno uma lista para nomear tudo o que eles construíram, o professor pode entregar-lhes uma folha com a tabela abaixo para que completem com a notação adequada.

Quadro 11: Notação dos lados, vértices e ângulos

Polígono	Vértices	Lados	Ângulos
Retângulo			
Quadrado			
Triângulo equilátero			
Hexágono regular			
Pentágono regular			

Fonte: o próprio autor

Sugestões de respostas:

Quadro 12: Notação dos lados, vértices e ângulos com respostas

Polígono	Vértices	Lados	Ângulos
Retângulo	$A, B, C$ e $D$	$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$	$\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ e $\widehat{DAB}$
Quadrado	$A, B, C$ e $D$	$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$	$\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ e $\widehat{DAB}$
Triângulo equilátero	$A, B$ e $C$	$\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CD}$	$\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$
Hexágono regular	$D, E, F, G, H$ e $I$	$\overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG},$ $\overline{GH}, \overline{HI}$ e $\overline{ID}$	$\widehat{DEF}, \widehat{EFG}, \widehat{FGH}, \widehat{GHI},$ $\widehat{HID}$ e $\widehat{IDE}$
Pentágono regular	$I, J, K, M,$ e $L$	$\overline{IJ}, \overline{JK}, \overline{KM}, \overline{ML}$ e $\overline{LI}$	$\widehat{IJK}, \widehat{JKM}, \widehat{KML}, \widehat{MLI}$ e $\widehat{LII}$

Fonte: o próprio autor

Como este é o último polígono da tarefa, o professor pode questionar o aluno para saber tudo o que ele percebeu sobre os polígonos construídos. Espera-se que os alunos percebam que o número de lados, vértices e ângulos de cada polígono são iguais, saibam medir os ângulos internos de cada polígono e calcular sua soma além de poder observar que a soma dos ângulos internos dos quadriláteros é igual.

Por meio desta tarefa, o aluno pôde observar as definições relacionadas a cada polígono, ele teve a oportunidade de diferenciar os lados, vértices e ângulos formados, medir os ângulos internos e calcular sua soma e espera-se que terá a habilidade para escrever a notação correta de todos eles, algo que os alunos possuem bastante dificuldade. Além disso é possível utilizar os conhecimentos nesta tarefa construídos para dar continuidade e aplicar a tarefa 3, que necessita de conhecimentos prévios sobre os polígonos regulares.

## 8. BLOCO DE TAREFAS 3: CONSTRUINDO POLIEDROS DE PLATÃO

Neste bloco de tarefas o objetivo é que os alunos, em grupo, construam os poliedros de Platão que são: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro, identificando os polígonos que construímos anteriormente em suas faces, observando os elementos de cada poliedro, identificando o que é face, aresta e vértice e podendo assim descobrir a relação de Euler. Além disso poderão visualizar as planificações de cada poliedro desmontando cada um deles.

Como neste bloco de tarefas precisamos fabricar módulos de Sonobe para produzir os poliedros, recomendo aos professores que reúnam os alunos em grupos, para que cada aluno construa um módulo, podendo juntar com os dos colegas e facilitar a montagem do poliedro final. Caso tenha uma turma pequena, avalie a possibilidade de montar alguns módulos anteriormente e levá-los para a sala de aula, assim se faltar algum para a construção, já terá em mãos alguns prontos.

### 8.1 CONSTRUINDO O MÓDULO DE BASE QUADRANGULAR

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem que simulará um possível diálogo entre o professor, representado pela sigla P, e os alunos, representados pela sigla A.

P: Agora vamos construir poliedros, que são compostos por várias peças. Precisamos construir as peças para dar continuidade nas construções que estamos fazendo, então iremos fazer grupos e cada aluno do grupo construirá uma peça, para que depois possamos juntar todas elas e formar algo novo, mas agora em 3 dimensões.

A: Que legal professor, mas o que são essas peças?

P: Essas peças são chamadas de módulos de Sonobe, durante esta tarefa iremos construir módulos de base quadrangular, módulos triangulares, módulos pentagonais e os módulos de encaixe.

A: Qual iremos construir agora?

P: Vamos começar com o módulo de base quadrangular.

A: E como começamos a fazer essa peça?

P: Primeiro vamos pegar uma folha quadrada.

A:

*Figura 95: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 1*

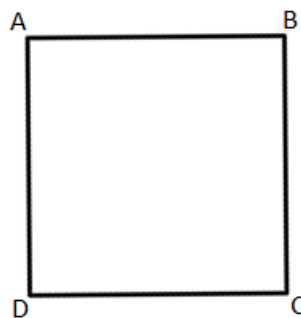


**Fonte:** o próprio autor

P: Vamos nomear os vértices assim como nessa figura.

A partir desta etapa, sempre que aparecer a figura feita pelo professor desenhe a mesma no quadro de forma que os alunos possam visualizar e acompanhar as indicações, pois terão as notações das figuras feitas de forma igual.

*Figura 96: Desenho de um quadrado com vértices marcados*



**Fonte:** o próprio autor

A: Marquei

*Figura 97: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 2*



**Fonte:** o próprio autor

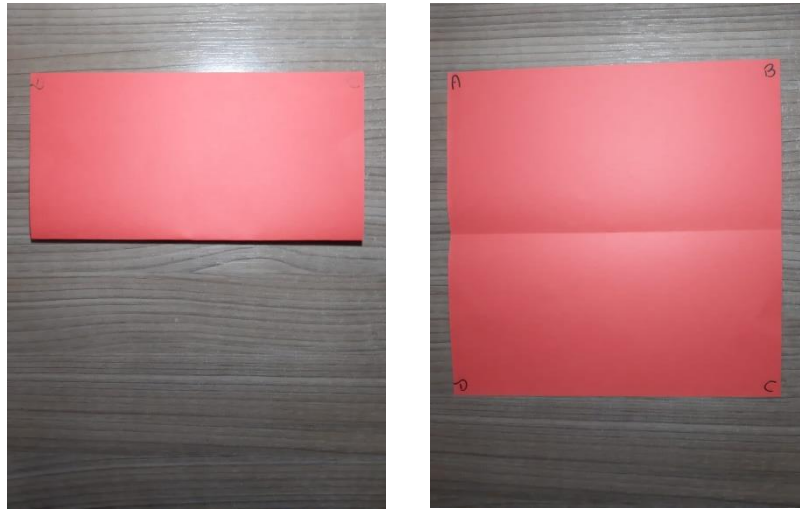
P: Agora vamos encontrar a mediatriz dos segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ .

A: Como eu faço isso mesmo?

P: Leve  $\overline{DC}$  até  $\overline{AB}$ .

A: Lembrei!

Figura 98: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 3



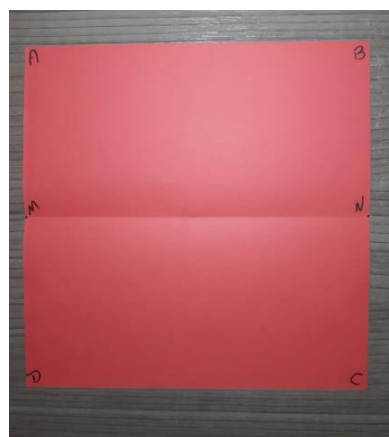
Fonte: o próprio autor

P: Agora vamos abrir e marcar os pontos  $M$  e  $N$ . Alunos, vocês se lembram como chamamos estes pontos  $M$  e  $N$  ?

A: Como os pontos  $M$  e  $N$  estão dividindo os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  ao meio, estes são os pontos médios de  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ .

A:

Figura 99: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 4



Fonte: o próprio autor

P: Isso mesmo. Agora levem os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  até a mediatriz  $\overline{MN}$ .

A: Desta forma professor?



Figura 100: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 5

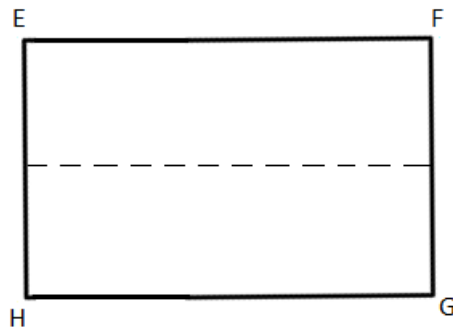


Fonte: o próprio autor

P: Exato, olhem só: Obtivemos um retângulo, vamos nomeá-lo para que as dobras fiquem mais fáceis, marque os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  assim como na figura.

P:

Figura 101: Desenho de um retângulo com os vértices marcados



Fonte: o próprio autor

A: Marquei.

Figura 102: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 6



Fonte: o próprio autor

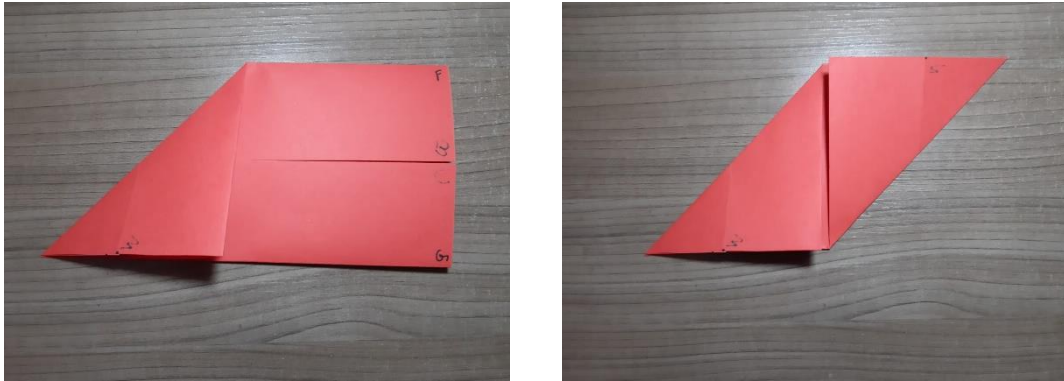
P: Levaremos o ponto  $E$  até o segmento  $\overline{HG}$  de modo que forme a bissetriz do ângulo  $E\hat{H}G$ . Do mesmo modo, levaremos o ponto  $G$  até o segmento  $EF$  de modo a formar a bissetriz do ângulo  $F\hat{G}H$ .

A: Mas como faço isso professor? Não estou entendendo.

P: O ponto  $E$  terá que encontrar o lado de baixo do retângulo, formando como se fosse um triângulo, e lembre-se que esta dobra dividirá o ângulo  $E\hat{H}G$  ao meio, pois temos que formar a bissetriz dele, da mesma forma o ponto  $G$  irá para o lado de cima do triângulo dividindo o ângulo  $F\hat{G}H$  ao meio.

A: Assim?

Figura 103: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 7

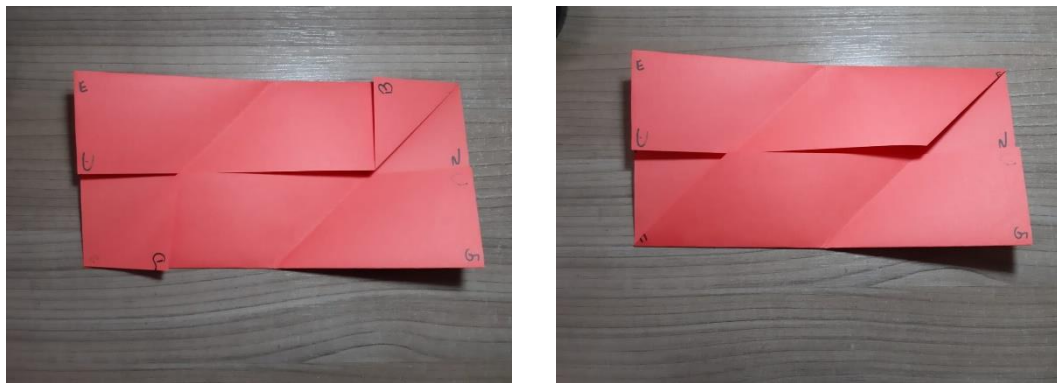


Fonte: o próprio autor

P: Vamos abrir e observar o que se formou. Veja que terão dois triângulos pequenos formados, um com o ponto  $B$  e outro com o ponto  $D$ , levaremos estes triângulos para dentro do nosso Origami de modo a esconder esses pontos.

A:

Figura 104: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 8



Fonte: o próprio autor

P: Agora faremos uma dobra um pouco diferente, levaremos o ponto  $E$  para o segmento  $\overline{HG}$  novamente, mas agora pela parte de dentro, erguendo a aba do papel que se formou e colocando o ponto  $E$  escondido.

A: Estes passos são diferentes, mas eu acho que entendi, veja se está certo professor?

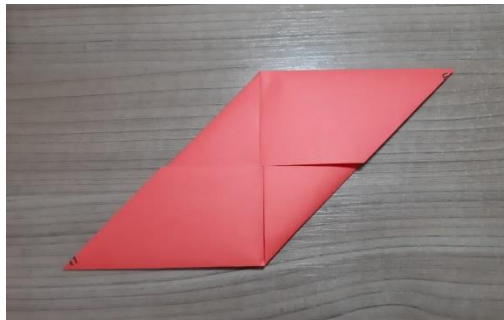
Figura 105: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 9



Fonte: o próprio autor

P: Isso mesmo. Da mesma forma faremos isso com o ponto  $G$  indo para o segmento  $\overline{EF}$ , mas também escondido.

Figura 106: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 10

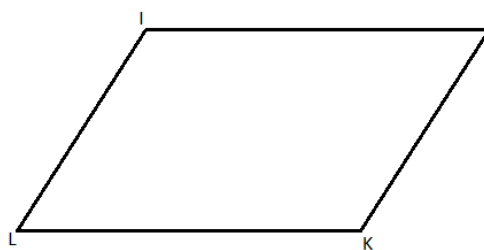


Fonte: o próprio autor

P: Vamos virar a peça, e nomear este quadrilátero formado por  $IJKL$  conforme a figura que estou desenhando no quadro.

P:

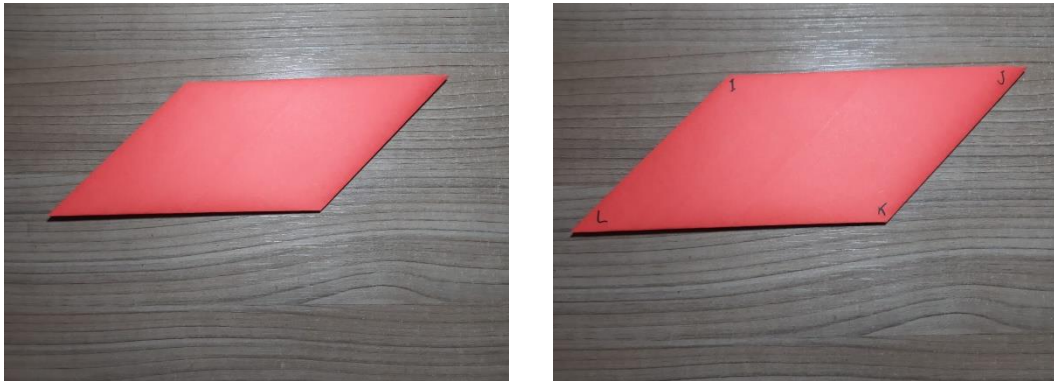
Figura 107: Desenho do quadrilátero formado com os vértices marcados



Fonte: o próprio autor

A:

Figura 108: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 11



Fonte: o próprio autor

P: Levaremos o ponto  $L$  até o ponto  $K$ , mas passando por  $I$ , e levaremos o ponto  $J$  até  $I$  passando por  $K$ .

A: Não estou entendendo esse passo professor.

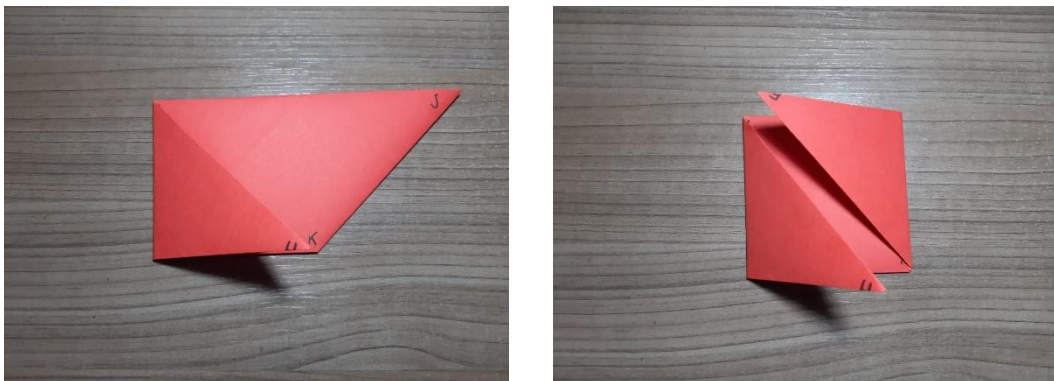
P: Quando for levar o ponto  $L$  até o ponto  $K$ , a dobra formará uma reta perpendicular, imagine que  $\overline{LK}$  seja nosso segmento e  $I$  será o ponto fora deste segmento, lembra quando passamos uma reta perpendicular por um ponto fora do segmento?

