Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Erik Beliene Salgado

O uso da calculadora como instrumento de investigação acerca dos números decimais.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Profª Emília Carolina Santana Teixeira Alves

Co-orientadora: Profª Luana Sá de Azevedo de Araujo

Rio de Janeiro
Março de 2020

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Erik Beliene Salgado

O uso da calculadora como instrumento de investigação acerca dos números decimais.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Profª. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Orientadora
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profª. Luana Sá de Azevedo de Araujo
Co-orientadora
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profª Gisela Maria da Fonseca Pinto
Departamento de Matemática – UFRRJ

Profª Renata Martins da Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de março de 2020.

Erik Beliene Salgado

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Campus Seropédica. Possui bacharelado em Matemática Pura obtido na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e especialização em Novas Tecnologias de Ensino pela Universidade Federal Fluminense. Atualmente exerce o cargo de Professor de Matemática na Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro e na rede Estadual de Ensino do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Salgado, Erik Beliene

O uso da calculadora como instrumento de investigação acerca dos números decimais / Erik Beliene Salgado ; orientadora: Emília Carolina Santana Teixeira Alves ; co-orientadora: Luana Sá de Azevedo de Araujo. – 2020.

70 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Calculadora. 3. Números decimais. 4. Conjuntos numéricos. 5. Aprendizagem significativa. I. Alves, Emília Carolina Santana Teixeira. II. Araujo, Luana Sá de Azevedo de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha querida esposa Alessandra, cuja paciência e compreensão nessa caminhada foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao meu filho Erik Luiz, que alegrou meus dias durante o decorrer do curso de Mestrado.

À minha mãe Marilene pela educação, atenção e carinho.

Ao meu pai Adão que sempre se orgulhou e me apoiou nos estudos, mas infelizmente não está presente, para celebrar a conclusão deste curso, pois faleceu no dia 27 de janeiro de 2020.

À todos os professores que tive na minha formação acadêmica, pois todos tiveram um papel importante nela e moldaram o professor que sou hoje.

Ao PROFMAT pela oportunidade de cursar esse mestrado profissional, pois ele representa uma enorme realização profissional.

À PUC – Rio por toda a estrutura oferecida durante o curso, e suporte administrativo dado sempre que precisei.

À minha orientadora Emília Alves e à minha co-orientadora Luana Sá, pelo excelente apoio desde o início até a conclusão deste trabalho.

À banca avaliadora dessa dissertação, por toda atenção, comprometimento e colaboração dada nesse trabalho.

Às minhas diretoras da EMAC Castro Rebello, Emile Maria (Diretora Geral, até meados de 2019), Nádia Lúcia (Diretora Geral), Ellen (Diretora Adjunta) e minha diretora do CE Barão de Tefé, Márcia Ribeiro que sempre acreditaram no meu trabalho, me proporcionaram ótimos ambientes de trabalho e o contato com um corpo discente espetacular.

À coordenadora pedagógica Giselle, que me deu todo suporte para a realização da atividade em sala de aula.

À todos os amigos e colegas de trabalho que de uma forma ou de outra me estimularam e me ajudaram.

Aos colegas de curso, pois todos me apoiaram nos momentos difíceis no decorrer do curso, e junto aos quais tive uma boa convivência acadêmica.

Resumo

Salgado, Erik Beliene; Alves, Emília Carolina Santana Teixeira; De Araujo, Luana Sá de Azevedo. **O uso da calculadora como instrumento de investigação acerca dos números decimais.** Rio de Janeiro, 2020. 70 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta o resultado de algumas reflexões voltadas para o ensino de matemática, em especial nas áreas de aritmética e álgebra, abordando conteúdos relativos aos conjuntos numéricos presentes no currículo de matemática do ensino fundamental II. Os objetivos dessas reflexões foram verificar o quão importantes podem ser os registros semióticos (ver capítulo 4, seção 4.2.1), a teoria da zona de desenvolvimento proximal (ZPD) proveniente da teoria sócio-construtivista (ver capítulo 4, seções 4.2.2 e 4.2.2.1), e o uso da calculadora na investigação acerca de números decimais e no estudo dos conjuntos numéricos. Com base num espaço democrático e que valoriza o diálogo, a vida cotidiana do aluno com o mundo da matemática e utilizando a troca de experiências entre eles, temos como objetivo a compreensão de conceitos e aprendizagem significativa acerca dos conteúdos abordados. A aritmética, em especial, exige um olhar cuidadoso no que diz respeito às representações e propriedades operatórias que um número pode apresentar. O desenvolvimento de métodos que estimulam esse olhar faz com que o entendimento dos educandos em relação aos números decimais ganhe significados importantes e consideráveis. Por fim, este trabalho também defende a questão da utilização da tecnologia na escola através do uso orientado de calculadoras, nas aulas de matemática, como um recurso pedagógico que pode se mostrar bastante eficiente, visto que a tecnologia está cada vez mais presente no cotidiano da sociedade. Os resultados dessas reflexões foram traduzidos no desenvolvimento de uma atividade aplicada junto aos alunos, e foram expostos ao longo desse trabalho. Atividade essa que foi aplicada predominantemente em turmas do sétimo ano do ensino fundamental, uma vez que eles possuem os pré-requisitos necessários para os questionamentos propostos nela, porém não tiveram ainda grande contato com o conteúdo proposto por essa atividade. E

também foi aplicada em uma turma de oitavo ano, como atividade de recuperação paralela. Criamos também uma atividade interessante para a abordagem dos números irracionais na qual exploramos triângulos retângulos. Espera-se que essas reflexões possam colaborar de alguma maneira na educação básica, para o desenvolvimento de uma educação matemática mais autônoma e significativa.

Palavras-chave

Calculadora; números decimais; conjuntos numéricos; aprendizagem significativa.

Abstract

Salgado, Erik Beliene; Alves, Emília (Advisor); De Araujo, Luana Sá de Azevedo (Co-Advisor). **The use of the calculator as a research tool at around decimal numbers.** Rio de Janeiro, 2020. 70 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents the result of some reflections on the teaching of mathematics, especially in the areas of arithmetic and algebra, addressing contents related to the numerical sets present in the mathematics curriculum of elementary school II. The objectives of these reflections were to verify how important the semiotic records can be (see chapter 4, section 4.2.1), the zone of proximal development theory (ZPD) derived from the socio-constructivist theory (see chapter 4, sections 4.2.2 and 4.2.2.1), and the use of the calculator in the investigation of decimal numbers and in the study of numerical sets. Based on a democratic space that values dialogue, the student's daily life with the world of mathematics and using the exchange of experiences between them, we aim to understand concepts and meaningful learning about the contents covered. Arithmetic, in particular, requires a careful look at the representations and operative properties that a number can present. The development of methods that stimulate this view makes the student's understanding of decimal numbers gain important and considerable meanings. Finally, this work also defends the question of the use of technology in school through the oriented use of calculators, in mathematics classes, as a pedagogical resource that can prove to be quite efficient, since technology is increasingly present in the daily life of society. The results of these reflections were translated into the development of an applied activity with the students, and were exposed throughout this work. This activity was applied predominantly in classes of the seventh year of elementary school, since they have the necessary prerequisites for the questions proposed in it, but they have not yet had great contact with the content proposed by this activity. It was also applied to an eighth grade class, as a parallel recovery activity. We have also created an interesting activity for addressing irrational numbers in which we explore right triangles. We hope that these reflections can

collaborate in some way in basic education, for the development of a more autonomous and meaningful mathematics education.

Keywords

Calculator; decimal numbers; numerical sets; meaningful learning.

Sumário

Lista de figuras

“Ensinar não é transmitir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua propria produção ou a sua construção".

Paulo Freire

1
INTRODUÇÃO

O uso de tecnologias para o ensino de matemática é um assunto de muita importância atualmente, sendo destaque em vários estudos, simpósios e cursos. No decorrer da vivência universitária, o estudante de licenciatura em matemática tem, através de disciplinas de laboratório de ensino, contato com a elaboração de materiais concretos, teorias educacionais e tecnologias de ensino. Consideramos que essas disciplinas são fundamentais para a formação de um bom professor de matemática, devido à importância de se buscar novos métodos para abordagem do ensino em sala de aula. "*É fundamental que os educadores busquem outras práticas metodológicas, não somente o livro didático, o quadro negro, o giz e as aulas expositivas*" (Dioginis; Cunha; Neves; Cristovam, 2015, página. 1158).

Nesse trabalho trataremos do uso da calculadora nas aulas de matemática, com enfoque principal nos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais. Consideramos que tal uso viabiliza um melhor entendimento e a aprendizagem significativa (ver capítulo 4, seção 4.2.3) de conteúdos por parte dos alunos.

Durante minha experiência como professor de matemática do ensino fundamental II, pude me deparar com as mais diversas dificuldades dos alunos com relação aos conteúdos de matemática, sendo as dúvidas em relação aos números racionais e irracionais as mais evidentes.

Tendo essa problemática como motivação, através de duas atividades com o uso de calculadora, pretendemos apresentar formas alternativas para a abordagem dos conjuntos numéricos, tendo o auxílio dessa ferramenta para o ensino de tais conteúdos.

Usamos nesse trabalho a expressão "números decimais", que é um termo amplamente usado nos livros didáticos da educação básica, para nos referir à representação decimal de um número real que está definida e exemplificada ao longo desta dissertação.

Após licenciado e já atuando em sala de aula tive a oportunidade de cursar e concluir a especialização NTEM (Novas Tecnologias do Ensino da Matemática) e aprofundar meus estudos sobre esse tema, bem como realizar uma oficina com uso do software GeoGebra[1] como trabalho de conclusão do curso. Esse curso me

[1]GeoGebra é um software de geometria dinâmica desenhado especificamente para o ensino de geometria e álgebra. Sua distribuição é livre e possível de ser usada em diversas plataformas.

propiciou uma visão ainda mais ampla do uso das tecnologias de ensino na educação matemática e também foi uma das motivações que levaram a realização desse trabalho.

É importante ressaltar que durante toda prática docente, sempre devemos buscar o aperfeiçoamento da metodologia de ensino. A seguir, descrevo brevemente como está organizado este trabalho.

No capítulo 2 é apresentado um breve contexto histórico sobre a criação e o uso de alguns instrumentos para realizar cálculos aritméticos, desde os mais antigos como o ábaco até o surgimento das modernas calculadoras eletrônicas.

No capítulo 3 são apresentados alguns documentos que norteiam a educação básica brasileira e amparam o uso da calculadora como recurso didático em sala de aula.

No capítulo 4 os assuntos abordados são os conjuntos numéricos e as teorias educacionais que podem ser utilizadas no estudo e aprendizagem sobre esses conjuntos. Assim como também é dissertado sobre a aprendizagem significativa em relação a eles. E por fim é feita uma análise das definições formais desses conjuntos e da forma que são apresentadas no ensino fundamental II.

No capítulo 5 são apresentadas duas atividades. A primeira foi realizada em três turmas de sétimo ano e uma turma de oitavo ano, sobre números decimais utilizando a calculadora como ferramenta de ensino. E a segunda atividade representa uma sugestão interessante na abordagem dos números irracionais a partir do cálculo da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo, usando a relação pitagórica.

Sucedendo a apresentação das atividades, no capítulo 6, serão apresentados os resultados obtidos e as conclusões provenientes da aplicação da primeira atividade em sala de aula.

Como capítulo de encerramento desse trabalho, o sétimo capítulo, apresenta as considerações finais sobre o uso da calculadora como instrumento de ensino na abordagem dos números decimais.

2

HISTÓRIA DA CALCULADORA

A matemática assim como outras áreas do conhecimento surgiu com o desenvolvimento do ser humano. Duas das necessidades humanas mais antigas são a de contar e a de registrar quantidades. De acordo com Souza (2016, p. 2):

> *"A Matemática, assim como muitas áreas do conhecimento, surgiu a partir da necessidade humana de quantificar, atribuir valores. Assim, a Matemática em sua origem está relacionada às necessidades cotidianas como medir, pesar, entre outras que o homem realizava tendo em vista sua sobrevivência".* (SOUZA, 2016, p.2).

É difícil datar quando surgiu essas necessidades de contagem e registros relacionados à quantidades. Porém descobertas arqueológicas mostram que são feitos registros dos mais diversos tipos desde a antiguidade. Esses registros muitas vezes eram feitos em paredes ou ossos de animais.

A figura 1 mostra um osso descoberto em 1960 no Congo, que mostra registros feitos por volta de 30000 anos atrás.

Figura 1 – Registros de contagem feitos em ossos.

Figura retirada do site: https://josetadeuarantes.wordpress.com/2017/06/02/origens-da-matematica-1/. Acesso em 14/02/2020 às 20:55.

No decorrer do tempo, com o surgimento das sociedades e comércio, houve a necessidade de se trabalhar com quantidades cada vez maiores. De acordo com Souza (2016, p. 2):

> *"As atividades humanas, porém, cada vez mais se ampliavam e as representações utilizadas para calcular já não atendiam mais as grandes quantidades com as quais os homens trabalhavam.*

> *Assim, mais uma vez a necessidade esteve presente no avanço dessa área, os homens então pensaram meios que não apenas a representação um a um, para quantificar. Os homens passaram então a realizar agrupamentos, facilitando assim o cálculo de grandes quantidades".* (SOUZA, 2016, p.2).

