Universidade Estadual de Londrina

VITOR MANOEL CANDIDO FARIA

OS PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA REVELADOS EM TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

LONDRINA
2019

VITOR MANOEL CANDIDO FARIA

OS PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA REVELADOS EM TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires.

LONDRINA
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

M672 Faria, Vitor Manuel Candido .
Os Princípios da Educação Matemática Realística Revelados em Trajetórias de Ensino e Aprendizagem / Vitor Manuel Candido Faria. - Londrina, 2019.
63 f. : il.

Orientador: Magna Natalia Marin Pires.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística - Tese. 2. Ensino de Matemática - Tese. 3. Trajetória de Ensino e Aprendizagem - Tese. I. Pires, Magna Natalia Marin . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

VITOR MANOEL CANDIDO FARIA

OS PRINCÍPIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA REVELADOS EM TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Gabriel dos Santos e Silva
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 02 de abril de 2019.

“Ganhe o respeito dos demais tendo a ousadia de ser você mesmo.”

Dr. House

AGRADECIMENTOS

A minha família, principalmente ao meu pai Manoel e minha mãe Tereza, pela ajuda nos momentos difíceis que ameaçaram a conclusão desse trabalho.

A minha esposa Priscila Santos Faria, que compreendeu que os momentos difíceis vividos durante o curso foram inevitáveis e necessários. Tudo que fiz foi em busca de sua felicidade.

Ao Josemar Marques que me ajudou com a formatação; e a todos os outros amigos que permaneceram próximos e sempre dispostos a ajudar.

A minha orientadora Profª. Drª. Magna Marin Pires pela sua disponibilidade, confiabilidade, generosidade, paciência, pelo seu conhecimento, profissionalismo e principalmente pela sua amizade.

A todos os professores e colegas do PROFMAT que caminharam ao meu lado durante o curso.

FARIA, Vitor Manoel Candido. **Os Princípios da Educação Matemática Realística Revelados em Trajetórias de Ensino e Aprendizagem**. 63 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Esta dissertação apresenta duas Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (TEA) na perspectiva da Educação Matemática Realística (RME). O texto explora teoricamente a RME e os princípios que a embasam. O desenvolvimento da pesquisa tem a intenção de responder a questão: Como os princípios da RME podem orientar um professor no desenvolvimento de tarefas matemáticas? Sem focar em um conteúdo específico, duas questões matemáticas são exploradas na forma de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. A elaboração de TEA é apresentada como ideias que podem ser utilizadas por professores para desenvolver suas aulas e também como instrumento de reflexão na formação inicial e continuada. Na análise buscamos explicitar os princípios da RME presentes nas trajetórias, concomitante com apontamentos didáticos que acreditamos ser importantes aos educadores matemáticos. Os estudos e a proposta apresentados neste trabalho têm a intenção de aproximar naturalmente os alunos da matemática, enriquecer as possibilidades de conduzir o ensino da matemática e, principalmente, servirem como material de estudo na formação profissional de outros educadores matemáticos.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Princípios da Educação Matemática Realística.

FARIA, Vitor Manoel Candido. **The Principles of Realistic Mathematics Education Revealed in Teaching and Learning Trajectories**. 63 p. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

This article presents two Teaching and Learning Trajectories throught the perspective of Realistic Mathematics Education (RME). The text explores theoretically the RME and its principles. The development of research has the purpose of answering the question: How the RME principles can guide a teacher on the development of mathematics tasks? Without focusing in a specific content, two mathematical questions are explored on the form of Teaching and Learning Trajectories. The elaboration of Teaching and Learning Trajectories are presented as ideas that could be used by teachers to develop their classes and also as instrument of reflection, initial and continued formation. On this analysis we sought to make explicit the RME principles that a found on the trajectories, associated with didactical appointments that we believe are important to the mathematics educators. The studies and the proposal presented on this article have the intention of naturally approach the mathematics students, enrich the possibilities of conduction on the mathematics teaching and, mainly, serve as study material for the professional formation to others mathematics educators.

Keywords: Realistic Mathematics Education. Teaching and Learning Trajectory. Principles of Realistic Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho compõe uma das etapas exigidas pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do título de mestre. O PROFMAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e tem como foco professores de matemática das escolas públicas estaduais e visa aprimorar suas práticas docentes[1].

No ano de 2006, conclui o curso de Licenciatura em Matemática e comecei a trabalhar como professor da Rede Pública Paranaense, ministrando aulas de matemática para alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Nesses anos todos, principalmente nos primeiros, vivenciei momentos de frustração, pois as execuções de alguns planos de aula não atingiam meus objetivos. Logo na primeira reunião minha orientadora comentou sobre a Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) enquanto falava da Educação Matemática Realística[2], tais abordagens me despertaram interesse, passei então a ler textos recomendados por ela com intuito de conhecer mais a respeito do assunto. Durante essas leituras, ainda conhecendo e tentando entender o básico, surgiram questionamentos tais como: Os planos de aula, que me pareciam bons, eram bons também para os alunos ou apenas para mim? Como saber se fiz boas escolhas sem considerar os possíveis obstáculos enfrentados pelos alunos? Mesmo com a preocupação de propor atividades que pudessem atrair o aluno, que evitassem situações confusas e que possibilitavam a continuidade do trabalho, os planos só seriam eficientes se tudo desse certo, se todas as situações permanecessem dentro do previsto e desejado, sem imprevistos, pois não havia prevenção contra situações não imaginadas anteriormente.

Nesse contexto vi que a construção de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem pode ser um caminho para preparar professores para seu papel em sala de aula: guiar os alunos no processo de aprender.

Após o estudo da abordagem Educação Matemática Realística e, considerando que seus princípios são elementos que podem guiar o professor na

---

[1] Mais informações em: http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/
[2] Abordagem de ensino proposta por Hans Freudenthal e seus precursores.

condução do processo da aprendizagem matemática, esta pesquisa tem como objetivo central responder a seguinte questão: Como os princípios da RME podem orientar um professor no desenvolvimento de tarefas matemáticas?

Os estudos e a proposta apresentados neste trabalho têm a intenção de aproximar naturalmente os alunos da matemática, enriquecer as possibilidades de conduzir o ensino da matemática e, principalmente, servirem como material de estudo na formação profissional de outros educadores matemáticos.

Afim de enriquecer o leque de possibilidades no ensino da matemática e buscar respostas esclarecedoras para os questionamentos descritos no início dessa introdução, pretende-se:

- Elaborar duas Trajetórias de Ensino e Aprendizagem, pensadas estrategicamente para evidenciarem as potencialidades da concomitância entre a RME e as TEA destinadas ao ensino da Matemática;
- Utilizar a Resolução de Problemas para explorar diferentes áreas, não só da matemática mas também de outras disciplinas, nas diversas possibilidades de resolução;
- Utilizar elementos fundamentados na Educação Matemática Realística para construção de caminhos que mostrem o entrelaçamento dos conteúdos matemáticos e que favoreçam a compreensão dos conteúdos;
- Analisar elementos das trajetórias a luz dos princípios da RME.

As etapas que estruturaram e organizaram esse trabalho estão divididas nas etapas que seguem.

A introdução apresenta as informações iniciais, como a apresentação do tema e os objetivos.

O segundo capítulo refere-se ao procedimento da pesquisa, apresenta uma justificativa quanto ao caráter qualitativo escolhido para realizar o estudo; detalha os objetos envolvidos, como os problemas foram escolhidos, elementos envolvidos da elaboração das Trajetória de Ensino e Aprendizagem e os procedimentos adotados, por exemplo, as entrevistas realizadas com voluntários e as observações pontuais feitas em diversos momentos no decorrer das trajetórias.

O terceiro capítulo toma como base estudos de autores e/ou pesquisadores da Educação Matemática, para fundamentar os argumentos e os procedimentos defendidos nesse trabalho. A RME é o cerne das ideias presentes nas argumentações e nas propostas apresentadas, justificando a predominância de autores envolvidos com a RME, a breve apresentação histórica da RME e de seu precursor, o matemático Hans Freudenthal. Há também nesse capítulo, uma base teórica a respeito das TEA e suas ligações com elementos da RME, tais como a *reinvenção guiada* e a *matematização;* assim como a presença dos *princípios* da Educação Matemática Realística.

Os capítulos quatro e cinco apresentam, respectivamente, as tarefas 1 e 2, cada uma contendo um problema a ser resolvido. Tais problemas foram pontos de partida para as construções das respectivas Trajetórias de Ensino e Aprendizagem. Ambos os capítulos apresentam entrevistas distintas, realizadas com quatro voluntários[3], a respeito de algumas informações ou características dos respectivos problemas. Essas entrevistas foram analisadas com a intenção de encontrar dados relevantes para a elaboração das TEA. Ao final de cada trajetória, foram feitas algumas observações.

O sexto capítulo dedica-se a análise das trajetórias buscando identificar e comentar os princípios da RME presentes em cada uma.

O texto da pesquisa se encerra com as considerações finais.

[3] Foram entrevistados quatro voluntários para a tarefa 1 e outros quatro para a tarefa 2.

2 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Este trabalho tem um caráter qualitativo, diferenciando-se das investigações quantitativas interessadas essencialmente nos dados coletados, de acordo com Bogdan e Biklem

> o objectivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiência humana. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados. Recorrem à observação empírica por considerarem que é em função de instâncias concretas do comportamento humano que se pode reflectir com maior clareza e profundidade sobre a condição (BOGDAN; BIKLEM, 1991, p.70).

Com esse olhar, Bogdan e Biklem (1991) caracterizam uma investigação qualitativa enquadrando-a, total ou parcialmente, nas condições apresentadas no quadro abaixo.

Quadro 1 – Características de uma Investigação Qualitativa

Características de uma investigação qualitativa	Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; A investigação qualitativa é descritiva; Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Fonte: BOGDAN; BIKLEM (1991, p. 47-50)

Com a intenção de conduzir esta pesquisa dentro das características descritas anteriormente, esse trabalho foi desenvolvido de acordo com as etapas que seguem.

1. Um estudo teórico a respeito da Educação Matemática Realística, de Trajetórias de Ensino e Aprendizagem e do ensino de Matemática com base nos trabalhos do GEPEMA[4] e outros autores da RME.
2. Elaboração de duas questões que guiaram a construção das trajetórias.
3. Entrevistas com sujeitos que se disponibilizaram a resolver as questões

[4] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação: faz parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

e comentar com o autor os encaminhamentos de resolução, o que subsidiou alguns procedimentos na construção das trajetórias.

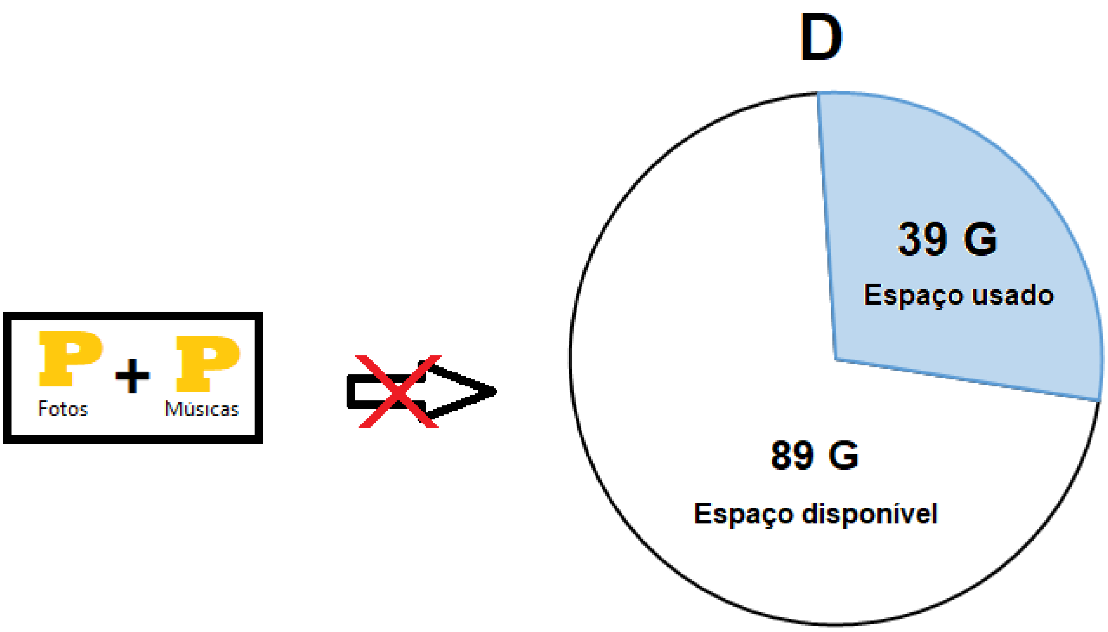
4. A construção de uma TEA com os elementos obtidos.
5. Uma exploração do trajeto, a fim de destacar os principais pontos com potencial para a formação de professores baseados nos seis princípios da RME.

