PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Pablo Barbosa Fonseca

Fractais e o Modelo de van-Hiele: uma proposta de união para o ensino da Matemática na Educação Básica.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Co-orientadora: Profa. Luana Sá de Azevedo de Araujo

Rio de Janeiro
Março de 2020

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Pablo Barbosa Fonseca

Fractais e o Modelo de van-Hiele: uma proposta de união para o ensino da Matemática na Educação Básica.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Profa. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Luana Sá de Azevedo de Araujo
Co-Orientadora
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Daniel Felipe Neves Martins
Colégio Pedro II

Profa. Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Christine Sertã Costa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 3 de março de 2020

Pablo Barbosa Fonseca

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Castelo Branco (UCB). Possui especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Atualmente trabalha como professor nas redes privada e pública do estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Fonseca, Pablo Barbosa

Fractais e o modelo de van-Hiele : uma proposta de união para o ensino da Matemática na educação básica / Pablo Barbosa Fonseca ; orientadora: Emília Carolina Santana Teixeira Alves ; co-orientadora: Luana Sá de Azevedo de Araujo. – 2020.

113 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Fractais. 3. Geometria plana. 4. van-Hiele. 5. Aprendizagem significativa. 6. Modernidade. I. Alves, Emília Carolina Santana Teixeira. II. Araujo, Luana Sá de Azevedo de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por permitir que este trabalho se concretizasse.

À minha amada família, pois o meu empenho não teria sido igual neste trabalho se não tivesse recebido apoio e compreensão.

À minha mãe, pela educação, carinho e dedicação.

Ao PROFMAT e à PUC-Rio, pela administração do curso, bem como aos professores dos dois anos letivos.

Às minhas orientadoras Emília Alves e Luana Sá pela paciência desde o início até a conclusão deste trabalho. À professora Christine, pela coordenação, cordialidade e palavras de incentivo. Aos membros da banca, pela disponibilidade.

À direção do Colégio Estadual Guadalupe pela confiança e oportunidade ao me permitir aplicar algumas das atividades propostas da minha pesquisa.

Aos meus colegas de turma que semanalmente me incentivavam com as mais variadas manifestações de apoio.

Aos meus amigos Antônio Fábio, Kelisson Lima e Daniel Martins que nos momentos mais difíceis e desesperadores convenciam-me de forma serena e sábia, através de seus conselhos, que eu conseguiria concluir o curso.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Fonseca, Pablo Barbosa; Alves, Emília Carolina Santana Teixeira; De Araujo, Luana Sá de Azevedo. **Fractais e o Modelo de Van-Hiele: uma proposta de união para o ensino da Matemática na Educação Básica**. Rio de Janeiro, 2020. 113 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho disserta sobre a utilização dos fractais no ensino de conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com o objetivo de despertar o interesse e a curiosidade dos educandos através da beleza e do dinamismo que eles oferecem para a construção de conceitos matemáticos tais como: semelhança, perímetro, área, volume, progressão aritmética e geométrica. A dissertação inicia-se com um breve histórico do surgimento dos fractais e um resumo dos níveis do desenvolvimento cognitivo segundo o modelo de van- Hiele. Em seguida, exibe-se uma coletânea de atividades envolvendo fractais com nível de dificuldade crescente que propicia aos estudantes uma aprendizagem significativa e com nuances de modernidade. A partir de suas próprias percepções e da troca de ideias entre si, os alunos formularam técnicas recursivas a ponto de preverem uma próxima iteração da figura e meios para obtenção do perímetro e da área das figuras seguintes. Acreditamos que com essa pesquisa conseguimos não só trabalhar e desenvolver conceitos matemáticos básicos, mas também fomentar o estudo do conceito de infinito, além de diminuirmos a distância entre a Álgebra e a Geometria imposta pela maioria dos atuais livros didáticos em circulação.

Palavras-chave

Fractais; Geometria Plana; van-Hiele; Aprendizagem significativa; Modernidade; Infinito.

Abstract

Fonseca, Pablo Barbosa; Alves, Emília Carolina Santana Teixeira (Advisor); Araujo, Luana Sá de Azevedo (Co-Advisor)**. Fractals and the Van-Hiele Model: a union proposal for the teaching of mathematics in basic education**. Rio de Janeiro, 2020. 113 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation discusses the use of fractals in the teaching of mathematical subjects in the context of elementary, middle and high school, aiming at raising and attracting the interest and curiosity of the students through the beauty and dynamism they offer to the construction of mathematical concepts such as: similarity, perimeter, area, volume, arithmetic and geometric progression. This work begins with a brief history about the emergence of fractals and a summary of levels of cognitive development according to the van-Hiele model. Then, it is shown a collection of activities involving fractals with increasing difficulty levels that provide students with meaningful learning with nuances of modernity. From their own perceptions and the exchange of ideas between them, they formulated recursive techniques to predict a next iteration of the figure and means to obtaining the perimeter and area of the next figures. We believe that with this dissertation we can not only work and develop basic mathematical concepts, but also foster the study of the infinity concept, in addition to reducing the distance between Algebra and Geometry imposed by most current textbooks in use.

Keywords

Fractals; Flat geometry; van-Hiele; Meaningful learning; Modernity; Infinite.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

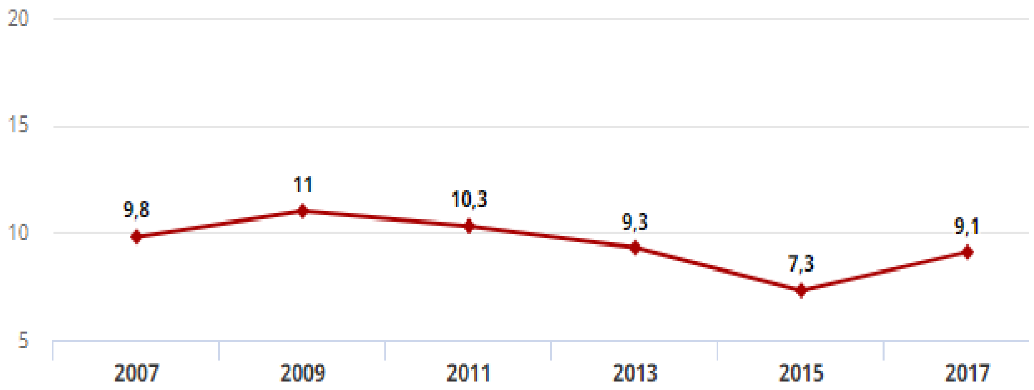
"A orientação inicial que
alguém recebe da educação também
marca a sua conduta ulterior."

Platão

1
Introdução

Diante dos últimos dados estatísticos fornecidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) através do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) faz-se necessária a reflexão da prática docente. O gráfico (figura 1) abaixo revela que aproximadamente 90% dos estudantes que concluem o Ensino Médio não possuem um aprendizado matemático adequado.

Figura 1 - Evolução da porcentagem de alunos no fim do Ensino Médio com aprendizado matemático adequado.



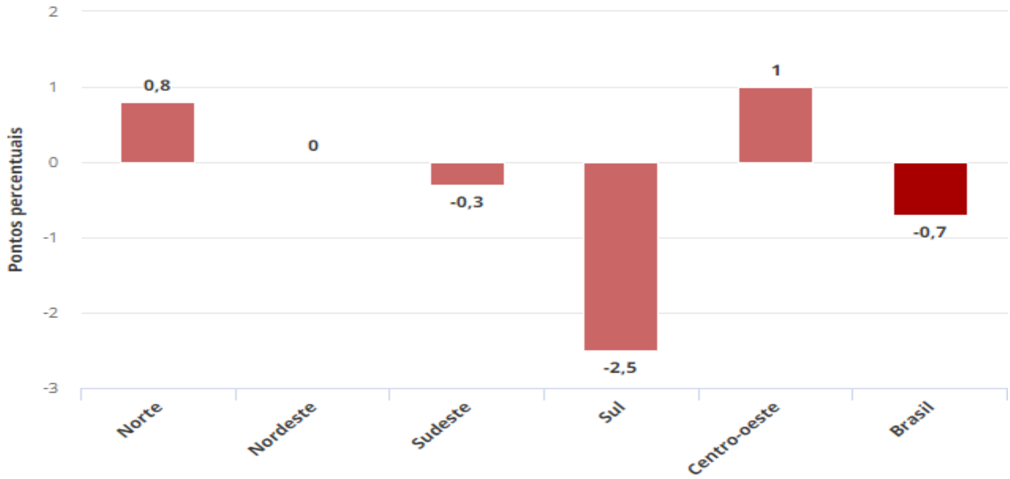
Fonte: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/03/21/cai-aprendizado-de-matematica-no-ultimo-ano-do-ensino-medio-aponta-levantamento.ghtml
Acesso em 10/10/2019.

Tanto o INEP quanto o Saeb estão diretamente ligados ao Ministério da Educação (MEC). A prova do Saeb é aplicada a cada dois anos e participam dessa avaliação todos os alunos de instituições públicas e privadas do nosso país. Os resultados de 2019 ainda não foram divulgados pelo governo.

Entende-se como aprendizado adequado, o mínimo que o estudante deve ter de conhecimento ao concluir determinado segmento de ensino. Os conteúdos abordados pelo Saeb constam em nossos currículos que são montados a partir dos currículos escolares de outros países mais desenvolvidos que servem de modelo para o Brasil.

Neste período de 2007 a 2017 a região Sul do país é a que requer mais atenção conforme o gráfico (figura 2) a seguir revela.

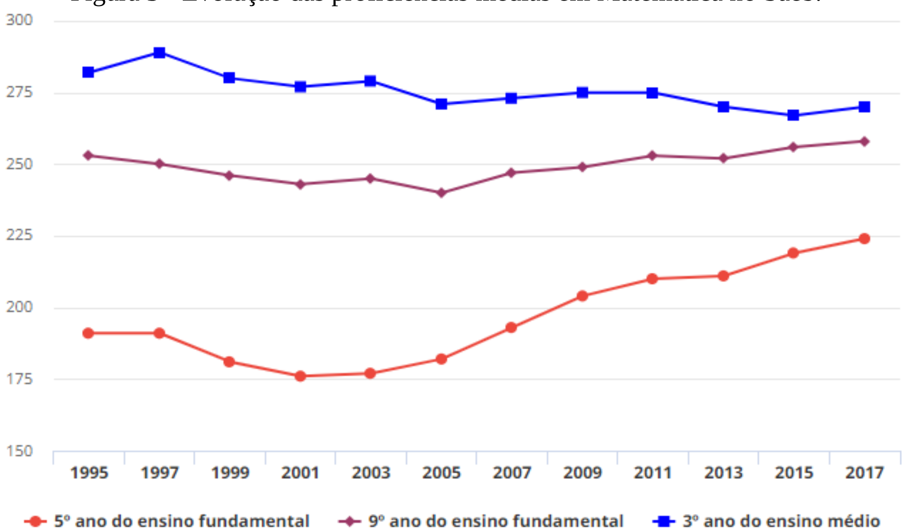
Figura 2 - Evolução, em pontos percentuais, da quantidade de estudantes do 3º ano do Ensino Médio com aprendizado matemático adequado por região.



Fonte: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/03/21/cai-aprendizado-de-matematica-no-ultimo-ano-do-ensino-medio-aponta-levantamento.ghtml
Acesso em 10/10/2019.

É importante observar e avaliar também o Ensino Fundamental, pois não há como melhorar os índices do Ensino Médio sem olhar para trás. O histograma (figura 3) compara as proficiências médias em Matemática aferidas ao final de cada etapa do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de 1995 a 2017.

Figura 3 - Evolução das proficiências médias em Matemática no Saeb.



Fonte: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/03/21/cai-aprendizado-de-matematica-no-ultimo-ano-do-ensino-medio-aponta-levantamento.ghtml
Acesso em 10/10/2019.

Enquanto a proficiência média em Matemática do Ensino Médio encontra-se em queda e nos anos finais do Ensino Fundamental apresenta-se praticamente estagnada há quase 25 anos, os anos iniciais do Ensino Fundamental vivem um momento totalmente diferente a partir da virada do século.

Por que neste segmento há uma grande evolução em comparação aos outros segmentos?

Alguns fatores podem ter sido preponderantes como: melhoria da qualificação dos profissionais que atuam neste segmento, mais tempo para trabalhar conteúdos matemáticos de forma lúdica, os conceitos matemáticos se assemelham mais ao cotidiano e vivência dos aprendizes.

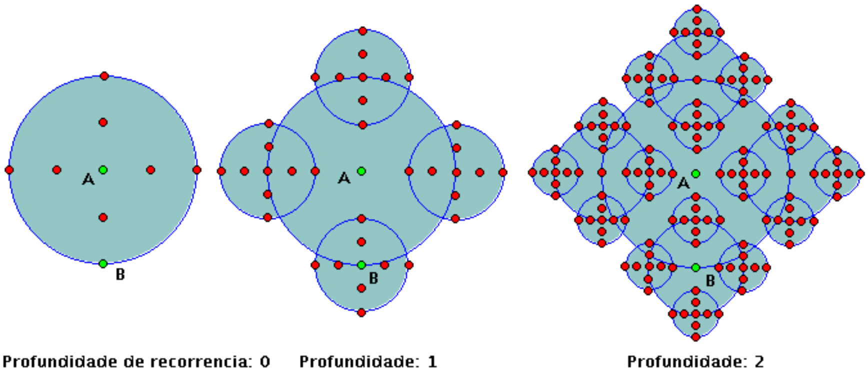
Enfim, por que não trazer estas práticas para o momento que a Matemática começa a se tornar mais abstrata? Por que não ensinar nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio com ferramentas mais atrativas? Por que não analisar sequências numéricas e desenvolver o raciocínio lógico dedutivo a partir de observações interativas?

Com base nestes questionamentos que nasce a ideia de ensinar Matemática com algum elemento atrativo que desperte a curiosidade dos educandos. Os fractais são instigantes e despertam o caráter investigativo dos discentes quando usados sabiamente em atividades previamente planejadas pelo docente.

A palavra fractal derivada do latim (fractus, fração, quebrado) foi criada por Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia, 20 de novembro de 1924 - Cambrige, 14 de outubro de 2010), matemático de origem polonesa, com nacionalidade francesa e americana, que contribuiu muito para a Geometria Fractal em 1975.

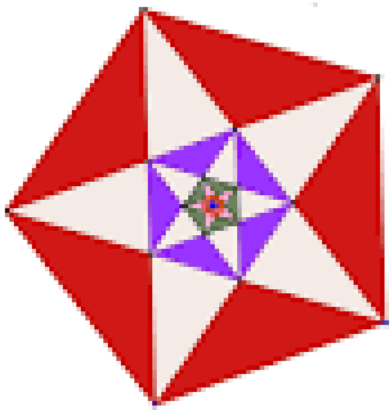
Um fractal deve apresentar uma característica de auto-semelhança, o que significa que se fosse possível colocar uma lente de aumento em determinado pedaço do mesmo a imagem resultante seria idêntica à original. As figuras 4 e 5 exemplificam este objeto.

Figura 4 - Três etapas da construção do fractal tetra-círculo.



Fonte: http://www.matematica.br/igeom/manual/pt/ex_fractais1.html?lang=pt. Acesso em 14/10/2019.

Figura 5 - Fractal pentagrama.



Fonte: https://novaescola.org.br/plano-de-aula/941/semelhancas-e-fractais. Acesso em 14/10/2019.

Os processos iterativos dos fractais repetem-se infinitamente. Na figura 4, por exemplo, é possível atingir a profundidade *n*, com $n \rightarrow \infty$.

Os fractais podem se tornar um objeto de ensino e de aprendizagem da Matemática na educação básica, com possibilidades e potencialidades, além da visualização de um estilo diferente de formas geométricas. A Geometria Fractal pode ser incorporada aos conteúdos já existentes da matemática escolar, tornando o trabalho didático mais interessante e moderno. A partir de observações e de noções desenvolvidas sobre as formas fractais da natureza os estudantes vivenciam e experimentam uma matemática mais humanista.

> "*Na filosofia humanista da Matemática, os objetos e conceitos matemáticos são percebidos de forma expandida pelas nossas práticas, eles são variáveis no tempo, na medida em que as práticas humanas que os evocam e os significam mudam ao longo do tempo. Os objetos e conceitos matemáticos são construções humanas realizadas a partir da necessidade de se resolver problemas, das dúvidas, angústias e desejos sentidos e vividos ao longo da história." (MATHIAS, 2019, https://www.matematicahumanista.com.br/)*

Atividades envolvendo fractais permitem ao estudante experimentar o lugar de protagonista do processo de ensino e de aprendizagem cabendo ao professor o papel de mediador na construção do conhecimento. A partir de suas próprias percepções, os discentes formularão técnicas recursivas a ponto de prever uma próxima iteração da figura, fórmulas para obtenção do perímetro e da área das figuras seguintes, além de trabalhar de forma empírica com o conceito de infinito. Com isso os discentes sentem-se motivados a descobrir múltiplas estratégias para a resolução de problemas tornando o ensino da Matemática mais dinâmico e interessante.

No primeiro momento desenvolve-se a percepção visual dos aprendizes a partir da curiosidade deles; e, logo em seguida, o estabelecimento de hipóteses através de conjecturas a respeito das medidas de perímetro e de área dos fractais. O dinamismo dos fractais também pode ser facilmente explorado e desenvolvido com softwares de Geometria Dinâmica, como o Geogebra[1], por exemplo.

> "*(...) As tecnologias ampliam as possibilidades de se ensinar e aprender, oferecendo novas e variadas formas para que esses processos ocorram, de forma que as ideias para trabalhos pedagógicos que antes eram inviáveis (por limitações de custo, tempo, recursos físicos, etc.) tornam-se factíveis com o uso de tecnologias." (MALTEMPI, 2008, p. 60)*

A utilização dos fractais na educação básica é um diferencial para o docente conduzir sua turma. Contudo uma boa ferramenta só é eficiente quando bem utilizada. Por isso as atividades que são propostas no Capítulo 4 utilizam fractais como elemento atrativo, mas seguem rigorosamente os níveis de desenvolvimento cognitivo do Modelo de van-Hiele.

O casal holandês van-Hiele, na década de 50 do século passado, na Universidade de Utrecht, deu início ao que chamamos hoje de níveis de desenvolvimento cognitivo do modelo van-Hiele nas suas dissertações de doutorado. A teoria se encaixa dentro da didática Matemática e, de forma mais específica, na didática da Geometria. A ideia central do modelo a qual ele se sustenta é que a aprendizagem da Geometria se dá por níveis graduais de pensamento que independem da idade ou maturidade dos aprendizes.

---

[1] O termo Geogebra vem da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra. O Geogebra é um aplicativo de matemática dinâmica que permite enxergar objetos matemáticos tanto geométrica quanto algebricamente. Sua distribuição é livre e disponível em diversas plataformas.

O objetivo geral deste trabalho é despertar o interesse e a curiosidade do educando através da beleza e do dinamismo dos fractais para a construção de conceitos matemáticos tais como: algoritmos, sequências, semelhança, perímetro, área, volume entre outros. Mais especificamente, tem-se como objetivos:

- Contextualizar Geometria Fractal;
- Usar os níveis de desenvolvimento cognitivo do modelo de van-Hiele;
- Aumentar o interesse pelo estudo da Matemática;
- Sugerir atividades com fractais a professores da educação básica;
- Comunicar a experiência de uma atividade aplicada no Ensino Médio de um colégio estadual do Rio de Janeiro.

A presente pesquisa não tem como intenção definir a Geometria Fractal como um subconjunto do Espaço Euclidiano para o qual a dimensão fractal excede a dimensão topológica e nem sequer explorar a fundo o estudo da dimensão fractal. Os fractais serão apenas uma ferramenta para elaboração de atividades que propiciem o estudo e a construção de conceitos matemáticos simples presentes no currículo matemático da educação básica.

Este trabalho foi organizado em nove capítulos: o primeiro apresenta as motivações e os objetivos da pesquisa; o segundo traz a contextualização da Geometria Fractal, a biografia do van-Hiele e seu principal trabalho de pesquisa no ensino da Matemática; o terceiro elenca alguns conceitos matemáticos que podem ser ensinados com a utilização dos fractais; o quarto sugere algumas atividades para educação básica envolvendo fractais respeitando os níveis de compreensão cognitiva do modelo de van-Hiele; o quinto conta a experiência obtida pelo autor na execução de algumas dessas atividades em turmas de Ensino Médio; o sexto versa sobre a conclusão da dissertação; o sétimo aponta as fontes bibliográficas que serviram de apoio ao texto; o oitavo ilustra como anexo o documento que autoriza a pesquisa acadêmico-científica; e o nono (apêndices) traz sugestões de respostas das atividades propostas no Capítulo 4.

Enfim, acreditamos que a união dos fractais com os níveis de desenvolvimento cognitivo do modelo van-Hiele poderão contribuir de forma efetiva para a melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

2

Fundamentação teórica

Este capítulo traz a contextualização histórica da Geometria Fractal com uma breve explanação dos fractais mais clássicos e conhecidos bem como a teoria de aprendizagem matemática do Modelo de van-Hiele.

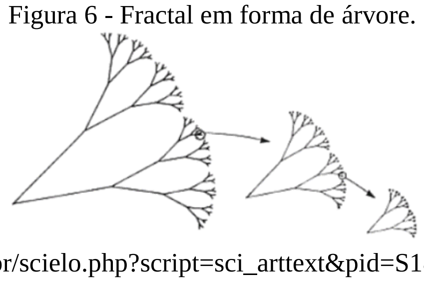
2.1 Geometria fractal

Benoît B. Mandelbrot foi um dos principais colaboradores para o estudo dos fractais na década de 70 do século passado, tendo mesmo cunhado a palavra fractal para se referir a objetos geométricos que não perdiam sua estrutura em quaisquer escalas que fossem observados. Ele constatou que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza em estruturas vegetais ou animais (cristais, nuvens, sistemas radiculares, etc.).

Os objetos geométricos fractais podem, infinitamente, ser divididos em partes, sendo que cada uma delas será semelhante à original. Normalmente são autossemelhantes e não dependem de escalas. Estes fractais podem ser gerados por um padrão repetido. Neste caso, trata-se de subconjuntos que são gerados por transformações geométricas simples que acontecem do objeto nele mesmo, ou seja, o objeto é formado por ele mesmo em formas reduzidas.

A figura 6 é um exemplo de uma estrutura fractal construída interativamente retratando a característica da autossemelhança.

Figura 6 - Fractal em forma de árvore.



Fonte: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005.
Acesso em 14/10/2019.