Para suprir essa necessidade, foram criados instrumentos cada vez mais aprimorados para a realização de cálculos aritméticos e auxílio no registro de quantidades.

2.1 O ábaco.

Podemos considerar o ábaco como o instrumento mais elementar e prático de realização de cálculos aritméticos, devido a forma concreta na qual são realizadas as operações entre números.

As representações numéricas e os diversos sistemas de numeração que já existiram na história da humanidade, muitas vezes, dificultavam a realização de cálculos envolvendo as operações básicas. Contudo a particularidade da utilização do ábaco é que tal objeto utilizava a noção de sistema de numeração decimal mesmo que esse sistema ainda não estivesse formalizado em diversas sociedades que utilizavam o ábaco. De acordo com Souza (2016, página 4):

> *"Com o passar do tempo a estrutura do ábaco sofreu alterações sendo confeccionado com uma base na qual se fixavam varetas ou copos, que representavam os valores posicionais do sistema de numeração decimal, ou seja, dependendo da posição que o número ocupa pode representar valores diferentes, sendo assim, iniciada da esquerda para a direita, sendo respectivamente unidade, dezena e centena, milhar, …".* (SOUZA, 2016, p.4).

A palavra ábaco vem do grego *άβακας*, e significa tábua coberta de areia usada para desenhar figuras ou fazer contas. De acordo com Bueno (1986) a palavra ábaco é um substantivo masculino e dentre outras definições, significa:

> *"Tábua emoldurada e cheia de areia para cálculos; Aparelho munido de várias fileiras de bolinhas para o ensino primário de cálculo".* (BUENO, 1986, p. 18).

Um exemplo de ábaco é o Soroban (ábaco japonês). Nesse ábaco, há um número ímpar de hastes, todas as hastes cortadas por uma madeira horizontal, dividindo cada uma delas em duas partes: uma superior e uma inferior. E em cada haste estão quatro pedras na parte inferior, e uma na parte superior conforme a figura 2:

Figura 2 – Ábaco Japonês (soroban).

Figura retirada do site: https://skdesu.com/soroban-que-abaco-japones/. Acesso em 12/01/2020 às 15: 58.

Nesse ábaco, a haste central representa a ordem numérica das unidades. Cada haste à direita dessa haste central representa um submúltiplo (parte decimal) da unidade inteira. E cada haste à esquerda dessa haste central representa um múltiplo da unidade inteira. Observe a figura 3:

Figura 3 – Unidades representadas pelas hastes do Soroban.

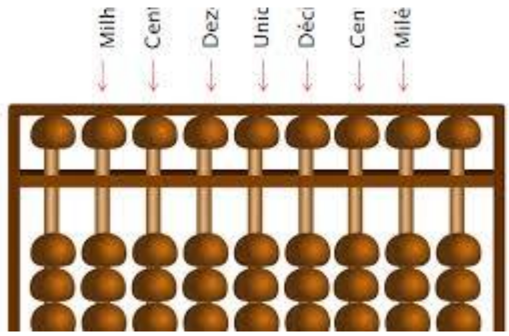
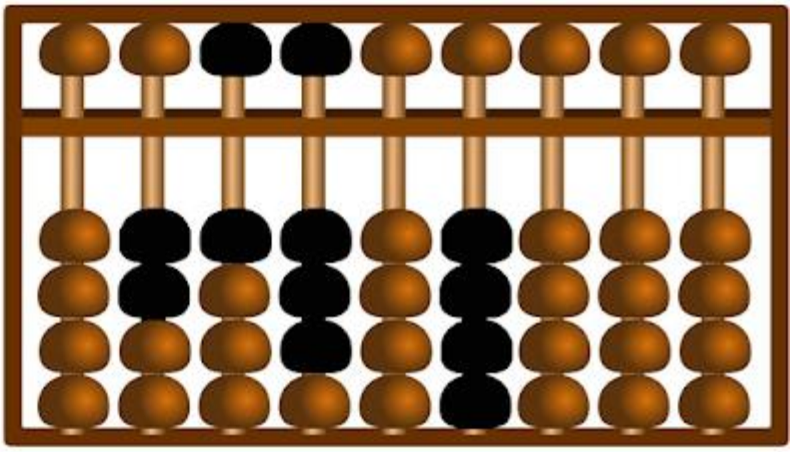


Figura retirada do site: http://visualizandomatematica.blogspot.com/2013/06/plano-de-aula-soroban-e-os-numeros.html. Acesso em 12/01/2020 às 16:03.

Cada uma das quatro pedras da parte inferior em cada haste representa uma unidade na ordem numérica em que ela está posicionada. E a pedra da parte superior representa cinco unidades na ordem numérica em que ela está posicionada. Por exemplo, o número 2.680,4 é representado nesse ábaco da forma na qual aparece na figura 4:

Figura 4 - Número 2.680,4 representado no soroban.



2.680,4

Figura tirada do site: http://visualizandomatematica.blogspot.com/2013/06/plano-de-aula-soroban-e-os-numeros.html. Acesso em 12/01/2020 às 16:08.

A partir do entendimento desse sistema de representação é possível realizar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

No decorrer da história, diversas outras civilizações construíram ábacos.

2.2 A Pascalina.

Trata-se de uma calculadora mecânica, inventada pelo matemático Blaise Pascal[2] no ano de 1642, quando ele tinha entre 19 e 21 anos. Era um equipamento, de grande porte, composto por seis rodas dentadas e engrenagens que as moviam, no qual era possível realizar contas de adição e subtração. Observe a pascalina na figura 5:

[2] Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de junho de 1623 - Paris, 19 de agosto 1662) foi um matemático físico e filósofo francês. Dentre suas principais contribuições matemáticas estão a criação da teoria das probabilidades e a invenção da pascalina. Na física se destacou no estudo de fluidos.

Figura 5 – Pascalina.

Figura retirada do site: https://pt.wikipedia.org/wiki/La_pascaline. Acesso em 12/01/2020 às 19:05.

Com pode ser visto na figura 5, a máquina inventada por Pascal era composta por seis rodas dentadas com algarismos de 0 a 9. Apesar de o uso do ábaco ser muito prático, muitas vezes qualquer distração levava o usuário a um resultado errado, a pascalina se mostrou um equipamento preciso e prático para a época em que foi criado.

Essas seis rodas dentadas funcionavam de forma articulada, conforme podemos observar na figura 6, que ilustra como era o interior da máquina inventada por Pascal.

Figura 6 - Interior da pascalina.

Figura retirada do site: http://girltechbrasil.blogspot.com/2014/01/a-historia-do-computador-parte-01.html Acesso em 12/01/2020 às 19:11.

Em cada uma dessas rodas dentadas era possível representar uma ordem numérica dos números que seriam somados e a soma era realizada dígito a dígito.

Apesar da limitação de o usuário dessa calculadora poder realizar apenas contas de soma e subtração a matemática nos fornece recursos para realizar as operações de multiplicações e divisões.

Usando as propriedades da multiplicação apresentamos um modo de fazer uma multiplicação, convertendo a conta em pequenas contas de soma.

Caso se pretendesse realizar uma conta de multiplicação, o recurso matemático necessário seria realizar a conta em etapas. Na primeira etapa, seria realizada a soma do fator a ser multiplicado por ele mesmo. A partir da segunda etapa, a soma seria entre o resultado obtido na etapa anterior e o fator a ser multiplicado. E assim sucessivamente até que se chegasse ao resultado pretendido. Por exemplo, para se calcular 120 x 4 as etapas seriam:

- Etapa 1: 120 + 120 = 240
- Etapa 2: 240 + 120 = 360
- Etapa 3: 360 + 120 = 480

Observe que a parcela 120 aparece quatro vezes no decorrer das etapas. Como o resultado obtido na etapa 3 foi 480, temos que o resultado da multiplicação de 120 por 4 tem como resultado 480.

Usando as propriedades da divisão, apresentamos também um modo de fazer uma divisão convertendo a conta em pequenas contas de subtração.

Analogamente ao exemplo anterior, caso o objetivo fosse realizar uma divisão, o recurso matemático necessário seria realizar a conta em etapas. Na primeira etapa seria realizada a subtração entre o dividendo e o divisor. A partir da segunda etapa, seria realizada a subtração entre o resultado obtido na etapa anterior e o divisor. E assim sucessivamente até que o resultado obtido fosse um número menor que o divisor, por exemplo, para se calcular o resultado de 60 ÷ 13 as etapas seriam:

- Etapa 1: 60 – 13 = 47
- Etapa 2: 47 – 13= 34
- Etapa 3: 34 – 13 = 21
- Etapa 4: 21 – 13 = 8

Observe que a parcela 13 aparece quatro vezes no decorrer das etapas. Como o resultado obtido na etapa 4 foi 8, obtemos que: 60 dividido por 13 resulta em 4 e deixa resto 8.

Apesar da limitação de realizar apenas as operações de soma e subtração, a pascalina causou assombro na época em que foi inventada, pois antes dela o aparelho mais popular utilizado para fazer cálculos era o ábaco. De acordo com Marcolin (2002):

> *"As modernas calculadoras cabem na palma da mão de uma criança. Mas quando a primeira máquina de calcular foi inventada, em 1642, há 360 anos, era uma grande caixa cheia de engrenagens apoiada em uma mesa. Fazia apenas soma e subtração, mas causou assombro".* (MARCOLIN, 2002).

Consideramos discutir sobre a pascalina, algo de grande importância para nossa pesquisa, uma vez que ela representou um importante marco na evolução dos instrumentos criados com os objetivos de se registrar resultados e realizar cálculos com as mais diversas quantidades.

2.3 Calculadoras Eletrônicas.

O surgimento das calculadoras eletrônicas está intrinsecamente ligado ao desenvolvimento da computação. De acordo com Nogueira (2015):

> *"O surgimento das calculadoras eletrônicas está firmemente relacionado com o surgimento dos computadores. Os primeiros computadores centrais apareceram no final da década de 1940 e ao longo da década de 1950. No começo, usavam válvulas a vácuo, e por isso eram tão grandes. Depois, com o advento dos transistores em seus circuitos lógicos, assim como as investigações do professor Maximino Rodríguez Vidal na Universidade de Cambridge, esses computadores puderam começar a diminuir de tamanho, e assim, atravessavam o percurso para o aparecimento das primeiras máquinas manuais de calcular".* (NOGUEIRA, 2015).

Em abril de 1955 foi lançada a primeira calculadora eletrônica, a IBM 608, porém essa já existia desde 1954 e seus mecanismos eram de transistores, uma tecnologia totalmente revolucionária para a época. Devido ao seu alto custo, cerca de 80 mil dólares e por ser um equipamento de grande porte ainda não era acessível a maior parte da população.

Observe a figura 7, na qual podemos ver uma ilustração do modelo IBM 608.

Figura 7 - IBM 608.

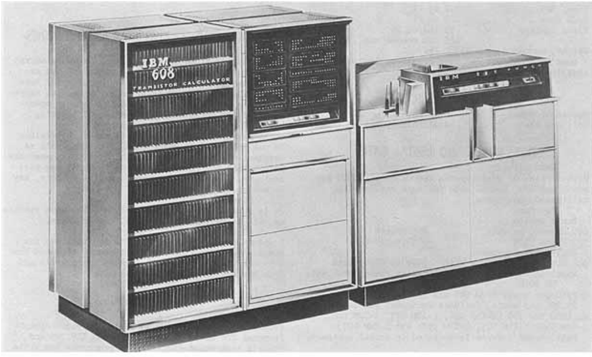


Figura retirada do site: http://sobscalculators.yolasite.com/hanheld-calculator.php. Acesso em 12/01/2020 às 19:20.

Três anos após o mundo conhecer a IBM 608, ela foi sendo aprimorada e ganhando versões mais acessíveis, de menor custo e menores em relação ao tamanho do modelo original. É claro que essa tecnologia chamou a atenção de outras empresas e estas fizeram investimentos pesados em pesquisas e produções de novos modelos.

A companhia japonesa Casio Computer, em 1957, lançou a calculadora modelo 14 - A, que é considerada a primeira calculadora compacta e totalmente elétrica do mundo, pois usavam apenas dispositivos comutadores e eletromecânicos. Por ser um equipamento de pequeno porte, essa calculadora se tornou um modelo consideravelmente mais acessível que o modelo concorrente apresentado pela empresa IBM. De acordo com Nogueira (2015):

> *"Foi então que a tecnologia ganhou a atenção de outras empresas. Um delas, foi a grande companhia japonesa Casio Computer. Eles investiram em estudos e lançaram um modelo conhecido como 14-A, que é considerada a primeira calculadora "compacta" totalmente elétrica do mundo. Ao invés de utilizar lógica eletrônica, elas usavam relés, que são dispositivos comutadores eletromecânicos".* (NOGUEIRA 2015).

Na figura 8 podemos ver o modelo lançado 14-A.