O estudo inicial a respeito da Educação Matemática Realística e seus precursores contou com o suporte de diversos textos, traduzidos por participantes do GEPEMA, que continham informações sobre: Hans Freudenthal e sua contribuição para o nascimento da RME, a consolidação dessa nova abordagem, os seus princípios, entre outras. Esses textos ajudaram a iniciar o meu próprio olhar para a RME, tornando assim, a leitura de textos mais completos, publicados por autores considerados referência no assunto, mais eficiente. À medida que avançava na leitura de trabalhos, alguns encontrados na própria página do GEPEMA, outros indicados pela minha orientadora ou localizados por mim, durante longas buscas na internet, percebia a importância dos fundamentos da RME, para a sustentação teórica das trajetórias de ensino e aprendizagem. A prática de trajetórias de ensino e aprendizagem nos cursos de matemática das escolas públicas brasileiras, talvez seja um dos caminhos para a formação continuada de professores. Uma abordagem originada em outro país, em contexto e vivendo problemas diferentes do nosso, pode ter que sofrer ajustes. Pesquisas e estudos em nosso país estão sendo feitos para discutir tais condições e aproveitar as ideias que fundamentam o conceito de Matemática e do ensino. A ideia das TEA possuem características alinhadas às propostas contidas em documentos curriculares brasileiros.

Em uma das várias reuniões de orientação, enquanto conversávamos sobre os problemas que comporiam as tarefas, surgiu a seguinte questão: restringir as tarefas a um conteúdo matemático predominante e pré-escolhido é fundamental para manter a qualidade do trabalho? Enquanto procurava uma resposta fui lembrado pela minha orientadora de que o objetivo do trabalho poderia ser explorar as TEA no universo da RME como um todo, não apenas em um determinado conteúdo matemático. Não ter encontrado uma resposta satisfatória para a pergunta mencionada me fez pensar em outra: o que me fez acreditar que uma abordagem composta por trajetórias de ensino e aprendizagem embasada na RME será mais bem sucedida do que uma de caráter tradicional? Não sei dizer precisamente como e nem quando os argumentos a favor da RME ganharam minha confiança, porém, ao refletir sobre a segunda pergunta, encontrei uma resposta para a primeira que foi decisiva na construção das tarefas. Nenhum conteúdo presente nos currículos dos cursos de matemática da Educação Básica, é visto pela RME como descartável, espera-se que ao final de cada curso, os tópicos curriculares tenham sido trabalhados. Por outro lado, em uma TEA, pensada e elaborada para ser uma das partes do processo global de trabalho, os conteúdos matemáticos individualizados são coadjuvantes, pois a fluidez da reinvenção matemática seria dificultada pelas divisões que nós mesmos criamos.

Acreditando que não há a "obrigatoriedade" de estabelecer um conteúdo matemático específico ao desenvolver uma TEA e, apoiado por minha orientadora, escolhemos os dois problemas apresentados a seguir, para iniciarem as construções das respectivas trajetórias contidas nesse trabalho.

Figura 1 – Transferência 1



A transferência para o dispositivo D falhou, pois, não há espaço disponível suficiente, ou seja,

juntas as duas pastas ultrapassam 89 G de tamanho. Para resolver o problema, optou-se por excluir alguns itens da pasta Músicas, diminuindo assim o seu tamanho, e manter o restante inalterado. Com a pasta Músicas 23 G menor que a pasta Fotos, a transferência tornou-se possível, ocupando todo o espaço disponível de D. Qual o tamanho de cada pasta (Fotos e Músicas) armazenada em D?

Fonte: o próprio autor.

Potencialidades:

Esse problema permite navegar por diferentes procedimentos de resolução. Além de esquivar-se dos enunciados monótonos e distantes dos interesses dos alunos atuais, permite resoluções que exploram aspectos numéricos, algébricos ou geométricos.

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele estão apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribui-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos do cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribui-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Potencialidades:

Pode ser trabalhado desde o Ensino Fundamental até cursos superiores, tem também como ponto forte, a rica possibilidade de discutir a respeito da importância de se fazer uma cuidadosa interpretação do enunciado.

Esse trabalho vê as trajetórias de ensino e aprendizagem, nos moldes da RME, como uma boa alternativa de preparação do professor para guiar o aluno na aprendizagem da matemática. As trajetórias apresentadas mais adiante têm como principal objetivo, contribuir com a formação de professores de matemática do Ensino Básico, servindo como objeto de estudo e compreensão de tal abordagem. Com o objetivo de explicitar pontos críticos, tanto na receptividade, por parte dos alunos, das atividades propostas, como na própria TEA, foram feitas entrevistas com voluntários, com foco no entendimento geral que cada um demonstrou após interpretar o problema.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, ressalta que o ensino da matemática possui grande importância pedagógica, não somente pela sua atual aplicação científica, mas também como formadora de cidadãos. O documento menciona uma situação interessante, e que deve ser bem explorada durante o processo de ensino e aprendizagem: a possibilidade de o aluno fazer descobertas providas de experimentações e de construções matemáticas próprias, principalmente durante a resolução de problemas com contextos apropriados e diversificados. Outro destacamento feito pela BNCC é a importância de

> reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2017, p. 265).

Conhecendo a RME e seus propósitos, entendo que pode-se alcançar os objetivos da BNCC se envolve-los com os fundamentos da Educação Matemática Realística, pois ambas concordam que a Matemática é uma atividade humana e dinâmica. A seguir encontram-se algumas características da RME.

A Educação Matemática Realística é uma “abordagem de ensino” inovadora; livre dos métodos protocolares comuns a década de 1960, contribuiu com a disseminação das ideias de Freudenthal, direcionadas ao ensino da matemática. Antes de explorar os fundamentos da RME, talvez seja mais conveniente e esclarecedor, falar um pouco a respeito de seu idealizador, o educador e matemático Hans Freudenthal.

De acordo com Ferreira (2013), Prestes (2015), Ferreira e Buriasco (2016), Instituto Freudenthal (2018), Freudenthal viveu de 1905 à 1990, natural de Luckenwalde na Alemanha, estudou na Universidade de Berlin. Obteve o título de Doutor em Matemática no início da década de 1930, época em que aceitou o convite para trabalhar na Universidade de Amsterdã, Holanda. Judeu, sofreu perseguição, sendo obrigado a deixar a Universidade durante a segunda guerra mundial, retornando em 1946, dessa vez como professor de matemática pela Universidade de Utrecht, também na Holanda. Sua ida para a Universidade de Amsterdã o aproximou do matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), com o qual trabalhou como assistente e obteve inspiração devido seu trabalho sobre intuicionismo matemático. Tal inspiração contribuiu para a estruturação do processo de ensino da matemática defendido por Freudenthal, e ascendeu com o espaço e o reconhecimento conquistados pelo educador.

De acordo com Ferreira e Buriasco (2016), as contribuições a favor das inovações educacionais ocorridas na Holanda possuem ligações com alguns acontecimentos, dentre eles estão:

- a participação de Freudenthal, passando pela presidência entre 1967 e 1970, da Comissão Internacional de Instrução Matemática;
- a iniciativa de Freudenthal ao organizar o primeiro Congresso Internacional de Matemática realizado em Lyon, na França;
- o surgimento da revista Educational Studies in Mathematics, fundada por Hans Freudenthal;
- o projeto Wiskobas, que significa “matemática nas escolas primárias”, ocorrido na Holanda entre as décadas de 1960 e 1980;
- a criação, em 1971, do Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática (IOWO), cujo nome atual é Instituto Freudenthal.

Afinal, quais são as inovações decorrentes do atrelamento entre as peculiaridades de Freudenthal e todos esses acontecimentos? O que de fato compõe a Educação Matemática Realística?

A Educação Matemática Realística surge com o enfraquecimento da abordagem mecanicista, predominante na Holanda naquela época, juntamente com a rejeição das abordagens empirista e estruturalista, desenvolvidas na Inglaterra e nos EUA respectivamente. Ferreira e Buriasco (2016) apresentaram em seu artigo o seguinte quadro com as características, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), das abordagens tradicionais citadas nesse parágrafo.

Quadro 2 – Abordagens tradicionais segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2010)

Abordagem	Características
Mecanicista	“Característica desta abordagem é seu foco em cálculos com números simples, e a pouca atenção prestada às aplicações; o que é certamente verdade para o início do processo de aprendizagem. Matemática é ensinada de uma forma atomizada. Estudantes aprendem os procedimentos de uma maneira passo a passo na qual o professor demonstra como resolver um problema” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).
Empirista	Típico deste tipo de educação era que os alunos eram deixados livres para descobrir muito por si próprios e eram estimulados a realizar investigações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).
Estruturalista	Este é um método de ensinar matemática que foca em conceitos abstratos, como a teoria dos conjuntos, funções e outras bases diferentes de dez (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4, tradução nossa).

Fonte: FERREIRA; BURIASCO (2016, p. 241)

A RME não vê a matemática como uma coleção de regras das quais o sucesso da aprendizagem decorre de uma apresentação seguida de treinamento, que a tempos vêm sendo estabelecidas. A palavra *realistic* (realístico), de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2009, p.4) não é usada apenas por causa de sua conexão com o mundo real, mas também pela ênfase que a RME coloca em oferecer aos alunos situações que eles possam imaginar. Estruturada essencialmente pelas ideias de Freudenthal, a RME estabelece uma perspectiva mais ampla, atribuindo à matemática e ao seu processo de ensino e de aprendizagem, um papel social, Goffree (1993), ressalta que:

> De acordo com Freudenthal, a matemática deve estar conectada à realidade, aproximar-se das crianças e ser relevante para a sociedade, a fim de ter valor humano. Este ponto de vista envolve a matemática não como assunto, mas sim como uma atividade humana. Ele argumentou que os seres humanos têm que aprender matemática não como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, em um processo de matematização da realidade e matematização da matemática (GOFFREE, 1993, apud ARMANTO, 2002, p. 29).

Atrelados à abordagem da RME, os termos *matematização* e *reinvenção guiada* ganharam destaque nas discussões entre educadores e demais pesquisadores envolvidos com o tema. Divergências de interpretação no entendimento de tais termos não impediram que a *matematização* por meio da *reinvenção guiada* se tornasse parte primordial e indispensável na proposta didática inerente à Educação Matemática Realística.

3.2 REINVENÇÃO GUIADA POR MEIO DA MATEMATIZAÇÃO E OS PRINCÍPIOS DA RME

Pode-se dizer que a reinvenção guiada é uma maneira de tratar o processo de ensino, no qual o professor assume o papel de guia, estimulando o aluno a “produzir sua própria matemática”, o resultado de tal produção dependerá das iniciativas de cada aluno, assim como das escolhas das tarefas do professor.

Para Pires (2013), cabe à escola dar oportunidades para o aluno reinventar a Matemática, nesse processo o estudante define de que forma executará seu trabalho, tendo como objetivo “criar” algo que possa solucionar um determinado problema. Em condições ambientais adequadas, uma proposta previamente planejada e executada sob orientação dirigida, possibilita que as práticas iniciadas pelo aluno distanciem-se dos processos de simples reprodução mecânica e aproximam-se naturalmente de um fenômeno conhecido como matematização. Treffers (1987) considera que a matematização refere-se

> à essência da atividade matemática, à linha que percorre toda a educação matemática voltada para a aquisição de conhecimento factual, a aprendizagem de conceitos, a obtenção de competências e ao uso da linguagem e de outras organizações na resolução de problemas que são, ou não, colocados em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 77).

Nessa perspectiva, pode-se dizer que matematizar é um hábito construído pelas atitudes e iniciativas de cada aluno, mediante o tratamento de informações que evoluem e revelam a matemática proveniente de seu trabalho. Van den Heuvel-Panhuizen (1995) salienta que Freudenthal (1968) chamou de matematização a atividade de resolver problemas, procurar problemas e de organizar a matéria a partir da realidade ou da própria matemática. O professor assume o papel de orientador tendo a responsabilidade de expandir as possibilidades dos alunos praticarem a matematização; ao aumentar gradualmente a complexidade dos conceitos matemáticos, ele propicia a oportunidade da matematização “sob os cuidados” da reinvenção guiada.