A: Lembro sim, o ponto  $L$  e o ponto  $K$  devem ficar no mesmo segmento para que possamos criar um ângulo de  $90^\circ$ .

P: Isso mesmo, então fazemos isso ao levar o ponto  $L$  até  $K$ , e o ponto  $J$  até  $I$ .

A: Desse jeito?

Figura 109: Construção do módulo de base quadrangular: etapa 12



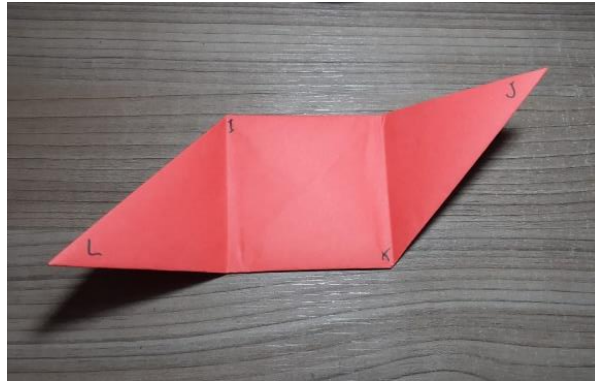
Fonte: o próprio autor

P: Isso! Agora abriremos e está formada nossa peça. Esta peça é chamada de módulo de Sonobe quadrangular e servirá para construir poliedros que

tenham faces quadradas. Observe que temos um quadrado que será a face do poliedro e os triângulos são como abas que nos auxiliarão como encaixes das peças.

A:

*Figura 110: Construção do módulo de base quadrangular: etapa final*



**Fonte:** o próprio autor

## 8.2 CONSTRUINDO O MÓDULO TRIANGULAR

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Primeiro vamos pegar uma folha quadrada igual à que usamos anteriormente, ou seja, tem as mesmas medidas do quadrado da construção anterior.

A: Ok.

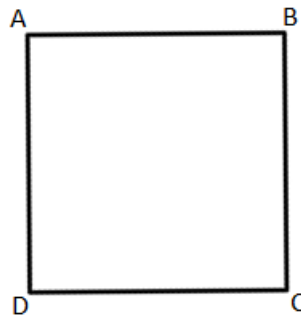
*Figura 111: Construção do módulo triangular: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

P: Vamos nomear os vértices assim como nessa figura:

Figura 112: Desenho de um quadrado com os vértices marcados



**Fonte:** o próprio autor

A: Nomeei.

Figura 113: Construção do módulo triangular: etapa 2



**Fonte:** o próprio autor

P: Como na construção anterior encontraremos a mediatriz dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$ , levando o segmento  $\overline{AD}$ , em cima do segmento  $\overline{BC}$ .

A: Agora eu lembro!

Figura 114: Construção do módulo triangular: etapa 3

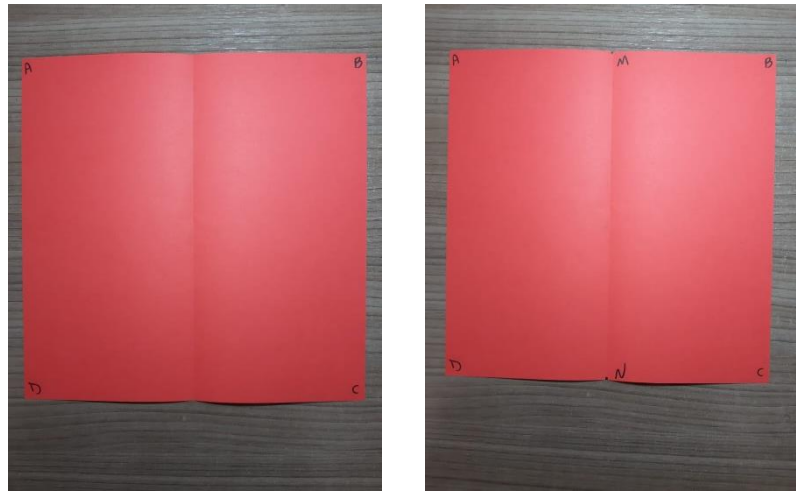


**Fonte:** o próprio autor

P: Abriremos a folha, o ponto médio de  $\overline{AB}$  chamaremos de  $M$ , e o ponto médio de  $\overline{DC}$  chamaremos de  $N$ .

A:

Figura 115: Construção do módulo triangular: etapa 4



Fonte: o próprio autor

P: Levaremos o ponto  $C$  até a mediatriz  $\overline{MN}$ , passando pelo ponto  $D$ , assim como já fizemos anteriormente.

A: Não estou lembrando professor, pode explicar novamente?

P: Devemos fazer com que o ponto  $C$  fique exatamente no segmento  $\overline{MN}$ , mas não podemos esquecer que só marcaremos essa dobra quando o ponto  $D$  estiver na dobra também.

A: Vou tentar.

Figura 116: Construção do módulo triangular: etapa 5

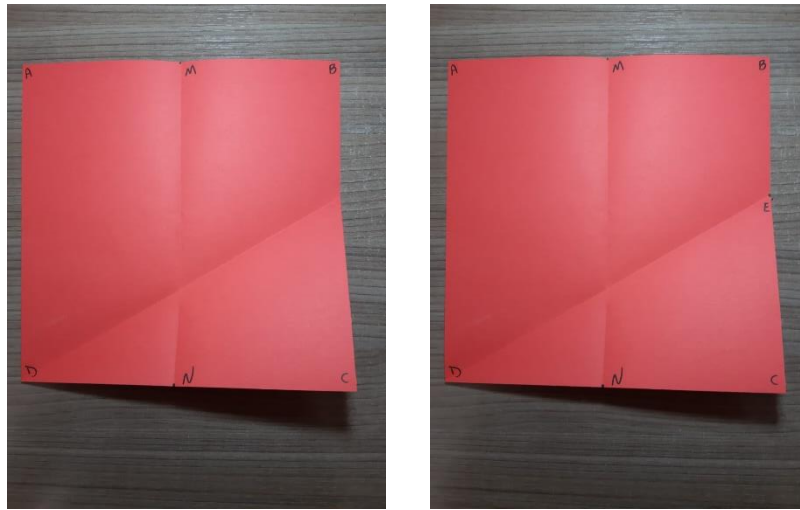


Fonte: o próprio autor

P: Abra a folha. Onde esta dobra encontrar o segmento  $\overline{BC}$  marcaremos o ponto  $E$ .

A:

Figura 117: Construção do módulo triangular: etapa 6



Fonte: o próprio autor

P: Agora levaremos o segmento  $\overline{AD}$  em cima do segmento  $\overline{DE}$ .

A: Não estou conseguindo, pode me ajudar?

P: Quando for levar o segmento  $\overline{AD}$  pense que o ponto  $A$  ficará em cima do segmento  $\overline{DE}$  e a dobra passará por  $D$  igual a dobra anterior, é só colocar o segmento  $\overline{AD}$  em cima da dobra formada anteriormente.

A: Consegui!

Figura 118: Construção do módulo triangular: etapa 7



Fonte: o próprio autor

P: Com esta dobra feita, leve o ponto  $E$  até a mediatriz  $\overline{MN}$ .

A: Mas não estou entendendo em qual parte da mediatriz o ponto  $E$  deve ficar.



P: O ponto  $E$  ficará exatamente onde o segmento  $\overline{AD}$  tocou a mediatriz  $\overline{MN}$ , além disso, quando levar o ponto  $E$  até a mediatriz essa dobra passará por  $C$ , formando um segmento  $\overline{EC}$ , que estará tocando  $\overline{MN}$  e  $\overline{AD}$  ao mesmo tempo.

A: Acho que entendi, veja se está certo.

*Figura 119: Construção do módulo triangular: etapa 8*



**Fonte:** o próprio autor

P: Esta sim! Agora leve o ponto  $N$ , até o topo da figura formada.

A: Essa é mais fácil.

*Figura 120: Construção do módulo triangular: etapa 9*

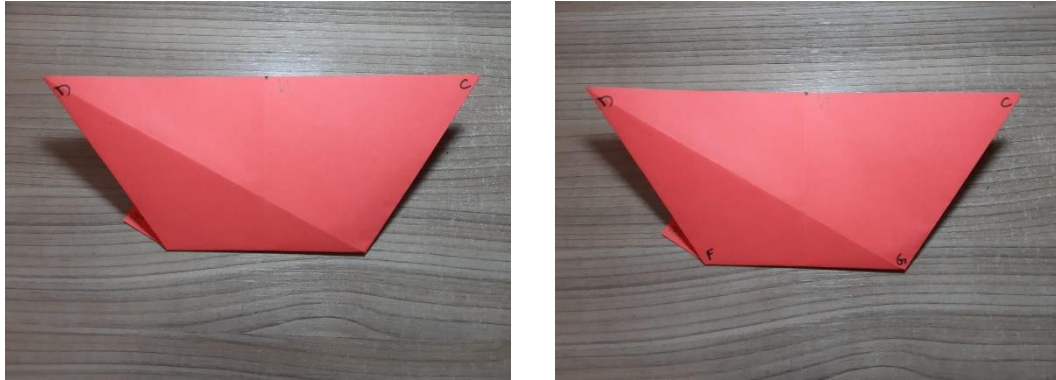


**Fonte:** o próprio autor

P: Nesta figura formada, que é um trapézio, podemos ver que os vértices  $C$  e  $D$  ficaram na parte de cima, mas estão nomeados na outra face do papel. Neste lado do papel, vamos nomear  $C$ ,  $D$  nos lugares que eles já estão, e os outros dois vértices que sobraram chamaremos de  $F$  e  $G$ .

A:

Figura 121: Construção do módulo triangular: etapa 10



**Fonte:** o próprio autor

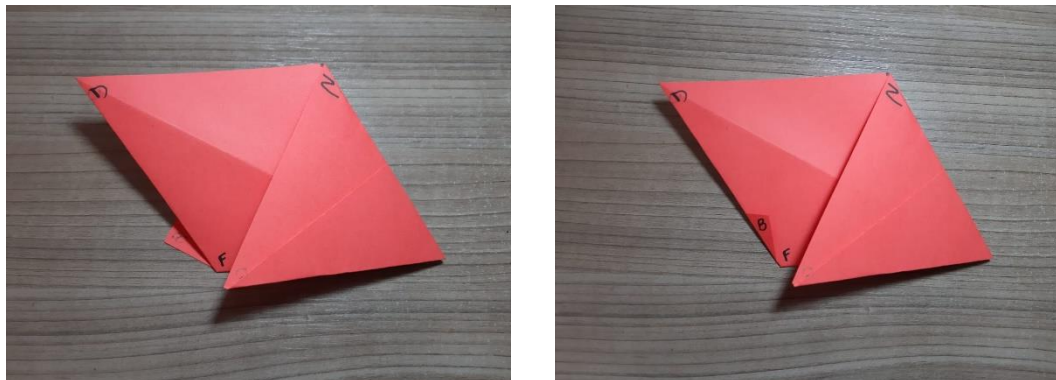
P: Colocaremos o ponto  $C$  em cima do ponto  $F$ , e aquele triângulo pequeno que está no lado de trás desta figura dobraremos para cima do ponto  $F$ , note que ele é o vértice  $B$ .

A: Não estou conseguindo professor.

P: Para fazer essa dobra leve o ponto  $C$  até  $F$  e perceba que o ponto  $N$  que está atrás da folha aparecerá, e ao mesmo tempo essa dobra passará por  $G$ .

A: Consegui!

Figura 122: Construção do módulo triangular: etapa 11

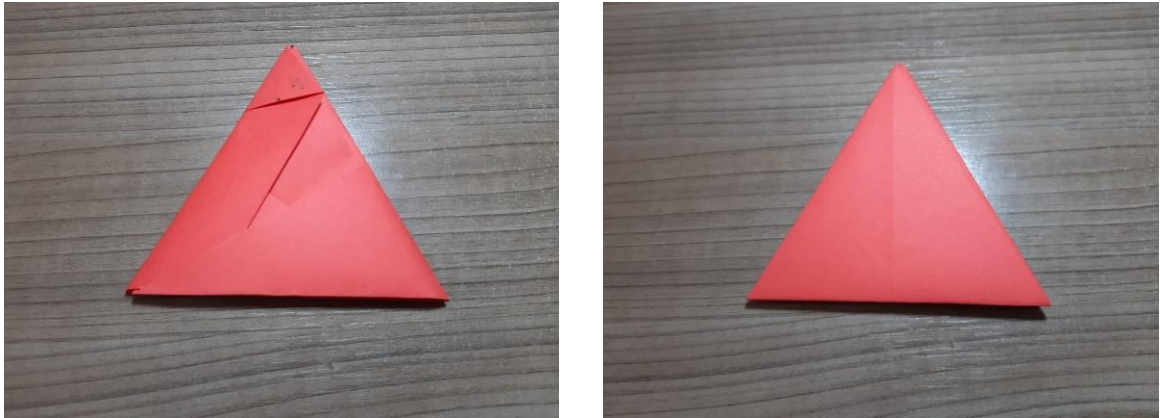


**Fonte:** o próprio autor

P: Faremos algo parecido com a peça anterior, o ponto  $D$  irá encontrar o ponto  $G$  que nomeamos, mas ele irá de baixo da aba formada pela dobra anterior que fizemos, escondendo o ponto  $D$ .

A: Acho que entendi.

Figura 123: Construção do módulo triangular: etapa final



Fonte: o próprio autor

Este módulo de Sonobe se chama módulo triangular e servirá para construir poliedros que tenham faces triangulares, mas como esse tipo de módulo não tem abas igual o módulo anterior, teremos que construir um módulo para encaixar essas faces.

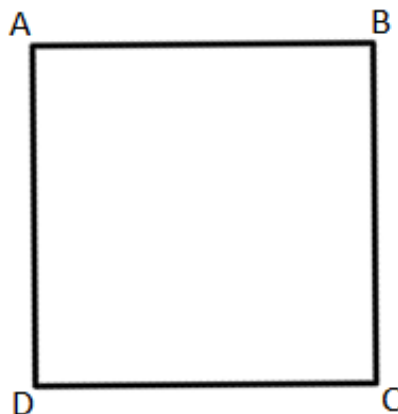
### 8.3 CONSTRUINDO O MÓDULO DE ENCAIXE

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Primeiro vamos pegar uma folha quadrada igual a anterior que usamos, ou seja, os quadrados tem a mesma medida. Nomearemos os vértices de modo igual aos anteriores.