Figura 8 - Calculadora Casio modelo 14-A.

Figura retirada do site: https://www.firstversions.com/2015/06/casio-calculator.html. Acesso em 03/02/2020 às 10:34.

Outros modelos relevantes no desenvolvimento tecnológico das calculadoras foram os modelos: ANITA Mk VII e ANITA Mk VIII lançadas no ano de 1961, ambas calculadoras de mesa totalmente eletrônicas. O nome ANITA é uma abreviação para “A New Inspiration To Arithmetic/Accounting”. Por serem equipamentos totalmente eletrônicos apresentavam a vantagem de serem modelos silenciosos e rápidos. O grande avanço tecnológico desses modelos está na utilização do circuito integrado que reduzia drasticamente o custo das funções eletrônicas. Observe os modelos ANITA Mk VII e Mk VIII nas figuras 9 e 10:

Figura 9 - Calculadora modelo ANITA Mk VII.

Figura retirada do site: http://www.vintagecalculators.com/html/anita_mk_vii.html. Acesso em 12/01/2020 às 19:30.

Figura 10 - Calculadora modelo ANITA Mk VIII.

Figura retirada do site: http://www.vintagecalculators.com/html/anita_mk_8.html. Acesso em 12/01/2020 às 19:32.

Nos anos 70, após o lançamento dos modelos ANITA e avanços na tecnologia do circuito integrado, a calculadora se popularizou, isso se deu pela capacidade desse equipamento de realizar cálculos de maneira rápida e pelo lançamento de modelos cada vez mais baratos. De acordo com Nogueira (2015):

> *"A partir de então, começaram a surgir no mercado calculadoras mais versáteis e com preços mais reduzidos. Em 1970 aparecem as calculadoras eletrônicas portáteis, que revolucionaram o trabalho em escritórios e a arte de calcular. Elas se utilizavam de circuitos integrados compactos, e algumas delas possuíam mais capacidades do que alguns computadores produzidos em 1958".* (NOGUEIRA, 2015).

Os avanços tecnológicos propiciaram a criação de modelos cada vez mais compactos e de custo reduzido. Hoje em dia a calculadora está presente também em celulares, relógios e computadores. Os modelos de calculadoras mais avançados atualmente têm em sua programação funções estatísticas (por exemplo: combinações, arranjos e fatoriais), funções gráficas e funções aritméticas tais como conversões métricas e simplificações. Alguns modelos inclusive realizam cálculos matriciais, complexos, integrais e diferenciais.

3
JUSTIFICATIVA

No Brasil um dos documentos que regulamentam a organização escolar, desde o nível básico até o superior, de instituições públicas e privadas é a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação). A segunda e mais atual versão dessa lei foi sancionada em 20 de dezembro de 1996 e busca regulamentar a educação brasileira de acordo com os princípios da constituição federal de 1988. Até então a educação seguia a regulamentação dada pela primeira versão dessa lei que datava de 1961.

De acordo com a LDB, *"o ensino deverá ser ministrado vinculando: a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais".* (BRASIL, 1996).

É visível que a tecnologia está cada vez mais presente no cotidiano das pessoas, e a escola necessita acompanhar essa tendência, incluindo as tecnologias possíveis para o uso no ambiente escolar.

As tecnologias de ensino na educação tem seu uso previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que foi aprovada e homologada pelo MEC no ano de 2017. Em tal documento consta como habilidade *"utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados".* (BRASIL, 2017).

Uma tecnologia que pode ser usada para desenvolver as competências matemáticas é a calculadora. A calculadora é uma ferramenta atrativa, porque já faz parte do cotidiano da sociedade há décadas. A primeira calculadora em uma versão portátil e barata foi produzida nos anos 70, nos EUA. Com o decorrer do tempo ela se tornou um objeto de uso popular assim como diversos outros equipamentos eletrônicos, inclusive alguns aparelhos eletrônicos têm dentre seus usos a calculadora, como é o caso de celulares e de notebooks.

Nessa dissertação trataremos mais especificamente do uso da calculadora na investigação acerca dos números racionais e irracionais, bem como suas diversas representações através do uso de variados registros semióticos (ver capítulo 4, seção 4.2.1) tendo como foco principal o uso desse equipamento no ensino fundamental II.

O uso de calculadoras é também amparado pelos PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais), documento de 1997, como cita o trecho abaixo:

> *“Materiais de uso social frequente são ótimos recursos de trabalho, pois os alunos aprendem sobre algo que tem função social real e se mantêm atualizados sobre o que acontece no mundo, estabelecendo o vínculo necessário entre o que é aprendido na escola e o conhecimento extraescolar. A utilização de materiais diversificados como jornais, revistas, folhetos, propagandas, computadores, calculadoras, filmes, faz o aluno sentir-se inserido no mundo à sua volta”.* (BRASIL, 1997)

Priorizando as conclusões que podem ser tiradas sobre os resultados obtidos a partir de cálculos aritméticos, e uma vez que o educando já domine os algoritmos das operações básicas, através do uso da calculadora é possível fazer com que ele desenvolva novas habilidades matemáticas, amplie o domínio das habilidades já desenvolvidas e seja capaz de alcançar os seguintes descritores relacionados aos números racionais e irracionais:

> *a) “Comparar e ordenar números racionais e irracionais”;*
> *b) “Compreender e aplicar o arredondamento de números irracionais”;*
> *c) “Identificar a geratriz de uma dízima periódica”;*
> *d) “Identificar a localização de números racionais na reta numérica”;*
> *e) “Identificar diferentes representações de um mesmo número racional”;*
> f) *“Identificar um número irracional”. (Rio de Janeiro, 2018)*

Descritores esses que são propostos pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SME) no documento “descritores de matemática 6º ao 9º ano” elaborado em 2018.

O aluno deverá ser o protagonista nesse processo de aprendizagem, uma vez que ele realizará as investigações propostas e de forma orientada pelo professor, o mesmo poderá tirar conclusões sobre o conteúdo estudado.

Tendo em vista os objetivos citados e considerando o amparo dos diversos documentos que norteiam o ensino no Brasil, consideramos a calculadora uma ferramenta matemática importante no cotidiano escolar.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 Conjuntos numéricos.

Dentre os conteúdos matemáticos abordados no ensino fundamental, dois assuntos de extrema importância são a definição dos conjuntos numéricos e a classificação de um número em relação a esses conjuntos.

Nesse nível de ensino são introduzidos os conjuntos dos números naturais, que é simbolizado por **N**; o conjunto dos números inteiros, que é simbolizado por **Z**; o conjunto dos números racionais, que é simbolizado por **Q**; o conjunto dos números irracionais, que é simbolizado por **I**; e o conjunto dos números reais, que é simbolizado por **R**.

Há uma definição formal para cada conjunto numérico, que segue axiomas e a rigidez matemática necessária. Porém no ensino fundamental, os conjuntos numéricos são trabalhados de forma intuitiva e distribuídos nos quatro anos do ensino fundamental II. A seguir analisaremos cada um desses conjuntos numéricos e a forma como eles são trabalhados no ensino fundamental II.

4.1.1 Números Naturais.

O conjunto dos números naturais foi um elemento matemático proveniente de um lento e longo processo de raciocínio. Ele surgiu da necessidade do ser humano de contar e registrar elementos diversos, tais como objetos, pessoas e animais. De acordo com Lima[3] (2012):

> *"Lentamente, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou - se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro,…) que são os números naturais. Foi uma evolução demorada. As tribos mais rudimentares contam apenas um, dois e muitos".* (LIMA, 2012, p. 33)

Um grande salto na construção do conceito e da definição dos números

---

[3]Elon Lages Lima (Maceió, 9 de julho de1929 - Rio de Janeiro, 7 de maio de 2017) foi um grande matemático brasileiro. Tornou-se mestre (1955) e doutor (1958) em matemática pela Universidade de Chicago. Foi um membro titular da Academia Brasileira de Ciências (ABC) e da Academia de Ciências dos Países em Desenvolvimento (TWAS). Foi ganhador por duas vezes do Prêmio Jabuti da Câmara Brasileira do Livro e recebedor do Prêmio Anísio Teixeira do Ministério da Educação. De 1987 a 1991 foi membro do Conselho superior da FAPERJ. Além disso, foi também membro do Conselho Nacional de Educação.

naturais ocorreu no século XIX. O matemático e filósofo italiano Giuseppe Peano[4] formulou quatro axiomas, conhecidos atualmente como “axiomas de Peano” que fundamentam a teoria dos números naturais.

Para isso, ele utilizou a noção abstrata de número “1”, que representa o primeiro elemento do conjunto **N** e a noção intuitiva de “sucessor”, que dentro de um processo de contagem simboliza uma unidade a mais do que o número anterior representa. De acordo com LIMA (2012, p. 34) os axiomas de Peano são:

a) “Todo número natural tem um único sucessor”;

b) “Números naturais diferentes tem sucessores diferentes”;

c) “Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro”;

d) “Seja X um conjunto de números naturais (isto é X está contido em **N**). Se 1 pertence ao conjunto X e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X pertence a X, então X= **N**”.

Ainda de acordo com Lima (2012):

> *“Decorridos muitos milênios, podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto N dos números naturais valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático Giuseppe Peano no limiar do século 20”.*
> (LIMA, 2012, p. 34)

No sexto ano de escolaridade, porém é apresentada aos alunos uma noção intuitiva acerca do conjunto dos números naturais.

Nesse ano de ensino os alunos entendem os números naturais como os números que podem representar o resultado de uma contagem, que esse conjunto possui uma relação de ordem entre seus elementos e que é um conjunto infinito.

Ele começa a ver os números naturais como um conjunto ordenado, e um código que representa os elementos da sua vida dentro ou fora do ambiente escolar. Esse código pode representar horas, dias, anos, enfim as mais diversas quantidades a quais ele já está acostumado no decorrer da vida.

A forma intuitiva como esse conjunto é apresentada ao aluno tem a ver com a vivência do aluno. Ressaltamos que essa relação estabelecida entre o

[4]Giuseppe Peano (Spinetta, 27 de agosto de 1858 - Turim, 20 de abril de 1932) é um autor italiano, cujo nome é lembrado até hoje em conexão com os axiomas por ele introduzidos, dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise. Foi um membro da Accademia dei Lincei, a mais alta honraria italiana para cientistas.

conteúdo escolar e a vivência do aluno é um importante aspecto da educação matemática. De acordo com a BNCC (2017):

> *"Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental-Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas".* (BRASIL 2017).

Nessa etapa de ensino também é apresentada a notação **N** = {1, 2, 3, 4, 5,...} cujos elementos são números provenientes do sistema de numeração decimal. Uma grande utilidade dessa notação é que podemos ter a noção de sucessor e antecessor.

4.1.2 Números Inteiros.

De acordo com BIANCHINI (2015) no sétimo ano de escolaridade, uma vez que os educandos já estão familiarizados com os números naturais, bem como com as operações aritméticas inerentes aos mesmos, tais como: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, são-lhes apresentados os números inteiros.

Ao se deparar com contas de subtração nas quais o minuendo é menor que o subtraendo eles tomam conhecimento sobre a existência de números negativos. E a partir da ideia de oposto de um número inteiro associado à representação da reta numérica eles entendem os números inteiros como o conjunto dos números naturais reunidos com o zero, e os inteiros negativos, ou seja, **Z** = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}. De forma intuitiva, como uma extensão dos números naturais, pode-se perceber que o conjunto **Z** é infinito.

Nesse ano de escolaridade, são dados contextos para que haja significado aos elementos desse conjunto. Por exemplo, números negativos podem representar: prejuízos financeiros, temperaturas baixas, profundidades, saldo de gols para um time que levou mais gols do que marcou. Enfim, são dados os mais diversos contextos.

Aos números inteiros positivos são dados contextos parecidos, porém com significados opostos. Por exemplo, os números inteiros positivos são associados a lucros financeiros, à temperaturas altas, e altitudes, sempre de forma similar ao que é feito com os números inteiros negativos.

Observe as figuras 11, 12, 13 e 14 que nos apresentam tabelas referentes a temperaturas, situações financeiras, saldos de gols e altitudes, respectivamente.

Figura 11– Registros de temperaturas de cidades em forma de tabela.

Cidades	Temperatura em ºC
São Joaquim (T)	– 3
Porto Alegre (M)	– 2
Jataí (R)	1
São Gabriel do Norte (S)	3
Aquidauana (Q)	6

Figura retirada do site: http://aneste.org/d16-identificar-a-localizaco-de-nmeros-inteiros-na-reta-numric.html. Acesso em 06/12/2019 às 10:50.

Figura 12– Lucros e prejuízos em forma de gráfico.