Em seus estudos, Hans Freudenthal deixa evidente que as inovações didáticas que se fortalecem desenvolvem uma identidade filosófica própria e estabelecem uma estrutura rígida que as fundamentam. Para Freudenthal, o ensino de matemática vai além de um simples ato mecânico, aprender e ensinar matemática são atividades pertencentes ao desenvolvimento social da humanidade. Gravemeijer (2005) menciona que, segundo Freudenthal, os professores e os manuais escolares têm de ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que os alunos experienciem a aprendizagem como um processo de invenção da Matemática, por eles próprios. Isso dá uma boa ideia sobre o que é reinvenção guiada do ponto de vista de Hans Freudenthal. Ele acreditava que, apesar de não serem novos, os conteúdos matemáticos contidos nos currículos devem ter tal característica aos olhos do aluno, assim ele produzirá, com o apoio do professor e do material estrategicamente desenvolvido para a ocasião, sua própria matemática, mesmo ela não sendo mais inédita.

Autores como Ferreira, (2013), Pires, (2013), Santos, (2014), Prestes, (2015) defendem que as propostas oriundas dos fenômenos denominados reinvenção guiada e matematização dão credibilidade aos seis princípios fundamentais que norteiam a Educação Matemática Realística, enrijecendo assim, sua estrutura. O sucesso da reinvenção guiada e da matematização como práticas de ensino de matemática, na perspectiva da Educação Matemática Realística, estão atrelados, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), ao processo de ensino e de aprendizagem direcionado pelos princípios *da atividade*, *da realidade, de níveis, do entrelaçamento, da interatividade* e *de orientação.* Em conformidade com a autora, tais princípios foram sintetizados a seguir.

Princípio da Atividade: mantém a matemática, consequentemente o ensino dela, como uma atividade característica dos seres humanos, considerando a construção feita pelo aluno essencial no avanço da reinvenção e produção de novos conceitos.

Princípio da Realidade: enfatiza a importância de um material bem elaborado, contendo propostas que estimulem o aluno a pensar e praticar uma matemática que permita o crescimento e o enriquecimento dos conceitos pretendidos; aproxima a matemática com a realidade do aluno, explorando fenômenos que ajudam a desmitificar e aproximar a matemática de um universo capaz de ser compreendido pelo estudante.

Princípio de Níveis: passando de um nível para outro a aprendizagem se torna cada vez mais sofisticada, os níveis são graduados e ordenados. Partindo de um nível mais elementar, em que os esquemas feitos pelos alunos, normalmente são restritos às particularidades, chegando a níveis mais elevados, que possibilitam, por meio da matematização, modificar as particularidades e obter generalizações, fazendo com que a matemática construída pouco a pouco, seja cada vez mais formal e estruturada.

Princípio do Entrelaçamento: destaca que as divisões da matemática convenientemente feitas por nós, tais como os Números ou a Geometria, possuem ligações que impossibilitam determinar “fronteiras” entre si, gerando uma espécie de “fusão” que faz da Matemática uma ciência poderosa. Propor a resolução de problemas cuidadosamente escolhidos, que sejam convenientes e interessantes ao aluno, pode ser uma maneira eficaz de trabalhar com esse princípio, visto que tais problemas são capazes de envolver diversos conteúdos matemáticos presentes no currículo escolar e deixar mais clara a existência das conexões entre tais conteúdos, enriquecendo o processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

Princípio da Interatividade: esse princípio não foca somente na interação entre colegas de classe, direciona-se também para os diálogos ocorridos entre professor e aluno. Van den Heuvel-Panhuizen (2010) destaca a importância das relações entre os envolvidos no processo de ensino/aprendizagem da matemática, pois tal processo é visto como uma atividade social, com as interações ocorrendo de forma universal. Deve-se manter a individualidade de cada aluno, a fim de obter maior sucesso na compreensão e no amadurecimento das ideias e das estratégias desenvolvidas por cada um.

Princípio da Orientação: visa garantir a oferta de bons ambientes de estudo, com programas bem elaborados e professores dedicados em guiar o aluno em suas reinvenções. Van den Heuvel-Panhuizen (2010) coloca esse sexto princípio, apesar de tais características aparecerem na descrição da reinvenção guiada por meio da matematização, focando mais o papel do professor como orientador e principal responsável por permitir que o aluno faça sua reinvenção.

3.3 TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

“Trajetória de Ensino e Aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos no processo de aprendizagem [...]” (SILVA, 2015, p. 57). Silva (2015), também, ressalta que uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem pode explorar situações benéficas ou prever alternativas para minimizar ou corrigir situações desfavoráveis, com base nos trabalhos anteriores feitos pelo próprio professor ou por outros professores. As trajetórias de ensino e aprendizagem podem também ser um importante instrumento de trabalho escolar, focando a aprendizagem dos alunos.

Com um olhar mais amplo, é possível enxergar que uma TEA pode ser benéfica para todos os envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem. Van den Heuvel-Panhuizen (2010) ressalta que uma TEA não é apenas uma descrição do processo de aprendizagem direcionado ao aluno, nele a autora apresenta três olhares que, estão entrelaçados, caracterizando uma TEA não somente como responsável por assistir o processo de aprendizagem do aluno, mas também como um indicador didático e programático. Nesse sentido a construção de uma TEA deve ser pensada não apenas como uma alternativa de aprendizagem voltada para os alunos, mas também como aliada de todo o processo educacional, principalmente no suporte dado ao professor em sua constante luta por inovações que possam tornar possível a aprendizagem da Matemática pelos alunos. Ao tratar da amplitude e dos aspectos entrelaçados de uma TEA defendidos por Van den Heuvel-Panhuizen (2002), Santos (2014) cita que segundo a autora, uma trajetória de ensino e aprendizagem apresenta três aspectos entrelaçados:

> - um esquema do assunto, com indicações de quais os elementos centrais do currículo de matemática deve ser ensinado;
> - uma trajetória de aprendizagem, o que proporciona uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;
> - uma trajetória de ensino, contendo indicações didáticas para o ensino e como esse pode ser relacionado com o processo de aprendizagem (SANTOS, 2014, p. 36).

O primeiro aspecto diz respeito ao papel estrutural e organizacional de uma TEA, as trajetórias não estão presas a conteúdos pré-determinados mas devem deixar claros os conteúdos abordados, tais assuntos devem ser adequados ao currículo do curso a qual a trajetória se destina.

O segundo deve evidenciar a construção do aprendizado, como ela ocorre, deve mostrar a evolução do processo de reinvenção por parte do aluno, sempre guiado pelo professor e na direção dos objetivos pretendidos.

O terceiro aspecto coloca-se como um objeto de apoio a outros professores. É uma contribuição a novos simpatizantes dessa abordagem de ensino; com indicações e esclarecimentos dos aspectos positivos a serem considerados e dos pontos possivelmente negativos que devem ser evitados.

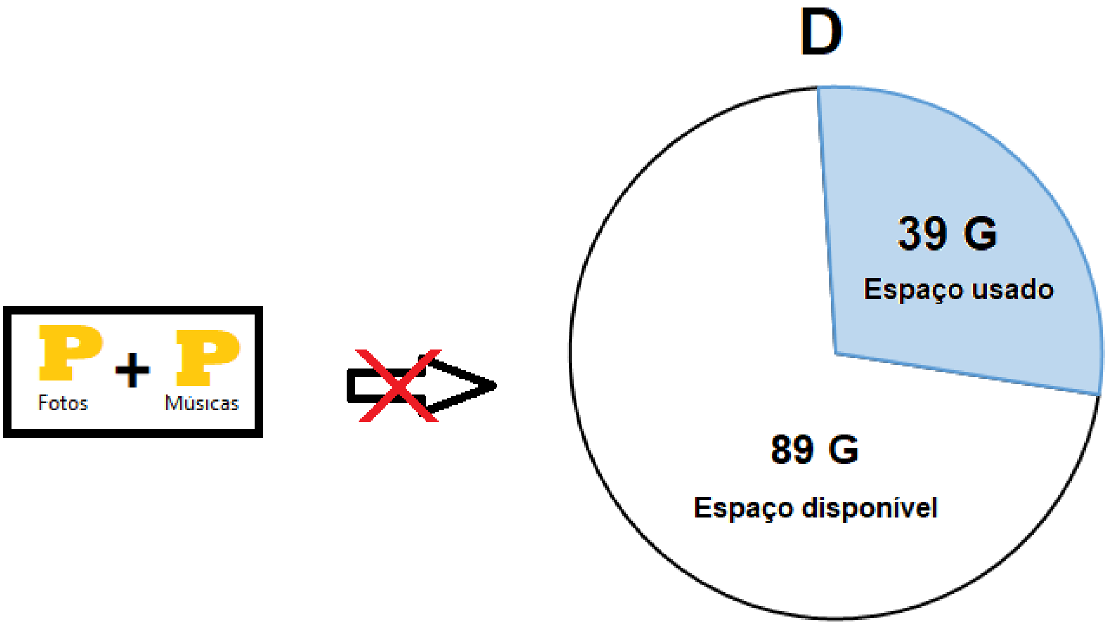
Para elaborar uma Trajetórias de Ensino e Aprendizagem é muito importante refletir sobre alguns aspectos iniciais e, pode-se também, tomar como base trabalhos anteriores. Tal reflexão destina-se às decisões que devem ser anteriormente estudadas e planejadas. Alguns pontos fundamentais para o planejamento de trajetórias destinadas ao ensino de matemática encontram-se a seguir.

- Escolha metodológica: a abordagem pode ser por meio da Investigação Matemática, da Resolução de Problemas, da alternância entre a Investigação Matemática e a Resolução de Problemas, ou por outros caminhos que encaixem ao processo de trabalho; desde que o elemento principal que compõe a proposta seja adequado ao programa curricular do curso.
- Controle pedagógico: procurar manter, na medida do possível, um controle sobre as metas alcançadas com sucesso, os resultados considerados insatisfatórios e os fracassos; para que possa adequar ou ajustar as trajetórias futuras.
- Coerência entre as trajetórias: evitar uma ruptura abrupta nas interligações matemáticas e temáticas; as trajetórias futuras vão completando e estabelecendo ligações mais sólidas entre os conteúdos trabalhados por elas e pelas anteriores.
- Previsões: fazer previsões de possíveis situações desfavoráveis que possam surgir no momento da prática, ou com a etapa do trabalho finalizada. Elaborar alternativas para tais momentos desfavoráveis.
- Atuação coadjuvante: posicionar-se de maneira que mantenha o aluno como protagonista de suas reinvenções.

4 TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM 1

4.1 ENTENDENDO A TAREFA 1 - A TRANSFERÊNCIA DE ARQUIVOS

Figura 2 – Transferência 1



A transferência para o dispositivo D falhou, pois, não há espaço disponível suficiente, ou seja, juntas as duas pastas ultrapassam 89 G de tamanho. Para resolver o problema, optou-se por excluir alguns itens da pasta Músicas, diminuindo assim o seu tamanho, e manter o restante inalterado.

Com a pasta Músicas 23 G menor que a pasta Fotos, a transferência tornou-se possível, ocupando todo o espaço disponível de D.

Qual o tamanho de cada pasta (Fotos e Músicas) armazenada em D?

Fonte: o próprio autor.

Com o intuito de expandir o olhar para os inúmeros caminhos e suas ramificações que podem surgir durante a exploração do problema apresentado, para em seguida, construir uma trajetória detalhada, foram elaboras seis questões que de forma geral, exploram pontos importantes do problema. As questões estão listadas a seguir e foram respondidas por quatro voluntários.

Questões auxiliares para construção da TEA.

1. Qual assunto é tratado no enunciado?
2. Quais as informações apresentadas pelo enunciado?
3. Qual problema ocorreu na situação? Como foi resolvido?
4. O que é pedido no problema?
5. O que pode ser feito para responder o que se pede e resolver o problema?
6. Há mais de uma forma de resolver esse problema?

A primeira voluntária (V1) é uma adolescente de 12 anos de idade, mora com os pais em Londrina - PR, atualmente cursa o 6º ano do Ensino Fundamental na rede pública estadual, estudou em escolas particulares até 2017. Observação: segundo a mãe, a adolescente mantém contato com aparelhos eletrônicos e não teve maiores dificuldades para imaginar do que se tratava o problema. Suas respostas foram corrigidas gramaticalmente pela própria mãe, não havendo retirada ou acréscimo de palavras, em seguida, foram enviadas por mensagens de texto, e transcritas abaixo exatamente como recebidas.

O segundo voluntário (V2) tem 17 anos de idade, é aluno do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Londrina – PR. Suas respostas foram enviadas por mensagens de áudio e posteriormente transcritas.

A terceira voluntária (V3) é uma jovem de 20 anos de idade, estudou apenas em escolas públicas paranaenses e concluiu o Ensino Médio em 2016. Suas respostas também foram enviadas por mensagens de áudio e posteriormente transcritas.