P:

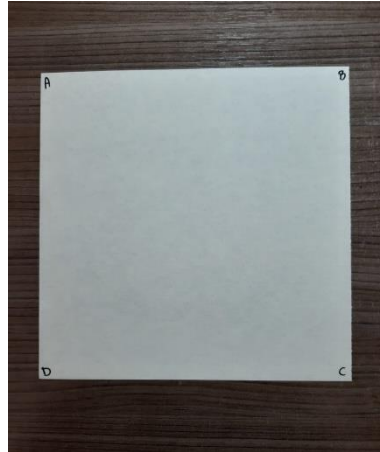
Figura 124: Desenho de um quadrado com os vértices marcados



Fonte: o próprio autor

A:

Figura 125: Construção do módulo de encaixe: etapa 1

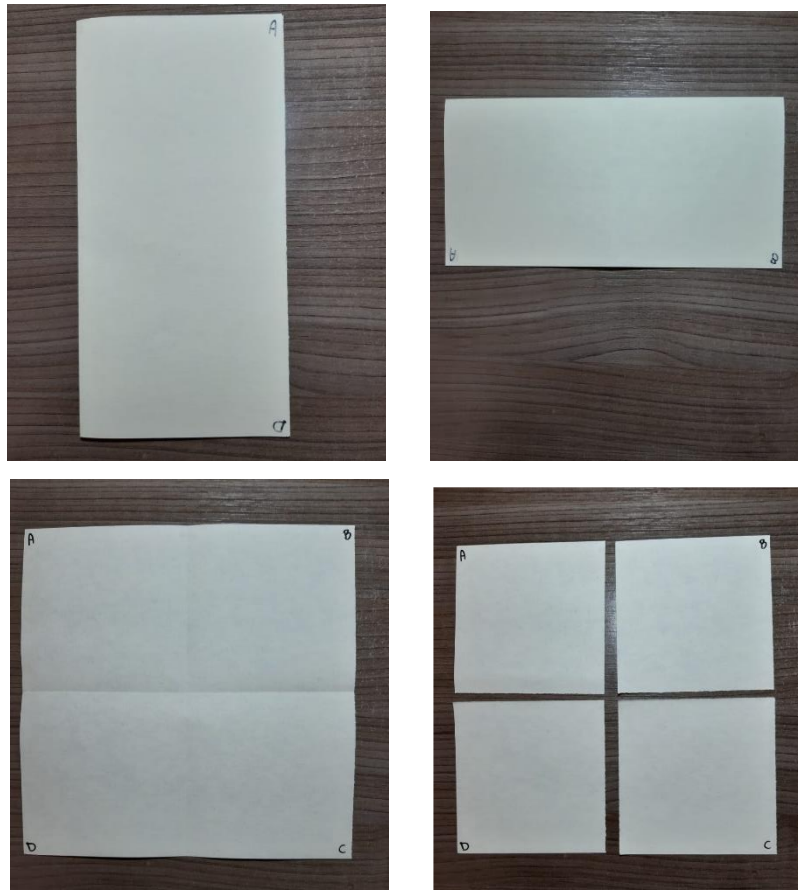


Fonte: o próprio autor

P: Faremos  $\overline{AD}$  ir sobre  $\overline{BC}$  e  $\overline{AB}$  ir sobre  $\overline{DC}$ , formando assim duas mediatrizes, abriremos e cortaremos em cima das mediatrizes formando 4 quadradinhos. Vejam que cada quadradinho corresponde a um quarto do quadrado original.

A:

Figura 126: Construção do módulo de encaixe: etapa 2

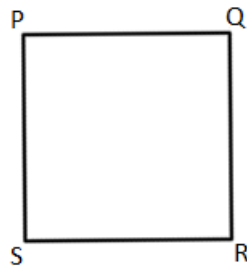


Fonte: o próprio autor

P: Agora usando um dos quadradinhos menores, nomearemos ele de  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ , assim como na figura:

P:

*Figura 127: Desenho do quadrado menor com os vértices marcados*



**Fonte:** o próprio autor

A:

*Figura 128: Construção do módulo de encaixe: etapa 3*



**Fonte:** o próprio autor

P: Levaremos  $\overline{PS}$  até  $\overline{QR}$  e  $\overline{PQ}$  até  $\overline{SR}$ , formando de novo 4 quadradinhos menores ainda. Poderiam me dizer a qual fração do quadrado original esses quadradinhos menores correspondem?

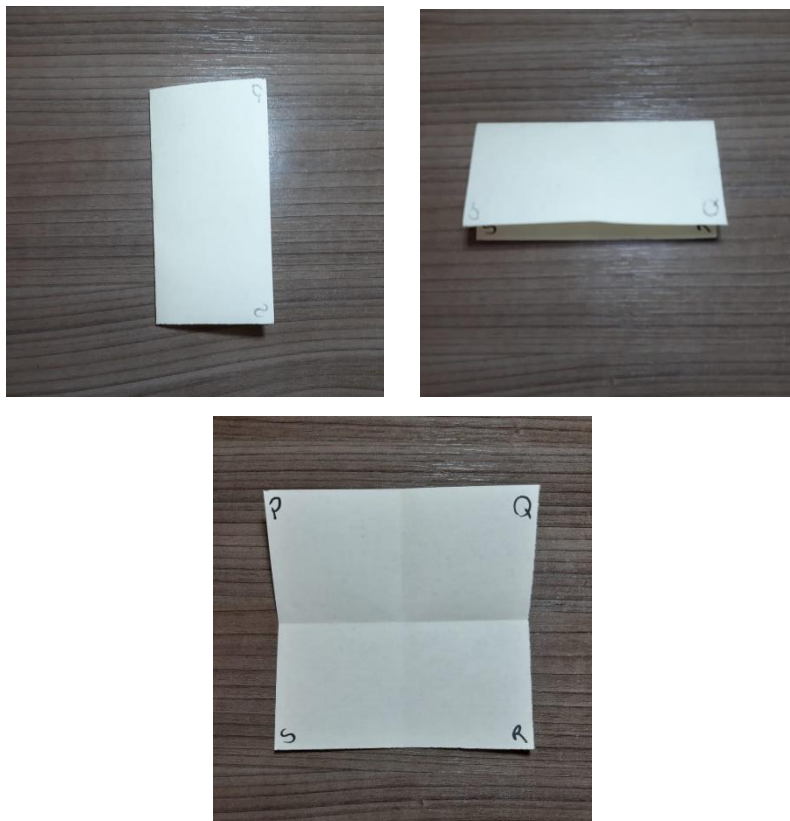
A: Professor, estes novos quadradinhos correspondem a um oitavo?

P: Vamos pensar novamente, primeiro formamos quatro quadrados, que seria um quarto do quadrado original, agora quando formamos novamente quatro quadradinhos menores quer dizer que formamos dividimos o quadrado original em quantas vezes?

A: Se cada um dos quatro primeiros for dividido em quatro teremos dezesseis quadradinhos menores, então correspondem a um dezesseis avos?

P: Isso mesmo!

Figura 129: Construção do módulo de encaixe: etapa 4

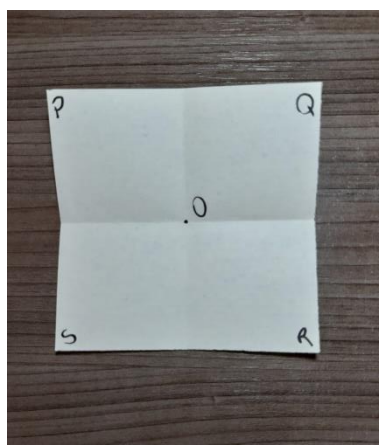


Fonte: o próprio autor

P: As duas dobras que fizemos se encontraram num ponto, chamaremos de  $O$ .

A: Marquei!

Figura 130: Construção do módulo de encaixe: etapa 5

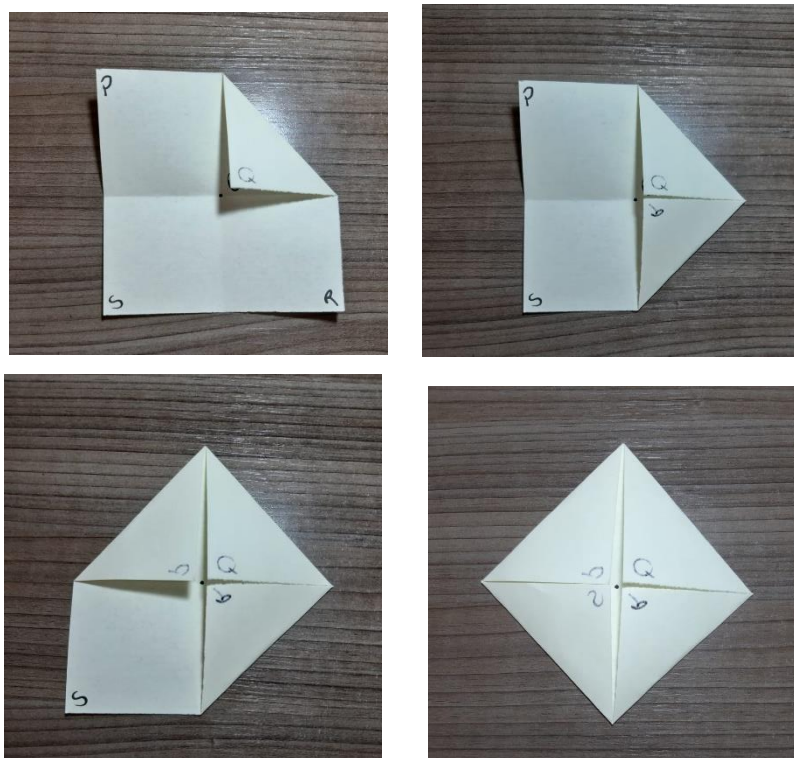


Fonte: o próprio autor

P: Levaremos cada vértice do quadrado até o ponto  $O$ .

A: Dessa forma professor?

Figura 131: Construção do módulo de encaixe: etapa 6

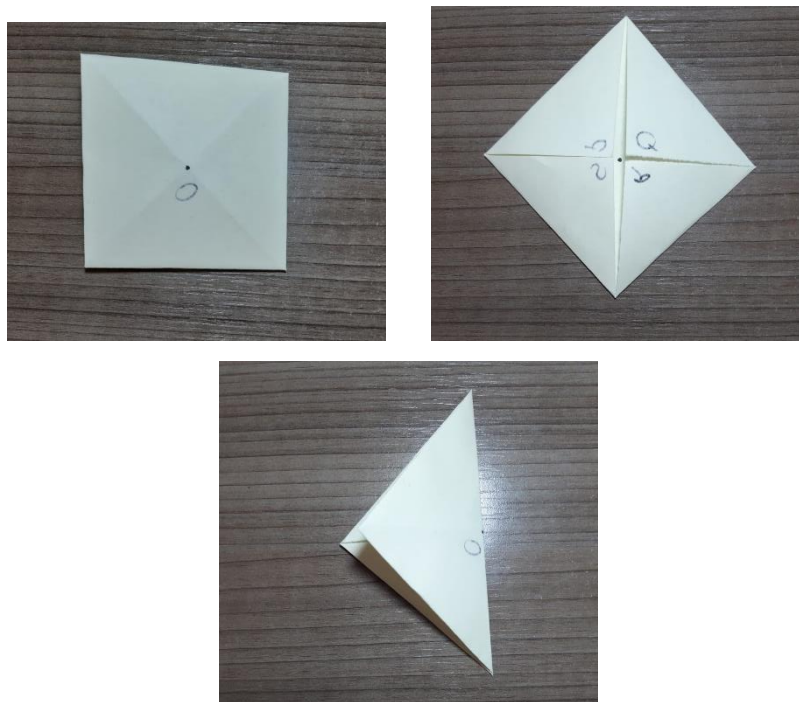


Fonte: o próprio autor

P: Sim! Agora é só virá-lo e dobrar ao meio, obtendo um triângulo. Assim está pronto nosso módulo de encaixe.

A: Esse foi fácil professor!

Figura 132: Construção do módulo de encaixe: etapa final



Fonte: o próprio autor

Este módulo facilitará a visualização das faces e arestas dos poliedros que iremos construir, pois os módulos de encaixe serão como se fossem as arestas de cada poliedro, discutiremos mais sobre esse assunto nas tarefas posteriores.

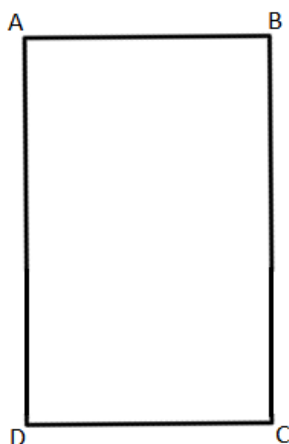
#### 8.4 CONSTRUINDO O MÓDULO DE BASE PENTAGONAL

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Primeiro vamos pegar uma folha retangular que tenha os lados diferentes, pode ser um A4 e marcar os seguintes pontos *A*, *B*, *C* e *D* como na figura

P:

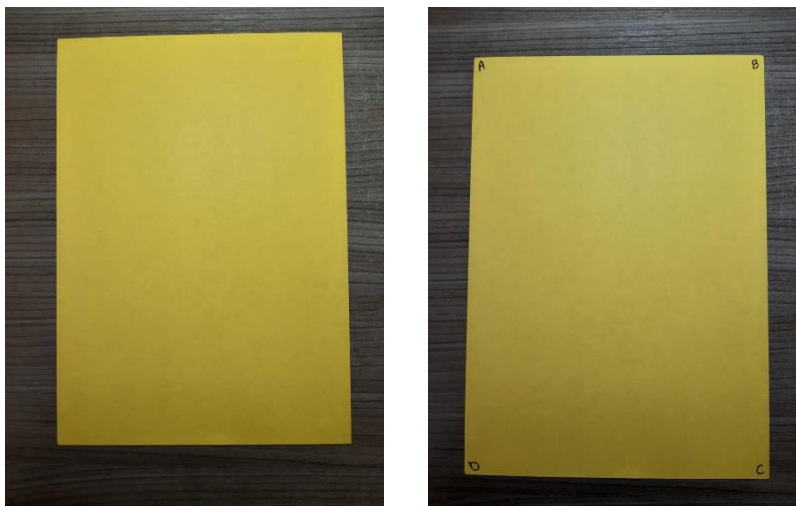
*Figura 133: Desenho de um retângulo com os vértices marcados*



**Fonte:** o próprio autor

A: Pronto!

*Figura 134: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor



P: Agora levaremos  $\overline{AD}$  sobre  $\overline{BC}$  e  $\overline{DC}$  sobre  $\overline{AB}$  formando novamente as mediatrizes.

A: Essa dobra não tem mais como errar.

Figura 135: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 2

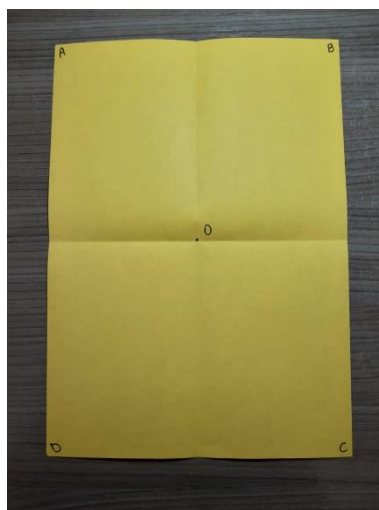


Fonte: o próprio autor

P: Onde as mediatrizes se encontraram marque o ponto  $O$ .

A: Marquei.

Figura 136: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 3



Fonte: o próprio autor

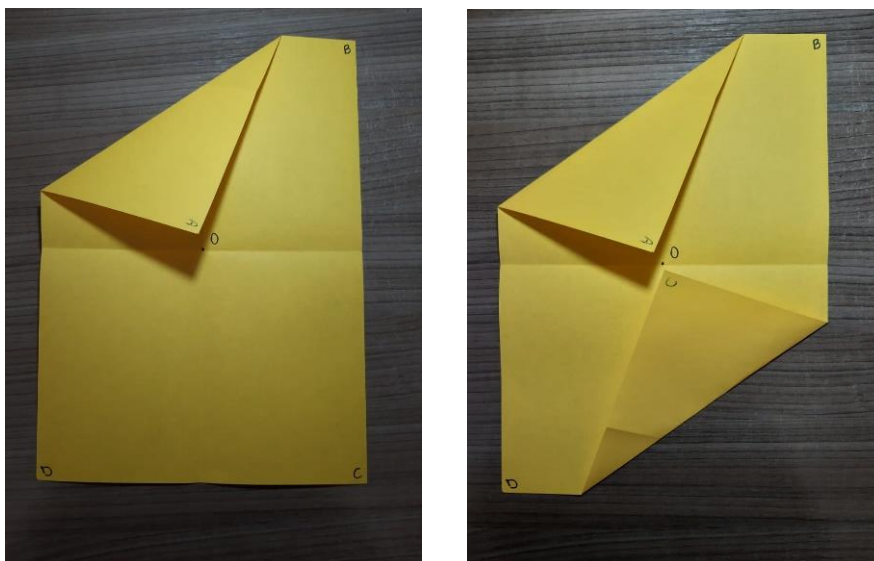
P: Leve primeiramente o ponto  $A$  e o ponto  $C$  até  $O$ .

A: Mas como faço isso?

P: Esse é fácil, tem que somente levar os pontos que falei, não tem que passar por nenhum outro e os pontos  $A$ ,  $C$  e  $O$  se encontrarão no meio.

A: Entendi! Vou fazer!

Figura 137: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 4



Fonte: o próprio autor

P: Agora leve o ponto  $B$  e o ponto  $D$  até  $O$ .