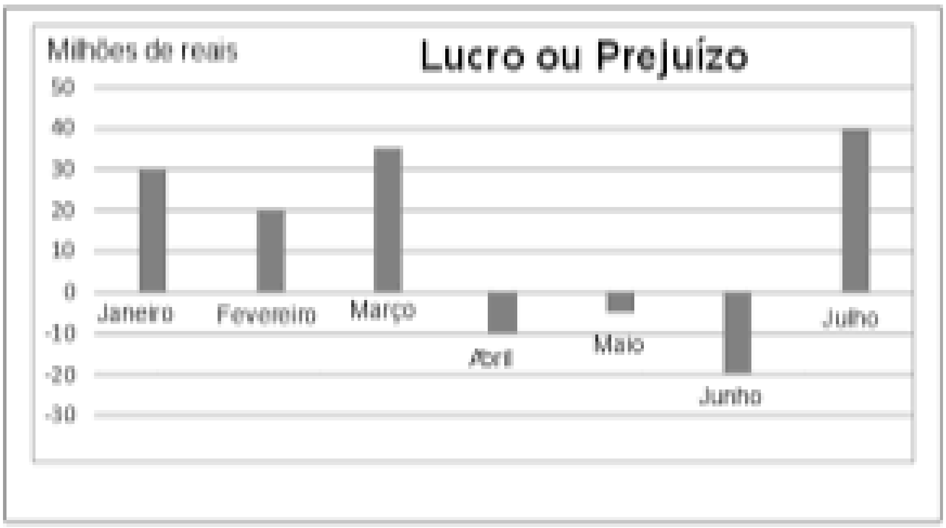


Figura retirada do site: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_unicentro_solenifilipin.pdf. Acesso em 06/12/2019 às 10:54.

Figura 13– Saldo de gols representados em uma tabela.

CLASSIFICAÇÃO	GP	GS	SG
Internacional	34	11	23
Grêmio	32	16	18
Veranópolis	27	22	5
Novo Hamburgo	19	14	5
Caxias	18	14	4
São José – RS	20	19	1
Juventude	21	26	-5

Figura retirada do site: https://sites.google.com/site/nomundodosinteiros/abordando-o-conteudo/contas-com-negativos. Acesso em 29/12/2019 às 10:57.

Figura 14- Altitudes positivas e negativas.

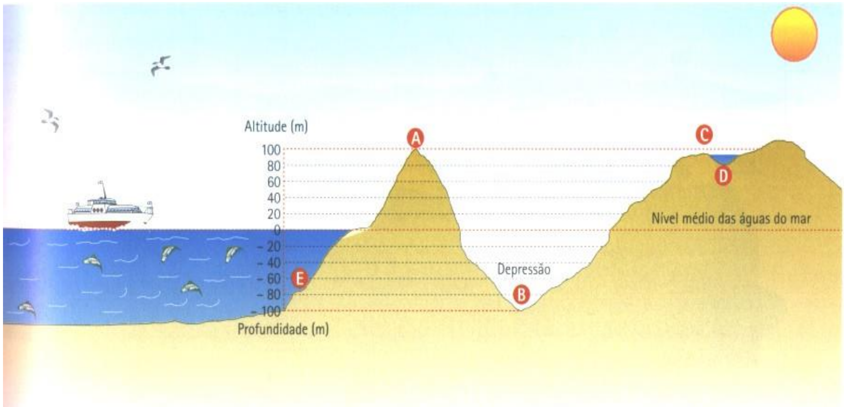


Figura retirada do site: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1577. Acesso em 06/12/2019 às 10:59.

4.1.3 Números Reais.

O conjunto dos números reais, que usualmente denotado por **R** é definido como um corpo ordenado e completo.

Esse conjunto é um corpo, porque segue os seguintes axiomas:

Para *a*, *b* e *c* pertencentes a **R** temos:

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existe *0* pertencente *a* **R** tal que $a + 0 = a$, para todo *a* pertencente a **R**.

- Para todo *a* pertencente a **R**, existe b pertencente a **R** tal que *a* + *b* = 0.
- *ab* = *ba*.
- (*ab*)*c* = *a*(*bc*).
- Existe *1* pertencente a **R** tal que *1* diferente de *0* e *a.1 = a* , para todo *a* pertencente a **R**.
- Para todo *a* pertencente a **R** - {*0*}, existe *b* pertencente a **R** tal que *ab* = *1*.
- *a*(*b* + *c*) = *ab* + *ac*

Esse conjunto é ordenado porque segue os seguintes axiomas:
Existe um subconjunto **X** contido em **R** tal que:

- Se *a* e *b* pertencem a **X**, então *a* + *b* também pertence a **X**.
- Se *a* e *b* pertencem a **X**, então *ab* pertencem a **X**.
- Para todo *a* pertencente a **R** temos que a também pertence a **X**, ou *a* = *0* ou *a* também pertence a **X**.

E por fim, esse conjunto é completo porque de acordo com o axioma da completude, todo subconjunto não vazio de **R**, limitado superiormente possui supremo. A seguir, definiremos os conceitos de subconjunto limitado superiormente e supremo.

Um subconjunto é dito limitado superiormente se existe b nesse subconjunto tal que x é menor ou igual que b, para todo x pertencente a esse subconjunto.

E um elemento β é supremo de um subconjunto **X** não vazio de **R**, se x é menor ou igual que β para todo x pertencente a **X**. E se existe c pertencente a **X** tal que c é menor ou igual a x, para todo x pertencente a **X**, então β é menor ou igual a **c.**

Além dessa definição podemos associar cada número real a um ponto da reta numérica real. De acordo com MALTA, PESCO e LOPES (2015, p.30): *"... podemos identificar os números reais com os pontos de uma reta, que, com essa identificação, é denominada uma reta real".*

Porém no ensino fundamental II o conjunto dos números reais é trabalhado explorando as aproximações que podem ser feitas em relação a eles a partir de números que possuem representações decimais finitas.

Uma representação decimal de um número refere-se à escrita do mesmo considerando sua parte inteira e suas casas decimais. Assim a representação decimal de um número x é da forma:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

Onde a_0 é um número inteiro e a_1, a_2, a_3 ... são números naturais e $0 \leq a_i \leq 9$.

Portanto, a representação decimal de um número real x é x = a_0, $a_1a_2a_3$....

De acordo com MALTA, PESCO e LOPES (2015, p.51) *"qualquer número real pode ser aproximado por números que possuem uma representação decimal finita (chamados de decimais exatos)"*.

Essa forma de se trabalhar o conjunto **R** viabiliza desenvolver competências relacionadas aos números reais tais como: arredonda-mentos de acordo com a precisão desejada e a localização desses números na reta numérica também de acordo com a precisão desejada.

4.1.4 Números Racionais.

É o conjunto formado pelos números reais que podem ser representados na forma r = $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e q é diferente de zero.

Ou seja, representando o conjunto dos racionais por **Q**, temos: **Q** = {$\frac{a}{b}$ / a, b ϵ **Z**, e b ≠ 0}.

Utilizando essa definição percebemos que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números racionais, ou seja, todos os elementos que pertencem a **N** também pertencem a **Q**. Pois para qualquer elemento de **N**, basta formar uma fração adotando denominador 1, mantendo assim cada elemento de **N** inalterado, pois 1 é elemento neutro da divisão. Podemos tomar como exemplo, sem perda de generalidade o número 12, temos que 12 = $\frac{12}{1}$.

Analogamente, temos que o conjunto dos números inteiros também está contido em **Q**. Ou seja, todos os elementos que pertencem a **Z** também pertencem a **Q.**

Temos também que qualquer número cuja a representação decimal é um decimal exato, pertence a **Q**, pois basta contar o número de casas à direita da vírgula que o número tiver e formar uma fração cujo numerador é o decimal exato sem a vírgula, e o denominador é 10^n, sendo n o número de casas à direita da vírgula. Tome como exemplo, sem perda de generalidade, o número 1,358 perceba que esse número possui três casas à direita da vírgula, então ele é equivalente a fração $\frac{1358}{10^3}$ que por sua vez é equivalente a fração $\frac{1358}{1000}$.

. Números cuja representação decimal é uma dízima periódica também fazem parte do conjunto **Q**. Pois a partir de operações aritméticas e algébricas podemos transformar qualquer dízima periódica em fração, fração essa que recebe o nome de fração geratriz (ver anexo I).

Dízimas periódicas são representações decimais nas quais a partir de certo dígito à direita da vírgula há um padrão de repetição nos demais dígitos. Um exemplo de uma representação decimal que é dízima periódica é $0{,}\overline{3}$ na qual à direita da vírgula o número 3 repete infinitamente.

4.1.5 Números irracionais.

O conjunto dos números racionais não representa todos os elementos do conjunto dos número reais. De acordo com Malta, Pesco e Lopes (2015):

> *"Ocorre que os pontos da reta real que representam números racionais não cobrem a reta toda. Esse fato, conhecido como a descoberta do número raiz quadrada de 2, foi provado pelos gregos pitagóricos do século V antes de cristo. Em termos da terminologia atual, isto significa que existem números reais que não são racionais".*
>
> (MALTA, PESCO e LOPES, 2015 p.52).

Na antiguidade, por volta do século V a.C, os gregos acreditavam que dois segmentos eram sempre comensuráveis, ou seja, era sempre possível conseguir uma unidade na qual os dois segmentos tinham a medida igual a um múltiplo dessa unidade.

Em outras palavras, suponha dois segmentos AB e CD. A partir de uma unidade de comprimento **u**, era possível escrever a medida de AB sendo m.**u** e a medida de CD sendo n.**u**, com m e n inteiros. Consequentemente, a razão entre as medidas de dois segmentos comensuráveis sempre resulta em um número racional. Observe a figura 15 que apresenta um exemplo considerando **u** = 1 cm:

Figura 15: Segmentos comensuráveis.

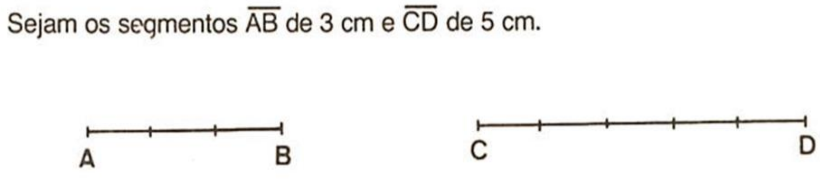


Figura retirada do site: http://jmpgeograafia.blogspot.com/2011/10/grandezas-proporcionais.html. Acesso em 24/01/2020 às 15:50.

No exemplo representado pela figura 15 a razão entre as medidas dos segmentos AB e CD é $\frac{3}{5}$, então considerando a concepção grega da antiguidade esses segmentos são comensuráveis. Porém uma descoberta criou uma crise na ciência matemática da época, uma vez que foi obtido um número que não era racional.

É creditado aos pitagóricos[5] a descoberta de um dos primeiros números irracionais, o número $\sqrt{2}$. A partir da relação pitagórica, que nos garante que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ao ser calculada a medida da diagonal de um quadrado de lado de medida 1 unidade de comprimento, foi encontrado o resultado $\sqrt{2}$ unidade de comprimento. Observe a figura 16.

Figura 16: Cálculo da medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

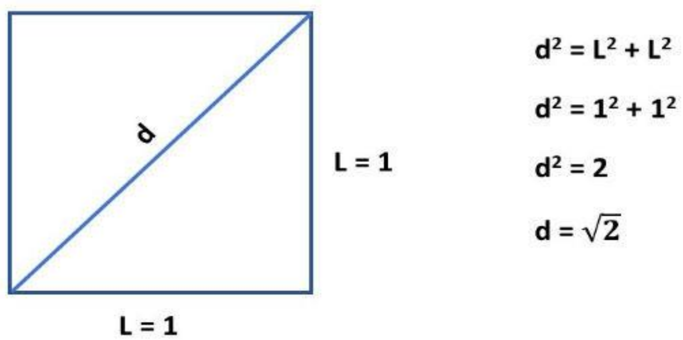


Figura retirada do site: https://www.todamateria.com.br/numeros-irracionais/. Acesso em 24/01/2020 às 15:58.

Obtendo assim um par de segmentos incomensuráveis, que são: o lado de

[5] Pitagóricos é a denominação dado aos integrantes da escola pitagórica, fundada por Pitágoras em Crotona na Itália.

um quadrado e a diagonal do mesmo quadrado.

Demonstraremos que raiz quadrada de 2 não é racional. Primeiramente supomos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Então, existem *p* e *q* números inteiros, com *q* diferente de zero tais que um é par e o outro é ímpar e $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Então, $2 = \frac{p^2}{q^2}$, logo $p^2 = 2q^2$, e portanto p^2 é um número par. Daí, *p* também é número par, logo $p = 2k$, para algum $k \in \mathbf{Z}$. Consequentemente $2q^2 = 4k^2$, e então $q^2 = 2k^2$. Assim, q^2 é um número par, e portanto q também é um número par. Portanto teríamos p e q números de mesma paridade o que contraria a hipótese.

Números irracionais são definidos como números reais que não são racionais.

Ou seja, elementos pertencentes ao conjunto **I** não podem ser representados como uma fração de numerador e denominador inteiros, sendo o denominador diferente de zero. Isso se deve ao fato de os números irracionais terem representação decimal infinita e não periódica.