A quarta voluntária (V4) é uma professora de matemática de 35 anos de idade, atua em turmas do Ensino Fundamental em escolas públicas na cidade de Londrina – PR. Observação: foi pedido para que a professora respondesse as perguntas como se estivessem sido feitas por seus alunos do 9º ano do Ensino Fundamental durante uma atividade na qual o problema foi proposto. Suas respostas foram entregues manuscritas e digitadas na íntegra. As respostas dos voluntários estão divididas por questão.

Quadro 3 – Respostas dos voluntários à questão 1

Questão 1: Qual assunto é tratado no texto acima?	
V1	Sobre armazenamento.
V2	Pelo que eu entendi ele está tentando mover arquivos para o dispositivo D, que são fotos e músicas.
V3	A transferência de arquivos para um determinado local de armazenamento.
V4	Resolução de problemas.

Fonte: o próprio autor.

Quadro 4 – Respostas dos voluntários à questão 2

Questão 2: Quais as informações apresentadas pelo texto?	
V1	Não sei.
V2	As informações são que 39 G é o espaço utilizado, 89 G é o espaço disponível, as pastas fotos e músicas juntas ultrapassam 89 G e com a pasta músicas 23 G menor que a pasta fotos, a transferência se torna possível.
V3	O espaço disponível, o espaço ocupado, o que seria excluído para obter mais armazenamento, para assim colocar todos os dados ocupando todo o espaço disponível.
V4	Tamanho ou espaço das pastas juntas, tamanho ou espaço da pasta fotos e espaços disponível e usado no disco D.

Fonte: o próprio autor.

Quadro 5 – Respostas dos voluntários à questão 3

Questão 3: Qual problema ocorreu na situação acima? Como foi resolvido?	
V1	Falta de espaço disponível. Tirando itens da pasta Músicas.
V2	O problema foi que não tinha espaço suficiente para pôr as músicas e as fotos juntos, daí ele diminuiu as músicas para 23 G menor que as fotos e conseguiu ter espaço para pôr tudo em D.
V3	Houve falha na transferência de arquivos por falta de memória. Foi resolvido excluindo 23 G da memória que estava sendo utilizada no dispositivo.
V4	Excesso do tamanho da pasta músicas. Excluindo algumas músicas.

Fonte: o próprio autor.

Quadro 6 – Respostas dos voluntários à questão 4

Questão 4: O que é pedido no problema?	
V1	Resolver problemas de espaço disponível de D.

V2	Ele pede para saber qual o tamanho de cada pasta (Fotos e Músicas) armazenadas.
V3	Para dizer o tamanho da pasta Fotos e da pasta Músicas armazenadas em D.
V4	Descobrir o tamanho das pastas Fotos e Músicas.

Fonte: o próprio autor.

Quadro 7 – Respostas dos voluntários à questão 5

Questão 5: O que pode ser feito para responder o que se pede e resolver o problema?	
V1	Não sei.
V2	É uma boa pergunta, eu não sei o tamanho das pastas Fotos e Músicas, essa eu não sei responder.
V3	Pode-se usar a calculadora e com somas e subtrações é possível encontrar a resposta.
V4	Tentativa e erro ou sistema de equações com duas incógnitas.

Fonte: o próprio autor.

Quadro 8 – Respostas dos voluntários à questão 6

Questão 6: Há mais de uma forma de resolver esse problema?	
V1	Não sei.
V2	Não sei dizer.
V3	Acho que sim, a matemática é bastante complexa, talvez usando regra de três, não sei dizer ao certo mas acredito que existem outros jeitos de resolver esse problema.
V4	Sim, na matemática pode haver várias maneiras de resolver um mesmo problema.

Fonte: o próprio autor.

4.1.1 Algumas considerações referentes à análise do questionário

O questionário, contendo algumas poucas questões que apenas sintetizam o objetivo do problema, não tem a pretensão de ser um objeto de pesquisa, mas sim servir de exemplo para mostrar pontos favoráveis e pontos delicados que devem ser considerados na construção de uma TEA independentemente da turma destinada.

A partir da análise desse exemplo foi construída uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem inspirada nas considerações feitas pelos voluntários. O questionário concede importantes elementos que serão analisados com o propósito de tornar a TEA um material que possa ser inspirador para professores da Educação Básica. Os pontos analisados são comentados na sequência.

Tema e enredo: É muito importante fazer uma boa escolha do tema, o “Princípio da Realidade” enfatiza a importância de aproximar o aluno do que lhe é proposto. Observando as respostas é possível perceber que nenhum voluntário apresentou estranheza ou distanciamento do assunto tratado, além disso, todos aceitaram com naturalidade as consequências oriundas de tal situação. É possível notar que a adolescente, ainda no 6° ano, mesmo sem saber resolver o problema naquele momento, foi capaz de visualizar a tentativa e o impasse descritos no texto.

Posicionamento do professor quando questionado: O princípio da orientação destaca a importância do papel do professor durante todo o processo de ensino e de aprendizagem, desde a elaboração do material até a avaliação da eficácia do trabalho. Nas respostas dadas pela professora (V4) referentes às questões da tarefa 1, podemos notar que ela evitou entrar em detalhes, o que é aceitável pois não pretende dar ao aluno aquilo que ele pode descobrir por conta própria, afinal a intenção do trabalho é promover reinvenções provenientes do aluno. Por outro lado, a resposta dada pelo professor quando questionado por seu aluno não deve ser muito genérica, pois pode dificultar o avanço da construção cognitiva. Isso nos leva a perceber por que é tão importante prever as possíveis questões que podem gerar dúvidas durante a aula para que possamos pensar em respostas convenientes e que façam fluir as construções feitas pelo aluno.

Dificuldade de interpretação das informações: “É uma boa pergunta, eu não sei o tamanho das pastas Fotos e Músicas, essa eu não sei responder” essa foi a resposta dada pelo segundo voluntário para a questão 5, ele argumenta que uma resposta adequada necessita da informação “tamanho das pastas Fotos e Músicas” e não percebe que se essas informações fossem conhecidas, não haveria o que fazer e o problema já estaria solucionado, isso mostra uma dificuldade na interpretação da questão. Uma TEA deve prever que interpretações fora do contexto ou distorcidas possivelmente ocorrerão, textos claros e objetivos ajudam a diminuir, mas não erradicam tais equívocos.

A Matemática vista como um todo: A afirmação “na matemática pode haver várias maneiras de resolver um mesmo problema” feita pela professora (V4), dá indícios que ela pode considerar a particularidade, os conhecimentos dos alunos na aula e que, talvez ela não veja a Matemática como pronta e acabada.

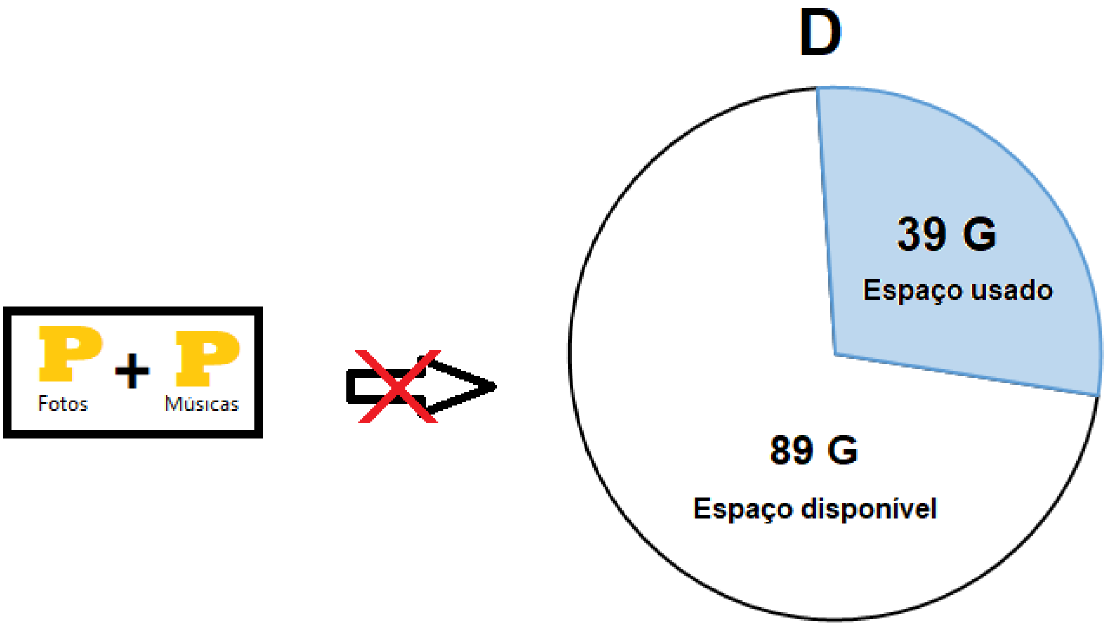
4.2 UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O PROBLEMA DA TRANSFERÊNCIA DE ARQUIVOS.

Possível turma: 7° ano do Ensino Fundamental.

Material: Além do material comum (papel, lápis, borracha...) se preferir também pode usar a calculadora.

Proposta: Analisar a situação, ler com atenção o texto e em seguida responder o que se pede.

Figura 3 – Transferência 1



A transferência para o dispositivo D falhou, pois, não há espaço disponível suficiente, ou seja, juntas as duas pastas ultrapassam 89 G de tamanho. Para resolver o problema, optou-se por excluir alguns itens da pasta Músicas, diminuindo assim o seu tamanho, e manter o restante inalterado.

Com a pasta Músicas 23 G menor que a pasta Fotos, a transferência tornou-se possível, ocupando todo o espaço disponível de D.

Qual o tamanho de cada pasta (Fotos e Músicas) armazenada em D?

Fonte: o próprio autor.

Após propor o problema e dar algum tempo para que os alunos o analisem, a percepção do professor em relação ao ambiente e às reações dos estudantes é de grande importância, nesse momento ele pode iniciar um diálogo com a turma, se julgar necessário.

Diálogo

Professor: O que se tenta fazer na situação descrita no texto?

Alunos: Transferir arquivos para D. Descobrir o tamanho das pastas de Fotos e de Músicas.

Professor: Qual é o questionamento do problema?

Alunos: Descobrir o tamanho das pastas de Fotos e de Músicas.

Professor: Podemos dizer que se a transferência ocorresse normalmente, não haveria a preocupação com o tamanho das pastas?

Alunos: Sim. Descobrir o tamanho de cada pasta não faz parte do objetivo descrito: a transferência das pastas para outro dispositivo.

Professor: Então porque o problema pede o tamanho de cada pasta?

Alunos: Porque a transferência falhou.

Professor: E porque a transferência falhou?

Alunos: Porque as duas pastas juntas ultrapassam 89 G e sabendo o tamanho de cada uma seria possível descobrir o quanto diminuir da pasta Músicas.

Professor: Se não houvesse outras informações além de que o espaço disponível é menor que o tamanho das duas pastas juntas, então saber o tamanho de cada pasta seria fundamental, mas é isso que ocorre? Temos mais informações que possam nos ajudar?

Alunos: Não é isso que ocorre, precisamos das outras informações para resolver o problema.

Professor: Notem que o problema da transferência é a falta de espaço disponível, já o tamanho de cada pasta é a resposta que vocês devem descobrir, se fosse informado o tamanho de cada pasta o problema se resolveria facilmente e vocês não teriam praticamente o que fazer.

Professor: Quais as outras informações dadas pelo problema e que vocês acreditam poderem ajudar a descobrir o tamanho de cada pasta?

Alunos: Se a pasta Músicas ficar 23 G menor que a pasta Fotos dá para fazer a transferência.

Professor: Há alguma outra informação importante além dessa?

Alunos: Sim. O espaço disponível em D ficará totalmente ocupado.

Professor: Essa informação é fundamental para garantir que a realização da transferência passará a ser possível?

Alunos: Não. Poderia sobrar espaço em D e mesmo assim ocorreria a transferência.

Professor: Então será que essa informação é relevante? Pensem na seguinte situação: se a pasta Músicas ficasse 23 G menor que a pasta Fotos, a transferência ocorreria sem problemas e sobraria espaço disponível em D. Nessas condições, como você descobriria o tamanho de cada pasta?

Alunos: Não dá para responder sem saber o quanto a pasta Músicas ficou menor que a pasta Fotos.

Professor: Correto, agora me digam por que saber que o espaço disponível em D ficará totalmente ocupado é importante.

Alunos: Com isso sabemos que após deixar a pasta Músicas 23 G menor que a pasta Fotos, elas somam juntas 89 G.

Professor: Isso mesmo! Perceberam a importância de sempre buscar informações sobre aquilo que está diante de vocês? Frequentemente nos deparamos com problemas que permanecem sem solução até que se obtenham informações suficientes para resolvê-los.

Professor: Agora vocês já sabem que as informações são suficientes para descobrir o tamanho de cada pasta. Tentem descobrir.

Alunos: De que jeito fazer?