A: Esses pontos também se encontrarão no meio?

P: Sim!

A: Então eu sei fazer. É do mesmo jeito que eu fiz da última vez!

Figura 138: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 5

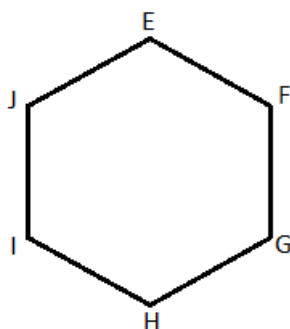


Fonte: o próprio autor

P: Formamos um hexágono, observem que ele não é um hexágono regular, pois seus lados tem medidas diferentes, chamaremos de  $EFGHIJ$  conforme a figura:

P:

Figura 139: Desenho de um hexágono com os vértices marcados



**Fonte:** o próprio autor

A:

Figura 140: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 6



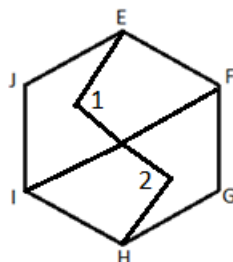
**Fonte:** o próprio autor

P: Observem que existem duas abas levantadas no meio da figura chamaremos de 1 e 2.

A: Não estou entendendo onde estão essas abas, pode me mostrar?

P: Sim, farei uma figura na lousa, mostrando as abas.

Figura 141: Desenho do hexágono formado com as abas marcadas



**Fonte:** o próprio autor

A: Agora entendi!

Figura 142: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 7



Fonte: o próprio autor

P: Dobraremos o ponto *H* até que chegue em *E*, mas a aba 2 deverá ficar embaixo da aba 1.

A: Essa dobra é difícil pode me ajudar?

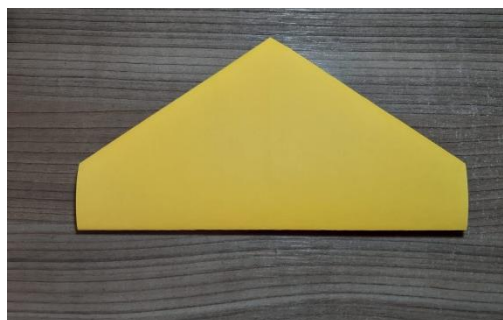
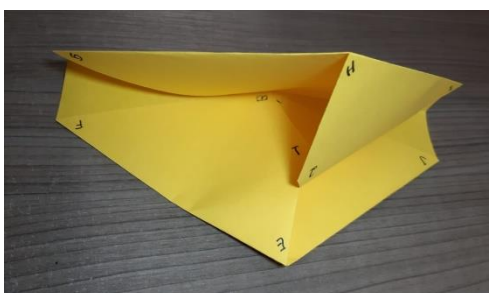
P: É como se você fosse sobrar o hexágono ao meio, levando o ponto *H* até *E*, mas as abas que construímos agora ficariam um em cima da outra, não é?

A: Ficariam sim.

P: Então onde eles ficariam juntas é só pegar a aba 2 e colocar embaixo da aba 1.

A: Acho que consigo.

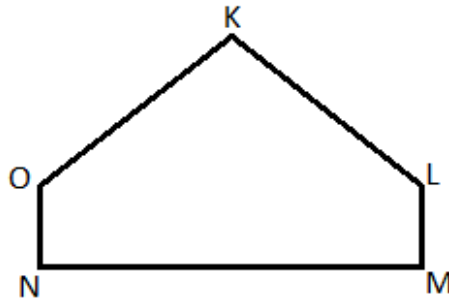
Figura 143: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 8



Fonte: o próprio autor

P: Foi formada uma nova figura, veja que este polígono é um pentágono, mas seus lados não tem a mesma medida por isso podemos dizer que é um polígono não regular, chamaremos de  $KLMNO$  conforme a figura:

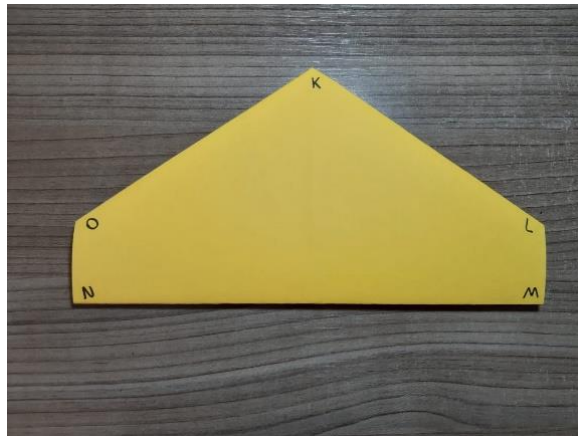
Figura 144: Desenho do pentágono formado com os vértices marcados



Fonte: o próprio autor

A: Ok!

Figura 145: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 9



Fonte: o próprio autor

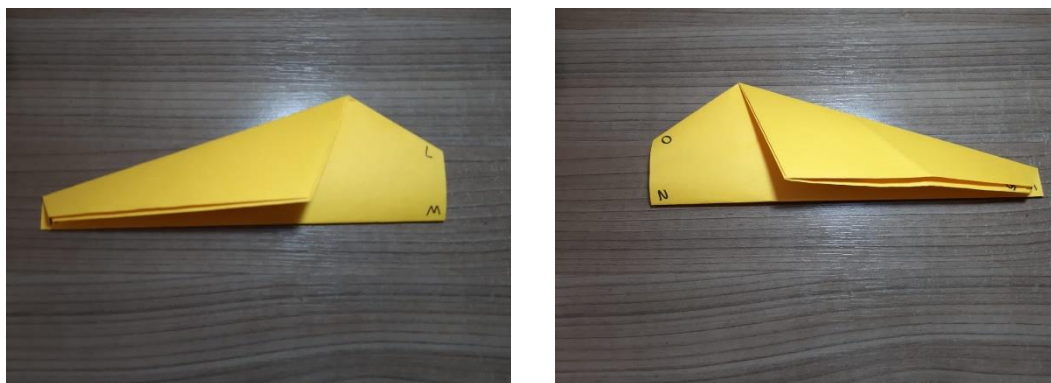
P: Levaremos o segmento  $\overline{KO}$  até  $\overline{MN}$ , desdobre e leve o segmento  $\overline{KL}$  até  $\overline{MN}$  e desdobre.

A: Pode me explicar melhor estas dobras?

P: Quando levar o segmento  $\overline{KO}$  até o segmento  $\overline{MN}$ , o ponto  $K$  e o ponto  $O$  devem estar em cima do segmento  $\overline{MN}$ , por isso dizemos que o segmento todo deve ir até o segmento  $\overline{MN}$ , então pense assim:  $K$  e  $O$  tocarão o segmento  $\overline{MN}$ , assim como  $K$  e  $L$ .

A: Entendi! Desta forma?

Figura 146: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 10



Fonte: o próprio autor

P: Sim, isso mesmo! Agora, onde a dobra tocou  $\overline{KO}$  chame de  $P$ , e onde a dobra tocou  $\overline{KL}$  chame de  $Q$ .

A: Esse é fácil!

Figura 147: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 11

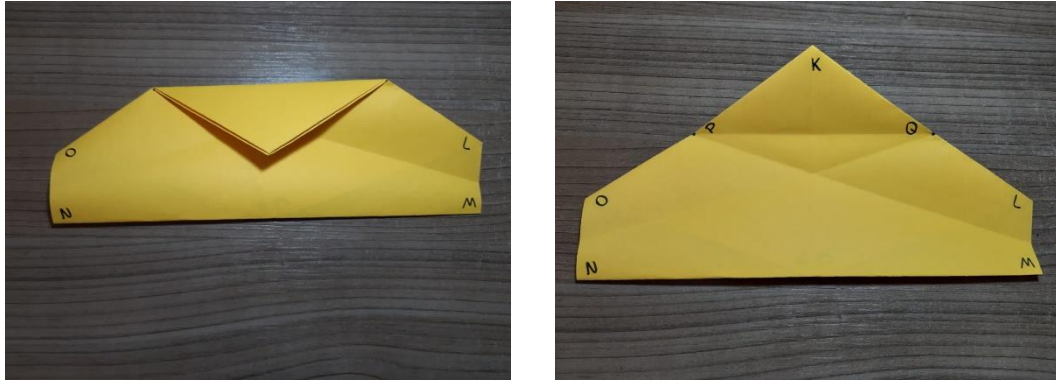


Fonte: o próprio autor

P: Dobre para formar o segmento  $\overline{PQ}$ .

A: Pronto!

Figura 148: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 12



Fonte: o próprio autor

P:  $\overline{PQ}$  tocou uma dobra existente em que o ponto  $K$  está. Marque o ponto  $X$ , leve o ponto  $O$  e o ponto  $L$  até  $X$ .

A: Não estou entendendo onde é o ponto  $X$ , pode me explicar?

P: O ponto  $K$  está bem no topo da figura?

A: Sim está.

P: Agora observe como se fosse uma dobra que divide toda a figura ao meio, o ponto  $K$  está bem no topo desta dobra, não está?

A: Sim.

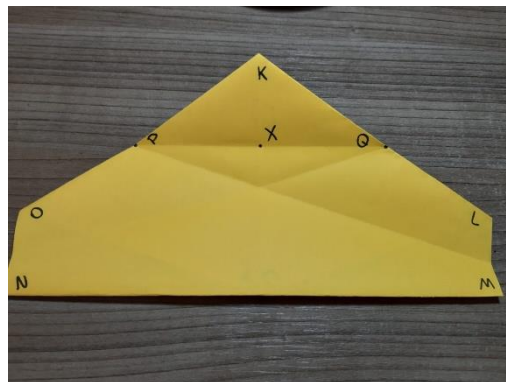
P: Agora observe que essa dobra toca o segmento  $\overline{PQ}$ .

A: Verdade ela toca sim.

P: Então é nesse encontro dos segmentos que você marcará o ponto  $X$ , depois é só levar o ponto  $O$  e o ponto  $L$  até  $X$ .

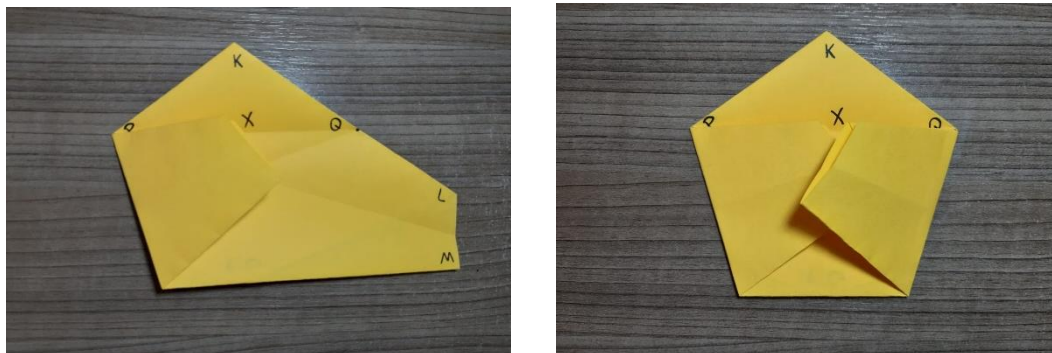
A: Tudo bem, entendi.

Figura 149: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 13



Fonte: o próprio autor

Figura 150: Construção do módulo de base pentagonal: etapa 14



Fonte: o próprio autor

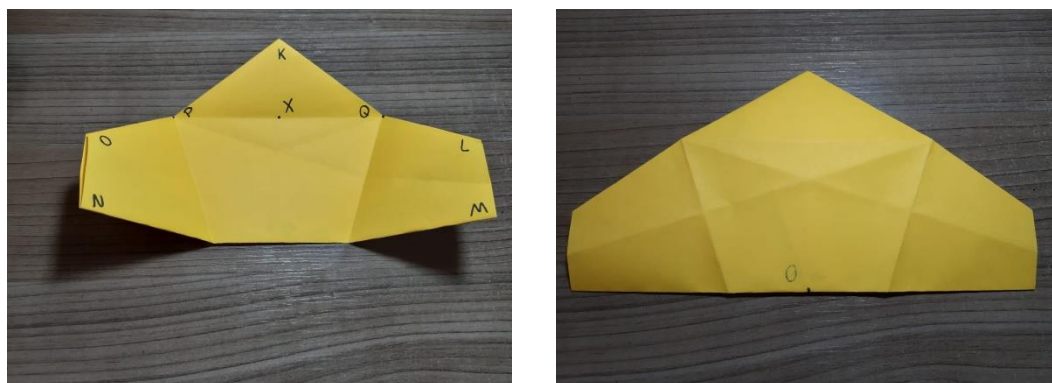
P: Formamos um pentágono regular, abrimos a peça e está pronta. Este módulo de Sonobe servirá para os poliedros que têm faces pentagonais, por isso se chama módulo de base pentagonal.

A: Mas professor essa peça é diferente não tem só o pentágono nesta peça, ela tem um formato diferente.

P: Boa observação, esta peça não precisa do módulo de encaixe como a peça triangular precisava, esta peça é parecida com o módulo de base quadrangular que fizemos primeiro, a peça já possui a face e as abas para encaixar com outras faces, tudo na mesma peça, falaremos mais disso quando formos montar o poliedro.

A: Acho que entendi, mas preciso observar a montagem do poliedro. Quando tudo se juntar, acho que vou entender melhor.

Figura 151: Construção do módulo de base pentagonal: etapa final



Fonte: o próprio autor

## 8.5 CONSTRUINDO UM CUBO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de



Aprendizagem:

P: Construiremos agora um cubo, alguém saberia me dizer o que é um cubo?

A: Não sei dizer, com precisão, o que é um cubo professor, mas vejo vários objetos que parecem um cubo, como um cubo mágico, um cubo de gelo ou um dado.

P: Isso mesmo! Esses objetos se assemelham a um cubo. Vocês saberiam me dizer quantas faces tem um cubo?

A: O que é face professor?

P: É a superfície plana formada por polígonos que delimitam a figura que formaremos.

A: Entendi, então são 6 faces professor.

P: Isso! E qual o formato dessas faces?

A: São quadrados professor?

P: Sim, por isso iremos começar com os módulos de base quadrangular.

A: Ok.

P: Como cada um do grupo fez uma peça quadrangular, e vimos que o cubo tem 6 faces, vamos precisar agora de 6 peças. Para facilitar a visualização dos encaixes, vamos pegar 2 peças laranja, 2 peças vermelhas e 2 peças brancas.

A: Ok!

*Figura 152: Construção de um cubo: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

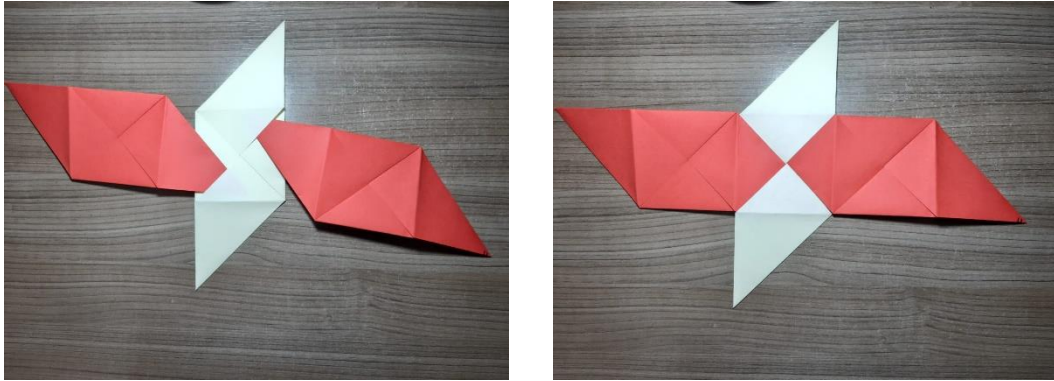
P: Vocês podem observar que em cada peça, bem no meio do X formado pelas dobras, há como se fossem 2 bolsos e cada peça tem 2 abas, vamos montar o cubo de forma que cada aba fique dentro de cada bolso.

A: Mas como fazemos isso professor?

P: Tentem começar com 3 peças, deixem 1 peça no meio coloque 2 peças ao lado desta, encaixem uma aba à direita e uma à esquerda da peça que está no meio.

A: Acho que entendi, veja se está certo.