Um famoso número irracional é o π (Pi), que representa o resultado da divisão da medida do comprimento de uma circunferência pela medida do diâmetro dela. Ao longo da história da humanidade diversos povos estudaram o número π. Segundo Wendpap , Bastiani e Guzzo (2008):

> *"O número π tem uma história fascinante, que começou acerca de 4000 anos atrás. Antes de mais nada, é importante focar que na história do π, um dos passos fundamentais consistiu em adquirir consciência da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria concebido o π. Inúmeros povos andaram à sua procura mesmo antes que chegassem a ter consciência matemática".*
> (WENDPAP, BASTIANI e GUZZO, 2008, pág. 2).

Uma curiosidade sobre o número π, é que devido a sua fama existe uma data comemorativa para ele que é celebrada no dia 14 de março cuja data na notação americana é 3/14, devido a aproximação 3,14 para esse número. Atualmente, o número Pi já pode ser representado com cerca de 30 trilhões de casas decimais. Ele é definido como um número transcendente, ou seja, não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais que tenha como raiz o número Pi.

Devido a essas duas características peculiares (representação decimal infinita e a ausência de período), os números irracionais se mostram um objeto matemático desafiador pertencente ao currículo escolar da educação básica.

Quando trabalhados em sala de aula, nesse nível de ensino, os números irracionais são tratados, na maioria das vezes, a partir de aproximações para representações decimais exatas. Com isso é possível obter resultados aproximados para operações entre números irracionais.

Por exemplo quando utilizamos o número irracional π em um cálculo aritmético ou em um problema, na educação básica, geralmente é mantido o símbolo π ou é utilizado o valor aproximado em algumas casas decimais tais como 3,1 ou 3,14.

Podemos observar nas figuras 17 e 18 dois problemas propostos em um livro da educação básica. No primeiro problema, para se chegar na resposta apresentada, o valor do π é considerado 3,14. No segundo problema é mantido o símbolo π na resposta.

Figura 17- Problema matemático considerando o valor de π igual a 3,14.

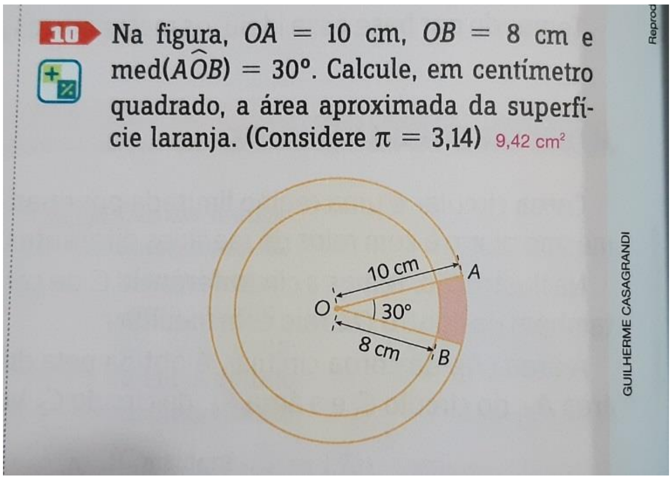


Figura tirada do livro "Matemática: Compreensão e Prática".

Figura 18- Problema matemático considerando o resultado mantendo o símbolo π.

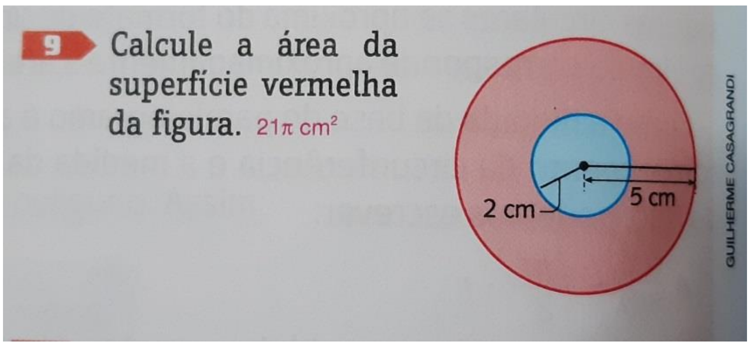


Figura tirada do livro "Matemática: Compreensão e Prática".

Podemos ter também uma perspectiva da localização do número π na reta numérica, observe a figura 19:

Figura 19- Perspectiva da localização do número π na reta numérica.

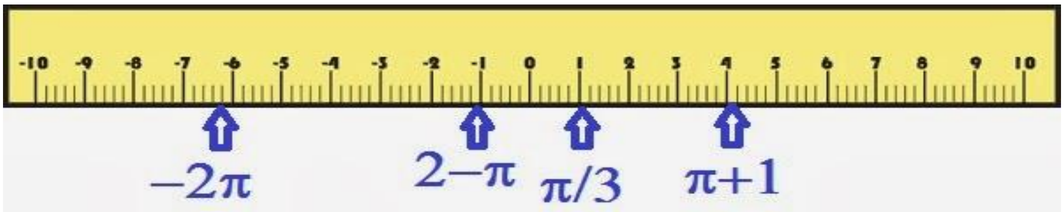


Figura retirada do site: http://matematicanaeduardogomes.blogspot.com/p/fevereiro_8.html. Acesso em 13/01/2020 às 12:36.

4.2 Teorias educacionais.

As representações decimais pertencentes tanto ao conjunto **Q** quanto ao conjunto **I**, trazem desafios para o ensino da matemática. Para tanto este trabalho se propõe a apresentar uma alternativa de ensino baseada nas teorias educacionais de Raymond Duval[6], cujos estudos analisam e definem as representações semióticas de um objeto matemático, e Lev Vygotsky[7], cujos estudos e criação da teoria sócio-construtivista evidenciam a importância da zona de desenvolvimento proximal, conhecida como ZPD. Pois consideramos essas teorias algo de extrema importância no processo ensino-aprendizagem referente às representações decimais dos números racionais e irracionais.

Alternativa essa que busca uma aprendizagem significativa das representações decimais e de suas classificações.

4.2.1 Representações semióticas.

Segundo Raymond Duval, *"as representações semióticas são produções construídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de*

[6]Raymond Duval é professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Duval investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. Ele também é filósofo e psicólogo de formação.

[7]Lev Vygotsky (Orsha, 17 de novembro de 1896 – Moscou, 11 de junho de 1934) foi um psicólogo, proponente da Psicologia cultural-histórica. Pensador importante em sua área e época foi pioneiro no conceito de que o desenvolvimento intelectual das crianças ocorre em função das interações sociais e condições de vida.

funcionamento." (Duval, 1993).

Ao se tratar de números racionais, as representações semióticas que um objeto matemático pode ter são de extrema importância, uma vez que essas representações criam significados cognitivos no educando, e auxiliam no entendimento do conteúdo. Porém essas representações não podem ser confundidas com o objeto matemático em si, que tem definição e propriedades operatórias próprias.

Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente a qualquer fração cujo numerador é a metade do denominador (desde que o denominador não seja zero), ou seja, $\frac{1}{2}$ é equivalente a: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ... As frações citadas representam um tratamento da fração um meio dentro de um mesmo registro semiótico. Temos que essa fração também é equivalente a representação decimal exata 0,5 pois ao dividirmos o numerador 1 pelo denominador 2 obtemos essa representação decimal exata como resultado, ou seja, podemos converter essa fração em outro registro semiótico que é a representação decimal exata 0,5.

Também podemos converter essa fração na porcentagem 50%, pois a mesma também representa a metade de alguma coisa a qual esteja relacionada.

Para que fique claro, que a porcentagem 50% é uma representação da fração $\frac{1}{2}$, considere os seguintes exemplos:

1) Metade de 60 é 30.

Calcular metade de 60 é realizar o produto entre 60 e a fração $\frac{1}{2}$, que resulta em 30.

2) 50% de 60 é 30.

Calcular 50% de 60 é realizar o produto entre 60 e a fração $\frac{50}{100}$, que resulta em 30.

Portanto temos que os números racionais apresentam elementos equivalentes que podem ser representados de formas diversificadas, já que um número racional pode ter outra representação equivalente, porém representada na estrutura de outro elemento matemático.

Em aulas em que são explorados conteúdos geométricos, podemos converter a fração $\frac{1}{2}$ em uma figura geométrica que faz sentido dentro de um contexto, observe a figura 18 na qual está representada a metade de uma pizza.

Figura 20- Metade de uma pizza.

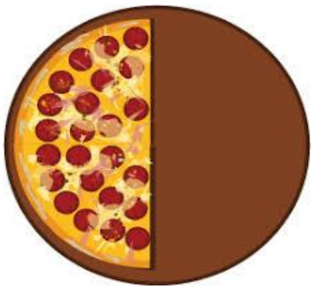


Figura retirada do site: https://md.uninta.edu.br/geral/nivelamentoemmatematica-old/. Acesso em 29/12/2019 as 10:29.

Outra representação semiótica para a qual há a conversão da fração um meio, que é amplamente explorada, é a representação dessa fração em uma reta numérica real. Observe, que ao convertermos essa fração para a representação decimal exata 0,5 temos que ela representa o ponto que está exatamente no meio entre os inteiros 0 e 1 marcados na reta. Veja a figura 21:

Figura 21- Representação na reta numérica da fração $\frac{1}{2}$:

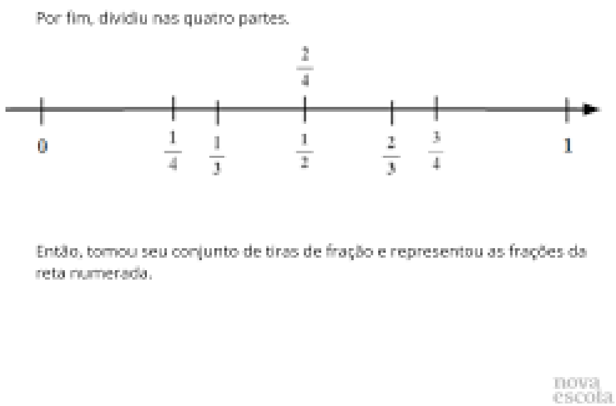


Figura retirada do site: https://novaescola.org.br/plano-de-aula/910/representacao-de-fracoes-na-reta-numerada. Acesso: 09/12/2019 às 09:34.

O conhecimento e visualização de representações semióticas na abordagem dos mais diversos conteúdos matemáticos são de suma importância para a compreensão deles. Pois essas representações criam uma linha de raciocínio consistente sobre o assunto estudado e propiciam uma aprendizagem significativa sobre ele.

Ainda de acordo com Duval (1993):

> *"Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado".* (DUVAL, 1993).

Dentro dos números racionais, podem existir também equivalências entre frações e dízimas periódicas. Dízimas periódicas são representações decimais infinitas, nas quais a partir de certa casa decimal há a repetição de algarismos, a essa repetição damos o nome de período.

Como é o caso da fração $\frac{1}{3}$, porque ao dividirmos um inteiro em três partes obtemos como resultado a dízima periódica $0,\overline{3}$ observe que nessa dízima periódica o período é 3.

Analogamente à fração $\frac{1}{2}$, quando trabalhamos com conteúdos geométricos, também podemos associar a fração $\frac{1}{3}$ a uma ilustração geométrica que faz sentido dentro do contexto em que esta fração está sendo empregada. Observe a figura 22:

Figura 22- Um terço de uma jarra de suco.

Figura retirada do site: https://brainly.com.br/tarefa/910525. Acesso em 06/12/2019 às 08:43.

Apesar dos diversos exemplos dados de objetos matemáticos que podem ser convertidos em outros objetos equivalentes em outras representações, não podemos confundir o objeto em si com as possíveis representações dele.

Mesmo que haja equivalência, frações, dízimas periódicas, e porcentagens apresentam propriedades e algoritmos operatórios diferentes. Assim como raízes quadradas e representações decimais infinitas não periódicas equivalentes a essas raízes também possuem propriedades e algoritmos operatórios diferentes.

Em seus estudos, Duval evidenciou a importância de diferenciar as representações das propriedades inerentes a elas.

> *"Isto pode ser considerado, portanto, um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível.*
>
> *Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, fora de toda representação semiótica, torna a confusão quase inevitável*". (DUVAL, 1993).

4.2.2 Sócio-construtivismo.

O sócio-construtivismo é uma teoria desenvolvida por Lev Vygotsky na qual ele evidencia a importância dos aspectos sociais, culturais e históricos na qual o indivíduo está inserido na construção e organização do conhecimento dele. Nessa teoria, o ser humano interage com o meio em que está convivendo e reage aos estímulos dados por esse meio, estímulos esses que moldam o aprendizado e geram uma ampliação dele.

Na concepção sócio-construtivista todos nós temos um conhecimento formado pelo meio em que estamos e esquemas cognitivos inerentes a esse conhecimento, adquirindo um equilíbrio mental em relação a isto. Meios esses que podem ser a família a qual pertencemos, o bairro que moramos, o grupo de colegas que nos rodeiam, enfim os diversos círculos sociais a qual pertencemos.

Ao termos contato com algum conhecimento, que entra em conflito com o conhecimento anterior, buscamos meios para assimilar as novas informações, e criamos esquemas cognitivos para reestabelecer o equilíbrio mental que tínhamos antes.

Tendo essa visão de que o meio fez com que o indivíduo seja estimulado a se adaptar e modifique seu conhecimento, a escola é um ambiente de extrema importância, pois na escola o aluno pode interagir com outros alunos donos de diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo, e através dessa interação ser levado a uma aprendizagem significativa dos conteúdos escolares.