A construção dessa estrutura inicia-se com uma fita de um dado comprimento e certa largura. A metade superior é substituída por dois “galhos” com metade tanto do comprimento como da largura, com os “galhos” formando sempre o mesmo ângulo. Esse processo contínuo origina um fractal na forma de uma árvore. Para infinitas iterações, verifica-se a complexidade infinita da estrutura.

Os fractais possuem autossimilaridade, ou seja, uma de suas partes é idêntica ao todo e são facilmente encontrados na natureza como, por exemplo, nas plantas (figura 7), nos animais (figura 8) e no corpo humano (figura 9).

Figura 7 - Romanesco[2].

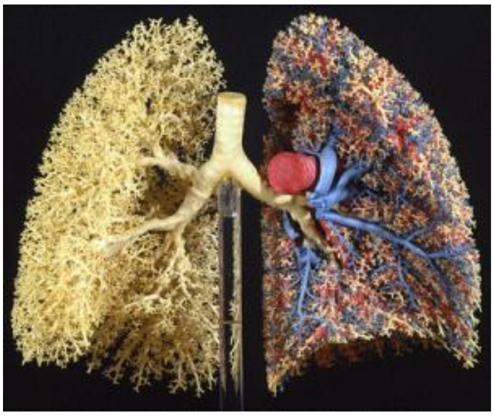
Fonte: http://www.caliandradocerrado.com.br/2014/10/fractais-na-natureza-tudo-e-matematica.html. Acesso em 14/10/2019.

Figura 8 - Penas de um pavão.

Fonte: https://pxhere.com/pt/photo/1218637. Acesso em 14/10/2019.

[2] Romanesco é uma variedade da espécie a que pertencem também, por exemplo, a couve-flor e o brócolis.

Figura 9 - Pulmões.



Fonte: https://sinfoniaesol.wordpress.com/2012/07/15/21905/. Acesso em 14/10/2019.

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível. Embora o conceito fractal seja complexo para ser abordado na educação básica, basta considerarmos sua autossimilaridade para desenvolvermos diversas atividades lúdicas com material concreto e virtual a fim de modernizar a aprendizagem de conceitos matemáticos básicos.

A seguir destacaremos alguns dos fractais geométricos mais conhecidos historicamente.

2.1.1 Conjunto de Mandelbrot

A palavra fractal foi inicialmente aplicada por Benoît B. Mandelbrot em 1975, para se referir a estruturas geométricos que não perdiam sua estrutura em quaisquer escalas que fossem observados.

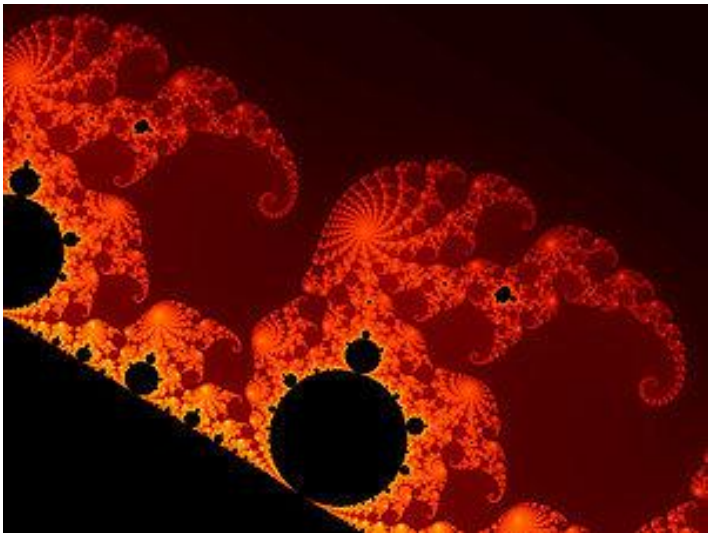
Figura 10 - Benoît B. Mandelbrot.

Fonte: https://www.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/fractal/. Acesso em 20/10/2019.

Ele constatou que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza em estruturas vegetais ou animais (cristais, nuvens, sistemas radiculares, etc.), e que era possível construir tais estruturas artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte.

O Conjunto de Mandelbrot (figura 11) é um famoso exemplo de fractal que pode ser feito com a utilização de softwares computacionais gerando imagens belíssimas.

Figura 11 - Conjunto de Mandelbrot



Fonte: http://fractaisecategorias.blogspot.com/2013/03/sua-origem.html. Acesso em 20/10/2019.

O Conjunto de Mandelbrot é um fractal definido como o conjunto de pontos *c* no plano Argand-Gauss para o qual a sequência definida recursivamente:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

não tende ao infinito.

Para cada ponto *c* do plano complexo, a sequência se expande como:

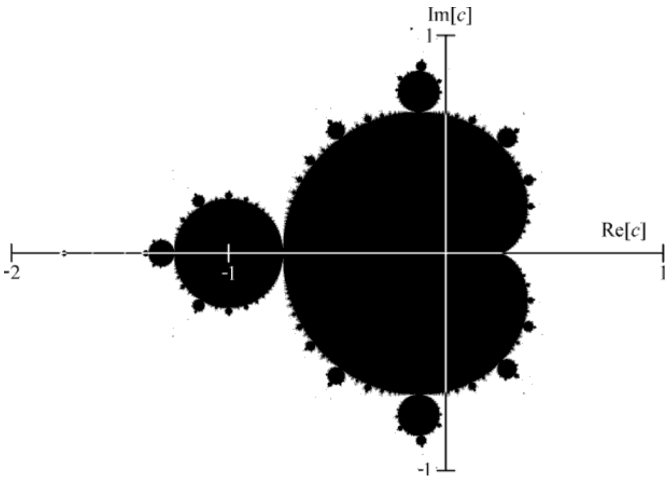
$$c = x + iy$$
$$z_0 = 0$$
$$z_1 = z_0^2 + c \Rightarrow z_1 = x + iy.$$
$$z_2 = z_1^2 + c \Rightarrow z_2 = (x + iy)^2 + x + iy \Rightarrow z_2 = x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i.$$
$$z_3 = z_2^2 + c \Rightarrow \ldots.$$

E assim por diante.

Reescrevendo a sequência em termos das partes real e imaginária (coordenadas x e y do plano complexo), a cada iteração *n*, substituindo z_n pelo ponto $x_n + y_n i$ e *c* pelo ponto *a* + *bi*, temos:

$$x_{n+1} = x_n{}^2 - y_n{}^2 + a \text{ e } y_{n+1} = 2x_n y_n + b.$$

Figura 12 - Conjunto dos pontos de Mandelbrot no plano complexo.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot. Acesso em 20/10/2019.

Mandelbrot foi um dos principais colaboradores para o estudo dos fractais nos anos 70, tendo mesmo cunhado a palavra fractal. Mas antes dele muitos outros cientistas, como por exemplo, Karl Weierstrass[3] já haviam se dedicado a problemas relacionados com os fractais.

[3] Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (Ostenfelde, 31 de outubro de 1815 - Berlim, 19 de fevereiro de 1897) foi um matemático alemão que fez suas primeiras descobertas aos quarenta anos de idade e foi reconhecido como o maior analista do mundo.

2.1.2 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (Varsóvia, 14 de março de 1882 - Varsóvia, 21 de outubro de 1969), matemático polonês, foi o primeiro cientista a descrever o fractal em forma de triângulo em 1915.

Figura 13 - Waclaw Sierpinski.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Wac%C5%82aw_Sierpi%C5%84ski. Acesso em 25/10/2019.

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da Geometria Fractal por apresentar algumas propriedades, tais como:

- Possuir tantos pontos como o do conjunto dos números reais;
- Ter área igual a zero;
- Ser auto-semelhante (uma de suas partes é idêntica ao todo);
- Não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

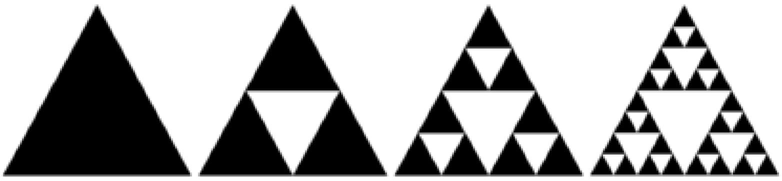
Uma das maneiras de se construir um triângulo de Sierpinski (figura 14) é através do seguinte algoritmo:

1º passo → começa-se com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, mas qualquer triângulo pode ser usado;

2º passo → marca-se os pontos médios dos lados deste triângulo. Esses pontos serão os vértices de um novo triângulo, de intervalo aberto, que deve ser retirado;

3º passo → repete-se o segundo passo nos triângulos restantes infinitas vezes.

Figura 14 - Etapas iniciais da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski. Acesso em 25/10/2019.

A cada iteração a quantidade de triângulos equiláteros pretos bem como a medida dos seus lados, perímetros e áreas podem ser obtidos recursivamente conforme se demonstra na tabela 1.

Tabela 1 - Fórmulas recursivas do Triângulo Equilátero de Sierpinski.

	Iterações	**Quantidade de triângulos pretos**	**Medida do lado do triângulo preto**	**Perímetro de cada triângulo preto**	**Área da figura total em preto**
	0	$3^0 = 1$	L	$3L$	A
	1	$3^1 = 3$	$\frac{L}{2}$	$3 \cdot \frac{L}{2}$	$A - \frac{A}{4}$
	2	$3^2 = 9$	$\frac{L}{2^2}$	$3 \cdot \frac{L}{2^2}$	$A - \frac{A}{4} - 3\frac{A}{4^2}$
	3	$3^3 = 27$	$\frac{L}{2^3}$	$3 \cdot \frac{L}{2^3}$	$A - \frac{A}{4} - 3\frac{A}{4^2} - 3^2\frac{A}{4^3}$
	4	$3^4 = 81$	$\frac{L}{2^4}$	$3 \cdot \frac{L}{2^4}$	$A - \frac{A}{4} - 3\frac{A}{4^2} - 3^2\frac{A}{4^3} - 3^3\frac{A}{4^4}$
	n	3^n	$\frac{L}{2^n}$	$3 \cdot \frac{L}{2^n}$	$A - \frac{A}{4} - 3\frac{A}{4^2} - \ldots - 3^n\frac{A}{4^{n+1}}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.3 Curva de Koch

Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 25 de janeiro de 1870 - 11 de março de 1924), deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o "floco de neve Koch", que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito.

Figura 15 - Niels Fabian Helge von Koch.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch. Acesso em 25/10/2019.

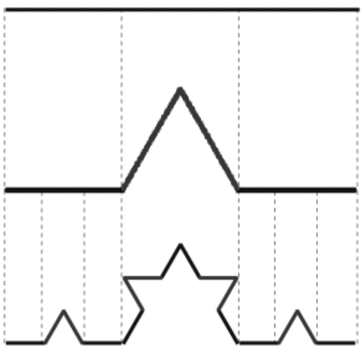
A curva de Koch (figura 16), apresentada em 1904, foi construída a partir de um segmento de reta seguindo os seguintes passos:

1º passo → divide-se esse segmento em três partes iguais;

2º passo → substitui-se o segmento médio por dois segmentos congruentes de modo que o segmento médio e os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero. Obteve-se uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimento igual;

3º passo → posteriormente, repete-se os passos 1 e 2 para cada um dos segmentos obtidos.

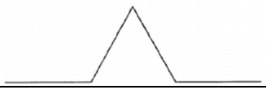
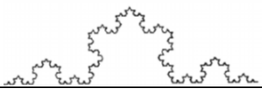
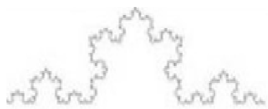
Figura 16 - Etapas iniciais da construção da curva de Koch.



Fonte: http://larryriddle.agnesscott.org/ifs/kcurve/kcurve.htm. Acesso em 25/10/2019.

A curva de Koch tem um comprimento infinito conforme mostra a tabela 2.

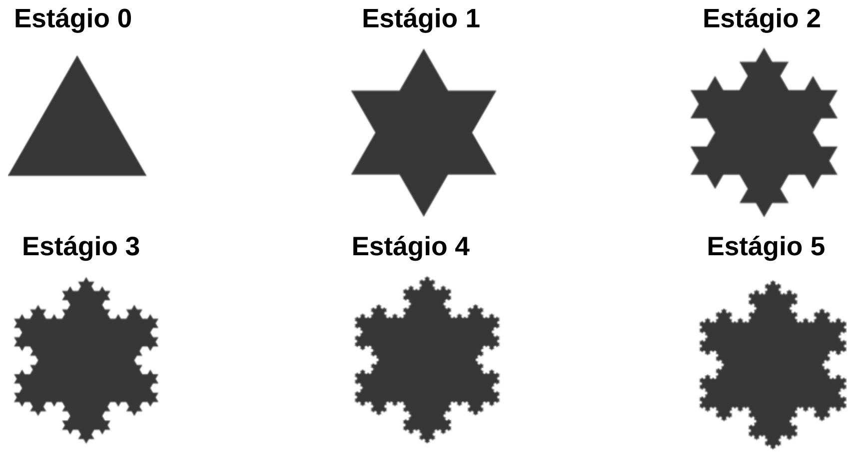
Tabela 2 - Fórmulas recursivas da curva de Koch.

	Nível	**Quantidade de segmentos**	**Comprimento de cada segmento**	**Comprimento total da curva**
	0	4^0	x	x
	1	4^1	$\frac{x}{3}$	$4 \cdot \frac{x}{3}$
	2	4^2	$\frac{x}{3^2}$	$4^2 \cdot \frac{x}{3^2}$
	3	4^3	$\frac{x}{3^3}$	$4^3 \cdot \frac{x}{3^3}$
	4	4^4	$\frac{x}{3^4}$	$4^4 \cdot \frac{x}{3^4}$
	...	...	...	...
	n	4^n	$\frac{x}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. O gráfico desta função é chamado atualmente de fractal. Helge von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como floco de neve de Koch (figura 17), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito.

Figura 17 - Floco de neve de Koch.



Fonte: https://pixabay.com/pt/vectors/koch-floco-de-neve-matem%C3%A1tica-3271115/. Acesso em 25/10/2019.

2.1.4 Curva de Peano

Giuseppe Peano (Spinetta, 27 de agosto de 1858 - Turim, 20 de abril de 1932) foi um matemático italiano que descreveu curvas que preenchiam completamente um espaço bidimensional.

Figura 18 - Giuseppe Peano.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano. Acesso em 15/11/2019.

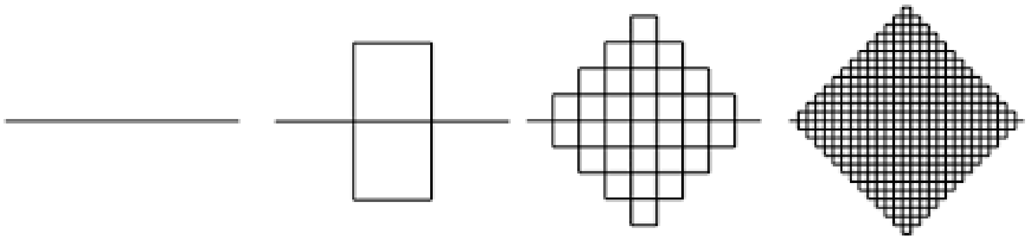
A curva de Peano surgiu em 1890 e foi construída por um processo análogo ao da curva de Koch, ou seja, por iteração gráfica.

O processo iterativo inicia-se com um segmento de reta seguindo os passos descritos a seguir:

1º passo → divide-se o segmento inicial em três partes congruentes e constrói-se dois quadrados idênticos na parte central, seguindo a escala 1/3;

2º passo → repete-se o processo anterior para cada segmento infinitamente.

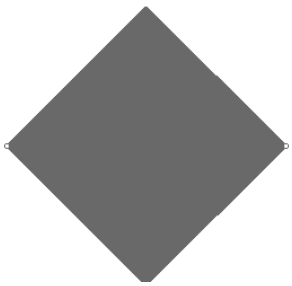
Figura 19 - Representação da curva de Peano.



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=43101. Acesso em 15/11/2019.

Prevê-se, devido à dimensão, que no limite se obterá um quadrado (figura 20).

Figura 20 - Representação do limite da curva de Peano.



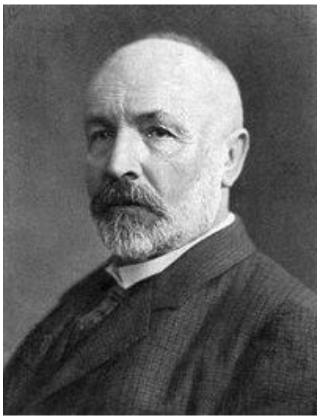
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/peano.htm. Acesso em 15/11/2019.

A descoberta desta curva chocou os matemáticos do século passado, conduzindo a uma crise acerca do conceito de curva. Depois de muito estudo e experiências efetuadas, concluiu-se que a curva de Peano passa por todos os pontos do quadrado pelo menos uma vez.

2.1.5 Conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 3 de março de 1845 - Halle, 6 de janeiro de 1918), destacou-se com seu notável trabalho conhecido como "A Teoria dos Conjuntos", mas também deixou grande contribuição para Geometria Fractal com seu trabalho conhecido como "A Poeira de Cantor" (figura 22).

Figura 21 - Georg Cantor.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor. Acesso em 15/11/2019.

O Conjunto de Cantor é construído inicialmente por um segmento de reta de comprimento unitário. Divide-se este segmento em três partes iguais, retirando-se o seu terço médio. Essa é a primeira etapa, ou primeiro nível, da construção. Na segunda etapa, retira-se o terço médio de cada um dos dois segmentos restantes da primeira etapa. Os segmentos restantes são novamente divididos e deles são retirados os terços médios, procedendo-se sucessivamente do mesmo modo. O processo é repetido fazendo-se o número de etapas, ou níveis, *N*, tender a um número infinitamente grande.

A figura obtida quando $N \rightarrow \infty$ é o Conjunto de Cantor. Algumas etapas da sua construção são mostradas na figura 22.

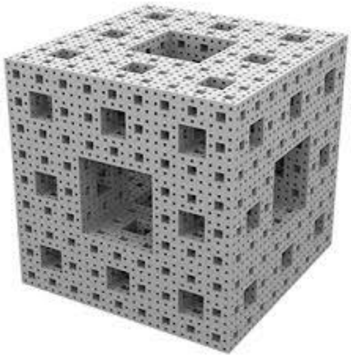
Figura 22 - Os quatro primeiros níveis de construção do Conjunto de Cantor.

Fonte: http://igm.mat.br/aplicativos/?option=com_content&view=article&id=564%3Acantor&catid=85%3Aextras&Itemid=81. Acesso em 15/11/2019.

2.1.6 Esponja de Menger

A Esponja de Menger (figura 23) é uma extensão tridimensional do Conjunto de Cantor e do Triângulo de Sierpinski.

Figura 23 - Esponja de Menger.



Fonte: https://matematicascercanas.com/2014/09/06/viaje-por-el-interior-de-una-esponja-de-menger/. Acesso em 15/11/2019.

Este fractal foi descrito em 1926 por Karl Menger (Viena, 13 de janeiro de 1902 - Highland Park, 5 de outubro de 1985).

Figura 24 - Karl Menger.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger. Acesso em 15/11/2019.

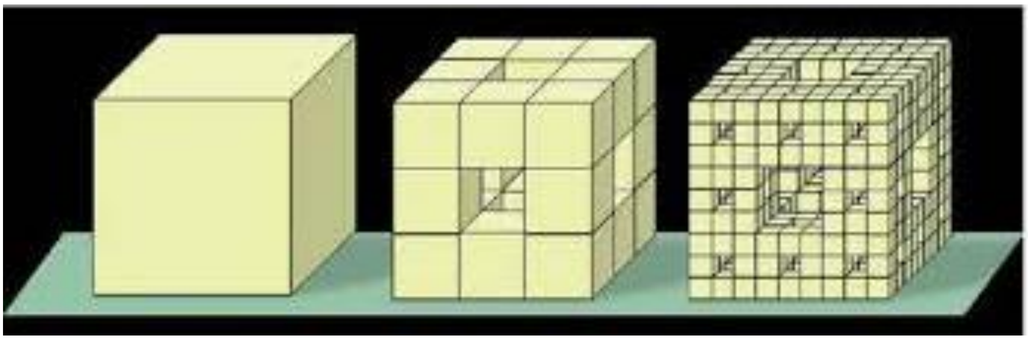
A Esponja de Menger é obtida a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo (figura 25):

1º passo → tomando-se um cubo qualquer, divide-se cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores;

2º passo → remove-se o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes. Este é o primeiro nível da Esponja de Menger;

3º passo → repita os passos 1 e 2 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja. Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 20^2 cubos.

Figura 25 - Processo recursivo para se obter a Esponja de Menger.



Fonte: http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art7.pdf. Acesso em 15/11/2019.

A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de infinitas iterações. Observe que se n é a quantidade de iterações realizadas no cubo inicial, o número de cubos aumenta 20^n. Assim, podemos contabilizar, em cada iteração, o total de cubos removidos e restantes, como mostra a tabela 3.

Tabela 3 - Quantidade de cubos removidos e restantes em cada iteração da Esponja de Menger.

Nível	0	1	2	3	...	n
Cubos removidos	0	7	7 . 20	$7 . 20^2$	...	$7 . 20^{n-1}$
Cubos restantes	20^0	20^1	20^2	20^3	...	20^n

Fonte: Elaborada pelo autor.

O processo de construção se dá de tal forma que, para $n = 0$, tem-se um cubo maciço de lado l e com volume $V_0 = l^3$. Para $n = 1$, o cubo é dividido em 27 cubos menores e iguais, cada um com uma aresta igual a $l/3$. Remove-se o cubo central, bem como os seis cubos situados no meio de cada face do cubo maior.

Este processo é repetido sequencialmente com todos os cubos restantes, dividindo cada um em 27 outros com $1/3$ da aresta do cubo imediatamente anterior. Repetidamente, remove-se o cubo central e cada cubo na porção central das faces. No segundo nível, ou seja, $n = 1$, o volume da esponja, V_1, será dado por:

$$V_1 = V_0 - 7\left(\frac{l}{3}\right)^3.$$

No terceiro nível, ou seja, $n = 2$, cada um dos 20 cubos restantes são divididos em mais 27 cubos iguais, dos quais 7 são retirados, cada um com volume $(l/9)^3$. Deste modo, o volume da esponja, V_2, será dado pela expressão:

$$V_2 = V_0 - 7\left(\frac{l}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{l}{9}\right)^3 \cdot 20$$, e assim, sucessivamente.