Professor: Tentem fazer da maneira que acharem melhor. Será que existe só um jeito?

Alunos: Como saber quais são os valores corretos para os tamanhos de cada pasta?

Professor: Uma dica é fazer testes para os possíveis valores, podem usar a calculadora se preferirem.

Após um tempo para os alunos pensarem:

Alunos: Fizemos juntos (grupo de dois alunos), mas surgiu um problema chegamos em duas respostas que não batem, porém verificamos e percebemos que procedemos da mesma forma.

Professor: Vamos analisar, me digam qual foi o procedimento que vocês utilizaram e quais foram as respostas que cada um obteve, vamos organiza-las na lousa.

Alunos: Nós dois usamos a calculadora e fomos "chutando" valores para cada pasta. Respostas escritas na lousa pelo professor:

Quadro 9 – Respostas dos alunos (a)

	Músicas	Fotos	Espaço ocupado pelas duas pastas juntas
Resposta 1	29 G	60 G	89 G
Resposta 2	38 G	51 G	89 G

Fonte: o próprio autor.

Professor: O quadro com as respostas de vocês está correto? Foram esses os valores?

Alunos: Sim.

Professor: Vou refazer o quadro e acrescentar uma coluna e, com o auxílio de todos, vamos preenchê-la.

Quadro 10 – Respostas dos alunos (b)

	Músicas	Fotos	Espaço ocupado pelas duas pastas juntas	Diferença de tamanho das pastas
Resposta 1	29 G	60 G	89 G	
Resposta 2	38 G	51 G	89 G	

Fonte: o próprio autor.

Professor: Como preencher a última coluna?

Alunos: Fazendo a subtração da pasta Fotos pela pasta Músicas.

Resultado obtido pela turma e organizado pelo professor.

Quadro 11 – Respostas dos alunos (c)

	Músicas	Fotos	Espaço ocupado pelas duas pastas juntas	Diferença de tamanho das pastas
Resposta 1	29 G	60 G	89 G	60 – 29 = 31 G
Resposta 2	38 G	51 G	89 G	51 – 38 = 13 G

Fonte: o próprio autor.

Alunos: A pasta Músicas não ficou 23 G menor que a pasta Fotos em nenhum dos dois casos.

Professor: Sim. O enunciado diz que para possibilitar a transferência, a pasta Músicas ficou 23 G menor que a pasta Fotos e ambas foram transferidas para D, ocupando todo o espaço que restava.

Alunos: Então ambas as respostas não estão corretas, em uma a diferença é de 31 G e na outra a diferença é de 13 G.

Professor: Exato. Isso mostra que não basta saber o espaço ocupado pelas duas pastas juntas, há muitas possibilidades para os tamanhos das pastas, diferentes umas das outras, que juntas somam 89 G, mas há somente uma resposta possível, ou seja, há somente um valor correto para Músicas e um valor correto para Fotos. E para descobri-los vocês precisam de mais uma informação que é justamente a diferença de 23 G entre as pastas.

Alunos: Então os tamanhos que somam 89 G são vários, mas entre esses tamanhos existe apenas um que é 23 G menor que o outro?

Professor: É isso mesmo! Agora que ficou mais clara a situação, e o que deve ser respeitado; vocês acreditam que ficou mais fácil encontrar os tamanhos das pastas Músicas e Fotos? Pensem a respeito e escrevam suas opiniões.

Após um tempo para os alunos pensarem:

Alunos: A resposta é Músicas 33 G e Fotos 56 G, certo?

Professor: Como vocês fizeram para obterem esses valores?

Algumas possíveis respostas.

Alunos:

1) Usando as respostas que estão no quadro. Sabemos que em ambas as respostas os tamanhos das pastas Músicas e Fotos somam 89 G, na primeira a pasta Músicas é 31 G menor que a pasta Fotos e na segunda a pasta Músicas é 13 G menor que a pasta Fotos. Sendo assim, o tamanho da pasta Fotos deve ser menor que 60 G e maior que 51 G e o tamanho da pasta Músicas deve ser maior que 29 G e menor que 38 G, pois a diferença entre elas é de 23 G, ou seja, é menor que 31 G e maior que 13 G. Considerei alguns casos e com auxílio da calculadora obtive:

Quadro 12 - Resultados

89 – 55 = 34 55 – 34 = 21	89 – 56 = 33 56 – 33 = 23
Não podem ser 55 e 34 porque a diferença não deu 23.	Como a diferença deu 23, a resposta é 56 G para Fotos e 33 G para Músicas.

Fonte: o próprio autor.

Professor: Muito bom. Observem que ao escolher 55 G para a pasta Fotos obtém-se 34 G para a pasta Músicas e a diferença entre elas será de 21 G, um valor próximo de 23 G, porém menor. Para a próxima escolha faz todo sentido escolher um número um pouco maior que 55 para o tamanho da pasta Fotos, pois isso faz com que o tamanho da pasta Músicas seja menor que 34 G e a diferença entre os tamanhos será maior que 21 G.

Alunos:

2) A barra ilustrada abaixo representa o espaço disponível.

Figura 4 – Barra de armazenamento 1

Fonte: o próprio autor.

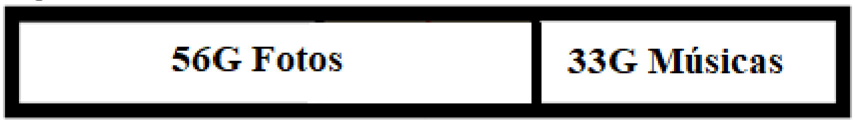
Supomos que as pastas Músicas e Fotos são do mesmo tamanho, que 23 G dos 89 G não foram utilizados e que os 66G restantes estão armazenando as duas pastas.

Figura 5 – Barra de armazenamento 2

Fonte: o próprio autor.

Por outro lado, sabemos que não há sobra de espaço, logo os 23 G também foram utilizados, como a pasta Fotos é exatamente 23 G maior que a pasta Músicas, podemos afirmar que os 23 G armazenam fotos. Portanto o tamanho da pasta Fotos é de 56 G ficando 33 G para a pasta Músicas.

Figura 6 – Barra de armazenamento 3



Fonte: o próprio autor.

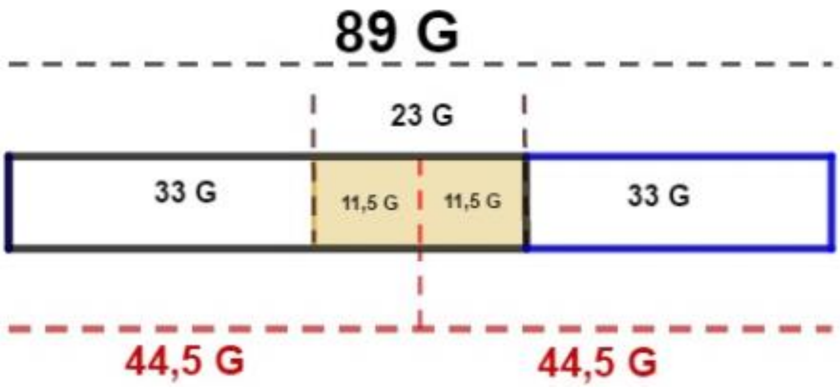
Alunos:

3) Se as duas pastas fossem do mesmo tamanho, então cada uma teria 44,5 G pois juntas somam 89 G, mas a diferença entre elas é de 23 G, então basta somar a metade dessa diferença, ou seja, 11,5 G com 44,5 G para obter o tamanho da pasta Fotos, que é a maior e subtrair 11,5 G de 44,5 G para obter o tamanho da pasta Músicas.

Portanto o tamanho da pasta Fotos é 44,5 + 11,5 = 56 G e o tamanho da pasta Músicas é 44,5 – 11,5 = 33 G.

Professor: Ótimo. Podemos fazer como na resolução anterior e construir um esquema com barras para essa resolução.

Figura 7 – Barra de armazenamento 4



Fonte: o próprio autor.

A ilustração acima pode esclarecer possíveis dúvidas referentes a essa resolução, como por exemplo, a utilização da metade de 23 nos cálculos; como o espaço disponível foi totalmente usado por duas pastas apenas, aumentando o tamanho de uma diminui na mesma quantidade o tamanho da outra, acrescentar 11,5 G em uma das metades, retira 11,5 G da outra, e a diferença entre os tamanhos será de 23 G.

Professor: Buscamos sempre aprender diferentes meios para resolver problemas, as situações apresentam particularidades que as diferem umas das outras podendo dificultar ou até mesmo impossibilitar a resolução de um problema por caminhos que outrora mostraram-se eficazes. O objetivo agora é achar uma alternativa algébrica para resolver o problema de armazenamento em D, vamos começar pelos “nomes”. Não sabemos os tamanhos das pastas Músicas e Fotos, ou seja, não conhecemos os números que expressam tal informação, por esse motivo devemos escolher símbolos que representarão tais números, por exemplo, a letra F para representar o tamanho da pasta Fotos e a letra M para representar o tamanho da pasta Músicas.

Professor: Agora, usem as informações contidas no problema e relacionem F com M.

Alunos: As relações entre M e F são:

I) M mais F era maior que 89 G;

II) M ficou 23 G menor que F;

III) M mais F ocupam 89 G.

Professor: Correto, vamos reescrevê-las usando símbolos matemáticos, assim a manipulação das informações pode ser feita por meio de equações lineares.

Quadro 13 - Equação linear nas incógnitas

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b$. Os números reais $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ são chamados coeficientes e b, também real, é o termo independente da equação. A sequência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b$ se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Fonte: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar. (1977, p.115)

Vejam como podemos reescrever as informações:

I) M + F > 89 (essa é uma inequação, pois representa uma desigualdade)

II) M = F - 23 (Observe que basta subtrair 23 G de F para ficar igual a M)

III) M + F = 89 (sabemos que não sobrou espaço disponível)

Não utilizaremos (I) pois a modificação nas pastas a invalidou, as equações (II) e

(III) descrevem a nova situação.

Professor: As equações (II) e (III) possuem uma característica que possibilita descobrir os valores de M e de F. Podemos escrever:

$$\begin{cases} M = F - 23 \\ M + F = 89 \end{cases}$$

Alunos: Elas possuem diferentes informações referentes a M e a F, mas sempre uma depende da outra. Preciso de alguma informação de M ou de F individualmente para resolver as equações?

Professor: Ambas são equações do primeiro grau, vocês provavelmente já estudaram e resolveram equações do primeiro grau anteriormente, porém essas relacionam duas coisas desconhecidas por nós (M e F), uma sempre dependerá da outra e isso nos impede de resolver cada equação separadamente, sem que a dependência entre as incógnitas ocorra. Por outro lado, temos a nosso favor o fato de que ambas apresentam informações envolvendo os mesmos elementos, ou seja, as duas relacionam M com F, cabe a nós retirarmos informações de uma e usa-las na outra. A igualdade em (II) nos garante que posso usar tanto M quanto F – 23, pois são de igual valor numérico, sendo assim podemos substituir em (III), M por F – 23, veja abaixo:

$$\begin{cases} M = \boldsymbol{F - 23} \\ \boldsymbol{M} + F = 89 \end{cases}$$

Substituindo, temos:

F – 23 + F = 89, ou ainda,

2F – 23 = 89.

Agora podemos resolver essa nova equação como de costume, pois apresenta apenas uma incógnita, em outras palavras, apresenta apenas um elemento de valor desconhecido que é o tamanho da pasta Fotos.

Resolvendo a equação:

Adicionando 23 em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$2\mathrm{F} - 23 + 23 = 89 + 23$$

$$2F = 112$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por 2, obtemos:

$$\frac{2F}{2} = \frac{112}{2}$$

$$F = 56$$

Se M é 23 G menor que F, então M = 56 – 23 = 33.

Portanto a pasta Fotos tem 56 G de tamanho e a passa Músicas tem 33 G de tamanho.

5 TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM 2

5.1 ENTENDENDO A TAREFA 2 - POSTANDO FOTOS

A tarefa 2 é uma adaptação do problema:

Havia um pastor que não sabia contar até 10, e tinha a seu cargo um rebanho numeroso. Para saber se não lhe faltava nenhuma ovelha, inventou um sistema que punha em prática todos os dias ao cair da tarde. Agrupava-as de duas em duas, de três em três, de quatro em quatro, de cinco em cinco, e de seis em seis. Em todos os casos lhe sobrava uma ovelha. Então verificou que agrupando-as de sete em sete, todos os grupos teriam o mesmo número de ovelhas. De quantas ovelhas era o seu rebanho?[5]

Com o intuito de manter o mesmo contexto da tarefa 1, tema que julgamos do dia a dia dos jovens das séries finais do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio, e pensando no Princípio da Realidade, foi feito uma adaptação do problema do pastor:

O Problema:

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribui-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribui-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Essa tarefa possibilita explorar conteúdos matemáticos em praticamente todos os níveis de ensino, até mesmo em níveis mais avançados. Veja abaixo uma resolução utilizando conceitos de congruência entre números inteiros:

Resolução por congruência:

As discussões apresentadas a seguir basearam-se em teoremas expostos no livro Aritmética, pertencente a coleção PROFMAT[6].