Nesse cenário, o professor tem um papel de mediador, pois ele gerencia e propõe atividades, que quando realizadas em conjunto, podem levar aos alunos a construírem o conhecimento juntos, a partir da interação entre eles.

4.2.3 A zona de desenvolvimento proximal (ZPD).

Muitas vezes quando o assunto é aula de matemática, muitas pessoas imaginam fórmulas, listas enormes de exercícios, cálculos manuais repetitivos e sem contextualização. Isso se deve a um modelo tradicional que por muito tempo foi adotado por vários sistemas de ensino. Estudos apontam o quão enraizada está essa concepção no senso popular. De acordo com Schlickmann e Schmitz (2003):

> *"Essa, aliás, é, uma concepção muito forte que não consegue ser desmistificada: o modelo de sala fixa, onde todos os dias a rotina se repete e o ambiente está sempre igual. E esse espaço que deveria ser de convívio é demarcado pelo silêncio exigido dos alunos frente a um professor falante".*
> (SCHLICKMANN E SCHIMITZ, 2003 p. 4).

Devido a toda complexidade com relação às diversas representações semióticas que podem ser associadas ás representações decimais de um número, acreditamos que buscar uma metodologia de ensino na qual o aluno deverá ser o protagonista do processo de aprendizagem seja de extrema importância.

Tendo em vista o aprendizado em relação às representações decimais, uma teoria que não podemos deixar de levar em conta é a zona de desenvolvimento proximal (ZPD), sigla essa que vem do inglês "*zone of proximal development"*, sobre a qual tratou Vygotsky. Segundo ele a ZPD é essencialmente a "distância" entre o que o aluno consegue fazer sozinho e o que ele conseguiria fazer sob a orientação de um professor ou uma pessoa mais apta dentro do conteúdo estudado. Nessa teoria os trabalhos realizados em conjunto, tais como duplas, trios ou grupos facilitam para que todos os alunos realizem a apreensão de conteúdos e possam realizar atividades de forma autônoma. De acordo com Fino (2001):

> *"Com efeito, um aspecto particularmente importante da teoria de Vygotsky é a ideia da existência de uma área potencial de desenvolvimento cognitivo, definida como a distância que mede entre o nível atual de desenvolvimento da criança, determinado pela sua capacidade atual de resolver problemas individualmente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de adultos ou em colaboração com pares mais capazes".* (FINO, 2001, p.5).

Ainda de acordo com as ideias de Vygotsky, uma atividade só vale a pena ser executada quando desenvolve no educando a apreensão de conteúdos explorando a ZPD. De acordo com Fino (2001):

> *"Portanto, na perspectiva de Vygotsky, exercer a função de professor (considerando uma ZPD) implica em assistir o aluno proporcionando-lhe apoio e recursos, de modo que ele seja capaz de aplicar um nível de conhecimento mais elevado do lhe seria possível sem ajuda"* (FINO, 2001, p.7).

Consideramos a calculadora uma ferramenta importante nesse processo de aprendizagem sobre as representações decimais. A partir da proposta de atividades com utilização da calculadora, que priorizem a investigação de resultados provenientes de divisões associadas a frações, e raízes quadradas não exatas, o aluno seja capaz de caracterizar as representações decimais exatas, as dízimas periódicas e as dízimas não periódicas, bem como classificar um número como pertencente ao conjunto dos números racionais ou pertencente ao conjunto dos números irracionais.

Essas atividades levam ao aluno, tendo a orientação do professor, e baseado na troca de ideias com os colegas ao aprendizado significativo acerca das representações decimais de números racionais e de números irracionais..

4.2.4 Aprendizagem significativa.

Devemos, principalmente, aos estudos de David Ausubel[8] a teoria sobre aprendizagem significativa. De acordo com essa teoria, a apreensão de um novo conhecimento por um educando deve estar atrelada aos conhecimentos já adquiridos pelo mesmo. De acordo com AUSUBEL (1980) *"o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso seus ensinamentos".*

Ou seja, a aprendizagem de um novo conhecimento se dá pela ampliação dos conhecimentos já aprendidos em fases anteriores da história escolar do aluno, e não pela introdução isolada desse conhecimento.

> *"A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significativa para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio".*
> (KLAUSEN, 2017, p.6404).

Dentre inúmeros exemplos no qual podemos visualizar esse tipo de aprendizagem na matemática, podemos destacar, no estudo dos números racionais, as dízimas periódicas. Antes de aprender tal conteúdo, o aluno já tem conhecimento sobre representações decimais exatas. Ele já tem fundamentado em seu consciente que uma representação decimal exata aparece quando realizamos algumas contas de divisões previamente selecionadas, e também os algoritmos operatórios desses números. Ele já tem conhecimento também de como converter esses números em outras representações, tais como um ponto na reta real e porcentagem.

Ao serem propostas outras contas de divisão ele pode encontrar uma dízima periódica como resultado, investigar outros resultados desse mesmo tipo e tirar conclusões sobre esse novo elemento matemático. Ele também terá a capacidade de realizar algumas operações aritméticas com as dízimas periódicas, pois os algoritmos muitas vezes são idênticos aos das representações decimais exatas que ele já havia aprendido, e também converter essas dízimas em outras representações.

A memorização de conteúdos feita de forma automática, sem vínculo com

[8]David Paul Ausubel (Nova Iorque, 25 de outubro 1918 - Nova Iorque, 9 de julho de 2008) foi um psicólogo da educação estadunidense, e um especialista em psicologia educacional.

outros conhecimentos também pode ser útil, em algumas situações. Por exemplo, se o objetivo é fazer uma prova longa, ter uma fórmula decorada é útil. Porém a probabilidade do esquecimento do conteúdo referente à formula é grande. Por isso quanto mais *links* entre conhecimentos puderem ser feitos, mais significativa será a aprendizagem dos mesmos.

No caso de fórmulas o ideal é sempre viabilizar um modo de dedução a partir de conhecimentos já adquiridos. Deve-se ao professor, que é o profissional qualificado, encontrar meios e criar metodologias de abordagem que valorizem a história e os conteúdos já enraizados na mente dos alunos.

Essa teoria tem total relação com a teoria das representações semióticas e a teoria do sócio-construtivismo, pois as três teorias tem o mesmo objetivo: conectar conhecimentos de forma concisa buscando o aprendizado real e sólido dos conteúdos matemáticos.

5
DAS ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Com base nas teorias educacionais apresentadas no capítulo 4, apresentamos duas atividades que fornecem alternativas para o uso da calculadora como ferramenta de ensino na abordagem das representações decimais.

5.1 Primeira Atividade com o uso da calculadora.

Nessa seção apresentaremos uma atividade realizada com três turmas do sétimo ano do ensino fundamental II e uma turma do oitavo ano também desse nível de ensino do EMAC Professor Castro Rebello, localizado no bairro de Campo Grande, no Município do Rio de Janeiro. A autorização para a realização de tal atividade consta no anexo II desta dissertação.

A duração da mesma foi de 100 minutos, em cada turma que foi aplicada, e exigia como pré-requisito que o aluno conhecesse as quatro operações básicas e também já tivesse um conhecimento prévio do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números inteiros.

Em cada turma de sétimo ano participaram aproximadamente 30 alunos, e na turma de oitavo ano participaram 6 alunos, pois nessa turma a atividade foi aplicada como forma de recuperação paralela de estudos, uma vez que a mesma já havia tido o conteúdo proposto durante o ano letivo.

Para uma análise padronizada dos resultados obtidos pela atividade cada aluno usou uma calculadora de modelo KK-9838A da marca Kenko, cujo modelo está representado nas figuras 23 e 24 a seguir:

Figura 23– Calculadoras Kenko KK – 98938A utilizadas na atividade.

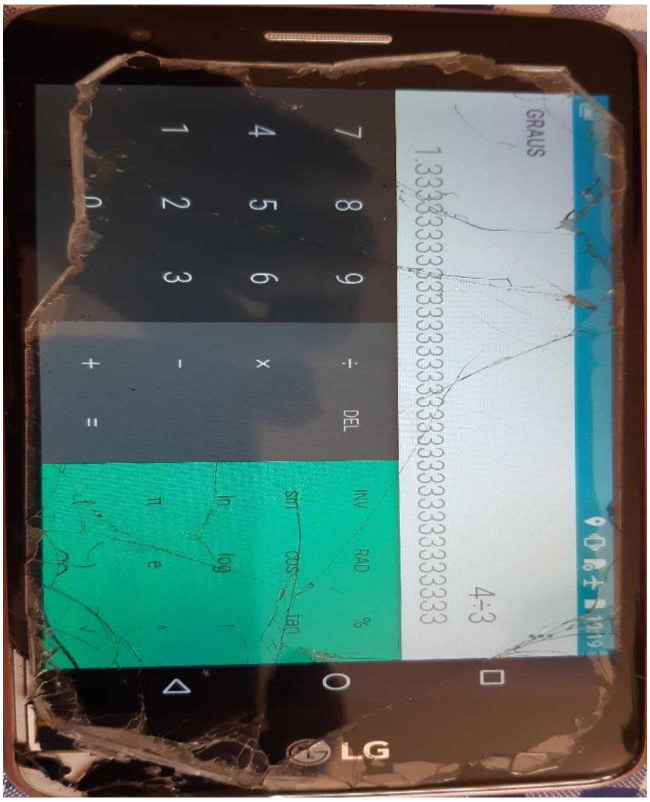
Figura 24– Calculadora Kenko KK – 98938A.

Foto retirada do site: https://lumasol.com.br/produto/calculadora-kenko-kk-9838a/.
Acesso: 03/12/2019 as 12:50.

A calculadora mostrada acima apresenta em cada resultado, proposto na atividade, uma representação decimal com 1 dígito à esquerda da vírgula e sete dígitos à direita da vírgula. Por exemplo, ao calcular 4 dividido por 3 nessa calculadora, o resultado observado é 1, 3333333. Em casos como esse, nos quais o resultado apesenta os sete dígitos à direita da vírgula, foi explicado aos alunos que o resultado pode ter mais dígitos que o representado pela calculadora, e que era necessário colocar reticências ao final do número observado no visor da calculadora.

Para isso lhes foi mostrado o resultado obtido pela calculadora do telefone LG modelo K8, que apresenta o máximo de 36 dígitos à direita da vírgula nos resultados mostrados. Observe na figura 25 o resultado da divisão de 4 por 3 no telefone LG K8:

Figura 25- Resultado da divisão de 4 por 3 no telefone LG K8.



A aplicação da atividade teve como objetivo investigar o quão importante pode ser a calculadora como instrumento de ensino em relação às representações decimais que podem ser encontradas na educação básica, tais como: representações decimais exatas, dízimas periódicas e dízimas não periódicas.

Na atividade em questão, a partir de um conjunto de frações e raízes quadradas previamente selecionadas, são determinadas representações decimais equivalentes a cada elemento desse conjunto. Obtendo assim uma representação semiótica do resultado pedido.

Após os cálculos propostos os alunos responderam perguntas discursivas de caráter investigativo acerca dessas representações decimais. E ao final da atividade, é esperado que cada aluno seja capaz de descrever e classificar cada uma das representações decimais encontradas.

A atividade foi realizada em duplas ou trios, pois essa formação dependia do número de alunos em sala, para que fosse feita de forma colaborativa e explorando a zona de desenvolvimento proximal de cada aluno. Fazendo assim com que individualmente cada um chegasse ao objetivo da atividade, que é a apreensão do conceito de representações decimais. Observe as figuras 26 e 27:

Figura 26- Atividade sendo realizada em turma de sétimo ano.

Figura 27- Atividade sendo aplicada em turma de sétimo ano.

A calculadora nesta atividade foi de suma importância na obtenção de resultados aritméticos, pois os mesmos eram números “desconhecidos” da maioria dos alunos. Mesmo que a realização de cálculos aritméticos seja uma habilidade já alcançada pela maioria dos alunos, um erro de cálculo poderia proporcionar uma análise equivocada dos resultados propostos.

Outro importante aspecto do uso da calculadora pelos alunos nessa atividade foi a valorização da participação ativa deles na execução dos cálculos e nas indagações propostas, propiciando assim uma aprendizagem significativa.

Cada aluno com o auxílio da calculadora e sob orientação do professor teve de responder o seguinte questionário:

ATIVIDADE COM USO DE CALCULADORA

NOME: T:

O objetivo dessa atividade é fazer uma investigação acerca das representações decimais que podemos associar a alguns elementos matemáticos.

BLOCO 1

Com o uso da calculadora, determine e registre as representações decimais que podemos associar a cada fração:

a) $\frac{7}{4}$= ______________________________ (utilize as teclas: 7, ÷, 4 e = em sequência).

b) $\frac{9}{2}$ =______________________________ (utilize as teclas: 9, ÷, 2 e = em sequência).

c) $\frac{8}{5}$ =______________________________ (utilize as teclas: 8, ÷, 5 e = em sequência).

d) $\frac{6}{8}$ =______________________________ (utilize as teclas: 6, ÷, 8 e = em sequência).