Portanto, para o n-ésimo nível, ou seja, $n \rightarrow 0$, o volume da esponja será dado por:

$$V_n = V_0 - 7l^3 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n} \cdot 20^{n-1} = 0.$$

Para determinação da área da superfície desta estrutura fractal, S_n, tem-se que para $n = 0$, $S_0 = 6l^2$. Para $n = 1$ tem-se:

$$S_1 = S_0 + 6l^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 20.$$

Portanto, para o n-ésimo nível, ou seja, com $n \rightarrow 0$, a área da superfície associada à esponja será dada por:

$$S_n = S_0 + 6l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \cdot 20^n = \infty.$$

Conclui-se então, que a Esponja de Menger possui volume nulo e uma área infinita na medida em que o número de níveis tende ao infinito.

2.2 Níveis do desenvolvimento cognitivo segundo van-Hiele

O Modelo van-Hiele é uma teoria de ensino e aprendizagem da Geometria elaborada pelo casal holandês van-Hiele. Na década de 50 do século passado, Dina van Hiele-Geldof (1911 - 1958) e Pierre van-Hiele (1909 - 2010), na Universidade de Utrecht, deram início ao que hoje chamamos de níveis de desenvolvimento cognitivo do modelo van-Hiele nas suas dissertações de doutorado.

Figura 26 - Casal van-Hiele.

Fonte. https://www.emaze.com/@ALOOQIFF. Acesso em 20/11/2019.

A teoria se encaixa dentro da didática matemática e, de forma mais específica, na didática da Geometria. A ideia central do modelo a qual ele se sustenta é que a aprendizagem da Geometria se dá passando por níveis graduais de pensamento, que não estão associados à idade.

O Modelo van-Hiele não permite a supressão de níveis, ou seja, para se alcançar o nível *n* faz-se necessário ter passado pelo nível *n* - 1, porque o que é implícito em determinado nível torna-se explícito no próximo nível.

Os níveis de compreensão do modelo de van-Hiele são cinco (Tabela 4) podendo ser nomeados com números de 0 a 4.

Tabela 4: Níveis de desenvolvimento cognitivo do Modelo van-Hiele.

NÍVEIS	CARACTERÍSTICAS
Nível 0 Visualização ou Reconhecimento	- Reconhece visualmente uma figura geométrica; - Tem condições de aprender o vocabulário geométrico; - Não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura.
Nível 1 Análise	- Identifica as propriedades de uma determinada figura; - Não consegue correlacionar figuras com suas propriedades.
Nível 2 Ordenação ou Dedução Informal	- Compreende as correlações entre as figuras estabelecendo uma ordenação lógica das propriedades por meio de curtas sequências de dedução; - Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir outra.
Nível 3 Dedução Formal	- É capaz de fazer provas formais; - Raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
Nível 4 Rigor	- É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; - É neste nível que as geometrias não euclidianas são compreendidas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo do casal van-Hiele conduz o aluno ao nível da visualização de um conceito geométrico, em seguida ao nível da análise, depois ao da ordenação lógica, mais adiante ao nível da dedução formal e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação. Neste ponto, o aluno torna-se capaz de entender e relacionar conceitos abstratos.

É comum encontrarmos uma turma com estudantes em diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo em relação ao pensamento geométrico descrito pela Teoria de van-Hiele. O fato de os educandos estarem em uma determinada série não iguala sua situação de desenvolvimento cognitivo do pensamento geométrico. Essa possível situação sugere que o discente seja valorizado de forma individual para que de fato consiga adquirir novos conhecimentos. Dessa forma cabe ao professor promover a organização do ensino para que os estudantes possam percorrer as cinco fases de aprendizagem dentro de cada nível.

A tabela 5 descreve as fases necessárias para organizar o ensino de acordo com o modelo sugerido pelo casal van-Hiele.

Tabela 5 - Fases de aprendizagem segundo o Modelo van-Hiele.

FASES	PAPEL DESEMPENHADO PELO DOCENTE
Fase 1 Informação ou Interrogação	O professor deve identificar os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o assunto a ser trabalhado.
Fase 2 Orientação Dirigida	O professor coloca os alunos em situações para explorar o assunto através de materiais ordenados cuidadosamente numa sequência de grau de dificuldade crescente. Neste momento cada atividade deve estar voltada para que os alunos deem respostas específicas de forma que possam perceber por si mesmos, as propriedades, conceitos e definições que o professor quer atingir.
Fase 3 Explanação	De acordo com a experiência vivida nas fases anteriores os alunos expõem as experiências ao professor de maneira oral ou escrita. O professor direciona esse diálogo de forma a corrigir a linguagem do aluno quando necessário, utilizando nesse momento uma linguagem específica do nível em que se encontra o grupo de alunos. É o momento de diálogo entre professor e alunos, no intuito de chegarem a um comum acordo com relação ao tema estudado. Nesta fase não se introduzem conceitos novos, há somente a troca de experiências.
Fase 4 Orientação livre	O professor passa tarefas aos alunos de maneira que eles tenham que utilizar os conteúdos anteriormente conhecidos. Os problemas dados aos alunos têm que ter um grau de dificuldade maior que os dados na segunda fase de maneira que os alunos possam ter mais de uma maneira de resolução. Os problemas nessa fase não devem ser só uma aplicação dos exercícios anteriores, mas devem sim ter grau de complexidade maior fazendo com que os alunos utilizem o conhecimento anterior. Nesta fase o professor deve interferir o mínimo possível, deixando aos alunos a tarefa de formalizar o conceito. Para van-Hiele, só sabemos se houve compreensão quando ao aluno é colocada uma nova situação e este consegue resolver o novo problema.
Fase 5 Integração	O professor faz com que os alunos revejam e sintetizem o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral e uma nova rede interna de conhecimentos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse roteiro metodológico é fundamental para que o aluno avance para um nível posterior. Ressalta-se que em um mesmo nível podem existir alunos executando atividades relativas a diferentes fases de aprendizagem, e ainda que o progresso ao longo dos níveis depende mais da sequência de atividades aplicadas do que da idade ou da maturidade. Sendo assim é possível suprimir fases e utilizá-las em qualquer ordem diferentemente dos níveis que devem seguir rigorosamente a ordem exposta na tabela 4.

Convém ressaltar que o nível 4 da tabela 4 não é atingido no currículo matemático da educação básica devido à imaturidade natural dos estudantes. Contudo é de fundamental importância que ocorra a fase 5 da tabela 5 ao final de cada atividade proposta para que o discente desenvolva uma visão geral do que aprendeu a fim de alcançar novos níveis de compreensão.

O modelo tem notável importância no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, pois depois de testado em diversos países do mundo, vem contribuindo com os currículos e livros didáticos que se modernizam buscando se adequar ao modelo, a fim de obter melhor desempenho dos alunos em Geometria. O modelo dá orientação aos professores de como melhorar o ensino da disciplina, favorecendo assim os estudantes, para que estes tenham o máximo de aproveitamento na aprendizagem de cada tópico. Além disso, o modelo de van-Hiele ajuda os professores a identificar formas de raciocínio do aluno verificando em que nível ele se encontra. Caso o docente verifique que o aluno se encontra em um nível inferior em relação a toda a classe, aquele tem subsídios para que este avance seu nível de compreensão. O modelo van-Hiele visa sempre colocar o aluno não como um ser passivo na aprendizagem da Geometria, mas sim um ser ativo, participando ativamente das aulas e obtendo assim o desenvolvimento necessário para a aprendizagem desse ramo da Matemática.

O presente trabalho procura aliar conceitos da educação matemática básica, utilizando recursos tecnológicos contemporâneos para a elaboração de atividades, voltadas para o Ensino Fundamental e Médio. Detalhes sobre os conteúdos trabalhados e sobre as construções das atividades serão discutidos nos próximos capítulos.

3

Seleção de conceitos matemáticos

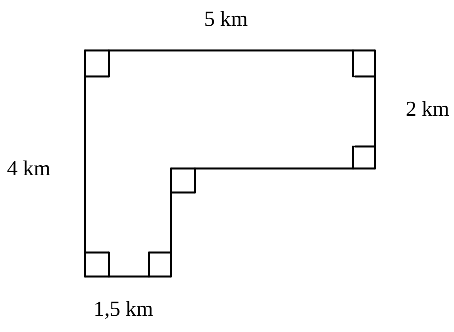
Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos de Matemática que são utilizados no trabalho desenvolvido junto aos discentes. Apesar de básicos, opta-se por organizá-los a fim de que o trabalho fique completo nos conceitos primordiais que estão nas atividades propostas no capítulo 4. Pretende-se desta forma facilitar a consulta e adaptação de docentes da Educação Básica que se valham do presente estudo para reconstruir suas próprias práticas.

3.1 Perímetro

Contorno que limita ou circunda qualquer espaço. Matematicamente, o perímetro de uma figura corresponde ao comprimento de sua linha de contorno. Ou seja, calcula-se o perímetro de um polígono[4] somando as medidas dos seus lados, e de um não-polígono somando todas as medidas que compõem seu contorno.

A figura 27 é um exemplo de polígono cujo perímetro (representado por *2p*) é igual a 18 km.

Figura 27 - Figura poligonal.



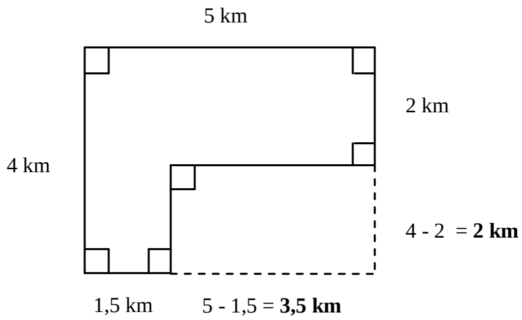
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$2p = 1{,}5 + 4 + 5 + 2 + 3{,}5 + 2 \Rightarrow 2p = 18 \text{ km.}$$

[4] Uma definição de polígono: "Figura geométrica, plana, fechada, formada por segmentos de reta consecutivos que não se entrelaçam." (Michaelis, 2019)

Note que o lado cuja medida é 3,5 km não está explícito na figura, mas é possível concluir fazendo uma transposição do lado que mede 5 km para o lado que mede 1,5 km. Faz-se o mesmo com o lado que mede 4 km para se obter o lado de medida 2 km (figura 28).

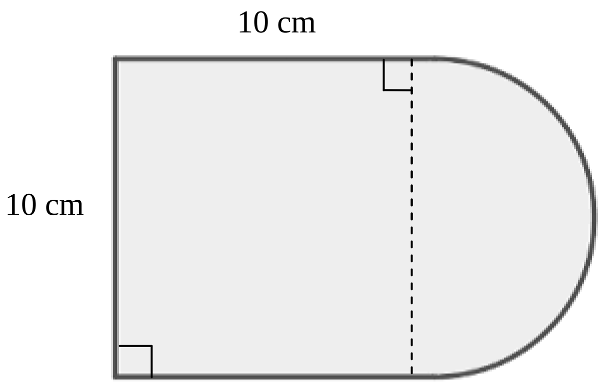
Figura 28 - Transposição de segmentos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 29 não é limitada apenas por segmentos de reta. Há uma parte curva que para compreendermos como obter seu perímetro faz-se necessária a leitura do próximo tópico.

Figura 29 - Figura não-poligonal.

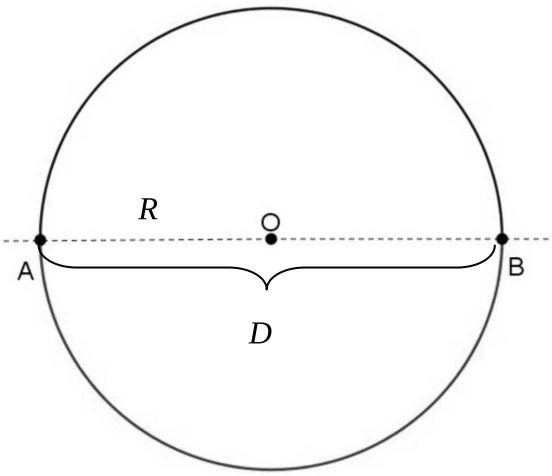


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.1 Comprimento da circunferência

Uma circunferência é o lugar geométrico do conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância ***R*** de um ponto central fixo O (conhecido como centro da circunferência). O segmento cujos extremos são dois pontos da circunferência e que possui esse ponto O é chamado de diâmetro. A medida do diâmetro (***D***) é igual ao dobro da circunferência (***R***). Ou seja, $D = 2R$.

Figura 30 - Circunferência de centro O, raio *R* e diâmetro *D*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O comprimento ou perímetro de uma circunferência pode ser obtido multiplicando o dobro de ***R*** por uma constante. Esta constante é chamada de π (Pi). O número π é um número irracional, possuindo assim infinitas casas decimais caracterizando uma dízima não-periódica. Seu valor apareceu na História constantemente como o quociente entre o comprimento da circunferência (***C***) e seu diâmetro.

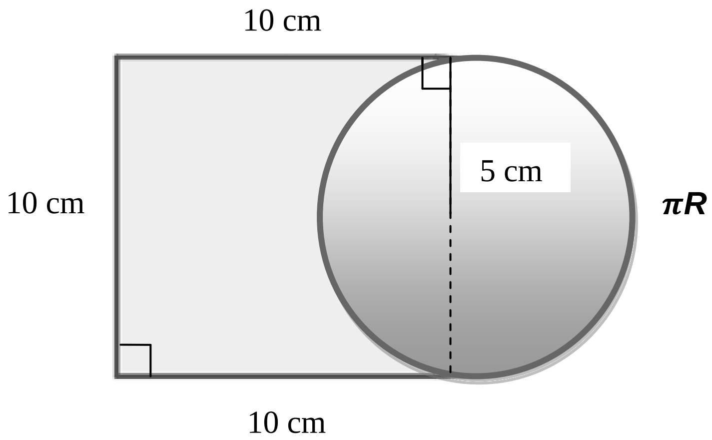
$$\pi = \frac{C}{2R}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por *2R*, obtém-se a fórmula do comprimento (ou perímetro) da circunferência.

$$C = 2\pi R$$

Agora podemos calcular o perímetro da figura 26 que é composta por três segmentos de reta de 10 cm mais uma curva que equivale à metade de uma circunferência de raio 5 cm (figura 31).

Figura 31 - Interpretação visual para obtenção do perímetro da figura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$2p = 3 \cdot 10 + 5\pi \Rightarrow 2p = (30 + 5\pi)\ \text{cm}.$$

3.2 Área de figuras planas

Área é um conceito matemático que pode ser definida como quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície.

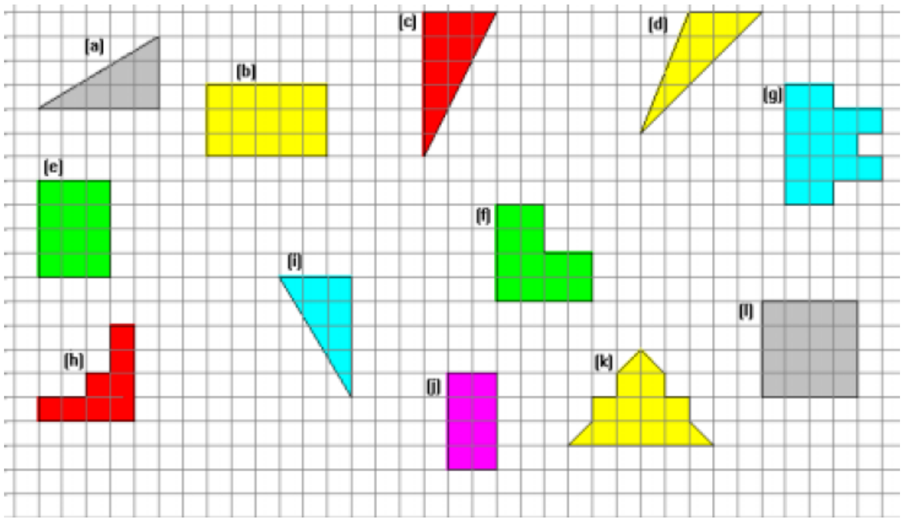
Figuras planas são figuras bidimensionais, ou seja, aquelas que possuem comprimento e largura.

É possível determinar a área de figuras planas facilmente em uma malha quadriculada estabelecendo um valor para a medida de superfície de cada quadrículo da malha. Na figura 32, por exemplo, considerando a área de cada quadrículo da malha 1 u.a.[5], é possível afirmar corretamente que a área do item (a) 7,5 u.a.. De maneira análoga que no item (c) a área é 12 u.a..

As medidas de superfície das figuras são obtidas contabilizando a quantidade de quadrículos que as preenchem.

[5] A abreviatura “u.a.” significa unidade de área.

Figura 32 - Figuras planas na malha quadriculada.



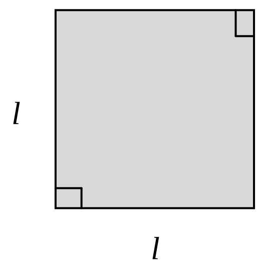
Fonte: https://docplayer.com.br/10299566-Um-estudo-diagnostico-sobre-o-calculo-da-area-de-figuras-planas-na-malha-quadriculada-influencia-de-algumas-variaveis.html.
Acesso em 23/11/2019.

Nos próximos tópicos, fórmulas para obtenção das áreas das principais figuras planas, serão deduzidas de maneira prática para que se torne possível calcular a medida de superfície independentemente da existência de uma malha quadriculada.

3.2.1 Área do quadrado

Um quadrado (figura 33) é uma figura plana que possui quatro lados congruentes[6] e quatro ângulos retos[7].

Figura 33 - Quadrado.



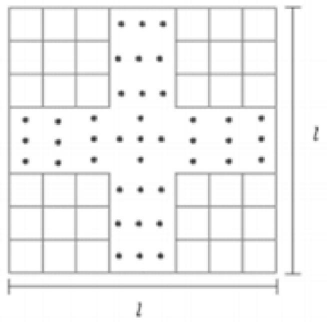
Fonte: Elaborada pelo autor.

[6] Congruência significa ter a mesma medida.
[7] Ângulo reto é aquele que mede 90°.

A área do quadrado é a medida correspondente ao espaço interno. Repare que no quadrado de lado *l*, a unidade de área citada, aparece *l* vezes *l* em linhas (figura 34). Portanto, sua área é dada por:

$$A = l \cdot l \Rightarrow A = l^2.$$

Figura 34 - Quadrado dividido em unidades de área.



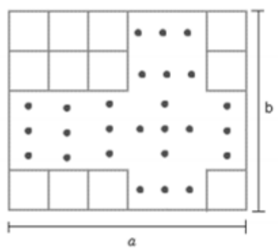
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601. Acesso em 23/11/2019.

3.2.2 Área do retângulo

O retângulo (figura 35) é um quadrilátero[8] que possui quatro ângulos retos. O cálculo da área do retângulo é análogo ao do quadrado. Tem-se um retângulo de lados *a* e *b*, logo a unidade de área aparecerá *a* vezes *b* em linhas. Desta forma, a área do retângulo é dada por:

$$A = a \cdot b.$$

Figura 35 - Retângulo dividido em unidades de área.



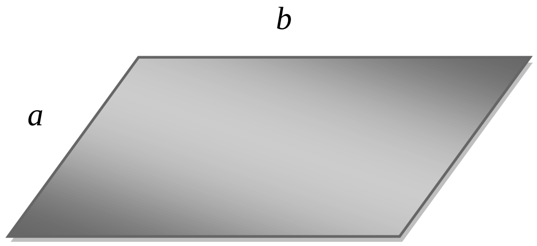
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601. Acesso em 23/11/2019.

[8] Quadrilátero ou quadrângulo é a denominação de um polígono de quatro lados.

3.2.3 Área do paralelogramo

Paralelogramo (figura 36) é o quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

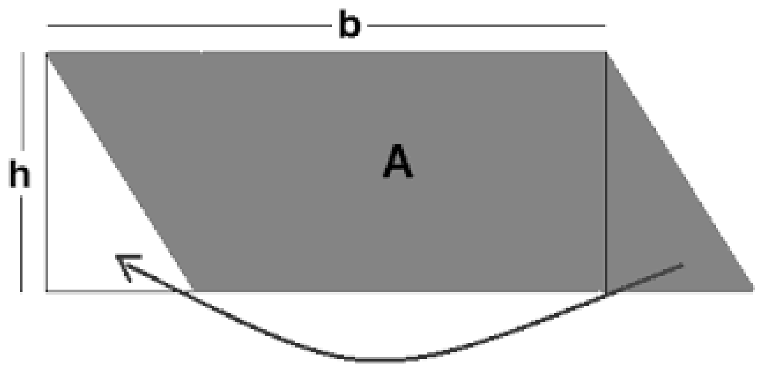
Figura 36 - Paralelogramo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A área do paralelogramo é obtida pelo produto da base b pela altura[9] h, porque podemos transformar visualmente um paralelogramo em um retângulo conforme ilustrado na figura 37.

Figura 37 - Paralelogramo sendo composto como um retângulo de dimensões b e h.



Fonte: https://sabermatematica.com.br/como-calcular-a-area-de-um-paralelogramo.html. Acesso em 23/11/2019.

Logo, a fórmula para se obter a medida de superfície de um paralelogramo é dada por:

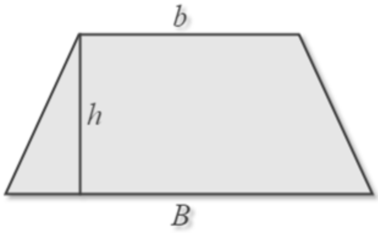
$$A = b \cdot h.$$

[9] Altura é um segmento de reta que forma um ângulo reto com a base ou com seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto.

3.2.4 Área do trapézio

O trapézio (figura 38) é o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos que são denominados como bases.

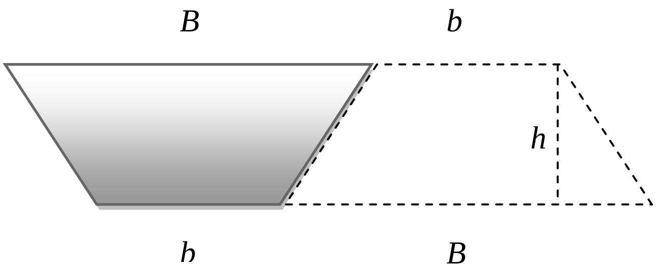
Figura 38 - Trapézio.



Fonte: https://matem4tica.blogspot.com/2019/05/como-calcular-area-do-trapezio.html. Acesso em 30/11/2019.

A demonstração da fórmula da área do trapézio pode ser feita duplicando-o de forma que ele se torne um paralelogramo (figura 39).