*Figura 153: Construção de um cubo: etapa 2*



**Fonte:** o próprio autor

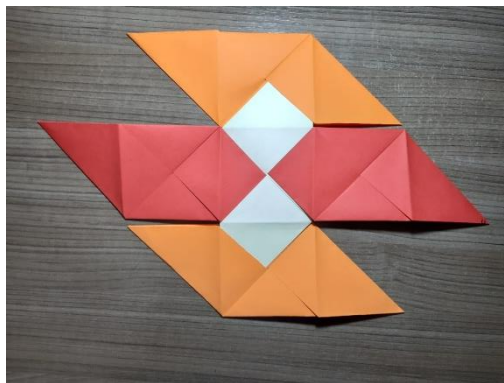
P: Sim, isso mesmo! Nestas 2 abas que estão livres da peça do meio, coloque mais 2 peças.

A: Como eu faço isso?

P: Tente observar os bolsos que as peças tem, só precisamos fazer com que a aba fique dentro da próxima peça.

A: Vou tentar.

*Figura 154: Construção de um cubo: etapa 3*

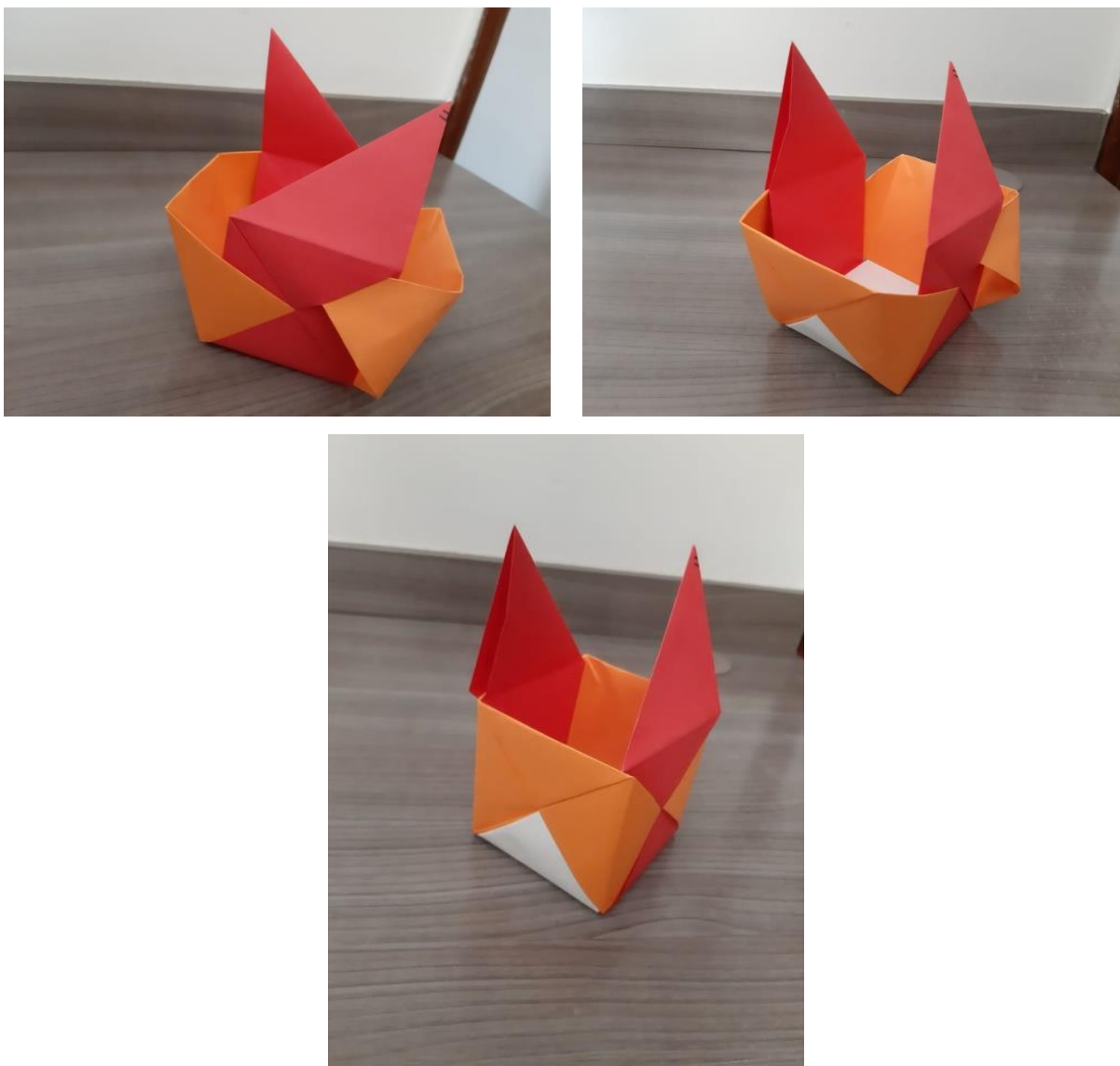


**Fonte:** o próprio autor

P: Agora imaginem que é uma figura em 3 dimensões e terão que levantá-la, e este quadrado do meio que foi formado será a base da sua construção.

A: Estou percebendo que eu tenho que encaixar as paredes laterais usando os bolsos. Fazendo assim, meu cubo começa a ficar de pé.

Figura 155: Construção de um cubo: etapa 4



Fonte: o próprio autor

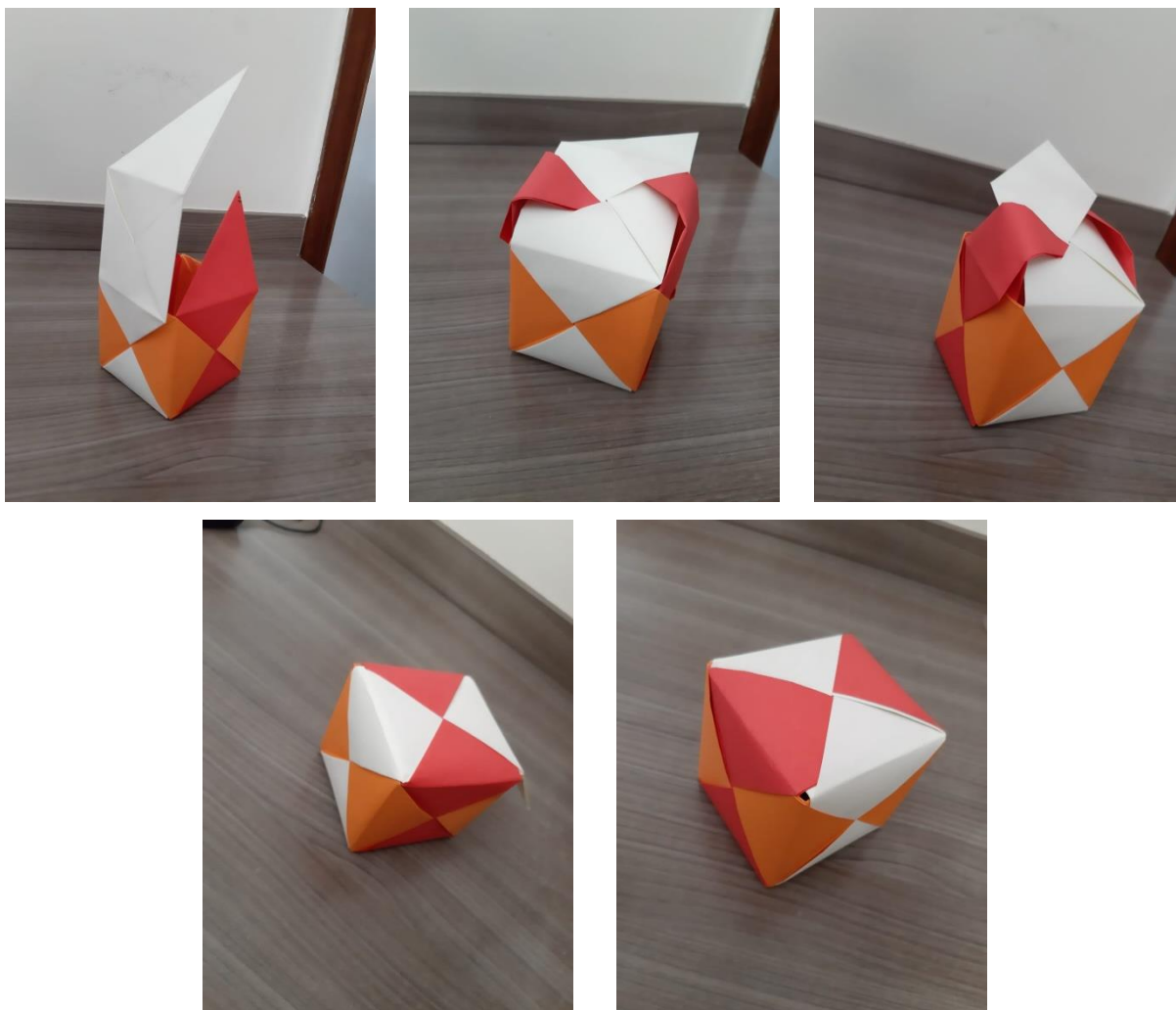
P: Perfeito agora já temos a construção quase pronta, vamos agora encaixar a última peça, observem que há somente duas abas e 2 bolsos sobrando, portando a próxima peça terá o encaixe perfeito, pois ela tem 2 abas e 2 bolsos também.

A: Acho que entendi, só preciso fazer com que essas abas que estão para cima encaixem na proxima peça?

P: Sim isso mesmo, tente fazer.

A:

Figura 156: Construção de um cubo: etapa final



*Fonte: o próprio autor*

P: O que acabamos de montar é um poliedro, e este, como já discutimos antes, quando vocês deram exemplos como o dado ou um cubo de gelo, tem um nome especial que é Cubo.

A: Mas professor, o que é um poliedro?

P: “Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).” (LIMA *et al.*, 2004)

Sugestões de encaminhamento.

I) Neste momento o professor poderá fazer perguntas para que os alunos possam ir descobrindo coisas novas sobre o poliedro formado, com relação as faces, arestas e vértices que o poliedro possui.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: A partir da definição vocês poderiam observar no cubo e anotar no caderno quantas são as faces, arestas e vértices?

A: Posso professor, as faces já sabemos que são 6, as arestas são aquelas onde se encontram duas faces, então temos 4 na parte de cima, 4 na lateral e mais 4 em baixo, totalizando 12 arestas, já os vértices como são as extremidades só tem 4 em cima e 4 em baixo, então são 8 vértices.

P: Isso mesmo!

Uma outra possibilidade é pedir que os alunos completem uma tabela como esta abaixo:

Quadro 13: Elementos dos poliedros: anotação 1

Nome do poliedro	Tipo de face	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices	Relação entre número de faces, arestas e vértices
Cubo	Quadrada	6	12	8	Aqui o número de arestas é o dobro de faces

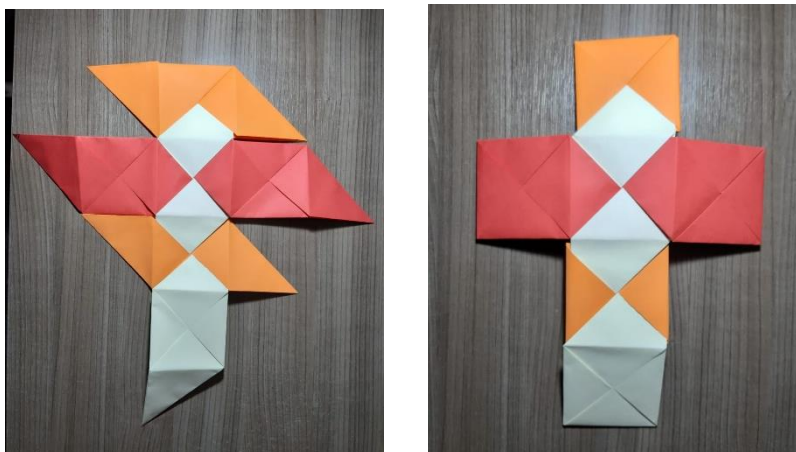
*Fonte: o próprio autor*

Deixe que o aluno conclua o que observar sobre esses números, nos próximos poliedros poderá leva-los a ver mais relações entre os números de faces, arestas e vértices.

II) Podemos também pedir que o aluno desmonte o cubo, esconda suas abas e veja sua planificação, lembrando que planificação é a forma que podemos apresentar um poliedro no plano, ou seja, é a forma de representar um objeto tridimensional em apenas duas dimensões, que é utilizado algumas vezes para poder calcular sua área de superfície. Destacamos aqui que as planificações

podem ser feitas de várias formas diferentes, mas neste trabalho apresentamos apenas um exemplo para cada poliedro durante as tarefas, mas o professor pode deixa-los livres para apresentar qualquer tipo de planificação que encontrarem.

*Figura 157: Planificação do cubo*



**Fonte:** o próprio autor

## 8.6 CONSTRUINDO UM TETRAEDRO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Construiremos agora um tetraedro que é um tipo particular de pirâmide. Alguém saberia me dar exemplos de pirâmides?

A: Claro! As pirâmides do Egito professor!

P: Isso mesmo! Tem algum outro que vocês lembram?

A: Eu já joguei RPG<sup>1</sup> e tinha um dado no formato de uma pirâmide.

P: Muito bem!

P: Então qual o formato das faces de uma pirâmide?

A: São triângulos professor?

P: Sim, temos pirâmides que tem somente faces triangulares, mas temos pirâmides que também tem outros tipos de faces. Nesse caso particular chamamos estas faces de face da base da pirâmide. Mas nesta tarefa só usaremos faces triangulares, por isso pedirei que peguem os módulos triangulares.

A: Ok.

---

<sup>1</sup> A sigla RPG deriva da expressão em inglês “Role Playing Game”, que é um jogo onde os jogadores podem fazer o papel de um personagem, mas para jogá-lo são necessários vários tipos de dados com diferentes formatos.

P: Este poliedro que faremos agora se chama tetraedro, o que vocês lembram quando ouvem a palavra “tetra”?

A: Eu lembro que um time de futebol é tetra campeão, isso significa que o time venceu um torneio quatro vezes. Não é isso professor?

P: Exato. O prefixo “tetra” serve para se referir ao número 4. Então se o poliedro que vamos construir usa esse prefixo o que vocês podem imaginar dele?

A: Que ele tem 4 faces?

P: Isso mesmo! Como cada um do grupo fez uma peça triangular, e vimos que o tetraedro tem 4 faces, vamos precisar de quantos módulos triangulares?

A: 4 módulos professor?

P: Sim! Mas esse poliedro é diferente do anterior, ele não possui abas na própria peça então teremos que usar as peças de encaixe que dobramos também, façam uma conta simples, multipliquem a quantidade de faces por 3, pois cada peça tem três bolsos, e após isso dividam o número que encontraram por dois, se não estaremos contando duas vezes a quantidade de encaixe que fazemos, pois cada peça de encaixe, se juntará em duas faces. Quantas peças de encaixe vamos pegar?

A: Vamos pegar 6 delas.

P: Ótimo!

A:

*Figura 158: Construção de um tetraedro: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

P: Pegue uma peça triangular e três de encaixe, coloque a triangular ao meio e observe seus bolsos.

A:

Figura 159: Construção de um tetraedro: etapa 2



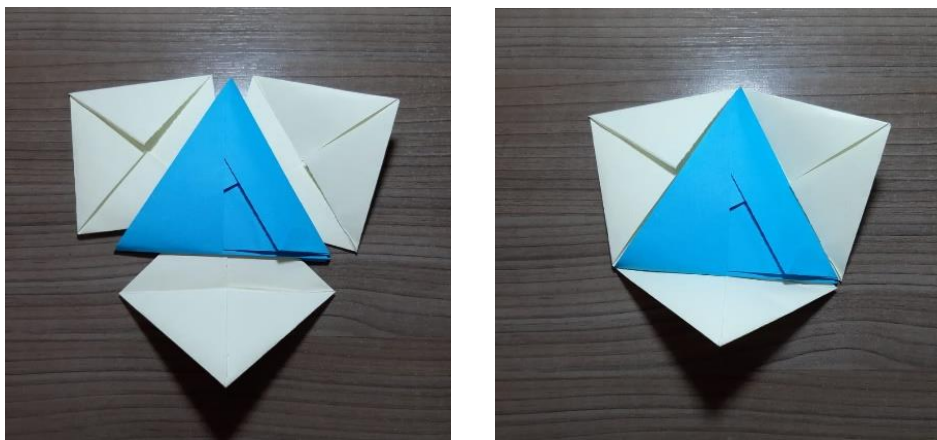
*Fonte: o próprio autor*

A: Estou vendo professor, cada peça triangular tem 3 aberturas!