Dois números inteiros *a* e *b* são ditos congruentes em relação a um número

[5] Problema trabalhado em uma aula da disciplina de Resolução de Problemas do Curso de Especialização em Educação Matemática da UEL no ano de 2008.
[6] Aritmética (2016) Abramo Hefez.

natural *m*, se os restos de suas divisões[7] por *m* são iguais. Escreve-se $a \equiv b \, mod \, m$ e lê-se *a* congruente a *b* módulo *m.*

A letra *X* representará o número de fotos que serão postadas.

Sabemos que se as fotos forem distribuídas em álbuns, cada um contendo, 2, 3, 4, 5 ou 6 delas, sobrará uma foto, ou seja, a divisão de *X* por 2, 3, 4, 5 ou 6 deixa resto 1. Assim temos:

$$X \equiv 1 \, mod \, 2$$
$$X \equiv 1 \, mod \, 3$$
$$X \equiv 1 \, mod \, 4$$
$$X \equiv 1 \, mod \, 5$$
$$X \equiv 1 \, mod \, 6$$

Uma congruência do tipo $aX \equiv b \, mod \, m$, com $a, b, m \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$ possui solução se, e somente se, *b* for divisível pelo máximo divisor comum entre *a* e *m*, em outras palavras, para existir números inteiros *x*, tais que $ax \equiv b \, mod \, m$, o máximo divisor comum entre *a* e *m* deve ser um número divisor de *b*. Em todas as cinco congruências oriundas da tarefa 2, o máximo divisor comum entre *a* e *m* é igual a 1, logo todas as cinco possuem solução, pois 1 é divisor de qualquer número inteiro. Por outro lado $a \equiv b \, mod \, m_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$ se, e somente se, $a \equiv b \, mod \, n$, com *n* sendo o mínimo múltiplo comum entre $m_1, m_2, \dots, m_r$. Sendo assim, podemos afirmar que $X \equiv 1 \, mod \, 60$.

X é múltiplo de 7, logo $X = 7W$, com $W \in \mathbb{Z}$. Assim, $7W \equiv 1 \, mod \, 60$, ou seja, existe um número $Y \in \mathbb{Z}$, tal que $7W = 60Y + 1$ ou $7W - 60Y = 1$.

A equação $7W - 60Y = 1$, desvinculada do contexto da tarefa 2, é uma equação diofantina que possui solução inteira, pois o máximo divisor comum entre 7 e 60 é 1, basta resolvê-la e considerar apenas a solução adequada para o problema proposto pela tarefa. De acordo com a proposição 6.2 descrita no livro, a solução de uma equação diofantina pode ser obtida a partir de uma solução particular qualquer.

[7] Divisão pelo Método Euclidiano.

Quadro 14 - Proposição 6.2

Proposição 6.2
Seja x_0, y_0 uma solução da equação $aX + bY = c$, onde $(a, b) = 1$. Então as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são
$x = x_0 + tb$, $y = y_0 - ta$; $t \in \mathbb{Z}$.
Demonstração
Seja x, y uma solução de $aX + bY = c$, logo,
$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$
Consequentemente,
$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ *"(1)".*
Como $(a, b) = 1$, segue-se que $b \perp (x - x_0)$. Logo,
$(x - x_0) = tb,\ t \in \mathbb{Z}.$
Substituindo a expressão de $x - x_0$ acima em "(1)", segue-se que
$y_0 - y = ta,$
O que prova que as soluções são do tipo exibido.
Por outro lado, x, y, como no enunciado, é solução, pois:
$$ax + by = a(x_0 + tb) + b(y_0 - ta) = ax_0 + by_0 = c$$

Fonte: HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. Ed. Rio de Janeiro: SMB,2016.

Temos que $w_0 = -17$ e $y_0 = -2$ é uma solução particular de $7W - 60Y = 1$, pois $7(-17) - 60(-2) = 1$. Logo $w = -17 + 60t$ e $y = -2 + 7t$, com $t \in \mathbb{Z}$, é a solução geral da equação. Por outro lado, sabemos que $7W$ é um número maior que zero e menor que, ou igual a 500, pois representa a quantidade de fotos a serem postadas. Veja:

$$0 < 7W \leq 500$$

$$0 < 7(-17 + 60t) \leq 500$$

$$\frac{119}{420} < t \leq \frac{619}{420}$$

Como *t* é um número inteiro, conclui-se que $t = 1$.

Assim $X = 7W = 7(-17 + 60 \cdot 1) = 7 \cdot 43 = 301$.

Portanto serão postadas 301 fotos.

5.1.1 Análise das Respostas dos Voluntários e Construção da TEA

Diferente do que foi feito na tarefa 1, a análise das respostas dadas pelos quatro voluntários (novos voluntários) para cinco questões referentes a tarefa 2, será feita individualmente, questão por questão. Espera-se que tal análise contribua para a elaboração da TEA que ocorrerá na sequência, destacando pontos críticos que causaram dificuldades aos voluntários e que podem contribuir para condução de outros alunos.

Abaixo encontram-se as cinco questões auxiliares.

- Qual assunto é tratado no texto?
- Quais informações o texto apresenta?
- O que é pedido no problema?
- O que pode ser feito para resolver o problema?
- Há mais de uma forma de resolver esse problema?

Os voluntários:

A primeira voluntária (W1) é uma adolescente de 12 anos de idade, reside na cidade de Quedas do Iguaçu – PR e cursa o 7º ano do Ensino Fundamental na rede pública estadual.

A segunda voluntária (W2) mora com os pais na cidade de Londrina – PR, tem 13 anos de idade e cursa o 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública estadual londrinense.

O terceiro voluntário (W3) é aluno da rede particular em Londrina – PR, cidade onde reside, com 15 anos de idade, cursa o segundo ano do Ensino Médio.

O quarto voluntário (W4) tem 25 anos de idade, é professor de matemática da rede pública estadual do Paraná, mora em Londrina – PR e iniciará em 2019 o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Observação: o mesmo pedido feito à voluntária (V4) na tarefa 1, foi feito ao voluntário W4: que respondesse as perguntas como se estivessem sido feitas por seus alunos do 7º ano do Ensino Fundamental durante uma atividade na qual o problema foi proposto.

As respostas dos quatro voluntários foram recebidas via mensagem de texto e transcritas exatamente como estavam escritas nas mensagens.

Quadro 15 – Respostas dos voluntários (W) à questão 1

Questão 1: Qual assunto é tratado no texto?	
W1	Divisão.
W2	Sobre uma menina chamada Mariana que comprou um cartão de memória que cabe até 500 fotos e quer distribui-las, colocando em álbuns com a mesma quantidade.
W3	Mariana comprou um cartão de memória e quer postar fotos nas suas redes sociais.
W4	Múltiplos Divisores.

Fonte: o próprio autor.

Observações referentes a questão 1.

A questão 1 não se refere estritamente aos conteúdos matemáticos, há uma priorização do assunto geral, ou seja, da postagem de fotos, os voluntários W2 e W3 foram os que mais se aproximaram do assunto principal, porém suas respostas sugerem uma certa confusão na interpretação da questão. Os voluntários W1 e W4 restringiram suas respostas respectivamente à divisão e a múltiplos e divisores.

Quadro 16 – Respostas dos voluntários (W) à questão 2

Questão 2: Quais informações o texto apresenta?	
W1	Quantas fotos cabem no cartão e quantas fotos colocaram no álbum.
W2	Um cartão de memória que guarda até 500 fotos e que colocando 7 fotos por álbum, ela consegue fazer a distribuição de todas elas.
W3	Com o cartão ela pode ter 500 fotos e ela consegue postar até 7 álbuns.
W4	O limite máximo de fotos, alguns divisores com resto 1 e também o divisor exato.

Fonte: o próprio autor.

Observações referentes a questão 2.

As respostas dos voluntários, exceto a dada pelo professor (W4), mostra claramente a dificuldade dos três para compreender o processo de distribuição de uma determinada quantidade de fotos, considerando as consequências ao colocar em cada álbum, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 delas. Confusões envolvendo o número de álbuns e a quantidade de fotos são recorrentes: em vários momentos, percebe-se uma busca da quantidade de álbuns utilizados, como se essa informação devesse constar de alguma forma no texto, pois sem ela, a resolução do problema torna-se impossível.

Quadro 17 – Respostas dos voluntários (W) à questão 3

Questão 3: O que é pedido no problema?	
W1	Quantas fotos serão postadas.
W2	A quantidade de fotos que serão postadas.
W3	Quantas fotos serão postadas.
W4	A quantidade de fotos postadas.

Fonte: o próprio autor.

Observações referentes a questão 3.

Os quatro voluntários apresentaram respostas adequadas para essa questão.

Quadro 18 – Respostas dos voluntários (W) à questão 4

Questão 4: O que pode ser feito para resolver o problema?	
W1	Ler, tirar as informações iniciais e tentar resolver o problema.
W2	Colocar 7 fotos em cada álbum, não passando de 500 fotos.
W3	Mudar a pergunta, invés de perguntar quantas fotos, perguntar quantos álbuns podem ser feitos.
W4	Achar o mmc dos divisores que o enunciado apresenta, somar 1 e verificar se é divisível por 7.

Fonte: o próprio autor.

Observações referentes a questão 4.

As respostas de W1, W2 e W3 para a questão 4 apresentam indícios de que tiveram dificuldades em estabelecer uma estratégia para resolver o problema, são afirmações que mostram pouca intimidade em interpretar o texto proposto.

O voluntário W4 mostra que tem uma estratégia que pode encaminhar à solução do problema porém, ele também pode, com essa estratégia, caso não continue testando outros múltiplos, não chegar à resposta.

Quadro 19 – Respostas dos voluntários (W) à questão 5

Questão 5: Há mais de uma forma de resolver esse problema?	
W1	Acho que não.
W2	Não.
W3	Caso mude a pergunta como falei na pergunta 4, fazer 500 dividido por 7 para descobrir quantos álbuns terá.
W4	Sim, pode ser feito por tentativa e erro.

Fonte: o próprio autor.

Observações referentes a questão 5.

Possuir uma variedade de ferramentas matemáticas compatíveis com cada etapa da vida escolar do aluno depende de inúmeros fatores, tais como: fatores sociais, políticos, biológicos, temporais, culturais. Se algum ou alguns desses fatores forem negligenciados, o conhecimento matemático de cada indivíduo envolvido certamente será afetado, podendo ficar extremamente restrito. As três primeiras respostas para a questão 5 são alertas de que isso pode ter ocorrido com os voluntários W1, W2 e W3, porém são insuficientes para um parecer definitivo, logo devem estar acompanhadas de outros indicadores e tratadas com bastante cuidado.

Não visualizar diferentes alternativas potencialmente capazes de resolver um problema envolvendo matemática, nem sempre se justificará pela carência de ferramentas matemáticas do indivíduo. O modelo tradicional de condução de aula, alicerçado em ideias que promovem a divisão dos conteúdos curriculares, mantendo-os isolados, pode atrapalhar ou até mesmo impedir o aluno de improvisar e diversificar seu conhecimento, pois ele não enxerga as ligações entre os conteúdos matemáticos, mesmo sabendo manipular as ferramentas matemáticas isoladamente.

5.2 UMA TRAJETÓRIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM PARA O PROBLEMA DA POSTAGEM DE FOTOS

Possível turma: 7° ano do Ensino Fundamental.

Material: Além do material comum (papel, lápis, borracha...) se preferir também pode usar a calculadora.

Proposta: Analisar a situação, ler com atenção o texto e em seguida responder o que se pede.

Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas em uma rede social. A intenção é distribui-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribui-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?

Após a turma realizar uma leitura do texto o professor pode iniciar uma conversa, atentando-se para as impressões iniciais dos os alunos a respeito do problema, é nesse momento que o professor coleta os primeiros dados que o ajudará a estabelecer sua atitude inicial de guia no processo de ensino-aprendizagem.

Diálogo

Professor: Qual é o principal assunto da tarefa 2?

Aluno: a compra de um cartão de memória que permite guardar até 500 fotos;

Mariana deve colocar 7 fotos em cada álbum;

se Mariana colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará uma foto não postada;

Mariana deseja postar as fotos que estão no cartão de memória em uma rede social.

Professor: O principal assunto do texto é a postagem das fotos na rede social. Os outros apontamentos que vocês fizeram são características ou consequências da situação em particular e podem ser informações úteis. Agora tentem listar todas as informações que encontrarem no texto.