Figura 39 - Trapézio duplicado em forma de paralelogramo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

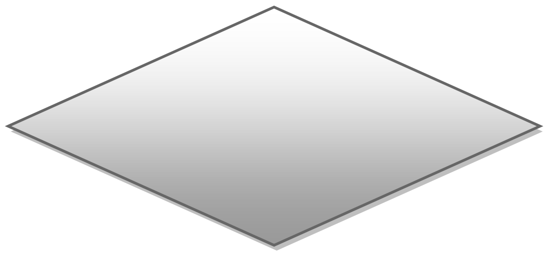
A área do paralelogramo é dada por: $A=(B+b)\cdot h$. Como o trapézio é a metade desse paralelogramo, tem-se como área do trapézio a seguinte fórmula:

$$A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

3.2.5 Área do losango

O losango (figura 40) é o quadrilátero que possui todos os lados congruentes.

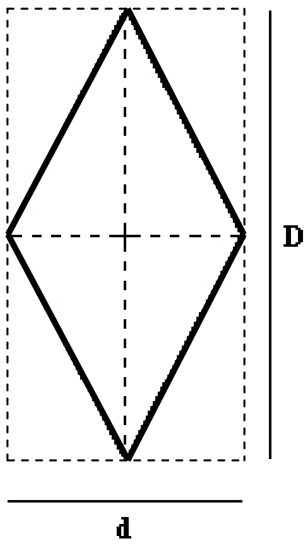
Figura 40 - Losango.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A área do losango é obtida pelo semi-produto de suas diagonais[10], pois se trata da metade de um retângulo de dimensões *D* e *d* (figura 41).

Figura 41 - Losango interno a um retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, a medida de superfície de um losango é dada pela seguinte fórmula:

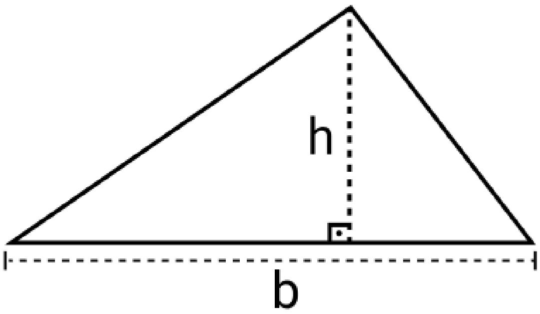
$$A = \frac{D \cdot d}{2}.$$

[10] Diagonais são segmentos de reta que unem dois vértices não-consecutivos.

3.2.6 Área do triângulo

Triângulo ou trilátero (figura 42) é a denominação de um polígono de três lados.

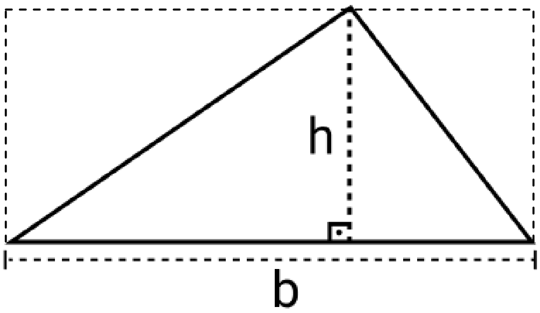
Figura 42 - Triângulo.



Fonte: https://matematicabasica.net/triangulo/. Acesso em 14/12/2019.

A medida de área é calculada basicamente através do semi-produto de sua base **b** e altura **h**, porque é fácil perceber que o triângulo é sempre a metade de um retângulo na figura 43.

Figura 43 - Triângulo interno a um retângulo de dimensões b e h.



Fonte: Elaborado pelo autor.

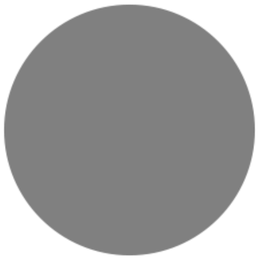
Logo, a área de um triângulo é dada pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

3.2.7 Área do círculo

Um círculo (figura 44) é um conjunto de pontos resultantes da união de uma circunferência com todos os seus pontos internos.

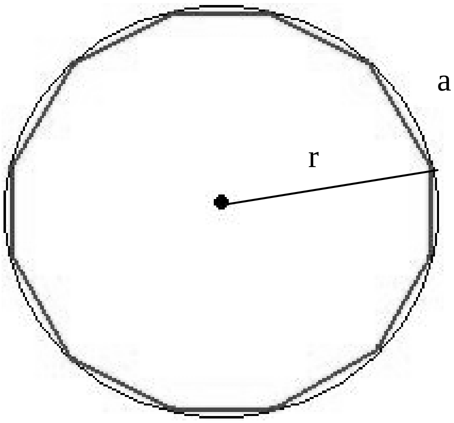
Figura 44 - Círculo.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculo. Acesso em 14/12/2019.

Para compreendermos a fórmula utilizada no cálculo da área de um círculo temos que imaginar uma circunferência e um polígono regular[11] inscrito como na figura 45.

Figura 45 - Polígono regular de lado a inscrito numa circunferência de raio r.

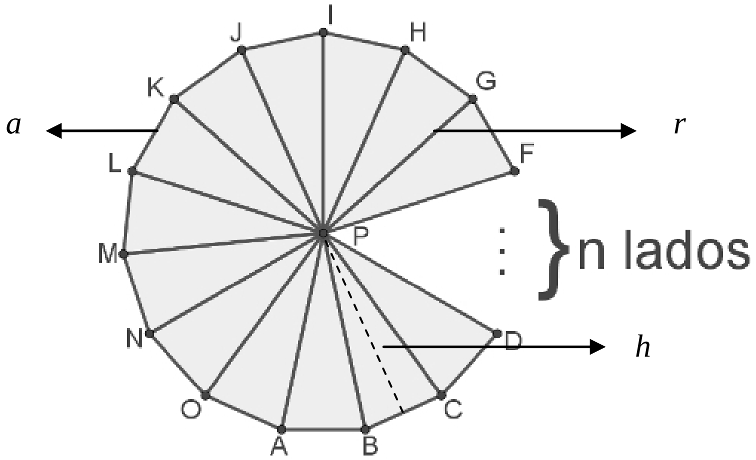


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os segmentos de reta que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo. Assim, formando *n* triângulos no polígono regular (figura 46).

[11] Polígono regular é aquele que possui todos os seus lados congruentes entre si e podem ser inscritos em uma circunferência.

Figura 46 - Polígono regular de *n* lados dividido em *n* triângulos congruentes de altura *h*.



Fonte: http://pir2.forumeiros.com/t6245-duvida-sobre-circulo. Acesso em 14/12/2019.

Com base no cálculo da área de um triângulo, pode-se dizer que a área de um polígono regular de *n* lados seria:

$$A = n.\frac{a \cdot h}{2}.$$

Sendo $n \cdot$ a o valor do perímetro do polígono regular:

$$A = \text{perímetro do polígono regular} \cdot \frac{h}{2}.$$

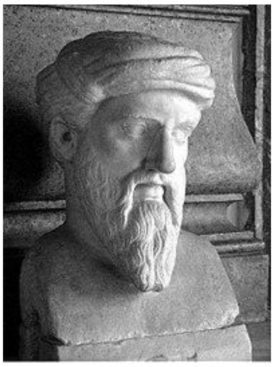
Agora se imagina que aumentando o número de lados do polígono regular, a tendência é do seu perímetro ficar cada vez mais parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo. Desta forma, pode-se concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo deverá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de *n* lados. Logo:

$$A = \text{comprimento da circunferência} \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow A = \pi r^2.$$

3.3 Teorema de Pitágoras

Pitágoras (figura 47), filósofo e matemático grego, teve a maioria de suas informações escrita séculos depois do seu falecimento, de modo que há pouca informação confiável sobre ele. Nasceu na Ilha de Samos por volta de 570 a.C. e faleceu por volta de 500 a.C.

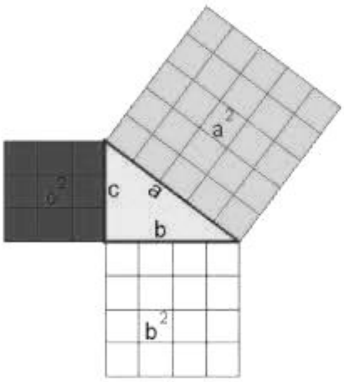
Figura 47 - Busto de Pitágoras.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras. Acesso em 14/12/2019.

Dentre seus trabalhos mais notáveis, destaca-se o Teorema de Pitágoras que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo[12] da seguinte maneira (figura 48): "*Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa*[13] *é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos*[14]."

Figura 48 - Teorema de Pitágoras.



Fonte: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/Rodinelli-artigo-final.pdf. Acesso em 14/12/2019.

[12] Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto.
[13] Hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo. Está sempre oposto ao ângulo reto.
[14] Cateto é a denominação dos dois menores lados do triângulo retângulo.

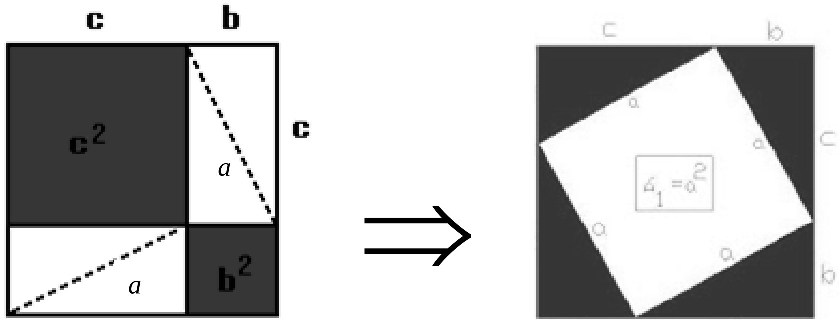
Matematicamente, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Há dezenas maneiras diferentes de se demonstrar o Teorema de Pitágoras. Uma delas é utilizando o conceito de área que será demonstrado a seguir.

Considerando um quadrado de lado (*b* + *c*) dividido em dois retângulos de dimensões *b* e *c* e dois quadrados sendo um de lado *b* e o outro de lado *c* conforme a figura 49.

Figura 49 - Quadrado de lado (*b* + *c*).



Fonte: Elaborada pelo autor.

A área do quadrado maior é dada por:

$$(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2.$$

A superfície deste quadrado maior é composta por:

• um quadrado de lado *b*;

• um quadrado de lado *c*;

• dois retângulos de dimensões *b* e *c* e diagonal *a*.

Redesenhando o mesmo quadrado maior, mas colocando os quatro triângulos retângulos em outra posição, tem-se um quadrado de lado a em seu interior (figura 49).

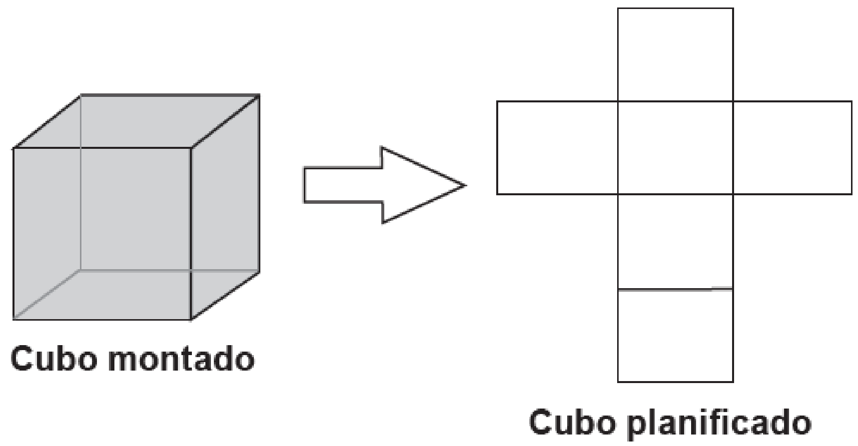
Logo, a mesma superfície do quadrado de lado ($b + c$) também pode ser expressa como a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos de hipotenusa a e catetos b e c mais o quadrado de lado a. Então:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

3.4 Área e volume de sólidos geométricos

A área de um sólido geométrico[15] é uma medida encontrada por fórmulas específicas de cada sólido ou pela soma da área de cada figura presente em sua planificação[16] (figura 50).

Figura 50 - Cubo planificado.



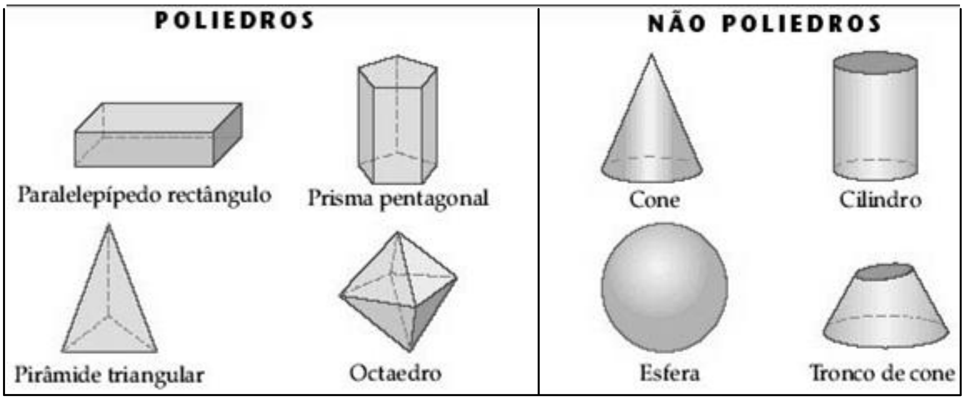
Fonte: http://pir2.forumeiros.com/t120890-planificacao-cubo. Acesso em 21/12/2019.

Há muitas definições para a palavra volume, mas para a Matemática é o espaço ocupado por um corpo. A figura 51 traz alguns exemplos de sólidos geométricos e a classificação destes em poliedros e não poliedros.

[15] Sólido geométrico é uma figura tridimensional, ou seja, possui três dimensões.

[16] A planificação de um sólido geométrico é a apresentação de todas as formas que constituem sua superfície em um plano, ou seja, em duas dimensões.

Figura 51 - Exemplos de sólidos geométricos.



Fonte: https://sites.google.com/site/6gdelfimmatematica/5o-ano---relembrar/solidos-geometricos. Acesso em 21/12/2019.

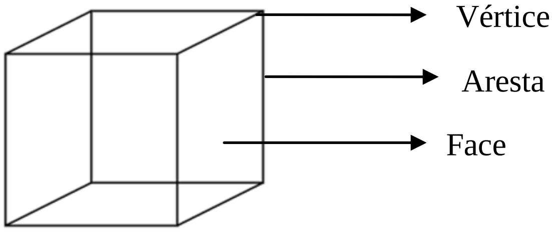
Poliedros são os sólidos cujas faces[17] são planas. Já os não poliedros possuem alguma superfície curva.

Nos tópicos a seguir serão deduzidas as fórmulas para se obter as medidas de área e de volume de alguns sólidos geométricos que serão relacionados nas atividades propostas com os fractais no capítulo 4.

3.4.1 Área e volume do cubo

O cubo ou hexaedro (figura 52) é um poliedro que possui 6 faces quadradas congruentes, 12 arestas[18] e 8 vértices[19].

Figura 52 - Cubo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

[17] Faces são as partes planas da superfície de um poliedro. Ou seja, é como de fosse um lado do sólido geométrico.
[18] Aresta é a união de duas faces.
[19] Vértice é a união de duas ou mais arestas.

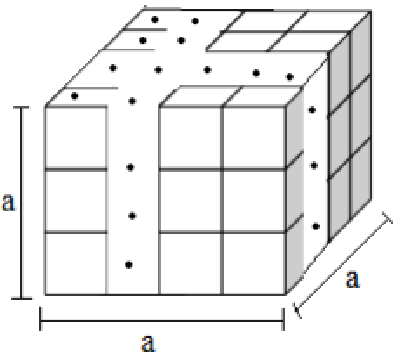
A área de um cubo é formada pela área dos quadrados que compõem suas faces. Ou seja, um cubo de aresta *a* é formado por 6 quadrados de lado *a*, logo a área de cada face é a^2. Então, a área do cubo pode ser obtida pela fórmula:

$$A = 6a^2.$$

Já o volume é o espaço total ocupado por ele e pode ser deduzido de maneira análoga a que foi feita na área do quadrado (Capítulo 3.2.1). Agora, tomando-se como unidade de volume um cubo menor de arestas unitárias, ao contabilizar a quantidade de cubos unitários contidos no hexaedro, tem-se a medida do seu volume. Em um cubo de aresta *a*, a unidade de volume citada aparece *a* vezes em *a* linhas e em *a* colunas, conforme ilustrado na figura 53. Portanto, o volume do cubo é dado por:

$$V = a^3.$$

Figura 53 - Cubo dividido em unidades de volume.

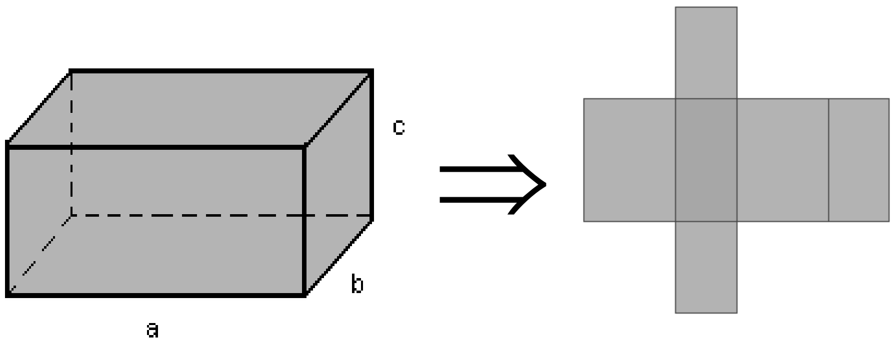


Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601.
Acesso em 21/12/2019.

3.4.2 Área e volume do paralelepípedo

O paralelepípedo ou bloco retangular (figura 54) é um sólido geométrico composto por 6 faces (pelo menos um par delas tem que ser retangular), 12 arestas e 8 vértices.

Figura 54 - Paralelepípedo planificado.



Fonte: http://nonomatematica.blogspot.com/2014/11/bloco-retangular.html.
Acesso em 21/12/2019.

Com a planificação é fácil perceber que a área do bloco retangular é composta por três pares de retângulos de áreas: *ab*, *bc* e *ac*.

Logo sua área é dada pela fórmula:

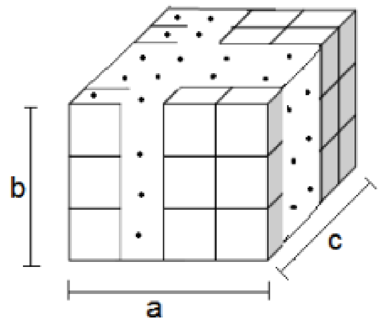
$$A = 2ab + 2bc + 2ac \Rightarrow A = 2(ab + bc + ac).$$

Já o volume do paralelepípedo de dimensões *a*, *b* e *c* é dado pela fórmula:

$$V = abc.$$

Porque a unidade de volume citada aparece *a* vezes em *b* linhas e em *c* colunas, conforme ilustrado na figura 55.

Figura 55 - Paralelepípedo dividido em unidades de volume.

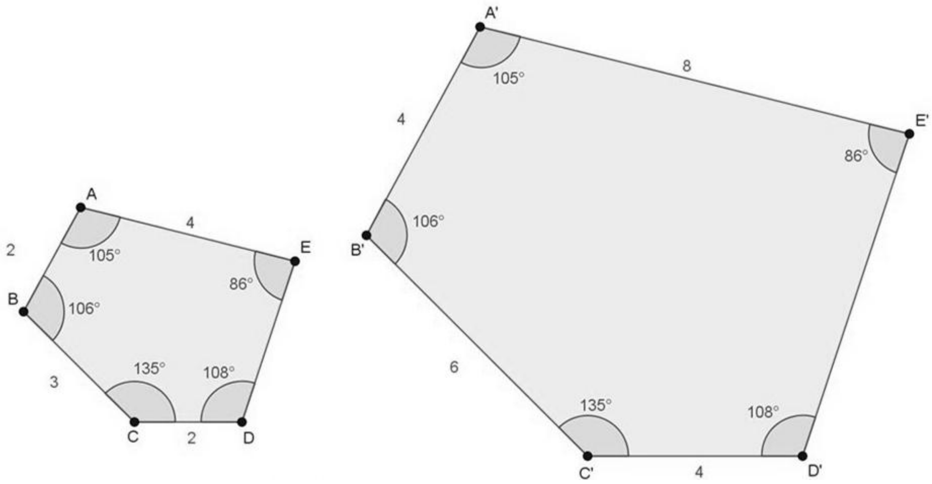


Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601.
Acesso em 21/12/2019.

3.5 Semelhança de polígonos

Dois ou mais polígonos são ditos semelhantes (figura 56) quando possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e todos os lados correspondentes proporcionais[20].

Figura 56 - Polígonos semelhantes.



Fonte: https://slideplayer.com.br/slide/3532451/. Acesso em 28/12/2019.

A razão[21] de semelhança dos polígonos da figura 53 é de 1 : 2. E esta razão de semelhança é constante (k) podendo ser calculada através da razão entre quaisquer lados homólogos.

$$\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{DE}{D'E'}=k$$

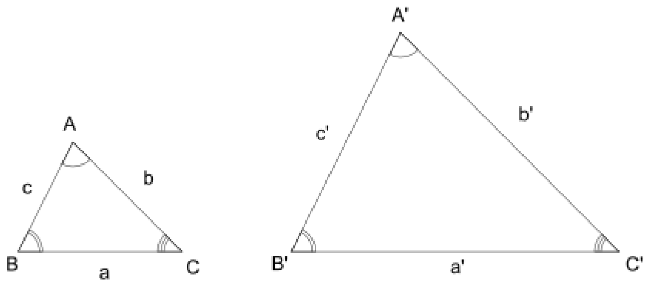
A razão entre os perímetros de figuras semelhantes também é igual à razão de semelhança.

Observe a demonstração utilizando os triângulos da figura 57.

[20] Lados correspondentes proporcionais também podem ser denominados como lados homólogos.

[21] Razão é a comparação entre duas grandezas. Assim, quando dividimos uma grandeza pela outra estamos comparando a primeira com a segunda.