P: Isso! Cada peça de encaixe cabe exatamente em dos bolsos, então colocaremos cada peça de encaixe em cada um dos 3 bolsos, tente fazer.

A: Estou tentando.

Figura 160: Construção de um tetraedro: etapa 3



*Fonte: o próprio autor*

P: Isso mesmo! Agora temos essas 3 abas sobrando, em cada uma delas colocaremos uma peça triangular.

A: Tem diferença se eu mudar o lado do triângulo?

P: Não, poderemos colocar o triângulo de qualquer lado.

A: E eu posso colocar em qualquer bolso?

P: Sim, como o módulo é um triângulo equilátero ele tem todos os lados com mesma medida, assim podemos usar qualquer bolso que não fará diferença na montagem final.

A: Ok!



Figura 161: Construção de um tetraedro: etapa 4

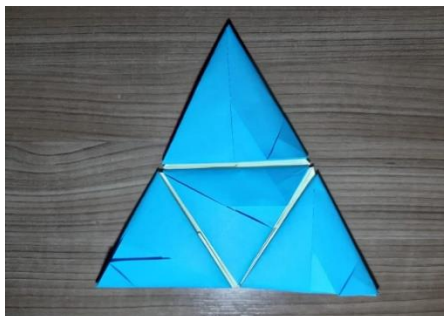


Fonte: o próprio autor

P: Agora é só encaixar.

A: Muito fácil!

Figura 162: Construção de um tetraedro: etapa 5



Fonte: o próprio autor

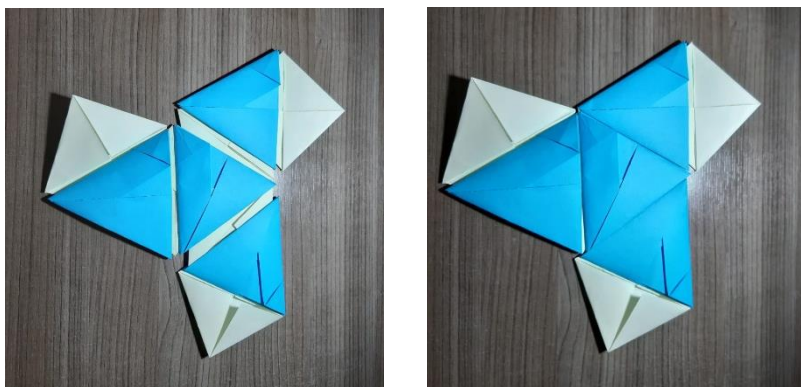
P: Quantos bolsos livres há em cada triângulo que sobrou?

A: Se cada um tinha 3 bolsos, e utilizamos 1, cada um deles tem 2 bolsos livres.

P: Isso então vamos colocar um módulo de encaixe em cada triângulo e deixar um bolso livre em cada um.

A:

Figura 163: Construção de um tetraedro: etapa 6

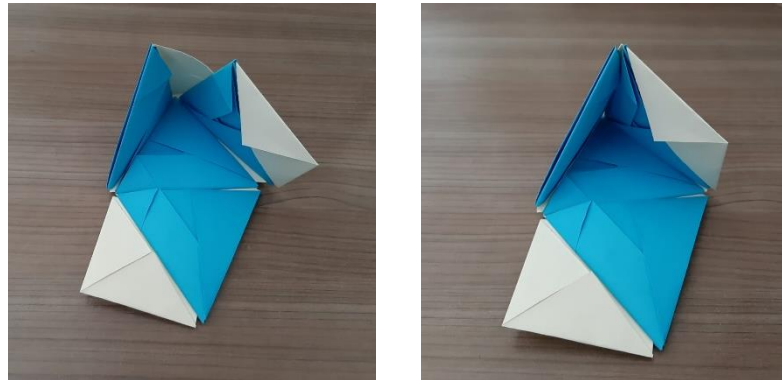


Fonte: o próprio autor

P: Agora vamos começar a formar a figura em 3 dimensões, o triângulo do meio será a nossa base, e levantaremos 2 triângulos encaixando a aba que está sobrando num bolso que está sobrando.

A: Acho que entendi, cada aba desta que está fora encaixa no próximo triângulo.

*Figura 164: Construção de um tetraedro: etapa 7*



**Fonte:** o próprio autor

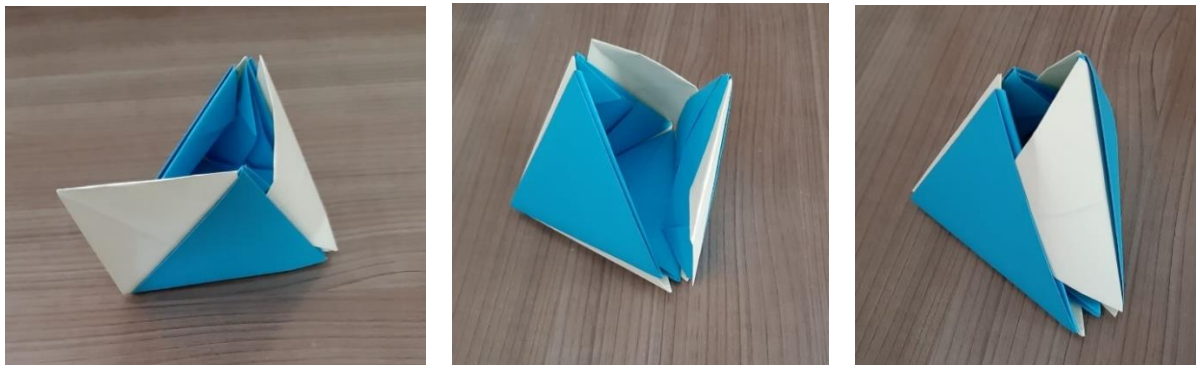
P: Já está quase pronto, só falta levantar o ultimo triângulo e encaixar as duas abas que estão sobrando com os dois bolsos que estão sobrando.

A: Está difícil de manusear, pode me ajudar?

P: Claro, observe que basta ir encaixando devagar para que as outras peças não desmontem, coloque a ponta de cada peça e vá manipulando até encaixar totalmente.

A:

*Figura 165: Construção de um tetraedro: etapa final I*



**Fonte:** o próprio autor

Figura 166: Construção de um tetraedro: etapa final II



**Fonte:** o próprio autor

P: Está pronto nosso segundo poliedro, o nome deste é tetraedro. Assim o tetraedro é um poliedro que tem quatro faces triangulares. Vejam que para construirmos este tetraedro nós usamos quatro triângulos congruentes, assim este tetraedro é chamado de tetraedro regular.

Sugestões de encaminhamento.

I) Neste momento o professor poderá continuar com as perguntas para que os alunos possam ir descobrindo coisas novas sobre o poliedro formado, com relação as faces, arestas e vértices que o poliedro possui

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Lembrando da definição de poliedro vocês poderiam me dizer quantas são as faces, arestas e vértices do tetraedro?

A: Posso professor, as faces já sabemos que são 4 por causa do nome dele, as arestas são aquelas onde se encontram duas faces, nesse caso elas ficaram bem aparentes com as peças de encaixe, a quantidade de arestas tem algo a ver com a quantidade de peças de encaixe que utilizamos?

P: Sim, utilizamos 6 peças de encaixe conte para mim quantas arestas tem no tetraedro?

A: 6 arestas! Então a quantidade de peças de encaixe é a mesma quantidade de arestas!

P: Isso mesmo! E quantos são os vértices?

A: Como são as pontas só tem 4 delas.

P: Isso mesmo! Agora podemos continuar completando a tabela feita anteriormente:

Quadro 14: Elementos dos poliedros: anotação 2

Nome do poliedro	Tipo de face	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices	Relação entre número de faces, arestas e vértices
Cubo	Quadrada	6	12	8	O número de arestas é o dobro de faces
Tetraedro	Triangular	4	6	4	O número de faces e vértices é o mesmo

*Fonte: o próprio autor*

Com relação ao número de faces, arestas e vértices, pergunte a eles se a relação que encontrou no primeiro poliedro foi a mesma do segundo poliedro. Diga a eles para que nos próximos poliedros, eles devem tentar encontrar uma relação comum a todos os poliedros que envolvam o número de faces, arestas e vértices.

Deixe que o aluno conclua o que observar sobre esses números, nos próximos poliedros poderá levá-los a ver mais relações entre a quantidade de faces, arestas e vértices.

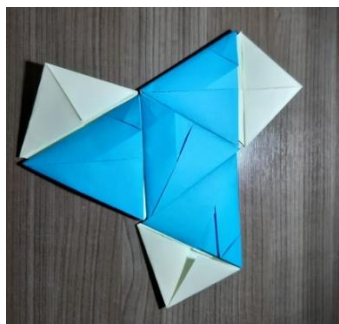
II) Podemos também pedir que o aluno desmonte o tetraedro e veja sua planificação.

Para esta sugestão temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Tendo em vista a planificação anterior que mostrei a vocês, poderiam me mostrar a planificação do tetraedro?

A: É essa aqui professor.

Figura 167: Planificação do tetraedro: tentativa do aluno

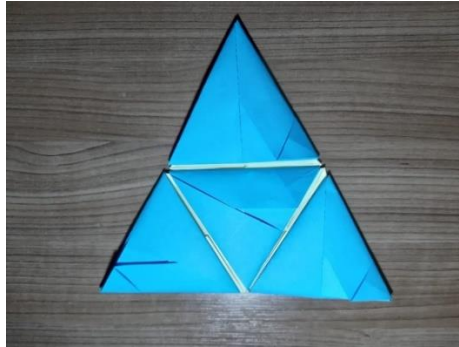


*Fonte: o próprio autor*

P: Essa não poderá ser a planificação, pois está aparecendo as abas onde são encaixadas as peças, a planificação só mostra as faces do poliedro. Sabendo disso qual seria então a planificação?

A: Essa aqui!

*Figura 168: Planificação do tetraedro*



*Fonte: o próprio autor*

P: Isso mesmo!

## 8.7 CONSTRUINDO UM OCTAEDRO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Construiremos agora um octaedro, que é parecido com um balão de festa junina, vocês conhecem?

A: Conheço sim professor!

P: E vocês saberiam me dizer qual a quantidade de faces que um octaedro possui?

A: Pelo nome do poliedro professor, “octa” tem haver com 8?

P: Isso mesmo! E conseguem lembrar como são as faces dele?

A: Eu acho que as faces parecem com triângulos.

P: Muito bem! Mais alguma coisa que vocês sabem sobre o octaedro?

A: Eu lembro que ele parece duas pirâmides, uma colada na outra.

P: Parece mesmo! Vamos montá-lo agora, como vimos que o octaedro tem 8 faces, vamos precisar de quantos módulos triangulares?

A: 8 módulos professor?

P: Sim! Esse poliedro é parecido com o anterior então precisamos usar as peças de encaixe que dobramos, utilizando a fórmula que vimos

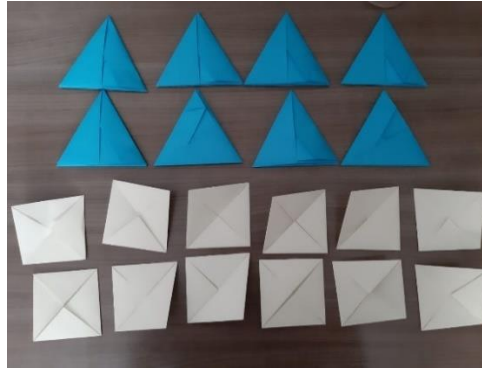
anteriormente vamos pegar quantas delas?

A: 12 delas.

P: Muito bem!

A:

*Figura 169: Construção de um octaedro: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

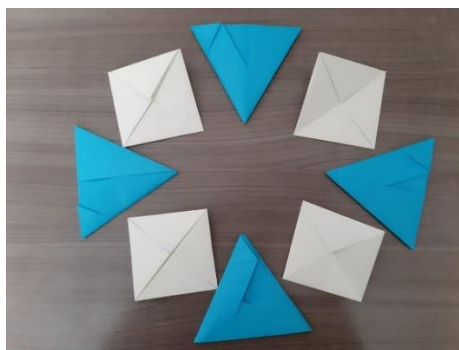
P: Vamos começar com 4 peças triangulares e 4 peças de encaixe. Coloque os 4 triângulos sobre a mesa em forma de cruz, e coloque uma peça de encaixe entre cada um dos triângulos.

A: Ao ficar dessa forma já iremos usar 2 bolsos de cada triângulo professor?

P: Sim isso mesmo, boa observação!

A:

*Figura 170: Construção de um octaedro: etapa 2*



**Fonte:** o próprio autor

P: Desta forma como ficou vamos encaixar as peças da maneira que voce disse, cada peça de encaixe juntará dois triângulos.

A: Eu entendi, mas professor não estou conseguindo colocar a peça totalmente, ela sai dos bolsos.

P: Sim isso irá acontecer pois essa parte já terá que ficar em 3

dimensões

A: Entendi!

*Figura 171: Construção de um octaedro: etapa 3*



**Fonte:** o próprio autor

P: Agora podemos fazer esta figura ficar em três dimensões, somente encaixando e levantando as peças.

A: Agora sim!

*Figura 172: Construção de um octaedro: etapa 4*



**Fonte:** o próprio autor

P: Muito bom, agora faremos outra figura igualzinha a esta que acabamos de fazer, utilizando as 4 peças triangulares e 4 de encaixe.

A: Esse é facil! Basta eu repetir o que acabei de fazer.

*Figura 173: Construção de um octaedro: etapa 5*



**Fonte:** o próprio autor

P: Agora queremos unir estas duas figuras. Podem ver que estão sobrando 4 peças de encaixe, das que eu pedi para pegarem anteriormente, vamos colocá-las em todos os bolsos de uma das partes que construímos antes.

A: Entendi!

*Figura 174: Construção de um octaedro: etapa 6*



**Fonte:** o próprio autor

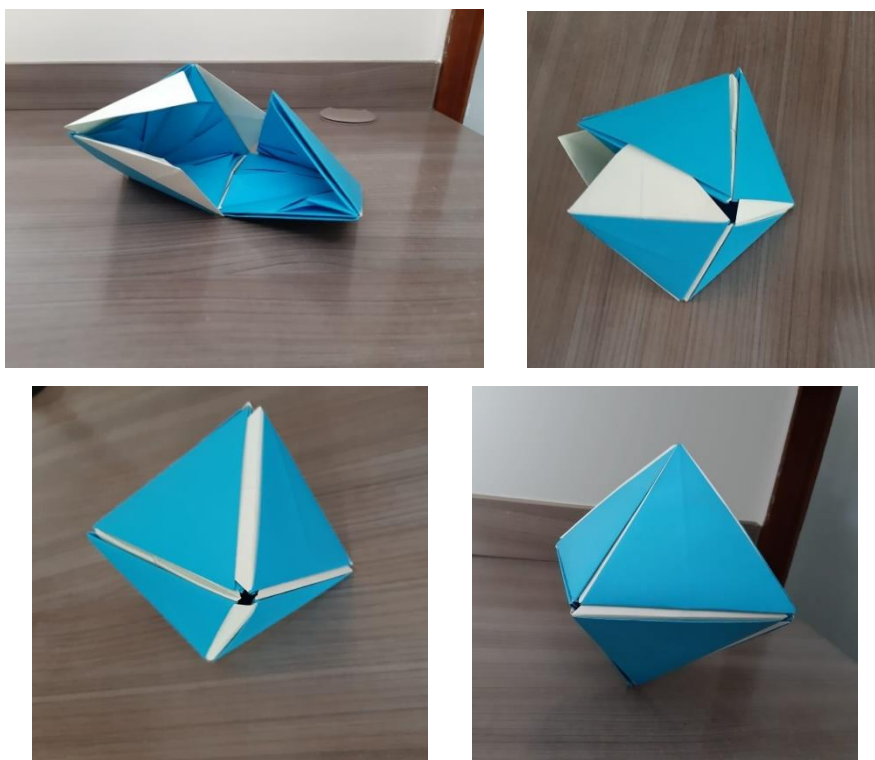
P: Agora o que vocês acham que poderíamos fazer para terminar?

A: Estou vendo que temos 4 abas em uma das partes e 4 bolsos na outra parte, só temos que encaixar cada um deles para fechar o poliedro?