Observe as representações registradas nesse **bloco** e responda:

- O que podemos observar que existe em comum (de semelhante) nas representações decimais registradas?
____
____
______________________________.

- Mais especificamente, com relação à quantidade de casas decimais, o que pode ser observado?

____

____

________________.

<u>Bloco 2</u>

Com o uso da calculadora, determine as representações decimais que podemos associar a cada fração:

e) $\frac{4}{3}$ = ___________________________ (utilize as teclas: 4, ÷, 3 e = em sequência).

f) $\frac{13}{9}$ =___________________________ (utilize as teclas: 1, 3, ÷, 9 e = em sequência).

g) $\frac{7}{11}$ =__________________________ (utilize as teclas: 7, ÷, 1, 1 e = em sequência).

h) $\frac{21}{99}$ =__________________________ (utilize as teclas: 2, 1, ÷, 9, 9 e = em sequência).

Observe as representações registradas nesse **<u>bloco</u>** e responda:

- O que podemos observar que existe em comum (de semelhante) nas representações decimais registradas?

  ____

  ____.

- Mais especificamente, com relação à quantidade de casas decimais, o que pode ser observado?

  ____

  ____

  ________________.

<u>BLOCO 3</u>

Com o uso da calculadora, determine e registre as representações decimais que podemos associar a cada raiz quadrada:

i) $\sqrt{3}$ = __________________________ (utilize as teclas: 3, e √ em sequência).

j) $\sqrt{5}$ =__________________________ (utilize as teclas: 5, e √ em sequência).

k) $\sqrt{8}$ =__________________________ (utilize as teclas: 8, e √ em sequência).

l) $\sqrt{2}$ =__________________________ (utilize as teclas: 2, e √ em sequência).

Observe as representações registradas nesse **bloco** e responda:

- O que podemos observar que existe em comum (de semelhante) nas representações decimais registradas? ____ ____ _________________________.

- Mais especificamente, com relação à quantidade de casas decimais, o que pode ser observado? _____________________________ ____ ____.

As representações decimais registradas no **BLOCO 1** são classificadas como exatas. As representações decimais registradas no **BLOCO 2** são classificadas como dízimas periódicas. E as representações decimais registradas no **BLOCO 3** são classificadas como dízimas não periódicas.

A partir do que você observou na realização dessa atividade, escreva o que você considera que caracteriza:

- Uma representação decimal classificada como exata: ____ ____ __________.

- Uma representação decimal classificada como dízima periódica: ____ ____ ____.

- Uma representação decimal classificada como dízima não perió-dica: ____ ____ ___________.

Classifique as representações decimais abaixo em: <u>decimais exatas</u>, <u>dízimas periódicas</u> ou <u>dízimas não periódicas</u>:

- 3,5757575... ________________________
- 4,75 __________________________
- 3,3168247... _________________________
- 0,564 ____________________________
- 5,6666666... _________________________
- 6,9282037... _________________________

Converse com seus colegas de turma e verifique se as respostas dadas por eles são semelhantes às suas respostas.

Você deve ter percebido que a caracterização de uma representação decimal classificada como <u>exata</u> se dá pela presença da vírgula e o número finito de casas decimais. A caracterização de uma representação decimal classificada como <u>dízima periódica</u> se dá por “muitas casas” decimais nas quais há um padrão de repetição. E a caracterização de uma representação decimal classificada como <u>dízima não periódica</u> se dá por “muitas casas” decimais nas quais não há um padrão de repetição.

5.2 Segunda atividade com o uso da calculadora

A atividade a seguir é apresentada como uma sugestão para o uso da calculadora na investigação dos números irracionais que podem aparecer quando calculamos a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE COM O USO DO GEOPLANO

Duração: 100 minutos.

1) Público - alvo: Alunos do 9º ano do ensino fundamental.

2) Pré-requisitos: Conhecimento de formas geométricas planas, conhecimento do teorema de Pitágoras e conhecimentos sobre as representações decimais de um número.

3) Material: Folha de atividade, geoplano[9], régua, calculadora, lápis e elásticos. Observa na figura 28 a ilustração de um geoplano.

Figura 28 – Ilustração de um geoplano.

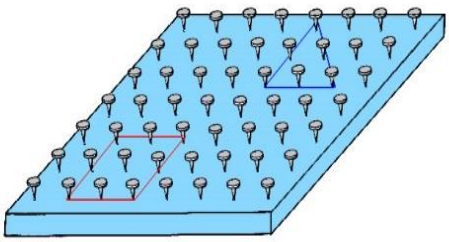


Figura retirada do site: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/geoplano.htm. Acesso em: 21/01/2020 às 12:15.

4) Organização da sala: Arrumar a sala em duplas ou trios de forma que cada dupla ou trio disponha de um geoplano para a realização da atividade.

5) Objetivo: Classificar as representações decimais quanto aos conjuntos dos números racionais ou números irracionais.

6) Instruções para os alunos:

[9] Geoplano é um recurso lúdico para o ensino de geometria. Pode ser construído com uma placa de madeira e pregos dispostos no formato de malha quadricular. Cada prego do geoplano representa um vértice do polígono formado com elástico.

a) Utilizando os marcadores do geoplano, e utilizando os elásticos construa quatro triângulos retângulos da forma que lhe for conveniente. Observe os triângulos construídos pelos seus colegas, são iguais aos seus?

____

____.

b) Identifique o ângulo reto em cada polígono formado a fim de reconhecer os catetos e a hipotenusa em cada um dos triângulos. Denote por "*b*" o cateto de medida maior, por "*c*" o cateto de medida menor e por "*a*" a hipotenusa de cada triângulo. Caso o triângulo formado seja isósceles, considere as medidas *b* e *c* congruentes.

c) Para cada triângulo formado, meça com a régua as medidas dos catetos e da hipotenusa.

d) Preencha a seguinte tabela 1 com as medidas obtidas na aferição com a régua:

Tabela 1

b	c	a

e) Agora com a utilização da calculadora, obtenha e anote os seguintes resultados na tabela 2:

Tabela 2

b^2	c^2	$b^2 + c^2$	a^2

f) Qual a relação entre os valores obtidos nas colunas "a^2 "e "$b^2 + c^2$"?

___________________________________.

g) Qual o teorema matemático nos garante que a relação citada no item anterior deve ser igual, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$?

_________________________________.

h) Todos os triângulos que você construiu no geoplano, satisfazem a igualdade do teorema de Pitágoras?

____

____.

i) Agora, a partir das medidas b e c anotadas na tabela 1, e utilizando o teorema de Pitágoras calcule o valor de a^2 e registre na tabela 3:

Tabela 3

b^2	c^2	a^2

j) Os valores registrados de a^2 na tabela 3, correspondem aos valores registrados para a^2 registrados na tabela 2. Quais?

____

____.

k) Utilizando a tabela 3, calcule (usando a calculadora) e anote o valor de $\sqrt{a^2}$ na tabela 4:

Tabela 4

$\sqrt{a^2}$

l) Foram encontradas representações decimais nos resultados anotados sobre “$\sqrt{a^2}$ “ na tabela 4? Quais?

____

____.

m) Quais as características que você consegue listar com relação às representações decimais anotados na coluna “ $\sqrt{a^2}$ “?

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

n) Como você classifica essas representações decimais, baseado na lista feita no item anterior?

____.

o) Os valores para $\sqrt{a^2}$ anotados na tabela 4 são iguais aos valores de a anotados na tabela 1?

____.

p) A quais fatores podemos atribuir a resposta dada no item anterior?

____

____.

q) Converse com seus colegas de turma e verifique se suas respostas são semelhantes as dadas por eles.

Você deve ter percebido que os valores calculados de $\sqrt{a^2}$ anotados na tabela 4, muitas vezes são diferentes das medidas anotadas de a na tabela 1. Você deve ter percebido também que, muitas vezes, os valores de “a^2” e “$b^2 + c^2$” anotados na tabela 2 apesar de terem igualdade garantida pelo teorema de Pitágoras são diferentes.

Isso se deve ao fato de a medida da hipotenusa em alguns triângulos construídos serem números irracionais.

É importante o professor que está mediando e orientando a atividade, a fim de proporcionar a aprendizagem significativa do aparecimento de números irracionais a partir da relação pitagórica, falar um pouco sobre a incomensurabilidade dos números irracionais conforme consta na seção 4.4 deste trabalho.

6
DOS RESULTADOS DA ATIVIDADE EM SALA

Com base nos questionários entregues pelos alunos, após a realização da atividade da seção 5.1 foi possível fazer a seguinte síntese das respostas obtidas:

- Com relação a primeira pergunta do bloco 1:

  A presença da vírgula nos resultados obtidos foi apontada como a semelhança nos resultados pela maioria dos alunos. As principais respostas obtidas foram “a vírgula”, “todos os números têm vírgula” e “são números decimais”.

- Com relação a segunda pergunta do bloco 1:

  A maioria dos alunos de certa forma observou a finitude dos resultados. Essa finitude foi traduzida na forma das seguintes respostas: “poucas casas decimais”, “os números têm fim” e “1 ou 2 casas decimais “.

- Com relação a primeira pergunta do bloco 2:

  A semelhança mais apontada pelos alunos foi a presença de “muitas casas” decimais nos resultados obtidos, essa representação infinita chamou mais a atenção deles do que a presença da vírgula. Muitos também apontaram a repetição dos algarismos nas casas decimais como a semelhança nos resultados obtidos nesse bloco.

- Com relação a segunda pergunta do bloco 2:

  A grande quantidade de casas decimais foi resposta dada por quase totalidade dos alunos. Uma outra resposta obtida também foi “são muitas casas decimais”.

- Com relação a primeira pergunta do bloco 3:

  Além da representação decimal com muitas casas decimais, a não repetição dos algarismos decimais foi uma das semelhanças apontados pelos alunos. Outra resposta importante dada por alguns alunos é que os resultados obtidos não são números decimais exatos.

- Com relação a segunda pergunta do bloco 3:

  Semelhantemente a segunda pergunta do bloco 2, a resposta dada por quase totalidade dos alunos foi que são “muitas casas decimais”.

- Com relação a caracterização dos decimais exatos, das dizimas periódicas e das dízimas não periódicas:

  Esses foram os itens nos quais os alunos tiveram maior dificuldade e necessitaram de mais orientação para responder. Primeiramente foi necessário explicar o que significa caracterizar alguma coisa. E também esses itens dependiam de um retorno aos blocos já respondidos.

  Porém mesmo com as dificuldades apresentadas foi possível obter uma caracterização satisfatória dos itens questionados. Essa caracterização foi satisfatória porque mesmo que não houvesse o rigor matemático as respostas obtidas concretizaram a apreensão significativa da caracterização das representações decimais presentes no currículo do ensino fundamental. O item no qual houve maior semelhança nas respostas dadas foi o referente às dízimas periódicas.

  Em síntese as respostas dadas em cada item foram:

  - Números decimais exatos: “número que apresenta vírgula e poucas casas decimais”.

  Nesse item muitos alunos responderam também que são números que apresentam a vírgula e não tem representação decimal infinita.

  - Dízimas periódicas: “números com muitas casas repetidas após a vírgula”.

  Variação para a resposta dada foi “muitas casas decimais repetidas”.

  - Dízimas não periódicas: “números com muitas casas decimais sem repetição”.

  Analogamente à caracterização das dízimas periódicas, vários alunos usaram o termo “muitas casas decimais” em suas respostas contudo o fato de não haver um padrão de repetição das casas decimais foi observado por quase a totalidade dos participantes da atividade.

- Com relação à classificação dos resultados encontrados em decimais exatos, dízimas periódicas ou dízimas não periódicas foram obtidas respostas corretas por quase todos os alunos, com poucas exceções de alunos que não responderam por falta de comprometimento com a atividade. Acreditamos que isso se deve ao fato dos conceitos de decimais exatos, dízimas periódicas e dízimas não periódicas terem sido construídos ao longo da atividade.

7
DAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia principal desse trabalho foi apresentar alternativas metodológicas para se trabalhar conteúdos relativos às representações decimais de um número na educação básica.

Alternativas essas fundamentadas em três teorias educacionais de grande importância: as representações semióticas, o sócio-construtivismo e a aprendizagem significativa.

Essa ideia teve como motivação o cotidiano em sala de aula, no qual o professor se depara com as mais diversas dúvidas relacionadas a esses conteúdos.

Essas alternativas se traduzem na apresentação de duas atividades propostas. Dentre elas uma foi aplicada em sala de aula, e a outra é apresentada como uma sugestão interessante para associar os números irracionais aos triângulos retângulos. Em ambas as atividades é explorado o uso da calculadora. Consideramos essa ferramenta muito importante nos estudos sobre as representações decimais.

A aplicação da atividade da seção 5.1 foi interessante em alguns aspectos. Primeiramente, muitos alunos ainda não tinham tido um contato efetivo com uma calculadora digital, na forma de um aparelho isolado. A maioria conhecia apenas o aplicativo que tinham em seus celulares. Então foi gratificante ver o interesse deles por um equipamento desconhecido. Foi necessário explicar as coisas mais básicas tais como: ligar o aparelho, tirar o som e manuseá-lo para realizar contas utilizando as operações básicas.