Alunos:

- O cartão de memória permite guardar até 500 fotos.
- O cartão de memória contém apenas as fotos que serão postadas.
- Os álbuns serão criados exclusivamente para as fotos do cartão.
- Os álbuns devem conter o mesmo número de fotos.
- Se cada álbum conter 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos, uma foto ficará sem postar.

- Com 7 fotos em cada álbum, Mariana conseguirá postar todas.

Professor: Muito bem. Agora pensem a respeito da seguinte pergunta: é possível postar todas as fotos, colocando em cada álbum, 2, 3, 4, 5 ou 6 delas, mudando apenas a quantidade de álbuns?

Aluno: Talvez sim. Não dá para responder sem saber o número de álbuns que Mariana considerou.

Professor: O problema apresenta alguma informação sobre a quantidade de álbuns que deverá ser utilizada? É possível encontrar a quantidade de álbuns em que a situação descrita no problema se encaixe?

Aluno: Quantas fotos devo considerar? Faço para 500?

Professor: Boa pergunta. Não é viável pensar na distribuição das fotos em uma certa quantidade de álbuns, sem considerar a quantidade de fotos que estão armazenadas no cartão de memória. Considerar que são 500 fotos não é aceitável pois usa exatamente aquilo que deve ser descoberto, mas é possível supor que tal quantidade está correta e realizar testes para confirmar.

Aluno: Mas são muitas possibilidades para testar.

Professor: Será que as informações já listadas podem ajudar a restringir as possibilidades para o número de fotos contidas no cartão e diminuir o total de "candidatos" a serem testados?

Aluno: E por onde começar? Qual informação devo usar primeiro?

Professor: Imagina certa quantidade de fotos que se for distribuída em álbuns contendo duas delas, sobra uma foto. Faça o mesmo para álbuns contendo 3, 4, 5 ou 6 fotos.

Aluno: Deve ser um número ímpar certo?

Professor: Correto, o que mais podemos considerar?

Aluno: Se tirarmos uma foto do cartão, a quantidade restante é dada por um número divisível por 2, 3, 4, 5 e 6.

Professor: Qual a principal característica dos números múltiplos de 5?

Aluno: Terminam em 0 ou 5. Então o número que buscamos termina em 1 ou em 6, certo professor?

Professor: Sim, mas já vimos que tal número é ímpar, como essa informação pode nos ajudar?

Aluno: Não pode ser um número terminado em 6, então o número termina em 1.

Professor: Como podemos descrever o número que representa a quantidade de fotos do cartão se for retirada uma foto?

Aluno: É um número múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6 terminado em 0.

Professor: Qual o menor número múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6?

Aluno: É o 60, descobri testando.

Professor: Muito bem. Para diminuir as possibilidades podemos levar em consideração que estamos falando de números múltiplos de 4, de 6, de 10 (terminam em 0) cujas as somas de seus algarismos são divisíveis por 3, ou seja, são números múltiplos de 60 (mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5 e 6).

Aluno: Como assim professor?

Professor: Um número maior que zero, múltiplo de 2 e de 5, deve terminar em zero, pois é par e divisível por 5; os 6 primeiros são: 10; 20; 30, 40, 50, 60. O mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5 e 6 deve ser divisível por todos eles, o único número listado que satisfaz essa condição é o 60. Portanto o mínimo múltiplo comum ou mmc entre 2, 3, 4, 5 e 6, é o 60.

Agora faça uma lista com os possíveis representantes da quantidade de fotos contida no cartão de memória.

Aluno: 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421 e 481.

Professor: Analise a seguinte afirmação: dentre os números listados, um, e somente um, satisfaz as condições exigidas para representar a quantidade de fotos contida no cartão de memória. Agora responda as perguntas a seguir: A afirmação está correta? Justifique sua resposta. Quantas fotos há no cartão de memória?

Aluno: O número de fotos no cartão é divisível por 7: após verificar toda a lista, pude notar que apenas o 301 é divisível por 7. Portanto a afirmação está correta. Resposta: 301 fotos.

Professor: Muito bem.

É possível reorganizar os resultados obtidos no diálogo, apresentar mais detalhes e explorar ainda mais os critérios de divisibilidade, e melhorar a apresentação da resolução. Vejam um exemplo:

Seja n o número de fotos contidas no cartão de memória. Podemos afirmar que para todo $k_i \in \mathbb{N}$, com $i = 1, 2, \ldots, 5$:

$$\boldsymbol{m = n - 1 = 2k_1 = 3k_2 = 4k_3 = 5k_4 = 6k_5}$$

Quadro 20 – Critério de divisibilidade

m	Critério de divisibilidade
$2k_1$	m é par
$3k_2$	a soma dos algarismos de m é divisível por 3
$4k_3$	os dois últimos algarismos de m formam um número divisível por 4
$5k_4$	o último algarismo de m é o 0 ou o 5
$6k_5$	m é divisível por 2 e por 3

Fonte: o próprio autor.

De acordo com os critérios de divisibilidade por 2 e por 5, o último algarismo de *m* é o zero, pois *m* é par e múltiplo de 5; o critério de divisibilidade por 3 descarta a possibilidade de *m* ser igual a 10, 20, 40 e 50; já os critérios de divisibilidade por 4 e por 6 garantem que *m* é diferente de 30 e múltiplo de 60.

Quadro 21 – Possíveis múltiplos de 7

Possibilidades de m	Possibilidades de n	n é divisível por 7?
60	61	não
120	121	não
180	181	não
240	241	não
300	301	sim
360	361	não
420	421	não
480	481	não

Fonte: o próprio autor.

Portanto $n = 301$, pois é o único número divisível por 7 que se enquadra nas condições do problema.

Resposta: 301 fotos

6 OS PRINCÍPIOS DA RME NAS TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM: ESTABELECENDO RELAÇÕES

Elaboramos as Trajetórias de Ensino e Aprendizagem em concordância com os fundamentos da RME e, para responder a questão dessa pesquisa: Como os princípios da RME podem orientar um professor no desenvolvimento de tarefas matemáticas? Apresentamos na sequência uma análise identificando trechos das trajetórias e suas relações com os princípios da RME.

É importante esclarecer que as Trajetórias de Ensino e Aprendizagem apresentadas não fazem parte de um conjunto de trajetórias destinadas a um curso específico, e não foram elaboradas para serem sequenciais. É preciso conhecer os componentes curriculares exigidos em cada curso, ter em mente que até os repertórios compostos por trajetórias elaboradas especificamente para atender as particularidades de um curso, não são definitivos ou inalteráveis e entender a importância de se fazer um controle para garantir que ao final do processo ao menos o previsto pelo currículo tenha sido estudado para trabalhar a matemática dentro das especificidades e pretensões desejáveis. Procuramos incluir nas tarefas elementos que ajudam a desenvolver trajetórias que possam interessar primeiramente aos profissionais educadores matemáticos que buscam superar, com novas atitudes, velhos obstáculos, enraizados no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

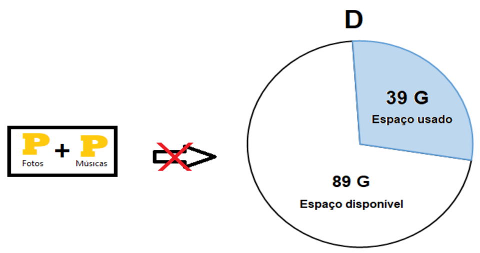
Como pode ser observado nas entrevistas que antecederam a construção da trajetória, o tema abordado no problema não é algo fora da realidade dos alunos em geral que, ao se sentirem confortáveis e a vontade com o assunto, tornam-se mais receptíveis a proposta da atividade: uma consequência clara da influência do *princípio da realidade.*

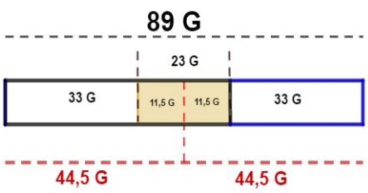
A hipotética discussão entre professor e alunos desenrolou-se progressivamente e com fluidez, durante a exploração das diferentes resoluções. Essa é uma característica dos problemas com contexto familiares aos alunos e, podemos dizer ainda que os bons problemas permitem navegar por diferentes áreas da matemática, de acordo com o *princípio do entrelaçamento*, é possível evidenciar conexões dentro e fora da Matemática. Especialmente na tarefa 1, pode-se explorar, por exemplo, os métodos: numéricos, algébricos e geométricos.

De acordo com Van de Walle (2009), as atividades que consistem em resolver problemas considerados interessantes pelos alunos, são consideradas as mais gratificantes; nessa perspectiva, entendemos que a Resolução de Problemas é uma abordagem didática adequada para iniciar e desenvolver uma TEA.

A seguir encontram-se alguns trechos da primeira tarefa que ilustram os Princípios da RME:

Quadro 22 – Princípios da RME evidenciados em trechos da trajetória (T1)

Trecho	Justificativa	Princípio
O esquema que representa a ocupação do disco: **Figura 8 –** Transferência 1.  **Fonte**: o próprio autor.	Representação muito utilizada no mundo tecnológico, que por sua vez é bastante transitado pelos jovens estudantes.	Realidade
O enunciado do problema proposto pela Tarefa 1	O contexto escolhido é do cotidiano dos alunos, o que o caracteriza no Princípio da Realidade.	Realidade
[...] Aluno: Porque as duas pastas juntas ultrapassam 89 G e sabendo o tamanho de cada uma seria possível descobrir o quanto diminuir a pasta Músicas. [...]	Essa resposta é uma indicação de que o contexto do problema faz parte da realidade dos alunos.	Realidade
[...] as situações que as diferem umas das outras podendo dificultar ou até mesmo impossibilitar a solução de um problema por caminhos que outrora mostraram-se eficazes. O objetivo agora é achar uma alternativa algébrica para resolver o problema [...]	As diferentes estratégias de resolução, que podem ser apresentadas pelos alunos.	Atividade

[...] intuito de expandir o olhar para os inúmeros caminhos e suas ramificações que podem surgir durante a exploração do problema apresentado, para em seguida, construir uma trajetória detalhada, foram elaboras seis questões [...]	Essa proposta prevista pelo autor da TEA, explicita a intenção de passar, durante a resolução do problema, por diferentes níveis do conhecimento matemático.	Níveis
Apresentação na trajetória da resolução do problema: - por aritmética: 89 – 56 = 33 56 – 33 = 23 - por esquemas geométricos: **Figura 9** – Barra de armazenamento 4.  **Fonte**: o próprio autor. - por álgebra $\begin{cases} M = F - 23 \\ M + F = 89 \end{cases}$	A resolução inicia com atribuição e testes de valores, passa por esquemas geométricos e chega a procedimentos algébricos. Quando o professor relacionou as várias maneiras de resolver o problema, ele entrelaçou três domínios da matemática, elevando aos poucos o nível de exigência cognitiva.	Entrelaçamento e Níveis
foram elaboradas seis questões que de forma geral, exploram pontos importantes do problema.	Ao utilizar como ponto de partida as questões mencionadas, o professor pratica o Princípio da Orientação.	Orientação
Discussão, no começo da trajetória, entre o professor e os alunos, para esclarecerem as condições do problema e o que responde a pergunta do problemas.	O professor faz perguntas para conduzir as ideias que os alunos têm a partir do enunciado do problema.	Interatividade e Orientação
[...] me digam qual foi o procedimento que vocês utilizaram e quais foram as respostas que cada um obteve [...]	Quando o professor pede para os alunos falarem suas estratégias e as justificarem.	Interatividade

Fonte: o próprio autor.

A Tarefa 1 apresenta, por meio de seu problema, uma situação muito comum para a maioria das pessoas; vivemos atualmente imersos em uma rotina tecnológica, a maioria de nós já viveu uma situação parecida como a descrita no problema, as discussões sobre tais situações geralmente são estendidas e levadas para fora do ambiente escolar, assim, o problema proposto pela Tarefa 1, além de se enquadrar no *princípio da realidade*, promove, por meio da matemática, as interações sociais, conforme sugere o *princípio da atividade*.

Outro ponto que merece destaque, pois deixa claro o quanto é importante equilibrar a participação do professor, é o diálogo presente na primeira TEA. A conversa iniciada pelo professor, rapidamente evolui para uma discussão, envolvendo toda a sala, gerando assim as importantes interações destacadas pelo *princípio da interatividade*.