P: Isso mesmo!

A:

*Figura 175: Construção de um octaedro: etapa final*



**Fonte:** o próprio autor



P: Está pronto nosso terceiro poliedro, o nome deste é octaedro, pois ele possui 8 faces.

Sugestões de encaminhamento.

I) Neste momento o professor poderá continuar com as perguntas para que os alunos possam ir apresentando suas conclusões relembando o que aprenderam durante as tarefas e descobrindo coisas novas sobre o poliedro formado.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Assim como na tarefa anterior vocês poderiam me dizer quantas são as faces, arestas e vértices do octaedro?

A: Sim, ele tem 8 faces como já vimos anteriormente. Aprendemos também que as peças de encaixe são as arestas, então ele terá 12 arestas?

P: Sim, isso mesmo. E quantos são os vértices?

A: Como são as extremidades posso observar que ele tem 6 vértices.

P: Exato! Agora podemos continuar completando a tabela feita anteriormente:

*Quadro 15: Elementos dos poliedros: anotação 3*

Nome do poliedro	Tipo de face	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices	Relação entre número de faces, arestas e vértices
Cubo	Quadrada	6	12	8	O número de arestas é o dobro de faces
Tetraedro	Triangular	4	6	4	O número de faces e vértices é o mesmo
Octaedro	Triangular	8	12	6	O número de vértices é a metade de arestas.

*Fonte: o próprio autor*

Neste momento faça questionamentos como por exemplo:

Tente somar faces com arestas ou arestas com vértices, ou faces com vértices e com esses números encontrados e tentar chegar em alguma relação que abranja todos os poliedros.

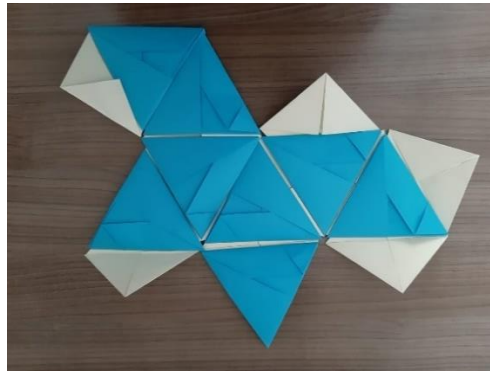
II) Podemos também pedir que o aluno desmonte o octaedro e veja sua planificação.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Vocês poderiam desmontar o poliedro e me mostrar a planificação dele?

A: Desmontando ele fica assim:

*Figura 176: Octaedro desmontado*



**Fonte:** o próprio autor

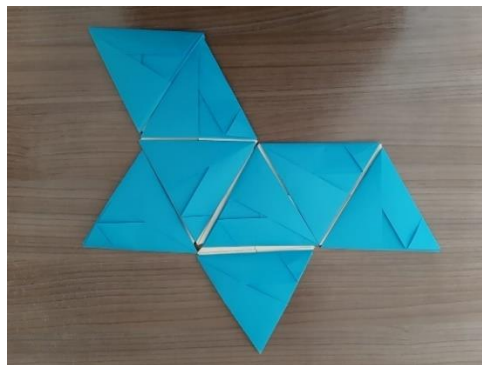
P: Isso, mas agora o que teremos que fazer para que tenhamos a planificação dele?

A: Temos que retirar as peças de encaixe que ficaram para fora.

P: Muito bem! Pode me mostrar?

A: Assim:

*Figura 177: Planificação do tetraedro*



**Fonte:** o próprio autor

## 8.8 CONSTRUINDO UM DODECAEDRO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de

Aprendizagem:

P: Construiremos agora um dodecaedro. Alguém saberia me dizer alguma característica dele?

A: Com esse nome professor, não lembro de nada.

P: Tudo bem, veremos como ele ficará após montado, mas posso dizer a vocês que ele tem faces pentagonais, por isso utilizaremos as peças de base pentagonal que construímos.

A: Mas professor essa peça é meio diferente, ela não parece um pentágono.

P: É porque essa peça se parece com o módulo de base quadrangular, a face do poliedro e as abas de encaixe já estão contidas na mesma peça, esse poliedro não precisará de peças de encaixe.

A: Entendi, vendo as dobras, dá para observar que o pentágono está bem no meio da peça! E quantas peças pegaremos?

P: Precisaremos de 12 delas.

A: Então esse poliedro terá 12 faces?

P: Isso mesmo! Pegue para mim.

A:

*Figura 178: Construção de um dodecaedro: etapa 1*



**Fonte:** o próprio autor

P: Vamos começar com três delas.

A: Ok!

Figura 179: Construção de um dodecaedro: etapa 2



Fonte: o próprio autor

P: Nesta construção, gostaria que observassem onde estão os bolsos da peça.

A: Se o meio da peça é a face, essas partes dobradas são as abas, mas não estou encontrando os bolsos, onde estão?

P: Observe o vértice do pentágono que está mais distante das abas, ao lado deste vértice temos 2 lados do pentágono, não é?

A: Sim temos! Agora estou vendo, nesses lados tem duas aberturas!

P: Isso, estes serão os bolsos. Observem agora que o outro lado do pentágono sem as abas.

A: Ele não tem bolso professor!

P: isso mesmo, então nossas peças tem quantos bolsos e quantas abas?

A: Cada peça tem 2 bolsos e 2 abas.

P: Muito bem! Pegue então uma peça e encaixe 2 outras em seus bolsos, de forma que o lado dos pentágonos sem o bolso e sem a aba fiquem encostados um no outro.

A: Entendi!

Figura 180: Construção de um dodecaedro: etapa 3



Fonte: o próprio autor

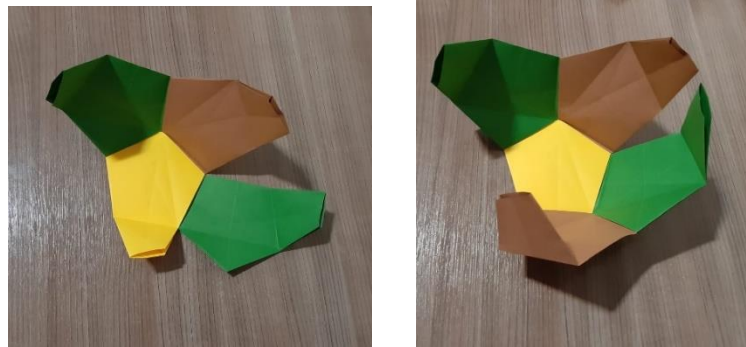
P: Peguem como referência o pentágono que ficou com as duas abas livres, veja que nesse caso é o pentágono amarelo. É nele que vocês irão encaixar mais 2 peças: uma em cada aba livre.

A: Mas a peça que vamos encaixar também terá que encaixar na outra que está ao seu lado?

P: Sim, para que já comece a pegar forma, teremos que ir sempre encaixando nas peças que estão ao lado, e já colocando em 3 dimensões

A: Entendi!

*Figura 181: Construção de um dodecaedro: etapa 4*



*Fonte: o próprio autor*

P: Podemos ver agora que a peça de referencia foi totalmente encaixada, mas temos bolsos sobrando nas peças ao lado, então colocaremos uma encaixando nesses 2 bolsos.

A: Mas em qual delas?

P: Nas últimas que acabamos de encaixar.

A: O lado da peça nova que não tem bolso, terá que ficar encostado na peça inicial que não tem bolso também?

P: Sim, isso mesmo! Nessa montagem, a parte do módulo onde não tem bolsos sempre ficaram encostados.

A: Acho que entendi!

*Figura 182: Construção de um dodecaedro: etapa 5*



*Fonte: o próprio autor*

P: Observem aquelas duas abas que estão próximas uma da outra iremos colocar uma peça de forma que os seus dois bolsos encaixem nessas 2 abas.

A: Ela ficará com a parte sem bolso para cima?

P: Sim!

A: Entendi!

*Figura 183: Construção de um dodecaedro: etapa 6*



**Fonte:** o próprio autor

P: Vamos pegar agora esta última peça encaixada como referência, nela estão sobrando as duas abas. O que acham que teremos que fazer agora?

A: Vamos encaixar em cada uma das abas dela uma peça de forma que encaixem também na peça abaixo dela?

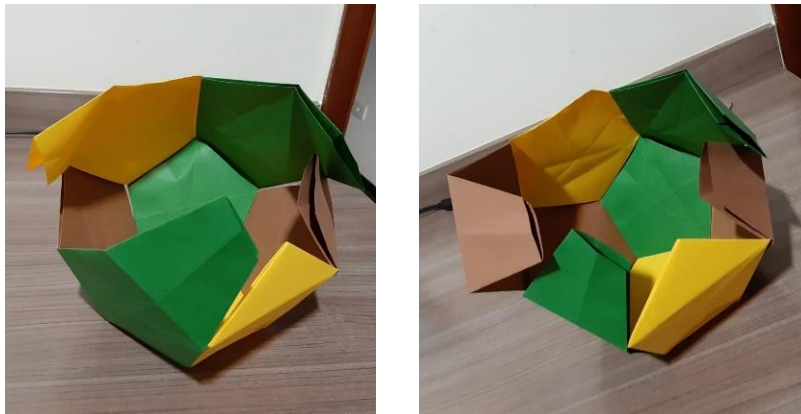
P: Sim muito bem, sempre encaixando nas peças próximas.

A: A parte sem bolso ficou exatamente encostada na outra peça sem bolso, está certo?

P: Sim, certinho!

A:

*Figura 184: Construção de um dodecaedro: etapa 7*



**Fonte:** o próprio autor

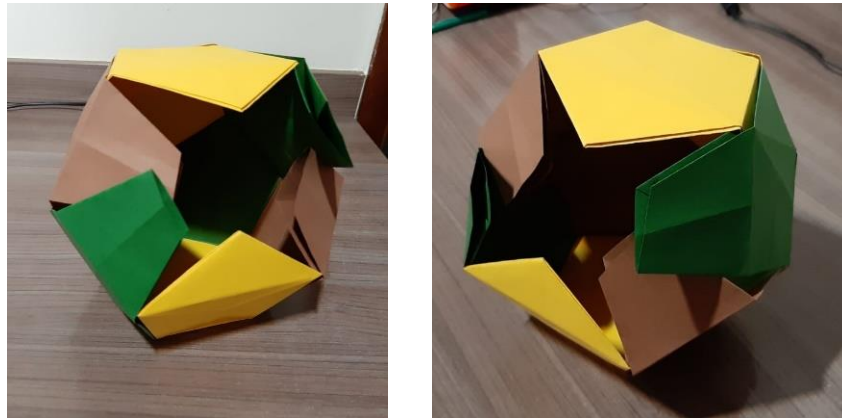
P: Podemos ver que nesta peça que acabamos de encaixar, nas outras duas sobrou um lugar que não tem bolso nem aba, iremos então colocar uma peça acima dela, onde a parte que não tem bolso encoste nela.

A: Entendi, ao lado desta peça temos 2 bolsos, colocaremos as abas dela ali ao mesmo tempo que o seu lado sem bolso encoste na peça de referência.

P: Muito bem!

A:

*Figura 185: Construção de um dodecaedro: etapa 8*

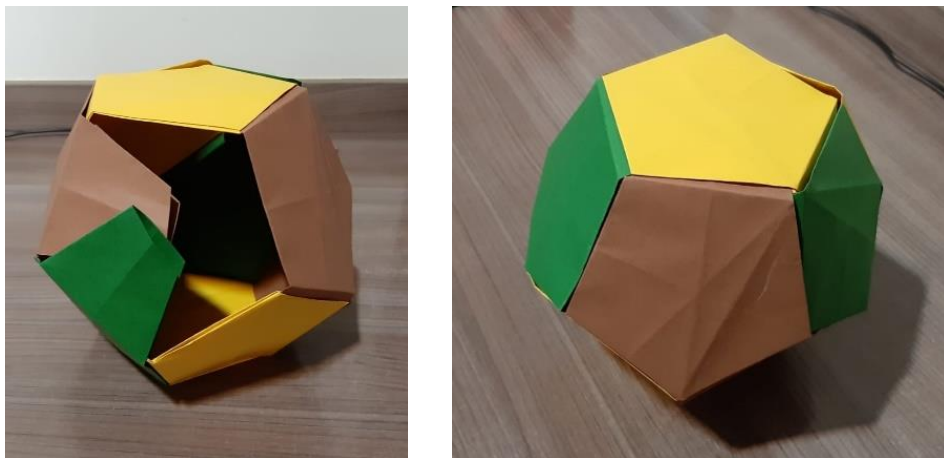


*Fonte: o próprio autor*

P: Temos o ultimo passo agora, temos 2 peças sem montar, e temos exatamente 4 bolsos e 4 abas, encaixaremos cada peça no seu devido lugar de forma que fiquem com os lados sem bolsos unidos.

A: Entendi! Este último passo ficou fácil de visualizar!

*Figura 186: Construção de um dodecaedro: etapa final*



*Fonte: o próprio autor*

P: Está pronto nosso quarto poliedro, o nome deste é dodecaedro. Sugestões de encaminhamento.

I) Neste momento o professor poderá continuar com as perguntas para que os alunos possam ir descobrindo coisas novas sobre o poliedro formado, com relação as faces, arestas e vértices que o poliedro possui.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Já que não sabíamos muita coisa sobre este poliedro vocês poderiam me dizer quantas são as faces, arestas e vértices do dodecaedro?

A: Posso professor, ele tem 12 faces já que usamos 12 peças.

P: Isso, e as arestas? Há uma forma mais fácil de ver neste poliedro?

A: Não vejo uma forma mais fácil, mas posso contar onde os pentágonos se encontram para descobrir a quantidade de arestas

P: Sim isso mesmo. E quantas ele tem?

A: 30 arestas!

P: Acertou! E quantos são os vértices?

A: Esse também preciso contar, mas está fácil de ver no poliedro montado, são 20 vértices.

P: Isso mesmo! Agora podemos continuar completando a tabela feita anteriormente:

Quadro 16: Elementos dos poliedros: anotação 4

Nome do poliedro	Tipo de face	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices	Relação entre número de faces arestas e vértices
Cubo	Quadrada	6	12	8	O número de arestas é o dobro de faces
Tetraedro	Triangular	4	6	4	O número de faces e vértices é o mesmo
Octaedro	Triangular	8	12	6	O número de vértices é a metade de arestas
Dodecaedro	Pentagonal	12	30	20	Ao somar faces e vértices dão 32 devemos retirar 2 para chegar ao número de arestas.

Fonte: o próprio autor



A partir do encaminhamento do último poliedro podem ter percebido que ao somar faces com vértices, devem retirar exatamente 2 para chegar ao número de arestas, peça que comprovem que esta propriedade também vale para o dodecaedro.

II) Podemos também pedir que o aluno desmonte o dodecaedro, de forma apropriada, e veja sua planificação.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Para que esta planificação fique certa o que devemos fazer?

A: Devemos esconder as abas igual no cubo?

P: Sim isso mesmo! Mostre para mim!

A:

*Figura 187: Planificação do dodecaedro*



*Fonte: o próprio autor*

## 8.9 CONSTRUINDO UM ICOSAEDRO

Para esta tarefa temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Construiremos um icosaedro, alguém saberia me dizer algo sobre ele?

A: Eu também não conheço esse professor. Mas se me disser quantas peças iremos usar, posso descobrir alguma coisa.

P: Serão 20 módulos triangulares.

A: Então ele terá 20 lados!

P: Isso! E o que mais precisamos quando utilizamos os módulos triangulares?

A: As peças de encaixe.

P: Isso! E como fazemos para encontrar a quantidade de peças de encaixe?

A: Utilizamos a fórmula.

P: Então quantas peças precisaremos?

A: Precisaremos de 30 delas! Nossa! Então esse poliedro terá 20 faces e 30 arestas são muitas peças!

P: Muito bem! Pegue para mim essa quantidade de peças.

A:

*Figura 188: Construção de um icosaedro: etapa 1*



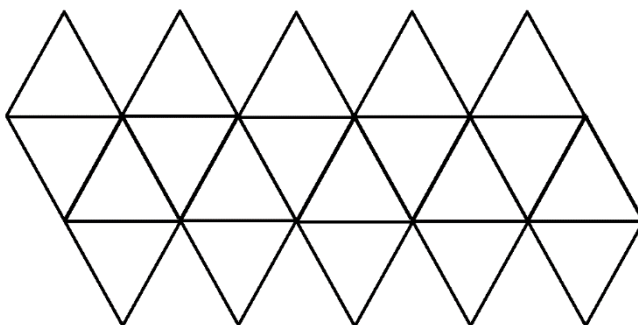
*Fonte: o próprio autor*

P: Para que esta construção fique mais fácil montaremos primeiramente a sua planificação e as peças de encaixe terão de ser coladas, para que o poliedro não desmonte.