Figura 57 - Triângulos semelhantes.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Semelhan%C3%A7a_de_tri%C3%A2ngulos. Acesso em 28/12/2019.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

Logo, pode-se escrever assim:

$$c = c' \cdot k;$$
$$a = a' \cdot k; \text{ e}$$
$$b = b' \cdot k.$$

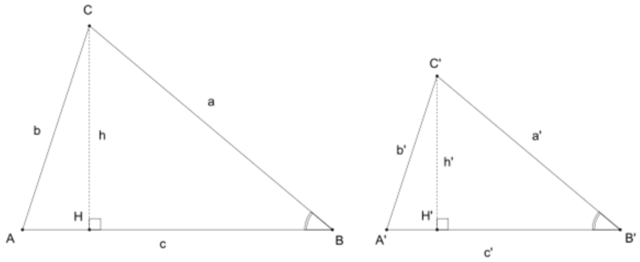
Então a razão entre os perímetros é:

$$\frac{2p}{2p'} \Rightarrow \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \Rightarrow \frac{k \cdot (a'+b'+c')}{a'+b'+c'} \Rightarrow k.$$

A razão entre as alturas de triângulos semelhantes também é igual à razão de semelhança.

Observe a demonstração utilizando a figura 58.

Figura 58 - Triângulos semelhantes de alturas h e h'.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Semelhan%C3%A7a_de_tri%C3%A2ngulos. Acesso em 28/12/2019.

Se dois triângulos são semelhantes de razão *k*, então a razão entre as alturas também é *k*. Logo:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = k.$$

Por hipótese, tem-se que ABC e A'B'C' são semelhantes; e que *h* é altura relativa ao vértice C e *h'* altura relativa ao vértice C'. Com isso, os ângulos CHB e C'H'B' são retos. Logo, os triângulos CHB e C'H'B' são semelhantes. Então:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{HB}{H'B'} = k.$$

Diante do exposto, pode-se afirmar que a razão entre as áreas de polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Utilizando os triângulos da figura 58, tem-se:

$$\frac{A_{CHB}}{A_{C'H'B'}} \Rightarrow \frac{\frac{c \cdot h}{2}}{\frac{c' \cdot h'}{2}} \Rightarrow \frac{c \cdot h}{c' \cdot h'} \Rightarrow k \cdot k \Rightarrow k^2.$$

3.6 Progressão aritmética

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que o próximo elemento da sequência é o número anterior somado a uma constante *r*. Este *r* é chamado de razão da P.A. Para descobrir a razão de uma P.A. basta subtrair um elemento qualquer pelo seu antecessor, pois $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1}$.

Denota-se por a_n um termo da sequência, onde *n* indica a posição desse termo e *n* um número natural não nulo.

Exemplos de progressão aritmética:

a) (1, 2, 3, 4, 5, 6, …) é uma P.A. infinita crescente cuja razão é 1, pois 3 – 2 = 1.

b) (1, 5, 9, 13, 17, 21) é uma P.A. finita crescente cuja razão é 3, pois 5 – 1 = 4.

c) (5, 5, 5, 5, …) é uma P.A. infinita constante cuja razão é 0, pois 5 – 5 = 0.

d) (10, 4, -2, …) é uma P.A. infinita decrescente cuja razão é -6, pois 4 – 10 = -6.

A progressão aritmética será do tipo:

- Crescente quando $r > 0$;
- Decrescente quando $r < 0$; e
- Constante quando $r = 0$;

É possível encontrar qualquer termo de uma P.A., ou o total de termos da seguinte maneira:

Seja a P.A. com razão r a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$$

Sabe-se que:

$$\begin{array}{lcl}
a_1 = a_1 & & a_1 = a_1 \\
a_2 = a_1 + r & & a_2 = a_1 + r \\
a_3 = a_2 + r & \Rightarrow & a_3 = a_1 + 2r \\
a_4 = a_3 + r & & a_4 = a_1 + 3r \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
a_n = a_{n-1} + r & & a_n = a_1 + (n - 1)r
\end{array}$$

Note que podemos escrever todos os termos de uma P.A. em função de a_1, r e n utilizando a fórmula do termo geral da P.A..

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ onde}$$

a_n é o termo geral;

a_1 é o primeiro termo;

n: é o número de termos ou o total de termos; e

r: é a razão.

Vamos destacar três propriedades importantes em uma P.A.. A saber:

1ª) Em uma P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Exemplo: (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25)
1 + 25 = 26 = 5 + 21 = 9 + 17

2ª) Considerando três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio será igual a média aritmética [22]dos outros dois termos.

Exemplo: (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25)
5 = (9 + 1) : 2; 17 = (21 + 13) : 2

3ª) Em uma P.A. finita com número de termos ímpar, o termo central será igual a média aritmética do primeiro termo com o último termo.

Exemplo: (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25)
13 = (1 + 25) : 2

A soma dos termos de uma P.A. é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Agora, a partir da mesma soma, mas com os termos invertidos, tem-se:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Somando as duas expressões obtém-se o dobro da soma dos termos de uma P.A..

[22] Média aritmética é o resultado da divisão entre a soma de números e a quantidade de números somados.

$$2 \cdot Sn = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Como todas as somas acima são iguais, porque são termos equidistantes de uma P.A., é possível reescrever a expressão do seguinte modo:

$$2 \cdot Sn = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$
$$\Rightarrow 2 \cdot Sn = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Como se chegou ao dodro da soma pretendida, basta dividir ambos os membros por dois para se alcançar a fórmula da soma dos termos de uma P.A..

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \text{ onde}$$

Sn é a soma dos termos;
a_1 é o primeiro termo da P.A.;
a_n é o n-ésimo[23] termo da P.A.; e
n é o total de termos da P.A..

3.7 Progressão geométrica

Progressão geométrica (P.G.) é uma sequência numérica em que o próximo elemento da sequência é o número anterior multiplicado a uma constante q. Este q é chamado de razão da P.G.. Para descobrir a razão de uma P.G. basta dividir um elemento qualquer pelo seu antecessor, pois:

$$q = a_2 : a_1 = a_3 : a_2 = a_4 : a_3 = a_n : a_{n-1}.$$

Exemplos de progressão geométrica:
a) (1, 2, 4, 8, 16, …) é uma P.G. infinita crescente cuja razão é 2, pois 16 : 8 = 2.

[23] n-ésimo ou enésimo é a designação de um termo qualquer de ordem n: 1, 2, 3, ... , (n-1), n.

b) (-1, 3, -9, 27, -54) é uma P.G. finita oscilante (ou alternada) cuja razão é -3, pois 6 : (-2) = -3.

c) (5, 5, 5, 5, …) é uma P.G. infinita constante cuja razão é 1, pois 5 : 5 = 1.

d) (30; 15; 7,5) é uma P.G. finita decrescente cuja razão é 0,5, pois 15 : 30 = 0,5.

A progressão geométrica será do tipo:

• Crescente quando $q > 1$;

• Decrescente quando $0 < q < 1$;

• Constante quando $q = 1$; e

• Oscilante quando $q < 0$.

Observa-se nos exemplos acima que é sempre possível escrever qualquer termo de uma P.G. em função do primeiro. Isso acontece porque o segundo termo é um produto do primeiro com a razão e assim sucessivamente. Seguindo essa lógica, tomemos como exemplo a P.G. (3, 6, 12, 24, ...) cujos termos podem ser escritos da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lcl}
a_1 = 3 & & a_1 = 3 = 3\cdot 2^0 \\
a_2 = 6 = 3\cdot 2 & & a_2 = 6 = 3\cdot 2^1 \\
a_3 = 12 = 3\cdot 2\cdot 2 & \Rightarrow & a_3 = 12 = 3\cdot 2^2 \\
a_4 = 24 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2 & & a_4 = 24 = 3\cdot 2^3 \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Cada termo da P.G. é igual a um produto do primeiro por uma potência da razão. O expoente dessa potência é sempre igual ao índice (posição do termo indicada por n) menos uma unidade. Por recorrência, o oitavo termo dessa P.G. é:

$$a_8 = 3\cdot 2^7 = 384.$$

Generalizando essa ideia recursiva, alcança-se a fórmula do termo geral de uma P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vamos destacar três propriedades importantes em uma P.G.. A saber:

1ª) Em uma P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Exemplo: (1, 4, 16, 64, 256)
$16^2 = 256 \cdot 1$

2ª) O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma P.G. é igual ao produto desses extremos.

Exemplo: (1, 4, 16, 64, 256)
$256 \cdot 1 = 4 \cdot 64$

3ª) Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o sucessor e antecessor. Então, seja a P.G. (a, b, c, …), tem-se que: $b^2 = a.c.$

Exemplo: (1, 4, 16, 64, 256)
$4^2 = 1 \cdot 16$; $16^2 = 4 \cdot 64$

A soma dos termos de uma P.G. finita com muitos termos pode ser feita através de uma fórmula que será demonstrada a seguir.

A soma desses *n* elementos de uma P.G. é dada inicialmente por:

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Sabendo que:

$$a_2 = a_1 \,.\, \mathrm{q}$$
$$a_3 = a_1 \,.\, q^2$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$$

A soma dos termos dessa P.G. será:

$$Sn = a_1 + a_1 \,.\, q + a_1 \,.\, q^2 + a_1 \,.\, q^3 + ... + a_1 \,.\, q^{n-2} + a_1 \,.\, q^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por q, obtém-se:

$$q \,.\, Sn = a_1 .\, q + a_1 \,.\, q^2 + a_1 \,.\, q^3 + a_1 \,.\, q^4 + ... + a_1 \,.\, q^{n-1} + a_1 \,.\, q^n.$$

Subtraindo esta equação da anterior:

$$\begin{array}{rl} - & Sn = a_1 + \cancel{a_1 \,.\, q} + \cancel{a_1 \,.\, q^2} + \cancel{a_1 \,.\, q^3} + ... + \cancel{a_1 \,.\, q^{n-1}} \\ & \underline{q \,.\, Sn = \cancel{a_1 .\, q} + \cancel{a_1 \,.\, q^2} + \cancel{a_1 \,.\, q^3} + ... + \cancel{a_1 \,.\, q^{n-1}} + a_1 \,.\, q^n} \end{array}$$

$$Sn \,.\, (q - 1) = a_1 \,.\, (q^n - 1)$$

Isolando o termo Sn (soma dos elementos), obtém-se a seguinte fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}, \text{ com } q \neq 1.$$

Já a fórmula para se obter a soma dos termos de uma P.G. infinita é:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Alguns casos em que a razão q pertence ao intervalo $-1 < q < 1$, verifica-se que quantidade de termos (n) se aproxima do infinito ($+\infty$), logo q^n tende ao valor zero. Portanto, substituindo q^n por zero na fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita alcança-se a fórmula capaz de determinar a soma dos termos de uma P.G. infinita. Segue a demonstração:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

4

Coletânea de atividades para Educação Básica

As atividades expostas neste capítulo apelam para beleza dos fractais como elemento atrativo aos discentes e são sugeridas como ferramentas para:

• Prática dos conceitos básicos de área, perímetro e semelhança de figuras planas;

• Obtenção da fórmula do termo geral da P.G.; e

• Aumento da percepção visual e ensaio da ideia de volume de sólidos geométricos.

O roteiro de cada atividade foi escrito de forma consonante ao modelo dos níveis de desenvolvimento cognitivo defendidos por van-Hiele anteriormente descritos neste trabalho no Capítulo 2, Seção 2.2, a fim de modernizar o processo de ensino e aprendizagem tornando-o mais significativo.

> *"A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova ideia se relaciona aos conhecimentos prévios do indivíduo. Motivado por uma situação que faça sentido, proposta pelo professor, o aluno amplia, avalia, atualiza e reconfigura a informação anterior, transformando-a em nova."* (*AUSUBEL,1968, p. 31)*

O gabarito dessas atividades está exposto nos apêndices que se encontram no final da dissertação.

4.1 Atividade envolvendo perímetro e área de fractais utilizando expressões algébricas

Atividade para a sala de aula: Expressões algébricas na representação do perímetro e da área de fractais.

Duração: 50 minutos.

Objetivos: Utilizar expressões algébricas na generalização das medidas de perímetro e de área em cada iteração dos fractais.

Pré-requisitos: Potências, perímetro e área de figuras planas.

Conceitos matemáticos desenvolvidos: Desenvolvimento de técnicas de desenho geométrico e fixação de conteúdos como perímetro, área, expressão algébrica e números racionais.

Material necessário: Folhas de papel ofício, lápis, borracha, régua e compasso.

Organização da classe: Turma disposta em duplas ou trios propiciando o trabalho organizado e cooperativo.

Descrição das atividades para os alunos:

1) Observe o fractal da figura 1 e descreva o seu processo de formação.

2) Preencha a tabela 1.

3) Agora desenhe um quadrado de lado 9 cm e reproduza o fractal da figura 1 até o nível 2.

4) Monte uma tabela com as medidas do lado, do perímetro e da área dos quadrados que você acabou de desenhar.

5) Analise os dados que você inseriu em sua tabela e repare se há alguma sequência numérica lógica em cada coluna. Caso haja, explique-a com suas palavras e preencha a tabela 2.

6) Determine a quantidade de quadrados e suas respectivas medidas de perímetro e de área no nível 5.

7) Generalize fórmulas para se obter:

a) a quantidade de quadrados em qualquer iteração, ou seja, na iteração *n*;

b) o perímetro do quadrado da *n-ésima* iteração;

c) a área do quadrado da iteração *n*.

A tabela 6 correlaciona cada etapa desta atividade com os níveis e fases do Modelo van-Hiele.

Tabela 6 - Correlação do Modelo van-Hiele com as etapas da atividade envolvendo perímetro e área de fractais utilizando expressões algébricas.

ETAPA	NÍVEL	FASE
(1)	0 - Visualização	1 - Informação
(2)	1 - Análise	1 - Informação
(3)	1 - Análise	2 - Orientação dirigida
(4)	1 - Análise	3 - Explanação
(5)	1 - Análise	2 - Orientação dirigida
(6)	2 - Dedução informal	4 - Orientação livre
(7)	2 - Dedução informal	5 - Integração

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na primeira etapa, os alunos se encontram no nível 0, pois só é pedido que eles reconheçam o processo de formação da figura através de uma simples observação. Já na segunda etapa eles alcançam o nível 1, pois passam a analisar a quantidade crescente de quadrados a cada iteração para preencher uma tabela. Eles se mantêm neste nível ao desenhar um fractal semelhante com medidas pré determinadas e montando e completando novas tabelas até o quinto item da atividade. Na sexta e sétima etapas eles atingem o nível 2, pois deduzem que há uma ordenação lógica a respeito da quantidade de quadrados e das medidas dos seus lados, perímetros e áreas em cada nível do fractal.

Os níveis foram sendo alcançados de forma gradativa do nível 0 até o nível 2 nesta atividade e as cinco fases de aprendizagem defendidas por van-Hiele foram utilizadas da maneira mais conveniente às intenções do docente. Pois diferentemente dos níveis, essas não obedecem ao rigor de uma sequência. Elas devem ser utilizadas de maneira a adequar-se à necessidade dos alunos.

Percebe-se que no primeiro e no segundo item da atividade o papel do docente foi de interrogar os alunos a respeito do que eles conseguiam observar (fase 1). Já na terceira etapa houve uma orientação dirigida (fase 2), pois o desenho pedido aos alunos foi previamente determinado com instruções claras e objetivas, incluindo até mesmo suas medidas. Na quarta etapa da atividade, a fase 3 da explanação foi exercida porque, ao montar suas tabelas, os alunos puderam dialogar a respeito de suas conclusões até aquele momento. No quinto item, novamente recorre-se à orientação dirigida. Na penúltima etapa os alunos são desafiados por um problema que pode ser resolvido completando a tabela do item anterior ou através de uma fórmula que eles já possam obter por intuição ou recorrência. Neste momento, o docente exerce a fase 4, que é quando, segundo van-Hiele, os alunos realmente atestam que aprenderam. No último item da atividade há uma integração de tudo que viram e experimentaram durante toda a atividade. Com isso os aprendizes organizam suas ideias e formam uma nova rede de conhecimentos a fim de alcançar níveis de desenvolvimento cognitivo mais elevados.

As figuras 59 e 60 referem-se às páginas desta atividade formatada entregue aos discentes em sala de aula.

Figura 59 - Primeira página da atividade 4.1.

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

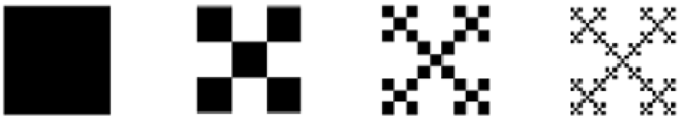
Nome: ____ **Turma:**________

Atividade: Perímetro e Área dos Fractais.

"Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, sendo cada uma delas semelhante ao objeto original. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo."

Observe o fractal abaixo e responda aos itens a seguir.

Figura 1 - Fractal penta-quadrados.



Fonte: https://misamatematica.blogspot.com/2018/10/geometria-dos-fractais-pesquisa.html

1) Você consegue explicar o processo de formação do fractal acima? Que fração mede o lado de cada quadrado em relação ao nível anterior?

____

____

____

2) Preencha a tabela 1 com a quantidade de quadrados em cada nível.

Tabela 1 - Quantidade de quadrados a cada iteração.

Níveis	Quantidade de quadrados
0	1
1	
2	
3	

3) Pegue duas folhas de papel ofício e desenhe um quadrado de lado 9 cm. A partir dele reproduza o fractal da figura 1 até o nível 2.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 - Segunda página da atividade 4.1.

4) Monte uma tabela informando as medidas do lado, do perímetro e da área dos quadrados em cada nível que você desenhou no item anterior.

5) Analise bem os dados da tabela que você construiu no item anterior. Observe o comportamento dos números em cada linha e coluna para preencher a tabela 2 com a medida do lado do quadrado e sua respectiva área em cada nível, considerando L a medida do lado do quadrado no nível 0.

Tabela 2 - Medidas do lado e da área dos quadrados em cada iteração.

Níveis	**Medida do lado do quadrado**	**Medida da área do quadrado**
0	L	L^2
1		
2		
3		

6) Os níveis podem ser chamados de iterações. Logo a figura do nível 1 é a primeira iteração feita no quadrado. Determine o perímetro e a área dos quadrados obtidos na quinta iteração.

7) Após ter preenchido as tabelas 1 e 2 e ter feito todos os itens anteriores, você seria capaz de generalizar uma fórmula para se obter:

a) a quantidade de quadrados em qualquer iteração, ou seja, na iteração n.

b) o perímetro do quadrado da *n-ésima* iteração.

c) a área do quadrado da *n-ésima* iteração.

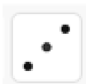
Fonte: Elaborada pelo autor.

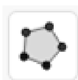
Esta atividade pode ser ofertada a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, pois propicia a utilização de expressões algébricas e números racionais em contextos simples envolvendo perímetro e área de fractais. Mais uma vez apela-se à beleza da Geometria Fractal para atrair a atenção do discente a fim de se desenvolver o conceito e a aplicabilidade da Álgebra, que geralmente é introduzida neste ano de escolaridade sem contextualização alguma na maioria dos livros didáticos em circulação.

4.2 Atividade com fractais envolvendo razões de semelhança

Atividade para a sala de aula: O conceito de semelhança e os fractais
Duração: 100 minutos.
Objetivos: Verificar razões de semelhança entre perímetro e área de polígonos semelhantes através da construção de fractais no Geogebra.
Pré-requisitos: Ponto médio de um segmento de reta, classificação de triângulos, conhecimento das propriedades do quadrado, semelhança de polígonos, teorema de Pitágoras, razão entre dois números e operações com radicais.
Conceito matemático desenvolvido: Razão de semelhança.
Material necessário: Folhas de papel ofício, lápis, borracha, régua, compasso e computador com Geogebra instalado.
Organização da classe: Turma disposta em duplas propiciando o trabalho organizado e cooperativo.
Descrição das atividades para os alunos:

a) Abra o Geogebra. Clique no botão "Polígono Regular"  e construa um quadrado ABCD cujo lado meça 8 cm.

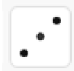
b) Clique no botão "Ponto Médio"  e marque os pontos médios E e F sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.

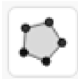
c) Agora, clique no botão "Polígono Regular"  selecionando os pontos médios E e F e construa o quadrado EFGH.

d) Verifique se a medida de EF é equivalente a $\sqrt{BE^2 + BF^2}$. Caso seja, explique o porquê?

e) Qual a razão entre os lados dos quadrados ABCD e EFGH? Saiba que esta razão é chamada razão de semelhança, já que os quadrados citados são polígonos semelhantes.

f) Determine a razão entre os perímetros dos quadrados ABCD e EFGH. Agora calcule também a razão entre suas áreas.

g) Obtenha os pontos médios I e J dos segmentos EF e FG, respectivamente, utilizando novamente o botão “Ponto Médio” .

h) Agora selecione o botão “Polígono Regular” , clique sobre os pontos I e J e obtenha o quadrado IJKL.

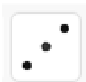
i) Repita os procedimentos (g) e (h) a fim de se obter o quadrado MNOP.

j) Complete a tabela 1 através de cálculos e com auxílio da janela algébrica do software.

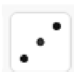
k) Neste momento você já tem um fractal inspirado em quadrados. Agora selecione o botão “Mover”  e arraste livremente os pontos A e B, observando na janela algébrica do software que para quaisquer medidas de AB a razão de semelhança entre os quadrados ABCD, EFGH. IJKL e MNOP se mantêm, assim como a razão entre suas áreas que é exatamente o quadrado da razão de semelhança.

Vamos ver se a razão de semelhança entre as áreas de triângulos semelhantes é também igual ao quadrado da razão de semelhança construindo um conhecido fractal inspirado em triângulos equiláteros, o Triângulo de Sierpinski, com auxílio do Geogebra.

l) Selecione o botão “Polígono Regular”  e construa um triângulo cujo lado meça 6 cm.

m) Clique no botão “Ponto Médio”  e marque os pontos médios D e E sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.

n) Agora, clique no botão “Polígono Regular”  selecionando os pontos médios D e E e construa o triângulo eqüilátero DEF.

o) Obtenha os pontos médios G e H dos segmentos AF e AD, respectivamente, utilizando novamente o botão “Ponto Médio” .

p) Agora selecione o botão “Polígono Regular” , clique sobre os pontos G e H e obtenha o triângulo GHI.

q) Repita este último procedimento nos triângulos BDE e CEF a fim de se obter os triângulos JKL e MNO congruentes ao triângulo GHI.

r) Neste momento você já conseguiu obter o nível 2 do Triângulo de Sierpinski. Agora com o auxílio da janela algébrica do software e através de cálculos complete a tabela 2. A que conclusão você chegou?

s) Com o botão “Mover”  arraste livremente os pontos A e B e verifique se sua conclusão está correta.

A tabela 7 correlaciona cada etapa desta atividade com os níveis e fases do Modelo van-Hiele.

Tabela 7 - Correlação do Modelo van-Hiele com as etapas da atividade de fractais envolvendo razões de semelhança.