A interação entre os alunos no decorrer da atividade foi outro aspecto fascinante, pois a partir dessa interação foi possível obter os resultados satisfatórios apresentados no capítulo anterior.

Além disso, a atividade despertou o interesse dos alunos com relação a representação dos números. Acreditamos que isso se deva ao protagonismo dado a esses alunos durante a execução da atividade. Consideramos esse aspecto algo de muito valor, pois como professores devemos sempre despertar o interesse de nossos alunos para novos conteúdos.

Portanto concluímos que a calculadora pode ser considerada um excelente instrumento inerente ao processo ensino-aprendizagem relacionado às representações decimais dos números e iluminar suas classificações em racionais ou irracionais.

Pois os alunos, que participaram de forma ativa na realização da atividade da seção 5.1, adquiriram uma aprendizagem significativa com relação a esses conteúdos, como podemos notar na síntese apresentada no capítulo 6.

8
ANEXO I
TRANSFORMAÇÃO DE DÍZIMA PERIÓDICA EM FRAÇÃO GERATRIZ.

As dízimas periódicas podem ser simples ou compostas.

1- DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES

As dízimas periódicas simples são aquelas nas quais o período aparece logo após a vírgula. Por exemplo: 2,161616..., observe que nessa representação decimal periódica os algarismos que formam o período são 1 e 6 e eles aparecem logo após a vírgula.

Para determinarmos a fração geratriz referente a essa dízima, podemos seguir o seguinte passo - a - passo:

1º) Chamamos essa dízima de x, obtendo a equação (1):
x = 2, 161616....

2º) Multiplicamos ambos os lados da equação por 10^2, pois são dois algarismos que formam o período dessa dízima. Obtendo assim a equação (2):
100 x = 216,161616....

3º) Realizamos a subtração (2) – (1):
100 x = 216, 161616...
-      x =   2, 161616...

4º) Obtendo a seguinte equação (3):
99 x = 214

5º) Resolvendo a equação (3) temos que a dízima 2, 161616... é equivalente à fração $\frac{214}{99}$.

É importante ressaltar que no 2º passo o expoente da potência de 10 usado deve ser igual ao número de algarismos que formam o período da dízima, pois o objetivo é anular a parte decimal quando realizamos o 3^3 passo.

2 – DÍZIMAS PERIÓDICAS COMPOSTAS

As dízimas periódicas compostas são aquelas nas quais existe uma parte não periódica entre a vírgula e o período. Por exemplo: 3, 8121212..., observe que a parte não periódica dessa representação decimal é o algarismo 8 e o período dessa dízima periódica é formado pelos algarismos 1 e 2.

Para transformar essa dízima periódica composta em fração podemos seguir um passo - a - passo semelhante ao usado no caso da dízima periódica simples. Observe:

1º) Chamamos a dízima periódica composta de x, obtendo a equação (1):

x = 3, 8121212....

2º) Multiplicamos ambos os lados da equação (1) por 10^3. Obtendo assim a equação (2):

1000 x = 3812, 121212...

3º) Observe que as partes decimais de (1) e (2) não estão igualadas. Para que possam estar igualadas multiplicaremos a equação (1) por 10^1, observe que a parte não periódica é formada por apenas um algarismo. Obtendo assim a equação (3):

10 x = 38, 121212...

4º) Realizamos a subtração (2) – (3):

1000 x = 3812, 121212...

-   10 x =   38, 121212....

5º) Obtendo como resultado a equação (4):

990 x = 3774

\`   6º) Resolvendo a equação (4) temos que a dízima periódica composta 3, 8121212... é equivalente à fração $\frac{3774}{990}$.

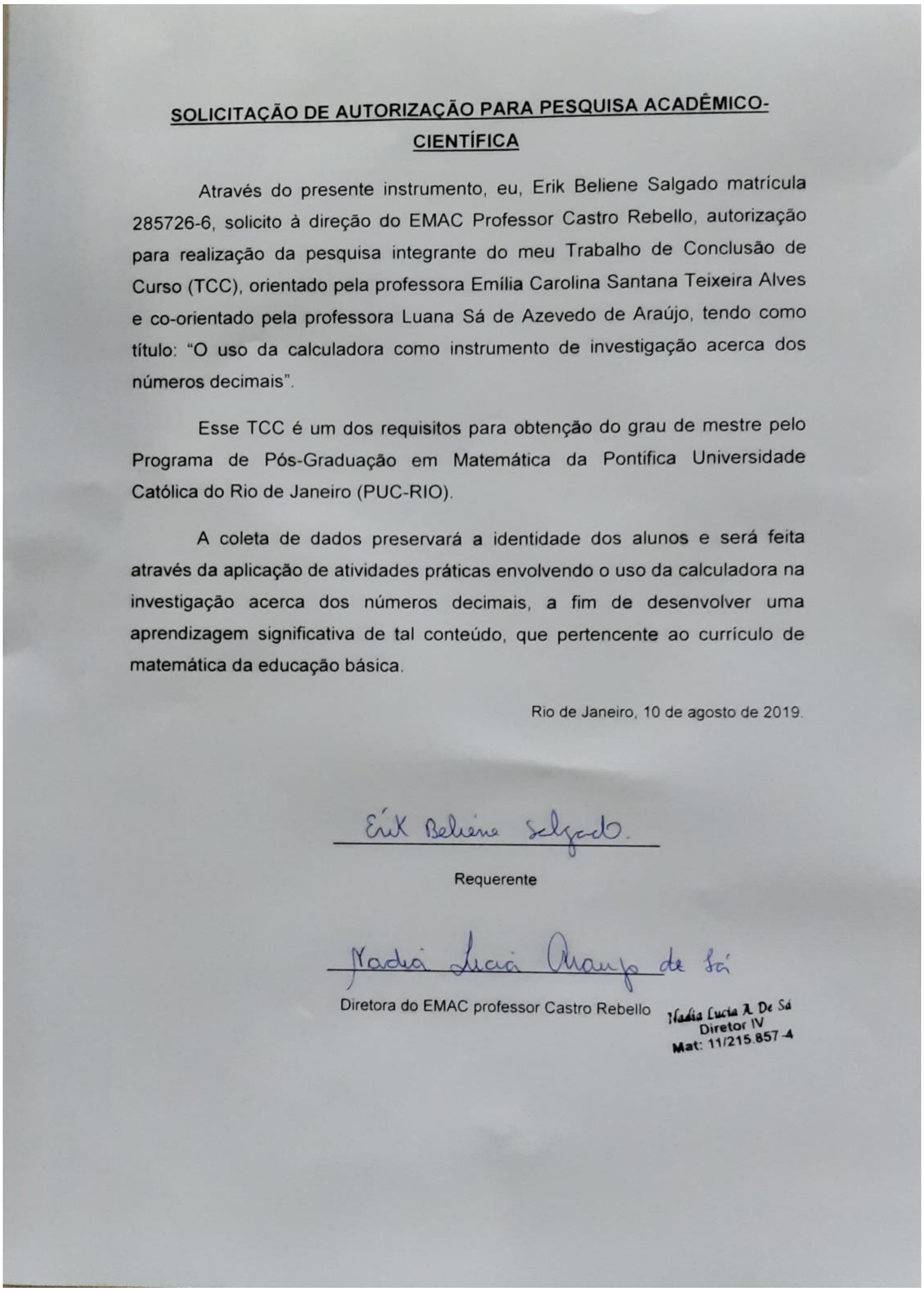
É importante ressaltar que o expoente da potência de 10 usada no 3º passo foi 3 porque a parte não periódica dessa dízima é formado por um algarismo e o período dessa dízima é formado por dois algarismos. A potência de 10 nesse passo deve ser igual a soma do número de algarismos da parte não periódica e o número de algarismos da parte periódica.

9

ANEXO II

AUTORIZAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DA ATIVIVIDADE DA SEÇÃO 5.1 NA EMAC PROFESSOR CASTRO REBELLO

Figura 29- Autorização para a realização da atividade da seção 5.1 na EMAC Professor Castro Rebello.



SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA ACADÊMICO-CIENTÍFICA

Através do presente instrumento, eu, Erik Beliene Salgado matrícula 285726-6, solicito à direção do EMAC Professor Castro Rebello, autorização para realização da pesquisa integrante do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), orientado pela professora Emília Carolina Santana Teixeira Alves e co-orientado pela professora Luana Sá de Azevedo de Araújo, tendo como título: "O uso da calculadora como instrumento de investigação acerca dos números decimais".

Esse TCC é um dos requisitos para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Pontifica Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO).

A coleta de dados preservará a identidade dos alunos e será feita através da aplicação de atividades práticas envolvendo o uso da calculadora na investigação acerca dos números decimais, a fim de desenvolver uma aprendizagem significativa de tal conteúdo, que pertencente ao currículo de matemática da educação básica.

Rio de Janeiro, 10 de agosto de 2019.

Erik Beliene Salgado.

Requerente

Nadia Lucia Araujo de Sá

Diretora do EMAC professor Castro Rebello

Nadia Lucia A. De Sá
Diretor IV
Mat: 11/215.857-4

10
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DIOGINIS, Maria Lucineide *et al*. As Novas Tecnologias No Processo De Ensino Aprendizagem *In*: Encontro Nacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, UNIOESTE, 20º edição, 2015, Presidente Prudente/ SP. **Anais Eletrônicos...** Disponível em: http://www.unoeste.br/site/enepe/2015/suplementos/area/Humanarum/Educa%C3%A7%C3%A3o/AS%20NOVAS%20TECNOLOGIAS%20NO%20PROCESSO%20DE%20ENSINO%20APRENDIZAGEM.pdf Acesso em: 19 jan. 2020.

- BUENO, Francisco da Silveira *et al*. Dicionário Escolar da Língua Portuguesa, 11ª edição Rio de Janeiro, FAE, 1986.

- SOUZA, Sabrina Moreira de. O Uso Do Ábaco No Ensino Da Matemática: Uma Experiência Na Formação Em Nível Médio De Docentes, Revistas Eletrônicas da PUC - SP, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/31635/22028 Acesso em: 21 jan. 2020.

- MARCOLIN, Neldson. Máquina de calcular: Invenção do matemático francês Blaise Pascal completa 360 anos, Revista Pesquisa Fapesp, 75ª edição, 2002. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/2002/05/01/maquina-de-calcular/. Acesso em 17 março 2020.

- NOGUEIRA, Michele. Primeira Calculadora Eletrônica. Estudo Prá-tico, 2015. Disponível em: <https://www.estudopratico.com.br/ primeira-calculadora-eletronica/>. Acesso em: 17 março 2020.

- BRASIL. Senado Federal. Lei Das Diretrizes e Bases Da Educação Nacional nº 9394/96. Brasília: 1996.

- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular Comum: Educação é Base. Brasília, MEC, 2017.

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

- RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. Descritores de Matemática 6º ao 9º ano, 2018.

- LIMA, Elon Lages *et al*. A Matemática Do Ensino Médio, Volume I, 10ª edição, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

- BIANCHINI, Edivaldo. Matemática Bianchini 8ª edição, São Paulo, Moderna, 2015.

- MALTA, Ioci; LOPES, Helio; PESCO, Sinésio. Cálculo a Uma Variável: Uma Introdução ao Cálculo. 1ª ed., Rio de Janeiro, Elsevier, PUC-Rio 2015.

- SILVEIRA, Ênio. Matemática: compreensão e prática. 3ª ed., São Paulo, Moderna, 2015

- WENDPAP, Bruna; BASTIANI, Fernanda; GUZZO, Sandro. Uma abordagem histórico-matemática do número pi (π). *In*: SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, UNIOESTE, 22ª edição, 2008, Cascavel/PR. **Anais Eletrônicos...** Disponível em: http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/19.pdf Acesso em: 19 jan. 2020.

- SCHLICKMANN, Luciane; SCHMITZ, Lenir Luft. Da escola tradicional á escola contemporânea: algumas considerações sobre a constituição do espaço escolar. *In*: Semana de Iniciação Científica, UERJ, 6ª edição, 2003, Rio de Janeiro/RJ. **Anais Eletrônicos...** Disponível em: http://faifaculdades.edu.br/eventos/SEMIC/6SEMIC/arquivos/resumos/RES27.pdf Acesso em 21 jan. 2020.

- Duval, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993.

- FINO, Carlos Nogueira. Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas, Revista Portuguesa de Educação, vol. 14, nº2, 2001, p. 273, Instituto de Educação e Tecnologia, Universidade do Minho. Disponível em http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes/11.pdf Acesso em 05 de fev. 2020.

- AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. Psicologia educacional. (trad.. de Eva Nick et al.) Rio, Interamericana, 1980. 625 p.

- KLAUSEN, Luciana dos Santos. Aprendizagem significativa: um desfio. *In*: Congresso Nacional de Educacional, 12ª edição, PUC – PR, 2017, Curitiba/ PR. **Anais Eletrônicos...** Disponível em: https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/25702_12706.pdf Acesso em: 21 jan. 2020.