O professor deve neste momento apresentar aos alunos o desenho da planificação do icosaedro para que eles construam.

P:

*Figura 189: Desenho da planificação de um icosaedro*



*Fonte: o próprio autor*

P: Observando meu desenho vocês conseguem fazer a planificação

do icosaedro? Busquem formá-lo, tentando fazer com que as cores iguais fiquem perto uma da outra, para ser mais fácil de montarmos depois.

A: Posso colocar todas as peças de encaixe?

P: Não, só coloque aquelas que estão dentro do desenho, as que ficam por fora colocaremos só quando formos montar.

A: Ok!

*Figura 190: Planificação do icosaedro*



*Fonte: o próprio autor*

P: Muito bem, agora teremos que colocar uma peça de encaixe em cada um dos triângulos da parte de cima ao lado direito e em cada um dos triângulos da parte de baixo ao lado esquerdo.

A: Assim professor?

*Figura 191: Construção de um icosaedro: etapa 2*



*Fonte: o próprio autor*

P: Isso mesmo, agora começaremos a encaixar as peças.

A: Como faço isso professor?

P: Vamos começar da esquerda para a direita, e encaixar os 3 primeiros triângulos.

A: Já teremos que colocar as peças em pé?

P: Sim já deveremos colocá-las em três dimensões, então ao encaixar já começamos a levantá-las.

A:

*Figura 192: Construção de um icosaedro: etapa 3*

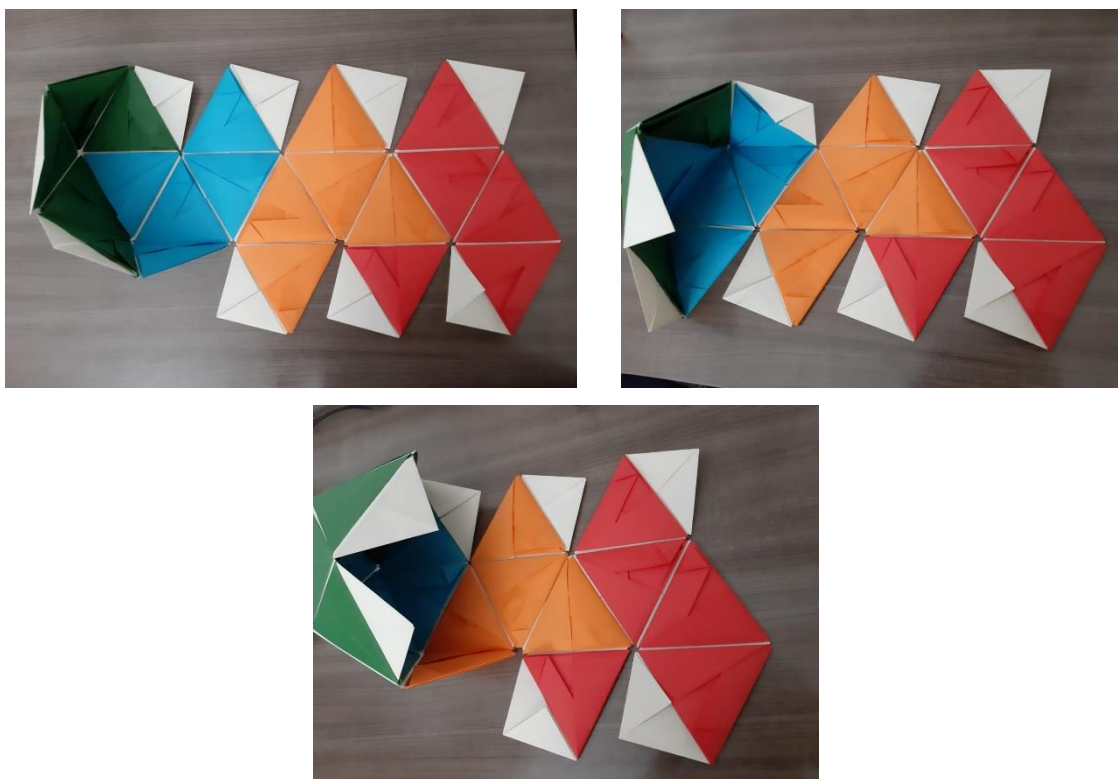


*Fonte: o próprio autor*

P: Agora encaixaremos mais um triângulo de cada vez, ainda indo da esquerda para direita.

A: Entendi!

*Figura 193: Construção de um icosaedro: etapa 4*



*Fonte: o próprio autor*

A: Não estou conseguindo encaixar mais professor.

P: Vamos começar então agora da direita para a esquerda fazendo o

mesmo processo.

A: Sempre colocando a peça de encaixe nos bolsos do lado?

P: Sim igual as tarefas anteriores

A:

*Figura 194: Construção de um icosaedro: etapa 5*



**Fonte:** o próprio autor

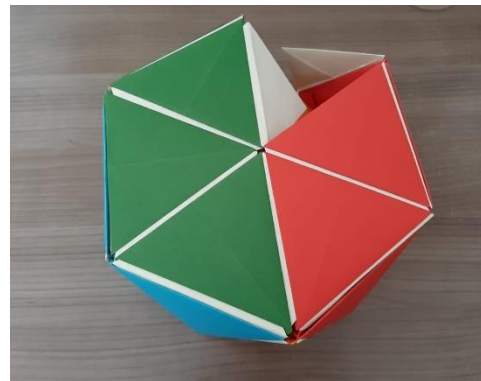
P: Isso. Agora temos que levantar essas duas partes e encaixá-las é a parte mais difícil. Vamos indo com calma.

A: Está um pouco difícil mesmo, me ajude a segurar as partes grandes?

P: Claro!

A:

*Figura 195: Construção de um icosaedro: etapa 6*

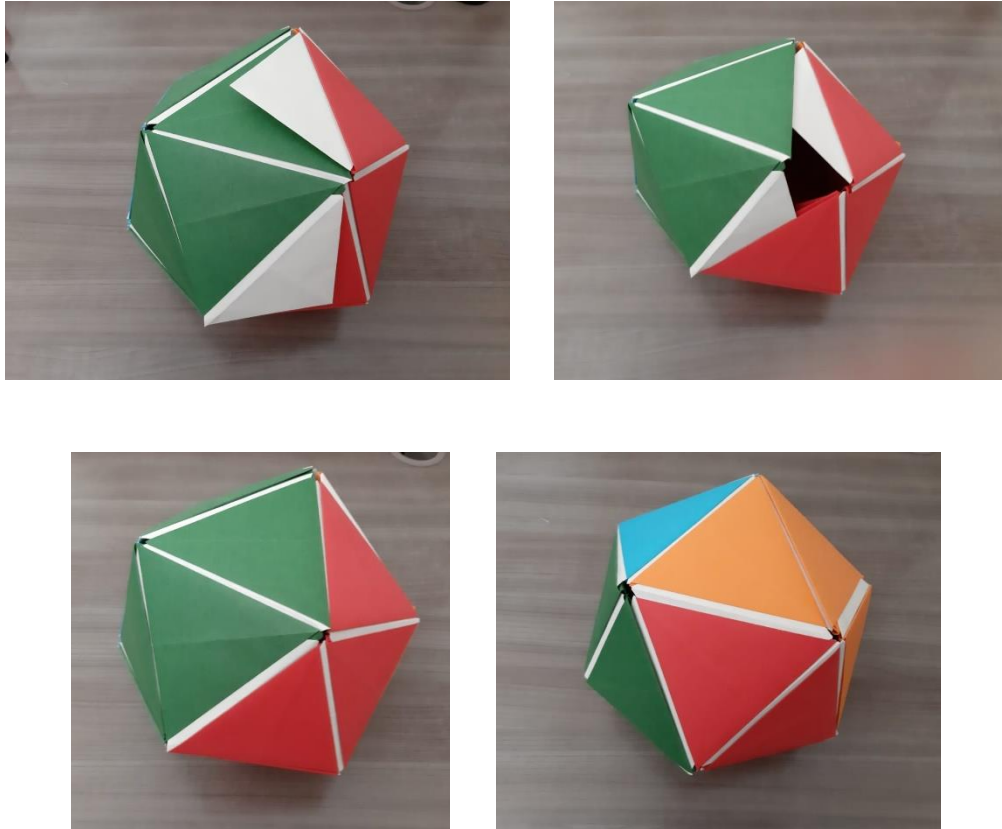


**Fonte:** o próprio autor

P: Sobraram agora 2 abas para fora, mas temos dois bolsos sobrando também.

A: Agora ficou mais fácil!

Figura 196: Construção de um icosaedro: etapa final



**Fonte:** o próprio autor

P: Está pronto nosso quinto poliedro, o nome deste é icosaedro.

Sugestões de encaminhamento.

I) Neste momento o professor poderá continuar com as perguntas para que os alunos possam ir apresentando suas conclusões relembando o que aprenderam durante as tarefas anteriores e descobrindo coisas novas sobre o poliedro formado.

Para este encaminhamento temos a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Para esta última tarefa vocês poderiam me dizer quantas são as faces, arestas e vértices do icosaedro?

A: Esse é mais difícil professor, mas sabemos que ele tem 20 faces por causa da quantidade de módulos triangulares usados, e aprendemos também que as peças de encaixe são as arestas, então ele tem 30 arestas.

P: Sim isso mesmo. E quantos são os vértices?

A: Eu preciso contar com calma para saber quantos são.

A: São 12 professor!

P: Vamos continuar completando a tabela feita anteriormente:

Quadro 17: Elementos dos poliedros: anotação final

Nome do poliedro	Tipo de face	Número de faces	Número de arestas	Número de vértices	Relação entre número de faces, arestas e vértices
Cubo	Quadrada	6	12	8	O número de arestas é o dobro de faces
Tetraedro	Triangular	4	6	4	O número de faces e vértices é o mesmo
Octaedro	Triangular	8	12	6	O número de vértices é a metade de arestas
Dodecaedro	Pentagonal	12	30	20	Ao somar faces e vértices dão 32 devemos retirar 2 para chegar ao número de arestas.
Icosaedro	Triangular	20	30	12	Acontece o mesmo que no dodecaedro.

*Fonte: o próprio autor*

P: Vocês conseguiram chegar qual é a relação existente entre as faces, arestas e vértices do icosaedro?

A: Que podemos somar as faces e os vértices, que nesse caso dará 32, então retiramos 2 e encontramos o número de arestas.

P: Muito bom, mas e as relações que vocês tinham encontrado sobre os outros poliedros, será que agora conseguem encontrar outras?

A: Vou pensar! Será que posso tentar fazer o mesmo que fiz com o dodecaedro e icosaedro?

P: Pode sim, tente fazer e me diga o que concluiu.

A: No cubo se eu somar as faces e vértices encontro 14, que são 2 a mais que as arestas, então a relação que encontrei também vale para o cubo!

P: Sim, muito bem! Continue fazendo para o tetraedro e octaedro.

A: Para eles também deu certo professor!

P: Que ótimo! Agora vamos definir o que são esses poliedros que estudamos e o que é essa relação que vocês descobriram.

Neste momento, como é o último poliedro de Platão pode-se definir o que é um poliedro de Platão e apresentar aos alunos a relação de Euler, falar que é esta a relação que eles encontraram.

Podemos ter a seguinte Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

P: Todos estes poliedros que fizemos são chamados de poliedros de Platão.

A: Professor o que é um poliedro de Platão?

P: “São os poliedros que tem todas as faces com o mesmo número de lados e todos os vértices com o mesmo número de arestas” (DANTE, 2010)

P: Além disso, a Relação de Euler deve valer:  $V - A + F = 2$ , em que  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, que é a relação que vocês encontraram anteriormente analisando os dados da tabela.

Ao final desta tarefa esperamos que o aluno esteja preparado para reconhecer os poliedros regulares podendo diferenciar faces, arestas e vértices, determinar a quantidade destes elementos e aplicar a relação de Euler, espera-se que, seja determinada pelos próprios alunos. Em geral, os poliedros planificados, vistos em uma folha de papel em apenas duas dimensões, tráz para o aluno uma grande dificuldade de visualização, ao montá-lo em três dimensões dará a oportunidade ao aluno de manipular os poliedros e observar os vários ângulos de visão possíveis, fazendo com que aprenda mais facilmente sobre este assunto.



## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta desse trabalho foi o de apresentar tarefas que utilizassem o Origami como auxílio para entender alguns conceitos de Geometria, acredita-se que ao deixar o aluno manipular o papel e construir com as orientações do professor, ele terá que relacionar e concluir propriedades matemáticas que normalmente o professor somente apresenta em sala de aula.

Neste trabalho construímos diversas representações como um segmento de reta, ponto médio do segmento, mediatriz, bissetriz, retas paralelas e perpendiculares, alguns polígonos e os poliedros de Platão. Além disso foi possível, medir os ângulos dos polígonos, observar, durante as construções, inúmeras propriedades deles e a essência das definições.

Hoje em dia os professores podem observar grandes dificuldades que vários alunos possuem em Matemática o que causam grandes problemas para quem quer ensiná-la, ainda mais quando chegamos no assunto Geometria. Portanto, ao abordar de maneira lúdica e ativa, os conceitos fundamentais da Geometria, os Polígonos e os Poliedros, acredita-se que o aluno será capaz de entender mais facilmente os conceitos e estar mais disposto a participar da aula, pois terá motivação e interesse para descobrir qual será o resultado final daquele Origami e o que aprenderá com aquilo.

Quando o professor tem em mente os objetivos pretendidos com a tarefa e utiliza a linguagem matemática adequada, durante a confecção dos origamis é provável que a compreensão dos alunos sobre aquele conteúdo seja favorecida, além de fazê-los mudar de comportamento durante a aplicação das tarefas na sala de aula, pois acredita-se que eles ficarão intrigados e se apresentarão mais dispostos para aprender.

Com a finalidade de priorizar a formação do professor escolhemos trabalhar com a Trajetória Hipotética de Aprendizagem e concluímos que o professor, a partir das reflexões realizadas previamente, estará mais preparado para enfrentar as dúvidas e questionamentos dos alunos, ao aplicar sua tarefa com eles e ao imaginar os diálogos entre o professor e o aluno, é possível analisar os caminhos que o educador pode tomar para que o estudante, de forma autônoma, relacione e conclua os objetos de estudos matemáticos daquela tarefa.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para a prática dos

professores ao ensinar Matemática, mais especificamente a geometria, mostrando mais um recurso que pode ser usado para atrair a atenção dos alunos.

Este trabalho abre possibilidades para investigações futuras. É possível fazer um estudo prático em sala de aula, para que possam ser retiradas conclusões após a experiência, pois este trabalho é somente teórico, baseado em vivências passadas da autora tanto como estudante, assim como professora regente de Matemática.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 4ª ed. Coleção SBM. Fortaleza, 2003.
- CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando geometria com Origami**. 2009. Disponível no Departamento de Matemática da UFSCAR: <<http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>>. Acesso em: 28/11/18.
- DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática S.A., 2008.
- DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática S.A., 2010.
- DIAS, M. C. O. **O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria**. Dissertação (mestrado profissional em rede nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.
- IEZZI, G., *et al.* **Matemática: volume único**. São Paulo: Atual, 2002.
- LIMA, E. L., *et al.* A Matemática do Ensino Médio. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2004.
- LUCAS, E. dos S. C. **Uma abordagem didática para a construção dos Poliedros regulares e prismas utilizando Origami**. Dissertação (mestrado profissional em rede nacional). Universidade Federal de Lavras – MG, 2013.
- PIN, O. J. URIBE, E. B. O. Os axiomas de Huzita-Hatori e o ensino da Geometria Euclidiana Plana através da construção de Polígonos. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, MS. **Colloquium Exactarum**, vol. 8, n. Especial, Jul-Dez, 2016, p. 39-44.
- ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- RAFAEL, I. Origami. **Educação e Matemática**, Lisboa: Publicação da APM, 2011, n. 114, p.16-22. Disponível em: <[http://www.apm.pt/files/\\_EM114\\_pp16-22\\_4e6489d4d25fc.pdf](http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf)> Acesso em: 02/12/18.