ETAPA	NÍVEL	FASE
(a)	0 - Visualização	2 - Orientação dirigida
(b)	0 - Visualização	2 - Orientação dirigida
(c)	0 - Visualização	2 - Orientação dirigida
(d)	1 - Análise	3 - Explanação
(e)	1 - Análise	3 - Explanação
(f)	1 - Análise	3 - Explanação
(g)	1 - Análise	2 - Orientação dirigida
(h)	1 - Análise	2 - Orientação dirigida
(i)	1 - Análise	2 - Orientação dirigida
(j)	1 - Análise	3 - Explanação
(k)	2 - Dedução informal	5 - Integração

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta atividade, os itens (a), (b) e (c) mantém os educandos no nível 0, pois trata-se apenas do reconhecimento de ferramentas simples do software de Geometria Dinâmica, o Geogebra. A fase de aprendizagem nestes três primeiros itens é a 2, pois o professor dá o passo a passo minucioso das tarefas que os educandos devem executar.

Já nos itens (d), (e) e (f) os alunos devem analisar as construções antes de darem suas respostas. Neste momento eles alcançam o nível de desenvolvimento cognitivo 1 através da fase 3, porque essa análise é feita em diálogo aberto entre os discentes e o docente.

As etapas (g), (h) e (i) retomam as instruções específicas dadas pelo educador (fase 2) e mantém os aprendizes no nível 1 ao qual já se encontravam, pois os níveis não regridem, segundo van-Hiele.

No item (j) desta atividade os alunos completam a tabela e observam o comportamento das razões de semelhança entre os quadrados e mais uma vez o diálogo é propiciado pelo docente (fase 3).

Na tarefa (k) os discentes alcançam o nível 2, pois percebem que a razão entre os perímetros dos quadrados é sempre igual à razão de semelhança entre eles e que a razão entre suas áreas é sempre o quadrado da razão de semelhança deles. Neste momento, eles fazem uma integração sobre tudo que foi vivenciado e experimentado.

Do item (l) até o item (s) repetem-se sistematicamente os itens iniciais com outro tipo de fractal apenas com o intuito de reforçar o conhecimento adquirido pelos discentes. Isso permite que eles vejam que o comportamento analisado a cerca das razões de semelhança não se atribui apenas aos quadrados, mas sim em todos os polígonos semelhantes.

As figuras 61, 62 e 63 referem-se às páginas desta atividade formatada entregue aos discentes em sala de aula.

Figura 61 - Primeira página da atividade 4.2.

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

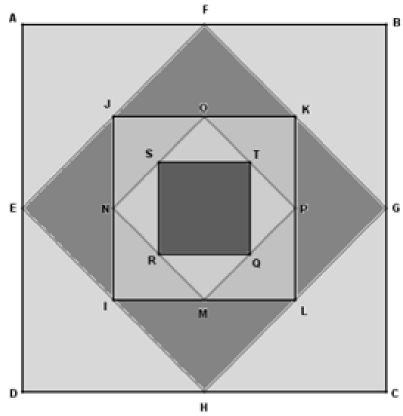
Nome: ____ **Turma:**________

Atividade: O conceito de semelhança e os fractais.

"Fractais são estruturas geométricas cujas propriedades repetem-se em quaisquer escalas."

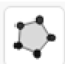
A figura abaixo é um fractal inspirado em quadrados. Nós vamos construir um utilizando o software Geogebra e durante o processo de construção bem como no final vamos observar algumas medidas na janela algébrica a fim de se estabelecer algumas conclusões ou conjecturas.

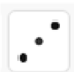
Figura 1 - Fractal inspirado em quadrados.



Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601

Para construir a figura 1 no Geogebra basta seguir as orientações abaixo:

a) Abra o Geogebra e clique no botão "Polígono Regular"  para construir um quadrado ABCD cujo lado meça 8 cm.

b) Clique no botão "Ponto Médio"  e marque os pontos médios E e F sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.

c) Agora, clique no botão "Polígono Regular"  selecionando os pontos médios E e F e construa o quadrado EFGH.

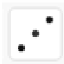
d) Verifique se a medida de EF é equivalente a $\sqrt{BE^2 + BF^2}$. Caso seja, explique o porquê?

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 - Segunda página da atividade 4.2.

e) Qual a razão de semelhança entre os quadrados ABCD e EFGH?

f) Determine a razão entre os perímetros dos quadrados ABCD e EFGH. Agora calcule também a razão entre suas áreas.

g) Obtenha os pontos médios I e J dos segmentos EF e FG, respectivamente, utilizando novamente o botão "Ponto Médio" .

h) Agora selecione o botão "Polígono Regular" , clique sobre os pontos I e J e obtenha o quadrado IJKL.

i) Repita os procedimentos (g) e (h) a fim de se obter o quadrado MNOP.

j) Complete a tabela 1 através de cálculos e com auxílio da janela algébrica do software.

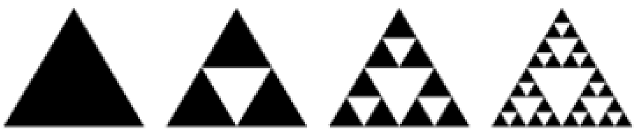
Tabela 1 - Medidas dos quadrados.

	ABCD	EFGH	IJKL	MNOP
Lado				
Perímetro				
Área				

k) Neste momento você já concluiu a construção do fractal inspirado em quadrados. Agora selecione o botão "Mover"  e arraste livremente os pontos A e B, observando a janela algébrica do software para quaisquer medidas de AB. A razão de semelhança entre os quadrados se altera? E a razão entre os perímetros? Você chegou a alguma conclusão quanto à razão entre as áreas dos quadrados? Qual?

Um dos fractais mais conhecidos é o Triângulo de Sierpinski (Figura 2). Vamos construí-lo também no Geogebra e observar a razão de semelhança entre os triângulos equiláteros obtidos em cada iteração da figura.

Figura 2 - Primeiras etapas da construção do Triângulo de Sierpinski.

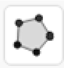


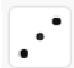
Fonte: https://misamatematica.blogspot.com/2018/10/geometria-dos-fractais-pesquisa.html

Fonte: Elaborada pelo autor.

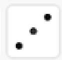
Figura 63 - Terceira página da atividade 4.2.

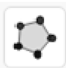
Para construir a figura 1 no Geogebra basta seguir as orientações abaixo:

l) Selecione o botão "Polígono Regular"  e construa um triângulo cujo lado meça 6 cm.

m) Clique no botão "Ponto Médio"  e marque os pontos médios D e E sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.

n) Agora, clique no botão "Polígono Regular"  selecionando os pontos médios D e E e construa o triângulo eqüilátero DEF.

o) Obtenha os pontos médios G e H dos segmentos AF e AD, respectivamente, utilizando novamente o botão "Ponto Médio" .

p) Agora selecione o botão "Polígono Regular" , clique sobre os pontos G e H e obtenha o triângulo GHI.

q) Repita este último procedimento nos triângulos BDE e CEF a fim de se obter os triângulos JKL e MNO congruentes ao triângulo GHI.

r) Neste momento você já conseguiu obter o nível 2 do Triângulo de Sierpinski. Agora com o auxílio da janela algébrica do software e através de cálculos complete a tabela 2.

Tabela 2 - Medidas dos triângulos.

	ABC	DEF	GHI
Lado			
Perímetro			
Área			

A que conclusão você chegou quanto à razão entre os perímetros e entre as áreas dos triângulos ABC, DEF e GHI?

s) Com o botão "Mover"  arraste livremente os pontos A e B e verifique se sua conclusão está correta.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esta atividade pode ser ofertada a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, pois propicia a observação da razão de semelhança entre os perímetros e entre as áreas de polígonos semelhantes de maneira interativa e moderna, pois o educando tem a possibilidade de observar medidas e resultados durante a construção dos fractais. Outro atrativo é a História dos Fractais que pode ser explorada pelo docente à medida que o discente constrói seus fractais.

Esta atividade é introdutória, pois serve apenas para o estabelecimento de conjecturas e despertar o caráter investigativo do aprendiz. É necessário que, logo após, o docente demonstre algebricamente a razão de semelhança entre os perímetros e entre as áreas de polígonos semelhantes a fim de se obter a definição e o conceito de semelhança atingindo a fase 5 (integração).

4.3 Atividade para construção do conceito de P.G. utilizando fractais

Atividade para a sala de aula: Construindo fractais para obtenção da fórmula do termo geral da P.G..

Duração: 100 minutos.

Objetivos: Conhecer os fractais; identificar a presença deles no nosso cotidiano; e deduzir a fórmula do termo geral da P.G..

Pré-requisitos: Reconhecimento de formas geométricas simples e cálculo de potências.

Conceitos matemáticos desenvolvidos: percepção visual, semelhança de figuras, sequências numéricas; raciocínio lógico-matemático; P.G..

Material necessário: Computador, data-show, internet, folhas color set, lápis, borracha, régua e tesoura.

Organização da classe: Turma disposta em duplas ou trios propiciando o trabalho organizado e cooperativo.

Descrição das atividades para os alunos:

1) Assista ao vídeo do youtube acessando: www.youtube.com/watch?v=akG8rrE3JcU e compartilhe suas idéias e dúvidas com o professor e seus colegas.

2) Desenhe um fractal.

3) Monte um fractal com color set, tesoura, lápis e régua, seguindo as orientações.

4) Preencha a tabela 1 e observe o comportamento das sequências numéricas da segunda e terceira colunas.

5) Verifique se o seu fractal ficou igual ao do seu colega? E se as folhas recebidas tivessem tamanhos diferentes, vocês obteriam fractais semelhantes?

7) Preencha a tabela 2 e descubra a razão da P.G. descrita pelo fractal.

8) Preencha a tabela 3 e deduza a fórmula do termo geral da P.G..

A tabela 8 correlaciona cada etapa desta atividade com os níveis e fases do Modelo van-Hiele.

Tabela 8 - Correlação do Modelo van-Hiele com as etapas da atividade para construção do conceito de P.G. utilizando fractais.

ETAPA	NÍVEL	FASE
(1)	0 - Visualização	3 - Explanação
(2)	0 - Visualização	4 - Orientação livre
(3)	0 - Visualização	2 - Orientação dirigida
(4)	0 - Visualização	3 - Explanação
(5)	1 - Análise	3 - Explanação
(6)	2 - Dedução informal	3 - Explanação
(7)	3 - Dedução formal	5 - Integração
(8)	3 - Dedução formal	5 - Integração

Fonte: Elaborado pelo autor.

As quatro primeiras etapas desta atividade mantém os aprendizes no nível de desenvolvimento cognitivo 0, segundo o Modelo de van-Hiele, pois todas propiciam apenas o reconhecimento de algo novo para eles. Já as fases de aprendizagem se diversificam: a primeira etapa propicia um diálogo acerca do vídeo exibido sobre fractais (Fase 3 - Explanação); a segunda etapa leva o aluno a criação de um fractal através de desenhos (Fase 4 - Orientação Livre); na terceira os alunos montam um fractal inspirado em paralelepípedos com material concreto seguindo rigorosamente as instruções fornecidas pelo docente (Fase 2 - Orientação Dirigida); por fim, no quarto item da atividade os discentes completam uma tabela com dados numéricos obtidos através da manipulação do material concreto e um diálogo acerca da tabulação desses dados é propiciado pelo professor (Fase 3 - Explanação).

Na quinta tarefa os educandos alcançam o nível de desenvolvimento cognitivo 1 com o professor exercendo a fase de aprendizagem 3, pois os educandos analisam as sequências numéricas e trocam ideias entre si antes de responder sobre um possível padrão de formação com respeito aos fractais que acabaram de montar.

Na tarefa 6 os educandos atingem o nível 2, porque eles percebem uma ordenação lógica a respeito da quantidade de paralelepípedos obtidos em cada iteração e o diálogo continua acerca do estabelecimento de hipóteses e conjecturas sobre esta sequência numérica.

Nas duas últimas tarefas desta atividade os discentes atingem o nível 3, pois conseguem deduzir formalmente a razão e a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, respectivamente. E é neste momento que os alunos sintetizam (Fase 5 - Integração) tudo que aprenderam, formando uma nova rede de conhecimentos.

As figuras 64, 65, 66 e 67 referem-se às páginas desta atividade formatada entregue aos discentes em sala de aula.

Figura 64 - Primeira página da atividade 4.3.

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

Nome: ____ **Turma:**________

Atividade: Construindo fractais para obtenção da fórmula do termo geral da P.G.

1) Explique com suas palavras o que é um fractal e onde ele pode ser encontrado. Após responder troque idéias com seus colegas a cerca de suas conclusões.

____

____

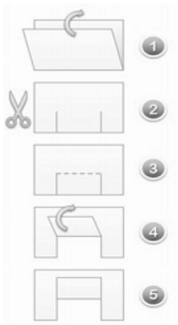
____

____

2) Desenhe um fractal. Seja criativo.

3) Construa um fractal com color set, tesoura, lápis e régua, seguindo as instruções abaixo conforme a figura 1.

Figura 1 - Instruções de construção do fractal (parte I).



1ª) Dobre a folha ao meio;

2ª) Faça dois cortes como na figura;

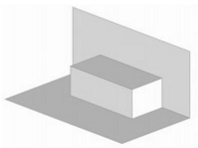
3ª) A linha tracejada representa onde será feita uma dobra;

4ª) Dobre conforme a figura;

5ª) Agora abra as dobras de maneira que se obtenha um paralelepípedo como na figura 2.

Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/
Acesso em 15/11/2019.

Figura 2 - Primeira iteração do fractal.

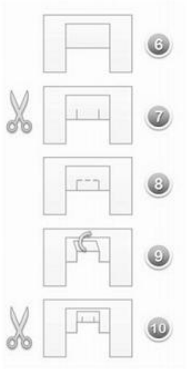


Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 15/11/2019.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 - Segunda página da atividade 4.3.

Figura 3 - Instruções de construção do fractal (parte II).



6ª) Dobre novamente como no último passo da sequência anterior;

7ª) Faça novamente dois corte como na figura;

8ª) Marca da dobra;

9ª) Dobre conforme a figura (está pronta a segunda iteração);

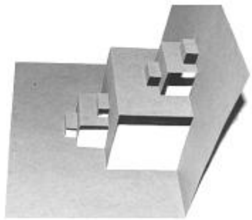
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/
Acesso em 15/11/2019.

Figura 4- Segunda iteração do fractal.

Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 20/11/2019.

10ª) Voltando à dobra anterior pode se fazer o corte para a terceira iteração e obter a figura 5.

Figura 5 - Terceira iteração do fractal.



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 20/11/2019.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 - Terceira página da atividade 4.3.

4) Sem continuar fazendo iterações no color set, complete a tabela abaixo.

Tabela 1 - Quantidade de paralelepipedos a cada iteração.

Iteração	Quantidade de paralelepípedos novos	Quantidade total de paralelepípedos
1ª	1	1
2ª	2	3
3ª		
4ª		
5ª		
6ª		

5) Seu fractal ficou igual ao do seu colega? E se as folhas recebidas tivessem tamanhos diferentes, vocês obteriam fractais semelhantes?

____

____

6) Com a tabela 1 totalmente preenchida, explique a lógica da sequência numérica da quantidade de paralelepípedos novos e da quantidade total de paralelepípedos a cada iteração do fractal. Existe algum padrão de repetição nessas sequências? Qual?

____

____

7) Reescreva toda a coluna de paralelepípedos novos da tabela 1 em forma de potências de mesma base e, em seguida, informe quantos paralelepípedos novos haverá na iteração n?

Tabela 2 - Quantidade de paralelepípedos novos em forma de potência.

Iteração	Quantidade de paralelepípedos novos	Quantidade de paralelepípedos novos em potências de mesma base
1ª	1	
2ª	2	
3ª	4	
4ª		
5ª		
...	...	...
n-ésima		

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 67 - Quarta página da atividade 4.3.

8) Reparou que o termo seguinte é sempre o anterior multiplicado por uma constante. Esta constante é chamada de **razão** neste tipo de sequência numérica e vamos representá-la por $\boldsymbol{q}$. Agora preencha cada linha da tabela 3 onde a quantidade de paralelepípedos novos é calculada em função do primeiro termo da sequência $\boldsymbol{a_1}$ e da razão $\boldsymbol{q}$.

Tabela 3 - Termos da sequência em função de a_1 e q.

Termos da sequência	**Quantidade de paralelepípedos novos em cada iteração**	**Quantidade de paralelepípedos novos em função do a_1 e q**
a_1	1	$a_1 = a_1 \cdot q^0$
a_2	2	$a_2 = a_1 \cdot q^1$
a_3	4	$a_3 = a_1 \cdot q^2$
a_4	16	
...	...	...
a_n		

Pronto! Na última linha da terceira coluna você deduziu a **fórmula do termo geral da P.G.**. Com esta fórmula você deduz qualquer termo de uma progressão geométrica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esta atividade pode ser trabalhada a partir do 1° ano do Ensino Médio de maneira a contextualizar um conceito naturalmente algébrico (P.G.) com a Geometria Fractal. Os discentes podem visualizar o comportamento da P.G. através da manipulação de material concreto inicialmente até chegar à fórmula do termo geral da P.G..

Entretanto esta atividade também pode ser ofertada a partir do 6° ano do Ensino Fundamental desde que se exclua os dois últimos itens (7 e 8). Os educandos já teriam contato com fractais e desenvolveriam o conceito de potências e sequências numéricas em uma aula compartilhada com o professor de Artes, por exemplo.

Enfim, as adaptações são livres e diversas para quaisquer realidades e circunstâncias.

4.4 Atividade para prática do cálculo de área e volume do cubo utilizando fractais

Atividade para a sala de aula: Calculando área e volume das primeiras iterações da Esponja de Menger.

Duração: 50 minutos.

Objetivos: Conhecer fractais; reforçar o cálculo de área e volume de figuras tridimensionais.

Pré-requisitos: Conhecimento das fórmulas de área e volume do cubo.

Conceitos matemáticos desenvolvidos: percepção visual, semelhança de figuras geométricas espaciais, sequências numéricas, área e volume do cubo.

Material necessário: Computador, data-show, internet, folhas de papel ofício, lápis e borracha.

Organização da classe: Turma disposta em duplas propiciando o trabalho organizado e cooperativo.

Descrição das atividades para os alunos:

1) Assista ao vídeo do youtube acessando:
https://www.youtube.com/watch?v=2flvPOwzZu0

2) Considere o cubo da figura 1 com aresta de medida *a* e preencha a tabela a seguir.

3) Troque idéias e compartilhe suas dúvidas com o professor e seus colegas a respeito do volume e da área deste fractal na *n-ésima* iteração.

A tabela 9 correlaciona cada etapa desta atividade com os níveis e fases do Modelo van-Hiele.

Tabela 9 - Correlação do Modelo van-Hiele com as etapas da atividade envolvendo fractais para cálculo de área e volume das primeiras iterações da Esponja de Menger.

ETAPA	NÍVEL	FASE
(1)	0 - Visualização	1 - Informação
(2)	1 - Análise	3 - Explanação
(3)	2 - Dedução informal	5 - Integração

Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira tarefa desta atividade propicia o reconhecimento de um fractal histórico clássico através da exibição de um vídeo. Sendo assim, segundo o Modelo van-Hiele, os alunos estão no nível de desenvolvimento cognitivo 0 e o docente desempenhando a primeira fase de aprendizagem.

Na segunda etapa os discentes alcançam o nível 1, pois começam a analisar o processo iterativo do fractal no tocante à quantidade de cubos removidos e restantes, bem como as medidas de suas respectivas arestas a cada iteração. Esta etapa é feita valendo-se da fase de aprendizagem 3, pois ocorre a partir da troca de ideias entre os discentes e o docente.

No último item da atividade os educandos não formalizam, mas intuem conclusões a respeito do volume e da área da Esponja de Menger na n-ésima iteração. Logo, segundo van-Hiele, eles alcançam o nível cognitivo seguinte e sintetizam o que aprenderam, tornando-se aptos a alcançarem níveis de cognição mais elevados.

A figura 68 refere-se a esta atividade formatada entregue aos discentes em sala de aula.

Figura 68 - Atividade 4.4.

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

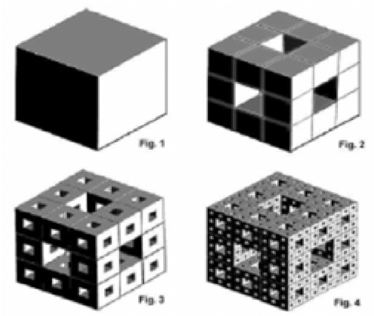
Nome: ____ **Turma:**________

Atividade: Calculando área e volume das primeiras iterações da Esponja de Menger.

Após ter assistido ao vídeo do youtube acessando o link abaixo, responda o que se pede:

https://www.youtube.com/watch?v=2flvPOwzZu0

1) A imagem abaixo retrata as primeiras iterações de um conhecido fractal. Como se chama este fractal?



2) Considere a a medida da aresta da figura 1 e complete a tabela abaixo.

	Fig. 1	**Fig. 2**	**Fig. 3**	**Fig. 4**
Aresta	a			
Quantidade de cubos				
Volume				
Área total				

3) Troque ideias com seus colegas a respeito do volume e da área total deste fractal na *n-ésima* iteração.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta atividade pode ser trabalhada a partir do 2º ano do Ensino Médio de maneira a reforçar as técnicas para cálculo de área e de volume de sólidos geométricos a partir de iterações de um conhecido fractal. A atividade também propicia a discussão do conceito de infinito e de sequências cabendo ao docente conduzir estas discussões de maneira condizente ao nível da curiosidade dos educandos.

5

Aplicação no ensino e resultados

Em novembro de 2019, no Colégio Estadual Guadalupe, situado no Rio de Janeiro – RJ a atividade para obtenção da fórmula do termo geral da P.G. (atividade 4.3) foi aplicada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio Regular e também em uma turma do módulo 3 da Nova Educação de Jovens e Adultos (NEJA).

No 3º ano havia 20 alunos cuja média de idade era 18 anos aproximadamente. No NEJA 3 havia 16 alunos cuja faixa etária média era de 36 anos. No entanto a variação de idade entre os estudantes do NEJA 3 é muito maior que no 3º ano. Enquanto que no 3º ano a diferença de idade entre o aluno mais velho e o mais novo era de 4 anos apenas; no NEJA 3 esta diferença era de 31 anos. Contudo a atividade foi concluída com êxito por todos os discentes de ambas as turmas.

Devido à carência de professores na rede pública estadual de ensino, alguns desses alunos não tiveram contato com progressões aritmética e geométrica em anos de escolaridade anteriores. Além disso, era fato que nunca tinham ouvido falar de Geometria Fractal. Ou seja, a turma encontrava-se segundo o Modelo van-Hiele no nível 0 (Visualização ou Reconhecimento).