A seguir encontram-se alguns trechos que retiramos da segunda tarefa e que ilustram os Princípios da RME:

Quadro 23 – Princípios da RME evidenciados em trechos da trajetória (T2)

Trecho	Justificativa	Princípio
Problema do Pastor Havia um pastor que não sabia contar até 10, e tinha a seu cargo um rebanho numeroso. Para saber se não lhe faltava nenhuma ovelha, inventou um sistema que punha em prática todos os dias ao cair da tarde. Agrupava-as de duas em duas, de três em três, de quatro em quatro, de cinco em cinco, e de seis em seis. Em todos os casos lhe sobrava uma ovelha. Então verificou que agrupando-as de sete em sete, todos os grupos teriam o mesmo número de ovelhas. De quantas ovelhas era o seu rebanho? Postagem das Fotos Mariana comprou um cartão de memória que lhe permite guardar até 500 fotos, nele serão salvas apenas as fotos que serão postadas	A adaptação do contexto do problema do pastor para um, no qual o aluno possui maior afinidade, é uma prática do Princípio da Realidade.	Realidade

<table>
<tr>
<td>em uma rede social. A intenção é distribui-las em álbuns, todos com o mesmo número de fotos e criados exclusivamente para as fotos que serão salvas no cartão. A jovem percebeu que ao colocar 2, 3, 4, 5 ou 6 fotos em cada álbum, sobrará sempre uma foto no cartão, quando coloca 7 fotos em cada álbum ela consegue distribui-las sem que sobre fotos. Quantas fotos serão postadas?</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>[...] Agora tentem listar todas as informações que encontrarem no texto.[...]</td>
<td>O professor, ao pedir que construam tal lista, atua como guia, mostrando uma boa maneira de iniciar a resolução.</td>
<td>Orientação</td>
</tr>
<tr>
<td>[...] Professor: Muito bem. Para diminuir as possibilidades podemos levar em consideração que estamos falando de números múltiplos de 4, de 6, de 10 (terminam em 0) cujas as somas de seus algarismos são divisíveis por 3, ou seja, são números múltiplos de 60 (mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5 e 6). [...]
[...] Seja n o número de fotos contidas no cartão de memória. Podemos afirmar que para todo $k_i \in \mathbb{N}$, com $i = 1, 2, ..., 5$:
$$m = n - 1 = 2k_1 = 3k_2 = 4k_3 = 5k_4 = 6k_5$$
<table>
<tr><th>m</th><th>Critério de divisibilidade</th></tr>
<tr><td>$2k_1$</td><td>*m* é par</td></tr>
<tr><td>$3k_2$</td><td>a soma dos algarismos de *m* é divisível por 3</td></tr>
<tr><td>$4k_3$</td><td>os dois últimos algarismos de *m* formam um número divisível por 4</td></tr>
<tr><td>$5k_4$</td><td>o último algarismo de *m* é o 0 ou o 5</td></tr>
<tr><td>$6k_5$</td><td>*m* é divisível por 2 e por 3</td></tr>
</table>
[...]</td>
<td>Ao lado estão dois exemplos da elevação gradual do nível de exploração dos conteúdos matemáticos. Isso ocorre durante toda a trajetória, mas limita-se aos conteúdos curriculares da Educação Básica.
Em uma outra ocasião, uma nova TEA poderia ser elaborada de maneira que a elevação gradual do nível de exploração alcance conteúdos mais complexos, como</td>
<td>Níveis e Atividade</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>congruência entre números.</td><td></td></tr>
<tr><td>[...] Seja n o número de fotos contidas no cartão de memória. Podemos afirmar que para todo $k_i \in \mathbb{N}$, com $i = 1, 2, \dots, 5$:
$\boldsymbol{m = n - 1 = 2k_1 = 3k_2 = 4k_3 = 5k_4 = 6k_5}$
[...]
<table>
<tr><th>m</th><th>Critério de divisibilidade</th></tr>
<tr><td>$2k_1$</td><td>m é par</td></tr>
<tr><td>$3k_2$</td><td>a soma dos algarismos de m é divisível por 3</td></tr>
<tr><td>$4k_3$</td><td>os dois últimos algarismos de m formam um número divisível por 4</td></tr>
<tr><td>$5k_4$</td><td>o último algarismo de m é o 0 ou o 5</td></tr>
<tr><td>$6k_5$</td><td>m é divisível por 2 e por 3</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>Possibilidades de m</th><th>Possibilidades de n</th><th>n é divisível por 7?</th></tr>
<tr><td>60</td><td>61</td><td>não</td></tr>
<tr><td>120</td><td>121</td><td>não</td></tr>
<tr><td>180</td><td>181</td><td>não</td></tr>
<tr><td>240</td><td>241</td><td>não</td></tr>
<tr><td>300</td><td>301</td><td>sim</td></tr>
<tr><td>360</td><td>361</td><td>não</td></tr>
<tr><td>420</td><td>421</td><td>não</td></tr>
<tr><td>480</td><td>481</td><td>não</td></tr>
</table>
</td><td>A organização das resoluções que, inicialmente, foram desenvolvidas por métodos numéricos, evolui durante o diálogo e, gradativamente, passa a utilizar a simbologia algébrica, disposta em quadros, para estruturar seus argumentos e justificar suas conclusões.</td><td>Entrelaçamento e Níveis</td></tr>
<tr><td>Questionário auxiliar para elaboração da TEA.
Diálogo entre professor e alunos.</td><td>A entrevista com os voluntários, assim como o início e a manutenção do diálogo, possuem as mesmas intenções e descrições já detalhadas no quadro da TEA anterior.</td><td>Atividade, Interatividade e Orientação.</td></tr>
</table>

Fonte: o próprio autor.

Considerando a Tarefa 2, a exigência de uma interpretação cuidadosa, a possibilidade de explorar diferentes estratégias de resolução, e os conceitos matemáticos interligados, são características presentes no problema do pastor, o que favorece o desenvolvimento de uma TEA. Por outro lado, o problema apresenta um contexto, que apesar de ser possível, é difícil acreditar que nos dias de hoje, com tantas alternativas disponíveis, alguém agiria da mesma maneira que o pastor; além disso, é incompatível, salvaguardada as exceções, com os interesses dos alunos atuais.

A adaptação feita no problema do pastor aproxima seu contexto ao abordado pela tarefa 1, mantendo assim suas potencialidades pertinentes ao ensino e a aprendizagem da matemática e alinhando-o aos pressupostos do *princípio da realidade*.

O problema da postagem de fotos pode gerar trajetórias focadas apenas em resoluções por cálculos mentais, ou trajetórias que sugerem resoluções que evoluem até a discussão de congruência numérica. É possível que esse mesmo problema seja trabalhado em vários momentos da vida escolar do aluno, desde que as trajetórias sejam adequadas ao nível em que se deseja trabalhar: essa ideia é prevista pelo *princípio de níveis* da RME.

Apesar da tarefa 2 não ser uma sequência da tarefa 1, decidimos manter o mesmo tema nos dois problemas, nossa intenção foi mostrar a possibilidade de adaptação visando um aspecto mais íntimo do público a qual a trajetória destina-se.

Pode se notar que o problema da tarefa 2 permite trabalhar a fundo os critérios de divisibilidade, múltiplos e divisores, principalmente utilizando aritmética mental. Sem falar da resolução por congruência, assunto mais interessante em cursos de nível superior.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver tarefas matemáticas que podem despertar o interesse dos alunos e, ao mesmo tempo, serem eficientes para o trabalho em sala de aula e relevantes ao currículo escolar, nos motivou a elaborar o trabalho com base nos fundamentos da RME; exploramos as ideias de seus princípios, identificando-os nas propostas sugeridas e buscamos explicitar os aspectos que dão credibilidade a tal estratégia.

Optamos pela elaboração de duas TEA sem focar em conteúdos matemáticos específicos e sim utilizar a Resolução de Problemas para desenvolvê-las, sempre respeitando os fundamentos da Educação Matemática Realística para posteriormente realizar uma análise qualitativa, na qual o processo é o principal elemento de interesse, destacando os princípios da RME.

Neste contexto elaboramos a seguinte questão: Como os princípios da RME podem orientar um professor no desenvolvimento de tarefas matemáticas? Para alicerçar nossa pesquisa e responder a questão elaborada, foi feito um estudo teórico a respeito da RME, das TEA e do ensino da Matemática. Da mesma forma tivemos interesse em priorizar os objetivos destacados pela BNCC quanto ao ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Com esse conhecimento elaboramos propostas que sugerem caminhar pela trilha de "novas" abordagens, que consideramos suficientes e possíveis para lidar com o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Acreditamos que Trajetórias de Ensino e Aprendizagem são excelentes meios de pôr em prática as ideias da RME. Em seguida estão alguns exemplos dos princípios da RME presentes nas TEA que elaboramos e apresentamos nesse trabalho:

- esquema que representa a falha na tentativa de transferência de arquivos (tarefa 1): *princípio da realidade;*
- questões elaboradas para entrevistar os voluntários (tarefas 1 e 2): *princípio da atividade;*
- o avanço na conversa entre professor e alunos, para encontrar o número de fotos postadas; parte das tentativas aleatórias e chega a discussão dos critérios de divisibilidade e múltiplos e divisores (tarefa 2): *princípio de*

níveis;

- as resoluções da tarefa 1 envolvendo representações geométricas, frações e álgebra: *princípio do entrelaçamento;*
- os diálogos presentes nas tarefas 1 e 2: *princípio da orientação.*

O estudo teórico que fundamentou esse trabalho, a elaboração das TEA e as reflexões realizadas no desenvolvimento dessa pesquisa possibilitou ao autor considerar que uma TEA não é um manual pronto e acabado, ela possibilita fazer previsões baseadas nas experiências do próprio professor. Devemos sempre voltar e analisar os pontos positivos afim de aprimorá-los e procurar as falhas que impediram o sucesso de outros pontos com o intuito de modificá-los ou até mesmo abandoná-los.

Acreditamos que os princípios da RME, promovidos pela reinvenção guiada e pela matematização, podem favorecer o aluno a “reinventar” a matemática adotando atitudes ativas durante as aulas. O professor assume um papel importantíssimo, ele deve guiar o aluno durante todo o processo de reinvenção, e assim, contribuir para que o aluno, passo a passo, construa uma sólida concepção sobre os aspectos matemáticos almejados.

A sensação de otimismo dos hipotéticos alunos e do professor, atores nas trajetórias, a crença de que a utilização da RME e das Trajetórias de Ensino e Aprendizagem, para buscar justificativas e alternativas capazes de minimizar os insucessos obtidos pelas execuções de planos de aulas aparentemente eficientes, foram decisivas na escolha dos elementos e dos processos que caracterizam a identidade desse estudo.

Comecei este trabalho conhecendo superficialmente os fundamentos da RME e as TEA. Após muito estudo com incontáveis leituras de teses, dissertações, artigos, livros, entre outros; horas de orientação e diversos momentos, sozinho ou na companhia de amigos simpatizantes do assunto, de reflexão; acredito que meu conhecimento, no que se refere as abordagens que estudamos, avançou. Mesmo com esse avanço, sinto que há muito que aprender e amadurecer, esses foram os primeiros passos, há muitos pela frente. Porém, a confiança de que a RME, praticada por meio das TEA, pode ser uma alternativa para superar obstáculos que enfrentamos no ensino da matemática, está presente e fortalecida em mim.

REFERÊNCIAS

ARMANTO, D. ***Teaching multiplication and division realistically in Indonesian primary schools:*** *a prototype of local instructional theory.* 2002. 310 f. Thesis – University of Twente, Enschede, 2002.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular: proposta preliminar**. 2. ed. Brasília, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 16 fev. 2017.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FERREIRA, P. E. A; BURIASCO, R. L. C. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino aprendizagem. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

FREUDENTHAL, H. ***Revisiting Mathematics Education****.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar.** São Paulo: Atual Ed., 1977

OLIVEIRA, J. C. R. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da resolução de problemas**. 2015. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

OLIVEIRA, R. C. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA**: Algumas aproximações. 2015. 148 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 123 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

PRESTES, D. B. **Prova em fases de matemática:** uma experiência no 5º ano do ensino fundamental. 2015. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2016.

SANTOS, E. R. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 156 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SILVA, G. S. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 97 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

TREFFERS, A. ***Three Dimensions****: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.* 1987.

UNESCO. **Perspectivas**: revista trimestral de educação, Lisboa, v. IX, n. 3. 1979.

UTRECHT UNIVERSITY. ***Freudenthal Institute****.* Disponível em: https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute/about-us/background. Acesso em: 04 mar. 2019.

VAN DE WALLE, J. A.V. de. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. *A representional model in a long term learning process – the didactical use of models in Realistic Mathematics Education*. In: ***AERA CONFERENCE***, San Francisco, 1995.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. *Realistic Mathematics Education as work in progress.* **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. *Reform Under Attack-Forty Years of Working on Better Mathematics Education Thrown on the Scrapheap? No Way!*. In: ***Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia***, Fremantle, 2010.