Diante deste cenário era necessário falar um pouco sobre fractais e para isso foi exibido um vídeo curto do youtube de linguagem simples. Os aprendizes ficaram fascinados. Suas curiosidades aguçadas despertaram vontade de desenhar e um diálogo informal sobre semelhança e infinito foi iniciado. Neste momento, a turma ainda se encontrava no nível de visualização e passando: pela fase de aprendizagem 1 (Interrogação ou Informação) ao assistir o vídeo; pela fase 3 (Explanação) ao discutir sobre o vídeo assistido; pela fase 4 (Orientação Livre) ao criar um fractal através do desenho.

Em seguida, eles montaram um fractal inspirado em paralelepípedos utilizando material concreto (lápis, borracha, régua, papel, tesoura e cola) e a cada iteração realizada com o papel preenchiam uma tabela que ao final, por recorrência ou intuição, perceberam que se tratava de uma sequência numérica cujo termo seguinte era sempre o anterior multiplicado por um número que era constante, que nunca se alterava.

Durante a construção dos paralelepípedos com material concreto, a turma passava pela fase de aprendizagem 2 (Orientação Dirigida) do Modelo van-Hiele, pois seguiam um passo a passo minucioso previamente descrito na atividade. Ao começar a tabular o número de paralelepípedos novos em cada iteração bem como a quantidade total de paralelepípedos analisaram que os números formavam uma sequência numérica que obedecia a uma lógica simples e constante. Neste momento, a turma atingiu o nível de desenvolvimento cognitivo 1 (Análise). Em diálogo aberto entre discentes e o docente (Fase 3 - Explanação), os estudantes deduziram que a quantidade de paralelepípedos novos que surgiam a cada iteração poderiam ser representados em potências de base 2, logo alcançaram o nível 2 (Ordenação ou Dedução Informal).

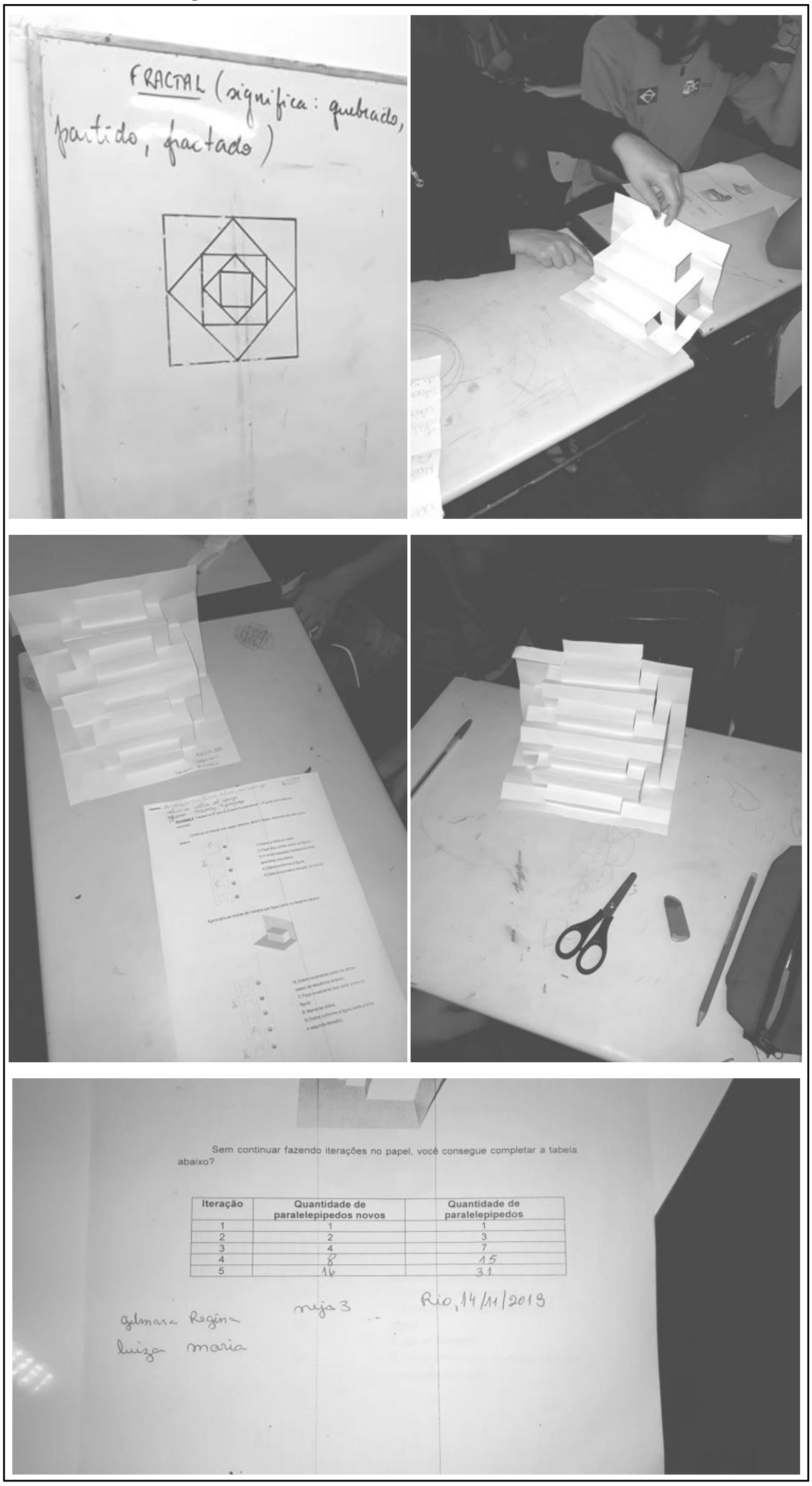
Alguns alunos lembraram-se do conceito da P.G., mas foram justamente aqueles que nunca haviam ouvido falar do tema que obtiveram a fórmula do termo geral da P.G. mais rapidamente ao completar as últimas tabelas da atividade (Fase 5 - Integração) chegando assim no nível 3 (Dedução Formal).

Ao finalizar esta atividade que utiliza um fractal como elemento atrativo e que foi elaborada de acordo com os níveis graduais de desenvolvimento cognitivo defendidos por van-Hiele, os estudantes sentiram-se motivados a aprender mais e a grande maioria fez perguntas e indagações como as que seguem:

"- Por que não me ensinaram assim antes?"
"- Adorei esta aula! Quando teremos outra?"
"- Gostei de Geometria! Por que não ensinam assim?"

A figura 69 retrata alguns desses momentos vividos.

Figura 69 - Fotos do desenvolvimento da atividade 4.3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6

Considerações finais

O presente trabalho serve como fonte de inspiração para professores de Matemática da educação básica que desejam estimular os estudantes apesar: da burocracia administrativa, de circunstâncias socioeconômicas e da falta de políticas públicas verdadeiramente pedagógicas, que desmotivam docentes e discentes por todo o Brasil.

Com a beleza peculiar dos fractais observada em: vídeos, desenhos em papel e até mesmo em softwares educacionais, os estudantes perceberam de forma autônoma e criativa uma gama de conceitos matemáticos básicos que podem ser extraídos da Geometria Fractal e alcançaram níveis de desenvolvimento cognitivo mais elevados de forma gradual conforme o Modelo van-Hiele.

A experiência relatada no Capítulo 5 demonstra que Álgebra e Geometria não devem ser ensinadas como elementos distantes uma da outra, mas sim como complementares; pois dessa forma o aluno tem mais chance de aprender já que consegue ver um mesmo objeto matemático geométrica e algebricamente, além da possibilidade de manipulá-lo com material concreto. Diante desse resultado, percebeu-se que um dos maiores desafios dos professores de Matemática atualmente é desmistificá-la apresentando-a como uma ciência viva que se desenvolve para responder anseios da sociedade.

Espera-se que esta pesquisa auxilie os professores dos Ensinos Fundamental e Médio a darem um passo de modernidade em suas práticas utilizando as atividades expostas no Capítulo 4; mas principalmente valendo-se de suas mentes criativas para fazer as adaptações necessárias às suas realidades ou até mesmo criando outras tarefas com diferentes fractais.

7

Referências bibliográficas

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DOS SANTOS, M. C.; DOS SANTOS, F. T. M. **Níveis do Pensamento Geométrico de Van-Hiele com Alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental**. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA12_ID341_05102016165043.pdf>. Acesso em 10/09/2019.

FALCONER, K. **Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application.** 2ª ed. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.

FERREIRA, A. B. H. **Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. Edição especial. Curitiba: Positivo, 2008.

IEZZI, et al. **Matemática – Ciência e Aplicações – Volume 1**. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

KALEFF, A. M.; SOUZA, A. de H.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele**. Disponível em: <file:///C:/Users/W81/Downloads/10671-Texto%20do%20artigo-56822-1-10-20150921.pdf>. Acesso em 12/12/2019.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 2**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E.L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, R. de M. **Fractais**. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=43101>. Acesso em 10/01/2020.

MOREIRA, V. da S.S. **Geometria Fractal na Educação Básica**. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601>. Acesso em 20/11/2019.

MOURA, E. de. **O Conceito Fractal e sua Presença Pedagógica na Educação Básica**. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/dissertacao_edilson_de_moura.pdf>. Acesso em 05/01/2020.

OLIVEIRA, A. C. de. **Geometria Fractal no Ensino Médio**. Disponível em: <https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/GEOMETRIAFRACTAL-NO-ENSINO-M%c3%89DIO.pdf>. Acesso em 10/09/2019.

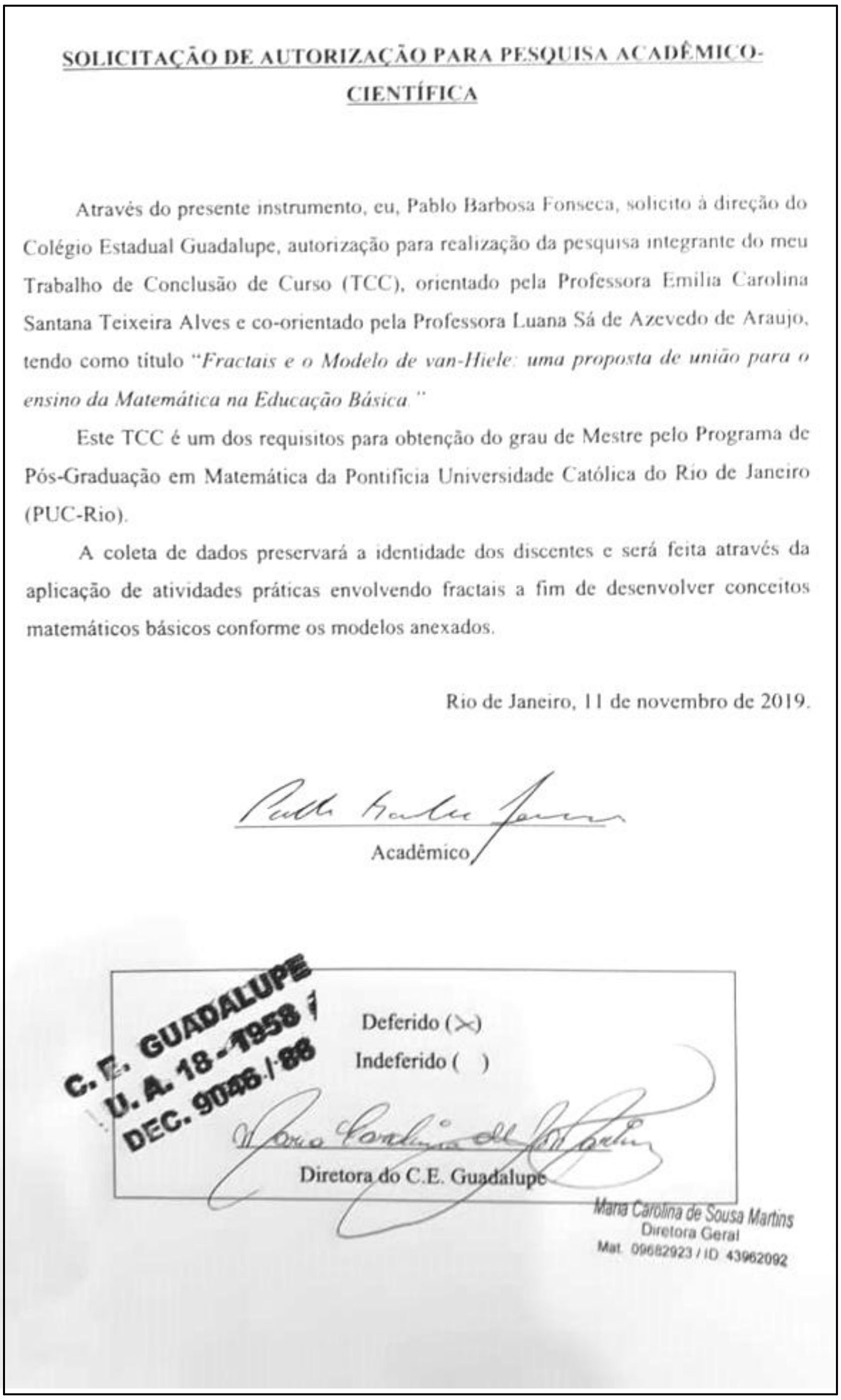
POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REYS, R. E. e KRULIK, S. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

8

Anexos

Figura 70 - Foto da autorização para pesquisa acadêmico-científica.



SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA ACADÊMICO-CIENTÍFICA

Através do presente instrumento, eu, Pablo Barbosa Fonseca, solicito à direção do Colégio Estadual Guadalupe, autorização para realização da pesquisa integrante do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), orientado pela Professora Emília Carolina Santana Teixeira Alves e co-orientado pela Professora Luana Sá de Azevedo de Araujo, tendo como título "*Fractais e o Modelo de van-Hiele: uma proposta de união para o ensino da Matemática na Educação Básica.*"

Este TCC é um dos requisitos para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

A coleta de dados preservará a identidade dos discentes e será feita através da aplicação de atividades práticas envolvendo fractais a fim de desenvolver conceitos matemáticos básicos conforme os modelos anexados.

Rio de Janeiro, 11 de novembro de 2019.

Acadêmico

C. E. GUADALUPE
U. A. 18 - 1958 /
DEC. 9046 / 86

Deferido (X)
Indeferido ( )

Diretora do C.E. Guadalupe

Maria Carolina de Sousa Martins
Diretora Geral
Mat. 09682923 / ID 43962092

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apêndices

Apêndice 1 - Gabarito da atividade 4.1

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

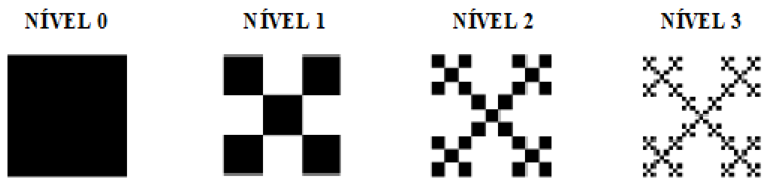
Nome: ____ **Turma:**________

Atividade: Perímetro e Área dos Fractais.

"Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, sendo cada uma delas semelhante ao objeto original. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo."

Observe o fractal abaixo e responda aos itens a seguir.

Figura 1 - Fractal penta-quadrados.



Fonte: https://misamatematica.blogspot.com/2018/10/geometria-dos-fractais-pesquisa.html

1) Você consegue explicar o processo de formação do fractal acima? Que fração mede o lado de cada quadrado em relação ao nível anterior?

Cada quadrado dá origem a cinco novos quadrados cujos lados medem um terço da medida do lado do quadrado anterior.

2) Preencha a tabela 1 com a quantidade de quadrados em cada nível.

Tabela 1 - Quantidade de quadrados a cada iteração.

Níveis	Quantidade de quadrados
0	1
1	***5***
2	***25***
3	***125***

3) Pegue duas folhas de papel ofício e desenhe e um quadrado de lado 9 cm. A partir dele reproduza o fractal da figura 1 até o nível 2.

Atividade de desenho para que o aluno visualize numericamente no conjunto dos números inteiros que cada quadrado tem seu lado correspondente a um terço da medida do lado do quadrado anterior.

4) Monte uma tabela informando as medidas do lado, do perímetro e da área dos quadrados em cada nível que você desenhou no item anterior.

Nível	**Lado**	**Perímetro**	**Área**
0	***9 cm***	***36 cm***	***81 cm²***
1	***3 cm***	***12 cm***	***9 cm²***
2	***1 cm***	***4 cm***	***1 cm²***

5) Analise bem os dados da tabela que você construiu no item anterior. Observe o comportamento dos números em cada linha e coluna para preencher a tabela 2 com a medida do lado do quadrado e sua respectiva área em cada nível, considerando L a medida do lado do quadrado no nível 0.

Tabela 2 - Medidas do lado e da área dos quadrados em cada iteração.

Níveis	**Medida do lado do quadrado**	**Medida da área do quadrado**
0	L	L^2
1	$\frac{L}{3}$	$\left(\frac{L}{3}\right)^2$
2	$\frac{L}{9}$	$\left(\frac{L}{9}\right)^2$
3	$\frac{L}{27}$	$\left(\frac{L}{27}\right)^2$

6) Os níveis podem ser chamados de iterações. Logo a figura do nível 1 é a primeira iteração feita no quadrado. Determine o perímetro e a área dos quadrados obtidos na quinta iteração.

Percebe-se, observando a tabela acima, que a medida dos lados dos quadrados a cada iteração dá-se por $\frac{L}{3^n}$***. Tratando-se de quadrados, o***

perímetro é obtido pela expressao $4 \cdot \frac{L}{3^n}$. A área, analisando a tabela anterior, pode ser obtida pela fórmula $\left(\frac{L}{3^n}\right)^2$. Então, na quinta iteração, teremos um quadrado de perímetro $4 \cdot \frac{L}{3^5}$ e área $\left(\frac{L}{3^5}\right)^2$.

7) Após ter preenchido as tabelas 1 e 2 e ter feito todos os itens anteriores, você seria capaz de generalizar uma fórmula para se obter:

a) a quantidade de quadrados em qualquer iteração, ou seja, na iteração *n*.

5^n

b) o perímetro do quadrado da *n-ésima* iteração.

$4 \cdot \frac{L}{3^n}$

c) a área do quadrado da *n-ésima* iteração.

$\left(\frac{L}{3^n}\right)^2$

Este item é de grande importância para aqueles alunos que fizeram o item 6 sem generalizar a fórmula. Ou seja, por exemplo, completando a tabela 2 da atividade.

Apêndice 2 - Gabarito da atividade 4.2

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

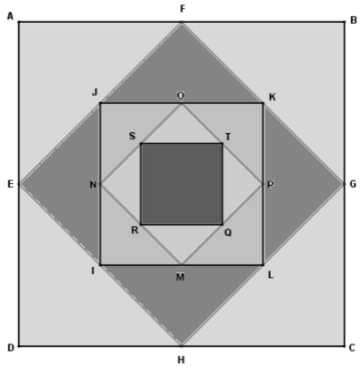
Nome: ____ **Turma:** ________

Atividade: O conceito de semelhança e os fractais.

"Fractais são estruturas geométricas cujas propriedades repetem-se em quaisquer escalas."

A figura abaixo é um fractal inspirado em quadrados. Nós vamos construir um utilizando o software Geogebra e durante o processo de construção bem como no final vamos observar algumas medidas na janela algébrica a fim de se estabelecer algumas conclusões ou conjecturas.

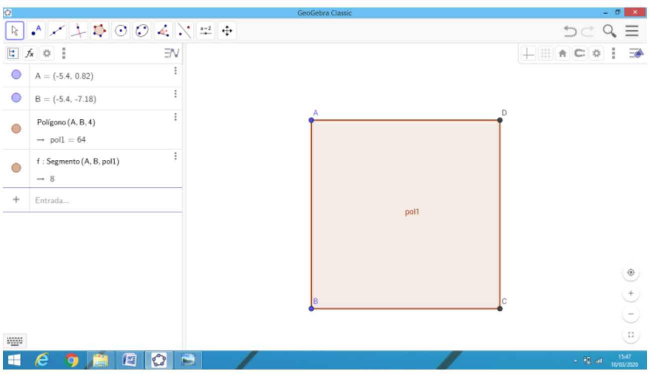
Figura 1 - Fractal inspirado em quadrados.

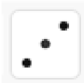


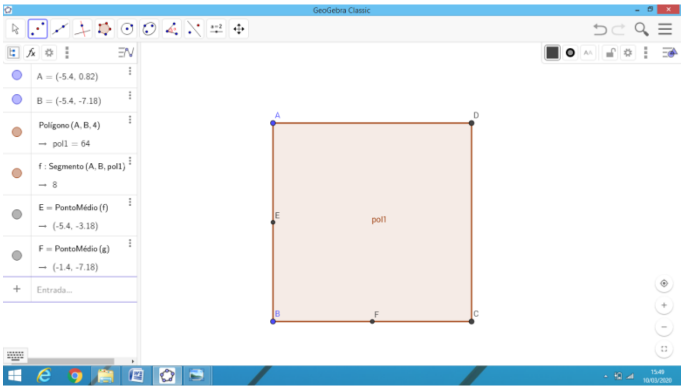
Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150450601

Para construir a figura 1 no Geogebra basta seguir as orientações abaixo:

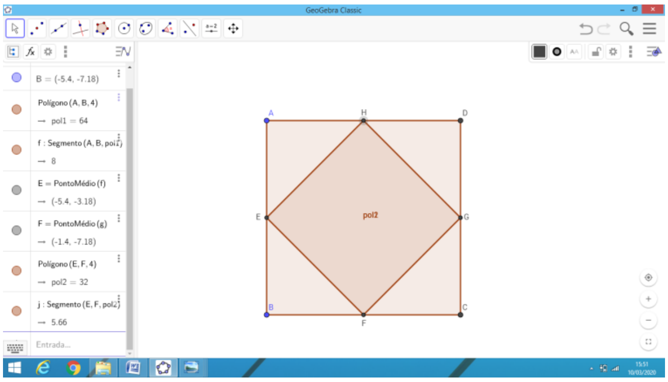
a) Abra o Geogebra e clique no botão "Polígono Regular"  para construir um quadrado ABCD cujo lado meça 8 cm.



b) Clique no botão “Ponto Médio”  e marque os pontos médios E e F sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.



c) Agora, clique no botão “Polígono Regular”  selecionando os pontos médios E e F e construa o quadrado EFGH.



d) Verifique se a medida de EF é equivalente a $\sqrt{BE^2 + BF^2}$. Caso seja, explique o porquê?

Sim, pois EBF é um triângulo retângulo em B. Logo o segmento EF é a hipotenusa do triângulo retângulo. A medida 5,66 que aparece na janela algébrica é uma aproximação da raiz quadrada de 32. Por isso a importância dos alunos efetuarem seus cálculos em um bloco de anotações e não depender exclusivamente da janela algébrica do software.

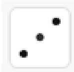
$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} \Rightarrow EF = \sqrt{4^2 + 4^2} \Rightarrow EF = \sqrt{32} \Rightarrow EF = 4\sqrt{2}.$$

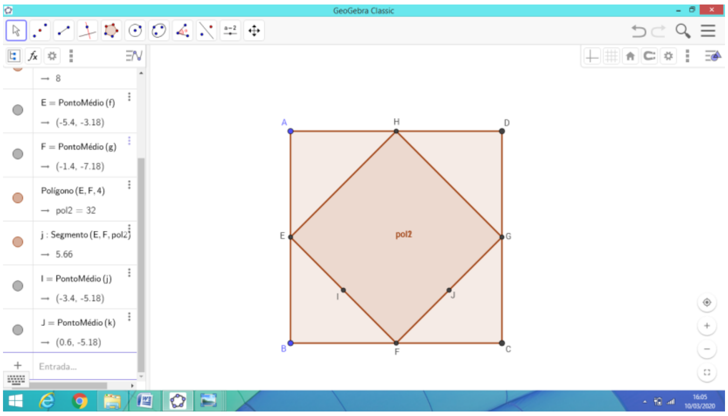
e) Qual a razão de semelhança entre os quadrados ABCD e EFGH?

$$\frac{8}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}.$$

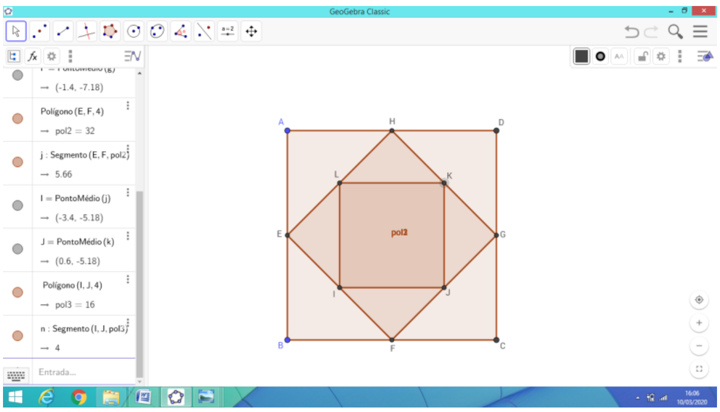
f) Determine a razão entre os perímetros dos quadrados ABCD e EFGH. Agora calcule também a razão entre suas áreas.

$$\frac{32}{16\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}.$$

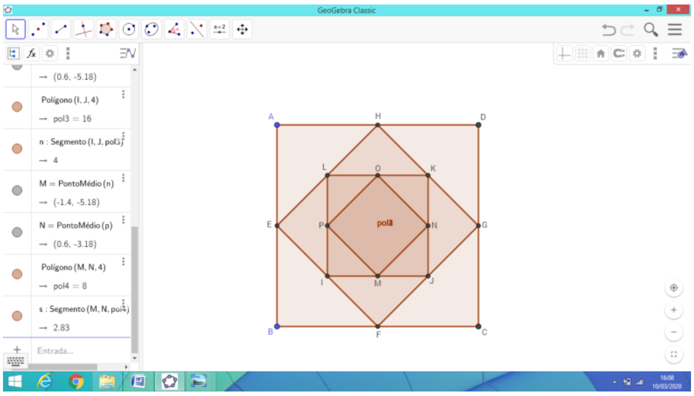
g) Obtenha os pontos médios I e J dos segmentos EF e FG, respectivamente, utilizando novamente o botão “Ponto Médio” .



h) Agora selecione o botão “Polígono Regular” , clique sobre os pontos I e J e obtenha o quadrado IJKL.



i) Repita os procedimentos (g) e (h) a fim de se obter o quadrado MNOP.



j) Complete a tabela 1 através de cálculos e com auxílio da janela algébrica do software.

É muito importante não utilizar as aproximações feitas pelo Geogebra. A medida dos lados dos quadrados IJKL e MNOP podem ser obtidas a partir da utilização do Teorema de Pitágoras.

$$IJ = \sqrt{FI^2 + FJ^2} \Rightarrow IJ = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow IJ = \sqrt{8+8} \Rightarrow IJ = 4.$$

$$MN = \sqrt{JM^2 + JN^2} \Rightarrow IJ = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow IJ = \sqrt{8} \Rightarrow IJ = 2\sqrt{2}.$$

Tabela 1 - Medidas dos quadrados.

	ABCD	EFGH	IJKL	MNOP
Lado	8	$4\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$
Perímetro	32	$4\sqrt{2}$	16	$4\sqrt{2}$
Área	64	32	16	8

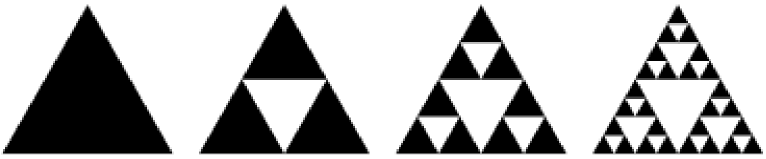
k) Neste momento você já concluiu a construção do fractal inspirado em quadrados. Agora selecione o botão “Mover”  e arraste livremente os pontos A e B, observando a janela algébrica do software para quaisquer medidas de AB. A razão de semelhança entre os quadrados se altera? E a razão entre os perímetros? Você chegou a alguma conclusão quanto à razão entre as áreas dos quadrados? Qual?

A razão de semelhança não se altera. A razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança. E a razão entre as áreas corresponde sempre ao quadrado da razão de semelhança.

OBS: Caso o aluno não consiga obter de forma autônoma as respostas acima, a próxima atividade será uma nova chance dele percebê-las. No entanto, o aluno está apenas conjecturando. É necessário que o docente formalize estas demonstrações de razões de semelhança algebricamente.

Um dos fractais mais conhecidos é o Triângulo de Sierpinski (Figura 2). Vamos construí-lo também no Geogebra e observar a razão de semelhança entre os triângulos equiláteros obtidos em cada iteração da figura.

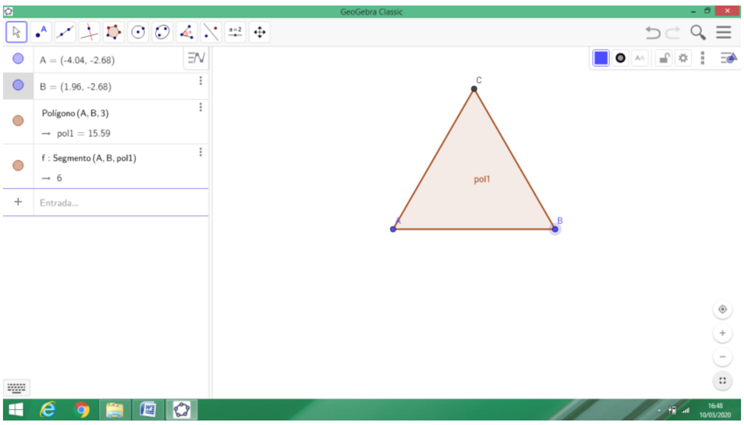
Figura 2 - Primeiras etapas da construção do Triângulo de Sierpinski.

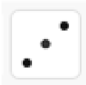


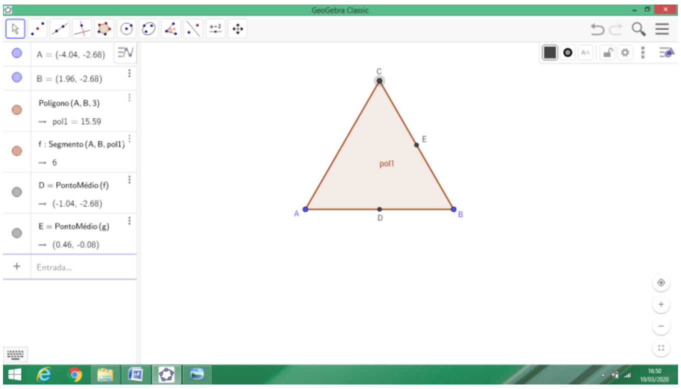
Fonte: https://misamatematica.blogspot.com/2018/10/geometria-dos-fractais-pesquisa.html

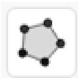
Para construir a figura 1 no Geogebra basta seguir as orientações abaixo:

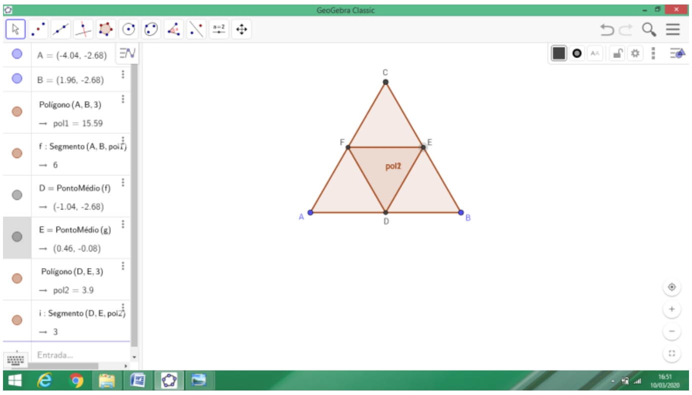
l) Selecione o botão “Polígono Regular”  e construa um triângulo cujo lado meça 6 cm.

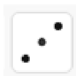


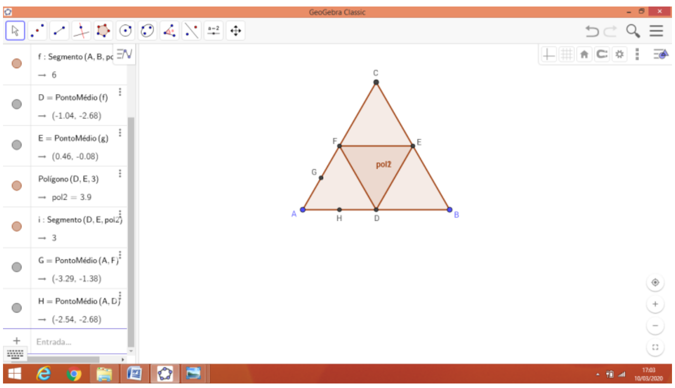
m) Clique no botão “Ponto Médio”  e marque os pontos médios D e E sobre os segmentos AB e BC, respectivamente.

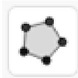


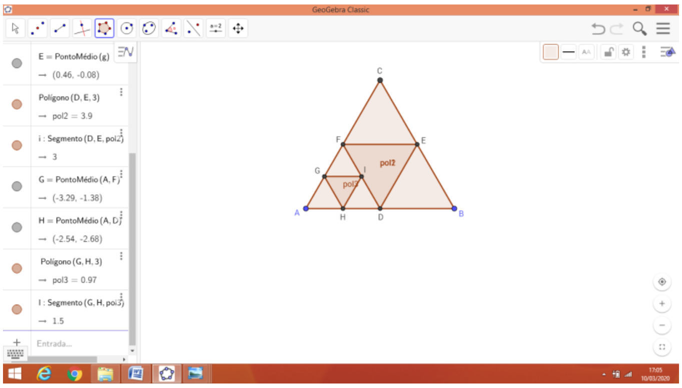
n) Agora, clique no botão “Polígono Regular”  selecionando os pontos médios D e E e construa o triângulo eqüilátero DEF.



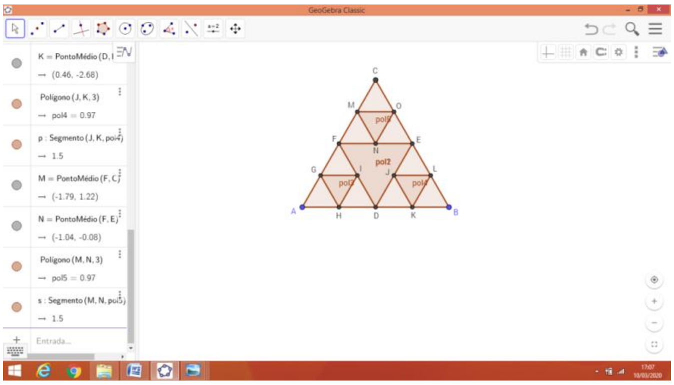
o) Obtenha os pontos médios G e H dos segmentos AF e AD, respectivamente, utilizando novamente o botão “Ponto Médio” .



p) Agora selecione o botão “Polígono Regular” , clique sobre os pontos G e H e obtenha o triângulo GHI.



q) Repita este último procedimento nos triângulos BDE e CEF a fim de se obter os triângulos JKL e MNO congruentes ao triângulo GHI.



r) Neste momento você já conseguiu obter o nível 2 do Triângulo de Sierpinski. Agora com o auxílio da janela algébrica do software e através de cálculos complete a tabela 2.

A janela algébrica pode trazer distorções devido às aproximações feitas nos números irracionais. Logo é necessário efetuar alguns cálculos em um bloco de anotações para que seja possível o estabelecimento de hipóteses que deverão ser estudadas e demonstradas.

Tabela 2 - Medidas dos triângulos.

	ABC	**DEF**	**GHI**
Lado	6	3	1,5
Perímetro	18	9	4,5
Área	$9\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	$0{,}5625\sqrt{3}$

A que conclusão você chegou quanto à razão entre os perímetros e entre as áreas dos triângulos ABC, DEF e GHI?

Que assim como nos quadrados, a razão entre os perímetros de triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança. E a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

s) Com o botão “Mover”  arraste livremente os pontos A e B e verifique se sua conclusão está correta.

O aluno em sua conjectura consegue estabelecer a hipótese que não somente nos quadrados as razões de semelhança são constantes, mas também nos triângulos. Ou seja, será que elas são constantes em quaisquer polígonos semelhantes? Cabe ao professor neste momento do diálogo formalizar as demonstrações algebricamente.

Apêndice 3 - Gabarito da atividade 4.3

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

Nome: ______________________________________ **Turma:**________

Atividade: Construindo fractais para obtenção da fórmula do termo geral da P.G.

1) Explique com suas palavras o que é um fractal e onde ele pode ser encontrado. Após responder troque ideias com seus colegas a cerca de suas conclusões.

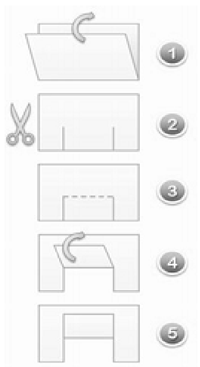
Uma estrutura fractal pode ser encontrada na natureza, no corpo humano. Os fractais, sejam naturais ou geométricos, são estruturas que apresentam autossimilaridade. São figuras obtidas através de processos recursivos infinitos.

2) Desenhe um fractal. Seja criativo.

Atividade livre e lúdica para o aluno expressar-se com arte.

3) Construa um fractal com color set, tesoura, lápis e régua, seguindo as instruções abaixo conforme a figura 1.

Figura 1 - Instruções de construção do fractal (parte I).



1ª) Dobre a folha ao meio;

2ª) Faça dois cortes como na figura;

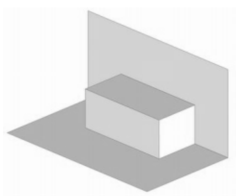
3ª) A linha tracejada representa onde será feita uma dobra;

4ª) Dobre conforme a figura;

5ª) Agora abra as dobras de maneira que se obtenha um paralelepípedo como na figura 2.

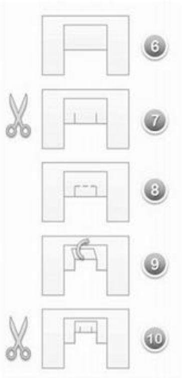
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/
Acesso em 15/11/2019.

Figura 2 - Primeira iteração do fractal.



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 15/11/2019.

Figura 3 - Instruções de construção do fractal (parte II).



6ª) Dobre novamente como no último passo da sequência anterior;

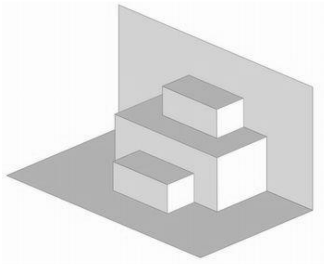
7ª) Faça novamente dois corte como na figura;

8ª) Marca da dobra;

9ª) Dobre conforme a figura (está pronta a segunda iteração);

Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/
Acesso em 15/11/2019.

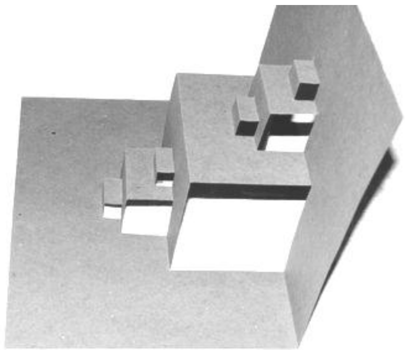
Figura 4- Segunda iteração do fractal.



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 20/11/2019.

10ª) Voltando à dobra anterior pode se fazer o corte para a terceira iteração e obter a figura 5.

Figura 5 - Terceira iteração do fractal.



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/. Acesso em 20/11/2019.

4) Sem continuar fazendo iterações no color set, complete a tabela abaixo.

Tabela 1 - Quantidade de paralelepípedos a cada iteração.

Iteração	**Quantidade de paralelepípedos novos**	**Quantidade total de paralelepípedos**
1ª	1	1
2ª	2	3
3ª	***4***	***7***
4ª	***8***	***15***
5ª	***16***	***31***
6ª	***32***	***63***

5) Seu fractal ficou igual ao do seu colega? E se as folhas recebidas tivessem tamanhos diferentes, vocês obteriam fractais semelhantes?

Sim. Caso as folhas tivessem tamanhos diferentes, obteríamos fractais semelhantes.

6) Com a tabela 1 totalmente preenchida, explique a lógica da sequência numérica da quantidade de paralelepípedos novos e da quantidade total de paralelepípedos a cada iteração do fractal. Existe algum padrão de repetição nessas sequências? Qual?

A quantidade de paralelepípedos novos a cada iteração é sempre o dobro da quantidade da iteração anterior e a quantidade total de paralelepípedos é sempre igual à soma da quantidade dos paralelepípedos novos de todas as iterações anteriores incluindo os da iteração atual.

7) Reescreva toda a coluna de paralelepípedos novos da tabela 1 em forma de potências de mesma base e, em seguida, informe quantos paralelepípedos novos haverá na iteração *n*?

Tabela 2 - Quantidade de paralelepípedos novos em forma de potência.

Iteração	**Quantidade de paralelepípedos novos**	**Quantidade de paralelepípedos novos em potências de mesma base**
1ª	1	2^0
2ª	2	2^1
3ª	4	2^2
4ª	***8***	2^3
5ª	***16***	2^4
...	...	...
n-ésima	$2 . (n - 1)$	2^{n-1}

8) Reparou que o termo seguinte é sempre o anterior multiplicado por uma constante. Esta constante é chamada de **razão** neste tipo de sequência numérica e vamos representá-la por $\boldsymbol{q}$. Agora preencha cada linha da tabela 3 onde a quantidade de paralelepípedos novos é calculada em função do primeiro termo da sequência $\boldsymbol{a_1}$ e da razão $\boldsymbol{q}$.

Tabela 3 - Termos da sequência em função de $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{q}$.

Termos da sequência	**Quantidade de paralelepípedos novos em cada iteração**	**Quantidade de paralelepípedos novos em função do $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{q}$**
a_1	1	$a_1 = a_1 \cdot q^0$
a_2	2	$a_2 = a_1 \cdot q^1$
a_3	4	$a_3 = a_1 \cdot q^2$
a_4	***8***	$\boldsymbol{a_4 = a_1 \cdot q^3}$
...	...	...
a_n	$\boldsymbol{2 \cdot a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Pronto! Na última linha da terceira coluna você deduziu a **fórmula do termo geral da P.G.**. Com esta fórmula você deduz qualquer termo de uma progressão geométrica.

Apêndice 4 - Gabarito da atividade 4.4

COLÉGIO ESTADUAL GUADALUPE

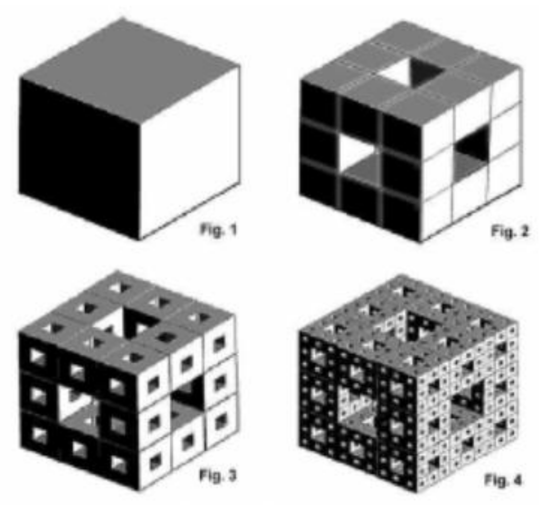
Nome: ____ Turma:________

Atividade: Calculando área e volume das primeiras iterações da Esponja de Menger.

Após ter assistido ao vídeo do youtube acessando o link abaixo, responda o que se pede:

https://www.youtube.com/watch?v=2flvPOwzZu0

1) A imagem abaixo retrata as primeiras iterações de um conhecido fractal. Como se chama este fractal?



Esponja de Menger.

2) Considere *a* a medida da aresta da figura 1 e complete a tabela abaixo.

	Fig.1	**Fig.2**	**Fig.3**	**Fig.4**
Aresta	a	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{3^2}$	$\frac{a}{3^3}$
Quantidade de cubos	1	20	20^2	20^3
Volume	a^3	$a^3 - 7\left(\frac{a}{3}\right)^3$	$a^3 - 7\left(\frac{a}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{a}{9}\right)^3 \cdot 20$	$a^3 - 7\left(\frac{a}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{a}{9}\right)^3 \cdot 20 - 7\left(\frac{a}{27}\right)^3 \cdot 20^2$
Área total	$6a^2$	$6a^2 + 6a^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 20$	$6a^2 + 6a^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 20 + 6a^2\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 20^2$	$6a^2 + 6a^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 20 + 6a^2\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot 20^2 + 6a^2\left(\frac{1}{27}\right)^2 \cdot 20^3$

3) Troque ideias com seus colegas a respeito do volume e da área total deste fractal na *n-ésima* iteração.

A área tende ao infinito e o volume tende a zero.